Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

UNA PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE PROFESORES UNIVERSITARIOS

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática

ROSA DELGADO REBOLLEDO

Tesis dirigida por
Dra. Diana Zakaryan

Valparaíso – CHILE
2020

UNA PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE PROFESORES UNIVERSITARIOS

de

Rosa Delgado Rebolledo

TESIS DOCTORAL
presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 9 de septiembre ante la Comisión de Tesis integrada por:

Dra. Leticia Sosa, Universidad Autónoma de Zacatecas, Profesora externa
Dr. Manuel Goizueta, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesor interno
Dr. Arturo Mena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesor interno
Dra. Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Directora de tesis

Año 2020

CHILE

Agradecimientos

Gracias al acompañamiento de mis profesores y compañeros del doctorado quienes desde su experiencia como investigadores ayudaron a refinar mis ideas.

Agradezco a los profesores informantes que fueron muy amables al permitirme entrar a sus salas de clase y con gran disposición compartieron sus conocimientos conmigo.

Mis más sinceros agradecimientos a la profesora Diana Zakaryan, la mejor asesora de tesis que se puede tener en la vida. Gracias por todas sus enseñanzas académicas, pero, ante todo, por escucharme y apoyarme cada vez que lo necesité a nivel personal. Su gran calidad humana hizo que todo el trabajo que implicó esta tesis fuera más divertido. Gracias por ser parte de este bonito proyecto y de mi desarrollo como investigadora. ¡Gracias por ayudarme a resolver mis preguntas existenciales! Definitivamente, el buen ambiente de trabajo que creamos se ve reflejado en los resultados de esta tesis y en todo lo que hemos escrito juntas. ¡Gracias! ¡Muchas Gracias! Y espero que sigamos compartiendo e investigando.

Gracias al profesor José Carrillo con quien desarrolle mi pasantía doctoral. Fue un agrado aprender de un gran investigador y una excelente persona como él.

Gracias a los profesores Arturo Mena, Manuel Goizueta y Leticia Sosa que con sus correcciones, comentarios y sugerencias aportaron a la mejora de este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigas y amigos chilenos. Gracias por enseñarme que es mejor tener amigos que plata. Voy a extrañar las juntas, las largas discusiones, las charlas de desahogo y los momentos de risa. Gracias por abrirme las puertas de sus casas y de sus vidas. Me llevo hermosos recuerdos de ustedes, de Valparaíso y de Chile. Los quiero mucho.

¡A todos, gracias!

Este trabajo esta dedicado a todos los que creyeron y siguen creyendo en mi.

A Jesús. Has sido muy generoso al compartir tu bonito ser conmigo. Agradezco cada abrazo que me has dado y cada palabra que me has dicho en el momento justo. ¡Gracias por dejarme ser! Gracias por todos estos años en los que me has regalado una cantidad incontable de momentos felices. Gracias por escucharme horas y horas hablar del KPM y en vez de aburrirte, te involucraste, cuestionándome e intentando responder mis preguntas. Y como le dijo Eréndira a Ulises: lo que más me gusta de ti, es la seriedad con la que inventas disparates.

A Alma Teresa, Carlos y Sara Lucía. Sin importar la distancia siempre fueron mi mayor apoyo y hacían que todo fuera más fácil. No hay palabras para describir lo importante que son para mi ¡Gracias por tanto y por todo! Me siento muy afortunada de contar ustedes en mi vida. Los amo al infinito y más allá.

Esta investigación se realizó con ayuda del financiamiento otorgado por la Beca de Doctorado Nacional CONICYT-2017 Folio 21170442.

Índice

Introducción 1

Capítulo 1. La problemática de la categorización del conocimiento de la práctica matemática 5

1.1. La práctica matemática 5

1.2. El conocimiento del profesor de la práctica matemática 9

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación 13

Capítulo 2. Construcción de categorías del conocimiento de la práctica matemática 15

2.1 El paradigma interpretativo 15

2.1.1 La teoría fundamentada como perspectiva metodológica 16

2.2 Recogida y análisis de datos 19

2.2.1 Los profesores informantes 19

2.2.2 Observación de clases 20

2.2.3 Análisis inicial de las sesiones de clase 21

2.2.4 Entrevistas 22

2.2.5 Transcripciones 23

2.3 Codificación y categorización 25

2.4 Criterios de rigor 29

Capítulo 3. Categorías del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios 31

3.1 El conocimiento de la práctica matemática de los tres profesores universitarios 31

3.1.1 El conocimiento de la práctica matemática de Diego 31

3.1.2 El conocimiento de la práctica matemática de Juan 37

3.1.3 El conocimiento de la práctica matemática de Andrés 45

3.2 Subcategorías de conocimiento de la práctica matemática 49

3.2.1 Desarrollo de demostraciones 49

3.2.2 Métodos y tipos de demostración 53

3.2.3 Roles de la demostración 58

3.2.4 Construcción de definiciones 62
3.2.5 Características de la definición 63
3.2.6 Estrategias heurísticas de resolución de problemas 65
3.2.7 Significado y uso de los símbolos 69
3.2.8 Uso del lenguaje matemático 71
3.3 Categorías de conocimiento de la práctica matemática 73

Capítulo 4. Conocimiento de la práctica matemática: Discusión y conclusiones 76
4.1 Categorías del conocimiento de la práctica matemática: Discusión 76
4.1.1 Conocimiento de la práctica de demostrar 76
4.1.2 Conocimiento de la práctica de definir 78
4.1.3 Conocimiento de la práctica de resolver problemas 79
4.1.4 Conocimiento del papel del lenguaje matemático 81
4.2 El subdominio del conocimiento de la práctica matemática: Conclusiones 82

Referencias Bibliográficas 88
Anexo 1: Transcripciones de episodios de clase y entrevistas 102
Anexo 2: Categorías de conocimiento de la práctica matemática 168

Introducción

Desde los años noventa, los investigadores en educación se han interesado en estudiar el conocimiento que los profesores manifiestan en sus prácticas de enseñanza de las asignaturas del currículo escolar, siendo una de las propuestas teóricas más relevantes en esta línea de estudio la desarrollada por Shulman (1987). El autor define siete categorías de conocimiento base para la enseñanza: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento del currículo, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos y conocimiento de los fines educativos, propósitos y valores y sus fundamentos filosóficos e históricos. Para el caso de las matemáticas, en el periodo comprendido entre 1990 y 2008, se desarrollaron varios modelos de conocimiento del profesor tomando como referente las categorías de conocimiento descritas por Shulman. Entre estos modelos podemos mencionar la conceptualización de Fennema y Franke (1992); la topología de las áreas del conocimiento del profesor de matemáticas (Broome, 1994); el cuarteto de conocimiento (KQ, por sus siglas del inglés *Knowledge Quartet*) desarrollado por Rowland, Huckstep, y Thwaites (2005); el modelo de matemáticas para la enseñanza (MfT, por sus siglás del inglés *Mathematics for Teaching*) propuesto por David y Simmt, 2006); y el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas del inglés *Mathematical Knowledge for Teaching*) descrito por Ball, Thames y Phelps (2008).

Aunque en los distintos modelos el dominio de conocimiento de la materia recibe diferentes nombres —como conocimiento de las matemáticas, conocimiento de la matemática escolar, fundamentos, conocimientos estables, o conocimiento del contenido— el elemento común es la consideración de que dichos dominios incluyen el conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos. No obstante, en las distintas propuestas también se consideran elementos adicionales en el conocimiento de la materia, tales como el conocimiento de los procesos de resolución de problemas (Fennema y Franke, 1992), el conocimiento de la matemática como disciplina (Broome, 1994), y el conocimiento especializado del contenido y en el horizonte matemático (Ball et al., 2008). Adicionalmente, elementos del conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas del inglés, *Pedagogical Content Knowledge*) se reflejan en las categorías fundamentos, transformaciones y contingencias del modelo KQ (Turner, 2012), mientras que en el modelo MfT no se adopta el PCK puesto que Davis (2010) interpreta esta noción como una perspectiva cognitiva e individual del conocimiento del profesor, y su postura es que el conocimiento del profesor de matemáticas es, en gran parte tácito, pero los elementos críticos del mismo pueden aparecer ante cuestionamientos suscitados en entornos colectivos. También se observa que en el modelo de Broome se establece una diferencia entre dos tipos de conocimiento pedagógico: el general y el específico de la materia. Esta idea de conocimiento pedagógico específico de la materia apunta hacia un PCK particular de la enseñanza de las matemáticas, de manera similar a lo planteado por Ball y sus colegas en el modelo MKT. La idea de PCK desarrollada por Ball et al. (2008) se construye como una validación empírica en el campo de la enseñanza de las matemáticas y en el nivel de educación primaria, de la noción teórica de PCK descrita por Shulman. Esta propuesta es probablemente una de las reconceptualizaciones más influyentes del PCK en matemáticas (Depaepe, Verschaffel y Kelchtermans, 2013).

Por su parte, Flores, Escudero y Carrillo (2013) señalan, como un aporte teórico del MKT, la inclusión del subdominio del conocimiento especializado del contenido que identifica un tipo de conocimiento del profesor en términos que son puramente matemáticos y específicos de su profesión. Adicionalmente, el MKT ha sido adoptado por numerosos investigadores al punto que podría describirse como uno de los marcos teóricos más importantes en la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (Lin y Rowland, 2016). Este amplio uso del modelo como referente teórico ha traído consigo el desarrollo de nuevas conceptualizaciones del conocimiento del profesor de matemáticas, muchas de ellas provenientes de la combinación del MKT con otros marcos teóricos. Por ejemplo, en el trabajo de Godino (2009) se fusionan categorías de conocimiento del profesor (principalmente tomadas del MKT) con el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero, y Font, 2007) dando como resultado el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Siguiendo esta idea de extender el MKT, Cooper (2014) propone utilizar el modelo en compañía del marco de la comognición (Sfard, 2008) para estudiar no sólo el conocimiento sino el aprendizaje de los profesores en un contexto de desarrollo profesional. De acuerdo con el autor, al estudiar los discursos en torno a la matemática y su enseñanza también se está comprendiendo el conocimiento del profesor. Asimismo, Chapman (2015) señala que el trabajo de Ball y sus colegas ofrece una visión general del conocimiento del profesor en la cual se pueden incluir otros aspectos centrales para hacer y aprender matemáticas tales como la resolución de problemas. Así, el autor describe el modelo *Mathematical Problem-Solving Knowledge for Teaching*. Por su parte, Getenet, Beswick y Callingham (2015) utilizan el MKT y el constructo conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (Mirsha y Kohler, 2006) para construir un modelo de conocimiento para la enseñanza de la matemática con la aplicación de la tecnología denominado STAMPK (*Specialised Technological and Mathematics Pedagogical Knowledge*).

Por otra parte, los mismos autores del MKT expresan algunas dificultades en la delimitación de los subdominios del modelo. En el caso del conocimiento en el horizonte matemático (Horizont Content Knowledge, HCK), este es descrito como el conocimiento del profesor sobre la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de diversas etapas educativas, así como las conexiones de los contenidos dentro de las matemáticas o con otras ciencias. Sin embargo, Ball y colaboradores (2008) señalan no estar seguros de cuándo el HCK se cruza con otros subdominios de conocimiento. En respuesta a lo anterior, Fernández y Figueiras (2014) proponen repensar el HCK y considerarlo no como otro subdominio del modelo sino como un conocimiento que da forma al MKT desde el punto de vista de una educación matemática continua, pues permite indagar en el rol del conocimiento profesional del profesor de matemáticas durante la transición de primaria a secundaria. Desde esta postura, el HCK es independiente de los conocimientos presentes en el MKT que pueden ser adquiridos aislados de la práctica docente y ejerce influencia en los demás subdominios que son conocimientos que se expresan únicamente en la práctica de enseñanza y en la observación de la práctica de enseñanza de otros.

Otra dificultad de delimitación se presenta con los subdominios del conocimiento común y del conocimiento especializado del contenido. El conocimiento común del contenido se describe como aquel que comparten los profesores con otros usuarios de la matemática, como profesionales o adultos educados. En contraste, el conocimiento especializado del contenido es un conocimiento específico del profesor de matemáticas, que tiene sentido solo para fines de enseñanza. Así, el conocimiento especializado del contenido se comprende como una extensión del conocimiento común, y esta definición puede ser convincente como una heurística, pero, en casos particulares, es difícil diferenciar estos conocimientos (Ball et al., 2008). Por ejemplo, las tareas que se describen en el MKT como un conocimiento matemático descomprimido, y por tanto especializado, como dar sentido a las ideas y los razonamientos presentados por otros, son tareas que se espera que cualquier matemático profesional sea capaz de realizar en su labor diaria pero que también pueden ser desarrolladas por un profesor universitario durante una clase o al revisar un examen (Speer, King, y Howell, 2014). Además, temas como el razonamiento sobre procesos y nociones, que habitualmente se consideran parte del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, también forman parte del conocimiento que se espera que los estudiantes obtengan en el nivel de educación superior. En este sentido, al considerar el conocimiento común del contenido como el conocimiento que tiene un adulto bien instruido al nivel escolar que se esté analizando, se presenta una dificultad para especificar qué constituye el conocimiento común y el especializado, respectivamente, en el caso de los profesores universitarios (Carrillo et al., 2018). Carrillo, Montes, Conteras y Climent (2017) profundizan en la idea de conocimiento especializado del contenido y proponen la noción de conocimiento especializado como aquel que es útil para el profesor en contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin importar si este conocimiento, o parte de él, es compartido con otros. Esta forma de entender la especialización supone un cambio de perspectiva de un punto de vista extrínseco a uno intrínseco del conocimiento del profesor de matemáticas (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019), y es central en la conceptualización del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK).

El *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) es un modelo teórico y analítico para comprender el conocimiento que manifiesta el profesor de matemáticas en los diferentes escenarios en los que actúa. El modelo está compuesto por tres dominios con sus respectivos subdominios; un dominio de conocimiento matemático; un dominio de conocimiento didáctico del contenido; y un dominio de creencias del profesor sobre qué es la matemática, cómo se enseña y cómo los estudiantes la aprenden. El dominio de conocimiento matemático es definido en términos de la matemática misma (temas, conexiones y formas de proceder en matemáticas) y además puede ser utilizado para estudiar el conocimiento matemático del profesor en cualquier nivel educativo. En cuanto al dominio del conocimiento didáctico del contenido, este es un tipo específico de conocimiento de las matemáticas como un objeto de aprendizaje, un objeto de enseñanza y desde el punto de vista de los estándares de aprendizaje.

Entre las componentes del dominio de conocimiento matemático, se encuentra el conocimiento de la práctica matemática, el único subdominio del modelo MTSK que no cuenta con categorías de análisis y el cual abordamos en esta tesis doctoral. Así, en el primer capítulo *La problemática de la categorización del conocimiento de la práctica matemática* se presenta una revisión de la literatura sobre la noción de práctica matemática y se expone la idea inicial de práctica matemática considerada en la investigación. Posteriormente, se muestra en detalle el subdominio KPM; cómo surge, cómo se describe en el modelo MTSK, cuál es su importancia dentro del conocimiento del profesor de matemáticas, qué componentes del subdominio se han reportado en la literatura y por qué su categorización es un tema de investigación relevante. Adicionalmente, la enseñanza de las matemáticas en la educación superior se presenta como un escenario propicio para obtener variadas evidencias del KPM con el fin de proponer una categorización del subdominio en el caso de profesores universitarios.

En consonancia con la problemática de investigación, en el segundo capítulo *Construcción de categorías del conocimiento de la práctica matemática*, se justifica la elección del paradigma de investigación y se expone la Teoría Fundamentada (Charmaz, 2014) como perspectiva metodológica. Se describe, entonces, cómo se seleccionaron los profesores informantes y cómo se llevó a cabo la recogida de los datos y su posterior codificación y categorización con la ayuda del software ATLAS.ti (versión 8.2.4, 2018). En este punto, es importante resaltar que la recolección y el análisis de los datos se desarrolló de manera simultánea según lo propuesto en la Teoría Fundamentada.

Por su parte, en el tercer capítulo, *El conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios*, se expone el análisis del conocimiento de cada uno de los profesores considerados en el estudio, así como las subcategorías y categorías que resultan del análisis conjunto del conocimiento de los profesores estudiados. De este modo, el capítulo se centra en presentar las subcategorías y categorías de KPM de profesores de matemática universitarios que se obtienen como el principal resultado de esta tesis.

Finalmente, en el cuarto capítulo, *Conocimiento de la práctica matemática: discusión y conclusiones*, se discuten las categorías de KPM antes expuestas a la luz de lo que reporta la literatura, en general, sobre el conocimiento del profesor de las prácticas matemáticas que hemos descrito, y en particular, sobre lo que se ha considerado como parte del KPM del profesor de matemáticas en distintos niveles educativos en la investigación con el MTSK. A lo anterior se añaden las conclusiones y proyecciones de esta investigación, incluyendo algunas preguntas abiertas sobre el KPM.

Capítulo 1. La problemática de la categorización del conocimiento de la práctica matemática

A continuación, se describe la problemática de investigación que se aborda en esta tesis doctoral. En la primera sección, se presenta una revisión teórica de la práctica matemática y se describe la conceptualización de práctica matemática que adoptaremos en esta investigación. En la siguiente sección, se expone cómo los estudios sobre el conocimiento sintáctico de una disciplina y el conocimiento sobre las matemáticas sustentan la consideración del conocimiento de la práctica matemática como un subdominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Adicionalmente se plantea el problema de la categorización del KPM y se expone un escenario propicio para profundizar en este subdominio de conocimiento. Para finalizar, la tercera sección del capítulo se dedica a la pregunta de investigación, los objetivos generales y los objetivos específicos del estudio.

1.1. La práctica matemática

Kitcher (1984), basado en la idea de Kuhn (1971) de que de la historía de una disciplina científica y sus cambios se pueden entender como una sucesión de prácticas, propone utilizar la práctica matemática como un concepto importante para comprender el crecimiento del conocimiento matemático. El autor selecciona como componentes de la práctica matemática las cinco características de la actividad matemática que parecen experimentar un cambio significativo: el lenguaje, el conjunto de afirmaciones o proposiciones aceptadas, el conjunto de formas de razonamiento aceptadas, el conjunto de preguntas seleccionadas como importantes (problemas no resueltos) y el conjunto de visiones metamatemáticas (incluyendo estándares para demostrar y definir, y afirmaciones acerca del propósito y la estructura de las matemáticas). En esta línea, el conocimiento matemático se desarrolla a través de la modificación racional de la práctica matemática.

En relación con lo anterior, Cañon (1993) examina los componentes de la práctica matemática propuestos por Kitcher (1984) destacando que el avance en los resultados matemáticos se da de la mano con el avance en el lenguaje, siendo este un factor que mediatiza la comprensión de los contenidos. Adicionalmente, los postulados, axiomas, teoremas o definiciones no son aceptados de manera idéntica en todas las etapas de la matemática, ni por todas las comunidades matemáticas incluso en el mismo tiempo histórico. De manera similar, hay una diferencia entre los métodos de prueba admisibles en los estadios de sedimentación de una teoría y en los de desarrollo inicial de la misma. En cuanto a los problemas dignos de estudio, estos están en dependencia de los otros componentes del quehacer matemático y del tipo de cuestiones cultivadas por una comunidad en concreto. Finalmente, los puntos de vista sobre la naturaleza de las matemáticas, los métodos de prueba aceptados, el tipo de rigor requerido y en general las posiciones epistemológicas y ontológicas sobre la disciplina también son cuestiones relativas al tiempo, aunque quizás la etapa en la que se han puesto de manifiesto más explícitamente haya sido en la busqueda de los fundamentos de la matemática. En este sentido, la autora afirma que los componentes de la práctica matemática interaccionan, dependen del contexto de las comunidades matemáticas activas en los diversos momentos históricos y convierten el proceso de desarrollo de la matemática en un proceso histórico con características propias.

Adicionalmente, Thurston (1994) señala que, aunque la matemática en algún sentido tiene un lenguaje común de símbolos, definiciones técnicas y lógica, tanto el lenguaje como la cultura de las matemáticas están divididos en subcampos o grupos de matemáticos que trabajan en un campo específico y que tienen su propio lenguaje y un conjunto particular de problemas que consideran relevantes. Desde este punto de vista, los elementos de la práctica matemática deberían variar en relación con una determinada comunidad de matemáticos. En esta línea, Burton (1999), luego de indagar en la práctica de investigadores en matemáticas, concluye que hay diferentes formas de entender las matemáticas, pensar acerca de las matemáticas y trabajar en matemáticas, así que no se puede hablar de las prácticas matemáticas como si estas fueran uniformes.

Una idea similar a la anterior es expuesta por Van Bendegem y Van Kerkhove (2004) quienes proponen una extensión del trabajo de Kitcher (1984) señalando que, para estudiar la práctica matemática en su totalidad, la vasta estructura que se tendría que mirar consiste en una comunidad de matemáticos, un programa de investigación, un lenguaje formal, un conjunto de métodos de demostración, un conjunto de métodos argumentativos y un conjunto de estrategias de demostración. La importancia de la comunidad de matemáticos también es resaltada por Ferreiros (2015), que se aleja de la noción de práctica matemática abstracta e incorporeizada que plantea Kitcher (1984) y enfatiza el papel de los practicantes describiendo una práctica como un tipo de actividad que es hecha por agentes humanos, la cual puede ser enseñada y aprendida. De este modo, para el autor, una práctica matemática es lo que la comunidad de matemáticos hace cuando emplea recursos (marcos de referencia simbólicos o conceptuales) y habilidades cognitivas para resolver problemas, demostrar teoremas, dar forma a las teorías y en ocasiones elaborar nuevos marcos teóricos. En consonancia con lo anterior, De Toffoli y Giardano (2016) enfatizan que para estudiar la práctica matemática se debe tener en cuenta la existencia de una comunidad matemática con ciertas capacidades, que mejoran a través de la actividad, que están apoyadas en las habilidades cognitivas de los practicantes y en el uso de representaciones materiales heterogéneas.

Por otra parte, Hanna (2002) señala que, desde el punto de vista de Kitcher (1984), las matemáticas no solo son un corpus de resultados, además son las múltiples formas en que las matemáticas son hechas. Así, la idea de práctica matemática está relacionada con la noción de *hacer matemáticas*, la cual, de acuerdo con Brousseau (1986), consiste en actuar para resolver problemas, formular los procedimientos empleados y demostrar su validez. Bosch y Gascón (1994) postulan que hacer matemáticas es producir y utilizar ciertas técnicas de estudio de ciertos campos de problemas. Los problemas no se conciben aislados y se contemplan campos de problemas que pueden provenir de la propia matemática, de otras disciplinas o del entorno social y cultural. En cuanto a las técnicas, estas se entienden en sentido general como *maneras de hacer*, abarcando desde las técnicas más algorítmicas y visibles hasta las menos conscientes o explicitables como las que se utilizan para modelizar o demostrar.

Adicionalmente, Godino y Batanero (1994) definen una práctica matemática como cualquier acción, expresión o manifestación (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida, validarla, o generalizarla a otros contextos y problemas. Estas prácticas matemáticas (operativas y discursivas), pueden ser idiosincráticas, de una persona o compartidas en el seno de una institución. Los autores además señalan que, para la realización de prácticas matemáticas y la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos (Godino, Batanero y Font, 2007). Así, la práctica como acción orientada a realizar una tarea conlleva a una competencia por parte del sujeto que la realiza. En esta línea, las prácticas matemáticas son descritas como el *saber hacer* en matemáticas; esto quiere decir que son cosas específicas que aprendices y usuarios exitosos de las matemáticas hacen, tales como justificar afirmaciones, usar la notación simbólica eficientemente, definir términos con precisión y hacer generalizaciones (RAND, 2003).

De acuerdo con lo anterior, conocer contenidos, conceptos y procedimientos no equipa a una persona para usar las matemáticas eficientemente, ya que usar las matemáticas implica desempeñarse con habilidad dependiendo del problema que se esté abordando. El término habilidad, en este caso, describe el conjunto de acciones coordinadas para aplicar un conocimiento en una situación en particular, de modo que las prácticas matemáticas involucran tareas interrelacionadas que comparten herramientas comunes, conocimiento base y habilidades. Bass (2011) agrega que, además de las prácticas matemáticas, hacer matemáticas incluye disposiciones, sensibilidades y hábitos mentales característicos de la generación y comprensión de nuevo conocimiento matemático. Para el autor, actividades como cuestionar, explorar, representar, conjeturar, consultar la literatura, hacer conexiones, demostrar y hacer juicios estéticos, son parte de hacer matemáticas.

Complementado las ideas anteriores, Van Oers (2001) se refiere a la actividad matemática como el conjunto de formas de actuar que los humanos han desarrollado para tratar con las relaciones cuantitativas y espaciales de su entorno físico y cultural. Desde esta postura, una práctica matemática es una actividad matemática con los valores, reglas y herramientas adoptadas en una comunidad cultural específica. Estas prácticas contienen acciones y operaciones que se llevan a cabo en ciertas tareas que tienen significado matemático dentro de la comunidad, así como acciones conversacionales que intentan comunicar las operaciones o expresiones matemáticas. En esta línea, Bishop (1997) describe seis actividades observables en cualquier cultura que permiten responder las preguntas y los problemas que provienen del entorno y que estarían a la base del desarrollo del pensamiento matemático: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar. D’Ambrosio (2007) añade que manejar el tiempo y el espacio, definir clasificaciones y comparar son todas las prácticas matemáticas. Adicionalmente, Barton (2004) propone que el conocimiento que implica una práctica de tipo matemática, tiene que ser de alguna forma sistematizado, formalizado y relacionado con cantidades o medición, espacio, formas o patrones y relaciones entre cosas o ideas. El autor señala el carácter matemático de las prácticas que realizan los grupos culturales para abordar determinadas actividades profesionales o cotidianas. Los grupos culturales se refieren a comunidades urbanas o rurales, grupos de trabajadores, profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros que se identifican por objetivos o tradiciones comunes; de este modo, las prácticas matemáticas tienen raíces socio-culturales. Moschkovich (2013) añade que las prácticas matemáticas abarcan prácticas académicas, laborales, recreativas, de ventas callejeras, entre otras. Cordero (2001) también señala las raíces socio-culturales de las prácticas, y en vez de prácticas matemáticas se refiere a la práctica social como el conjunto de acciones intencionales de los grupos humanos para transformar su realidad social y material, las cuales son la base y orientación de los procesos de construcción del conocimiento. La predicción, la modelación y la graficación son ejemplos de prácticas sociales generadoras de conocimiento matemático. La demostración también se considera una práctica social regida por argumentaciones deductivas cuyo objetivo es la validación del conocimiento matemático (Crespo, Farfán y Lezama, 2010).

Por otra parte, Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer (2001) consideran dos aspectos de las prácticas matemáticas, las formas normativas de actuar que han emergido durante extendidos periodos de la historia, y las prácticas matemáticas de aula, emergentes en la actividad de la clase de matemáticas y que son formas compartidas de razonar, argumentar y simbolizar mientras se discuten ideas matemáticas particulares. Una conceptualización similar presentan Wood, Staples, Larsen y Marrongelle (2008), quienes se refieren a prácticas disciplinares en matemáticas como formas en las que los matemáticos validan nuevos conocimientos en el área, las cuales son prácticas de aprendizaje cuando son llevadas al aula. Las descripciones anteriores están en consonancia con la conceptualización de Selling (2016) que reconoce como parte de las prácticas matemáticas tanto las formas de trabajar en el aula co-construidas y emergentes como las formas de trabajo disciplinares; así que, por ejemplo, el uso de las definiciones para construir argumentos es una práctica disciplinar que podría surgir en una clase de primaria o de secundaria. Zandieh, Wawro y Rasmussen (2017) describen las prácticas disciplinares de las matemáticas como las formas en que matemáticos se ocupan de su profesión, lo cual incluye prácticas como definir, conjeturar, demostrar, simbolizar, y crear y usar algoritmos. En esta línea, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) usan la expresión práctica matemática para referirse a las actividades que desarrolla un investigador en matemáticas cuando construye conocimiento matemático durante su investigación.

En los estudios reseñados se aborda la práctica matemática desde diferentes posturas, que incluyen aproximaciones históricas y antropológicas, reportes de experiencias, lectura de trabajos de matemáticos, entrevistas, estudios teóricos o empíricos desde las ciencias cognitivas e investigaciones desde un punto de vista social y cultural. Estas diferentes aproximaciones no se limitan a los usos comunes de la palabra práctica como repetición, ensayo, hábitos o disposiciones, y coinciden en que: las prácticas matemáticas comprenden aspectos sociales y culturales porque surgen de las comunidades y marcan la pertenencia a ellas; tienen elementos cognitivos dado que involucran el pensamiento; y además son semióticas porque incluyen sistemas de signos, herramientas y sus significados (Moschkovich, 2013). Rasmussen y colaboradores (2005) agregan que simbolizar, algoritmizar, definir y justificar son ejemplos de un conjunto útil de prácticas matemáticas claves que atraviesan los dominios matemáticos. De este modo, aunque las prácticas matemáticas pueden tener matices diferentes en un área de contenido particular, algunos de sus aspectos transcienden el contenido matemático.

Adicionalmente, a pesar de las diferentes posturas de los autores sobre cómo se originan y cómo se desarrollan las prácticas matemáticas, las conceptualizaciones antes expuestas coinciden en que estas son actividades que permiten la creación de conocimiento matemático. Esta idea es acorde con la descripción de práctica matemática expuesta por Carrillo y colaboradores (2018): cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente que representa un pilar de la creación matemática y que conforma una base lógica de la cual se pueden extraer reglas. Ejemplos de estas prácticas son demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y entender el rol de los contraejemplos. En esta descripción de práctica matemática resaltamos tres ideas esenciales: la matemática como una actividad; el hecho de que la práctica tiene un referente en la matemática disciplinar; y la creación de conocimiento matemático como resultado de la práctica.

Considerando la revisión teórica realizada y la descripción anterior, proveniente de los trabajos con el MTSK, conceptualizamos una práctica matemática como una actividad matemática basada en las formas de trabajar en la disciplina, que puede desarrollarse alrededor de cualquier contenido matemático (es transversal) y que permite a quien la desarrolla construir, validar y comunicar conocimiento matemático en el contexto educativo. Esta última descripción conserva las tres ideas esenciales expuestas en Carrillo et al. (2018): la conceptualización de la matemática, el referente disciplinar y el resultado de la práctica. El referente disciplinar en este caso se expone de forma explícita, principalmente por la presencia en el sistema escolar de prácticas provenientes de la comunidad de investigadores en matemáticas, pues se espera que estas den información sobre lo que queremos que los estudiantes aprendan (Weber y Dawkins, 2018).

1.2. El conocimiento del profesor de la práctica matemática

En el trabajo de Schwab (1978) se distinguen dos tipos de estructuras en una disciplina; las sustantivas o dispositivos conceptuales (principios y teorías) que son utilizadas en la definición, acotamiento y análisis de la materia; y las estructuras sintácticas que son estructuras lógicas y métodos de verificación y justificación de conclusiones que guían la adquisición de conocimiento disciplinar. Rowland y Turner (2008) agregan que la distinción de Schwab entre conocimiento sustantivo y sintáctico hace referencia a contenidos y procesos respectivamente, no obstante, el conocimiento sintáctico es mucho más amplio de lo que su nombre sugiere, e incluye la naturaleza y las estrategias heurísticas utilizadas para la investigación en un campo de conocimiento.

Basado en las ideas de Schwab, Shulman (1986) señala que el profesor debe tener conocimiento tanto de las estructuras sustantivas de la materia — los conceptos, procedimientos y relaciones entre ellos— así como de las estructuras sintácticas —las formas en que se establece validez, incluyendo cómo el conocimiento está siendo evaluado por los expertos en la disciplina—. A la dimensión sintáctica del conocimiento de la materia es a lo que Ball y McDiarmid (1990) denominan conocimiento sobre la materia el cual agrupa el conocimiento de aquello que está implicado en hacer e involucrarse en el discurso de la disciplina. De esta forma, para el caso de las matemáticas, un elemento crítico del conocimiento sobre la materia es la distinción entre convenciones y construcciones lógicas, así como el conocimiento de actividades fundamentales para hacer matemáticas como justificar afirmaciones, validar soluciones, buscar patrones y generalizar. En este sentido, Ball (1990) describe el conocimiento sobre las matemáticas como un dominio que involucra la comprensión de la naturaleza del conocimiento matemático y de las matemáticas como campo. Esta comprensión incluye responder algunas preguntas, tales como: “¿qué cuenta como una respuesta en matemáticas?, ¿qué establece la validez de una respuesta?, ¿qué está involucrado en hacer matemáticas?, en otras palabras, ¿qué hacen los matemáticos?” (p. 458).

Siguiendo estas ideas, Ball y Bass (2009) consideran una dimensión del conocimiento matemático denominada conocimiento en el horizonte matemático cuya idea central es que la enseñanza de las matemáticas requiere un sentido de cómo las matemáticas en juego en un determinado momento están relacionadas con ideas, estructuras y principios matemáticos más amplios, algunos de los cuales están en el corazón de lo que significa hacer matemáticas y otros tienen que ver con lo que los estudiantes van a aprender en otros cursos. En esta línea, tres elementos componen el conocimiento en el horizonte matemático: uno relacionado con los temas, otro con los valores y sensibilidades básicas para hacer matemáticas, y un componente que tiene en cuenta prácticas matemáticas claves, como usar definiciones y demostrar. Otras prácticas matemáticas señaladas por los autores son: usar la notación simbólica eficientemente, modelizar, elegir representaciones para comunicar ideas matemáticas, usar y comparar definiciones alternativas, establecer correspondencias y equivalencias, cuestionar, y explorar.

Por su parte, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) afirman que:

> “hay un acuerdo entre los investigadores que el profesor ha de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas usualmente abordables por los estudiantes del nivel en el que enseña y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores” (p. 91).

En consonancia con lo anterior, en la literatura se reportan investigaciones sobre el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas como la resolución de problemas (e.g., Chapman, 2015) y modelos teóricos sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la demostración (e.g., Lesseig, 2016; Steele y Rogers, 2012). Adicionalmente, Stylianides, Bieda, y Morselli (2016) recopilan distintos estudios acerca de la naturaleza y el desarrollo del conocimiento sobre la argumentación y la demostración desarrollados en el contexto de la formación inicial o continua de profesores de primaria y secundaria. De este modo, aunque el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas ha sido estudiado, este conocimiento no se había abordado de la forma conjunta en que se propone en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) al incluir el subdominio conocimiento de la práctica matemática (KPM). En el KPM se describe el conocimiento conceptual de las reglas sintácticas de construcción matemática y el conocimiento procedural de cómo hacer matemáticas, esto quiere decir, que el KPM es el conocimiento de las formas de hacer, proceder, conocer, crear o producir en matemáticas (Carrillo et al., 2013; Rojas, Flores y Carrillo, 2015). Oliveros, Pascual, Codes y Martín (2018) agregan que el KPM agrupa el conocimiento del profesor sobre cómo se construyen las matemáticas y cuáles son los distintos tipos de razonamientos y estrategias de las que se sirve la disciplina para generar nuevos saberes.

De este modo, se incluyen en el KPM aspectos de la comunicación matemática, el conocimiento de las características que debe tener un enunciado matemático como una definición, un teorema o un axioma (Carrillo, Montes, Contreras, y Climent, 2017), así como el conocimiento de la argumentación, la demostración y el uso que se hace de los contraejemplos (Flores-Medrano, 2016).

De acuerdo con la descripción anterior, los conocimientos que hacen parte del KPM le permitirían al profesor proponer tareas que involucren a los estudiantes en actividades tales como experimentar, buscar patrones, clasificar, conjeturar, generalizar y formalizar. Al participar en dichas actividades, los estudiantes pueden ampliar su pensamiento y sus formas de razonar lo cual favorecería la construcción de su propio conocimiento matemático y el aprendizaje de las matemáticas. Lo anterior considerando que aprender matemáticas significa participar en diferentes tipos de prácticas matemáticas (Rasmussen, Zandieh, King y Teppo, 2005). En este sentido, Boaler (2002) señala que, cuando los estudiantes se involucran en prácticas de clase y en prácticas matemáticas, desarrollan formas de obtener y usar su conocimiento como parte de su identidad, de modo que prácticas matemáticas como la justificación son importantes en la promoción de la equidad en la enseñanza de las matemáticas (Boaler y Staples, 2008). En esta línea, Wood et al. (2008) señalan que prácticas disciplinares en matemáticas como justificar y argumentar, en el ámbito escolar se convierten en formas por las cuales los estudiantes mejoran su comprensión de las matemáticas y su proeficiencia en hacer matemáticas.

Por otra parte, los profesores que tienen dificultades para reconocer patrones y relaciones, formular expresiones para representar esas relaciones y proveer justificaciones matemáticas convincentes no podrían alertar a los estudiantes de la necesidad de construir argumentos generales en vez de presentar algunos ejemplos como una demostración (Goulding, Rowland y Barber, 2002). Del mismo modo, el conocimiento de prácticas matemáticas como demostrar le posibilita al profesor intencionar en los estudiantes la adquisición del pensamiento lógico y de habilidades de razonamiento y prueba, las cuales de acuerdo con Ball, Hoyles, Jahnke, y Movshovitz-Hadar (2002) se consideran importantes para el aprendizaje de las matemáticas en cualquier grado escolar. Adicionalmente, Ball y Bass (2003) señalan que el razonamiento matemático ayuda a los estudiantes a hacer conexiones entre el conocimiento nuevo y el conocimiento existente lo cual produce una integración. De acuerdo con Brodie (2010) la integración puede dar sentido a la actividad matemática y hacer que los estudiantes la vean como algo provechoso. Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012) agregan que realizar demostraciones conlleva a que los estudiantes desarrollen un amplio entendimiento de los conceptos matemáticos. Además, Stylyanides y Ball (2008) señalan que podría ser importante que los profesores tuvieran conocimiento acerca de la demostración para movilizar oportunidades de que sus estudiantes realicen demostraciones en el contexto de tareas particulares. Similarmente, Stylianides, Stylianides y Weber (2017) afirman que, así como la demostración juega un rol en el campo de las matemáticas, es (o debería ser) indispensable para que los estudiantes participen de forma significativa en las matemáticas escolares. De este modo, cuando se incluye la práctica de demostrar en la escuela no se hace porque los estudiantes son vistos como pequeños matemáticos, sino porque se considera su potencialidad para la comprensión de las matemáticas.

Sumando a lo anterior, el KPM es un conocimiento que permite al profesor gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus estudiantes, aceptándolos, refutándolos o refinándolos si fuese necesario (Carrillo et al., 2018). Adicionalmente, al ser un conocimiento sobre el funcionamiento de las matemáticas, el KPM da soporte o condiciona la aparición de otros subdominios del conocimiento especializado del profesor, en particular subdominios de su conocimiento didáctico del contenido (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). A pesar de esta importancia del KPM en el conocimiento del profesor de matemáticas este es el subdominio menos abordado en las investigaciones con el MTSK desarrolladas con profesores de distintos niveles educativos (Escudero-Domínguez, Joglar, Corrêa y Reyes, 2016). Similarmente, en la recopilación realizada por Zakaryan y Sosa (2019) se muestra que, en comparación con otros subdominios, son escasas las evidencias de KPM en las clases de matemáticas. Además, la mayoría de los ejemplos que se disponen del subdominio están ligados al conocimiento del profesor de estructuras demostrativas (Corrêa y Montes, 2016) y aunque en el subdominio se le ha dado un lugar a la resolución de problemas (e.g., Carrillo, Montes et al., 2017) los estudios aún no han detallado qué conocimientos específicos se considerarían cuando hablamos de resolución de problemas en el KPM (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2019).

Por otra parte, en algunas investigaciones se presentan ejemplos de conocimientos asociados al KPM como el conocimiento del profesor del rol de las conjeturas, el desarrollo de contraejemplos, la importancia de la precisión matemática, así como la diferencia entre una condición necesaria y una suficiente (Carrilo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017). Adicionalmente, con base en un análisis documental Flores-Medrano y Aguilar-Gonzaléz (2017) describen una posible caracterización de las prácticas de demostrar y definir, considerando subcategorías de cada práctica y elementos para construir descriptores. Por su parte, Carrillo y colaboradores (2018) presentan como descriptores del KPM el conocimiento de los profesores de diferentes características de las definiciones, tipos de demostraciones y estrategias heurísticas de resolución de problemas. Sin embargo, el KPM sigue siendo el subdominio menos desarrollado del modelo MTSK (Codes, Moriel-Junior, Alfaro y González, 2019) en el sentido de que es el único subdominio que no cuenta con una estructura que permita un análisis detallado de los conocimientos asociados al él, pues aunque hasta el momento el KPM puede ser analizado desde el uso de descriptores o desde la consideración de algunas prácticas, se tendría que avanzar en la consolidación de ambas propuestas para establecer una de ellas como sistema de categorías del subdominio (Sosa, Contreras, Gómez-Chacon, Flores-Medrano y Montes, 2017) que además sea simple, explicativa y útil para estudiar este tipo de conocimiento matemático (Codes, Moriel-Junior et al., 2019). Así, la delimitación de categorías dentro del KPM es un tema de investigación abierto (Contreras y Carrillo, 2018; Carrillo et al., 2018) y hasta el momento no se ha realizado un estudio sistemático del subdominio en ningún nivel educativo.

Corrêa y Montes (2016) plantean que para abordar la categorización del KPM se debe reflexionar sobre qué instrumentos pueden favorecer la identificación y análisis de este conocimiento. Flores-Medrano y Aguilar-González (2017) añaden que el estudio del KPM plantea un reto metodológico respecto a las formas de acceso a la información relativa a este subdominio, lo cual incluye explorar los escenarios más propicios para obtener evidencias naturales de este tipo de conocimiento. En esta búsqueda de escenarios, observamos que en el trabajo de Oliveros et al. (2018) se utiliza el análisis de vídeo y la discusión en un entorno colaborativo para estudiar el KPM. Los autores se apoyan de estos instrumentos de recogida de información considerando que los elementos sintácticos que conforman el KPM de los profesores no suelen abordarse de forma explícita en la enseñanza en la educación primaria. Sumando a lo anterior, la formación de conceptos en la matemática escolar está mayormente enfocada en el razonamiento intuitivo y contextualizado (Dreher, Lindmeier, Heinze y

Niemand, 2018). Esto contrasta con la forma habitual en que se enseñan las matemáticas universitarias donde los conceptos se especifican por definiciones formales y propiedades reconstruidas a través de deducciones lógicas (Tall, 1992) y se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas que no sean solo copias de problemas que han visto antes (Guzmán, Hogson, Robert y Villani, 1998).

Clark y Lovric (2009) señalan que en la transición de la secundaria a la universidad los estudiantes experimentan un cambio en el tipo de matemáticas enseñadas y en la forma en que las matemáticas son enseñadas, pues mientras que las matemáticas escolares tienden a ser más procedimentales, en el nivel universitario los cursos se enfocan en la comprensión de los conceptos, las operaciones y sus relaciones, las múltiples representaciones de los objetos, el pensamiento matemático avanzado, la demostración, la abstracción y el uso del lenguaje matemático preciso. De esta forma, a diferencia de las demostraciones que se espera de los estudiantes en secundaria, las demostraciones que los estudiantes en el nivel universitario deben estudiar y construir son más formales, largas, complejas, originales y requieren de un conocimiento base amplio (Selden, 2012). En esta línea, las matemáticas universitarias se vuelven mucho más simbólicas y los dominios que se le asocian a un símbolo aprendido en secundaria a menudo se amplian de manera importante en el nivel universitario de modo que sus significados pueden no ser los mismos (Bardini y Pierce, 2015). Adicionalmente, en comparación con los estudiantes de otros niveles educativos, los estudiantes universitarios de matemáticas y ciencias participan de forma más intensa y explícita en las matemáticas como disciplina (Rassmusen, 2016). Según lo que se ha expuesto, las características de la enseñanza de las matemáticas en la educación superior sugieren que este es un contexto favorable para caracterizar el KPM debido a que este conocimiento estaría presente con mayor énfasis en las prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas universitarios. Así, en esta investigación nos proponemos aportar a la categorización del subdominio KPM a partir del estudio del conocimiento de profesores universitarios que enseñan en pregrado (licenciatura o título profesional).

1.3. Pregunta y objetivos de la investigación

En línea con lo expuesto en las secciones anteriores, esta tesis doctoral busca responder a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las categorías del conocimiento de la práctica matemática que emergen en el estudio del conocimiento especializado de profesores de matemáticas universitarios?

Objetivo general

Proponer una categorización para el subdominio del conocimiento de la práctica matemática a partir del estudio del conocimiento especializado de profesores de matemática universitarios.

Objetivos específicos

OE1: Identificar evidencias del conocimiento de la práctica matemática de profesores de matemática universitarios.

OE2: Generar descriptores del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios.

OE3: Construir subcategorías y categorías del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios.

Capítulo 2. Construcción de categorías del conocimiento de la práctica matemática

En este capítulo se presenta el contexto y los aspectos metodológicos de la investigación. En la primera sección se sustenta la elección del paradigma interpretativo como paradigma de investigación para comprender el conocimiento de la práctica matemática del profesor universitario. Posteriormente, se presenta la Teoría Fundamentada como perspectiva metodológica, exponiendo sus elementos distintivos: la estrategia de muestreo teórico y el método de comparación constante. En la segunda sección del capítulo, se expone la forma en que se llevó a cabo la selección de los profesores informantes, los instrumentos de recogida de datos y el proceso de codificación y categorización llevado a cabo en el estudio basado en la Teoría Fundamentada. Finalmente, en la tercera sección del capítulo se exponen algunos criterios de rigor y otras consideraciones metodológicas de este estudio.

2.1 El paradigma interpretativo

Para Bassey (2003), un paradigma es una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y las funciones de los investigadores que, aceptadas por una comunidad, condiciona las pautas de razonamiento y sustenta las acciones en la investigación. Esta descripción refleja tres cuestiones básicas a las cuales responden los paradigmas en la investigación social y educativa de acuerdo con Guba y Lincoln (1994): una dimensión ontológica que cuestiona la naturaleza de la realidad social; una dimensión epistemológica que intenta responder cómo se puede conocer esa realidad; y una dimensión metodológica que supone una preocupación por las formas en que debe proceder el investigador para descubrir lo cognoscible. Añaden los autores que, aunque se trata de tres aspectos distintos, la forma en que nos posicionamos en uno de ellos influencia y determina los otros dos, por lo cual las tres dimensiones están interrelacionadas.

Teniendo en cuenta lo anterior, nuestra perspectiva sobre la realidad es *construccionista* (Gergen, 1985), pues afirmamos que la realidad social no está dada, sino que los participantes producen activamente las realidades por medio de los significados atribuidos a ciertos acontecimientos y objetos, y la investigación no puede escapar a estas atribuciones de significados (Flick, 2007). En consonancia con lo anterior, reconocemos la existencia de múltiples realidades situadas, resultantes de construcciones sociales soportadas en las percepciones y acciones de los participantes. Esta perspectiva ontológica, está alineada con una mirada epistemológica *interpretativista* (Bryman, 2012) en la cual conocer implica una interacción con el objeto de conocimiento a través de la cual el sujeto interpreta y reconstruye significados puestos en juego en dicho proceso, por tanto, hay una relación interactiva entre el investigador y el fenómeno. Consideramos además como perspectiva metodológica la *Teoría Fundamentada* (Charmaz, 2014) descrita como una aproximación sistemática, inductiva y comparativa desarrollada con el propósito de construir teoría y en la cual la recolección de los datos, el análisis y el desarrollo de la teoría no se dan de forma sucesiva, sino que son procesos entrelazados e interdependientes (Vollstedt y Rezat, 2019). Al asumir la Teoría Fundamentada como nuestra perspectiva metodológica, conservamos la congruencia entre nuestras posturas ontológica, epistemológica y metodológica, por lo cual podemos posicionarnos en un *paradigma interpretativo* (Bassey, 2003) que se apoya principalmente de *métodos cualitativos*.

Adicionalmente, nuestra postura sobre el conocimiento (en general) es acorde con la propuesta de Schoenfeld (2010), que lo describe como la información que un individuo tiene disponible para usar en el desarrollo de cualquier tarea. En esta línea, Climent (2005) contempla el conocimiento del profesor como la conjunción de saberes y experiencias de los que este hace uso, considerando que dicho conocimiento: es personal debido a que es propio del individuo y depende de sus concepciones, valores, actitudes, experiencia docente y vital; es contextualizado, pues se genera ligado a contextos profesionales y formativos; es integrador y complejo ya que constituye un sistema en el que los elementos son difíciles de aislar. Además, es un conocimiento para la práctica y que se nutre de la misma, siendo la práctica profesional del profesor el conjunto de todos aquellos momentos en los que interactúa con el contenido matemático (formación inicial y continua, planeación de clases, diseño de actividades, sesiones de clase y reflexiones sobre ellas, análisis de producciones de los estudiantes, discusión con colegas).

En términos de nuestro problema de investigación, para comprender el KPM del profesor de matemáticas universitario, nos acercamos a un conocimiento que depende de los significados que construyen los profesores. Consideramos que el conocimiento del profesor es parcialmente tácito pues es un saber desde la acción que se desarrolla a través de la experiencia, siendo esta una de las fuentes de generación de conocimiento práctico (Climent, 2005). Esta característica y la descripción de conocimiento que hemos adoptado, sustentan la interpretación que podemos hacer del conocimiento del profesor y señalan que en la investigación accedemos al conocimiento explícito, el que el profesor comunica y argumenta, pero también hacemos inferencias sobre el conocimiento tácito del cual incluso el profesor puede no ser consciente (Climent, Escudero-Avila, Rojas, Carrillo, Muñoz-Catalán y Sosa, 2014). En este sentido, nos enfocamos en el conocimiento que el profesor manifiesta durante la enseñanza de los contenidos matemáticos, del cual obtenemos información a través de la observación de clases, y en el conocimiento producto de la reflexión del profesor sobre su actuación, al que nos aproximamos desde las entrevistas. Estas técnicas de recolección de datos se utilizan en el marco de la Teoría Fundamentada, con el propósito de obtener categorías de conocimiento para el subdominio KPM en el caso de profesores universitarios.

2.1.1 La teoría fundamentada como perspectiva metodológica

En los inicios de la Teoría Fundamentada (GT, por sus siglas del inglés Grounded Theory), Glaser y Strauss (1967) articulan varias estrategias metodológicas que permiten construir explicaciones de los procesos sociales. Los autores, abogan por integrar la recolección de los datos con su análisis, y construir teorías fundamentadas en los datos más que en hipótesis provenientes de teorías existentes. Posteriormente, Strauss y Corbin (1994) impulsan el uso de los procedimientos de la GT hacia un objetivo de verificación teórica y agregan técnicas que los investigadores pueden aplicar para su interpretación de los datos. Se reconocen entonces dos posturas respecto de la GT: la versión clásica que siguió siendo desarrollada por Glaser (2003) conservando elementos positivistas, y la versión reformulada propuesta por Strauss y Corbin (2002) que se enfoca en el pragmatismo e impulsa de manera significativa el interaccionismo simbólico. Contrastando estas versiones, Charmaz (2006) muestra elementos epistemológicos que permiten alejar la GT de sus raíces positivistas y la acercan al constructivismo y la interpretación, de modo que la teoría resultante de un proceso de investigación con GT es más construida que descubierta (e.g., Bryant, 2017; Henwood y Pidgeon, 2006). Charmaz (2014) además adopta un enfoque sistemático que hace énfasis en el fenómeno de estudio y da mayor flexibilidad en cuanto a los métodos para estudiarlo. En esta investigación, adoptamos esta última postura y comprendemos la GT como una perspectiva metodológica que permite construir categorías a partir de los datos recolectados, siendo las categorías conceptos que representan ideas centrales en los datos (fenómenos) y que agrupan acontecimientos, sucesos, objetos y acciones que se consideran de una naturaleza similar (Strauss y Corbin, 2002).

Aunque en la versión clásica de la GT, las investigaciones debían partir de cero en el conocimiento del fenómeno, Bryant y Charmaz (2007) coinciden con otros autores en la importancia de realizar al menos una revisión inicial de la literatura para desarrollar la sensibilidad teórica y al final del proceso de análisis una revisión más profunda para evitar reportar como nuevas ideas que no lo son. Además, las reformulaciones de la GT no niegan la posibilidad de que, por adecuación al propósito de estudio, el investigador decida adoptar una teoría ya existente (Woods, 1992); sin embargo, esta teoría debe estar fundamentada en lo empírico y tiene que ser mejorada y elaborada en un diálogo e interpelación constante con los datos que se van obteniendo (Strauss y Corbin, 1994). Añaden Pidgeon y Henwood (2004) que el investigador puede tener una perspectiva desde la que activamente intenta construir su análisis, pero no con la intención de simplemente aplicarla. En esta línea, Vollstedt y Rezat, (2019) señalan que estudios con la GT pueden llevarse a cabo cuando las teorías existentes para comprender un fenómeno son insuficientes en cuanto: a la falta de conceptos importantes; relaciones entre conceptos que no estan lo suficientemente elaboradas; o la relevancia de los conceptos y sus relaciones no ha sido corroboradas para la población o el contexto estudiado. Según lo que se ha expuesto, estudiar el KPM con el propósito de ampliar y elaborar este constructo hace compatible adoptar la GT para esta investigación. Por una parte, el subdominio no cuenta con categorías de análisis lo que señala que su conceptualización no está lo suficientemente elaborada dentro del modelo MTSK. A su vez, no se ha explorado este conocimiento en el caso de profesores universitarios. Adicionalmente, los componentes del modelo MTSK (dominios, subdominios y categorías) provienen de la reflexión teórica (top-down) y la investigación empírica (bottom-up) haciendo uso del análisis de contenido y de la GT. En el caso de la GT, esta fue utilizada con el propósito de refinar la estructura y funcionalidad del modelo considerando la posibilidad de encontrar categorías, subcategorías e incluso subdominios que no habían sido descriptos inicialmente (Carrillo et al., 2018).

Por otra parte, los elementos distintivos del proceso metodológico de la GT y que la diferencian de otros métodos de análisis cualitativo de datos son la estrategia de muestreo teórico y el método de comparación constante, los cuales están estrechamente relacionados. El propósito principal del muestreo teórico es orientar la recolección de los datos de la investigación, mientras que el método de comparación constante apoya la generación de teoría a través de la identificación y proposición de la mayor cantidad de categorías y propiedades de un concepto. En el *muestreo teórico* la recogida y el análisis simultáneo de los datos van configurando las características y el número de informantes que participarán en la investigación. Esta técnica permite escoger a los informantes según el aporte de los mismos al análisis del objeto de estudio y además da flexibilidad al investigador de utilizar la técnica de recolección de datos más adecuada, especialmente si se estudian grupos o sujetos muy diferentes (Gaete, 2014). Así, a diferencia del muestreo estadístico donde la muestra suele definirse con anterioridad respondiendo a criterios de representatividad, en el muestreo teórico los informantes se seleccionan bajo los criterios de relevancia y saturación. El criterio de relevancia considera que después de la recolección inicial de datos es la teoría emergente de ellos la que debe guiar una nueva recolección donde se escogen los informantes que ayuden a generar tantas categorías como sea posible (Bryant y Charmaz, 2007). El criterio de saturación indica la finalización del muestreo teórico cuando la relación entre las categorías obedece a un esquema lógico explicativo del problema de investigación.

Acompañando al muestreo teórico se utiliza el *método de comparación constante* que permite generar teoría a partir del análisis comparativo y sistémico de los datos. La aplicación de este método se lleva a cabo en etapas y se inicia en la codificación y la comparación de incidentes y finaliza en la conceptualización y escritura de la teoría. Los incidentes, son cada porción de los datos que puede ser aislada para su análisis debido a que aportan información para comprender el fenómeno. Al ser los incidentes segmentos específicos de los datos que se caracterizan por tomar un lugar en las categorías, estos pueden ser comprendidos en el mismo sentido que las unidades de análisis, particularmente unidades de codificación de acuerdo con Krippendorff (2004). La codificación, por su parte, se refiere a la asignación de un rótulo a un atributo o característica de un dato, pero además implica conceptualizar y reducir los datos, relacionarlos y elaborar categorías en términos de las propiedades de los datos (Strauss y Corbin, 2002). Aunque el término código proviene de la tradición de investigación cuantitativa en ciencias sociales, donde los códigos estaban definidos con anterioridad al análisis de datos, desde la investigación de Becker y Geer (1960) se empezó a utilizar esta expresión para dar cuenta de un análisis cualitativo, siendo Glasser y Strauss (1967) quienes promueven la realización de procesos de codificación sin un esquema predefinido. De acuerdo con Strauss (1987), la codificación puede ser de tipo abierta o axial. En la codificación abierta los datos se analizan muy de cerca: línea por línea e incluso palabra por palabra. En este tipo de codificación los códigos se generan a partir de la capacidad del investigador (precodificación) y de las expresiones o el lenguaje de los participantes (códigos “in vivo”). Por su parte, la codificación axial se desarrolla como un estado avanzado de la codificación abierta, la cual consiste en el análisis de una categoría que forma el eje alrededor del cual se construyen otros códigos y categorías, de este modo en la codificación axial se buscan relaciones a través del contraste de las semejanzas y diferencias existentes entre los datos.

En línea con lo anterior, comparar la mayor cantidad de diferencias y similitudes entre incidentes permite observar las variaciones entre los datos. Así, tras hacer todas las comparaciones posibles surge una gama de categorías y propiedades inconexas que se integran para formar el núcleo de la teoría emergente. Posteriormente, la conceptualización proviene de la reducción de la lista original de categorías a través de una generalización provocada por la comparación constante. La generalización, lleva a una explicación acabada de las variables (también llamada parsimonia) y a la aplicabilidad de la teoría a un mayor rango de situaciones. En esta línea, las comparaciones llegan a su final —y por tanto finaliza el muestreo teórico— cuando los nuevos datos dejan de aportar información para la creación de categorías o el desarrollo de las ya emergentes, esto es, cuando se alcanza la *saturación de los datos*. En esta saturación influye la *sensibilidad teórica* del investigador que se refiere a su habilidad para conceptualizar, comprender y dar sentido a los datos usando su capacidad creativa potenciada por su experiencia personal y profesional. La idea de sensibilidad teórica reconoce que los investigadores tienen intereses, conceptos y perspectivas disciplinarias que le ayudan a realizar una mejor comprensión de sus datos (Charmaz, 2006), y desde la cual pueden surgir reflexiones sobre propiedades o dimensiones de las categorías emergentes de los datos. De este modo, la teoría generada tenderá a combinar conceptos e hipótesis que han emergido de los datos con otros elementos teóricos ya existentes y útiles.

2.2 Recogida y análisis de datos

En consonancia con nuestra perspectiva metodológica, los informantes de esta investigación han sido escogidos a partir de un proceso de muestreo teórico en el cual obtenemos información del KPM a través de observaciones de clase y entrevistas como fuentes primarias de datos, y notas de campo como fuentes secundarias de datos. Esta información es organizada, transcrita y codificada con ayuda del software cualitativo ATLAS.ti, de forma que la recolección y el análisis de los datos se hace de manera integrada.

2.2.1 Los profesores informantes

La selección de los informantes de esta investigación se realizó a través de la estrategia de muestreo teórico considerando además criterios como la posibilidad de acceso a la institución donde laboran los profesores, la disponibilidad de los profesores para participar en la investigación, los contenidos a abordar en los cursos estudiados y la experiencia de los profesores enseñando esos contenidos.

Iniciamos el proceso de muestreo teórico seleccionando como informante a un profesor de matemáticas universitario, llamado *Diego*. La elección de Diego se realizó teniendo en cuenta las características secundarias de profesor experto descritas por Rojas, Carrillo, y Flores (2012); por ejemplo, el profesor cuenta con 20 años de experiencia docente, ha enseñado el contenido más de una vez y ha obtenido el grado de doctor en matemáticas. Siguiendo esta línea, se decidió analizar una clase de Diego en un curso de Análisis Real. En dicha clase, el profesor mostró dominio de los contenidos matemáticos que abordaba, interés por analizar su práctica de enseñanza y por comprender las dificultades de los estudiantes, así como conocimiento de diferentes estrategias para resolver problemas. De acuerdo con Li, Huang y Yang (2011), un profesor con estas características puede poseer un amplio conocimiento de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje. Además, Rojas et al. (2012) incluyen estos elementos dentro de las características primarias de un profesor experto. En este sentido, Diego fue seleccionado y observado durante un semestre en el desarrollo de un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Los descriptores y las subcategorías de KPM obtenidos en el análisis del conocimiento de Diego orientaron la selección como informantes de otros dos profesores, llamados *Juan y Andrés*. Ambos profesores fueron observados durante algunas sesiones de clases antes de confirmar su elección como informantes. Juan fue escogido teniendo en cuenta que desarrollaba un curso de Espacios Métricos con contenidos similares a los analizados en la clase de Análisis Real y con un enfoque demostrativo como en el curso de Ecuaciones Diferenciales. Esto podría fortalecer los elementos del KPM antes identificados en el conocimiento de Diego. Juan posee 8 años de experiencia en el nivel universitario y se desempeña en la misma línea de investigación que Diego. Por su parte, Andrés, que posee 12 años de experiencia como profesor universitario, fue seleccionado considerando que podría proveer nuevos elementos del KPM ya que desarrollaba un curso de Cálculo Vectorial, un contenido distinto a los ya abordados por los otros profesores informantes de la investigación y con un enfoque en las aplicaciones de los conceptos, diferente al enfoque teórico de los cursos anteriores. El análisis del conocimiento de Juan y Andrés determinó la finalización del muestro teórico al alcanzar la saturación de datos relativos a los descriptores y subcategorías emergidos.

De acuerdo con lo anterior, los informantes en esta investigación son tres profesores, llamados Diego, Juan y Andrés (seudónimos usados para conservar la confidencialidad de los informantes) que enseñan matemáticas en los programas de licenciatura en matemática y pedagogía en matemática de una universidad chilena, cuya experiencia docente corresponde sólo a la enseñanza en el nivel universitario. Los tres profesores son doctores en Matemática que combinan la docencia universitaria con la indagación en sus respectivas líneas de investigación en matemáticas (Sistemas dinámicos y Análisis numérico).

2.2.2 Observación de clases

La observación de clases es la técnica principal en la recogida de información en esta investigación pues, al observar sesiones de clases, podemos acceder al conocimiento que los profesores manifiestan en el contexto en que tiene lugar su práctica de enseñanza. Los profesores recibieron poca información sobre nuestro propósito de estudio para evitar influir en su planeación o actuación, y en las sesiones de clases optamos por una posición de observadores no participantes (Cohen y Manion, 2002) con el fin de que las clases se desarrollaran del mismo modo que lo harían sin nuestra presencia en el aula. Además, durante el desarrollo de cada sesión de clase tomamos notas de campo de tipo temáticas (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010) en las cuales se consignaron ideas, hipótesis, expresiones del profesor, ejemplos, ejercicios y preguntas que consideramos relevantes y que posteriormente utilizamos para profundizar en el análisis de las clases.

En el caso de *Diego* se observó una sesión de clases sobre el contenido números reales y sus propiedades, desarrollada como parte de un curso de Análisis Real para estudiantes de pedagogía en matemáticas. En años recientes, Diego ha enseñado Análisis Real al menos seis veces, con un enfoque teórico y riguroso donde los estudiantes se ven enfrentados a reflexionar sobre los contenidos matemáticos que se abordan. Además, se observaron sesiones de clase mientras Diego enseñaba un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para licenciados en matemáticas. En este curso, se aborda el estudio de las ecuaciones diferenciales desde un punto de vista teórico considerando la importancia del conocimiento de este tipo de ecuaciones en la formación de un matemático. Diego ha enseñado ecuaciones diferenciales cinco veces en años recientes.

En cuanto a *Juan*, esta era la primera vez que el profesor desarrollaba un curso de Espacios Métricos. El curso estaba dirigido tanto a estudiantes de pedagogía como a estudiantes de licenciatura en matemáticas. En las sesiones de clases observadas el profesor abordó nociones básicas de espacios métricos y topología, sucesiones y espacios métricos completos. El curso se realizó con énfasis en la demostración de teoremas y propiedades; además, Juan desarrollaba variedad de ejemplos y contraejemplos.

Respecto a las clases de *Andrés*, estas correspondían a la quinta vez en años recientes que el profesor realizaba un curso de Cálculo en Varias Variables y Cálculo Vectorial en el cual se presentan interpretaciones físicas de los conceptos. El curso estaba dirigido tanto a estudiantes de pedagogía como a estudiantes de licenciatura en matemáticas y el profesor desarrolló contenidos de geometría vectorial y diferenciación. Algunos teoremas o resultados teóricos en este curso se justificaron de manera informal.

Cada sesión de clases observada, audio y vídeo grabada, tuvo una duración de alrededor de 90 minutos. Inicialmente se analizaron 30 sesiones de clases que corresponden a 45 horas de grabación aproximadamente; sin embargo, para el análisis final se excluyeron aquellas sesiones en las que no se identificaron evidencias de KPM (4) y aquellas que no aportaban nuevos descriptores de conocimiento (8). De esta forma, se realizó un análisis detallado de 18 sesiones de clases cuya información era suficiente para afirmar la saturación de las categorías. Las sesiones de clases analizadas están distribuidas como se resume en la Tabla 1 que se expone a continuación.

Tabla 1
Sesiones de clases analizadas

Profesor	Curso	Sesiones	Duración (h)
Diego	Análisis Real	1	1:30
	Ecuaciones Diferenciales	5	7:20
Juan	Espacios Métricos	8	10:12
Andrés	Cálculo Vectorial	4	6:08
	Total	18	25:10

2.2.3 Análisis inicial de las sesiones de clase

Nos apoyamos del software ATLAS.ti para optimizar la organización y el análisis de los datos recolectados en el aula, debido a que la estructura de análisis lógico de este software está de acuerdo con los planteamientos de la GT. Así, puesto que el ATLAS.ti permite el trabajo con archivos de video, cada una de las sesiones de clase grabadas fue reproducida desde el software y dividida en *episodios de clase* según las acciones del profesor. Por ejemplo, un episodio es el momento de la clase desde que el profesor inicia hasta que finaliza la exposición de una definición, ejemplo o demostración. De esta forma, los episodios se delimitan por los cambios en las acciones del profesor (ejemplificar, demostrar, definir, resolver un problema), lo cual también está relacionado con sus objetivos de enseñanza. La consideración de episodios se hace con el único próposito de dividir las sesiones de clase en fragmentos más pequeños que serán objeto de análisis en busca de conocimientos asociados al KPM.

En cada episodio de clase se seleccionaron como incidentes aquellas intervenciones donde la organización de las ideas en el discurso del profesor, las intervenciones orales del profesor y de los estudiantes, así como las intervenciones escritas del profesor, daban cuenta de un conocimiento perteneciente al KPM de acuerdo con la descripción de este subdominio (Carrillo et al., 2018; Oliveros et al, 2018) y con la sensibilidad teórica desarrollada durante el estudio. Los incidentes (que son numerados por el ATLAS.ti) fueron clasificados como evidencias e indicios de conocimiento del profesor. Las *evidencias* son intervenciones en las cuales es posible afirmar la presencia del conocimiento del profesor, mientras que los *indicios* son una sospecha de la existencia de un conocimiento del profesor, que puede ser confirmada o invalidada en base a información adicional (Moriel-Junior y Carrillo, 2014). A modo de ejemplo, se expone a continuación un incidente donde las expresiones de Diego, que se destacan con negrita, son aquellas que interpretamos como evidencia de su conocimiento del rol de verificación de la demostración.

> Diego: Ahora, pregunta ¿conozco algún número irracional que sea menor que 1?,¿y mayor que 0?
> Estudiante: La raíz de 2.
> Diego: Ah y ¿por qué es menor que 1? **Hay que probar que existe, y espera, hay que probar que existe esa raíz y que es un número menor que 1**. **Probar que la raíz existe y probar otra cosa**, porque no nos dijeron un número entre 0 y 1, sino un número irracional entre 0 y 1 Entonces**, tú puedes tomar un número real, probar que la raíz existe, pero todavía no sabes si es irracional o no.**

Por su parte, en el siguiente incidente las expresiones de Andrés, que se destacan con negrita, son aquellas que interpretamos como indicio de su conocimiento de la práctica de definir.

> Andrés: Entonces, el producto cruz efectivamente es una operación [...] la voy a escribir como X, que va a ir de R_3 por R_3 en R_3. **Pregunta: ¿tiene sentido definir el producto cruz de R_2 en R_2?** El producto punto sí lo puedo definir en R_2, y en R defino el producto punto entre dos números reales, pero, piensen en R_2**, ¿tiene sentido definir el producto cruz en R_2?**

Los indicios proveen una razón para indagar en mayor detalle el conocimiento del profesor de modo que la distinción entre indicios y evidencias de conocimiento se realizó con el fin de profundizar en la comprensión del KPM de los profesores. Sin embargo, para la construcción de categorías solo se tuvieron en cuenta las evidencias de conocimiento, tanto las inicialmente identificadas como aquellas confirmadas tras de indagar en mayor detalle en los indicios en la entrevista.

2.2.4 Entrevistas

Kvale (2011) señala que la entrevista es una interacción profesional que va más allá del intercambio espontáneo de ideas y se convierte en un acercamiento basado en el interrogatorio cuidadoso y la escucha. De acuerdo con lo anterior, la entrevista es una técnica de gran utilidad en esta investigación, pues permite obtener información completa y profunda del conocimiento de los profesores.

Las entrevistas realizadas a los profesores fueron de tipo semi-estructuradas. Las preguntas de las entrevistas provenían de diversas fuentes, algunas se formularon a partir de las notas de campo tomadas durante la observación de clases, otras se formularon a partir del análisis de las clases considerando las evidencias y los indicios de KPM identificados y otras surgieron durante el desarrollo mismo de la entrevista. Las preguntas de la entrevista relacionadas con las evidencias tenían el objetivo de profundizar en dicho conocimiento. En el caso de los indicios de conocimiento, el propósito de las preguntas de la entrevista era obtener información que permitiera confirmarlos o no como evidencias. Siguiendo estas ideas, en la Tabla 2, como ejemplo, se expone la estructura de la entrevista realizada a Andrés sobre los contenidos del curso de Cálculo Vectorial, considerando el origen de cada pregunta. Una estructura similar poseen las entrevistas realizadas a los otros dos profesores que participaron como informantes del estudio.

Tabla 2
Estructura de una entrevista

Preguntas	Origen de la pregunta
1, 6, 9, 12, 13	Indicio de conocimiento
2, 3, 7, 10, 14	Evidencia de conocimiento
4, 5, 11	Notas de campo
8	Desarrollo de la entrevista

Sin importar su origen, las preguntas de la entrevista se desarrollaron con el fin de que los profesores justificaran los motivos de algunas de sus expresiones o actuaciones en clase. Así, como las entrevistas se realizaron tiempo después de la finalización de los cursos, las preguntas que se referían a situaciones de clase se presentaron a los profesores con el apoyo de los fragmentos de vídeo correspondientes, con el fin de estimular su recuerdo y promover sus reflexiones. En la Tabla 3 se presenta un resumen de las entrevistas realizadas y su duración.

Tabla 3
Duración de entrevistas

Profesor	Curso	Duración (h)
Diego	Análisis Real	2:00
	Ecuaciones Diferenciales	2:00
Juan	Espacios Métricos	0:40
Andrés	Cálculo Vectorial	1:00
	Total	5:40

2.2.5 Transcripciones

Las entrevistas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas reproduciendo con la mayor fidelidad posible el discurso de los profesores. Las respuestas de los profesores a cada pregunta de la entrevista fueron analizadas identificando como incidentes las ideas claves en el discurso del profesor que daban cuenta de un conocimiento asociado al KPM.

Cada pregunta de la entrevista fue nombrada con la inicial E acompañada de las iniciales correspondientes al curso que se estaba analizando y el número que indica el orden en que las preguntas fueron hechas a los profesores. Por ejemplo, ECV3 se refiere a la tercera pregunta de la entrevista realizada a Andrés sobre los contenidos del curso Cálculo Vectorial. Además de las transcripciones de la entrevista, solo fueron transcritos los episodios de clases donde se identificaron evidencias de KPM.

En la Figura 1 se expone el proceso de análisis llevado a cabo para determinar los episodios de clase a transcribir. Lo anterior, siguiendo las recomendaciones de Strauss (1987), de transcribir la cantidad de información con la exactitud que requiere nuestra pregunta de investigación.

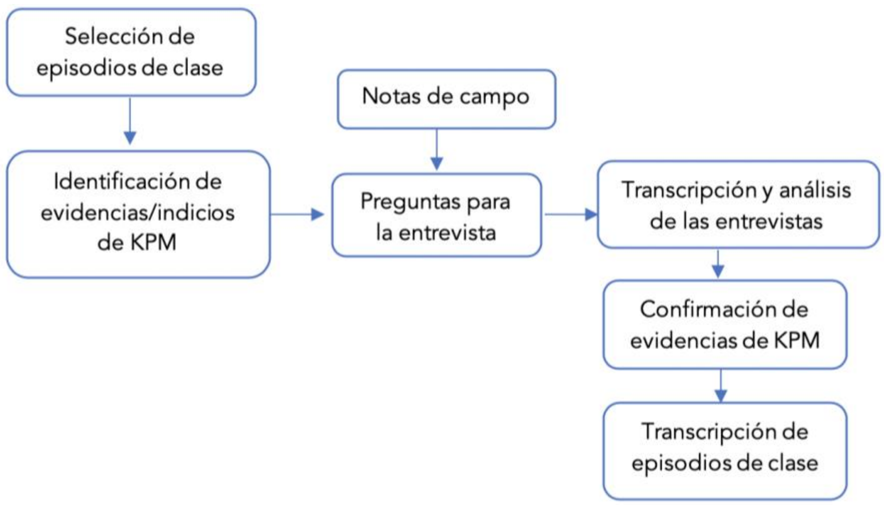


Figura 1. Proceso de análisis previo a las transcripciones de clases.

En la Figura 2, que se presenta a continuación, se expone la transcripción de un episodio de clase usando el software LateX. Cada episodio de clase es nombrado con las iniciales del curso al cual pertenece y numerado de acuerdo con la sesión de clase en la que se identificó y el orden en el que apareció durante la sesión. Así, la nomenclatura EM7.2 hace referencia al segundo episodio de la séptima sesión de clases del curso de Espacios Métricos. A su vez, en las transcripciones se incluye la duración del episodio, un rótulo que describe brevemente su contenido y el contexto en el cuál se desarrolló. En algunos episodios, como parte del contexto, también se expone la transcripción exacta de lo escrito en la pizarra, gráficos, figuras o esquemas que los profesores utilizaron. De manera general, en las transcripciones tenemos en cuenta algunas pautas en cuanto a la identificación de los hablantes y el anonimato tanto en los nombres como en las referencias a lugares. Además, las transcripciones son útiles para examinar con mayor detalle los datos durante el proceso de codificación y categorización, principalmente en las etapas de descripción y síntesis que se exponen en la siguiente sección.

EM7.2 [17:31-18:58] Sucesión de Cauchy

Contexto: El profesor había presentado la siguiente definición : Una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Posteriormente, Juan presenta una forma equivalente de escribir la definición de sucesión de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 0$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Juan: La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera, para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} inferior a épsilon. Esta es la misma solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n+p$. Esta la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.

Figura 2. Transcripción de un episodio de clase.

2.3 Codificación y categorización

Las transcripciones de las sesiones de clases y de las entrevistas audio y video-grabadas fueron codificadas de forma abierta haciendo uso del software ATLAS.ti. A cada incidente se le asignó un código que señalaba un atributo o un elemento que resalta del contenido seleccionado en el episodio. En la Figura 3 se presenta un ejemplo de la codificación de un episodio [EM7.2] en el conocimiento de Juan, el profesor que desarrolló el curso de Espacios Métricos.

EM7.2 [17:31-18:58] Sucesión de Cauchy

Contexto: El profesor había presentado la siguiente definición : Una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Posteriormente, Juan presenta una forma equivalente de escribir la definición de sucesión de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 0$, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$.

Juan: La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera, para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} inferior a épsilon. Esta es la misma solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n+p$. Esta la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.

75:1 Cita 75:1

equivalencia

Figura 3. Codificación en el ATLAS.ti.

Las líneas de texto sombreadas con azul corresponden al incidente identificado. En el episodio, se observa que el profesor menciona dos definiciones de una sucesión de Cauchy y hace énfasis en la equivalencia entre ellas. De este modo, el incidente se codifica como *equivalencia-definición*. Este incidente y el código que se le asocia son indicadores de la presencia del KPM del profesor, el cual se resume como: *conocimiento de la equivalencia entre definiciones de sucesión de Cauchy*.

Según se observa, el conocimiento del profesor es expuesto en términos del contenido matemático presente en el incidente, así que esta primera etapa de categorización del KPM estamos describiendo el conocimiento. La descripción la comprendemos desde la postura de Strauss y Corbin (2002) como la base de interpretaciones más abstractas de los datos y de construcción de teoría.

Iniciando la etapa de síntesis del KPM los códigos fueron analizados considerando la repetición de descriptores y la agrupación de descriptores similares, llevando a cabo un primer nivel de abstracción. En el ejemplo anterior, el código *equivalencia-definición* se encontraba asociado a otro incidente en la entrevista (EEM4). En esta línea, extraemos un solo descriptor desligado del contenido matemático: *conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto*. Así, después de la revisión de códigos y descriptores, se realizó una agrupación que considera relaciones de asociación e inclusión entre códigos. Lo anterior, con el objetivo de construir descriptores más generales y códigos más amplios que los obtenidos en la etapa de descripción del KPM. Para la agrupación tenemos en cuenta similitudes y diferencias entre los códigos de modo que las subcategorías y categorías, que se generan a partir de las relaciones que se establecen al final del análisis, sean mutuamente excluyentes.

En la siguiente etapa, denominada subcategorización del KPM, se desarrolló un segundo nivel de abstracción en el cual los códigos y descriptores antes agrupados y expresados de manera general son nuevamente relacionados con el propósito de construir subcategorías de conocimiento. Con tal fin, se compararon los episodios vinculados a una misma práctica para garantizar la generalidad de las agrupaciones realizadas. En este sentido, la subcategorización está apoyada de la codificación axial pues el propósito es hacer un análisis profundo alrededor de una práctica. Continuando con el ejemplo anterior, observamos los códigos en el conocimiento de Juan que hacen referencia a la práctica de definir. En particular, nos fijamos en el código *elegancia-definición* cuyo descriptor es *conocimiento de las características de una definición elegante*. No obstante, el criterio de elegancia está vinculado con el criterio de equivalencia, pues generalmente se escoge una definición elegante entre las definiciones equivalentes. Así, el código *elegancia-definición* se incluye en el código *equivalencia-definición* y el descriptor que se obtiene es el *conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto y la elegancia entre definiciones equivalentes.* Al no encontrar otros códigos referidos a la práctica de definir se construye entonces una subcategoría del KPM de Juan denominada características de la definición (Tabla 4) la cual es posteriormente contrastada con investigaciones sobre la definición (e.g., Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2014).

Tabla 4

Construcción de una subcategoría en el KPM de Juan

Etapa	Código (definición)	Episodios	Descriptores

Descripción	Equivalencia	EM4.5	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de clausura de un conjunto
		EM7.2	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de una sucesión de Cauchy.
	Elegancia	EM4.4	Conocimiento de la elegancia de la definición de un conjunto cerrado como el complemento de un abierto.
		EM4.5	Conocimiento de la elegancia de la definición de clausura de un conjunto en términos de bolas e intersección.
Síntesis	Equivalencia	EM4.5, EM7.2, EEM4	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto.
	Elegancia	EM4.4, EM4.5	Conocimiento de la elegancia de una definición entre las definiciones de un concepto.
Subcategorización	Características de la definición	EM4.4, EM4.5, EM7.2, EEM4	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto y la elegancia entre definiciones equivalentes.

Las etapas de *descripción*, *síntesis y subcategorización* del KPM se desarrollaron de manera similar en cada informante del estudio, de modo que de los datos emergieron tres grupos de subcategorías de KPM, varias de las cuales pudieron sustentarse en resultados teóricos o empíricos sobre prácticas matemáticas y sobre el conocimiento del profesor de dichas prácticas. Considerando lo anterior, en la etapa de *categorización* del KPM los grupos de subcategorías son comparados identificando y agrupando las subcategorías en común (subcategorías con el mismo nombre). Por ejemplo, la subcategoría *características de la definición*, identificada en el conocimiento de Juan, contiene descriptores referidos a la equivalencia y la elegancia de una definición. Descriptores similares que complementan la subcategoría son hallados en el conocimiento de Andrés y de Diego. Además, en el conocimiento de estos profesores se identificaron otras características de la definición como la no ambigüedad y la no contradicción que permiten ampliar la subcategoría tal como se expone en la Tabla 5.

Tabla 5

Construcción de una subcategoría de KPM

Subcategoría	Episodios	Descriptores
Características de la definición	EED12, EED13, ECV1, ECV2	Conocimiento de las características de no ambigüedad y no contradicción de una definición.
	EED17, EM7.2, EEM4, CV1.3.1, CV2.3, ECV8, EM4.4, EM4.5	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto y la elegancia entre definiciones equivalentes.

Las subcategorías restantes, aquellas identificadas en el conocimiento de un solo profesor o en dos de ellos, también fueron analizadas buscando establecer diferencias o formas de combinarlas con las subcategorías en común. Un ejemplo de lo anterior, se expone en la Tabla 6 para el caso de las subcategorías del conocimiento de Diego y Juan.

Tabla 6

Comparación del conocimiento de Diego y Juan

Subcategorías de conocimiento en común	**Subcategorías (Juan)**	**Subcategorías (Diego)**
Particularización y generalización Métodos y tipos de demostración Roles de la demostración Características de la definición Estrategias heurísticas de resolución de problemas Significado y uso de los cuantificadores	Rol de los contraejemplos Uso de los símbolos	Uso del lenguaje matemático

En esta comparación, se observa que Diego y Juan comparten varias subcategorías de conocimiento, no obstante, hay subcategorías propias al conocimiento de cada profesor, las que llamamos subcategorías restantes y en las cuales profundizamos para integrar estos dos grupos de subcategorías. Así, en el conocimiento de Juan las subcategorías restantes son *uso de los símbolos* y *rol de los contraejemplos*. En la comparación, observamos que el uso de los símbolos puede asociarse al *significado y uso de los cuantificadores* (ya que los cuantificadores también son símbolos). De esta forma, es posible unir las subcategorías *significado y uso de los cuantificadores* y *uso de los símbolos* e incluirlas en una subcategoría más amplia referida al *significado y uso de los símbolos*. De manera similar, considerando que los contraejemplos tienen rasgos peculiares de criterios de verdad que son útiles en el proceso de demostración (Flores-Medrano, 2016) el rol de los contraejemplos forma parte de una categoría referida a la demostración. En este caso, integramos las subcategorías *particularización y generalización* y *rol de los contraejemplos* obteniendo una nueva subcategoría denominada *desarrollo de demostraciones*. Falta entonces analizar la subcategoría *uso del lenguaje matemático* que solo se identificó en el conocimiento de Diego. Así, al considerar que esta subcategoría se refiere a la precisión y la economía en el uso del lenguaje matemático, y que estas características se evidenciaron en episodios que no involucran el *significado y uso de los símbolos*, las subcategorías se consideran como disyuntas, aunque ambas estén relacionadas con el lenguaje matemático.

Luego de integrar las subcategorías de conocimiento de Diego y Juan, el siguiente paso es hacer la comparación con las subcategorías de conocimiento de Andrés (Tabla 7).

Tabla 7
Comparación de subcategorías de KPM en los tres profesores

Subcategorías	Diego	Juan	Andrés
Desarrollo de demostraciones	*	*	*
Métodos y tipos de demostración	*	*	*
Roles de la demostración	*	*	*
Construcción de definiciones			*
Características de la definición	*	*	*
Estrategias heurísticas de resolución de problemas	*	*	*
Significado y uso de los símbolos	*	*	*
Uso del lenguaje matemático	*		

De acuerdo con lo anterior, la siguiente comparación que debe realizarse es entre las subcategorías *características de la definición* y construcción *de definiciones*. Al comparar los episodios asociados a ambas se concluye que las subcategorías hacen referencia a distintos aspectos de la práctica de definir, por lo cual no es posible combinarlas y se describen como subcategorías disyuntas que se agrupan en una categoría denominada *conocimiento de la práctica de definir*. De manera similar, las otras subcategorías construidas son agrupadas considerando las prácticas matemáticas a las que hacen referencia. Por ejemplo, las subcategorías; desarrollo de demostraciones; métodos y tipos de demostración; y roles de la demostración, son agrupadas en la categoría *conocimiento de la práctica de demostrar*. La etapa de categorización es presentada con detalle en el Capítulo 3: Categorías de conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios.

2.4 Criterios de rigor

En esta investigación tenemos en cuenta la importancia de reflexionar sobre criterios de rigor relacionados con la validez, fiabilidad y consistencia del proceso metodológico llevado a cabo en el estudio. En esta línea, uno de los criterios de rigor considerados fue la saturación de las categorías de KPM. El primer indicador de la saturación de los datos relativos a los descriptores identificados fue que, luego del análisis de 18 sesiones de clases se empezaron a evidenciar los mismos descriptores de conocimiento. Otra de las razones que explica la saturación de las subcategorías y categorías emergidas en el estudio es la cantidad de datos, pues, las entrevistas a los tres profesores suman 5 horas y 40 minutos, que, al ser añadidas a las 25 horas y 10 minutos de clases analizadas, arrojan un total de 30 horas y 50 minutos de datos recolectados y analizados. De acuerdo con Noerager-Stern (2007) en las investigaciones con la GT se asigna la cuasi-certeza de llegar a un punto de saturación a una cantidad de 20 a 30 horas de recolección de datos.

Por otra parte, al hacer uso de la estrategia de muestreo teórico para seleccionar los informantes del estudio desarrollamos una triangulación de fuentes de datos (en este caso individuos) y un análisis agregado de las personas, pues no escogemos grupos u organizaciones, ni nos enfocamos en la interacción de los informantes (Arias, 2000). Adicionalmente, desarrollamos una triangulación metodológica, pues para estudiar el KPM combinamos dos técnicas cualitativas de recolección de datos: la observación de las sesiones de clase y las entrevistas. En esta línea, después del análisis individual de las sesiones de clase y las entrevistas, desarrollamos un análisis conjunto con el fin de refinar las interpretaciones que como investigadores hacemos del KPM de los profesores. Por ejemplo, en el curso de Espacios Métricos, observamos que el profesor propone actividades donde los estudiantes deben construir contraejemplos [EM4.1, EM8.2], en la entrevista [EEM8] cuestionamos al profesor ¿qué es un contraejemplo? y ¿por qué usted utiliza contraejemplos en sus clases? En este caso, la pregunta de la entrevista está basada en una evidencia de KPM y la respuesta del profesor permite ampliar nuestra comprensión de su conocimiento del rol de los contraejemplos.

Además, al realizar constantes comparaciones entre los datos, profundizamos en el KPM de los profesores y en la validación de nuestras inferencias sobre dicho conocimiento. En esta línea, procuramos el ajuste y funcionamiento de las categorías obtenidas (Glaser y Strauss,1967); esto es, que las categorías sean fácilmente aplicables, apropiadas y capaces de explicar el fenómeno de estudio. Así, mediante la triangulación metodológica y las comparaciones que se hacen en el proceso de construcción de categorías, buscamos una mayor comprensión del KPM. Lo anterior se complementa con la triangulación de investigadores que se produjo al discutir las diferentes etapas de la investigación con expertos en el tema. Por ejemplo, se discutieron los incidentes que daban cuenta de evidencias e indicios de KPM, los nombres de los códigos, los incidentes donde la asignación de los códigos no era evidente y la asignación de los nombres de las categorías.

En consonancia con lo que se ha expuesto, usamos más de un tipo de triangulación en el análisis del KPM de los profesores y coincidimos con Denzin (1989) en que la triangulación es una estrategia sólida de construcción de teoría. De este modo, la triangulación más que para validar, es utilizada en el estudio con el propósito de fundamentar el conocimiento obtenido e incrementar el alcance, la profundidad y la consistencia de nuestras actuaciones metodológicas (Flick, 2007).

Capítulo 3. Categorías del conocimiento de la práctica matemática de profesores universitarios

En este capítulo presentamos las categorías del conocimiento de la práctica matemática (KPM) que resultaron del análisis del conocimiento de tres profesores de matemáticas universitarios. En la primera sección del capítulo se expone el KPM identificado en cada uno de los profesores que participaron como informantes del estudio. La presentación de estos resultados se hace considerando las etapas del proceso de categorización expuesto en el Capítulo 2: Construcción de categorías del conocimiento de la práctica matemática, particularmente en la sección Codificación y categorización. De este modo, primero se realiza la descripción del KPM identificado en la observación de clases y después se muestra la síntesis del conocimiento incluyendo el análisis de las respuestas de los profesores en la entrevista. Luego, se exponen las subcategorías construidas para el conocimiento de cada profesor. En la siguiente sección se presenta un análisis conjunto del conocimiento de los profesores y las subcategorías de KPM obtenidas. Cada subcategoría está relacionada con la literatura de investigación y es ejemplificada con episodios de clase y fragmentos de las entrevistas. Finalmente, cerramos el capítulo presentando las categorías de KPM construidas a partir de las subcategorías.

3.1 El conocimiento de la práctica matemática de los tres profesores universitarios

En esta sección se expone el conocimiento de la práctica matemática a partir de los descriptores identificados en el conocimiento de los tres profesores que participaron como informantes de este estudio. Cada apartado está dedicado a un profesor y presenta la descripción y síntesis de su KPM, así como las subcategorías construidas a partir de los descriptores de dicho conocimiento. Los resultados son presentados en tablas que incluyen fragmentos que dan cuenta del KPM, así como descriptores de conocimiento asociados al análisis de los episodios de clase y las preguntas de la entrevista (Anexo 1).

En cuanto a la nomenclatura de los episodios de clase, por ejemplo, AR1.2 hace referencia al segundo episodio de la primera sesión de clases del curso de Análisis Real. Similarmente EAR4, corresponde a la cuarta pregunta de la entrevista sobre dicho curso.

3.1.1 El conocimiento de la práctica matemática de Diego

En este apartado se presentan los descriptores que se identificaron en los respectivos episodios de clase y las respuestas a la entrevista, proporcionando evidencias del KPM de Diego.

Durante el desarrollo de una sesión de clases sobre números reales y sus propiedades en un curso de Análisis Real (AR), se han identificado los episodios que se describen a continuación en la Tabla 8.

Tabla 8

Descriptores del KPM de Diego: Números reales y sus propiedades

Episodios	Fragmento	Descriptor
AR1.1	Entonces para decir que están encajados voy a decir a_n menor que b_n para todo I_n conteniendo a I_{n+1}. Que hemos demostrado con esto, que, si tomo intervalos encajados, que cada vez son más pequeños, que son intervalos cerrados y acotados, entonces, en la intersección de todos ellos hay algo, algo hay ahí.	Conocimiento de la economía en el uso del lenguaje matemático.
AR1.2	Vamos a suponer que *a* y *b* son dos números positivos, que no es una gran suposición porque si fueran negativos por ejemplo los dos números trabajo con -*a* y -*b*, tengo *a* y *b* acá [a la izquierda del cero], luego -*a*, -*b* están del otro lado del cero.	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de otros casos en una proposición con números reales.
AR1.3 AR1.7	Ah y ¿porque es menor que 1? Hay que probar que existe, y espera, hay que probar que existe esa raíz y que es un número menor que uno, probar que la raíz existe y probar otra cosa porque no nos dijeron un número entre cero y uno, sino un numero irracional entre 0 y 1. Entonces ahora pueden decirle a sus alumnos con propiedad que entre dos racionales siempre hay un irracional.	Conocimiento del rol de verificación de la demostración.
AR1.4.1	Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, raíz de dos dividido *m*, ¿va a seguir siendo irracional o no? lo que estoy diciendo es: este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?	Conocimiento del rol de convicción de la demostración.
AR1.4.2	Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, ¿raíz de dos dividido *m* va a seguir siendo racional o no?, lo que estoy diciendo es, este no es racional [..] Entonces lo que digo es lo siguiente, al menos uno de estos números tiene que estar en ese intervalo $(0,\varepsilon)$.	Conocimiento de la utilidad de construir un elemento para desarrollar una demostración de existencia.
AR1.5 AR1.7	¿qué vamos a demostrar? Que la suma es irracional entonces yo lo que afirmo, es que este de aquí no pertenece a $\mathbb{Q}$ y ahí se acaba la demostración, si consigo argumentar que este $a+z$ no está en $\mathbb{Q}$, ya encontré mi irracional que está entre *a* y *b*. Pero esto ya lo calculamos, da *p* que es menor que ε, que es igual a *(b-a)/2*, entonces como *(b-a)/2* va a ser mayor que *(b-a)*. Contradicción.	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones usando el método de demostración por contradicción.
AR1.6	Pero ese es el problema, uno dice, con el para todo yo siempre puedo escoger cuál de todos es el que me conviene, pero cuando es la existencia, es lo que cayó	Conocimiento del significado de los cuantificadores universal y

	no más, lo que cayó en la noche, entonces como el existe te da lo que cayó no más, uno tiene que hacer algún trabajo para que lo que caiga sea conveniente.	existencial.

De forma similar a como se analizó la sesión de clases de Análisis Real, se analizaron cinco sesiones de clases de un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ED) sobre los contenidos relativos a problema de Cauchy, teorema de Picard Lindeloff, condiciones iniciales en una ecuación diferencial y el teorema de Grobman-Hartman. En la Tabla 9 se resumen los descriptores de KPM de Diego en el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Tabla 9

Descriptores del KPM Diego: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Episodios	Fragmentos	Descriptor
ED1.1	Habíamos hecho una separación de variables y la solución era $ln\left\|\frac{x-1}{x}\right\| = t + c, x \neq 0, 1$ […] Entonces, con esta expresión no sabemos cuál es el comportamiento de la solución y lo que hay que hacer es, ¡Aah! Hay que ver caso por caso. Entonces, caso 1, x mayor que 1 […] Vamos a hacer otros casos, ¿Qué pasa con x entre 0 y 1? Y ¿qúe pasa con el caso x menor que 0?	Conocimiento de la estrategia heurística de considerar casos para resolver la ecuación logística.
ED2.1.1	En la demostración tomemos un punto cualquiera $x \in X$, entonces para n igual o mayor que 1, definamos x_n, la sucesión F compuesta con $F(x)$, n veces. A esa sucesión la voy a llamar la potencia F_n […], esa sucesión que construí, x_n es de Cauchy […] entonces, existe un número z_0 en X tal que el límite de x_n cuando n es infinito es el punto z_0 […] Bien, entonces, el límite de $F(x_n)$ es el límite de $F(F_n(x_n))$ pero entonces esto que está aquí $[F(F_n(x_n))]$ no es otra cosa que $F_{n+1}(x)$ y esto que está acá $[F_{n+1}(x)]$ es el límite de x_{n+1}, pero si el límite de x_n es z_0, el límite de x_{n+1} es lo mismo, así que esto $F(z_0)$ me queda igual a z_0. Así que z_0 es un punto fijo.	Conocimiento de cómo demostrar la existencia de un punto fijo en el teorema del punto fijo de Banach.
ED2.1.2	El teorema no termina ahí, además dice que [el punto fijo] es único. Supongamos que haya otro. Si z_1 distinto a z_0 es otro punto fijo de F ¿qué pasa? Entonces, ¿cuánto vale la distancia de z_1 a z_0? Bueno, no sé, pero debe ser positiva, estrictamente positiva, porque son distintos. Entonces $F(z_1) = z_1$, así que poner z_1 o $F(z_1)$ es lo	Conocimiento de cómo demostrar la unicidad del punto fijo en el teorema del punto fijo de Banach.

	mismo porque son puntos fijos y poner z_0 o $F(z_0)$ es lo mismo. Pero esto, por ser una contracción la distancia $d(F(z_1), F(z_0))$ es más pequeña que la distancia $d(z_1,z_0)$. Entonces, ¿cómo es que un número positivo es estrictamente más pequeño que él mismo? No puede ser, por lo tanto, z_0 es único.	
ED3.1	Entonces vamos a hacer la demostración de la unicidad. Yo tengo que demostrar que la γ_1 de t y γ_2 de t son iguales en todo.	Conocimiento de cómo demostrar la unicidad de la solución de una ecuación diferencial.
ED4.1	Estoy cambiando el problema, de un problema que es no lineal en un campo de vectores por un problema que se resuelve con matrices, ¿ya? Ahora, no saco nada con cambiar el problema si no sé cómo se resuelven las flaquezas […]Acá teníamos algo que no sabíamos cómo era y lo cambiamos por algo que sabemos cómo es.	Conocimiento de la estrategia heurística de cambiar un problema por otro.
ED5.1	Entonces, si quiero calcular la exponencial, empecemos por $(PBP^{-1})^n$. Primero, lo voy a calcular al cuadrado, $(PBP^{-1})^2$ y eso queda P por B por P^{-1} por P, por B y por P^{-1} $[(PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})]$. Y lo que va a pasar es que estas dos del medio se van a cancelar [señala PP^{-1}] y me queda PB^2P^{-1}. Si lo pusiera al cubo, las del medio se van a cancelar, efectivamente $(PBP^{-1})^3 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})$ y PP^{-1} es la matriz identidad y nuevamente aparece PP^{-1} que es la identidad, entonces cuando lo tengo al cubo me queda P por B por B por B por P^{-1} ¿Está bien? PB^3P^{-1}. Así, lo que podemos deducir, aunque hay que hacer la prueba por inducción, es que si coloco la expresión a la n, entonces B queda a la n, o sea, $(PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$.	Conocimiento de cómo generalizar una expresión sobre la exponencial de una matriz a partir de su particularización para los exponentes 2 y 3.

Posterior al análisis presentado en las Tablas 8 y 9, en la etapa de síntesis se realiza el análisis conjunto de episodios de clase y entrevistas (EAR, EED). Durante el análisis se fueron encontrando episodios sobre los mismos métodos, tipos y roles de la demostración los cuales se codificaron y describieron sin hacer referencia al contenido matemático involucrado. En la síntesis del conocimiento de Diego se consideran entonces los descriptores repetidos sobre los roles de explicación y de convicción de la demostración, los métodos de demostración por contradicción y por inducción y las demostraciones de existencia y unicidad. Adicionalmente, se exponen los descriptores asociados a episodios similares. Estos desciptores, por lo general aparecen asociados a diferentes contenidos matemáticos, pero hacen referencia a los mismos elementos. En el caso de Diego, los descriptores similares se refieren a los cuantificadores, el uso preciso del lenguaje, estrategias heurísticas tales como usar casos particulares o cambiar un problema por otro, y la característica de no ambigüedad de una definición.

En la Tabla 10 que se presenta a continuación, se agrupan los descriptores del KPM de Diego obtenidos en la etapa de descripción. En este punto, ya no se presentan descriptores asociados a los contenidos matemáticos pues se ha llevado a cabo el primer nivel de abstracción. De este modo, se expone una síntesis del KPM del profesor.

Tabla 10

Síntesis del KPM de Diego

Episodios	Descriptores
AR1.3, AR1.7, EAR9	Conocimiento del rol de verificación de la demostración.
AR1.4.1, EAR11, EED27	Conocimiento del rol de convicción de la demostración.
AR1.5, AR1.7, EED25	Conocimiento de cómo realizar demostraciones utilizando el método de demostración por contradicción.
EED16, ED2.1.1, EED20, EED21, EED27	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de existencia.
ED2.1.2, ED3.1, EED5, EED19	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de unicidad.
EED22	Conocimiento del método de demostración por inducción.
AR1.6, EAR5	Conocimiento del significado de los cuantificadores universal y existencial.
EAR6, EAR7	Conocimiento de cómo utilizar el lenguaje matemático preciso en la comunicación de ideas matemáticas.
ED1.1, EED2	Conocimiento de la estrategia heurística de usar casos particulares.
ED4.1, EED2, EED4	Conocimiento de la estrategia heurística de cambiar un problema por otro.
ED5.1, EED3	Conocimiento de cómo generalizar una propiedad a partir de su particularización.
EED12, EED13	Conocimiento de la característica de no ambigüedad de una definición.
AR1.1, EED12, EED14, EED15	Conocimiento de la economía en el uso del lenguaje matemático.
AR1.2	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de otros casos en una proposición (sin pérdida de generalidad).
EAR9	Conocimiento del rol de explicación de la demostración.
EAR8	Conocimiento de cómo se interpretan proposiciones con varios cuantificadores.
EAR4	Conocimiento del significado de las condiciones necesarias y suficientes.
EED7	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.

EED17	Conocimiento de la característica de equivalencia entre definiciones de un concepto.

Según puede observarse en la Tabla 10 se han identificado 19 descriptores en el KPM de Diego. Dichos descriptores son agrupados considerando los distintos roles de la demostración, los métodos y tipos de demostración. También se agruparon los descriptores que hacían referencia a la particularización y generalización, las características de la definición, el significado de los cuantificadores, el uso del lenguaje matemático y el conocimiento de estrategias heurísticas.

En la Tabla 11 se presentan las subcategorías de KPM de Diego obtenidas a partir de la agrupación y el establecimiento de relaciones entre los descriptores de conocimiento antes expuestos.

Tabla 11
Subcategorías en el KPM de Diego

Subcategoría	Episodios	Descriptores
Particularización y generalización	ED5.1, EED3	Conocimiento de cómo generalizar una propiedad a partir de su particularización.
	AR1.2	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de otros casos en una proposición.
Métodos de demostración	AR1.5, AR1.7, EED25	Conocimiento de cómo realizar demostraciones por contradicción.
	EED22	Conocimiento del método de demostración por inducción.
Tipos de demostración	AR1.4.2, EAR3, EAR8, EED16, ED2.1.1, EED20, EED21, EED27	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de existencia.
	ED2.1.2, ED3.1, EED5, EED19	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de unicidad.
	EAR4	Conocimiento del significado de las condiciones necesarias y suficientes.
Roles de la demostración	AR1.3, AR1.7, EAR9	Conocimiento del rol de verificación de la demostración.
	AR1.4.1, EAR11	Conocimiento del rol de convicción de la demostración.
	EAR9	Conocimiento del rol de explicación de la demostración.
Características de la definición	EED12, EED13	Conocimiento de la característica de no ambigüedad de una definición.
	EED17	Conocimiento de la característica de equivalencia entre definiciones de un concepto.

Estrategias para resolver problemas	ED1.1, EED2	Conocimiento de la estrategia heurística de usar casos particulares.
	ED4.1, EED2, EED4	Conocimiento de la estrategia heurística de cambiar un problema por otro.
	EED7	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
Significado de los cuantificadores	AR1.6, EAR5	Conocimiento del significado de los cuantificadores universal y existencial.
	EAR8	Conocimiento de cómo se interpretan proposiciones con varios cuantificadores.
Uso del lenguaje matemático	AR1.1, EAR6, EAR7, EED12, EED14, EED15, EED17	Conocimiento de la precisión y la economía en el uso del lenguaje matemático.

Las 8 subcategorías presentadas en la Tabla 11 resultaron de la asociación de los descriptores alrededor de una práctica específica como generalizar, demostrar, definir y resolver problemas. Además, se agruparon los descriptores de conocimiento asociados al uso del lenguaje matemático.

3.1.2 El conocimiento de la práctica matemática de Juan

En este apartado se presenta un análisis de los descriptores del KPM de Juan evidenciados en el desarrollo de un curso de Espacios Métricos (EM). Las sesiones de clase analizadas fueron divididas en dos grupos; cuatro sesiones correspondientes a los contenidos espacios métricos y espacios topológicos; y cuatro sesiones que hacían referencia a los contenidos sucesiones, convergencia y espacios métricos completos.

En la Tabla 12 se presentan los descriptores del KPM del profesor obtenidos en el análisis de las sesiones de clase sobre espacios métricos y espacios topológicos.

Tabla 12
Descriptores del KPM de Juan: Espacios métricos y espacios topológicos

Episodios	Fragmentos	Descriptores
EM1.1	Y la única cosa que puedo hacer con eso es usar la definición que dice que cuando vale cero [la distancia] entonces los puntos son iguales, entonces x=z, y z=y, ahí tienen una contradicción, x=y, esa es contradicción con x diferente a y.	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones usando el método de demostración por contradicción.
EM1.2	Entonces para ver el *sup* tengo que acotar este valor absoluto […] Entonces el conjunto de estos valores [$\|f(x) - g(x)\|$] esta acotado por una constante, entonces el *sup* existe.	Conocimiento de cómo mostrar la existencia de un supremo.

EM1.3	¿Siguieron la parte lógica de la demostración? Queríamos demostrar que *A* es equivalente a *B* ¿cierto? […] lo que hemos mostrado es $B \to A$ […] y acá en la última parte mostramos $A \to B$ y hemos demostrado lo que queríamos.	Conocimiento de cómo demostrar una proposición bicondicional.
EM2.1	Tenemos que mostrar que la norma infinito de *f* es igual a cero si y solo si *f* es igual cero […] Entonces empecemos por una implicación hagamos esta [←] […] Ahora así [→]	
EM3.1.1	El ejercicio es tratar de demostrar la proposición en $\mathbb{R}^2$, empezar en $\mathbb{R}^2$ y después preguntarse si eso se puede escribir con la métrica.	Conocimiento de cómo generalizar un enunciado a distancias en un espacio métrico partir de su particularización en R_2.
EM3.1.2	Generalmente lo que se usa es la desigualdad triangular y por contradicción mirar que pasa si las dos bolas se juntan.	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones usando el método de demostración por contradicción.
EM4.1	Entonces tenemos que tomar *A* y *B* muy cercanos pero que se diferencien por unos puntos. Estos contraejemplos en general se encuentran en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o si no hay que mirar la distancia trivial, el espacio de sucesiones o de funciones.	Conocimiento de cómo se construye un contraejemplo sobre la clausura de un conjunto.
EM4.2	Yo supongo que *A* es abierto y tomo un punto *x* en *A* y quiero encontrar un vecindario no se qué, pero para encontrarlo, hay que sacarlo de algún lado, entonces es importante ver que la definición acá [de abierto] dice que existe algo y existe algo es que yo encuentro una solución a mi problema.	Conocimiento del significado del cuantificador existencial.
EM4.3	Entonces el dibujo es así, tengo mi cero acá, tengo mi sucesión, ahora tomo un punto *x* en el complemento y sabiendo que la sucesión converge a cero, yo sé que tengo una infinidad de puntos que van a estar cerca de cero ¿ok? así, sea un ε aquí [cerca de 0], tal que *x* no pertenece a esto [al intervalo alrededor de ε] y cuando borro este vecindario yo tengo cosas más lindas.	Conocimiento del uso de un diagrama como estrategia heurística para analizar el comportamiento de una sucesión.
EM4.4	Hay muchas maneras de demostrar este problema, hay varias soluciones pero en algún momento hay que hacer esto de tomar un punto afuera o lejos de cero, pero esta demostración es la más linda porque estoy demostrando	Conocimiento de la elegancia de la definición de conjunto cerrado como complemento de un abierto.

	usando las definiciones, un cerrado es un conjunto que el complemento es abierto y así la demostración es más simple.	
EM4.5	Habíamos dicho que la clausura de A es igual al interior de A unido con la frontera de A [$\bar{A} = \dot{A} \cup Fr(A)$], pero esa no es la definición de la clausura que habíamos visto, si no la de $\bar{A}$ es el conjunto de todos los x tal que la bola de centro x y radio r intersectado con A me da el conjunto vacío. Aunque en algunos libros, la definición de $\bar{A}$ no es esta [en términos de bolas], sino que se define como el cerrado más pequeño que contiene a A, esta es una definición general.	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de clausura de un conjunto.
EM4.5	y esta definición [en términos de bolas] es mucho más fácil de utilizar […] por eso yo trato de darles una definición que sea la más útil, que les sirva, esa definición general por supuesto la mostré porque ustedes tienen que conocerla, pero si doy esta definición es para ayudarles y de hecho si ven una demostración con esta [intersección de conjuntos] es más fácil que con la otra [interior unido con la frontera]	Conocimiento de la elegancia de la definición de clausura de un conjunto en términos de bolas e intersecciones.

En la Tabla 13, que se muestra a continuación, se exponen los descriptores obtenidos en el análisis de cuatro sesiones de clase sobre sucesiones, convergencia y espacios métricos completos.

Tabla 13

Descriptores del KPM de Juan: Sucesiones, convergencia y espacios métricos completos

Episodios	Fragmentos	Descriptores
EM5.1	Entonces lo que vamos a demostrar es que no *B* implica no *A*. Entonces ¿qué es no *B*?, es que existe una sucesión x_n que converge a *a*, tal que *f* (x_n) no converge hacia *f*(*a*) […] Ahora, quiero decir que esta función *f* de *M* en *N* no va a ser continua ¿ok?, si *f* es continua, para todo épsilon positivo existe delta positivo tal que *f* de la bola de centro *a* y radio δ está incluida en la bola de centro *f* (*a*) y radio ε, tenemos esto ¿cierto?, eso quiere decir que voy a tener una sucesión de elementos que van dentro de la bola *f* (*B*(*a*,δ) tal que las imágenes no están dentro de la bola *B*(*f*	Conocimiento de cómo realizar una demostración utilizando el método de demostración por contrareciproco.

	(a), ε) y eso es absurdo.	
EM5.1.1	Entonces ¿que es no *B*?, es que existe una sucesión x_n que converge a a, tal que $f(x_n)$ no converge hacia f (a) y eso ¿qué quiere decir? es súper complicado decir que no converge, es que hay elementos de la sucesión arbitrariamente largos que están afuera de cualquier entorno de *f*(*a*), esto es, $\forall\ B(f(a), \varepsilon), \exists\ x_n \notin B(f(a), \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.	Conocimiento de cómo negar una proposición con cuantificadores.
EM6.1.1	La idea aquí es usar una desigualdad triangular, pero poniendo varios términos en la desigualdad, entonces lo que queremos hacer, la idea es ver *f* de *x* menos f de a, ¿cierto? y minorar eso para *x* suficientemente cerca de a. Para hacer eso, vamos a introducir f_n de *x*, porque eso lo sabremos comparar a *f* de *x*. Vamos a introducir también f_n de a.	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
EM6.1.2	Bueno, lo que sé es que voy a tener tres elementos [en la desigualdad], entonces voy a tomar un epsilon sobre tres acá, para hacer mi suma […] y como el epsilon va a ser el mismo en cada término de la desigualdad conviene ponerlo dividido por tres, para que tengamos épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y épsilon al final.	Conocimiento de la utilidad de seleccionar un símbolo en el desarrollo de una demostración de continuidad y convergencia uniforme.
EM6.1.3	Y entonces ya habíamos dicho que en la convergencia uniforme esta expresión [$\forall\ x \in$ Dom] va al inicio [$\forall\ x \in$ Dom, $\forall \varepsilon > 0$] en vez de estar acá [después de $\forall \varepsilon, \forall n \geq N$], ¿si?, porque en la convergencia simple yo fijo un x y miro la convergencia, en la convergencia uniforme yo fijo epsilon y N grande y digo la afirmación para todos los términos y eso es lo mismo que decir que el *sup* es menor a epsilon.	Conocimiento de que el orden en que son presentados los cuantificadores modifica el significado de una afirmación.
EM6.1.4	Entonces cuando empiezo la demostración digo sea épsilon positivo, entonces tengo que usar la hipótesis y la introduzco, pero la idea [de la demostración], yo sé que es esta desigualdad, por eso tomo épsilon sobre tres, porque se que después me va a servir, o puedo tomar un epsilon prima y después mostrar una relación entre épsilon y épsilon prima, esa es otra manera de hacerlo. Y lo que se escribí acá en paréntesis, lo escribí aparte para tener la idea de lo que hay que hacer.	Conocimiento de cómo utilizar de forma coherente el símbolo épsilon en el desarrollo de una demostración de continuidad y convergencia uniforme.
EM6.2.1	El ejercicio es demostrar que esta proposición es verdad y lo que queremos demostrar es la	Conocimiento de cómo realizar una demostración

	continuidad, entonces voy a escribir la definición de continuidad […] Sea épsilon positivo, suponemos delta= épsilon y tenemos que $d(x,a)$ inferior a delta implica $d_i(\Pi_i\ (x),\ a)$ inferior a $d(x,a)$, inferior a épsilon. Eso es lo que queríamos demostrar.	utilizando el método de demostración directa.
EM6.2.2	Yo tomo un épsilon positivo y quiero tener una desigualdad sobre d_i tal que esa distancia sea menor a épsilon, ¿ok? Luego, yo sé que $d_i(\Pi_i\ (x),\ a)$ es más chico que $d(x,a)$ que es menor a épsilon, entonces mi delta es épsilon. Suficiente, tomar delta igual a épsilon.	Conocimiento de la utilidad de seleccionar un símbolo en el desarrollo de una demostración de continuidad.
EM7.1	Esto es inferior a 2ε, pero aquí no me gusta el dos, ¿cierto?, entonces aquí divido por dos, entonces épsilon sobre dos más épsilon sobre dos es inferior a épsilon.	Conocimiento de cómo utilizar coherentemente el símbolo épsilon en el desarrollo de una demostración sobre sucesiones de Cauchy.
EM7.2	La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera: para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} es inferior a épsilon. Esta es la misma definición que la anterior solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n+p$. Esta otra definición la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de una sucesión de Cauchy.
EM7.3	Ahora miremos lo que estamos haciendo. Tenemos una sucesión que es de Cauchy, entonces nosotros vamos a demostrar que converge. Aquí pongo $\mathbb{R}$ aquí $\mathbb{N}$, aquí tengo un límite que existe, y tengo la sucesión acá. Lo que estoy haciendo, es que tomo un n particular, acá, y estoy mirando el *inf* que va a ser el a_n. Este a_n no va a ser el límite, pero si tomo n', cuando este n' va a ser más grande, ese n' va a acercarse al límite, ¿ok? Entonces, la intuición es que a_n converge, ahí está lo que vamos a demostrar.	Conocimiento del uso de un diagrama como estrategia para analizar el comportamiento de una sucesión.
EM7.4	Si, cualquier cosa, pero con 1 especifiqué el epsilon. Es que aquí, para usar la definición de sucesión de Cauchy, tengo que para todo ε	Conocimiento de la utilidad de seleccionar un símbolo en el desarrollo de una

	positivo, existe N positivo tal que X_N está acotado con $c = \varepsilon$, entonces yo quise hablar de un ε en concreto, pero también puedo escribir al principio fijamos ε positivo y N que depende de ε, ¿ok?, pero yo lo fije como 1.	demostración.
EM8.1	Y aquí uno ve que esto es casi la definición de continuidad, pero lo que quiero es que la implicación sea válida en cualquier lugar de mi intervalo, ¿ok?, entonces en vez de poner para todo x, y acá [antes del existe], lo voy a poner después del existe, y eso es exactamente lo que quiere decir uniforme, que en general, el para todo que iba al principio en la continuidad aquí va después del existe.	Conocimiento de que el orden en que son presentados los cuantificadores ($\forall\exists$, $\exists\forall$) modifica el significado de una proposición sobre continuidad y continuidad uniforme.
EM8.2	Voy a tomar una sucesión de polinomios de [0,1] en $\mathbb{R}[x]$ que no converge, ¿ok?, o que converge a algo que no sea un polinomio, y eso ya conocen un montón de cosas así. Si tomo la exponencial de x, esta es el límite cuando n va al infinito, de la suma en k de 0 a n de x a la k sobre k factorial. Esos dentro de la sumatoria son polinomios, y la exponencial claramente no es un polinomio, por lo cual eso [el espacio que se había definido] no puede ser completo porque la sucesión converge, y el límite no pertenece al espacio, no es un polinomio. Y el espacio no es completo, simplemente porque no es cerrado. Eso lo anoto ahora porque es una cuestión super importante, es un contraejemplo que realmente hay que guardar en la cabeza, que en los polinomios, si no fijo el grado, me va a dar una cosa que es mucho más complicada que lo que imagino yo, y sirve para muchas cosas de topología, entonces, aunque este espacio parece realmente un espacio completo, porque es super simple, el espacio de polinomios parece simple, pero no es completo.	Conocimiento de cómo construir un contraejemplo para refutar una afirmación sobre espacios métricos completos.

De acuerdo con la información expuesta (Tabla 12 y Tabla 13) y los descriptores correspondientes a la entrevista, realizamos una agrupación de los descriptores repetidos y similares. Así, en la Tabla 14 se presenta una síntesis del KPM de Juan. Descriptores repetidos se evidenciaron en cuanto al método de demostración por contradicción, la demostración de proposiciones bicondicionales, el uso de un diagrama como estrategia heurística, los cuantificadores y el uso de los símbolos. En cuanto a los descriptores similares encontramos aquellos relacionados con la generalización, el rol de los contraejemplos en el desarrollo de demostraciones y características como la equivalencia y la elegancia entre definiciones de un concepto.

Tabla 14
Síntesis del KPM de Juan

Episodios	Descriptores
EM1.1, EM3.1.2	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones usando el método de demostración por contradicción.
EM1.3, EM2.1	Conocimiento de cómo se demuestra una proposición bicondicional.
EM3.1.1, EEM10	Conocimiento de cómo generalizar un enunciado a partir de su particularización.
EM4.1, EM8.2, EEM8, EEM10	Conocimiento del rol de los contraejemplos en el desarrollo de demostraciones.
EM4.3, EM7.3	Conocimiento del uso de un diagrama como estrategia heurística para analizar un problema.
EM4.4, EM4.5	Conocimiento de la elegancia entre las definiciones equivalentes de un concepto.
EM5.1.1	Conocimiento de cómo negar una proposición con cuantificadores.
EM6.1.3, EM8.1	Conocimiento de que el orden en que son presentados los cuantificadores modifica el significado de una proposición.
EM6.1.4, EM7.1	Conocimiento de cómo utilizar de forma coherente un símbolo en el desarrollo de una demostración.
EM6.1.2, EM6.2.2, EM7.4	Conocimiento de la utilidad de seleccionar un símbolo en el desarrollo de una demostración.
EM7.2, EEM4	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto.
EM1.2	Conocimiento de cómo realizar una demostración de existencia.
EM4.2	Conocimiento del significado de los cuantificadores.
EM5.1	Conocimiento de cómo realizar una demostración por el método contrarecíproco.
EM6.1.1	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
EM6.2.1	Conocimiento de cómo desarrollar una demostración por el método directo.
EEM3	Conocimiento de los roles de verificación y explicación de la demostración.
EEM9	Conocimiento del uso de casos como estrategia heurística para resolver problemas.

Según puede observarse, se obtuvieron 18 descriptores del KPM de Juan tras la agrupación de descriptores asociados a los métodos y tipos de demostración, la particularización y la generalización, el uso de contraejemplos, características de la definición, el uso de símbolos y diferentes estrategias heurísticas para resolver problemas.

Siguiendo esta línea, en la Tabla 15 se resumen las subcategorías de KPM en el conocimiento de Juan.

Tabla 15

Subcategorías en el KPM de Juan

Subcategoría	Episodios	Descriptores
Particularización y generalización	EM3.1.1, EEM10	Conocimiento de cómo generalizar un enunciado a partir de su particularización.
Rol de los contraejemplos	EM4.1, EM8.2, EEM8, EEM10	Conocimiento del rol de los contraejemplos en la demostración.
Métodos de demostración	EM6.2.1	Conocimiento de cómo desarrollar una demostración por el método directo.
	EM1.1.2, EM3.1.2	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones por contradicción.
	EM5.1	Conocimiento de cómo realizar una demostración por el método contrarecíproco
Tipos de demostración	EM1.2	Conocimiento de cómo realizar una demostración de existencia.
	EM1.3, EM2.1	Conocimiento de cómo se demuestra una proposición bicondicional.
Roles de la demostración	EEM3	Conocimiento de los roles de verificación y explicación de la demostración.
Características de la definición	EM4.4, EM4.5	Conocimiento de la elegancia entre las definiciones equivalentes de un concepto.
	EM7.2, EEM4	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto.
Estrategias heurísticas de resolución de problemas	EM4.3.1, EM7.3.1	Conocimiento de la estrategia de utilizar un diagrama para analizar un problema.
	EM6.1.1	Conocimiento de la estrategia de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
	EEM9	Conocimiento de la consideración de casos como estrategia heurística para resolver problemas.
Uso de los símbolos	EM6.1.2, EM6.1.4, EM6.2.2, EM7.1, EM7.4	Conocimiento de la utilidad de seleccionar símbolos y usarlos de forma coherente.
Significado de los cuantificadores	EM4.2, EM6.1.3, EM8.1, EM5.1.1	Conocimiento del significado de los cuantificadores (incluyendo su negación).

De acuerdo con lo anterior, en el caso de Juan se han construido 7 subcategorías de conocimiento respecto a las prácticas de particularizar y generalizar, demostrar, definir y resolver problemas. Adicionalmente, se han construido dos subcategorías relativas al conocimiento del profesor de elementos asociados al uso del lenguaje matemático (símbolos y cuantificadores).

3.1.3 El conocimiento de la práctica matemática de Andrés

En esta sección se presenta la síntesis de los descriptores del KPM de Andrés evidenciados en el desarrollo de cuatro sesiones de clase como parte de un curso de Cálculo Vectorial. En la Tabla 16 se presentan los descriptores obtenidos en el análisis del KPM de Andrés.

Tabla 16

Descriptores del KPM de Andrés: Geometría vectorial y diferenciación

Episodios	Fragmentos	Descriptor
CV1.1	Andrés: Voy a tomar dos vectores $\vec{x}$ punto $\vec{y}$, ahora, ¿qué le hago? Cuando estaba en $\mathbb{R}^3$, demostramos que el producto punto tiene una interpretación con el ángulo, ahora es un poco al revés, yo no tengo noción de ángulo, entonces ¿qué voy a hacer?, voy a extender la fórmula que ya tenía en el producto punto […] ¿cómo extiendo esa fórmula? Estudiante: Con la norma y el producto punto, ahí sale. Andrés: Estoy de acuerdo, tomo $\vec{x}$ punto $\vec{y}$ dividido por la norma de $\vec{x}$ por la norma de $\vec{y}$. Yo no me puedo imaginar qué es lo que es un ángulo de $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, pero puedo extender la definición que tenía para $\mathbb{R}^2$ y para $\mathbb{R}^3$. ¿Cierto?, el ángulo [entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$] es el coseno a la menos uno [el arcocoseno] de este producto [$(\vec{x}\cdot\vec{y})/\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$]].	Conocimiento de cómo extender una definición de ángulo entre dos vectores en R_2 y R_3 a R_n.
CV1.2	La demostración es súper entretenida, de hecho, es la misma demostración que se hace después en análisis funcional, y tiene que ver con una parábola al final de cuentas […] Identificando ahí los conceptos de la parábola. Entonces, el discriminante es menor que 0 es decir que eso es menor que 0, listo, simplifico por cuatro y aplico raíz, y al aplicar raíz tengo que poner módulo, por lo tanto, x punto y siempre es menor o igual que la norma de x por la norma de y, ya, ahí tengo la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Listo!	Conocimiento de cómo utilizar el método de demostración directo.
CV1.3.1	Entonces, será que la definición de ortogonalidad es equivalente a que $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ […]? Vamos a ver si eso es cierto, si eso es consistente con la definición de ángulo entre vectores.	Conocimiento de la equivalencia entre la definición de ortogonalidad de vectores en R_n y la definición de ortogonalidad en R_2.
CV1.3.2	Andres: ¿Cómo se demuestra un si y solo si? Estudiantes: Para un lado y para el otro Andrés; Para un lado y para el otro, súper bien, pero si	Conocimiento de cómo se demuestra una proposición bicondicional.

	queremos ser más académicos, digamos doble implicación […]. Entonces, vamos hacia la primera implicación: supongamos que $\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{y}$. ¿Qué tenemos que mostrar? Que x por y es igual cero.	
CV1.3.3	Andrés: ¿Cómo lo puedo mostrar? Cuándo están desesperados y quieren hacer una demostración y no saben qué hacer, ¿qué hacen? Estudiante 1: Hacer un dibujito. Andrés: No, contradigan la tesis. ¿Qué significa contradecir aquí? Estudiante 2: Suponer que x punto y es distinto de cero.	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones utilizando el método de demostración por contradicción.
CV1.3.4	Andrés: Entonces supongamos que x punto y es distinto a cero, por lo tanto, x punto y va a ser un número estrictamente positivo o estrictamente negativo. Las demostraciones van a ser equivalentes, créanme. ¿Cuál quieren el positivo o el negativo? Estudiantes: El positivo. Andrés: Entonces sin pérdida de generalidad, puedo asumir que x punto y es mayor estricto que cero.	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de los otros casos en una proposición.
CV1.3.4	Ya y esto es para cualquier *t*, para el que yo quiera, como esto ocurre para todo *t*, para el que yo quiera, voy a asumir que *t* es negativo, como se cumple para todo *t* voy a asumir que *t* es menor que cero.	Conocimiento del significado del cuantificador universal.
CV2.1	Por demostrar que *B* es subconjunto de *A*, o sea que esta bola, que construí ahí, está totalmente contenida en el *A*. ¿Cómo se demuestra una inclusión de conjuntos? Tomo un punto que está acá [en *B*] y demuestro que está acá [en *A*] […] Bueno, hay que hacer lo que hay que hacer, tomo la raíz de *x* cuadrado más *y* cuadrado y veo si lo puedo hacer menor o igual a *r* […] entonces un punto que está en *B* satisface esto, calculo su norma y veo que su norma es menor estricta que *r*. Todos los "tipos" [elementos] que tienen norma menor estricta que *r* están en *A*. Partí de alguien que estaba en *B* y compruebo que está en *A*. Entonces las bolas, en general las bolas abiertas como ésta son conjuntos abiertos.	Conocimiento de cómo demostrar una inclusión de conjuntos (método de demostración directo).
CV2.2	Si esto no esta pasando es porque existe alguna vecindad del 1 […] tal que para que ninguna vecindad U de este punto (0,0) eso se cumpla [$f(U \cap A) \subseteq V$],	Conocimiento de cómo negar una proposición con cuantificadores.
CV2.3	Entonces diremos que limite cuando *x* tiende a x_0, de *f* de *x* es igual a *b*, sí solo sí, para todo épsilon mayor que cero, ese para todo épsilon mayor que cero me esta diciendo para cualquier vecindad *V* de *b*, para bolas en torno a *b* tan pequeñas como yo lo desee. Existe un	Conocimiento de la equivalencia entre una definición de límite en términos de vecindades y una en términos de épsilon

	delta mayor que cero, ahí voy a decir que existe una vecindad *U* de x_0 en el dominio, tal que, si *x* pertenece al dominio, y la norma de *x* menos el x_0 es menor que delta. Aquí estoy diciendo, si el *x* pertenece al *A* y su norma es menor que el delta significa que *x* pertenece a la vecindad $U \cap A$, entonces la distancia de *f* de *x* a *b* es mas chica que épsilon. Lo que estoy diciendo acá es lo siguiente. Tomo el *b*, me construyo una bola de radio épsilon en torno al *b* y acá esta el x_0, el x_0 puede o no estar en el dominio. La gracia es que si el *x* esta en el *A*, si el *x* está en el conjunto *A* y su distancia de x_0 es menor que delta, entonces bajo la función tengo que ir a parar acá, es decir, *f* de *x* menos *b* tiene que ser menor estricto que esto. El *f* de *x* tiene que estar dentro de esa bola [una bola de radio épsilon]. Es la misma definición que esta acá, pero con objetos matemáticos que puedo manipular, vamos a ver como se usa.	y delta.
CV3.1	Andrés: ¿Qué herramientas tengo?, ¿cómo lo puedo hacer?, ¿el módulo de *x* a quien es menor o igual? El módulo de *x*, ¿cuál es? Estudiante: Raíz de *x* cuadrado. Andrés: Raíz de *x* cuadrado. ¿Este número de acá [$\sqrt{x^2}$] es más chico que este número de acá [$\sqrt{x^2+y^2}$]? Estudiantes: Sí. Andrés: Bueno, entonces lo uso, esto mas chico que *x* cuadrado mas *y* cuadrado [$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$] ¿Qué pasa si ahora multiplico todo esto por modulo de *x*? […] Y el módulo de *x* yo se que es mas chico que la raíz de *x* cuadrado más *y* cuadrado, $x^2/\sqrt{x^2+y^2} \leq \lvert x\rvert \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ¿si o no?	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
CV4.1	Ahora les voy a dar una condición suficiente, pero no necesaria, solamente suficiente. Este si sirve para demostrar que una función es diferenciable en un punto, la condición necesaria sirve para demostrar que no es diferenciable, porque si no es continua, ni a palos es diferenciable. Entonces, el teorema dice que si tengo una función de la cual existen las derivadas parciales y son continuas entonces puedo concluir que la función es diferenciable.	Conocimiento del uso de la condición suficiente para demostrar la diferenciabilidad.
CV4.2	Tengo una *f* que es diferenciable, sin embargo, las derivadas parciales no son continuas, tengo una *f* que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Entonces puede darse este caso, que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Ya, pero como la *f* es diferenciable, las derivadas parciales existen, y la *f* es	Conocimiento del uso de la condición necesaria para demostrar la no diferenciabilidad

	continua, esta implicancia funciona, pero de acá a acá no funciona. *f* es continua, existen derivadas parciales pero *f* no es diferenciable.

De acuerdo con los descriptores antes expuestos, en la Tabla 17 se presenta una síntesis del KPM de Andrés.

Tabla 17

Sintesís del KPM de Andrés

Episodios	Descriptor
CV1.1, ECV7, ECV8	Conocimiento de cómo extender una definición de ángulo entre dos vectores en R_2 y R_3 a R_n.
CV1.2, CV2.1	Conocimiento de cómo utilizar el método de demostración directo.
CV1.3.1, CV2.3, ECV8	Conocimiento de la equivalencia entre la definición de ortogonalidad de vectores en R_n y la definición de ortogonalidad en R_2.
CV1.3.2	Conocimiento de cómo se demuestra una proposición bicondicional.
CV1.3.3	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones utilizando el método de demostración por contradicción.
CV1.3.4	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de los otros casos en una proposición.
CV1.3.4, CV2.2	Conocimiento del significado del cuantificador universal y la negación de los cuantificadores
CV3.1	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
CV4.1, CV4.2	Conocimiento del uso de la condición suficiente para demostrar la diferenciabilidad y de la condición necesaria para demostrar la no diferenciabilidad.

Según puede observarse, en el conocimiento de Andrés se identificaron descriptores similares que se refieren a la construcción de una definición, la equivalencia entre definiciones de un concepto, las características de no ambigüedad y no contradicción de una definición y el significado de condiciones necesarias y suficientes. Adicionalmente encontramos un descriptor repetido en cuanto al el método de demostración directo. De este modo, en la etapa de síntesis se obtienen 9 descriptores del KPM de Andrés, con los cuales obtenemos las subcategorías de conocimiento que se exponen en la Tabla 18.

Tabla 18

Subcategorías en el KPM de Andrés

Subcategoría	Episodios	Descriptores
Particularización y generalización	CV1.3.4	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de los otros casos en una

		proposición.
Métodos de demostración	CV1.2, CV2.1	Conocimiento de cómo utilizar el método de demostración directo.
	CV1.3.3	Conocimiento de cómo se realizan demostraciones por contradicción.
Tipos de demostración	CV1.3.2	Conocimiento de cómo se demuestra una proposición bicondicional.
	CV4.1, CV4.2	Conocimiento del significado de las condiciones necesarias y suficientes.
Roles de la demostración	ECV14	Conocimiento del rol de convicción de la demostración.
Construcción de definiciones	CV1.1, ECV7, ECV8	Conocimiento de cómo construir una definición a partir de la extensión de otra.
Características de la definición	ECV1, ECV2	Conocimiento de las características de no ambigüedad y no contradicción de una definición.
	CV1.3.1, CV2.3, ECV8	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto.
Estrategias para resolver problemas	CV3.1	Conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema.
	ECV12	Conocimiento de la estrategia heurística de considerar casos para resolver problemas.
Significado de los cuantificadores	CV1.3.4, CV2.2	Conocimiento del significado de los cuantificadores (incluyendo su negación).

De acuerdo con lo anterior, se han construido 8 subcategorías en el conocimiento de Andrés que hacen referencia a las prácticas de particularizar y generalizar, demostrar, definir, resolver problemas, así como su conocimiento del significado de los cuantificadores en la comunicación de ideas matemáticas.

3.2 Subcategorías de conocimiento de la práctica matemática

En esta sección se presentan las 8 subcategorías de KPM que emergen del análisis conjunto de las subcategorías de conocimiento de cada profesor. Cada subcategoría de KPM es delimitada y nombrada a partir de la revisión de la literatura y además es ejemplificada con fragmentos de los episodios de clase y de las entrevistas (Anexo 2) en los cuales dicho conocimiento fue evidenciado. Al finalizar la exposición de cada subcategoría se presenta una tabla que sintetiza los episodios considerados y los descriptores de conocimiento asociados a ellos.

3.2.1 Desarrollo de demostraciones

En la literatura de investigación el término demostración puede ser entendido de diferentes formas que involucran expresiones como explicación, argumentación, razonamiento, verificación y justificación. A su vez, la demostración es comprendida dando prevalencia o combinando aspectos disciplinares, sociales, cognitivos, epistemológicos y didácticos. Así, por ejemplo, Rota (1997) describe una demostración matemática desde una perspectiva formal como una secuencia de pasos lógicos que llevan a una conclusión deseada. Por su parte, Hersh (1997) le da un significado subjetivo expresando que una demostración tiene como propósito convencer a la comunidad matemática de la verdad de un teorema. En esta línea, Harel y Sowder (2007) usan el término demostración para referirse a aquello que establece la verdad para una persona o una comunidad. Desde esta postura, la demostración es cercana a la idea de justificación, permea todo el currículo escolar, y se distingue de la noción institucionalizada de demostración matemática. Stylianides et al. (2017) agregan que la demostración en el contexto de la comunidad de una sala de clases es un argumento matemático que utiliza un conjunto de proposiciones aceptadas como ciertas, modos de argumentación válidos y modos de representación de los argumentos apropiados. Los autores señalan que esta descripción puede ser utilizada para analizar la demostración en cualquier nivel educativo.

Considerando lo anterior, coincidimos con Stylianides, Sandefur y Watson (2016) en que demostrar es una actividad de búsqueda de un argumento válido que se apoya de las actividades de generalizar y conjeturar como precursoras de su producción. Además, relacionamos el uso de contraejemplos para mostrar la falsedad de una afirmación con la actividad de conjeturar. Siguiendo estas ideas, describimos una subcategoría de KPM, denominada *desarrollo de demostraciones,* la cual resulta de la integración del conocimiento de los profesores de la particularización, la generalización y la construcción y uso de contraejemplos.

En el siguiente episodio de clases [ED5.1], con el propósito de demostrar una propiedad de la exponencial de una matriz, Diego está discutiendo con los estudiantes el cálculo de la expresión $(PBP^{-1})^n$ en la siguiente forma:

Diego: Entonces, si quiero calcular la exponencial, empecemos por $(PBP^{-1})^n$. Primero, lo voy a calcular al cuadrado, $(PBP^{-1})^2$ y eso queda P por B por P^{-1} por P, por B y por P^{-1} $[(PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})]$. Y lo que va a pasar es que estas dos del medio se van a cancelar [señala PP^{-1}] y me queda PB^2P^{-1}. Si lo pusiera al cubo, las del medio se van a cancelar, efectivamente $(PBP^{-1})^3 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})$ y PP^{-1} es la matriz identidad y nuevamente aparece PP^{-1} que es la identidad, entonces cuando lo tengo al cubo me queda P por B por B por B por P^{-1} ¿Está bien? PB^3P^{-1}. Así, lo que podemos deducir, aunque hay que hacer la prueba por inducción, es que si coloco la expresión a la n, entonces B queda a la n, o sea, $(PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$.

En el episodio, Diego expone su conocimiento de que el trabajo con casos particulares genera ideas que guían hacia la generalización. Este conocimiento también está presente en la entrevista [EED3] cuando el profesor afirma:

Diego: Para generalizar, primero se te tienen que ocurrir los casos particulares y tienes que saber discriminar cuáles de esos casos particulares son los que te sirven o los que te van a dar luces para el problema general.

En la intervención anterior [EED3], las generalizaciones ocurren porque hay una regla que resume las características de los casos específicos, lo que McLane (1986) llama generalización a partir de casos. Adicionalmente, en el episodio de clase [ED5.1], la generalización se hace de forma estructural (Bills y Rowland, 1999), pues se basa en los procedimientos (el producto de matrices) y la estructura subyacente (la obtención de la matriz identidad y el producto de la matriz B). Así, esta generalización involucra la búsqueda de patrones, estructuras y relaciones que trascienden.

Por otra parte, el conocimiento de la particularización y la generalización también se observa en el siguiente episodio donde Andrés expresa que pueden hacer una suposición sin pérdida de generalidad [CV1.3.4]:

Andrés: Entonces supongamos que x punto y es distinto a cero, por lo tanto, x punto y va a ser un número estrictamente positivo o estrictamente negativo. Las demostraciones van a ser equivalentes, créanme. ¿Cuál quieren el positivo o el negativo?
Estudiantes: El positivo.
Andrés: Entonces sin pérdida de generalidad, puedo asumir que x punto y es mayor estricto que cero.

De manera similar, en el siguiente episodio [AR1.2], Diego reflexiona en cómo la selección de a y b números positivos resume lo que sucede en una proposición y permite reducir la extensión de una demostración:

Diego: Tome un intervalo $[a, b]$ cualquiera y vamos a medir la longitud del intervalo [...] longitud $b - a$, entonces esa longitud yo le voy a llamar épsilon que es un número positivo porque a es menor que b, entonces la longitud es positiva. Vamos a suponer que a y b son dos números positivos, que no es una gran suposición porque si fueran negativos, por ejemplo, trabajo con $-a$ y $-b$ [...] Y si encuentro un numero racional acá [entre $-a$ y $-b$], entonces el negativo de ese número va a ser racional, si encuentro un número irracional, su negativo es otro irracional. Y si uno es positivo y el otro es negativo, entonces el cero es racional y está entre los dos, el irracional va a salir después, en una proposición.

Se observa entonces, que el profesor muestra su conocimiento de que un caso particular puede ser suficiente para mostrar el comportamiento de los otros casos que hay en una proposición.

Por su parte, en el siguiente episodio [EM4.1], Juan solicita a los estudiantes realizar algunas demostraciones de las nociones de clausura, interior y frontera de un conjunto. Luego de que los estudiantes demostraran la proposición: si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$, Juan cuestiona si el recíproco de esa proposición se cumple. Posteriormente, el profesor interviene señalando:

Juan: Veamos un $\bar{A}$ que este incluido en $\bar{B}$ pero que A no esté incluido en B ¿ok? entonces tenemos que tomar A y B muy cercanos pero que se diferencien por unos puntos. Estos contraejemplos en general, se encuentran en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o si no hay que mirar la distancia

> trivial, el espacio de sucesiones o el espacio de funciones. Entonces, vamos a tomar el segmento [0,1] que es lo mismo que $\bar{A}$ porque es cerrado […] Voy a tomar [0,1] con menos puntos, puedo solo borrar uno de los puntos, entonces si B es igual a [0,1), por ejemplo, entonces, $\bar{B}$ es igual a [0,1] así que $\bar{B}$ contiene a $\bar{A}$, pero A no esta incluido en B ¿ya? y así hay muchos contraejemplos.

En el episodio anterior, se observa que Juan expone una idea clave para desarrollar el contraejemplo sobre clausura de conjuntos: tomar conjuntos cercanos pero que se diferencien por unos puntos. Además, Juan señala los espacios y distancias pueden ser analizados en busca de posibles contraejemplos relacionados con la clausura de conjuntos. Similarmente, en otro episodio de clase [EM8.2], Juan da recomendaciones a los estudiantes sobre las características de las funciones que deben considerarse al momento de pensar en contraejemplos sobre espacios completos.

En la entrevista [EEM8], Juan profundiza en la importancia de los contraejemplos, afirmando lo siguiente:

> *Bueno, una de las metas del curso era hacer ejemplos y contraejemplos, el objetivo era pasar de ese nivel baby world [infantil, concreto] al mundo abstracto […] Y el contraejemplo es para destruir algo que están construyendo pero que es falso, yo justamente al principio los empujo a construir cosas y luego empezamos a destruir. A veces ellos [los estudiantes] piensan que algo es cierto y cuando hacen un contraejemplo se dan cuenta que no es cierto […] porque ellos [los estudiantes] ven generalidades donde no las hay, pero también como profesor uno a veces los empuja a hacer generalidades, entonces para afinar un poco la generalización de las cosas se hacen los contraejemplos.*

Según lo anterior, Juan muestra su conocimiento de estrategias para construir contraejemplos y del rol de los contraejemplos en el desarrollo de demostraciones. Lakatos (1976) ilustra el proceso de uso de contraejemplos para refinar afirmaciones y construir pruebas. Adicionalmente, Durand-Guerrier (2008) señala que las afirmaciones matemáticas y los argumentos son frágiles a un contraejemplo, pues a diferencia de los ejemplos que no producen una prueba, los contraejemplos sí prueban la falsedad de una afirmación. En esta línea, las tareas de demostración que tienen el propósito de refutar una proposición pueden servir para generar nuevo conocimiento en el contexto de una comunidad de clases y ofrecer una idea sobre por qué una proposición es falsa (Stylianides y Ball, 2008).

Adicionalmente, los ejemplos y los contraejemplos revelan propiedades y relaciones para respaldar conjeturas, generalizaciones y demostraciones. Lo anterior está en consonancia con la declaración de Juan de que los contraejemplos sirven para "afinar generalizaciones", lo cual da cuenta del conocimiento del profesor del rol de los contraejemplos en la generalización.

Los episodios antes expuestos dan evidencia del conocimiento de los profesores de la generalización y el uso de casos particulares y su conocimiento sobre los contraejemplos. En la Tabla 19 se resumen estos elementos como componentes de la subcategoría *desarrollo de demostraciones.*

Tabla 19

Subcategoría desarrollo de demostraciones

Desarrollo de demostraciones	
ED5.1, EED3, EM3.1.1, EEM10	Conocimiento de que el trabajo con casos particulares genera ideas para la generalización.
AR1.2, CV1.3.4	Conocimiento de que un caso particular puede mostrar el comportamiento de otros casos en una proposición (sin pérdida de generalidad).
EM4.1, EM8.2, EEM8, EEM10	Conocimiento de estrategias para construir contraejemplos y el rol de los contraejemplos en el desarrollo de demostraciones y generalizaciones.

3.2.2 Métodos y tipos de demostración

Ibañes y Ortega (1997) proponen clasificar las formas de demostración más usuales en términos de tipos, métodos, estilos y modos de demostración. Los tipos de demostración atienden a la estructura lógica del enunciado y se relacionan con la implicación siendo de condición necesaria, de condición suficiente o de condición necesaria y suficiente. Además, aquellas demostraciones relacionadas con la existencia ya sea de existencia simple, imposibilidad o existencia y unicidad se agrupan en los tipos de demostración. En relación a los métodos de demostración estos son aquellos que atienden a los procedimientos lógicos y pueden ser por silogismo, por casos, reducción al absurdo, inducción, demostraciones por el método constructivo, y las demostraciones por analogía y dualidad. En cuanto a las demostraciones que tienen que ver con los procedimientos propios de un área de la matemática estas pueden ser de estilo geométrico, algebraico, de las coordenadas, vectorial, del análisis matemático probabilístico, topológico, entre otros. Además, de acuerdo al procedimiento de exposición de las teorías matemáticas se consideran las demostraciones de modo sintético o directo que es un modo propio a la presentación formalizada de resultados matemáticos y de modo analítico o indirecto que es más adecuado para la exposición didáctica pues se presentan ideas y procedimientos previos a la demostración.

Por su parte, Alfaro, Flores y Valverde (2019) clasifican los tipos de demostraciones en matemáticas en dos grupos fundamentales: demostraciones directas y demostraciones indirectas. Las demostraciones directas se basan en las reglas de inferencia silogismo hipotético y *modus ponendo ponens*, mientras que en las demostraciones indirectas se distinguen las demostraciones por contraposición y aquellas por reducción al absurdo. Adicionalmente, los autores se refieren a la demostración de proposiciones conjuntivas, disyuntivas, exhaustivas, bicondicionales y con cuantificadores, las cuales pueden ser demostradas de forma directa o indirecta.

A partir de las clasificaciones teóricas expuestas y las evidencias de conocimiento identificadas describimos una subcategoría de KPM denominada *métodos y tipos de demostración*, en la cual consideramos el conocimiento del profesor del funcionamiento lógico de los métodos de demostración: el método directo, los métodos indirectos (contradicción y contrarecíproco) y el método de demostración por inducción. Además, consideramos el conocimiento del profesor de la estructura que tiene la demostración de proposiciones de doble implicación y, en particular, su conocimiento de cuando una condición es suficiente o necesaria. También tenemos en cuenta, el conocimiento del profesor de las formas en que se pueden realizar demostraciones de existencia y/o unicidad.

En el episodio que se presenta a continuación [CV2.1], Andrés se propone demostrar que una bola abierta es un conjunto abierto:

> Andrés: […] por demostrar que B es subconjunto de A, o sea que esta bola, que construí ahí, está totalmente contenida en el A. ¿Cómo se demuestra una inclusión de conjuntos? Tomo un punto que está acá [en B] y demuestro que está acá [en A] […] Bueno, hay que hacer lo que hay que hacer, tomo la raíz de x cuadrado más y cuadrado y veo si lo puedo hacer menor o igual a r […] entonces un punto que está en B satisface esto, calculo su norma y veo que su norma es menor estricta que r. Todos los “tipos” [elementos] que tienen norma menor estricta que r están en A. Partí de alguien que estaba en B y compruebo que está en A. Entonces las bolas, en general las bolas abiertas como ésta son conjuntos abiertos.

Lo anterior es un ejemplo del conocimiento del profesor de cómo realizar una demostración de una proposición condicional por el método directo, ya que Andrés, partiendo de la definición de bola abierta, hace uso de resultados previamente establecidos como la definición de inclusión de conjuntos y la desigualdad triangular para construir una sucesión de implicaciones que llevan a afirmar que dicha bola es un conjunto abierto.

En el siguiente episodio [CV1.3], Andrés define la ortogonalidad de vectores en el espacio real n-dimensional de la siguiente forma: Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales si y sólo si $\|\vec{x}+t\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Luego, el profesor se propone demostrar que esa definición coincide con la definición de ortogonalidad en un espacio de dos dimensiones:

> Andrés: Entonces, será que la definición de ortogonalidad es equivalente a que $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ […]? Vamos a ver si eso es cierto, si eso es consistente con la definición de ángulo entre vectores. Entonces, ¿cómo se demuestra un sí y solo sí?
>
> Estudiante: Para un lado y para el otro.
>
> Andrés: Para un lado y para el otro, súper bien, pero si queremos ser más académicos, digamos doble implicación […]. Entonces, vamos hacia la primera implicación: supongamos que $\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{y}$. ¿Qué tenemos que mostrar? Que x por y es igual cero. ¿Cómo lo puedo mostrar? Cuándo están desesperados y quieren hacer una demostración y no saben qué hacer, ¿qué hacen?
>
> Estudiante 1: Hacer un dibujito.
>
> Andrés: No, contradigan la tesis. ¿Qué significa contradecir aquí?
>
> Estudiante 2: Suponer que x punto y es distinto de cero.

En este episodio, cuando Andrés señala “*si queremos ser más académicos digamos doble implicación*” y cuando afirma “*Entonces, vamos hacia la primera implicación*”, se observa el conocimiento de Andrés de la estructura de la demostración de una *proposición bicondicional.* Además, el profesor da cuenta de su conocimiento de cómo realizar una *demostración por el método de contradicción*, cuando propone a los estudiantes contradecir la tesis y luego cuestiona qué significa contradecir, o cómo se expresa una contradicción en el contexto en que se desarrolla la demostración. El método de demostración por contradicción es de especial trascendencia en el quehacer matemático y presenta una problemática epistemológica debido a que genera una ruptura dentro de las escuelas matemáticas formalistas e intuicionistas (Sáenz-Castro, 2002).

Respecto a las proposiciones bicondicionales, también resaltamos el conocimiento de Diego *de condiciones suficientes y necesarias*, el cual se expone en el siguiente fragmento de la entrevista [EAR4]:

> *Tú tienes p implica q, una proposición de este estilo, p es una condición suficiente para q, y q es una condición necesaria para p, y cuando doy flecha [la doble implicación] p es necesaria y suficiente para q y q es necesaria y suficiente para p. Por ejemplo, si una función es derivable entonces es continua, ser derivable es suficiente para que una función sea continua, pero puede ser continua sin ser derivable. Ahora, ser continuo es necesario para que sea derivable pero no es suficiente. El que implica es suficiente, el implicado es necesario. Por ejemplo, si es un número natural entonces es racional, ser racional no es suficiente para ser natural, pero al revés si, ser natural es suficiente para ser racional.*

En relación con lo anterior, Cabassut, Conner, İşçimen, Furinghetti, Jahnke, y Morselli (2011) señalan que es importante expresar a los estudiantes la idea de que en una proposición de tipo *si-entonces* no probamos un hecho *B*, probamos la proposición si *A* entonces *B*. Además, Dawkins y Hub (2017) proponen comprender las proposiciones condicionales como aquellas que son ciertas cuando el conjunto de objetos que satisface la parte *si* es un subconjunto de los objetos que satisfacen la parte *entonces*. Desde esta interpretación, una proposición bicondicional o de condición necesaria y suficiente es aquella donde los objetos en la parte *si* y en la parte *entonces* coinciden.

Adicionalmente, el siguiente episodio [EM5.1], encontramos evidencia del conocimiento del profesor de cómo utilizar varios métodos para demostrar un determinado tipo de proposición. Juan demuestra un teorema sobre la continuidad de funciones y sucesiones que está expresado en una proposición de tipo bicondicional. El profesor muestra una de las implicaciones por el método directo y la siguiente implicación es demostrada de la siguiente forma:

> Juan: Entonces lo que vamos a demostrar es que no *B* implica no *A*. Entonces ¿qué es no *B*?, es que existe una sucesión x_n que converge a *a*, tal que $f(x_n)$ no converge hacia $f(a)$ […] Ahora, quiero decir que esta función *f* de *M* en *N* no va a ser continua ¿ok?, si *f* es continua, para todo épsilon positivo existe delta positivo tal que *f* de la bola de centro *a* y radio δ está incluida en la bola de centro $f(a)$ y radio ε, tenemos esto ¿cierto?, eso quiere decir que voy a tener una sucesión de elementos que van dentro de la bola $f(B(a,\delta)$ tal que las imágenes no están dentro de la bola $B(f(a), \varepsilon)$ y eso es absurdo.

En el extracto anterior observamos el conocimiento de Juan de cómo utilizar el *método de demostración por contrarecíproco* también llamado por contraposición. El funcionamiento lógico del método proviene de suponer que *A* y la negación de *B* son verdaderos, para llegar a la contradicción de que la negación de A también es verdadera. Lo anterior, también puede expresarse en la manera que presenta Juan, considerando la equivalencia lógica $A \rightarrow B \leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$. Cualquiera de las dos formas de pensar el método da a quien realiza la demostración la ventaja de dirigirse hacia la contradicción específica $A \wedge \sim A$ y esto es lo que diferencia al método contrapositivo del método de demostración por contradicción donde no se sabe de antemano qué contradicción se puede obtener (Solow, 1987). No obstante, los argumentos construidos para demostrar por el método contrapositivo pueden reescribirse como argumentos de una demostración por contradicción y viceversa, de modo que ambos métodos pueden ser vistos como similares (Yopp, 2017).

Por otra parte, Diego había sugerido a los estudiantes mostrar por inducción una propiedad que involucra una matriz a la n-ésima potencia [ED5.1]. En la entrevista [EED22] se solicita al profesor comentar este episodio y referirse al método de demostración por inducción, ante lo cual Diego señala:

> *Lo que estás chequeando cuando haces inducción es la definición de los naturales […] lo que pasa es que la inducción no es sobre las matrices, nunca es sobre un objeto que no sea un numero natural […]. Lo que dice la propiedad de inducción es que, si tengo un subconjunto de números naturales cualquiera, tal que 1 está en S y si n está en S implica que el sucesor está en S, entonces S tiene que ser igual a los naturales […] y eso es lo que permite cambiar entre distintos contextos, porque la propiedad [de inducción] se termina probando sobre los números naturales, no sobre el contexto que estás trabajando.*

De acuerdo con la intervención anterior, Diego da cuenta de cómo realizar demostraciones por el *método de inducción*, particularmente el profesor muestra su conocimiento del principio de inducción matemática como justificación del funcionamiento de dicho método. Ernest (1984) señala que el método de demostración por inducción, además de incluir el concepto de implicación y el método de demostración directo, está sustentado en la buena ordenación de los números naturales y la recurrencia como característica clave del paso de inducción (suponer la proposición para n y probarla para $n+1$).

Consideramos ahora el siguiente episodio [ED2.1.1] donde el profesor demuestra el teorema del punto fijo de Banach: Sea *(X, d)* un espacio métrico completo y F una contracción, entonces existe un único punto fijo para F.

> Diego: En la demostración tomemos un punto cualquiera $x \in X$, entonces para n igual o mayor que 1, definamos x_n, la sucesión F compuesta con $F(x)$, n veces. A esa sucesión la voy a llamar la potencia F_n […], esa sucesión que construí, x_n es de Cauchy […] entonces, existe un número z_0 en X tal que el límite de x_n cuando n es infinito es el punto z_0 […] Bien, entonces, el límite de $F(x_n)$ es el límite de $F(F_n(x_n))$ pero entonces esto que está aquí [$F(F_n(x_n))$] no es otra cosa que $F_{n+1}(x)$ y esto que está acá [$F_{n+1}(x)$] es el límite de x_{n+1}, pero si el límite de x_n es z_0, el límite de x_{n+1} es lo mismo, así que esto $F(z_0)$ me queda igual a z_0. Así que z_0 es un punto fijo.

Observamos entonces evidencia del conocimiento de Diego de cómo realizar *demostraciones de existencia*. En particular, el profesor muestra la existencia del punto fijo a partir de su construcción. En la entrevista [EAR8], Diego hace alusión al teorema demostrado señalando lo siguiente:

Hay demostraciones que en realidad lo único importante es la demostración, la afirmación no te dice nada y la demostración te da una técnica para. Por ejemplo, en el teorema del punto fijo, el argumento para darle sustento a la afirmación, también te dice cómo encontrar el punto y ahí la demostración es más valiosa que el enunciado, en realidad, y así, hay demostraciones que te dan el algoritmo para generar, para calcular [algo].

Diego continúa profundizando en las ideas anteriores, cuando expresa [EED16]:

En cambio [a diferencia del teorema del punto fijo], en el teorema de la función implícita, ni el teorema ni su demostración te dicen cómo encontrar esa función. Por eso, los dos [el teorema del punto fijo y el teorema de la función implícita] son teoremas de existencia, pero de calidad súper distinta, porque en uno es el hecho de que existe y el otro te dice existe y se puede aproximar así.

En línea con las intervenciones expuestas, cuando el profesor reflexiona sobre los dos teoremas de existencia de "calidad distinta", da muestras de su conocimiento de *demostraciones de existencia constructivas y no constructivas*. Las constructivas explícitamente producen el resultado deseado o proveen un algoritmo para su producción, mientras que las no constructivas establecen el teorema como una consecuencia de teoremas anteriores o como una necesidad lógica, pues al razonar de forma diferente produciría una contradicción en la teoría de referencia (Brown, 2017).

Sumado a lo anterior, Diego nuevamente se refiere a las demostraciones de existencia indicando lo siguiente [EED20]:

A veces, tú no muestras la existencia del objeto explícitamente ¿Cómo sabes que existe raíz de dos? [...] No hay ninguna demostración. Lo que uno demuestra es que no puede haber en los reales un número que al cuadrado me de dos, eso es lo que tu demuestras.

Según lo expuesto, Diego se refiere a demostraciones que niegan la existencia, también conocidas como demostraciones de imposibilidad, siendo un ejemplo de ellas la demostración de la irracionalidad de raíz de dos (Ibañes y Ortega, 1997).

Adicionalmente, el teorema del punto fijo de Banach para el cual Diego ya había mostrado la existencia, también es un teorema de unicidad [ED2.1.2]:

Diego: El teorema no termina ahí, además dice que [el punto fijo] es único. Supongamos que haya otro. Si z_1 distinto a z_0 es otro punto fijo de F ¿qué pasa? Entonces, ¿cuánto vale la distancia de z_1 a z_0? Bueno, no sé, pero debe ser positiva, estrictamente positiva, porque son distintos. Entonces $F(z_1) = z_1$, así que poner z_1 o $F(z_1)$ es lo mismo porque son puntos fijos y poner z_0 o $F(z_0)$ es lo mismo. Pero esto, por ser una contracción la distancia $d(F(z_1), F(z_0))$ es más pequeña que la distancia $d(z_1,z_0)$. Entonces, ¿cómo es que un número positivo es estrictamente más pequeño que él mismo? No puede ser, por lo tanto, z_0 es único.

Respecto a las demostraciones de unicidad, Diego señala [EED19]:

La unicidad típicamente se demuestra por contradicción o suponiendo que hay dos y *demuestras que son iguales, eso es como lo clásico. Ahora no se me ocurre ninguna otra manera. Yo diría que esa es la primera cosa que intentaría.*

En línea con los episodios anteriores, Diego expone su conocimiento de cómo realizar *demostraciones de unicidad*. Adicionalmente, el profesor se refiere a la importancia de este tipo de demostraciones, cuando señala en la entrevista [EED5]:

Pero lo fundamental es que, en este caso, casi todas las ecuaciones corresponden a problemas físicos, entonces si la solución es única sabes que no son los movimientos posibles, es el movimiento posible, no hay más. O sea, tengo los planetas, la velocidad inicial, y por más complejos que se muevan, se van a mover de una única manera, no se van a mover de dos maneras distintas. Tienes la temperatura, tienes la presión, tienes la humedad, y sabes que el clima va a comportarse de una única forma, no hay dos posibles.

De acuerdo con los episodios que se han expuesto donde se evidencia el conocimiento de los profesores de cómo realizar demostraciones de diferentes tipos, usando varios métodos de demostración, en la Tabla 20, se resumen los componentes de la subcategoría *métodos y tipos de demostración*.

Tabla 20
Subcategoría métodos y tipos de demostración

Métodos y tipos de demostración	
EM6.2.1, CV1.2, CV2.1	Conocimiento de cómo realizar una demostración por el método directo.
AR1.5, AR1.7, EED25, EM1.1, EM3.1.2, CV1.3.3	Conocimiento de cómo realizar demostraciones por reducción al absurdo (contradicción).
EM5.1	Conocimiento de cómo realizar demostraciones por contrarecíproco.
EED22	Conocimiento de cómo realizar demostraciones por inducción.
EM1.3, EM2.1, CV1.3.2 EAR4, CV4.1, CV4.2	Conocimiento de cómo demostrar proposiciones condicionales y bicondicionales (condiciones suficientes y necesarias).
AR1.4.2, EAR3, EAR8, EED16, ED2.1.1, EED20, EED21, EED27, EM1.2	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de existencia (constructivas, no constructivas y de imposibilidad).
ED2.1.2, ED3.1, EED5, EED19	Conocimiento de cómo realizar demostraciones de unicidad.

3.2.3 Roles de la demostración

Con base en consideraciones epistemológicas y en el testimonio personal de matemáticos activos, De Villiers (1990) describe un conjunto de roles y funciones de la demostración en matemáticas. En la función de verificación se considera la faceta de proveer un argumento de que una afirmación es cierta y la faceta de convencer a otra persona o a un grupo de que una afirmación es cierta. Por su parte, la demostración como un medio de explicación se relaciona con la profundidad en por qué es verdad una afirmación. En muchos casos hay resultados que son evidentes o que ya han sido demostrados por lo cual la función de la demostración no es asegurarse de, sino explicar por qué. En cuanto a la sistematización del conocimiento existente, en esta función se considera que la demostración está intrínsecamente involucrada en el proceso matemático de axiomatización y definición *a posteriori* que forma la columna vertebral de la sistematización, así, en esta función la demostración tiene por objetivo organizar lógicamente un conjunto de enunciados independientes, que de antemano se sabe que son verdaderos, en un todo coherente y unificado. Además, para los matemáticos, la demostración también es un método de exploración, análisis e inventiva cumpliendo una función de descubrimiento y una manera única de comunicar resultados entre matemáticos, entre profesores y estudiantes y entre los mismos estudiantes, desempeñando de este modo una función de comunicación. Estos roles y funciones de la demostración están ligados y una misma demostración puede servir para varios propósitos. Staples, Bartlo y Thanheiser (2012) señalan que la verificación, sistematización y comunicación son actividades importantes para establecer, difundir y lograr nuevo conocimiento. De manera similar, la explicación y el descubrimiento están relacionados con expandir las capacidades de la comunidad para generar nuevos resultados en el futuro.

Weber (2002) ejemplifica el propósito de verificación (y no de explicación) refiriéndose a cualquier demostración del teorema de Heine-Borel (todo intervalo cerrado y acotado en los reales con la topología usual es compacto), a las demostraciones que son condensadas en pocas líneas ocultando la intuición que fue utilizada para su creación y las demostraciones que son excesivamente técnicas. En cuanto al rol de explicación, CadwalladerOlsker (2011) lo ejemplifica con la demostración del teorema del valor intermedio en un curso de Cálculo Diferencial, el cual es justificado usando un argumento gráfico. Este argumento pretende explicar por qué el teorema debe ser verdadero y una demostración deductiva más general del teorema se desarrolla en cursos más avanzados. Adicionalmente, uno de los ejemplos más famosos del rol de sistematización se encuentra en las demostraciones presentadas en “Los Elementos de Euclides”, mientras que el rol de descubrimiento se puede observar considerando las geometrías no euclidianas que surgieron de la modificación del quinto postulado de la geometría euclidiana. En el rol de comunicación, al considerar la demostración como forma de discurso y de interacción social que involucra la negociación de significados y criterios de validación, algunas demostraciones que cumplen algunos de los roles antes mencionados también pueden cumplir el rol de comunicación. Sumado a lo anterior, se han descrito otros propósitos de la demostración en las matemáticas como justificar el uso de una definición o una estructura axiomática (Weber, 2002), mostrar la necesidad de mejores definiciones, explorar el significado de una definición o las consecuencias de un supuesto, incorporar un hecho bien conocido en un nuevo marco (Hanna y Jahnke, 1996) y producir un algoritmo útil o proveer un procedimiento constructivo para producir un objeto (Dawson, 2006). De acuerdo con Hanna (2000), mostrar la necesidad de mejores definiciones y producir un algoritmo útil pueden contribuir a la sistematización, la comunicación o la formalización de un cuerpo de conocimiento matemático.

Según lo que se ha visto, diversos autores utilizan las palabras funciones, roles o propósitos de la demostración para referirse al objetivo que se persigue al realizar una demostración. De Villiers (1990) señala que las funciones de la demostración engloban el significado, el propósito y la utilidad de la demostración, sin embargo, funciones y roles parecen ser usadas indistintamente en los trabajos del autor (De Villiers 1990; 2010), de manera similar a función y propósito, que en ocasiones son presentados como función o próposito (e.g., De Villiers, 2012). Adicionalmente, la propuesta de De Villiers (1990) aparece de forma consistente en las investigaciones sobre la demostración y es reconocida como altamente influyente (Staples et al., 2012). Particularmente, en las investigaciones en inglés es usual referirse a la investigación de este autor con el término rol de la demostración (e.g., Bleiler-Baxter y Pair, 2017; CadwalladerOlsker, 2011; Knuth, 2002; Staples et al., 2012; Steele y Cervello-Rogers, 2012; Yopp, 2011). Considerando lo anterior, nombramos la subcategoría como conocimiento de roles de la demostración.

En el episodio que se presenta a continuación [AR1.3], Diego da cuenta de su conocimiento del *rol de verificación* de la demostración pues el profesor hace énfasis en que, en matemáticas, para que un hecho sea considerado como válido debe ser o estar demostrado.

Diego: ¿Raíz de 2 es mayor o menor que 1?
Estudiante: Es mayor que 1
Diego: Ahora, pregunta ¿conozco algún número irracional que sea menor que 1?, y ¿mayor que 0?
Estudiante: La raíz de la raíz de 2
Diego: Ah y ¿por qué es menor que 1? Hay que probar que existe, y espera, hay que probar que existe esa raíz y que es un número menor que uno, probar que la raíz existe y probar otra cosa porque no nos dijeron un número entre cero y uno, sino un número irracional entre 0 y 1, entonces, tu puedes tomar un número real, probar que la raíz existe, pero todavía no sabes si es irracional o no.

El conocimiento del *rol de verificación* de la demostración también se observa en el siguiente extracto de un episodio [AR1.7], cuando al finalizar la demostración de que los números racionales e irracionales son densos en los números reales, el profesor hace el siguiente comentario:

Diego: Ahora le pueden decir a sus alumnos con propiedad que entre dos números racionales siempre hay un número irracional.

Adicionalmente, el profesor también desarrolló demostraciones para la irracionalidad de raíz de dos y la no numerabilidad de los números reales. En el siguiente episodio [AR1.4.1], Diego está discutiendo con los estudiantes sobre la irracionalidad de un número:

Diego: Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero m, raíz de dos dividido m, ¿va a seguir siendo irracional o no? lo que estoy diciendo es: este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?

De acuerdo al episodio anterior, Diego considera que haber desarrollado en una clase anterior la demostración de que raíz de dos es un número irracional da la certeza a los estudiantes de que esta afirmación es cierta. En este sentido, el profesor da cuenta de su conocimiento del *rol de convicción* de la demostración (De Villiers, 1990).

Lo anterior se complementa con el siguiente fragmento de la entrevista [EED27] cuando al indagar sobre la importancia que el profesor le atribuye a la demostración, Diego señala:

Hay una idea de convencer al otro de que lo que le estoy diciendo tiene sentido, de que no lo estoy engañando, hay una idea de convencimiento ahí.

En las intervenciones que se han expuesto, Diego reconoce la demostración como un medio para verificar y para convencer, no obstante, en la entrevista [EAR11], el profesor reflexiona si las demostraciones desarrolladas en sus clases efectivamente cumplen con estos roles:

Por ejemplo, los estudiantes no ven, aunque tú lo demuestres que los reales no son numerables, ellos pueden seguir la demostración, darse cuenta que hay una contradicción, pero a pesar de eso, siguen pensando que los reales se pueden poner en correspondencia con los racionales, ahí hay una situación extraña.

Esta "situación extraña" expuesta por Diego muestra que un argumento deductivo no es suficiente para convencer a los estudiantes de la verdad de una generalización sobre un conjunto infinito. Así, aunque la verificación es uno de los roles que mayormente atribuyen los profesores a la demostración (Knuth, 2002), hay cierto consenso entre los investigadores en educación matemática que en la enseñanza se deben considerar otros roles de la demostración (Hanna, 2018). Diego muestra comprender esta importancia de presentar demostraciones con un propósito distinto a la verificación cuando en la entrevista [EAR9] profundiza en las declaraciones anteriores, señalando:

Especialmente en este curso, tengo cuidado de mostrar a los estudiantes que hay un montón de cosas que sus profesores les enseñaron y ellos las aprendieron como loritos: entre dos racionales hay un irracional, π es irracional, e es irracional, pero ¿por qué?, ¿cuál es la demostración de que π es irracional? Claro porque ellos tienen un montón de conocimientos que se muestran como verdades establecidas, entonces en algún minuto hay que ver que detrás hay un argumento.

En el fragmento antes expuesto, cuando el profesor afirma *"pero ¿por qué?, ¿cuál es la demostración de que π es irracional?"* manifiesta que la demostración también puede ser utilizada para exponer las razones por las cuales una proposición es cierta. Así, como parte de su KPM, Diego conoce la función *de explicación* de la demostración (De Villiers, 1990).

Considerando los episodios anteriores donde se observa el conocimiento de los profesores de los diferentes roles de la demostración, en la Tabla 21 se resume la subcategoría *roles de la demostración*.

Tabla 21
Roles de la demostración

Roles de la demostración	
AR1.3, AR1.7, EEM3	Conocimiento del rol de verificación de la demostración.

AR1.4.1, EAR11, EED27, ECV14	Conocimiento del rol de convicción de la demostración.
EAR9, EEM3	Conocimiento del rol de explicación de la demostración.

3.2.4 Construcción de definiciones

La definición tiene la potencialidad de promover una comprensión conceptual profunda de los objetos matemáticos, así como establece la base para la demostración y la resolución de problemas. De acuerdo con lo anterior, las definiciones son de fundamental importancia en matemáticas y definir es una de las formas de crear y establecer nuevo conocimiento matemático, ya que más allá de solo nombrar, definir es capturar el significado y el carácter de un concepto (Leikin y Winicki-Landman, 2001).

Freudenthal (1973) expone dos formas diferentes de definir en matemáticas, en una de ellas se describe un objeto conocido señalando algunas de sus propiedades características (forma descriptiva) y en la otra se obtienen nuevos conceptos a partir de definiciones ya familiares (forma constructiva). Complementando lo anterior, De Villiers (1998) señala que en la forma de definir descriptiva o *a posteriori* se trata de elegir un subconjunto apropiado de propiedades que permite hacer deducciones de otras propiedades del concepto. Por su parte, en la forma de definir constructiva o *a priori* hay una variación de una definición a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o incorporación de propiedades, lo cual lleva a una nueva definición. Foster y De Villiers (2016) agregan que en cuando se define a posteriori hay un propósito de sistematizar el conocimiento existente, mientras que cuando se hace a priori hay un propósito de producir nuevo conocimiento. En esta línea, Martín-Molina, González-Regaña y Gavilán-Izquierdo (2018) presentan un ejemplo de producción de conocimiento a través de la construcción de una nueva definición como generalización (extensión) de otra definición. De acuerdo con lo anterior, describimos la subcategoría *construcción de definiciones* haciendo referencia al conocimiento del profesor de cómo definir de forma constructiva.

A continuación, presentamos un episodio [CV1.1] en el cual el Andrés discute con los estudiantes la definición de un ángulo entre dos vectores en el espacio real n-dimensional:

Andrés: Voy a tomar dos vectores $\vec{x}$ punto $\vec{y}$, ahora, ¿qué le hago? Cuando estaba en $\mathbb{R}^3$, demostramos que el producto punto tiene una interpretación con el ángulo, ahora es un poco al revés, yo no tengo noción de ángulo, entonces ¿qué voy a hacer?, voy a extender la fórmula que ya tenía en el producto punto […] ¿cómo extiendo esa fórmula?

Estudiante: Con la norma y el producto punto, ahí sale.

Andrés: Estoy de acuerdo, tomo $\vec{x}$ punto $\vec{y}$ dividido por la norma de $\vec{x}$ por la norma de $\vec{y}$. Yo no me puedo imaginar qué es lo que es un ángulo de $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, pero puedo extender la definición que tenía para $\mathbb{R}^2$ y para $\mathbb{R}^3$. ¿Cierto?, el ángulo [entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$] es el coseno a la menos uno [el arcocoseno] de este producto [$(\vec{x} \cdot \vec{y})/\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$].

En la entrevista [ECV8], Andrés profundiza en esta definición cuando afirma:

Lo que pasa es que uno tiene capacidad de imaginación en dos y tres dimensiones, pero después ¿cómo defines un ángulo en n dimensiones? […] No me lo sé imaginar, simplemente es válido y lo que me garantiza que eso sea válido, que eso sea un número que corresponda a un ángulo, es la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La desigualdad de Cauchy-Schwarz me permite extender mi definición de ángulo a más dimensiones […] Es que cuando tú defines un ángulo en dos o tres dimensiones lo haces de una manera que es válida solamente para ese tipo de dimensiones, pero esta desigualdad te permite hacer la extensión porque ella es válida para n dimensiones.

Andrés construye la definición de ángulo entre dos vectores en el espacio real *n*-dimensional como una variación (en este caso, una generalización o extensión) de una definición ya conocida, la de ángulo entre dos vectores en el espacio euclidiano. Además, el profesor expone la razón por la cual esta construcción es posible. Así, Andrés da cuenta de su conocimiento de *cómo definir de forma constructiva* a través de la extensión de una definición ya conocida.

De acuerdo con lo antes expuesto, en la Tabla 22 se resumen la subcategoría construcción de definiciones.

Tabla 22
Subcategoría construcción de definiciones

Construcción de definiciones	
CV1.1, ECV7, ECV8	Conocimiento de cómo construir una definición a partir de la extensión de otra.

3.2.5 Características de la definición

Winicki-Landman (2006) señalan que en el proceso de definir influyen criterios que no siempre se revelan cuando las definiciones son presentadas como hechos consumados. Estos criterios pueden ser lógicos, como la jerarquía, la consistencia con definiciones anteriores y la arbitrariedad de la definición, o criterios estéticos como la elegancia y la minimalidad de una definición. Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) recopilan un rango variado de estos atributos, identificados en diferentes investigaciones que han abordado la definición o el proceso de definir, como son la jerarquía, la no ambigüedad, la no contradicción, la invarianza bajo el cambio de representación, la minimalidad, la equivalencia y la elegancia.

La *jerarquía* o precisión en la terminología indica que los términos utilizados en una definición deben ser básicos o estar previamente definidos. La *no ambigüedad* o unicidad del concepto hace referencia a que una definición debe caracterizar de manera unívoca una clase de objetos. En otras palabras, hay una única manera de interpretar todas las condiciones de una definición. Respecto a la *no contradicción* esta significa que en una definición no pueden estar presentes simultáneamente una condición y su contraria. Todas las condiciones deben coexistir de modo que existan objetos que verifiquen la definición. Otro atributo de la definición es la *minimalidad* o no redundancia que hace referencia a que una definición debe contener solo la información que es estrictamente necesaria para identificar el concepto definido (Zaslavsky y Shir, 2005). Además, en una definición, un objeto pertenece a una clase independientemente de la forma en que este se representa, lo cual se denomina *invarianza bajo el cambio de representación*. Por otra parte, si un concepto consiste de una red de varias relaciones lógicas y propiedades, intentar probar todas las propiedades puede llevar inevitablemente a un argumento circular siendo la única forma de evitar esto escogiendo una de las propiedades como definición de la cual se derivan todas las otras (Foster y De Villiers, 2016). Así, entre las afirmaciones que definen un concepto (que forman una clase de equivalencia) se puede escoger una arbitrariamente como la definición y las demás proposiciones son entonces teoremas que constituyen condiciones necesarias y suficientes para el concepto y que pueden ser demostrados. Este atributo se denomina *equivalencia.* En relación con la equivalencia, se encuentra la característica de *elegancia* la cual señala que entre las formulaciones equivalentes de una definición se puede seleccionar aquella que requiere de menos palabras, menos símbolos o el uso de conceptos generales básicos. En consonancia con lo expuesto, describimos una subcategoría denominada *características de la definición*, que incluye el conocimiento del profesor de los atributos o criterios deseables en una definición.

En el fragmento de la entrevista, que se expone a continuación [ECV2], Andrés se refiere a la definición en la siguiente forma:

> *Para mí, una definición de un objeto matemático es identificarlo de manera que no quede ambigüedad al respecto, lo identifico como algo y que yo no pueda decir, pero mira, existe este otro que también es esto, no deben quedar cabos sueltos. Que no pueda venir otra persona y decirme, mira, el objeto que estas definiendo no puede existir porque es contradictorio esto con esto […] Definir es identificar algo de manera precisa y sin ambigüedades, es eso y no puede ser otra cosa.*

De acuerdo con lo anterior, Andrés señala que en una definición no pueden estar presentes simultáneamente una condición y su contraria, de esta forma el profesor muestra su conocimiento de la coexistencia de las condiciones de una definición o característica de *no contradicción* (Zaslavsky y Shir, 2005). En la misma declaración, cuando Andrés expresa que una definición es "identificar algo de manera precisa y sin ambigüedades, es eso y no puede ser otra cosa*"* da cuenta de su conocimiento de que el significado de una definición debe ser interpretado de manera única (Pascual, Codes, Martín y Carrillo, 2019), esto quiere decir, que el profesor conoce la característica de *unicidad o no ambigüedad* de la definición.

Por su parte, en el episodio de clase que se expone a continuación [EM7.2], Juan había presentado como definición de sucesión de Cauchy lo siguiente: (x_n) es una sucesión de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N, \forall m \geq N,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Posteriormente, el profesor presenta otra forma de expresar dicha definición:

Juan: La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera: para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} es inferior a épsilon. Esta es la misma definición que la anterior solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n + p$. Esta otra definición la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de

> Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.

En el episodio anterior, cuando Juan declara que las dos definiciones “dicen la misma cosa”, da cuenta de su conocimiento de la característica de *equivalencia* entre definiciones, lo cual significa que, aunque hay más de una forma de expresar qué es una sucesión de Cauchy, cualquiera de ellas puede ser utilizada para realizar demostraciones relacionados con este tipo de sucesiones.

Por su parte, en el siguiente episodio [EM4.5], Juan está discutiendo con los estudiantes los detalles de una demostración sobre clausura de un conjunto y conjuntos cerrados:

> Juan: Habíamos dicho que la clausura de A es igual al interior de A unido con la frontera de A [$\bar{A} = \dot{A} \cup Fr(A)$], pero esa no es la definición de la clausura que habíamos visto, si no la de $\bar{A}$ es el conjunto de todos los x tal que la bola de centro x y radio r intersectado con A me da el conjunto vacío. Aunque en algunos libros, la definición de $\bar{A}$ no es esta [en términos de bolas], sino que se define como el cerrado más pequeño que contiene a A, esta es una definición general.

De acuerdo con lo antes expuesto, el profesor menciona tres definiciones de clausura de un conjunto: una en término de bolas e intersecciones, otra como el interior unido con la frontera del conjunto y otra donde la clausura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. No obstante, Juan ha escogido como *la* definición de clausura a utilizar en el curso aquella que contiene los conceptos de bolas e intersección que son generales y básicos. Siguiendo esta línea, Juan muestra su conocimiento de la *característica de elegancia* de una definición (Vinner, 1991; Van Dormolen y Zaslavsky, 2003) que además está asociada al conocimiento de que las tres definiciones son *equivalentes*.

Las características o atributos de la definición de los cuales se presentaron evidencias a lo largo de este apartado se resumen en la Tabla 23.

Tabla 23

Subcategoría características de la definición

Características de la definición	
EED12, EED13, ECV1, ECV2	Conocimiento de las características de no ambigüedad y no contradicción de una definición.
EED17, EM7.2, EEM4, CV1.3.1, CV2.3, ECV8, EM4.4, EM4.5	Conocimiento de la equivalencia entre definiciones de un concepto y la elegancia entre definiciones equivalentes.

3.2.6 Estrategias heurísticas de resolución de problemas

De acuerdo con Lester (2013) las diferentes tradiciones de investigación sobre la resolución de problemas coinciden en que un problema es una tarea ante la cual no se puede reconocer de forma inmediata qué hacer para obtener una respuesta. En línea con lo anterior, el desempeño en la resolución de un problema es construido sobre el conocimiento matemático base del resolutor (Schoenfeld, 1985) y un rango amplio de heurísticas (Polya, 1957) que pueden utilizarse como un medio para comprender y solucionar el problema. Las estrategias heurísticas son técnicas generales, invenciones, criterios o reglas que pueden ser usadas para resolver problemas. Koichu (2018) agrega que una heurística es una pieza de discurso matemático a nivel de contenido que sugiere una posible forma de resolver un problema, por ejemplo, pensar hacia adelante, pensar desde el final hasta el principio y pensar de forma regresiva. Otras estrategias heurísticas son dibujar un diagrama, un gráfico o una tabla; examinar casos especiales; observar simetrías; simplificar o subdividir el problema; considerar problemas equivalentes (reemplazar condiciones, introducir elementos auxiliares, reformular el problema); y verificar los procedimientos y soluciones (Schoenfeld, 1985; Carlson y Bloom, 2005).

Adicionalmente, Schoenfeld (1980) expone como diferentes heurísticos son utilizados en las etapas de solución de un problema. Por ejemplo, en la fase de análisis es frecuente usar heurísticos como dibujar un diagrama, examinar casos especiales y tratar de simplificar el problema. A su vez, en la exploración se pueden utilizar heurísticos como considerar problemas equivalentes, problemas levemente modificados y problemas ampliamente modificados. De acuerdo con lo expuesto, describimos la subcategoría *estrategias heurísticas de resolución de problemas* coincidiendo con Chapman (2015) en que el conocimiento de estrategias heurísticas está acompañado de la comprensión de las ideas que subyacen a los diferentes modelos que plantean fases de resolución de problemas (e.g., Mason, Burton y Stacey, 1982; Polya,1957).

En el siguiente episodio [ED1.1], el profesor había propuesto como ejercicio resolver la ecuación $x' = x(x-1)$, que es una ecuación sobre el crecimiento de poblaciones. Posteriormente, Diego discute con los estudiantes la solución de la ecuación, expresando lo siguiente:

> Diego: Habíamos hecho una separación de variables y la solución era $ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = t + c, x \neq 0, 1$ […] Entonces, con esta expresión no sabemos cuál es el comportamiento de la solución y lo que hay que hacer es, ¡Aah! Hay que ver caso por caso. Entonces, caso 1, x mayor que 1 […] Vamos a hacer otros casos, ¿Qué pasa con x entre 0 y 1? Y ¿qúe pasa con el caso x menor que 0?

En el episodio, anterior Diego expone que el problema que está estudiando debe ser abordado considerando casos debido a las restricciones que presenta. En la entrevista [EED2], el profesor profundiza en lo anterior, señalando:

> *A veces, tú quieres resolver una ecuación para todos los elementos dentro del conjunto, pero no puedes tratarlos a todos por igual, porque los elementos pueden tener propiedades distintas [...] entonces, para ciertos problemas tienes varias situaciones y no puedes pensar la solución como una sola cosa.*

De acuerdo con lo expuesto, Diego muestra su conocimiento de la estrategia heurística de examinar casos particulares para analizar un problema (e.g. Schoenfeld, 1980).

Por su parte, en el siguiente episodio [ED4.1], Diego está discutiendo con los estudiantes el enunciado de un teorema en la siguiente forma:

Diego: Acá ¿qué que dice el teorema? […] Estoy cambiando el problema, de un problema que es no lineal en un campo de vectores por un problema que se resuelve con matrices, ¿ya? Ahora, no saco nada con cambiar el problema si no sé cómo se resuelven las flaquezas […] Pero acá teníamos algo que no sabíamos cómo era y lo cambiamos por algo que sabemos cómo es.

Cuando Diego señala que está cambiando "de un problema no lineal en un campo de vectores a un problema que se resuelve con matrices", el profesor está explorando un problema equivalente, cambiando de perspectiva (e.g. Schoenfeld, 1985). En línea con lo anterior, en la entrevista [EED4], el profesor añade:

Una de las cosas que hacemos en matemática es tratar de transformar un problema en otro, a veces pasa, es súper usual en matemática, que transformas un problema que puede tener alguna dificultad intrínseca en otro problema que sí tienes más herramientas para resolver […] O sea, cambiar un problema que no sé algo, por otro que no sé nada, no ayuda. Lo otro que puede pasar es que uno gane en el problema, no sabes nada, lo cambias por otro que no sabes nada, pero el otro a lo mejor es más fácil de estudiar o hay más herramientas o herramientas distintas con las que se estudia.

De acuerdo con lo anterior, identificamos el conocimiento de Diego de la estrategia heurística de *reformular un problema* para solucionarlo.

Adicionalmente, en el siguiente fragmento de la entrevista [EED7], Diego reflexiona sobre la introducción de elementos auxiliares en la resolución de problemas:

Es lo mismo que pasa en geometría: vamos a poner este puntito y este segmento auxiliar y listo, y ahí se acabó, se resolvió el problema […] después tu miras un problema y dices "tiro esta recta" […]

Diego continua en la entrevista [EED7], refiriéndose a un problema que se soluciona quitando un punto de un conjunto:

Ahí dices, quiero resolver y qué hago para resolver, quito, no sumo. Hay veces que sumas y otras veces que quitas.

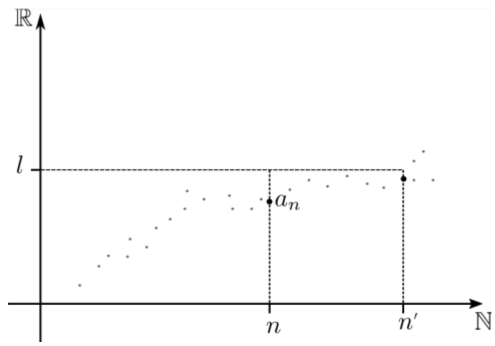
En relación con lo anterior, en el episodio que se presenta a continuación [EM6.1.1], Juan expone lo siguiente:

Juan: La idea aquí es usar una desigualdad triangular, pero poniendo varios términos en la desigualdad, entonces lo que queremos hacer, la idea es ver f de x menos f de a, ¿cierto? y minorar eso para x suficientemente cerca de a. Para hacer eso, vamos a introducir f_n de x, porque eso lo sabremos comparar a f de x. Vamos a introducir también f_n de a.

En el episodio anterior, Juan utiliza la función f_n como elemento de apoyo para construir una desigualdad que le permite solucionar su problema (en este caso, en el contexto de una demostración). De manera similar, en un episodio de la clase [CV3.1], Andrés introduce el módulo de un número en una desigualdad con el fin de acotar el límite de una función. En línea con lo anterior, identificamos el conocimiento de los profesores de la estrategia heurística de *introducir un elemento auxiliar* para resolver un problema.

Por su parte, en el siguiente episodio [EM7.3.1], luego de mostrar que una sucesión a_n está bien definida, el profesor interviene expresando:

Juan: Ahora miremos lo que estamos haciendo. Tenemos una sucesión que es de Cauchy, entonces nosotros vamos a demostrar que converge. Aquí pongo $\mathbb{R}$, aquí $\mathbb{N}$, aquí tengo un límite que existe, y tengo la sucesión acá. Lo que estoy haciendo, es que tomo un n particular, acá, y estoy mirando el inf que va a ser el a_n. Este a_n no va a ser el límite, pero si tomo n', cuando este n' sea más grande, ese n' va a acercarse al límite, ¿ok? Entonces, la intuición es que a_n converge, ahí está lo que vamos a demostrar.



En el episodio, Juan se apoya de un diagrama para analizar el comportamiento de una sucesión y así construir argumentos en torno a ella. De este modo, observamos el conocimiento del profesor de la estrategia heurística de *utilizar diagramas* para analizar un problema (e.g. Schoenfeld, 1985) la cual aporta a la solución del mismo.

De acuerdo con los episodios anteriores se observa el conocimiento de los profesores de diferentes estrategias heurísticas involucradas en las fases de resolución de problemas, las cuales se resumen en la Tabla 24.

Tabla 24
Subcategoría estrategias heurísticas de resolución de problemas

Estrategias heurísticas de resolución de problemas	
ED1.1, EED2, EEM9, ECV12	Conocimiento de la estrategia de examinar casos particulares para analizar un problema.
ED4.1, EED2, EED4	Conocimiento de la estrategia de reformular un problema para explorar su solución.
EED7, EM6.1.1, CV3.1	Conocimiento de la estrategia de introducir un elemento auxiliar para explorar la solución de un problema.

EM4.3, EM7.3	Conocimiento de la estrategia de utilizar diagramas para analizar un problema.

3.2.7 Significado y uso de los símbolos

Bardini y Pierce (2015) usan una versión simplificada del trabajo de Serfati (2005) para describir tres categorías de símbolos: *letras y formas similares a letras* en cualquier idioma como $h, \alpha, \forall$; *figuras,* por ejemplo, signos de operación (+, **x**) y otras figuras como %, $\leq, \int$; y *plantillas compuestas* que combinan letras y figuras, por ejemplo, r^2, E(X). Estos símbolos pueden ser combinados para formar expresiones simbólicas (e. g., $y = mx + b$) las cuales son la base del lenguaje matemático.

En línea con lo anterior, Arcavi (2005) resalta el poder que el uso y comprensión de los símbolos confiere sobre una multitud de situaciones matemáticas. El autor, inspirado en las ideas de sentido de los números y actos de significado, utiliza la expresión "sentido de los símbolos" para agrupar un amplio espectro de formas de comprensión de los símbolos identificadas en estudiantes y profesores de matemáticas, principalmente cuando realizan tareas algebraicas. Entre los componentes del sentido de los símbolos se encuentra la comprensión de los símbolos y su uso para exhibir relaciones, generalidades y demostraciones; la capacidad para manipular y leer a través de expresiones simbólicas; la conciencia de que se pueden diseñar relaciones simbólicas que expresen cierta información; la capacidad de seleccionar una posible representación simbólica; la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante su uso; y la conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos.

Por su parte, Nemirovsky (1994) describe que el uso de los símbolos está presente en las expresiones que involucran los símbolos matemáticos con un propósito y como parte de una cadena de eventos significativos. Así, un uso potente de los símbolos convencionales emerge de las actividades previas de simbolización de los estudiantes y genera nuevas ideas matemáticas, conceptualizaciones y creaciones de modelos de las situaciones (Rassmusen et al., 2005). En esta línea, Zandieh, Wawro y Rasmussen (2016) señalan que simbolizar es la práctica disciplinar de crear y utilizar símbolos para comunicar ideas matemáticas. Siguiendo las ideas anteriores, describimos una subcategoría denominada *significado y uso de los símbolos,* la cual incluye el conocimiento asociado a la elección de símbolos (convencionales o no convencionales), su uso de forma coherente en la comunicación de ideas matemáticas, así como el conocimiento del significado de los símbolos en diferentes contextos.

En el episodio [EM6.1.2], Juan está demostrando un teorema sobre continuidad y convergencia uniforme. Luego de discutir con los estudiantes cómo abordar la demostración, Juan hace una síntesis y plantea la idea de la demostración en la siguiente forma:

Juan: La idea aquí es usar una desigualdad triangular, poniendo varios términos en la desigualdad […] Bueno, lo que sé es que voy a tener tres elementos en la desigualdad, entonces voy a tomar un épsilon sobre tres acá, para hacer mi suma […] como el épsilon va a ser el mismo en cada término de la desigualdad, conviene ponerlo dividido por tres, para que tengamos épsilon sobre tres, épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y al final épsilon.

A partir del cuestionamiento de un estudiante sobre la elección de épsilon tercio para el desarrollo del argumento en la demostración, el profesor continúa expresando lo siguiente:

Juan: Porque yo sé que voy a tener tres elementos en mi desigualdad […] la idea de la demostración, yo sé que es esta desigualdad [con tres términos] por eso, tomo épsilon sobre tres porque sé que después me va a servir, o puedo tomar un épsilon prima y después mostrar una relación entre épsilon y épsilon prima, esa es otra manera de hacerlo.

En las expresiones de Juan "como el épsilon va a ser el mismo en cada término de la desigualdad conviene ponerlo dividido por tres" y "puedo tomar un épsilon prima y después mostrar una relación entre épsilon y épsilon prima", el profesor señala la utilidad de seleccionar un determinado símbolo para comunicar las ideas de la demostración. Adicionalmente, Juan mantiene la consistencia en el uso del símbolo épsilon. De este modo, el profesor da cuenta de su conocimiento de cómo *seleccionar símbolos y usarlos de forma coherente* para comunicar una idea matemática. Lo anterior se relaciona con el hecho de que en una demostración se espera que la elección de los símbolos siga ciertas convenciones, por ejemplo, en el trabajo matemático se evita usar el mismo símbolo para referirse a distintos objetos en una misma demostración. Esta norma o característica deseable, de acuerdo con Dawkins y Weber (2017), tiene el propósito de que una demostración permita incrementar la comprensión matemática.

Por su parte, en el episodio [AR1.6], Diego se refiere al cuantificador existencial señalando lo siguiente:

Diego: Cuando es para todo, yo siempre puedo escoger el elemento que me conviene, pero cuando es existe, es "lo que cayó," no más […] Entonces, como el existe te da "lo que cayó," tú tienes que hacer algún trabajo para que lo que caiga sea conveniente.

Diego complementa lo anterior, afirmando en la entrevista [EAR5]:

El existe te dice que hay uno que hasta podría ser el único, entonces no tienes posibilidad de elección, no tienes chance de escoger dentro del universo, es lo que cayó. Por ejemplo, la propiedad arquimediana te da un número natural que satisface que si tú tomas un número real hay un número natural que cumple […] no son todos los naturales los que cumplen.

En el episodio [AR1.6] y en el fragmento de la entrevista [EAR5] está presente el conocimiento del profesor del *significado de los cuantificadores* en una proposición. Este conocimiento le permite a Diego usar la expresión "lo que cayó" a modo de metáfora (e.g. Lakoff y Núñez, 2000) del cuantificador existencial para destacar sus características.

Respecto a las proposiciones con varios cuantificadores, en la entrevista [EAR8], el profesor expresa:

Propiedades o proposiciones que tienen muchos cuantificadores, distintos para todo y existe, son un problema en general para los estudiantes, porque además tenemos la mala costumbre, y esto hasta entre los matemáticos, de no usar una regla fundamental en la elaboración de las proposiciones que primero van los cuantificadores, entonces, ponemos el cuantificador al final, y cuando hay que negar no se sabe si el para todo va antes del existe o va después, entonces, siempre hay una dificultad cuando hay una negación con cuantificadores.

En la declaración, Diego expone su conocimiento de que una expresión del tipo $\forall\exists$ no tiene el mismo significado que una expresión $\exists\forall$. En relación con lo anterior, Selden y Selden (2013) afirman que generalmente las demostraciones son lógicamente concretas en el sentido que los cuantificadores, especialmente el cuantificador universal, son evitados cuando es posible, sin embargo, la omisión de los cuantificadores y el orden en que ellos son presentados modifica el significado de una proposición.

De acuerdo con los episodios anteriores referentes al conocimiento del uso de diferentes símbolos, y en particular de los cuantificadores, en la Tabla 25 se resume la subcategoría del conocimiento del significado y uso de los símbolos.

Tabla 25
Subcategoría significado y uso de los símbolos

Significado y uso de los símbolos	
EM6.1.2, EM6.1.4, EM6.2.2, EM7.1, EM7.4	Conocimiento del uso de los símbolos de forma coherente.
AR1.6, EAR5, EM4.2, CV1.3.4, EAR8, EM6.1.3, EM8.1, EM5.1.1, CV2.2	Conocimiento del significado y uso de los cuantificadores.

3.2.8 Uso del lenguaje matemático

Uno de los aspectos característicos de la matemática es su vinculación con un lenguaje específico de carácter formal con el cual se abstrae lo esencial de las relaciones matemáticas implicadas en cualquier situación (Gómez-Granell, 1989). Este lenguaje formal, que a menudo se comprende como contrario al lenguaje natural, intenta evitar la ambigüedad a través, por ejemplo, de la definición o ejemplificación de términos. Así, frente a la ambigüedad propia del lenguaje natural, el lenguaje formal es riguroso respecto a la estricta significación de los términos. En esta línea, Dawkins, Inglis y Wasserman (2019) agregan que una práctica de los matemáticos es intentar integrar de forma precisa el significado de las proposiciones. No obstante, no hay un límite claro entre el lenguaje matemático formal y el lenguaje cotidiano, pues el lenguaje matemático nunca es completamente formal (Barwell, 2013). En este sentido, nos referiremos al lenguaje matemático entendiendo este como el resultado del uso de los códigos de la lengua natural y la escritura simbólica, asociación que se realiza por razones de economía (Balacheff, 2000) y que además intenta preservar la característica de precisión. En línea con lo anterior, describimos la subcategoría *uso del lenguaje matemático* que incluye el conocimiento del profesor de la precisión y la economía en el uso del lenguaje matemático.

En el siguiente episodio [AR1.1], el profesor se refiere a la propiedad de los intervalos encajados: Si $a_n < b_n$ y $I_n = [a_n, b_n]$. Si I_n es un conjunto de intervalos cerrados y acotados con $I_{n+1} \subset I_n$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $a_n < x < b_n$, $\forall\, n \geq 1$.

Diego: Entonces para decir que están encajados voy a decir a_n menor que b_n para todo I_n conteniendo a I_{n+1}. Que hemos demostrado con esto, que, si tomo intervalos encajados, que cada vez son más pequeños, que son intervalos cerrados y acotados, entonces, en la intersección de todos ellos hay algo, algo hay ahí.

En el fragmento, Diego usa las expresión "que cada vez son más pequeños" para señalar la característica que define a los intervalos encajados $I_{n+1} \subset I_n, \forall\, n \geq 1$. El profesor además afirma "en la intersección de ellos hay algo" como una manera de expresar la idea de intersección no vacía. Vemos entonces, que el profesor utiliza expresiones del lenguaje natural combinadas con expresiones simbólicas haciendo una asociación entre ellas. Lo anterior se enlaza con el conocimiento de Diego de *la economía en el uso del lenguaje matemático* (e.g. Balacheff, 2000), el cual expone cuando señala lo siguiente en la entrevista [EED14]:

Porque de alguna manera, en cierto sentido, la matemática es un lenguaje, entonces lo que uno hace es ir aproximándose a usar lenguaje formal […] Entonces, ahí pasa de nuevo el tema de la economía, que en realidad cuando escribes, escribes porque quieres transmitir. Entonces dices renuncio a escribir formalmente […] me tengo que alejar de ese lenguaje formal para que nos podamos comunicar, pero no tanto como para que se deje de entender el mensaje. Por ejemplo, qué sería alejarse mucho, no establecer los cuantificadores, porque ahí tienes la expresión, esto vale para todo, hay algunos.

El profesor profundiza en su intervención en el episodio [AR1.1], expresando lo siguiente en la entrevista [EAR6]:

Justamente eso es la matemática, la matemática no se puede hacer más fácil, pero hay un intervalo, un intervalito, algo más pequeño, después la formalización, lo escrito responde a ideas que uno tiene […] Cuando les digo, lo que ahí hay adentro, eso es no formal, eso es una explicación para que tengan una idea, la idea de la intersección, de lo que está ocurriendo en ese fenómeno y decir intersección no vacía es la formalización de la idea de que ahí adentro hay algo.

Según lo anterior, Diego intenta ser preciso en sus afirmaciones, aunque esté haciendo uso del lenguaje natural. En esta línea, Moschkovich (2013) expresa que afirmaciones precisas pueden ser expresadas en un lenguaje imperfecto.

Complementando lo anterior, Diego añade en la entrevista [EAR7]:

En el fondo, las formulaciones en el lenguaje matemático son simplemente formulaciones de ideas que no tienen por qué ser necesariamente expresadas desde el inicio en un carácter puramente riguroso […] tú no puedes comunicar matemáticas si usaras el rigor lógico absoluto […] entonces uno tiene que aceptar cierta licencia de formalidad.

Profundizando en sus declaraciones, Diego expone lo siguiente [EED15]:

Lo que pasa es que no puedes escribir todas las clases así [con el rigor lógico absoluto], porque además queremos comunicarnos, uno renuncia un poco a eso, como que uno se va alejando de eso, va aumentando el espacio de precisión. Entonces, uno se aleja y establece una especie de contrato intrínseco con el interlocutor donde ambos entendemos que a este nivel las imprecisiones que uno tenga no van a ser relevantes. No voy a decir una mentira porque en una cosa fui impreciso […] Y eso depende mucho del interlocutor. Por ejemplo, si yo hablo con un colega en algunas cosas puedo ser mucho más laxo y en otras cosas puedo ser mucho más preciso, y si hablo con un estudiante en algunas cosas debo ser mucho más preciso y en otras cosas puedo ser mucho más laxo.

De acuerdo con los fragmentos [EAR6, EAR7, EED15], el profesor da cuenta de su conocimiento de la *precisión en el uso del lenguaje matemático*. Lo anterior se observa, por ejemplo, cuando Diego señala "no voy a decir una mentira porque en una cosa fui impreciso" o cuando el profesor afirma "si hablo con un estudiante en algunas cosas debo ser mucho más preciso y en otras cosas puedo ser mucho más laxo". Aquí la precisión no se refiere solo al uso de las palabras, si no que radica en la práctica matemática de hacer afirmaciones ciertas sobre las situaciones (Moschkovich, 2013). Así, esta búsqueda de precisión y explicitación se observa, por ejemplo, cuando se especifica el alcance de una propiedad o se restringe su dominio de aplicación (Dawkins et al., 2019).

Según lo que se ha expuesto, en la Tabla 26 se muestra un resumen los episodios asociados a la subcategoría uso del lenguaje matemático.

Tabla 26

Subcategoría uso del lenguaje matemático

Uso del lenguaje matemático	
AR1.1, EAR6, EAR7, EED12, EED14, EED15	Conocimiento de la precisión y la economía en el uso del lenguaje matemático.

3.3 Categorías de conocimiento de la práctica matemática

En la sección anterior hemos expuesto 8 subcategorías que describen el conocimiento de los profesores sobre el desarrollo de demostraciones, los métodos y tipos de demostración, los roles de la demostración, la construcción de definiciones, las características de la definición, las estrategias heurísticas de resolución de problemas, el significado y uso de los símbolos y el uso del lenguaje matemático. Los resultados anteriores sugieren una categorización proveniente de agrupar las subcategorías respecto a las prácticas matemáticas a las cuales hacen referencia, a saber, demostrar, definir y resolver problemas. Adicionalmente, el significado y uso de los símbolos y el uso del lenguaje matemático se agrupan en otra categoría de conocimiento.

En consonancia con lo anterior, consideramos que lo que esencialmente caracteriza a una demostración es su poder de convicción interno y externo y que la demostración es una activida de búsqueda de un argumento válido. En este sentido proponemos una categoría de *conocimiento de la práctica de demostrar*. En esta categoría se agrupa el conocimiento del profesor del *desarrollo de demostraciones* a través de la particularización, la generalización y el uso de contraejemplos. Además, incluimos el conocimiento del profesor de *métodos y tipos de demostración*, lo cual abarca su conocimiento de la lógica proposicional detrás de una demostración. De este modo, intentamos distinguir el conocimiento del profesor de una demostración específica y su conocimiento de cómo y porqué utilizar un determinado método de demostración (directo, por contradicción, por contrarecíproco, por inducción) para abordar la demostración de diferentes tipos de proposiciones (condicionales, de existencia y de unicidad). Adicionalmente, al considerar que la demostración matemática es reconocida como una herramienta que juega un rol central en la creación, el establecimiento y la comunicación de conocimiento matemático, incluimos en la categoría de conocimiento de la práctica de demostrar el conocimiento de *roles de la demostración* tales como el rol de verificación, convicción y explicación.

Por otra parte, entenderemos que la práctica de definir significa construir, formular o llegar a establecer una definición. De esta forma, la categoría del *conocimiento de la práctica de definir* incluye el conocimiento del profesor de la *construcción de definiciones* a partir de la extensión de otras definiciones. En esta línea, dado que, para definir se requiere conocer ciertos atributos o características deseables en una definición, describimos como parte de esta categoría el conocimiento del profesor de *características de la definición* tales como la no ambigüedad, la no contradicción, la elegancia y la equivalencia.

Asimismo, consideramos que la resolución de problemas involucra la aplicación de estrategias heurísticas para pasar de una situación inicial de incertidumbre a una situación final de éxito (Kilpatrick, 2016). Así, describimos una categoría denominada el *conocimiento de la práctica de resolver problemas* y reportamos como parte de ella el conocimiento del profesor de cómo utilizar estrategias heurísticas en una variedad de situaciones. Entre las *estrategias heurísticas* reportamos el uso de diagramas y casos particulares para analizar un problema, la reformulación de un problema y la introducción de un elemento auxiliar para explorar la solución de un problema.

Complementando lo anterior, consideramos el lenguaje como un componente fundamental de las prácticas matemáticas involucrado en el desarrollo del conocimiento matemático. Describimos entonces una categoría de *conocimiento del papel del lenguaje matemático* que incluye el conocimiento del profesor del significado de los símbolos y con qué propósito se utilizan, así como su conocimiento del uso del lenguaje matemático conservando valores epistémicos como la precisión y la simplicidad.

Como resumen de lo que se ha expuesto, en la Tabla 27 se exponen las categorías de KPM en profesores de matemática universitarios.

Tabla 27
Categorías de KPM en profesores universitarios

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	
Conocimiento de la práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones Métodos y tipos de demostración Roles de la demostración
Conocimiento de la práctica de definir	Construcción de definiciones Características de la definición
Conocimiento de la práctica de resolver problemas	Estrategias heurísticas de resolución de problemas
Conocimiento del papel del lenguaje matemático	Significado y uso de los símbolos Uso del lenguaje matemático

De acuerdo con lo que se ha presentado hasta ahora, describimos el KPM como el subdominio que agrupa el conocimiento del profesor de prácticas matemáticas tales como demostrar, definir y resolver problemas, además de su conocimiento del lenguaje matemático como elemento base para la realización de estas (y otras) prácticas.

Capítulo 4. Conocimiento de la práctica matemática: Discusión y conclusiones

En este capítulo discutimos los resultados de esta investigación y presentamos nuestras conclusiones y proyecciones. La primera sección del capítulo está centrada en discutir las categorías de KPM construidas a partir del estudio de profesores universitarios con la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, en general, y particularmente, con los resultados reportados por otros estudios en cuanto a los indicadores del subdominio KPM. Posteriormente, en la segunda sección del capítulo, presentamos las conclusiones del estudio que están enlazadas con algunas preguntas abiertas y proyecciones.

4.1 Categorías del conocimiento de la práctica matemática: Discusión

A continuación, discutimos las categorías del KPM que se evidenciaron en profesores universitarios haciendo una comparación con la literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (de manera general) y considerando los estudios empíricos donde se han reportado indicadores del KPM de profesores y futuros profesores de matemáticas. Esta discusión nos permite mostrar que los indicadores de conocimiento documentados para distintos niveles educativos pueden tener cabida en las categorías propuestas para el KPM, mostrando así la consistencia y generalidad de las categorías construidas.

4.1.1 Conocimiento de la práctica de demostrar

Stylianides y Ball (2008) incluyen como parte del conocimiento del profesor de matemáticas su conocimiento acerca de la demostración, señalando que este es importante para atraer a los estudiantes hacia la actividad de demostrar. Ball y Bass (2009) también consideran la demostración como parte del conocimiento matemático para la enseñanza del profesor debido a que demostrar es una práctica matemática clave. Por su parte, de acuerdo con Steele y Cervello-Rogers (2012), el conocimiento matemático para enseñar la demostración está compuesto por la habilidad para definir que es una demostración, la capacidad para identificar cuando un argumento matemático es una demostración o no, la construcción de demostraciones matemáticas y la comprensión de los roles de la demostración. Lesseig (2016) agrega que como parte del conocimiento de la materia para enseñar la demostración se debe incluir la comprensión explicita de los componentes de la demostración, esto es, las proposiciones aceptadas, los modos de representación y los modos de argumentación entre los cuales se encuentran los métodos de demostración. Además, la autora señala que para estar en consonancia con las prácticas disciplinares, en la escuela se deben abarcar las funciones de la demostración en matemáticas. En esta línea, la enseñanza de la demostración requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y los roles de la misma (Knuth, 2002). De acuerdo con lo expuesto, encontramos referentes teóricos que presentan componentes similares a las subcategorías descritas para el conocimiento de la práctica de demostrar en este trabajo; conocimiento del desarrollo de demostraciones, métodos y tipos de demostración y roles de la demostración.

Respecto a los estudios empíricos, en la subcategoría *desarrollo de demostraciones* se incluye el conocimiento del profesor de cómo el trabajo con casos particulares genera ideas para la generalización. En esta línea, Flores-Medrano et al. (2016) presentan un episodio de clases donde una profesora de primaria expone su conocimiento de la generalización que se induce al representar de forma finita conjuntos no acotados. Otro componente de esta subcategoría es el conocimiento de estrategias para construir contraejemplos y el rol de los contraejemplos en la demostración. En relación con lo anterior, en el trabajo de Carrillo et al. (2017) se expone un episodio donde, en medio de la discusión con un estudiante, una profesora de matemáticas de secundaria da muestra de su conocimiento de cómo usar un contraejemplo. Asimismo, Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2019) reportan el conocimiento de un profesor de matemáticas de secundaria del uso de contraejemplos como una forma de construir una demostración.

En cuanto a los *métodos y tipos de demostración*, Alfaro, Flores y Valverde (2020) exponen las formas en que futuros profesores de matemáticas de secundaria proceden para realizar demostraciones de tipo directas e indirectas (contradicción y contraposición), demostraciones considerando el tipo de cuantificador (entre las cuales se encuentra una demostración constructiva) y demostraciones considerando el tipo de conectivo lógico (conjunción y disyunción). Los autores proponen estos elementos como componentes del conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática y en particular sobre la validez lógica. Adicionalmente, la profesora analizada en el trabajo de Carrillo et al. (2017) realiza una explicación donde da cuenta de su conocimiento de la diferencia entre una condición suficiente y una necesaria. Similarmente, Montes et al. (2015) exponen un fragmento de una entrevista donde un formador de profesores de primaria expresa su conocimiento de condiciones necesarias y suficientes. Este conocimiento se encuentra en la subcategoría *métodos y tipos de demostración* en relación con el tipo de demostración de doble implicación o bicondicional. Por último, en en las investigaciones revisadas que exploran el KPM no encontramos evidencias empíricas del conocimiento de demostraciones por inducción y demostraciones de existencia (no constructivas y de imposibilidad) reportadas en este trabajo como parte de la subcategoría *métodos y tipos de demostración*.

La subcategoría *roles de la demostración*, también se considera como un componente del conocimiento sobre la demostración en los trabajos de Alfaro et al. (2020) y Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), siendo De Villiers (1990) el referente teórico en común. En cuanto a las evidencias empíricas, en el trabajo de Aguilar (2014) se presenta un episodio de clase donde una profesora de enseñanza básica enfatiza el papel de la justificación en matemáticas al pedir a los estudiantes exponer el porqué de sus afirmaciones. A su vez, la profesora se refiere a que los argumentos matemáticos son usados para convencernos a nosotros mismos y a los demás. En esta línea interpretamos dicho episodio como el conocimiento del rol de convicción de la demostración. Adicionalmente, Liñan-García y Carrillo (2018) exponen un episodio en el cual una profesora de educación infantil solicita a los estudiantes hacer explícito los razonamientos y métodos utilizados para responder a una tarea. En la discusión, la profesora pone en evidencia elementos asociados a la convicción de una demostración, así como los rudimentos de los elementos discursivos de la demostración. Por otra parte, Zakaryan y Ribeiro (2016) presentan un episodio de clases donde una profesora de matemáticas de secundaria se refiere a la existencia de infinitos números entre dos números racionales realizando una prueba que recurre a las semisumas, empezando por la semisuma de 0 y 1. Este episodio puede comprenderse como el conocimiento de la profesora de la necesidad de una demostración, aunque sea informal, de modo que podríamos señalar esta evidencia como un conocimiento de del rol de verificación de la demostración. Este rol también se presenta en el trabajo de Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2019), donde un profesor de matemáticas de secundaria muestra la demostración como una forma de verificar la inyectividad de una función y además se refiere a la demostración en su rol de comunicación. Por su parte, Muñoz-Catalán, Joglar, Ramírez, Escudero, Aguilar, y Ribeiro (2019) presentan un episodio de clase en el cual una profesora de educación infantil, que está trabajando la composición y descomposición de números, utiliza unas fichas (material manipulativo) para comprobar que la composición de las partes identificadas forman el todo; así, la comprobación es un modo de validar. Lo anterior lo interpretamos como el conocimiento de la profesora del rol de verificación de la demostración.

Otros roles de la demostración propuestos en la literatura y de los cuales no se encontraron evidencias ni en este estudio ni en otras investigaciones empíricas con el MTSK son los roles de sistematización y descubrimiento. Lo anterior, podría explicarse considerando que aunque se espera que la demostración en el aula de clases refleje las funciones que desempeña en la práctica matemática, todas esas funciones no son relevantes para el aprendizaje y por tanto no tendrían la misma importancia en la enseñanza de las matemáticas (De Villiers, 1990; Hersh, 1993).

4.1.2 Conocimiento de la práctica de definir

Escoger y desarrollar definiciones útiles se considera una tarea de enseñanza que requiere de conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas (Ball et al., 2008), de este modo, las definiciones, las estructuras subyacentes a la definición y el proceso de definir son componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas (Zazkis y Leikin, 2008). Leikin y Winicki-Landman (2001) señalan que una de las formas de desarrollar el conocimiento matemático de los profesores en relación a la definición es discutir qué es una definición y cómo se define. Adicionalmente, Howell (2012) señala, como parte del conocimiento matemático del profesor, el conocimiento de la forma en que nuevos objetos matemáticos pueden ser establecidos a través de la definición, así como el conocimiento de que las definiciones pueden ser debatidas, refinadas y extendidas a un nuevo dominio explorando como la nueva estructura funciona o trabaja diferente sobre nuevas condiciones.

Por otra parte, el conocimiento de la definición es considerado en diferentes modelos que describen el conocimiento del profesor de matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento de la definición está incluido en la faceta epistémica del modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor (Pino-Fan y Godino, 2015) y además se aborda en el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde dos aspectos; el conocimiento de las definiciones relacionadas con un contenido matemático específico y el conocimiento sobre cómo se define (Carrillo et al., 2018). En este sentido, Oliveros y colaboradores (2018) señalan que definir un objeto matemático tiene un papel esencial en la práctica matemática, ya que del mismo resulta un conjunto de propiedades que caracterizan el objeto siendo estas la base para establecer relaciones con otros elementos matemáticos. De acuerdo con lo anterior, aunque conocimientos asociados a las definición están considerados en la literatura de investigación sobre el conocimiento de los profesores, este no se había descrito en términos de las subcategorías *construcción de definiciones* y *características de la definición.*

En la *construcción de definiciones* se describe el conocimiento del profesor de cómo construir una definición a partir de la extensión de otra. Respecto a esta subcategoría, no encontramos evidencias similares en los distintos estudios que se han referido al conocimiento de la definición enmarcados en el KPM. No obstante, desde el punto de vista teórico, se ha propuesto que la forma de definir constructiva se considere como un componente del conocimiento sobre procesos de conceptualización que acompaña a la forma de definir descriptiva (Campos-Cano y Flores-Medrano, 2019). En relación a lo anterior, en este trabajo no indagamos en el conocimiento de la forma de definir descriptiva pues esta es una manera usual de definir en la matemática escolar que guarda similitud con el conocimiento de las definiciones en el subdominio conocimiento de los temas (KoT) en el cual se alude al conocimiento de cómo escoger el conjunto apropiado de propiedades para caracterizar objetos matemáticos (Carrillo et al., 2018). Adicionalmente, Selden y Selden (2003) señalan que las matemáticas contemporánesas usan definiciones precisas, no ambigüas, reducibles a términos fundamentales y estipulativas, esto es, definiciones analíticas también llamadas constructivas. En este sentido, la forma de definir constructiva parece responder mejor a los conocimientos que se esperan incluir en el KPM.

Por su parte, Pascual et al. (2019) desarrollan una investigación en la cual estudiantes para maestro exponen definiciones de polígonos que no contienen elementos matemáticos opuestos o incompatibles entre sí, de modo que se observa el criterio de no contradicción de una definición. Los autores también se refieren al criterio de no ambigüedad, reportando que los estudiantes para maestro generan definiciones que resultan no ser ambiguas desde el punto de vista escolar, pero desde un punto de vista formal pueden tener cierta ambigüedad. De este modo, nuestros resultados coinciden con la investigación anterior en evidenciar el conocimiento de *características de la definición* como la no contradicción y la no ambigüedad. Adicionalmente, Codes, Climent y Oliveros (2019) desarrollaron un estudio con tres estudiantes para profesor de primaria en el cual exponen episodios donde los futuros profesores discuten definiciones de figuras geométricas dando cuenta de su conocimiento de atributos de la definición como la jerarquía y la minimalidad. Similarmente, Carreño y Climent (2019) indagan en el conocimiento de futuros profesores sobre definiciones de cuadriláteros evidenciando su conocimiento de características como jerarquía, no circularidad, no contradicción e idependencia bajo cambio de representaciones.

4.1.3 Conocimiento de la práctica de resolver problemas

La resolución de problemas es de fundamental importancia en la construcción del conocimiento matemático y por tanto es ampliamente reconocido que esta debe ser una actividad fundamental en las aulas de matemáticas (Felmer, Liljedahl y Koichu, 2019). Considerar la resolución de problemas como parte de la enseñanza de las matemáticas requiere del conocimiento del profesor de cómo resolver problemas e involucra que el profesor decida los problemas y las experiencias de resolución de problemas a utilizar, cuándo dar particular atención a la resolución de problemas, qué tanto guiar a los estudiantes y cómo evaluar su progreso (Lester, 2013). Chapman (2015) agrega que los profesores necesitan conocimiento de la resolución de problemas para ellos mismos como resolutores y para ayudar a los estudiantes a convertirse en mejores resolutores de problemas. El autor propone un modelo de conocimiento matemático para la resolución de problemas (MPSKT, por sus siglas del inglés *Mathematical Problem Solving Knowledge for Teaching*) que en relación con el conocimiento matemático de la resolución del problemas incluye el conocimiento del profesor de los problemas, su naturaleza, estructura y el propósito de diferentes tipos de problemas; el conocimiento de la resolución de problemas incluyendo los modelos de resolución de problemas así como el significado y el uso de heurísticos y el conocimiento de la formulación de problemas. Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro (2019) proponen como componentes del conocimiento matemático del profesor sobre la resolución de problemas el conocimiento de la noción de un problema; el conocimiento de la resolución de problemas (fases de resolución, estrategias, metacognición y factores no cognitivos); y la disposición para resolver problemas.

Considerando lo anterior, la categoría de conocimiento de la práctica de resolver problemas —para la cual solo reportamos la subcategoría de conocimiento de estrategias heurísticas— podría nutrirse de algunos de los componentes antes descritos. Por ejemplo, dentro del conocimiento de la noción de problema, Piñeiro et al. (2019) incluyen el conocimiento de la formulación de problemas, su contexto y el conjunto de soluciones aceptables. En línea con lo anterior y teniendo en cuenta que la resolución y la formulación de problemas son actividades importantes en el desarrollo del conocimiento matemático de profesores y estudiantes, y que además son una forma de entender, aprender y hacer matemáticas (Carrillo, 2018), una posible subcategoría del conocimiento de la práctica de resolver problemas podría ser el conocimiento de *la formulación de problemas*, la cual puede ocurrir antes, durante o después de la resolución de un problema y puede hacerse desde la variación de un problema dado (Silver, 1994) o la generación de nuevos problemas a partir de una situación particular o una idea (Stoyanova y Ellerton, 1996).

Respecto a la subcategoría descrita en este trabajo, *estrategias heurísticas de resolución de problemas*, una de estas estrategias es examinar casos, y dicho conocimiento se expone en el trabajo de Escudero-Ávila et al. (2015) donde un profesor de matemáticas de secundaria recurre a descomponer en casos particulares para hacer un análisis puntual de un problema. Adicionalmente, en el estudio de Carrillo, Montes et al. (2017) un profesor de matemáticas de secundaria, al desarrollar un problema de tipo geométrico, da evidencia de su conocimiento de la estrategia heurística de simplificar un problema para explorar su solución. En esta misma investigación, se presenta un episodio donde el profesor le propone a uno de sus estudiantes que realice un dibujo como estrategia heurística para avanzar en la resolución del problema. Asimismo, en la investigación de Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero et al. (2019) se expone el conocimiento de profesores de educación infantil de la sistematización para reproducir la composición de un número como estrategias heurísticas de resolución de problemas y la validación como fase de la resolución de problemas. Así, coincidimos con otros estudios en cuanto a evidencias del conocimiento de los profesores de estrategias heurísticas de resolución de problemas, aunque en los trabajos revisados no encontramos evidencias que mostraran el conocimiento de la estrategia de introducir un elemento auxiliar para explorar la solución de un problema, registrado en esta tesis.

4.1.4 Conocimiento del papel del lenguaje matemático

Silver, Kilpatrick, y Schleisinger (1990) afirman que las matemáticas se desarrollan a través de la comunicación, y las ideas matemáticas se vuelven tangibles cuando las personas encuentran palabras y símbolos para expresarlas. En este sentido, Barberà (1996) señala la función expresiva y comunicativa del lenguaje matemático de modo que este se convierte en un vehículo de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases. De esta forma, a través del uso del lenguaje matemático los estudiantes obtienen la habilidad de formular, clarificar y reestructurar el pensamiento para comunicar una idea o un argumento a otras personas (Vlassis, 2008). A su vez, los profesores son los principales mediadores entre los estudiantes y las formas de comunicar y exponer realidades matemáticas lo cual señala la importancia del conocimiento del profesor del *papel del lenguaje matemático.* Muñoz-Catalán y Montes (2016) señalan que el lenguaje, en el sentido de la búsqueda del rigor y de la precisión como en su papel en la construcción de conceptos matemáticos, es uno de los aspectos que permea el MTSK en todas las etapas educativas. En esta línea, Barrera, Liñán, Muñoz-Catalán y Contreras (2016) reflexionan sobre la importancia que tendría en el conocimiento especializado de profesores de primaria el conocimiento del lenguaje matemático. Similarmente, al ser la educación infantil una etapa creadora de lenguaje, cobraría especial importancia como parte del KPM del profesor el conocimiento del lenguaje matemático específico y preciso (Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García y Liñán-García, 2019).

En este estudio describimos el conocimiento del *papel del lenguaje matemático* como una categoría formada por las subcategorías significado y uso de los símbolos, y uso del lenguaje matemático. En relación al *significado y uso de los símbolos* encontramos que en el trabajo de Rojas (2014) se expone un episodio donde un profesor de primaria da cuenta de su conocimiento del uso del signo igual. Además, Espinoza-Vásquez (2015) presenta evidencias del conocimiento de un profesor de matemáticas de secundaria sobre los cuantificadores y su rol en la definición de función. Respecto al *uso del lenguaje matemático,* en el trabajo de Montes et al. (2015) se expone un episodio de clases donde un formador de profesores tiene como objetivo obtener una formulación precisa de una conjetura, dando cuenta de su KPM donde la precisión cobra gran relevancia. Observamos, además, que Carrillo et al. (2017) exponen un episodio donde se evidencia el conocimiento de una profesora de matemáticas de secundaria de la importancia de la precisión matemática, tanto en la argumentación como en el uso de letras y expresiones para comunicar un resultado. Adicionalmente, Muñoz-Catalán, Joglar-Prieto, Ramírez-García, Escudero et al. (2019) presentan un episodio de clases donde un profesor de educación infantil primero utiliza términos del lenguaje cotidiano y luego los sustituye por un vocabulario más formal debido a que conoce el papel del lenguaje en la construcción y comunicación matemática.

De acuerdo con lo que se ha mostrado en esta sección, a excepción de la subcategoría *construcción de definiciones* y los descriptores referentes al conocimiento de demostraciones por inducción y demostraciones de existencia, el conocimiento de la estrategia heurística de introducir un elemento auxiliar para resolver un problema y el conocimiento de la economía en el uso del lenguaje matemático, para los cuales no se encontraron evidencias empíricas similares, la mayoría de los indicadores de KPM reportados en investigaciones con profesores de diferentes niveles educativos tienen cabida en las categorías de KPM propuestas en esta investigación. A su vez, encontramos elementos teóricos que apoyan los componentes del KPM evidenciados en los datos y otros prodrían permitir la ampliación de las categorías y subcategorías.

4.2 El subdominio del conocimiento de la práctica matemática: Conclusiones

Varios estudios señalan que los profesores de matemáticas necesitan tener algún conocimiento de las matemáticas como disciplina científica (e.g., Ball 1990; Dreher et al., 2018). Esta idea está en la base de la interpretación del KPM como un conocimiento sobre la matemática, que además es necesario para reflexionar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta línea, autores como Cabassut y colaboradores (2011) señalan que, por ejemplo, el metaconocimiento sobre la demostración debería ser un tema a tratar en la formación de profesores de matemáticas. Gordeau (2019) agrega que cinco de los aspectos más importantes de hacer matemáticas que deben ser tenidos en cuenta en los cursos de formación de profesores son tratar de entender procesos y objetos buscando métodos o formas de hacer algo; extraer características y definir; encontrar patrones y estructuras; representar no solo de las formas tradicionales; y comunicar. Estos aspectos están presentes en las categorías de KPM propuestas — conocimiento de las prácticas de demostrar, definir, resolver problemas y conocimiento del papel del lenguaje matemático —.

Adicionalmente, el conocimiento del profesor de la práctica de demostrar le permitiría la presentación de distintos métodos de demostración en la clase, lo cual juega un rol importante en desarrollar la comprensión de los estudiantes de la demostración. En esta línea, Demiray y Bostan (2017) señalan que, aunque algunos métodos como el método de demostración por contradicción no son considerados en currículos de secundaria, los profesores en este nivel deberían conocer los métodos de demostración con el fin de ser capaces de comprender una variedad de razonamientos y reglas lógicas. Similarmente, el conocimiento de la práctica de definir (la construcción de definiciones y las características de una definición), le permitiría al profesor reconocer, por ejemplo, una definición incompleta en un libro de texto. A partir de esta comprensión, el profesor podría hacer una mejor gestión del libro de texto como recurso de enseñanza. Sumado a lo anterior, conocer la equivalencia entre definiciones de un concepto le posibilitaría al profesor escoger una definición adecuada a sus propósitos de enseñanza. Pascual et al. (2019) añaden que, ante tareas de enseñanza como adaptar una definición para hacerla comprensible a los estudiantes o exponer ejemplos de una definición, el profesor precisa conocimiento sobre la práctica de definir. Además, para desarrollar la capacidad de los estudiantes de formular y resolver problemas matemáticos es necesario que el profesor sea capaz de diseñar y gestionar las actividades que guíen a los estudiantes (Codes, Martín y Pérez, 2020). De acuerdo con lo expuesto, el KPM es un subdominio de conocimiento importante para la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Por otra parte, tenemos en cuenta que el conocimiento del profesor es un constructo complejo y multidimensional lo que requiere que su estudio se aborde desde aproximaciones metodológicas que puedan capturar estas características. En el caso del KPM, su identificación y análisis planteaba un reto metodológico (Corrêa y Montes, 2016; Flores-Medrano y Aguilar-González, 2017) al cual respondimos construyendo categorías del subdominio a partir de los datos empíricos haciendo uso de la Teoría Fundamentada.

Consideramos que esta aproximación nos permitio comprender en profundidar los componentes del KPM.

En línea con lo anterior, describimos como categorías del KPM el conocimiento de las prácticas de demostrar, definir y resolver problemas. Consideramos que demostrar es la búsqueda de un argumento válido de modo que la demostración está caracterizada por su poder de convicción interno y externo. Definir por su parte, es la actividad de construir, formular o llegar a establecer el conjunto de propiedades que caracterizan un objeto. Por resolver problemas nos referimos al uso de diferentes métodos o estrategias para dar respuesta a una tarea desafiante o no rutinaria. Añadimos una categoría de conocimiento del *papel del lenguaje matemático*, teniendo en cuenta que el lenguaje permite el desarrollo de las prácticas ya mencionadas, así como de otras prácticas no reportadas en este estudio. Con el conocimiento del papel del lenguaje matemático nos referimos al conocimiento de los diferentes símbolos matemáticos, sus significados o interpretación en diferentes contextos y su elección para comunicar ideas matemáticas, así como el conocimiento de la precisión, la consistencia y la simplicidad en el uso del lenguaje.

La primera aproximación que hicimos al subdominio fue la construcción de una noción de práctica matemática a partir de las ideas de Carrillo y colaboradores (2018) y la literatura de investigación. En esta descripción las prácticas matemáticas son actividades matemáticas basadas en las formas de trabajar en la disciplina que pueden desarrollarse alrededor de cualquier contenido matemático y que permiten a quien las desarrolla construir, validar y comunicar conocimiento matemático en el contexto educativo. Aunque en esta descripción se ha tomado explicitamente la matemática disciplinar como referente, es posible estudiar el KPM a partir de prácticas matemáticas no convencionales desarrolladas en otras comunidades de referencia, siendo necesario cuidar que la consideración de estas prácticas no aleje el subdominio de la idea de especialización que es el elemento central del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Además, "*personalizamos*" la idea de práctica coincidiendo con la postura de Ferreiros (2015) respecto a la importancia de los practicantes, en el desarrollo de la práctica. A su vez, al exponer que las prácticas permiten *a quien la desarrolla* la construcción, validación y comunicación del conocimiento matemático, tratamos de concretar la idea de creación de conocimiento matemático. Otro elemento adicional en la descripción de prácticas matemáticas es considerar prácticas generales, prácticas que no están vinculadas a los contenidos matemáticos y que pueden ser desarrolladas en todos los niveles escolares.

Adicionalmente, la propuesta inicial de categorización del KPM que habiamos desarrollado estuvo en consonancia con la idea del subdominio como el conocimiento de las formas de hacer, proceder, conocer, crear o producir en matemáticas (Carrillo et al., 2013; Rojas, Flores y Carrillo, 2015). En este sentido, habíamos descrito el KPM en términos de formas de proceder, formas de validar y formas de comunicar (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2018; Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019a), buscando los elementos comunes que constituían diversas prácticas, sin embargo, esta postura presentaba dificultad dado que las categorías consideradas no eran disyuntas. Por ejemplo, al describir la práctica de demostrar dentro de las formas de validar nos encontramos con que los métodos de demostración o el uso de contraejemplos para demostrar podrían ser interpretados como formas de proceder en matemáticas, además cuestionamos ¿qué otras prácticas podrían ser clasificadas como formas de validar? A su vez, al considerar la demostración dentro de las formas de validar, ¿no estaríamos invisibilizando los otros roles de la demostración como convencer o explicar? ¿no sería también la demostración en su rol de comunicación parte de las formas de comunicar? En el caso de la práctica de definir, ¿cómo sería considerada, como una forma de proceder o como una forma de comunicar? Y si está en las formas de proceder, ¿cuál es su aporte?

Las reflexiones anteriores expresan por qué la categorización del KPM en términos de *formas* no facilitaba su comprensión. En este punto es importante señalar que, aunque el propósito de esta tesis es categorizar el KPM, lo que subyace a esta idea es que proponer un sistema de categorías para el subdominio que sea simple, explicativo y útil (Codes, Moriel-Junior et al., 2019) viene acompañado de la posibilidad de avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. De este modo, el propósito ha sido proponer categorías que cumplan con su fin analítico.

Considerando lo anterior, finalmente organizamos el subdominio KPM en términos de las prácticas matemáticas identificadas. Si bien hay autores que proponen generar una categoría de conocimiento por cada práctica matemática (Campos-Cano y Flores-Medrano, 2019), concordamos con Weber, Dawkins y Mejía-Ramos (2020) en que prácticas que pueden ser útiles para el crecimiento del conocimiento matemático dentro de la disciplina pueden ser inapropiadas o perjudiciales en el aula de clases. En este sentido, sin perder la exhaustividad en la búsqueda de caracterizar las prácticas matemáticas y el conocimiento del profesor de dichas prácticas, es necesario distinguir las prácticas matemáticas útiles de las que no lo son, así como realizar ciertas agrupaciones entre prácticas matemáticas.

Distinguir y evidenciar las prácticas matemáticas útiles es un tema de discusión que no abordamos en profundidad en este trabajo, aunque podríamos decir que la consideración de prácticas matemáticas independientes del contenido matemático o prácticas matemáticas generales es una primera aproximación a esto. En esta línea, coincidimos con Rassmusen y colaboradores (2005) en que las prácticas matemáticas pueden tener matices diferentes en un área de contenido particular, no obstante, algunos de sus aspectos transcienden el contenido matemático. En este sentido, al explorar otros contenidos matemáticos, como álgebra o geometría, ciertas prácticas asociadas al desarrollo del conocimiento matemático en estas áreas podrían cobrar relevancia en la comprensión del KPM y estaríamos hablando entonces de prácticas matemáticas específicas que serían interesantes de explorar, nuevamente desde el punto de vista de la utilidad. En cuanto a las agrupaciones ente prácticas matemáticas, por ejemplo, en la categoría de conocimiento de la práctica de demostrar incluimos otras prácticas matemáticas como generalizar, particularizar, conjeturar y construir contraejemplos. Lo antes mencionado con el propósito de obtener un sistema de categorías que sea funcional para estudiar el KPM.

Adicionalmente, tal como se mostró en la discusión, la mayoría de los indicadores de KPM reportados en investigaciones con profesores de diferentes niveles educativos caben dentro de las categorías de KPM propuestas en esta investigación. Por tanto, aunque en el proceso de construcción de categorías hacemos énfasis en que las categorías deben ser mutuamente excluyentes (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019b), la característica más relevante de esta propuesta es su consistencia con la noción de KPM que se utiliza al investigar con el modelo

MTSK. Así, algunas de las subcategorías del KPM se enriquecen de las evidencias empíricas reportadas en otros estudios, manteniéndose dentro de la categoría construida. Por ejemplo, los elementos que componen la subcategoría *características de la definición* (no ambigüedad, no contradicción, equivalencia y elegancia) son complementados con las evidencias halladas en otras investigaciones respecto a las características de jerarquía y minimalidad (Codes, Climent y Oliveros, 2019; Carreño y Climent, 2019). Una situación similar se presenta con la subcategoría *métodos y tipos de demostración* donde a partir de otros estudios incluimos el descriptor del conocimiento de demostraciones con conectivos lógicos como disyunciones y conjunciones (Alfaro et al., 2020). En cuanto a la subcategoría *roles de la demostración*, incluimos el conocimiento del rol de comunicación (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019). Complementando lo anterior, aunque el conocimiento sobre las conjeturas no fue evidenciado en esta investigación, encontramos que Montes et al. (2015) presentan un episodio de clases donde un formador de profesores da cuenta de su conocimiento de cómo formular una conjetura, así como su conocimiento de la diferencia entre una conjetura y una demostración. Adicionalmente, Carrillo et al. (2017) exponen el conocimiento de una profesora de matemáticas de secundaria del rol de las conjeturas y cómo son construidas. En consonancia con estos resultados y debido a que contrastar conjeturas y proporcionar argumentos para su viabilidad son actividades muy relacionadas con la demostración (Stylianides et al., 2016) a tal punto que conjeturar y probar son prácticas que pueden estudiarse en conjunto (Fernández-Leon y Gavilán-Izquierdo, 2019), tiene sentido incluir en la subcategoría *desarrollo de demostraciones* el conocimiento del profesor de las conjeturas y su papel en la demostración, produciéndose así una ampliación de la subcategoría. A su vez, el descriptor de particularización y generalización se hace más específico cuando se combina con el descriptor de *establecimiento de regularidades y patrones*.

Considerando lo anterior, la forma en que se organizaron las subcategorías del KPM hace que sea posible incluir y combinar elementos con el fin de describir con mayor detalle las categorías del subdominio, como se expone en la Tabla 28, donde se presentan *con cursiva* los descriptores o subcategorías adicionales.

Tabla 28

Categorías de KPM

Categorías	Subcategorías	Descriptores
Conocimiento de la práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones	Particularización y generalización (uso de casos particulares; *establecimiento de regularidades y patrones*) Construcción de *conjeturas* y contraejemplos y su papel en la demostración
	Métodos y tipos de demostración	Método directo, métodos indirectos y método de demostración por inducción Demostración de proposiciones condicionales y *con otros conectivos lógicos* Demostraciones de existencia y/o unicidad

	Roles de la demostración	Verificación, convicción, explicación y *comunicación*
Conocimiento de la práctica de definir	Construcción de definiciones	Extensión o variación de una definición conocida
	Características de la definición	No ambigüedad, no contradicción, equivalencia, elegancia, *jerarquía, minimalidad, no circularidad, independencia bajo cambio de representación*
Conocimiento de la práctica de resolver problemas	Estrategias heurísticas	Examinar casos particulares y utilizar diagramas Introducir un elemento auxiliar y reformular un problema
	Formulación de problemas	*Variación de un problema dado* *Generación a partir de una situación o una idea*
Conocimiento del papel del lenguaje matemático	Significado y uso de los símbolos	Uso de los símbolos de forma coherente Significado y uso de los cuantificadores
	Uso del lenguaje matemático	Precisión y economía en el uso del lenguaje matemático

Según puede observarse, por ejemplo, la categoría de *conocimiento de la práctica de resolver problemas* podría ampliarse incluyendo en ella elementos el conocimiento de la formulación de problemas, lo anterior considerando que la resolución y la formulación de problemas se sitúan en la esencia del quehacer matemático (Carrillo, 2018). En cuanto a la categoría de *conocimiento del papel del lenguaje matemático*, fueron pocos los descriptores reportados en otros estudios que pudiesen clasificarse en esta categoría. Lo anterior, tiene que ver con que el lenguaje es un aspecto que no estaba explícito en el MTSK, en el sentido de que los elementos del lenguaje podían relacionarse con categorías existentes en el modelo, pero no siempre de manera directa (Muñoz-Catalán y Montes, 2016). Así, la inclusión en el KPM de la categoría de conocimiento del papel del lenguaje matemático es una oportunidad para explorar este conocimiento. Además, la particularidad de esta categoría es estar presente en el desarrollo de las diferentes prácticas matemáticas, de forma que los posteriores estudios que incluyan otras categorías al KPM podrían a su vez refinar la categoría referida al lenguaje matemático.

De acuerdo con lo que se ha expuesto, los resultados obtenidos en este estudio son un aporte a la categorización del KPM, no obstante, al estar restringidos al conocimiento de profesores de matemática universitarios es necesario desarrollar más investigaciones que den cuenta del KPM de profesores de diferentes niveles educativos. En esta línea, proyectamos seguir investigando en el KPM con el fin de refinar las categorías propuestas para que puedan ser adaptadas en el estudio del conocimiento del profesor de cualquier nivel educativo. De esta forma, comprendemos los resultados de este estudio como una primera aproximación a la categorización del KPM. Así, aunque las categorías con las que contamos ahora podrían cambiar a medida que obtengamos nuevos resultados, las mismas son un punto de partida para realizar análisis más profundos del KPM.

Además, sería interesante explorar con mayor profundidad el conocimiento de la práctica de definir, así como posibles vínculos entre las prácticas de definir y demostrar. En particular, nos proponemos explorar la subcategoría *construcción de definiciones* para la cual no encontramos evidencias empíricas similares a los estudios que se refieren al conocimiento de la definición desde el punto de vista del MTSK.

Nos cuestionamos, además, qué prácticas matemáticas no contempladas en este estudio se podrían incluir en el KPM y esto lo dejamos como una pregunta abierta, aunque proponemos, por ejemplo, que la modelización es una práctica que podría integrarse a las categorías del KPM, ya sea unida a la categoría de conocimiento de la práctica de resolver problemas o como una categoría en sí misma.

De particular interes es el estudio del KPM en relación con otros subdominios tanto del conocimiento matemático como del conocimiento didáctico del contenido. Así como las relaciónes entre el KPM y las creencias del profesor sobre la matemática, pues consideramos que estas relaciones tienen el potencial para explicar el conocimiento especializado del profesor volviendo a la perspectiva holística de dicho conocimiento. En este sentido, nos proponemos indagar de manera más general en el conocimiento especializado de profesores universitarios y nos involucramos en esta línea de investigación que busca entender el conocimiento de los profesores universitarios, su desarrollo y cómo se refleja en la práctica de enseñanza de los profesores universitarios (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, y Rasmussen, 2016). A su vez, esperamos aportar a los desafíos de describir los subdominios y categorías del modelo con más profundidad y mejorar la imagen de las relaciones entre subdominios de conocimiento, lo cual se vincula con el objetivo de seguir desarrollando el MTSK de acuerdo con la panorámica de la investigación con el modelo presentado por Carrillo (2019).

Referencias Bibliográficas

Alfaro, C., Flores, P., y Valverde, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75.

Alfaro, C., Flores, P., y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA*, *14(*2), 85-117.

Arcavi, I. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25*(2), 42-47.

Arias, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y educación en enfermería*, *18*(1), 13-26.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (Trad. Pedro Gómez). Bogotá: Universidad de los Andes.

Ball, D. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D., y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D., y Bass, H. (Marzo, 2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing Mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik.* Oldenburg, Germany. Recuperado de https://static1.squarespace.com/static/577fc4e2440243084a67dc49/t/579a39cebe65945c23e8b8cf/1469725134888/EyeOnMathHorizon.pdf

Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H., y Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. En L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III: Invited Lectures, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Ball, D., y McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education*, (pp. 437–449). New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barberà, E. (1996). La función del lenguaje en la educación matemática. *Cultura y Educación*, *8*(4), 93-102.

Bardini, C., y Pierce, R. (2015). Assumed mathematics knowledge: the challenge of symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *23*(1), 1-9.

Barrera, V. J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, C., y Contreras, L. C. (2016). Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 167-176). Málaga: SEIEM.

Barton, B. (2004). Mathematics and mathematical practices: Where to Draw the Line? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 22-24.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: A dialogic perspective. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 73-80). Kiel, Alemania: PME.

Bass, H. (2011). A vignette of doing mathematics: A meta-cognitive tour of the production of some elementary mathematics. *Montana Mathematics Enthusiast, 8*(1–2), 3–34.

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Maidenhead, Philadelphia: Open University Press.

Becker, H., y Geer, B. (1960). Participant Observation: The Analysis of Qualitative Field Data. En R. N. Adams y J. J. Preiss (Eds.), *Human Organization Research: Field Relations and Techniques* (pp. 267–289). Homewood, IL: The Dorsey Press.

Bills, L., y Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. *Advances in Mathematics Education, 1*(1), 103–116.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Bishop, A. J. (1997). *Mathematical Enculturation, A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A., y Rasmussen, C. (2016). *Research on teaching and learning mathematics at the tertiary level*. Basel, Suiza: Springer.

Bleiler-Baxter, S. K., y Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior, 47*, 16-34.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 3-21.

Boaler, J., y Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record, 110*(3), 608-645.

Bosch, M., y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 12*(3), 314-322.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer, y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115. [Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo].

Brown, S.A. (2017). Who's There? A Study of Students' Reasoning about a Proof of Existence. *International Journal of Research in Undergraduate Matematics Education, 3***,** 466–495.

Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4th ed.). Oxford: Oxford University Press.

Bryant, A. (2017). *Grounded theory and grounded theorizing: Pragmatism in research practice.* Oxford: Oxford University Press.

Bryant, A., y Charmaz, K. (Eds.) (2007). *The sage handbook of grounded theory*. London: Sage.

Burton, L. (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 37*(2), 121–143.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., y Morselli, F. (2011). Conceptions of proof in research and teaching. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Dordrecht: Springer.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, *1*(1), 33-60.

Campos-Cano, M., y Flores-Medrano, E. (2019). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. En J. Carrillo, M. Codes, y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 87-94). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cañon, C. (1993). *La matemática: Creación y descubrimiento*. Madrid: Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas.

Carreño, E., y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA 14*(1), 23-53.

Carrillo, J. (2018). Resolução e proposição de problemas. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *9*(1), 158-169.

Carrillo, J. (2019). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes, y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.7-12) Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth CERME* (pp. 2985-2994). Ankara: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Ribeiro M. (2017). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) in the "dissecting an equilateral triangle" problem. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *7* (2), 88-107.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D... Muñoz-Catalán, M. C. et al. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 85-205.

Carlson, M., y Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*(1), 45–75.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *International Journal on Mathemathics, Science and Technology Education, 3*(1), 19-36.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. London: Sage.

Charmaz, K. (2014). *Constructing grounded theory* (2nd ed.). London: Sage.

Clark, M., y Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(6), 755-776.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. (Tesis doctoral) Huelva: Universidad de Huelva.

Climent, N., Escudero-Avila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, C., y Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Avila, y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK* (pp. 43-70). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*(1-2), 113–164.

Codes, M., Climent, N., y Oliveros, I. (2019). Prospective primary teachers' knowledge about the mathematical practice of defining. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 3871-3878). Utrecht, Los Países Bajos: Utrecht University and ERME.

Codes, M., Martín, J.P., y Pérez, R. (2020). Formulación de problemas en un aula de educación infantil: un reto desde la resolución de problemas. *Investigação e Práticas em Educação em Ciência, Matemática e Tecnologia, 1*(1), 87-99.

Codes, M., Moriel-Junior, J., Alfaro, C., y González, Y. (2019). Síntesis y problemas abiertos en el IV congreso iberoamericano de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). En J. Carrillo, M. Codes, y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 31-37). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cohen, L., y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Contreras, L.C., y Carrillo, J. (2018). El esquivo dominio del conocimiento del profesor de matemáticas. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la educación matemática* (pp. 219-236). México: SOMIDEM.

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp.337-344). Vancouver, Canada: PNE.

Corrêa, D., y Montes, M. (2016). MTSK: Problemas abiertos y preguntas para la reflexión. En J. Carrillo, L. Contreras, y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor*. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 94-100). Huelva: SGSE.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Crespo, C., Farfán, R., y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(3), 283-306.

D'Ambrosio, U. (2007). Peace, social justice and ethnomathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *1*, 25–34.

Davis, B. (2010). Concept studies: Designing settings for teachers' disciplinary knowledge. En M.M. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings 34th conference of the PME* (Vol.1, pp 63-78). Belo-Horizonte, Brazil: PME.

Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Dawkins, P.C, y Hub, A. (2017). Explicating the concept of contrapositive equivalence. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th PME-NA* (pp. 669-676). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Dawkins, P.C., Inglis, M., y Wasserman, N. (2019). The use(s) of *is* in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 100*(2), 117–137.

Dawkins, P. C., y Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123–142.

Dawson, J. (2006). Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica, 14,* 269–286.

De Toffoli, S., y Giardino, V. (2016). Envisioning Transformations-The Practice of Topology. En B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures. The London Meetings 2012-2014* (pp. 25-50). Basel: Birkhäuser.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24,* 17–24.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the PME 22* (vol. 2, pp. 248–255). Stellenbosch: RSA.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. En G. Hanna, H. Jahnke, y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics*. Boston: Springer.

De Villiers (2012). An ilustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33*(3), 1-8.

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 241-250). Valladolid: SEIEM.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2018). Knowledge of the practice in mathematics in university teachers. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, y N.M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 393–402). Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019a). Exemplifying mathematics teacher's specialised knowledge in university teaching practices. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 3895-3902). Utrecht, Los Paises Bajos: Utrecht University and ERME.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2019b). Construyendo categorías del conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. Codes, y L.C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 70-78). Huelva: CGSE.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18(*3), 567-587.

Demiray, E., y Bostan, M. (2017). Pre-service middle school mathematics teachers' evaluations of discussions: the case of proof by contradiction. *Mathematics Education Research Journal, 29*(1), 1-23.

Denzin, N. (1989). *The Research Act* (3ª ed.). Englewood Cliffs. NJ: Prentice Hall.

Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25.

Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A., y Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*, 319–341.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM, 40*(3), 373–384.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 173–189.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D., y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras, y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). Huelva: SGSE.

Escudero, I. M., Gavilán, J. M., y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Espinoza-Vasquéz, G. (2015). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I.M. Gómez.Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. Richard, y L. Vivier (Eds.), *Actas del quinto simposio internacional del ETM* (pp. 441-452). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Felmer, P., Liljedahl P., y Koichu, B. (2019). *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development.* Cham: Springer

Fennema, E., y Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the NCTM*, (pp.147–164). New York: Macmillan.

Fernández, S., y Figueiras, L. (2014). Horizon content knowledge: Shaping MKT for a continuous mathematical education. *REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education*, *3*(1), 7-29.

Fernández-León, A., y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 283-292). Valladolid: SEIEM.

Ferreiros, J. (2015). *Mathematical knowledge and the interplay of practices.* Princeton: Princeton University Press.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2ª ed.), Madrid: Morata.

Flores, E., Escudero, D., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Ankara: ERME.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras, y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). Huelva: SGSE.

Flores-Medrano, E., y Aguilar-González, A. (2017). Profundizando en el Conocimiento de la Práctica Matemática. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 38-47). Huelva: CGSE.

Flores-Medrano, E., Montes, A., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, Mª C., y Liñán, Mª. M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema*, *30*(54), 204- 221.

Foster C., y de Villiers, M. (2016). The definition of the scalar product: an analysis and critique of a classroom episode. I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(5), 750-761.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gaete, R. (2014). Reflexiones sobre las bases y procedimientos de la teoría fundamentada. *Ciencia, Docencia y Tecnología*, *25*(48), 149-172.

Getenet, S. T., Beswick, K., y Callingham, R. (2015). Conceptualising technology integrated mathematics teaching: The stamp knowledge framework. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th PME conference* (Vol. 2, pp. 321-328). Hobart, Australia: PME.

Gergen, K. (1985). The social constructionist movement in modern psychology. *American Psychologist*, *40*, 256-275.

Glaser, B. (2003). *The Grounded Theory Perspective: Description's remodeling of Grounded Theory*. Mill Valley, CA: Sociology Press.

Glaser, B., y Strauss, A. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine Press.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*,13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113.

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, lenguaje y educación*, *1*(3-4), 5-16.

Goulding, M., Rowland, T., y Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, *28*(5), 689-704.

Gourdeau, F. (2019). Problem solving as a subject and as a pedagogical approach, and the ongoing dialogue between mathematics and mathematics education. En P. Felmer, P. Liljedahl P., y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 23-42). Cham: Springer.

Guba, E., y Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (1st ed., pp. 105-117). Thousand Oaks: Sage.

Guzman, M., Hodgson, B.R., Robert, A., y Villani, V. (1998). Difficulties on the passage from secondary to tertiary education. En G. Fischer y U. Rehmann (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (vol. 3, pp. 747-762). Berlin: Documenta Mathematica.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1-3), 5–23.

Hanna G. (2002). Mathematical Proof. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* (Vol 11, pp. 54-61). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 3-18). Cham: Springer.

Hanna, G., y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877–908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2, 805-842. Charlotte: Information Age Publishing.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª ed.), México: Mc Graw Hill.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389–399.

Hersh, R. (1997). *What Is Mathematics, Really?* New York: Oxford University Press.

Henwood, K., y Pidgeon, N. (2006). Grounded Theory. En G. Breakwell, S. Hammond, C. Fife-Sahw, y J. Smith (Eds.), *Research Methods in Psychology* (3rd ed., pp. 342-365). London: Sage.

Howell, H. (2012). *Characterizing mathematical knowledge for secondary teaching: A case from high school algebra* (Tesis doctoral). New York University Steinhardt School of Culture, Education, and Human Development, New York.

Ibañes, M., y Ortega, T. (1997). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática, 9*(2), 65-104.

Kilpatrick, J. (2016). Reformulating: Approaching mathematical problem solving as Inquiry. En P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and New Perspectives* (pp. 69-81). New York: Springer.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge.* New York: Oxford University Press.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. En G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, y B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 307–324). Cham, Suiza: Springer.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis. An introduction to its methodology* (2nd edition). Thousand Oaks: Sage.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas* (Trad. Agustín Contín). México: Fondo de Cultura Económica.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Lakatos I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: University Press.

Lakoff, G., y Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from.* New York: Basic Books.

Leikin, R., y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 3,* 62–73.

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(2), 253-270.

Lester, F. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 245-278.

Li, Y., Huang, R., y Yang, Y. (2011). Characterizing Expert Teaching in School mathematics in China – A Prototype of Expertise in Teaching Mathematics. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.167-195). New York: Springer.

Lin, F.-L., y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En Á. Gutiérrez, G. Leder, y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 483-520). Rotterdam: Sense Publishers.

Liñán-García, M.M., y Carrillo, J. (2018). Razonamiento Matemático en Educación Infantil. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para Maestros de Educación Infantil.* Madrid: Paraninfo.

Martín-Molina, V., González-Regaña, A., y Gavilán-Izquierdo, J.M. (2018). Researching how professional mathematicians construct new mathematical definitions: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(7), 1069-1082.

MacLane, S. (1986). *Mathematics: Form and Function*. New York: Springer.

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Montes, M., Jofré, F., Carrillo, J., y Contreras, L.C. (2015). Una aproximación a las relaciones MTSK-ETM en el aula de formación de maestros. En I.M. Gómez.Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. Richard, y L. Vivier (Eds.), *Actas del quinto simposio internacional del ETM* (pp. 479-490). Florina, Grecia.

Moriel-Junior, J. G., y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Moschkovich, J. N. (2013). Issues regarding the concept of mathematical practices. En Y. Li y J. N. Moschkovich (Eds.), *Proficiency and beliefs in learning and teaching mathematics* (pp. 257–275). Rotterdam: Sense.

Muñoz-Catalán, C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., Escudero, A.M., Aguilar, A., y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63-84). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M.C., Joglar-Prieto, N., Ramírez-García, M., y Liñán-García M. (2019). MTSK en educación infantil. En J. Carrillo, M. Codes, y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.24-31). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Muñoz-Catalán, M.C., y Montes, M.A. (2016). La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 87-93). Huelva: SGSE.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(4), 389–422.

Noerager-Stern, P. (2007). On Solid Ground: Essential Properties for Growing Grounded Theory. En A. Bryant y K. Charmaz (Eds.), *The sage Handbook of Grounded Theory* (pp. 114-126). Londres: Sage.

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M., y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407- 416). Gijón: SEIEM.

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P., y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: Análisis de sus definiciones de polígono. En J. M., Marbán, M., Arce, A., Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.

Pidgeon, N., y Henwood, K. (2004). Grounded Theory. En M. Hardy y A. Bryman (Eds.). *The Handbook of Data Analysis* (pp. 625-648). Londres: Sage.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Piñeiro, J., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA 13*(2), 104-129.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). New York: Doubleday.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND Education/Science and Technology Policy Institute.

Rasmussen C, Zandieh M, King K, y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51–73.

Rasmussen, C. (2016). Examining individual and collective level mathematical progress. M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, y J.A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of PME-NA* (pp. 15-27). Tucson, AZ: The University of Arizona.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, Huelva.

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema, 29*(51), 143-166.

Rota, G. C. (1997). The phenomenology of mathematical proof. *Synthese, 111*, 183-96.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T., y Turner, F. (2008). How shall we talk about 'subject knowledge' for mathematics teaching? In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol.2, pp. 91-96). Southampton: BSRLM.

Sáenz-Castro, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, F. Hill, M. Socas, y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (Vol. V, pp. 47–62). Almería: SEIEM.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J.D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153-172.

Schoenfeld, A. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 794-805.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229-272). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Selden A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. En G. Hanna, M. y de Villiers M. (Eds.). *Proof and Proving in Mathematics Education*. *New ICMI Study Series* (vol 15, pp. 391-420). Dordrecht: Springer.

Selden, A., y Selden, J. (2003). Validations of proofs written as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4–36.

Selling, S. (2016). Making mathematical practices explicit in urban middle and high school mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(5), 505–551.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Paris: Pétra.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E., Kilpatrick, J., y Schleisinger, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms.* The thinking series. New York, NY: College Entrance Examination Board.

Solow, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa.

Sosa, L., Contreras, L.C., Gómez-Chacón, I. Mª, Flores-Medrano, y E. Montes, M.A. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71-79). Huelva: CGSE.

Speer, N., King, K., y Howell, H. (2014). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 105–122.

Staples, M., Bartlo, J., y Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(4), 447– 462.

Steele, M. D., y Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(2), 159–180.

Stoyanova, E., y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Strauss, A. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge: Cambridge University Press.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. Denzin, y Y. Lincoln, (Eds.), *Handbook of qualitative research (*pp. 273- 285). Thousand Oaks: Sage.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa, técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (E. Zimmerman, Trad.). Medellín: Editorial Universidad de Antioquia (Trabajo original publicado en 1990).

Stylianides, A. J., y Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307-332.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N., y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education. In A. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 315-351. Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, G. J., Sandefur, J., y Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *43,* 20-34.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

Thurston W. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-37.

Turner, F. (2012). Using the knowledge quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education, 14*(3), 253-271.

Van Bendegem, J. P., y Van Kerkhove, B. (2004). The unreasonable richness of mathematics. *Journal of Cognition and Culture*, *4*(3), 525-549.

Van Dormolen, J., y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91-106.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46(1-3)*, 59-85

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign*. Philosophical Psychology, 21*(4), 555–570.

Vollstedt, M., y Rezat, S. (2019). An introduction to Grounded Theory with a special focus on axial coding and the coding paradigm. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 81- 100). Cham: Springer.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), 14-17.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(4), 463- 482

Weber, K., y Dawkins, P. C. (2018). Toward an evolving theory of mathematical practice informing pedagogy: What standards for this research paradigm should we adopt? En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 69–82). Cham: Springer.

Weber, K., Dawkins, P., y Mejía-Ramos, J. P. (2020). The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research. *ZDM*, 1-12.

Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas refelexiones. En G. Martínez (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa* (Vol. 19, pp.528-537). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Wood, T., Staples, M., Larsen, S., y Marrongelle, K. (marzo, 2008). Why are Disciplinary Practices in Mathematics Important as Learning Practices in School Mathematics? Documento presentado en *Working Group 1. Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI.* Rome, Italy. Recuperado de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/WOOD.pdf

Woods, P. (1992). Symbolic Interactionism: Theory and Method. En M.D., LeCompte, W.L., Millroy, y J., Preissle (Eds), *The Handbook of Qualitative Research in Education* (pp. 337-404). London: Academic Press.

Yopp, D. (2011). How some research mathematicians and statisticians use proof in undergraduate mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 115-130.

Yopp, D. (2017). Eliminating counterexamples: A Grade 8 student's learning trajectory for contrapositive proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 45,* 150–166.

Zakaryan, D., y Ribeiro, C. M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, *24*(3), 301-321.

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2019). ¿Cómo los profesores hacen prácticas matemáticas en sus aulas? En R. Olfos, E. Ramos., y D. Zakaryan (Eds.), *Formación docente: Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 281-300). Barcelona: Graó.

Zandieh, M., Wawro, M., y Rasmussen, C. (2016). Symbolizing and brokering in an inquiry oriented linear algebra classroom. En T. Fukawa-Connelly, N. Infante, M. Wawro, y S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1475-1483). Pittsburgh: RUME.

Zandieh, M., Wawro, M., y Rasmussen, C. (2017). An example of inquiry in Linear Algebra: The roles of symbolizing and brokering. *PRIMUS, 27*(1), 96-124,

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., y Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Dordrecht: Springer.

Zaslavsky, O., y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

Zazkis, R., y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Anexo 1
Transcripción de episodios de clase y entrevistas

Índice

Análisis Real: Propiedades de los números reales 102
AR1.1 [6:00-9:51] Propiedad de los intervalos encajados 102
AR1.2 [13:09-19:23] Casos 102
AR1.3 [21:34-23:17] Rol de la demostración 103
AR1.4 [24:15-28:30] Demostración existencia 103
AR1.5 [30:15-37:55] Demostración por contradicción 103
AR1.6 [43:57-47:25] Significado de los cuantificadores 104
AR1.7 [50:40-1:37:36] Demostración por contradicción 105
Entrevista Diego (Análisis Real) 106
[EAR1] ¿Que es un lema? 106
[EAR2] ¿Que es una demostración? 107
[EAR3] ¿Cuál es la diferencia entre escoger o construir un elemento? 107
[EAR4] ¿Cuándo una condición es necesaria y cuando es suficiente? 107
[EAR5] ¿Cuál fue el objetivo de este comentario? 107
[EAR6] ¿Hay alguna razón por la cual usa palabras como intervalito? 108

Curso Ecuaciones Diferenciales Ordinarias **111**
Sesión 1: El problema de Cauchy 111
ED1.1 [2:00-13:40] Ecuación logística 111
Sesión 2: El teorema de Picard-Lindeloff 112
ED2.1 [32:35-45:00] Teorema del punto fijo de Banach 112
Sesión 3: Dependencia de las soluciones 114
ED3.1[37:25 – 52:35]: Demostración de unicidad 114
Sesión 4: Teorema de Grobman-Hartman 116
ED4.1 [59:25 – 1:08:20]: Estrategia heurística 116
Sesión 5: Exponencial de una matriz y clasificación de flujos lineales. 117
ED5.1 [13:40– 16:45] Generalización 117
Entrevista Diego (Ecuaciones Diferenciales) 118
[EED1] ¿Qué significa que las ecuaciones diferenciales son una teoría cualitativa? 118
[EED2] ¿Por qué en matemáticas es usual considerar casos para resolver un problema o para hacer una demostración? 118
[EED3] ¿Porqué sucede lo siguiente? 119
[EED4] Podría profundizar en la siguiente afirmación: 120
[EED5] ¿Por qué es importante la unicidad de la solución del problema de Cauchy? 121
[EED6] ¿Podría explicarnos o darnos un ejemplo de cómo se usa el argumento de conexidad? 121

[EED7] ¿Cómo explica esa costumbre que tenemos en matemáticas de sumar o a multiplicar lo que necesitamos? 122
[EED8] ¿Cuál era el propósito de exponer una idea inocente de la demostración del teorema de Hartman Grobman? 123
[EED9] ¿A qué se refiere con una condición técnica? 123
[EED10] ¿Qué significa que algo esté bien definido en matemáticas? 124
[EED11] ¿Cómo se relacionan la definición y la demostración? 124
[EED12] ¿Qué es una definición? 125
[EED13] ¿En la definición hay un propósito de comunicar? 126
[EED14] ¿Por qué es importante el uso de lenguaje formal? 126
[EED15] ¿A que se refiere usted con formal? 127
[EED16] ¿A que se refería con la siguiente frase? 127
[EED17] ¿Por qué algunos objetos tienen varias definiciones? 128
[EED18] ¿Para qué se demuestra en matemática? 128
[EED19] ¿Cuál es la idea que está detrás de una demostración de unicidad? 129
[EED20] En cuanto de las demostraciones de existencia, ¿en qué se basan? 129
[EED21] ¿Podría explicar las ideas anteriores sobre la existencia ? 130
[EED22] ¿Cómo explica usted una demostración por inducción? 130
[EED23] ¿Es usual recurrir a una estructura de razonamiento que ya conozco para realizar una nueva demostración? 131
[EED24] Volvemos a lo que usted decía de cambiar un problema por otro 131
[EED25] ¿Podría profundizar en la siguiente idea? 132
[EED26] ¿Qué nos podría decir sobre la resolución de problemas? 132
[EED27] ¿Cuál es el propósito de demostrar? 133

Curso Espacios Métricos **134**
Sesión 1: Introducción a los espacios métricos 134
EM1.1 [17:15-27:40] Demostración por contradicción 134
EM1.2 [39:00-42:50] Garantizar la existencia 135
EM1.3 [50:20-52:30] Doble implicación 135
Sesión 2: Espacios vectoriales normados 136
EM2.1 [8:20-13:30] Demostración por el método directo 136
Sesión 3: Métricas equivalentes y conjuntos acotados 137
EM3.1 [28:15-29:35] Demostración por contradicción 137
Sesión 4: Ejercicios de topología 137
EM4.1 [9:58-11:58] Contraejemplo 137
EM4.2 [14:30-15:30] Significado del cuantificador existencial 137
EM4.3 [19:35-28:15] Estrategia heurística 138
EM4.4[29:00-32:47] Definiciones 139
EM4.5[41:20-45:20] Definiciones 139
Sesión 5: Proposiciones sobre sucesiones 140

EM5.1 [3:20-14:40] Demostración por contrarecíproco 140
Sesión 6: Convergencia simple y uniforme 141
EM6.1 [5:45-16:00] Demostración continuidad y convergencia 141
EM6.2 [1:10:05 - 1:16:05] Símbolos 142
Sesión 7: Espacios métricos completos 143
EM7.1 [8:12-13:00] Toda sucesión convergente es de Cauchy 143
EM7.2 [17:31-18:58] Sucesión de Cauchy 143
EM7.3 [40:10-57:15] Demostración $\mathbb{R}$ es completo 144
EM7.4 [59:55-1:07:40] Símbolos 146
Sesión 8: Proposiciones sobre espacios métricos completos 146
EM8.1 [4:35-6:43] Cuantificadores 146
E8.2 [1:17-1:20] Contraejemplo 147
Entrevista Juan 147
[EEM1]¿Cuál es el objetivo del curso de espacios métricos? 147
[EEM2] ¿Qué es una demostración? 148
[EEM3]¿Son importantes las demostraciones cuando está enseñando? 148
[EEM4]¿Qué es una definición? 149
[EEM5]¿Cuáles son los elementos de una definición? 149
[EEM7] ¿Qué es una caracterización y en que difiere de una definición? 150
[EEM8] ¿Qué es un contraejemplo? 150
[EEM9] ¿Cuándo y por qué se recurre a la consideración de casos para resolver un problema o hacer una demostración? 151

Curso Cálculo Vectorial **152**
Sesión 1: Extensiones al espacio n-dimensional 152
CV1.1 [30:10-37:50] Definición del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$ 152
CV1.2 [38:35- 45:56]Demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz 153
CV1.3 [59:16-1:16:15] Equivalencia entre definiciones de ortogonalidad 154
Sesión 2: Nociones topológicas y límite de funciones 156
CV2.1 [14:30-21:39] Demostración de que un conjunto es abierto 156
CV2.2 [1:03:05-1:10:40] Límites en términos de vecindades 158
CV2.3 [1:10:55-1:14:20] Equivalencia de las definiciones de límite 159
Sesión 3: Límites y continuidad 160
CV3.1 [7:05-12:05] Demostración de la existencia de un límite 160
Sesión 4: Diferenciabilidad en varias variables 161
CV4.1 [43-00 -48:00] Una condición suficiente para la diferenciabilidad 161
CV4.2 [48:30- 57:30] Recíproco de la condición suficiente 161
Entrevista Andrés 162
[ECV1]¿Qué es una definición? 163
[ECV2]¿Cuáles son los elementos de una definición? 163
[ECV3] ¿Cómo se genera una definición? 163

[ECV4] ¿Son importantes las definiciones cuando se está enseñando? 163
[ECV5] ¿Cuál es el rol de los ejemplos que usted presenta luego de las definiciones? 164
[ECV6] ¿Cuál es su objetivo al cuestionar a los estudiantes sobre la definición del producto cruz? 164
[ECV7] Profundice en la siguiente situación: 164
[ECV8] Explique la siguiente expresión sobre la definición de ángulo entre dos vectores: 165
[ECV9] ¿A qué se refiere con graficar naturalmente? 165
[ECV10] ¿Cuál es su propósito al usar la definición de limite en términos épsilon-delta ? 166
[ECV11] ¿Cree usted que la definición topológica de frontera, coincide con la idea usual que tenemos de frontera? 166
[ECV12] ¿Cuándo y por qué se recurre a la consideración de casos para resolver un problema ? 166
[ECV13] ¿Usted hace alguna diferencia entre verificar y demostrar? 167
[ECV14] ¿Para usted es importante hacer demostraciones en clase? 167

Análisis Real: Propiedades de los números reales

AR1.1 [6:00-9:51] Propiedad de los intervalos encajados

Contexto del episodio: En clases anteriores el profesor había enunciado el axioma de completitud, la caracterización del supremo y la propiedad arquimediana de los números reales. Luego de recordar a los estudiantes estos elementos continua señalando:
Diego: Lo otro que estábamos haciendo en la última clase era un teorema que dice que si a_n es menor que b_n y si I_n es una colección de intervalos cerrados y acotados con a_n estrictamente más pequeño que b_n. Esto quiere decir que los intervalos, son cerrados, acotados pero no son degenerados, es decir, no se reducen los puntos, entonces la intersección de estos intervalos es el intervalo $[a,b]$. Es decir, existe un punto x en $\mathbb{R}$ tal que x se encuentra entre a_n y b_n para todo n mayor o igual que 1. Y esta proposición indica que cada vez que intersecto intervalos cerrados y acotados que están encajados. Están encajados, ah! eso me faltaba decir, tienen que estar encajados si no, no es cierto, si no están encajados los intervalos la intersección es vacía, toma el intervalo $[0,1]$ y después toma el intervalo $[10,12]$ y la intersección nada, tienen que estar encajados. Entonces para decir que tienen que estar encajados, se escribe así, yo lo había escrito pero voy a escribir a_n menor que b_n para todo I_n conteniendo a I_{n+1}. Que hemos demostrado con esto, entonces, que tomo un intervalo encajado, que cada vez son más pequeños, que son cerrados y acotados entonces en la intersección de todos ellos hay algo, algo hay ahí.

AR1.2 [13:09-19:23] Casos

Contexto del episodio: Luego de enunciar la propiedad de la densidad de los números racionales e irracionales en los números reales, el profesor inicia la demostración en la siguiente forma:
Diego: Entonces yo ya les había comentado, les había adelantado, la idea de la demostración que es la siguiente: Tome un intervalo $[a,b]$ cualquiera y vamos a medir la longitud del intervalo . ¿Cuánto mide este intervalo? longitud $b-a$, entonces a esa longitud la voy a llamar ε que es un número positivo porque a es menor que b y el intervalo no es degenerado, entonces la longitud es positiva. Vamos a suponer que a y b son dos números positivos, que no es una gran suposición porque si fueran negativos por ejemplo los dos números trabajo con $-a$ y $-b$, tengo a y b acá [a la izquierda del cero], luego $-a$, $-b$ están del otro lado del cero [a la derecha]. Y si encuentro un numero racional acá [entre $-a$ y $-b$], entonces el negativo de ese número va a ser racional si encuentro un número irracional, su negativo es otro irracional. Y si uno es positivo y el otro es negativo, entonces el cero es racional y está entre los dos y el irracional va a salir después, en una proposición. Entonces voy a mirar la mitad de esa longitud ($\varepsilon = \frac{b-a}{2}$). Vamos a ver primero que pasa cerca de cero, vamos a suponer que a es cero, supongamos que tenemos un intervalo $(0,\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, entonces miremos, ese intervalo que es abierto y por la propiedad Arquimediana existe un número de la forma $1/n$ que es menor que ε, este número obviamente es un racional, así que muy cerca

de cero siempre hay un número racional.

AR1.3 [21:34-23:17] Rol de la demostración

Contexto del episodio: Luego de comentar que la mayoría de los números reales son irracionales a pesar de que los estudiantes conocen pocos números irracionales el profesor continua su intervención cuestionando a los estudiantes:
Diego: ¿Raíz de 2 es mayor o menor que 1?
Estudiante: Es mayor que 1
Diego: Ahora, pregunta ¿conozco algún número irracional que sea menor que 1?, y ¿mayor que 0?
Estudiante: La raíz de la raíz de 2
Diego: Ah y ¿porque es menor que 1? Hay que probar que existe, y espera, hay que probar que existe esa raíz y que es un número menor que uno, probar que la raíz existe y probar otra cosa porque no nos dijeron un número entre cero y uno, sino un numero irracional entre 0 y 1, entonces, tu puedes tomar un número real, probar que la raíz existe, pero todavía no sabes si es irracional o no.

AR1.4 [24:15-28:30] Demostración existencia

Contexto del episodio: En una sesión de clase anterior el profesor había demostrado la irracionalidad de raíz de dos. Ahora, Diego discute con los estudiantes sobre la irracionalidad de otros números:
Diego: Yo sé que raíz de dos no pertenece a los números racionales, eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero m, ¿raíz de dos dividido m va a seguir siendo racional o no?, lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este, [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional? Entonces lo que digo es lo siguiente, al menos uno de estos números tiene que estar en ese intervalo $(0,\varepsilon)$ Y hago la siguiente afirmación : Existe m en los naturales tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} < \varepsilon$. En efecto, fíjense que es casi igual que la propiedad arquimediana, si tomo la propiedad arquimediana para $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ existe m en los naturales tal que 0 es menor que $1/m$ y menor $\tilde{\varepsilon}$, y eso implica que $\frac{\sqrt{2}}{m} < \varepsilon$ y este bicharraco no pertenece a $\mathbb{Q}$. Así que entre 0 y ε por más chiquitico que sea ε, siempre hay un racional y siempre hay un irracional. Ok, entonces, vamos a escribir esto, esta afirmación que acabo de demostrar, la vamos a escribir como lema, ya, ósea es algo que lo vamos a utilizar un poquito más adelante, y está antes de la demostración.

AR1.5 [30:15-37:55] Demostración por contradicción

Contexto del episodio: Luego de haber establecido un lema al considerar $a = 0$ el profesor se propone extender el resultado para a un número racional positivo.
Diego: Entonces vamos al caso que es más general, supongamos primero que a esta en los racionales, en los racionales positivos, entonces, bueno, ¿quién es el racional que intercepta

al intervalo? Voy a suponer que a es un número racional, entonces tengo que encontrar un numero racional que intercepta el intervalo ¿a quién tomo?
Estudiante : a
Diego: a al tiro, entonces, inmediatamente tengo la intersección $\mathbb{Q} \cap [a,b] \neq \emptyset$.
¿Cuál es la difícil? [la intersección más difícil] Que haya un irracional en ese intervalo (señala $[a,b]$), esa es la difícil. Entonces, sea $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ que es positivo, por el lema anterior, existe, un número z que es real y no es racional que está entre cero y épsilon, ¿está bien?, hay un tipo aquí, irracional, z. Entonces ahora, está listo, ya se acabó la piscola, ¿por qué?, porque fíjense, ese intervalito $(0,\varepsilon)$ es como si yo tuviera ... ¿Qué punto sería este de aquí? [señala en la recta] entonces este punto es $a+\varepsilon$ y esta es la mitad de la distancia, vamos de punto a punto medio. Entonces ese intervalito es como trasladar este de acá hacia el origen, es como que al cero le sumo a y al ε le sumo a. Entonces qué es lo que pasa, si sumo a a esa desigualdad, tengo que a es más pequeño que $a+z$ y esto es más pequeño que $a+\varepsilon$ que a su vez es más pequeño que b [$a < a+z < b$]. Entonces el $a+z$ quedo acá [lo ubica en la recta] vamos a llamar a ese número y, ¿qué pasa con ese número $a+z$ o y ? a es un numero racional y z es irracional, entonces ¿cómo es $a+z$?, ¿qué vamos a demostrar? Que la suma es irracional entonces yo lo que afirmo, es que este de aquí no pertenece a $\mathbb{Q}$ y ahí se acaba la demostración, si consigo argumentar que este $a+z$ no está en $\mathbb{Q}$, ya encontré mi irracional que está entre a y b, ¿por qué no está?, ¿por qué ¿$a+z$ no es racional?, porque, si fuera racional y le sumo otro racional me tendría que dar racional porque los racionales son un cuerpo así que la suma de dos racionales va a ser racional. Entonces, bueno, tomo $a+z$, ¿qué le sumo astutamente?, ¿qué le podría sumar astutamente para llegar a una contradicción? Si él fuera racional le voy a sumar algo que sé que es irracional, que la suma me va a dar irracional.
Estudiante: $-a$
Diego: Le sumo $-a$, a es racional, $-a$ es racional y la suma me da z que debiera ser racional, pero z ya sé que es irracional, así que la suma $-a+a+z$ es irracional, no puede ser racional, listo, gane, se acabó.

AR1.6 [43:57-47:25] Significado de los cuantificadores

Contexto del episodio: El profesor continua desarrollando la demostración, ahora, considerando a como un número perteneciente a los irracionales. Diego expone, que con esta consideración no es posible usar la estrategia de demostración anterior (sumar p y continuar razonando). De este modo, se propone "trasladar racionalmente el intervalo $(0,p)$:
Diego: ¿Qué es lo que me interesa?, trasladar $(0,p)$, si consigo trasladarlo, una traslación racional, porque esta es una traslación (señala $a+p$) pero el número a es irracional, entonces estoy trasladando irracionalmente. Tengo que trasladar racionalmente y lo que nos va a permitir trasladarlo racionalmente es la propiedad Arquimediana. Que dice que si tengo un intervalo grande y un intervalo pequeñito, si yo copio un número de veces natural ese intervalo pequeñito consigo superar el grande. Entonces, cual es el intervalo pequeñito $(0,p)$,

¿sí?, ¿cuál es el intervalo grande? $(0,a)$, ¿estamos de acuerdo? Ok, entonces por la propiedad arquimediana, existe un número natural, un m, tal que $mp > a$ [entonces se puede construir un intervalo $[0,mp]$]. ¿Con eso se acabó [la demostración]?
Estudiante: Ahora falta que caiga adentro del intervalo $[a,b]$ [que $[0,mp]$ esté contenido en el intervalo $[a,b]$]
Diego: Que caiga adentro [que $[0,mp]$ esté contenido en el intervalo $[a,b]$] porque ese m puede ser super grande, pero ese es el problema, uno dice, con el para todo yo siempre puedo escoger cuál de todos es el que me conviene, pero cuando es la existencia, es lo que cayó no más, lo que cayó en la noche, entonces como el existe te da lo que cayó no más, uno tiene que hacer algún trabajo para que lo que caiga sea conveniente. Entonces qué es lo que vamos a hacer, bueno, vamos a suponer que mp está acá muy lejos [lo ubica en la recta fuera del intervalo $[a,b]$], entonces si le resto 1 a este m, $(m-1)p$ tiene dos chances o queda acá [después del intervalo $[a,b]$] o queda al otro lado del a [antes del intervalo $[a,b]$], ¿estamos de acuerdo?

AR1.7 [50:40-1:37:36] Demostración por contradicción

Contexto del episodio: El profesor realiza una explicación de las características de los elementos y los conjuntos escogidos para continuar desarrollando la demostración en la siguiente forma:
Diego: Sea A igual al conjunto de los r en los números naturales tal que $rm > a$, A es distinto de vacío [escribe rp y m pertenecen a A], acuérdense que el principio del buen orden, si tengo un conjunto de números naturales para que este bien ordenado no puede ser vacío, entonces, por el principio del buen orden, existe, digamos un r_0 en los naturales, el mínimo elemento. Entonces existe un elemento mínimo y por lo tanto ese elemento mínimo, al multiplicarlo por p, por estar en A, tiene que ser más grande que a y si le quito 1 al multiplicarlo por p tiene que ser más pequeño que a [se refiere a $(m-1)p$],nisiquiera igual, más pequeño, porque si fuera igual este número es racional[p], este es natural [$m-1$], el producto me da un número racional y a no es racional, entonces no puede ser igual, tiene que ser más pequeño. Bien, se acabó.
Diego: ¿Qué es lo último que me falta comprobar?, veamos el dibujito
Estudiante: Que r_0p es menor que b
Diego: Eso es lo que me falta comprobar, ya encontré uno mayor, pero él tiene que ser, no sabemos, pero debería ser, más pequeño que b. Entonces ¿cómo nos aseguramos de que es más pequeño que b? Vamos a hacer el dibujito, entonces, tengo $(0,p)$, $(r_0-1)p$ es más pequeño que a y el otro es más grande r_0p. Bueno pero no sé, si está entre a y b. ¿Cuál es el peor de los casos? Que sea más grande que b, eh .. pr_0, ¿sí o no? Entonces, supongamos como en la figura que r_0p es mayor que b, mayor o igual, lo que queremos es que sea mayor que b, bien, entonces ahora lo que vamos a hacer es lo siguiente, tengo un número racional más pequeño que a y un número racional más grande que b. ¿Qué se les ocurre que debería hacer? Quien no ha entrado todavía aquí a mostrar sus virtudes, alguien allí tiene que entrar

a jugar. Si tienes a Alexis Sánchez no dejas a Alexis Sánchez en la banca, alguien tiene que meter el gol, ¿quién es el que va a meter el gol aquí? Vean todo el esquema de demostración que hemos hecho, hay alguien que todavía no ha entrado, o ha entrado muy.... Hay una propiedad que todavía no hemos ocupado, apareció pero no la hemos ocupado.... tenemos que p esta escogido más pequeño que la mitad de la longitud del intervalo $[a,b]$. Entonces a mi lo que se me ocurriría hacer es tratar de comparar la longitud de $(p(r_0-1),p)$ con la longitud de $[a,b]$]. Si ustedes tienen un intervalo y lo parten por la mitad y le sumo dos veces ese pedacito, lo más que me puede quedar es el intervalo, no cierto. Si lo parto en 50 partes, si, para que alguna de esas partecitas me sume todo el intervalo tiene que estar 50 veces. Entonces, en el fondo el intervalo $(p(r_0-1),pr_0)$ ¿qué longitud tiene?, sin calcular todavía, ¿qué longitud tiene?
Estudiante: p
Diego: p, porque ese intervalo lo que hice fue trasladarlo $r-1$ veces, pero la longitud no crece, entonces, de hecho ahora hagamos la cuenta es pr_0 menos este de aquí que es p ...que es igual a pr_0-pr_0+p, pero $p<\varepsilon=(b-a)/2$, entonces, ¿cómo puede ser que la longitud de $(p(r_0-1),pr_0)$ sea mayor que la longitud de $[a,b]$? Si estos son los extremos de los intervalos pr_0-1 y pr_0 que contiene al $[a,b]$ su longitud tiene que ser mayor, ¿no? ahí está la contradicción, entonces si el r_0p es mayor que b, entonces $r_0p-(r_0-1)p$ es mayor que $b-a$. Lo que estoy diciendo es que si ocurre pr_0 más grande que b, este intervalito $(p(r_0-1),pr_0)$ contiene al intervalo (a,b), por lo tanto su longitud tiene que ser mayor. ¿Cuál es la longitud de este? .... Pero esto ya lo calculamos, da p que es menor que ε, que es igual a $(b-a)/2$, entonces como $(b-a)/2$ va a ser mayor que $b-a$. Contradicción. Entonces ahora pueden decirle a sus alumnos con propiedad que entre dos racionales siempre hay un irracional.

Entrevista Diego (Análisis Real)

Preguntas de información personal

a. ¿Cuántos años de experiencia docente posee? más de 20 años

b. ¿En qué niveles educativos ha enseñado? Solo en la universidad

c. ¿Qué cursos ha desarrollado con más frecuencia en los últimos tres años? Análisis real, ecuaciones diferenciales ordinarias

d. ¿Cuántas veces ha desarrollado el curso de Análisis en los últimos años? 6 veces

e. ¿Posee algún tipo de formación pedagógica o didáctica? No

[EAR1] ¿Que es un lema?

Uno llama teorema a una proposición que es fundamental en el desarrollo teórico y llama lema a aquellas proposiciones que son necesarias para demostrar, son como pasos intermedios para probar un teorema o gran enunciado, son enunciados en algún sentido menor que tienen un aspecto más bien técnico o complementario.

[EAR2] ¿Que es una demostración?

La demostración, la prueba, es el proceso lógico deductivo, tienes un teorema y los pruebas. Como estructura deductiva es eso la matemática, pero la labor matemática no es deducir todo lo que podamos deducir, si no lo que podamos aplicar no necesariamente al mundo “real”, si no que a la misma matemática. Tu generalizas y muestras un ejemplo de algo que esta generalización cumple y que los demás no cumplían, eso es una aplicación en ese sentido, no es que yo uso el teorema, sino que estoy aplicando ese resultado.

[EAR3] ¿Cuál es la diferencia entre escoger o construir un elemento?

Yo cuando construyo algo lo doy explícitamente, ahora escoger un número es otra cosa, tu puedes saber que existe pero no te puedo decir cual es, hay un mínimo y tomo ese, ahí estoy escogiendo, lo construiría si te muestro como obtengo ese número por un proceso iterativo, algorítmico, una sucesión. En el caso de $\sqrt{2}/n$, ahí seleccione y construí, seleccioné $\sqrt{2}$ y construí $\sqrt{2}/n$, lo estoy exhibiendo explícitamente, ahí es constructivo porque tu puedes saber como obtener ese número. Ahí para probar el lema, cualquier irracional te sirve desde que sepas que es irracional.

[EAR4] ¿Cuándo una condición es necesaria y cuando es suficiente?

Tu tienes p implica q, una proposición de este estilo, p es una condición suficiente para q, y q es una condición necesaria para p, y cuando doy flecha p es necesaria y suficiente para q y q es necesaria y suficiente para p, por ejemplo si es derivable entonces es continua, ser derivable es suficiente para que una función sea continua pero puede ser continua sin ser derivable. Ahora ser continuo es necesario para que sea derivable pero no es suficiente. El que implica es suficiente el implicado es necesario. Por ejemplo, si es un número natural entonces es racional, ser racional no es suficiente para ser natural, pero al reves si, ser natural es suficiente para ser racional.

[EAR5] ¿Cuál fue el objetivo de este comentario?

Ese es el problema, uno dice bueno, con el para todo yo siempre puedo escoger cuál de todos es el que me conviene, pero cuando es la existencia, es lo que cayó no más, lo que cayó en la noche.... Entonces uno tiene que hacer un trabajo para que lo que caiga sea conveniente.
Eso, que existe te dice que hay uno pero no sabes, en principio hasta podría ser el único, no tienes posibilidad de elección, cuando hay una proposición que dice existe un objeto con tal propiedad, tu tienes que tomar ese objeto y arreglártelas si necesitas construir algo con ese objeto, arreglártelas para que la construcción te de lo que quieres, pero, la existencia

es justamente eso, hay un tipo con el que pasa eso, no tienes chance de escoger dentro del universo. El comentario [la existencia es lo que cayó no más] es una analogía, por ejemplo la propiedad arquimediana te da un número natural que satisface que si tu tomas un número real hay un número natural… no son todos los naturales.

[EAR6] ¿Hay alguna razón por la cual usa palabras como intervalito?

Justamente, eso es la matemática, la matemática no se puede hacer más fácil, pero hay un intervalo, un intervalito, algo más pequeño, después la formalización, lo escrito, responde a ideas que uno tiene. No es que uno tienda a hacer más fácil eso. Cuando les digo, lo que ahí hay adentro, eso es no formal, eso es una explicación para que tengan una idea, la idea de la intersección, de lo que esta ocurriendo en ese fenómeno y decir intersección no vacía es una formalización de una idea, que ahí adentro hay algo. La matemática es la formalización de una idea, no al revés, no hay matemática sin ideas, si no, no tiene ningún sentido.

[EAR7] ¿Usted cree que usando ese lenguaje coloquial los estudiantes le entienden más?

En el fondo, las formulaciones en el lenguaje matemático son simplemente formulaciones de ideas que no tienen porque ser necesariamente expresadas desde el inicio en un carácter puramente riguroso, de hecho una idea mía es que no hay formas de escribir nada puramente riguroso, osea hay formas pero son impracticables para la comunicación, tu no puedes comunicar matemática si usaras el rigor lógico absoluto, en el ejemplo [de la continuidad] que te di antes, el delta siempre depende del punto, del epsilon, de la función, si te pones a escribir todo eso en el lenguaje matemático nadie termina entendiendo nada, entonces uno tiene que aceptar cierta licencia de formalidad. De repente tu puedes tratar de captar la misma idea con distintas analogías [metáforas] y después la formalización es otra cosa, pero por supuesto las analogías [metáforas] son importantes.

[EAR8] ¿De los métodos de demostración que usted conoce y que usa en sus clases hay alguno que sea más difícil de entender para los estudiantes?

Depende de la madurez, pero claro, al comienzo el método contrapositivo es siempre una dificultad, entonces por ejemplo, tu tienes p implica q ese es $\sim p \vee q$, entonces partes suponiendo que vale q y hay que demostrar que entonces tiene que valer p, esa cuestión siempre es un problema, eso y las demostraciones por reducción al absurdo, por la negación sobre todo y propiedades que tienen muchos cuantificadores, distintos para todos y existe son un problema en general, porque además tenemos la mala costumbre y esto hasta dentro de los matemáticos de no usar una regla fundamental en la elaboración de las proposiciones que primero van los cuantificadores, entonces ponemos el para todo al final y cuando hay que negar eso, ese para todo, va antes del existe, va después, entonces, eso siempre hay una dificultad cuando hay una negación allí. Cada vez que hay una negación que puede ser una reducción al absurdo o una contrapositiva. O aveces las equivalencias tu las puedes demostrar de otra forma, por ejemplo tienes la identidad que f es uno a uno si y solo si $f(u) = f(v)$ entonces puedes mostrar que $f(u) = f(v)$ entonces $u = v$ pero también puedo mostrar que si u es distinto de v, $f(u)$ es distinto de $f(v)$, ambas demostraciones se exhiben, entoces a los estudiantes les cuesta [saber] cuando usar una y cuando usar la otra, eso en un primer nivel, y eso es una dificultad que tiene que ver con la lógica. Hay otras dificultades que tienen que ver con métodos constructivos y métodos que establecen la existencia, entonces hay también como que se pierden un poco. Después hay otro tema que si es más delicado que eso casi no se observa diría yo, que es la valoración de la demostración, porque la demostración tengo la impresión que para los estudiantes el valor que tiene es como dar el sustento de verdad o mentira a una afirmación matemática y ocurre que si bien en la demostración justamente lo que tú haces es un razonamiento para sustentar una afirmación matemática, pero también hay demostraciones que en realidad lo único importante es la demostración, la afirmación no te dice nada y la demostración te da una técnica para, por ejemplo, en el teorema del punto fijo, el argumento para darle sustento a la afirmación, también te dice como encontrar el punto y ahí la demostración es más valiosa que el enunciado en realidad y así hay demostraciones porque te dan el algoritmo para generar, para calcular [algo] y los chicos no ven, no son capaces de distinguir si la demostración es meramente argumentativa o el valor esta en la demostración. Otro clásico es: Si una función es armónica de variable compleja, existe la armónica conjugada, entonces la demostración es constructiva que te da un algoritmo, te dice como encontrar la armónica conjugada.

[EAR9] ¿Por qué hace la siguiente afirmación?

Entonces ahora pueden decirle a sus alumnos con propiedad que entre dos racionales siempre hay un irracional.
La afirmación matemática siempre tiene que estar sustentada por la demostración, pero probablemente era porque estaba haciendo clases en pedagogía, lo que pasa es que en ese curso especialmente que es de análisis en la recta si tengo cuidado de mostrarle a los estudiantes que hay un montón de cosas que sus profesores les enseñaron y ellos las aprendieron como loritos; entre dos racionales hay un irracional, π es irracional, e es irracional; pero, ¿por qué?, ¿cuál es la demostración de que π es irracional? Claro porque ellos aprenden, tienen un montón de conocimientos que se muestran como verdades establecidas, entonces en algún minuto hay que ver que detrás hay un argumento.

[EAR10] ¿Utiliza algún libro, software, u otro material para la enseñanza de los números reales?

Usualmente lo que hago es que tomo un texto y todo el mundo ya sabe que no me voy a alejar del texto, en el fondo estamos leyendo el texto juntos. Hay cursos donde también ocupo el mismo curso que esta desarrollado en Internet, que esta en YouTube, pero como material complementario. Para escoger el libro hay varios criterios, lo mínimo es que tenga el contenido que uno quiere ver, después que tenga una notación amigable, hay libros que son muy buenos pero la notación es horrible entonces eso no ayuda mucho, también al revés hay libros que son demasiado bla bla bla y no introducen casi nada de notación y uno se pierde, por ejemplo, la dependencia de los épsilon y delta, eso es terrible porque usualmente tu ves continuidad, la continuidad es un concepto que para todo épsilon existe un delta, que depende de quien, muy pocos libros hacen énfasis en que ese delta depende de épsilon, del punto y de la función, depende de varias cosas, si tu pones siempre la dependencia te queda una notación pesada, pero no ponerla, si no lo pones al menos una vez, si no haces esa advertencia de ojo hay que tener cuidado, para no abusar de la notación esto lo vamos a omitir, hay que hacer esa advertencia.

[EAR11] ¿Cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la propiedad de la densidad de los racionales en los reales?

Es que la dificultad es el axioma del supremo, una dificultad histórica digamos, que viene de los griegos. La humanidad se demoró 2.000 años en entender el continuo, osea, todo el problema de la liebre y Aquiles, ese tipo de paradojas son reformulaciones del problema que los tipos no entendían el proceso del límite, no entendían el continuo y eso la humanidad tardo 2000 años para entenderlo y tal vez más porque uno dice hasta Newton, pero en realidad la formulación vino con Wiestrass, entonces esa dificultad como diría un amigo, epistemológica, ese obstáculo, inevitablemente aparece cuando uno aprende los números reales y da lo mismo tu puedes usar sucesiones de Cauchy, Axioma del supremo o Cortaduras de Dedekind y vas a tener lo mismo porque todas esas cuestiones son equivalentes y no hay como baipasear ese problema y tiene que ver con aspectos de madurez cognitiva, de cosas neuronales probablemente, todos tenemos esa dificultad, entonces, hay algo ahí que es superior digamos…
El tema de contar, también, por ejemplo muy poca gente le enseña a los estudiantes cual es la propiedad intrínseca de un conjunto infinito, porque para ellos un conjunto infinito es un conjunto que no se puede contar, no un conjunto que es biyectivo con un subconjunto propio de él…. fíjese los naturales con los pares, los reales con un intervalo, pero tu le preguntas a cualquier estudiante y no te van a saber decir que es un conjunto infinito. Con los racionales les cuesta entender, así lo demuestres, pero que pasa, que ellos no ven por ejemplo, aunque tu se los muestres que los reales no son numerables, no te entienden, ellos pueden seguir la demostración, cachar [darse cuenta] que hay una contradicción pero a pesar de eso, siguen pensando que los reales se pueden poner en correspondencia con los racionales, ahí hay una situación media extraña... El continuo siempre es un problema desde donde tu lo mires, desde la densidad o desde el punto de vista de contar, de donde lo mires es un problema, tanto es así, por ejemplo, solo hasta finales del siglo XIX se le ocurrió a alguien preguntarse si el continuo era el cardinal siguiente al de los naturales, solo a finales de siglo XIX Cantor demostró que los reales no eran la misma cantidad que los naturales, que los racionales, y pasaron 30

años hasta que demostráramos que en realidad el cardinal del continuo es un axioma si es el siguiente cardinal o no, entonces estamos hablando de conceptos super modernos todavía.

[EAR12] ¿Cómo se enseña a demostrar?

Se enseña a demostrar, demostrando, osea, uno va razonando conjuntamente, pero en general, no hay una metodología, yo nunca he visto que usted enseña a demostrar así, así.... Uno simplemente demuestra y a través de esas demostraciones le va dando ideas a los estudiantes de como son las técnicas, por ejemplo, hay un teorema que dice lo siguiente : Si tu tienes una sucesión monótona que va creciendo y es acotada, entonces siempre tiene límite y el límite es el supremo. Listo, puedo hacer la demostración y argumento con los estudiantes. Ejercicio: demuestre que si la sucesión es monótona decreciente y acotada, entonces siempre tiene límite pero ahora es el ínfimo...., pero entonces ahí tu estas enseñando a demostrar por analogía, porque tú le das una técnica y bueno repítala en este caso. También hay otra parte donde es importante uno mostrar en la demostración donde esta la dificultad, donde estuvo el proceso creativo del matemático, donde esta el problema y como el matemático baypaseo [solucionó] el problema, darle esa luz, porque si uno no les da esa luz es como cuando... recuerdo por ejemplo, en primer año los problemas de inducción, donde le sumo un cero mágico, ya después uno sabe que hay que sumarle el cero y que tiene que ser más o menos de esta forma y la cosa después termina fluyendo, pero si no te muestran eso, jamás se te va a ocurrir, al principio esas cosas son sorprendentes, medias mágicas de repente, pero después van adquiriendo cierta naturalidad, entonces uno tiene que mostrar cuál es la idea, mira se me ocurrió hacer esto. Yo muchas veces lo que hago, es que digo, voy a tomar un épsilon pequeño, que tan pequeño no se, hago las cuentas y digo, debemos asegurarnos de esto, entonces tiene que ser más pequeño que este y que esto ...., y tomo el mínimo... , para que entiendan de donde es que aparece.

Curso Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sesión 1: El problema de Cauchy

ED1.1 [2:00-13:40] Ecuación logística

Contexto del episodio: El profesor había propuesto como ejercicio resolver la ecuación logística $x' = x(x-1)$. En la clase, discute con los estudiantes el proceso de resolución que ellos habían realizado para obtener la solución $ln|\frac{x-1}{x}| = t+c$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. En el tablero queda escrito:

Caso 1: $x > 1$, $\frac{x-1}{x} > 0$, $ln|\frac{x-1}{x}| = ln\frac{x-1}{x} = t+c$

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x} &= c_1 e^t \\
x-1 &= x c_1 e^t \\
x(1-c_1 e^t) &= 1 \\
x &= \frac{1}{1-c_1 e^t}
\end{aligned}
$$

Diego: Entonces habíamos hecho una separación de variables y la solución era $ln|\frac{x-1}{x}| = t+c$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. Entonces esas son las soluciones y la tarea era ver que pasaba con ellas, porque con esto no sabemos cuál es el comportamiento de la solución y lo que hay que hacer es, ¡Aah!, hay que ver caso por caso. Entonces, caso 1, x mayor que 1. Entonces en ese caso ese cociente que está aquí, x menos 1, que es positivo, dividido por x que es positivo, es mayor que cero. Y por lo tanto esto [señala $ln|\frac{x-1}{x}|$] es igual a t más una constante. Ahora exponenciamos, pero tenemos que x menos 1 partido por x es igual a una constante c_1, por e elevado a la t. ¿Está bien esto? Entonces factorizo x factor de 1, menos c_1 elevado a t nos da 1, entonces queda x es igual a 1 partido por $1-c_1e^t$ ¿Sí? Esa es la solución, implícita, ¿por qué? Porque recuerden que la solución de esto [de la ecuación $x' = x(x-1)$] es una función γ que va desde el intervalo a, b en $\mathbb{R}$, ¿sí?, tal que satisface que, $\gamma'(t)$ tiene que ser igual a $\gamma(t)(\gamma(t)-1)$. Eso es lo que habíamos dicho que era la solución, bueno, aparte de las condiciones de a y b. Entonces, no sé cuál es el x de t, no sé cuál es. Bueno y ¿cómo se calcula esa constante c_1? En este caso, cuando t vale 0, tengo $x(0)$ menos 1 partido por $x(0)$ igual a c_1. Esa es la constante. Bueno, lo que quiero decir es lo siguiente, para poder analizar que pasa con la población primero hay que calcular la solución implícita, ver la relación que tiene con la constante y ahí uno puede hacer un análisis tal cual uno lo hace en Cálculo 1. Vamos a hacer otros casos. ¿Qué pasa con $0 < x < 1$? y ¿Qué pasa en el caso $x < 0$?

Sesión 2: El teorema de Picard-Lindeloff

ED2.1 [32:35-45:00] Teorema del punto fijo de Banach

Contexto del episodio: El profesor expone el enunciado del teorema del punto fijo de Banach: Sea (X,d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo para F. La demostración queda escrita en el tablero en la siguiente forma: Sea $x \in X$, $n \geq 1$ y $x_n = \underbrace{F \circ F \circ \cdots F(x)}_{n-veces} = F^n(x)$.

Afirmación 1: (X_n) es de Cauchy, entonces, $\exists z_0 \in X : lim_{n\to\infty} x_n = z_0$.
Afirmación 2: $F(z_0) = z_0$

$$
\begin{aligned}
F(z_0) &= F(lim_{n\to\infty} x_n) \\
&= lim_{n\to\infty} F(x_n) \\
&= lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) \\
&= lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \quad lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z_0
\end{aligned}
$$

Si $z_1 \neq z_0$ es otro punto fijo de F, $0 < d(z_1, z_0) = d((F(z_1), F(z_0)) < d(z_1, z_0)$, contradicción, entonces z_0 es único.

Diego: Este es el clásico ejemplo de que, ¡Ah!, bueno, sabemos que existe solución pero otra cosa es calcularla. Porque este teorema en realidad dice que si uno tiene una contracción tiene un punto fijo, ese punto fijo es único y además [el teorema] me dice cómo puedo aproximarlo, cómo lo puedo calcular. Entonces ahí es importante la demostración. En la demostración, tomemos un punto cualquiera $x \in X$, entonces para n igual o mayor que 1 definamos x_n, la sucesión F compuesto con F de x, n veces. A esa sucesión la voy a llamar la potencia F^n de x. ¿De acuerdo? Es F compuesto por x, osea, tomo un punto, le aplico la F. Después le vuelvo a aplicar la F, después le vuelvo a aplicar la F...

Estudiante: Profesor, ¿a qué se refiere con punto fijo?

Diego: Punto fijo quiere decir que existe, que es un punto… z_0 en X es punto fijo de F si F de z_0 lleva ese punto a el mismo, $F(z_0) = z_0$ lo deja fijo. ¿Sí? Entonces tengo que encontrar ese punto z_0. La *afirmación 1* es que esa sucesión que construí, x_n es de Cauchy. Créanme que es de Cauchy. Sí. Después podemos hacer la prueba si quieren,…. pero supongamos que todos ustedes tengan la suerte de conocerla… Si es de Cauchy, entonces existe un número z_0 en X, tal que el límite cuando n es infinito de x_n es el punto z_0 porque el espacio es completo, entonces para toda sucesión de Cauchy, en particular para esta, toda sucesión de Cauchy es convergente, o sea, que quiere decir que existen límites. En toda sucesión de Cauchy existen límites. Así que esta tiene un límite que se llama, digamos, z_0. Pero fíjense *afirmación 2* $F(z_0)$ es un punto fijo. Veamos la afirmación 2. ¿Quién es $F(z_0)$?, z_0 es el límite de x_n. Quiero, quiero hacer una nota, si la sucesión es de Cauchy, entonces existen límites. ¿Por qué? Porque el espacio, es completo. ¿Sí? Volvemos a la afirmación $F(z_0)$ es F del límite de x_n. Listo. Ahora esto es igual al límite de F en x_n. ¿Esto por qué pasa? Por la continuidad de F puedo intercambiar el límite con la función.

Estudiante: ¿Entonces, es continua por el contexto que estamos?

Diego: Por la hipótesis del teorema... ¡Ah!, no, claro, no lo puse pero si es contracción significa que es continua.

Estudiante: ¡Ah!, Ya.

Diego: Entonces aquí, F es contracción, entonces es continua. ¿Sí? …Además si ven la definición de continuidad para todo épsilon existe delta, ¿si, si usted...si les doy épsilon, cuál es el delta que hay que tomar? El mismo. ¿Sí? Porque para todo épsilon existe delta tal que si esta distancia es más chica que delta, entonces esto tiene que ser más chica que esa... Bien, ¿entonces el límite de F de x_n era? F de F^n de x, pero entonces esto que está aquí no es otra cosa que F^{n+1} de x, y esto que está acá es el límite de x_{n+1}, pero si el límite de x_n es z_0 el límite de x_{n+1} es lo mismo. Así que esto [$F(z_0)$] me queda igual a z_0. Así que z_0 es un punto fijo. El teorema no termina ahí, además dice que [el punto fijo] es único. Supongamos que haya otro. Ya que estamos aquí. Si z_1 distinto a z_0 es otro punto fijo de F. ¿Qué pasa? ¿Entonces cuánto vale la distancia de z_1 a z_0 ? Bueno, no sé, pero debe ser positiva, estrictamente positiva, porque son distintos ...Entonces $F(z_1)$ es z_1, así que poner

z_1 o $F(z_1)$ es lo mismo, porque son puntos fijos. Y poner z_0 o $F(z_0)$ es lo mismo. Pero esto, por ser una contracción la distancia $d(F(z_0),F(z_1))$ es más pequeño que la distancia $d(z_1,z_0)$. ¿Entonces cómo es que un número positivo es estrictamente más pequeño que él mismo? No puede ser, por lo tanto, z_0 es único. ¿De acuerdo? Entonces, este es el clásico teorema...En general una de las cosas que ocurren, hay veces que ciertos teoremas nos dan la información en el enunciado y la demostración o la formalización no dice nada, pero aquí la demostración además entrega información. Que dice no solamente el espacio métrico es completo, o sea, no solamente existe un único punto fijo, sino que me dice cómo encontrarlo. Parta de cualquiera, de cualquier punto de su espacio, y comienza a integrar la función e inevitablemente va a converger al punto fijo. O sea, que el punto fijo atrae globalmente a todas las funciones.

Sesión 3: Dependencia de las soluciones

ED3.1[37:25 – 52:35]: Demostración de unicidad

Contexto del episodio: El profesor había demostrado un teorema de existencia de la solución de un problema de valor inicial. Ahora se propone demostrar la unicidad de dicha solución que esta planteada de la siguiente forma: Si $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^D$ y $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^D$ son soluciones del problema de valor inicial entonces $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall t \in I_1 \cap I_2$. La demostración queda escrita en el tablero así:

Sea $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\} \subseteq I_1 \cap I_2$.

$J \neq \emptyset$, $t_0 \in J$

$\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ son continuas en $I_1 \cap I_2$.

$g : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}^D$

$\quad t \to g(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$

g es continua.

$g^{-1}(\{0\}) = J$ es cerrado.

Sea $t^* \in J \subseteq I_1 \cap I_2$. Llamemos X^* a $\gamma_1(t^*) = \gamma_2(t^*)$.

Por la primera parte del teorema existe $\varepsilon > 0$ y $\gamma^* : (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \to \mathbb{R}^D$ única solución de $x' = f(t,x)$ y $x(t^*) = x^*$.

$\forall t \in (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \to \gamma_1(t) = \gamma^*(t) = \gamma_2(t) \therefore (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \subseteq J \therefore J$ es abierto.

Diego: Entonces vamos a hacer la demostración de la unicidad. Yo tengo que demostrar que la γ_1 de t y γ_2 de t son iguales en todo. Entonces, sean γ_1 de un intervalo I_1 en $\mathbb{R}^D$ y γ_2 de un intervalo I_2 en $\mathbb{R}^D$, soluciones del problema de valor inicial, vamos a dar 2 soluciones. Entonces, vamos a llamar J a los t en $I_1 \cap I_2$, tal que γ_1 de t es igual a γ_2 de t. Vamos a ver dónde coinciden estas dos soluciones. Entonces, J es distinto al vacío. ¿Por qué? porque el punto t_0 tiene que obedecer a J. Ya que son soluciones, entonces γ_1 en t_0 tiene que ser x_0 y γ_2 en t_0 tiene que ser x_0. Así que el t_0 está en J. Esta es la *Observación 1* $J \neq \emptyset$, $t_0 \in J$. *Observación 2* γ_1 y γ_2 son funciones continuas. Bien, entonces para que esto esté bien definido t tiene que estar en el dominio de la γ_1 y t tiene que estar en el dominio de la γ_2. Así que hay una cosa que es inmediata, que J está contenido por mi definición en I_1 interceptado I_2, lo que voy a probar es que son iguales, ¿eh?; eso es lo que voy a probar. Entonces J es distinto al vacío, estas funciones [γ_1 y γ_2] son continuas en I_1 interceptado I_2, por lo tanto sea $g : I_1 \cap I_2 \to \mathbb{R}^D$ si tomo un t aquí en I_1 interceptado I_2, y lo llevo a $g(t)$ que es la diferencia de $\gamma_1(t)$ que es continua, menos $\gamma_2(t)$ que es continua, entonces g es continua. Bien, ojo, aquí atento a esto. Entonces como es continua, $g^{-1}(\{0\})$ es cerrado, porque el 0, que es un solo punto, es un conjunto cerrado y porque la función es continua, entonces la imagen inversa de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado, pero ¿qué es lo que es la imagen inversa? Son todos los t que están en I_1 interceptado I_2 y tal que $\gamma_1(t)$ menos $\gamma_2(t)$ es 0. O sea, que $\gamma_1(t)$ es igual a $\gamma_2(t)$. Así es que $g^{-1}(\{0\})$ que es cerrado es lo mismo que el conjunto J, así que J es cerrado. Entonces lo que probé es que J es distinto al vacío y que es cerrado. Si pruebo que es abierto, gané, porque entonces si pruebo que es abierto resulta que es conexo, ¿sí?, y los únicos subconjuntos conexos de un conjunto conexo, que son abiertos y cerrados son en vacío y todo el conjunto. Y como J no es vacío, tiene que ser todo el conjunto que es $I_1 \cap I_2$. Entonces, voy a probar que es abierto. ¿Está bien? Es medio raro el argumento, pero, este va a ser un argumento super usual después en variable compleja. En variable compleja se van a pasear por argumentos de conexidad... Entonces ahora vamos a probar que este conjunto que está aquí es abierto... Sea t^* en J que está contenido en I_1 interceptado I_2. Voy a dibujar aquí el I_1 y voy a dibujar por acá I_2 entonces aquí en ambos vive t^*. Entonces llamemos X^* a $\gamma_1(t^*)$ que por esas casualidades de la vida es igual a $\gamma_2(t^*)$ porque t^* esta en J y estar en J significa que γ_1 y γ_2 coinciden. Entonces veamos otra vez el dibujito ¿Qué es lo que pasa? Por otro lado tengo un conjunto U, voy a dibujarlo acá y entonces aquí está el punto t^*. Entonces como está en U aplicamos la primera parte del teorema, que es la de existencia. ¿Sí? ¿Entonces qué es lo que dice la primera parte? Para t^* y X^* por la primera parte del teorema, existe un ε mayor que 0, ¿sí?, y existe una γ^* ¿definida dónde?, definida en t^* menos ε y t^* más ε, en $\mathbb{R}^D$. La única solución de la ecuación x' igual a f de (t,x) con condición inicial x en t^* igual a x^* ¿Sí?. Fíjense, en t en 0, digamos que está por acá, entonces el (t_0,x_0) está por aquí. Este era mi problema en condición inicial, ahora estoy lejos de ese punto. No importa; igual el teorema dice que para toda condición inicial, para cada condición inicial hay una única solución local. Entonces aquí hay una única solución local. ¿Qué pasa? Aquí está t^* y aquí t^* menos ε y t^* más ε. Entonces pasa esa solución, que es la γ^* pasa la solución verde en este mismo intervalito. ¿Puede ser eso la solución verde?

Estudiante: No.

Diego: No puede ser porque en el intervalo t^* menos ε y t^* más ε, la solución ahí es única, en ese pedacito de intervalo. Así que el pedacito verde no puede ser distinto; tiene que ser igual. Y el pedacito naranja, lo mismo. En ese intervalito, afuera no sé, pero en ese intervalito alrededor de t^* tiene que coincidir. ¿Sí? Entonces para todo t en t^* menos ε y t^* más ε implica que $\gamma_1(t)$ es igual a $\gamma^*(t)$ y que a su vez es igual a $\gamma_2(t)$. Por lo tanto t^* menos ε y t^* más ε, tiene que estar contenido en todo ese intervalo en J. Porque las dos coinciden en ese intervalito. Por lo tanto J es abierto, porque para cada punto de J, encontré un intervalito abierto que está contenido en J. Entonces...Bueno, se acabó. Como I_1 interceptado I_2 es conexo, entonces implica que J tiene que ser I_1 interceptado I_2. O sea, ahí se acaba la demostración de la unicidad.

Sesión 4: Teorema de Grobman-Hartman

ED4.1 [59:25 – 1:08:20]: Estrategia heurística

Contexto del episodio: El profesor discute con los estudiantes el enunciado del teorema de Grobman-Hartman en la siguiente forma:
¿Cuál es el espíritu del teorema? Si x es regular entonces puedo decir como es localmente. ¿Acá qué que dice el teorema? Dice que si tengo una singularidad en algunos casos localmente cerca del punto estacionario este va a ser conjugado al flujo de la parte lineal. ¿Cierto? Estoy cambiando el problema, de un problema que es no lineal en un campo de vectores por un problema que se resuelve con matrices, ¿ya?. Ahora, no saco nada con cambiar el problema si no sé cómo se resuelven las flaquezas. O sea, te cambio algo que no sé resolver por otra cosa que no sé resolver. ¿Cuál fue la ganancia? Ninguna. ¿No? Acá teníamos algo que no sabíamos cómo era y lo cambiamos por algo que sabemos cómo es. Entonces hay 2 problemas que tenemos que abordar… el primer problema es cómo son los puntos lineales. Lo primero es intentar describir si A es una transformación lineal de $\mathbb{R}^D$ en $\mathbb{R}^D$, ¿sí?, si es lineal es posible estudiar x' igual a Ax. Si puedo decir algo ahí, entonces puedo decir algo allá [en el teorema]. ¿Sí? Y después, 2, es que de repente en una de esas, si estudio eso voy a poder decir: ¡Ah!, es que cuando pasa que en el flujo lineal se comporta de una manera decente, tal vez esa es la condición técnica que me sirve para que, en el caso no lineal también se comporte... ¿Se entiende la idea? O sea, si yo tengo, por ejemplo, bueno, ustedes ya han estudiado esto. Por ejemplo, ¿cuál es la condición técnica para que haya inversa local en una función cualquiera?
¿Ustedes tienen una función $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cómo saben que, si le doy a un punto, cómo saben si esa función admite una inversa local?
Estudiante: La derivada…
Diego: La derivada distinta de 0 no dice nada porque podría ser... ¿Qué es lo que es la derivada en una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$? Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Así que una derivada distinta de 0 significa que es distinto de la 0000. Pero puede ser cualquier cosa.
Estudiante: Derivada invertible.
Diego: Derivada invertible. Es decir, determinante de la derivada en un punto es distinto de 0. Con eso es suficiente. ¿Sí? ¿Por qué? Porque tengo el teorema de la función implícita que es este. Entonces acá es lo mismo. Quiero dado un punto estacionario, quiero obtener información local a partir de lo que hacen las derivadas. ¿Entonces por qué ustedes saben que el determinante es distinto a 0? Porque estudiamos las transformaciones lineales y sabemos que ellas son invertibles sí, solamente si el determinante es distinto a 0. Entonces esa condición me ayuda para saber, en el teorema de la función inversa, ¿cuál es la inversa local? ... Acá

va a ser los mismo tengo un punto, quiero que la derivada dé información, entonces tengo que estudiar muy bien lo que pasa con la derivada para poder rescatar alguna propiedad que me sirva para transportarla para allá. Entonces el segundo punto es, el segundo problema es encontrar propiedades en A que ayuden, o que aporten información al problema de la clasificación local. Es decir, ya, pensemos un minutito. El problema de clasificación local, si es que fuera cierto, dice que si tengo un punto estacionario localmente se va a comportar como el campo lineal en el origen. ¿Sí? Debería comportarse como el campo lineal en el origen. Entonces, si dos campos lineales en el origen se comportan igual, de repente esa propiedad hace que en el caso no lineal se comporten más o menos igual. No sé..., en otras palabras, si podemos clasificar estos que son lineales [señala el problema 1], entonces tenemos alguna chance de clasificar los no lineales. Entonces antes de atacar este teorema así, que es hermoso, porque este soluciona todos los problemas locales, cierra esta parte, este gran problema, esa condición técnica tiene que estar asociada a la clasificación local de los flujos lineales. Y que es lo que vamos a empezar a estudiar ahora.

Sesión 5: Exponencial de una matriz y clasificación de flujos lineales.

ED5.1 [13:40– 16:45] Generalización

Contexto del episodio: El profesor esta desarrollando el contenido exponencial de una transformación lineal. Para una transformación $B \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ define $e^B := \sum_{n\geq 0} \dfrac{B^n}{n!}$. Entre las propiedades de esta exponencial se encuentra $\forall P \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ invertible, $e^{PBP^{-1}} = Pe^B P^{-1}$. Diego se propone mostrar la propiedad para lo cual es necesario calcular $(PBP^{-1})^n$. En esta línea, en el tablero queda escrito lo siguiente:
$(PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1}$
$(PBP^{-1})^3 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^3P^{-1}$
Sea $n \geq 0$, $(PBP^{-1})^n = PB^nP^-1$ y $\sum_{n\geq 0} \frac{(PBP^{-1})^n}{n!} = P(\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!})P^{-1}$.

Diego: Esto lo que dice es que si a B le hago un cambio de coordenadas es lo mismo que hacerle el cambio de coordenadas a la exponencial de B. Entonces si quiero calcular la exponencial empecemos por $(PBP^{-1})^n$, primero lo voy a calcular al cuadrado, $(PBP^{-1})^2$. Eso queda P por B por P^{-1} por P, por B y por P^{-1}. Y lo que va a pasar es que estas dos del medio se van a cancelar [señala $P^{-1}P$] y me queda PB^2P^{-1}. Si lo pusiera al cubo las del medio se van a cancelar, efectivamente, entonces cuando lo tengo al cubo me queda P por B por B por B por P^{-1} ¿Está bien? PB^3P^{-1}. Así, lo que podemos deducir, aunque hay que hacer la prueba por inducción, es que si coloco la expresión a la n, entonces B queda a la n, osea, $(PBP^{-1})^n = PB^nP^-1$. Entonces si divido por n factorial [$\frac{(PBP^{-1})^n}{n!}$] y si sumo esto [$\sum_{n\geq 0} \frac{(PBP^{-1})^n}{n!}$], entonces el P lo puedo factorizar y el P^{-1} lo puedo factorizar por la izquierda, esto es, $\sum_{n\geq 0} \frac{(PBP^{-1})^n}{n!} = P(\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!})P^{-1}$.

Entrevista Diego (Ecuaciones Diferenciales)

[EED1] ¿Qué significa que las ecuaciones diferenciales son una teoría cualitativa?

Diego: Cualitativo es que... Antes de Poincaré, las ecuaciones diferenciales, generalmente venían de la mecánica o de la física, entonces para poder saber lo que pasa, poder saber qué es... todas las aplicaciones, etc., tú necesitas resolver esas dudas. Entonces entre otras cosas, la gente estaba preocupada por entender el problema de los n cuerpos, que tú tienes una cierta cantidad de planetas o de cuerpos celestes, con sus masas respectivas, y quieres saber cómo son las soluciones del sistema, y después se sabía el problema para los tres cuerpos restrictos, que se llama, que es dos cuerpos como dos soles y un planeta. Creo que ese fue el caso que relató Poincaré, no estoy claro. El de tres cuerpos era el problema, había soluciones parciales. Poincaré se puso un premio para quien pudiera resolver el problema de los n cuerpos, con n planetas, o decir algo que pudiera ayudar a destrabar el problema porque en realidad nadie sabía cómo estudiar eso. Y Poincaré enfrenta ese problema y él cambia la óptica de enfrentar ecuaciones diferenciales. Dice: Mira, en realidad no se necesita calcular la solución, lo que se necesita saber es cómo esta relación me provee de información de lo que va a pasar con la solución sin que yo sepa cuál es la solución.
Entrevistadora: ¿Por eso es cualitativa?
Diego: Por eso es cualitativa porque no importa la cantidad, no importa lo que sea la solución, la cantidad cuanti, importa la propiedad.

[EED2] ¿Por qué en matemáticas es usual considerar casos para resolver un problema o para hacer una demostración?

Diego: ¿A qué te refieres con casos?
Entrevistador: Por ejemplo, cuando usted estaba demostrando tomaba una función y decía: Vamos a mirar cómo se comporta entre 0 y 1, vamos a mirar cómo se comporta si x es mayor que 1. ¿Por qué es usual hacer eso en matemática, por qué algunos problemas se abordan así considerando casos?
Diego: Es que depende de lo que tomes, pero hay veces que no es fácil agrupar todos. O sea si tú quieres hacer una ecuación para todos los elementos dentro del conjunto, pero a veces no puedes tratarlos todos por igual. Porque los elementos dentro de ese conjunto pueden tener propiedades distintas o pueden tener propiedades que en algunos casos te ayudan o te dificultan más una prueba. No sé, busquemos la solución de la raíz de una ecuación en segundo grado, no puedes tratarlo todo porque tienes soluciones complejas y soluciones reales, y tienes soluciones que son multiplicidad una solución, multiplicidad dos, o dos soluciones distintas. Entonces, que es lo que peleaba con mi profesor, decía: no porque son dos soluciones iguales, y no, es una solución, de multiplicidad dos. Tienes un montón de situaciones y a veces, para ciertos problemas, no puedes pensar todas las soluciones como una sola cosa. Por ejemplo, voy a pensar que tengo dos soluciones reales distintas, porque la ecuación se comporta distinto para lo que quieres probar a que tenga una solución con multiplicidad do-

ble.
Entrevistadora: Entonces las características del problema son las que me dicen cuando es adecuado es considerar casos.
Diego: Exacto, no hay una regla, no sé si hay una regla, no creo.
Entrevistadora: Bueno yo me refiero a esos tipos de casos, entre 0 y 1, mayores que 1, cuando tiende a - infinito o cuando tiende a + infinito, esa idea.
Diego: Sí, pero eso es peligroso, eso hay que saber hacerlo. Porque ¿cómo sé yo que estoy tomando el buen caso?, el caso que me da luces de qué es lo que va a pasar independiente del ejemplo. Por eso cuando uno hace cosas inductivas, especialmente, y cuando enseña, eso hay que hacerlo con cuidado, porque el profesor puede seguir el ejemplo del libro, voy a hacer este ejemplo y después vamos a generalizarlo, pero eso es delicado si el profesor no entiende por qué tiene que proponer este ejemplo y no otro ejemplo, o cuáles son los ejemplos que necesita. Porque cuando se está enseñando matemáticas, el profesor dice : vamos a hacer este caso en particular y después lo vamos a generalizar. Para el investigador, él no tiene el problema en la cabeza, no sabe cuál es el resultado, haces un caso buscando entender en ese caso cuál va a ser el teorema. Cuando lo aplicas como profesora estás haciendo trampa, y no estás haciendo matemáticas porque lo que tú quieres es que el estudiante sea un buen investigador, pero el estudiante no tiene el teorema en la cabeza y entonces le tienes que dar un caso que le permita a él generalizar. Pero si no hiciste el ejercicio antes, ¿cómo sabes que él lo va a lograr o no?

[EED3] ¿Porqué sucede lo siguiente?

En una clase la profesora hablaba de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, y lo demostraba en el intervalo 0, 1 diciendo que eso se puede decir para toda la recta.
Diego: Claro, pero ahí podrías hacerlo para 0,1, pero lo que uno debería hacer es explicar por qué es suficiente hacerlo para 0,1. ¿Eso es un caso?, no sé a lo que le llamas un caso. Eso es como reducir un problema grande a un problema que puedes manejar. Pero puedes hacer esas reducciones pero tienes que explicar bien por qué puedes hacer esa reducción. O sea que entre los intervalos 5, 7 es lo mismo, o que el intervalo 0, 1/2, o que -10, -1, puede ser lo mismo. Pero lo que te estoy diciendo es que cuando le das un caso en particular, vamos a resolver esta ecuación de segundo orden y vamos a mirar esta, y quieres que deduzca la fórmula que no tiene en la cabeza, y puedes darle un ejemplo que a lo mejor el ejemplo es bueno, pero ahí hay una cosa que siento que los profesores no siempre evalúan, o saben evaluar, que es el proceso de generalización que se está haciendo. Tú estás guiando una generalización pero cuando tú haces matemáticas, haces casos particulares y para generalizar primero se te tienen que ocurrir los casos particulares, tienes que saber discriminar cuáles de esos casos particulares son los que te sirven o los que te van a dar luces para el problema general, que no lo sabes. Entonces el profesor siempre hace trampa porque él ya sabe. Yo creo que cuando uno hace eso, tiene que ponerse en el caso que yo no sé hacer el análisis, porque si no, no sirve lo que estás haciendo o puede no servir, o inducir el error, o puede hacer otra cosa que

es distinto al razonamiento matemático porque el razonamiento matemático es deductivo, no es inductivo. No es que estás usando tu intuición para resolver el caso general, pero no, de ninguna forma.
Entrevistadora: Cuando tienes un problema buscas resolver casos particulares como una estrategia para resolver el problema.
Diego: Por ejemplo hay un teorema, el teorema dice que esencialmente cualquier función diferenciable la puedes aproximar localmente por un polinomio, ¿de qué grado? Entonces puedes poner un ejemplo, pero en realidad lo que debería haber pensado la gente es que tengo una función cualquiera, no sé cuál es, entonces ¿cuál es la información relevante?, o sea dices bueno quiero estudiar la función en 0, una función cualquiera, una más compleja, lo que uno va intentar siempre hacer es tratar de reducir ese problema que no sabes qué es lo que es a algo que conozcas. Lo que conoces es polinomios, y más que polinomios, lineales y cuadráticas. Entonces en la generalización, partes con ejemplos, dando ejemplos, a ver cómo puedo escribir esto como una cosa lineal o como una cosa cuadrática, y ahí empiezas, ver el teorema de cuando una función tiene inversa. Sabes que si la función es parecida a la lineal debe tener inversa. Cómo se prueba eso no sé, pero si se comporta como una lineal, tiene inversa. Si se comporta como una cuadrática, ¿tendrá inversa? Entonces el objetivo, la gracia del ejemplo, es que puedas escoger un ejemplo que te de luces para la generalidad. En eso hay harta práctica, harta madurez, harto conocimiento, profundidad de lo que estás haciendo, no necesariamente la matemática en general, pero por lo menos de lo que estás haciendo.

[EED4] Podría profundizar en la siguiente afirmación:

Resolver un problema de Cauchy de primer orden es lo mismo que resolver un problema de punto fijo. En matemática una de las cosas que hacemos es convertir un problema en otro
Diego: Una de las cosas que hacemos en matemáticas es tratar de transformar un problema en otro, a veces pasa que, es super usual en matemática, que transformas un problema que puede tener alguna dificultad intrínseca en otro problema que si tienes más herramientas para resolver, y a veces esas herramientas son mucho más abstractas. A veces tienes una ecuación diferencial en términos de n, o $r2$, y te paso un problema de punto fijo, es más fácil el problema, pero el operador, ya no está en r o en n, está en un espacio de Banach, una cosa mucho más compleja. Ganas simplicidad, o sea el problema es más simple en un contexto más complejo, siempre ganas y pierdes, siempre todo suma 0. Lo mismo por ejemplo, cuando decíamos que vamos a ver solo las ecuaciones de primer orden porque la ecuación de segundo orden se reduce a la primera. Se reduce, pero tienes que aumentar la dimensión, entonces perdiste, o sea tenías un problema más simple por una parte pero perdiste... Es medio así, tienes un montón de ejemplos matemáticos donde puedes tomar un problema, reducirlo a lo conocido o a algo más fácil, pero siempre vas a tener que pagar un costo, y ese costo es que se dificulte otra cosa, puede ser la dimensión o qué sé yo.
Entrevistadora: ¿Pero el objetivo de hacer eso es poder decir algo del problema inicial?
Diego: Siempre podemos decir algo. Además hay que reducir, cada vez que haces una re-

ducción tienes que reducirlo a algo que ya sepas cómo es. Porque si lo voy a reducir a otro problema donde tampoco sé nada, es nada por nada. Tiene sentido porque por ejemplo, aquí no sé nada, voy a cambiarlo por otro problema que tenga un punto fijo que sé hacerlo y como sé hacerlo puedo pagar el costo que tenga que aumentar la dimensión o que este problema me quede un poco más difícil, porque este lo sé resolver. Pero lo llevo al terreno que conozco. O sea cambiar un problema que no sé algo, por otro que no sé nada, no ayuda. Lo otro que puede pasar es que uno gane en el problema, no sabes nada, lo cambias por otro que no sabes nada, pero el otro a lo mejor es más fácil de estudiar o hay más herramientas o herramientas distintas con las que se estudian. Eso por ejemplo, es lo que pasó con el último teorema de Fermat, lo que se prueba es cualquier cosa menos el teorema de Fermat, el problema ya se llevó a otra esfera y en ese mundo que es mucho más complejo tiene solución, porque en el mundo de operaciones básicas elementales que uno conoce, no hay caso uno no va a tener cómo demostrar el teorema.

[EED5] ¿Por qué es importante la unicidad de la solución del problema de Cauchy?

Diego: Porque un cualquier ecuación tú quieres saber si la solución es única o no. Es un problema que es intrínseco a las ecuaciones.
Entrevistadora: O sea no es particular de las ecuaciones diferenciales sino que en general...
Diego: Si, cuando haces una ecuación de segundo grado, quieres saber cuándo tiene una solución o cuando tiene dos.
Entrevistadora: ¿Y por qué la única es mejor, es más importante?
Diego: Porque por ejemplo, si tienes otra solución vas a tener que hacer casos, si la solución es esta, entonces pasa esto, si es otra, va a pasar esto otro, por ejemplo. Pero lo fundamental es que, en este caso, casi todas las ecuaciones corresponden a problemas físicos, entonces si la solución es única sabes que no son los movimientos posibles es el movimiento posible, no hay más. O sea, tengo los planetas, la velocidad inicial, y por más complejos que se muevan, se van a mover de una única manera, no se van a mover de dos maneras distintas. Tienes la temperatura, tienes la presión, tienes la humedad, y sabes que el clima va a comportarse de una única forma, no hay dos posibles, porque si no nuestra capacidad se pierde.

[EED6] ¿Podría explicarnos o darnos un ejemplo de cómo se usa el argumento de conexidad?

En clase usted señala que el argumento de conexidad es un argumento clásico en análisis
Diego: Lo que pasa es que el argumento de conexidad es cuando tú estás en un conjunto conexo, los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, es todo el conjunto o el vacío. Entonces uno sabe que los intervalos son conexos, $\mathbb{R}^n$ es conexo, las bolas son conexas, los complejos son conexos, o sea un montón de espacios que son conexos. Ocurre que tienes una propiedad disfrazada. El conjunto de los puntos, por ejemplo, en el intervalo tal que pasa cualquier cosa, lo que tú quieras, y quieres demostrar que eso vale para todo el

intervalo. Entonces puedes mostrar un técnica, que es la inocente que es la que nos enseñan a todos en primer año, que es probar que cada para elemento del intervalo se cumple la propiedad. Una manera un poco más sofisticada es demostrar lo siguiente: primero voy a demostrar que hay un elemento del intervalo que cumple la propiedad, uno al menos, listo, después voy a demostrar que los elementos que cumplan la propiedad, que no sé quiénes son, forman un conjunto abierto. Después voy a probar que los elementos que cumplen la propiedad, que no sé quiénes son, son cerrados, o sea el conjunto que es este punto que satisface la propiedad, es un conjunto que es abierto y que es cerrado. Así que me quedan dos posibilidades, como el intervalo es conexo o es de todo el intervalo o es vacío. Pero no puede ser vacío porque dije que hay puntos, entonces probé la propiedad para todo el intervalo. Ese tipo de argumento se usa de manera compleja, un montón de ejemplos donde se usa ese argumento, que es un argumento súper indirecto para probar que algo vale para todo.

[EED7] ¿Cómo explica esa costumbre que tenemos en matemáticas de sumar o a multiplicar lo que necesitamos?

Usted estaba desarrollando una demostración y multiplica por un uno, usted dice ”voy a multiplicar por este 1 que es conveniente”

Diego: No sé. No sé en qué momento uno pasa... Yo recuerdo cuando estaba en primer año, el tipo sumaba un 0, cómo sabe cuál es el 0 o el 1 que hay que sumar, y después en algún minuto, no sé cómo, por arte de magia, pasa a ser de lo más natural. En la medida que se vaya practicando. No sé, yo no sé cómo se hace eso. Pero es lo mismo que pasa en geometría, que es exactamente lo mismo, vamos a poner este puntito y este segmento auxiliar, y listo, y ahí se acabó, resolvió el problema, cómo se le ocurrió, no sé, pero lo haces tantas veces. Después tu miras el problema dices ”tiro esta recta y...”.

Entrevistadora: Recuerdo que teníamos esa discusión, por qué hacemos esto, sabemos que funciona, lo hacemos, nos va saliendo natural, pero por qué, qué es lo que sustenta que hagamos esto.

Diego: Una cosa es colocar cosas y la otra es quitar cosas. Por ejemplo, una recta, la recta es conexa, el plano también es conexo. Hay un homomorfsismo entre la recta y el plano, una función continua cuya inversa a esa continua... La respuesta es no. Voy a hacer otro ejemplo. Tengo el intervalo -1, 1, voy a tomar el complemento, que el intervalo es abierto o cerrado, como quieras, el punto es que el -1 infinito, 1 infinito. Eso no puede ser homoformo porque ese conjunto no es conexo y $\mathbb{R}$ es conexo, y el homomorfismo preserva la conexidad. Pero entre una recta y un plano, la recta es conexa, y el argumento no te sirve porque la recta es conexa y el plano también es conexo. Por ejemplo, uno para descartar que dos cosas son homeomorfas, dice .^{el} intervalo -1, 1 cerrado, ¿es homomorfo a la recta real? no, porque..Porque el intervalo -1, 1 es compacto y la recta real no, no puedes decir que es cerrado porque la recta también es cerrada, pero es compacto y la otra no, y los homorfimos son compactos, entonces no puede ser homomorfo. Entonces ese argumento es para descartar...

pero ahora tienes la recta y el plano, uno esperaría que no fuera homomorfo, porque un homorfismo significa que topológicamente es lo mismo. No sé, pero supongamos que si fueran homomorfos, entonces si yo saco un punto del plano y un punto de la recta, lo que queda seguiría siendo homomorfo... Supongamos que el cero va al origen, saco el 0 y saco la imagen por el homorfismo que es el origen. Pero acá me quedan dos intervalos, 0 con infinito, que ese conjunto no es conexo, pero el plano menos un punto sigue siendo conexo, no se puede separar. Eso significa que esos dos puntos no son homomorfos porque tienen un conexo que va al mismo conexo y por lo tanto lo otro tampoco puede ser.
Entrevistadora: En ese ejemplo está quitando.
Diego: Quitas cosas, ahí dices "quiero resolver, y qué hago para resolver, quito, no sumo". Hay veces que sumas y otras veces que quitas.

[EED8] ¿Cuál era el propósito de exponer una idea inocente de la demostración del teorema de Hartman Grobman?

Diego: En en el teorema de Hartman Grobman... el problema es esencialmente es el mismo de lo no lineal con lo lineal. Entonces estás en el mundo de lo lineal, y en el mundo de lo lineal la herramienta clásica es el teorema de Taylor, y uno puede pensar que tienes Taylor ahí. En el mundo no lineal, salvo que la derivada sea cero, siempre puedes cambiar la función por la derivada, y puedes cambiar tu función en realidad por lo que sea mientras los componentes sean los nulos. Eso decides cambiar y pierdes un resto... que uno puede estimar, tienes una estimación. Entonces ¿porqué no hacer lo mismo en campo de vectores no lineales? La idea es inocente en qué sentido, en que... es la idea que a uno se le debería ocurrir. Y el ejemplo que digo después es que no sirve, esa idea debería intentar probar nuevas funciones. Eso lo hago para demostrar que por eso es inocente porque no va a funcionar.

[EED9] ¿A qué se refiere con una condición técnica?

En la definición de los flujos conjugados usted señalaba que la condición con respecto al tiempo, que el tiempo esté bien definido es una condición técnica
Diego: Sí, porque cuando tienes conjugaciones de flujos, para tener flujo en sentido estricto, tú debes tomar dos tiempos cualesquiera y el flujo tiene que estar bien definido en el tiempo suma. Pero si este es un intervalo no más, y tomas dos tiempos, el tiempo suma puede ser solo el intervalo. Entonces el teorema tiene la condición técnica de que vale mientras la suma de dos tiempos de flujos siga estando en el intervalo de definición, porque si no te estás saliendo del intervalo y ahí no tiene ningún sentido. Es una condición técnica que es un poquito delicada porque es incómoda. Porque cuando uno no pone los cuantificadores, queda como todo fácil, pero cuando uno pone los cuantificadores en ese caso, se enreda entero. Entonces prefiero... como lo relevante no es eso, o sea es importante pero no es que el mundo se vaya a caer a pedazos. Entonces la condición técnica explica un poco qué es lo que hace pero no profundizo en eso porque es menos importante. Al final en el caso cuando

uno quiere cambiar los flujos lineales, esa condición técnica no existe, los flujos lineales la suma de tiempo siempre está bien definida... o sea los flujos lineales de intervalos es toda la recta, siempre. Así que no hay problema. O sea depende del tiempo pero el tiempo no está... el intervalo de solución es toda la recta, así que las sumas siempre están bien definidas. Ahí ya no te interesa, te va a interesar en el caso de lo lineal que ahí efectivamente los intervalos de definición pueden ser distintos, pero por eso uno hace un trabajo antes para demostrar que a pesar de que sean distintos, en un entorno ese intervalo forma abiertos, entonces igual te puedes mover. Pero ahí hay un tecnicismo fino.
Entrevistadora: ¿Lo técnico está en que necesito que eso se cumpla?
Diego: Es para que esté bien definido, porque si no estoy hablando cabezas de pescado. O sea f de $t+s$, y el flujo no está definido en el tiempo $t+s$ porque está fuera del intervalo de definición. Es como decirme: ”voy a tomar una función que es $1/x$, entonces $f(0) = a$...” estoy hablando leseras porque no está definido en 0. Por eso es un tecnicismo, porque todo vale mientras esté definido. Si no está definido entonces tengo que sacar los puntos de indefinición y ahí uno se puede enredar.

[EED10] ¿Qué significa que algo esté bien definido en matemáticas?

Diego: Depende... hay varias cosas, el contexto más usual es que una función esté bien definida. Y eso significa que satisface que lo que estás llamando para definir esta función, satisface las propiedades que estás diciendo que satisfaga. Entonces por ejemplo, tienes que verificar y ahí uno puede gastar un tiempo en que el dominio sea lo que dices que es el dominio... y después si defines la función con una relación algebraica o analítica, que esa relación tenga sentido, que no estás dividiendo por 0, y que a cada punto le corresponda una única imagen, no que les corresponda dos o tres imágenes, porque eso no es función. Entonces es verificar eso... La la función está bien definida, sí, es una función, en el fondo esto está bien definido si tiene sentido matemático lo que estás diciendo.

[EED11] ¿Cómo se relacionan la definición y la demostración?

Por ejemplo, un profesor había definido qué es una función, y luego daba un ejemplo y comprobaba que cumplía la definición
Diego: No está comprobando nada.
Entrevistadora: No, es un ejemplo. Pero tiene ese rol... que si yo tengo que definir si 5 es primo o no, digo cuál es la definición de número primo
Diego: Sí. Estás verificando que satisface la definición. En estricto rigor estás demostrando que es un número primo.
Entrevistadora: Es cómo que hay una relación entre demostración y definición.
Diego: Es que siempre es demostración, todo es demostración. O sea lo que no sea definición o axioma es demostración.
Entrevistadora: Entonces hay alguna diferencia entre verificar y demostrar.

Diego: Sí. Es que lo que pasa es que en matemática todos los razonamientos son demostraciones, todos los razonamientos concatenados. Por ejemplo cuando dices le damos una ecuación, resuelva esta ecuación, el otro está haciendo una demostración. Solo que los niveles de complejidad de esa demostración son muy bajitos porque lo que hace es que tiene un teorema que es una fórmula y que por lo tanto tiene que insertar el número en esta otra fórmula, desarrollar algebraicamente y obtener una igualdad en ambos lados, eso es una demostración facilita, no está introduciendo herramientas nuevas.

[EED12] ¿Qué es una definición?

Diego: Una definición es que simplemente tú estás encerrando en una categoría, nada más. Y el teorema es que este bicharraco pertenece a esta categoría, teorema 2, este otro bicharraco no pertenece a esta categoría.
Entrevistadora: Pero qué características tiene algo para que yo diga esto es una definición.
Diego: O sea una definición es cuando estableces por comprensión una clase de objetos dentro de un mundo, dentro del marco teórico que estás trabajando, tú estableces un conjunto y eso es una definición. Una definición es cuando estableces un conjunto por comprensión.
Entrevistadora: ¿Y cómo se generan definiciones en matemáticas? O sea cuando estoy trabajando cómo digo esto es una definición o necesito definir esto.
Diego: Es que cuando tu estableces esa categoría y quieres llamar a los elementos de una manera así, y que lo vas a hacer recurrentemente, entonces inventas una definición y dices que este objeto lo voy a llamar tanto y sí satisface estas condiciones, porque si no tendría que poner a cada rato las condiciones. Por ejemplo, un número primo, un número entero es primo si es divisible, si es distinto de 1 o -1, y es divisible por 1 y por sí mismo, listo, ahí está la definición. Mira podría poner una división 0, un número es primo si es divisible por 1 y por sí mismo. Teorema, tomo un número entero positivo, natural, entonces existen números únicos, números p1, p2, hasta una cantidad finita de números primos, una cantidad finita de números naturales, y esos de números primos y de números naturales, tal que el número entero, la multiplicación de esos primos, elevado a las potencias naturales respectivas. Eso es un teorema con la definición que tu sacas al uno y la otra. Si das la posibilidad que el 1 pueda ser primo, entonces el teorema te va a quedar con otra formulación... Porque puedes tener adelante de esa descomposición prima y el 1 donde quieras, y perdiste... Entonces tienes que reescribir el teorema, o sea que existen primos distintos de uno y ahí sí que son únicos. Si tú no decides primo, también puedes describir el teorema. Dices, existen enteros n1 hasta nd, y números enteros p1 hasta pd, tales que son distintos de uno y son divisibles por 1 y por sigo mismo, tales que... entonces el teorema te lleva... Entonces haces la definición porque... porque si más encima tengo que repetir esa condición en varios resultados, me conviene hacer una definición que evite esa repetición. Ahora, puede pasar que esas condiciones, esa definición... esa definición en general existe cuando uno escribe un texto, un trabajo o habla o expone, estableces esa definición para economizar el lenguaje. El lenguaje tiene que tener un principio de economía. Por eso es que la gente, los lingüistas sobre todo, se oponen a

estos y estas, damas y caballeros, porque no hay economía de lenguaje. Es un principio de la lengua, que debería ser económica. Entonces uno establece definiciones para la economía de la transmisión del contenido. Eso en principio puede durar lo que dura la transmisión del contenido, el capítulo del libro, el texto o la clase. Pero a veces pasa que esa conceptualización que es en principio por la economía, empieza a tener interés en sí mismo, o sea que el número primo, esa condición aparece para un montón de teoremas acá y montón de teoremas allá y es la misma condición, entonces ahí esa definición pasa a ser parte del vocabulario en general. A veces pasa que eso toma años porque el concepto de espacio topológico tomó como 50 años, un poco más, en aceptarse. Todo el mundo hablaba que esto es un espacio topológico, no importa qué era lo que era, pero para su trabajo este es el espacio topológico. Y se consensúa una definición que es la que tenemos hoy día. Por ejemplo, el número primo es una cosa que está consensuada hace no tanto tiempo, pero hacerlo... evidentemente si uno dice por qué el número no es primo, hay alguna relación intrínseca, ninguna, simplemente es que el teorema da la cacha enunciando si no lo sacamos.

[EED13] ¿En la definición hay un propósito de comunicar?

Diego: Es que la definición es establecer un conjunto de cosas, un conjunto. Uno se refiere a ese conjunto con cierto nombre, y a los elementos de ese conjunto con cierto nombre. Pero son elementos que están dentro de otra cosa, no sé, números, son otros objetos matemáticos dependiendo de la teoría en la que está. El cero es natural o no es natural, a nadie le importa, o sea hay que definirlo. Los naturales son...todo el mundo entiende que son los naturales, son un conjunto que tiene estas propiedades. Si parte en 0 o partes en 10, da lo mismo, tienes que decir donde parte para que no nos confundamos, da lo mismo, no es relevante, no es tema, no es que nos estemos auto flagelando porque no sabemos si es cero o no.

[EED14] ¿Por qué es importante el uso de lenguaje formal?

Diego: Porque de alguna manera ... en cierto sentido la matemática es un lenguaje, entonces lo que uno hace es ir aproximándonos a usar lenguaje formal, o sea aproximarse a ese lenguaje como culto. Lo que pasa es que escribir matemática pura es imposible, o sea es posible pero yo no he visto hablar a ningún matemático lógico que escriba la matemática en la forma correcta y pura. Entonces ahí pasa de nuevo el tema de la economía, que en realidad cuando escribes, escribes porque quieres transmitir, también. Entonces dices renuncio a escribir formalmente, super formalmente, a fin de que la trasmisión sea un poco más expedita. Pero no puedo renunciar a alejarme tanto de esa formalidad de manera que la trasmisión vuelva a ser inexpedita. Tengo que alejarme para que la trasmisión se facilite, porque estoy hablando con otra persona que no habla el lenguaje de la matemática, español o inglés, o habla lo que sea, me tengo que alejar de ese lenguaje formal para que nos podamos comunicar pero no tanto como para que se deje de entender el mensaje. Por ejemplo, qué sería alejarse mucho, no establecer los cuantificadores, porque ahí tienes la expresión, esto vale para todo, hay

alguno, entonces.
Entrevistadora: Como que puede tener una interpretación distinta.
Diego: Claro. Entonces uno se puede alejar un poquito. Lo que pasa es que cuando uno escribe la matemática formalmente tiene una interpretación única.

[EED15] ¿A que se refiere usted con formal?

Diego: A una simbología lógica, eso está super bien estructurado, los símbolos, el no es una rayita rara, y si es de primera categoría tu sistema axiomático o de segunda categoría, etc. Entonces por qué cosas chiquititas como demostrar que 0 más 0 es 0, te queda una demostración horrible, pero está impecable, así es. Ahí no hay nada más que hacer, y 0+0 será 0 por el resto de la eternidad. Es una nota impermeable desde cualquier consideración cultural, cualquiera. O sea quedó escrito en un lenguaje único universal. Lo que pasa que no puedes escribir todas las clases así, porque además queremos comunicarnos, uno renuncia un poco a eso, como que uno se va alejando de eso, va aumentando el espacio de precisión. Entonces, uno se aleja y establece una especie de contrato intrínseco con el interlocutor donde ambos entendemos que a este nivel las imprecisiones que uno tenga no van a ser relevantes. No voy a decir una mentira porque en una cosa fui impreciso. Ahí hay una especie de contrato mutuo. Pero tampoco estoy tan alejado para que efectivamente lo que diga no se pueda entender.
Entrevistadora: O sea, se puede ser riguroso sin ser formal.
Diego: Es medio subjetivo todo. O sea para mí la rigurosidad es cuando escribes formal, pero en general la gente no hace eso, sino que usualmente va a abriendo el espectro para facilitar la comunicación. Y eso depende mucho del interlocutor. Por ejemplo, si yo hablo con un colega en algunas cosas puedo ser mucho más laxo y en otras cosas puedo ser mucho más preciso, y si hablo con un estudiante en algunas cosas debo ser mucho más preciso y en otras cosas puedo ser mucho más laxo.

[EED16] ¿A que se refería con la siguiente frase?

La demostración del teorema del punto fijo de Banach tiene un interés distinto al que podía tener la demostración de un teorema como el de la función implícita
Diego: Sí, es cierto. Lo que pasa es que el teorema de la función implícita dice que si tú tienes una función de dos variables y la derivada de la función es la segunda función es distinta de 0, tú puedes despejar la primera función, el teorema de la función implícita localmente. Ese despeje te da una función, cuál es esa función, no sabes, no tienes cómo saberlo. Y miras la demostración, y la demostración del teorema de la función implícita cruza el teorema de la función inversa, que dice cuando una función tiene una inversa y cuál es la inversa tampoco sabes. El teorema del punto fijo de Banach, te dice cómo encontrar ese punto fijo, no te dice cuál es pero te dice cómo encontrarlo. En cambio en el teorema de la función implícita, ni el teorema ni su demostración te dicen cómo encontrar esa función. Por eso los dos son

teoremas de existencia pero de calidad super distintas. Porque en uno es el hecho de que existe y el otro te dice existe y se puede aproximar así. El teorema de punto fijo te dice existe y así se encuentra, toma el límite, y chao. Lo mismo pasa con el teorema de valor intermedio, dice que si tienes una función real en un intervalo cerrado donde en un lado es positivo y en el otro es negativo entonces entre medio tienes el 0 siempre, ahí hay un punto y además te dice cómo encontrar la raíz, dividir en dos si esta va arriba, y ahí hasta que encuentra la intersección del intervalo encuentras lo que andas buscando. Entonces el teorema existe en el cero de la función pero la demostración te dice cómo encontrar el 0 o uno al menos. Pero después el teorema del valor intermedio no dice nada, porque te dice que hay un punto, pero cuál es, no tienes idea. Lo que hace la demostración es tomar una función rara, girarla, entonces ya se perdió. Los dos son teoremas de existencia.

[EED17] ¿Por qué algunos objetos tienen varias definiciones?

Diego: Por ejemplo ¿Qué objeto tienen varias definiciones?
Entrevistadora: Por ejemplo, puedo definir los reales como el único cuerpo ordenado completo y también lo puedo definir como el conjunto de todas las cortaduras ... o de todas las sucesiones que tienden a...
Diego: Bueno, lo que pasa es que ponen definiciones distintas por varias razones. Una es porque la comunidad no se ha puesto de acuerdo en cuál es la definición, y eso es super usual, es un proceso que se va dando con el tiempo hasta que un concepto se cómo opera, la matemática madura un concepto. Lo que hablábamos antes es que cada uno define, en principio puede definir cualquier cosa, y que en general la definiciones que uno usa son funcionales a lo que uno quiere comunicar, eso también lo habíamos visto. Lo otro es que pueden haber distintas definiciones dependiendo de la aproximación que haga del objeto matemático, en el ejemplo que tú me diste son tres aproximaciones distintas de algo. Las definiciones son equivalentes, pero en realidad no es que uno diga: bueno voy a definir. Uno ve cuál de esas definiciones utiliza.
Entrevistadora: Tiene que ver con el tipo de cosas que quiero probar
Diego: Exactamente. A qué propiedades te vas a referir, lo que tú quieres con una definición simplemente aglutinar conceptualmente ciertos objetos para no tener que estar describiéndolos cada vez que los utilices o los podrías describir cada vez, pero sería poco práctico del punto de vista de la economía del lenguaje.

[EED18] ¿Para qué se demuestra en matemática?

Diego: En general una demostración es establecer que una proposición es cierta a partir de las reglas, definiciones y proposiciones que ya han sido establecidas. Las reglas son las lógicas ... Una demostración es una tautología, en términos lógicos es eso. Da proposiciones ya demostradas o asumidas, más las reglas lógicas, tú vas haciendo tautología lógica y obtienes una proposición que es la consecuencia y ese establecimiento de la tautología es lo que se

denomina demostración. Entonces, no es para qué se demuestra es que la matemática es el conjunto de objetos, relaciones básicas y demostraciones.
Entrevistadora: ¿Siempre el objetivo es la demostración?
Diego: A lo que tienes que referirte es ... tienes que decirme que es que es lo que entiendes como verdad matemática y la verdad matemática son proposiciones que demandan mucho, eso es una verdad matemática y se demuestra para establecer verdades matemáticas.
Entrevistadora: Entonces la única forma de establecer validez en matemáticas es demostrándolas.
Diego: No hay más, es lo único, a través de las demostraciones y las reglas lógicas que uno establece.
Entrevistadora: Una simulación o un trabajo computacional ¿Eso no cuenta como una demostración?
Diego: Existe lo que se llama las pruebas asistidas por computador y efectivamente el computador puede ayudar a la verificación de ciertas propiedades y el computador efectivamente puede hacer ciertas demostraciones. Ahora las simulaciones numéricas, dentro de la comunidad, no es muy aceptado, tiene que haber ciertas condiciones para que sea aceptado como parte de una demostración, sino no es.

[EED19] ¿Cuál es la idea que está detrás de una demostración de unicidad?

Diego: Depende de la unicidad que quieras demostrar, es decir, hay técnicas de demostración. La unicidad típicamente se demuestra por contradicción o suponiendo que hay dos y demuestras que son iguales, eso es como lo clásico. Ahora no se me ocurre ninguna otra manera. Yo diría que esa es la primera cosa que intentaría, o tú muestras que satisfaces cierta propiedad, pero esa propiedad es eyectiva.. pero no sé.
Entrevistadora: Por lo general, supongo, que tengo dos elementos que cumplen la propiedad.
Diego: Eso es lo que se me ocurriría.

[EED20] En cuanto de las demostraciones de existencia, ¿en qué se basan?

Diego: Cuando uno prueba la existencia una de las formas de probarlo es mostrar el objeto que necesita explícitamente, eso es cierto, pero muchas veces eso no es lo que ocurre, aveces tú no muestras la existencia del objeto explícitamente ¿Cómo sabes que existe raíz de dos?
Entrevistadora: Tengo una demostración que ese número existe.
Diego: No hay ninguna demostración. Lo que uno demuestra es que no puede haber en los reales un número que al cuadrado me de dos, eso es lo que tu demuestras, que lo sabía Euclides o Aristóteles, eso es muy viejo. Después demostrar que raíz de dos es real, es otra cosa. Que hay un número real que al cuadrado me da dos, eso es otra cosa y eso tú nunca dices cuál es el número, siempre hay un número que tiene esa propiedad. Hay existencias que son mucho más sutiles, por ejemplo: las raíces de una ecuación, todo polinomio de grado

tres tiene las mismas raíces [tres] ¿Y cuáles son? No sé, no hay ninguna fórmula. De hecho, justamente el problema más antiguo era que no podíamos conseguir una formula general que te de todas las raíces, eso hoy día no se puede hacer. Hace rato sabemos que no se puede hacer, pero existe, tiene raíces ¿Y cuáles son? No sé, ese es otro problema.

[EED21] ¿Podría explicar las ideas anteriores sobre la existencia ?

Diego: Es que son dos cosas distintas, la existencia de un objeto matemático y que yo pueda decir quien es precisamente, muchas veces no puedo decir eso. Por ejemplo las ecuaciones, toda ecuación de grado 17 tiene una raíz ¿Puedes dar una fórmula para encontrar esa raíz real, en función de los coeficientes del problema? No puedes, pero sabes que existe. Entonces la existencia no tiene que ver con exhibir necesariamente al objeto, lo que se termina haciendo es que tu no exhibes el objeto, pero si exhibes como aproximar el objeto. Tú no sabes quién es raíz de dos, pero sabes cómo aproximar la raíz de dos. Tú no sabes cuál es la solución de una ecuación, pero sabes cómo aproximarlo. No exhibes el objeto propiamente tal, sino que exhibes aproximaciones cada vez mejores.

[EED22] ¿Cómo explica usted una demostración por inducción?

Diego: Es que la inducción es la definición de los números naturales, tú cuando vas a hacer una demostración por inducción estas chequeando la definición de los naturales.
Entrevistadora: Los naturales siempre sé que existe el siguiente.
Diego: Porque los naturales son un conjunto que tiene ciertas propiedades, entonces tú tienes que chequearlas. Quiero demostrar que esto vale para todos los naturales, ósea quiero decir que todos los números que satisfacen esta propiedad, los naturales todos ellos satisfacen la propiedad ¿Cómo sé que esos son los naturales? Los naturales por definición el 1 tiene que estar y la otra propiedad que tienen que define a los naturales es que si un numero está [en el conjunto] implica que el siguiente está, entonces esas dos condiciones implican que todo ese conjunto deben ser los naturales, esa es la definición de los naturales. Entonces lo que uno hace es que chequea esa propiedad, definitoria en los naturales. Lo que estas chequeando cuando haces inducción es la definición de los naturales.
Entrevistadora: Pero usted hizo un ejemplo de inducción con matrices.
Diego: Nunca haces inducción con matrices.
Entrevistadora: Ósea, estaba haciendo una demostración en donde trabajaba con matrices y necesitaba mostrar como expresar la matriz a la enésima potencia, entonces ahí recurrió a la inducción.
Diego: Recurrí a la inducción, lo que pasa es que la inducción no es sobre las matrices, nunca es en sobre un objeto que no sea un numero natural. Ese teorema si tú te fijas hace una afirmación sobre los naturales. Esto es una afirmación para todos los números naturales. Formalmente digo. ¿Cuál es el conjunto de los números N mayor igual que uno, tal que P por L por P a la menos 1 es igual a B? Entonces lo que quiero demostrar que esta propiedad

vale para todos los naturales ósea que lo que quiero demostrar es que hay un conjunto S que es igual a $\mathbb{N}$. Lo que dice la propiedad de inducción es que si tengo un subconjunto de números naturales cualquiera, tal que 1 está en S y si n está en S implica que el sucesor está en S, entonces S tiene que ser igual a $\mathbb{N}$, no le queda otra. Este es uno de los axiomas que define a los naturales, hay unos elementos y hay un sucesor que hace que valga la propiedad de inducción. Entonces lo que he hecho acá es la propiedad de inducción.
Entrevistadora: Claro, aunque el contexto sean las matrices lo que estoy haciendo es probando la propiedad sobre los naturales, no son los matrices.
Diego: Exactamente y eso lo que permite cambiarte de distintos contextos, porque le da una propiedad que termina probando sobre los números naturales, no sobre el contexto que estás trabajando.

[EED23] ¿Es usual recurrir a una estructura de razonamiento que ya conozco para realizar una nueva demostración?

Diego: Sí, es super usual... Eso es común, uno parte con ideas que ya han sido trabajadas, por eso es importante la formación matemática, tener mucho conocimiento matemático o mucha cultura, porque a medida que te vas enfrentando más a la cultura matemática tienes más herramientas y más formas de pensar para atacar los problemas. Si tu miras el álgebra tiene formas de pensar, formas de razonar que son distintas de la geometría, la forma de razonar geométrica es distinta a la del análisis y así cada vez la matemática tiene su forma propia de establecer razonamientos, entonces lo que uno desearía es que la gente estuviera expuesta a la mayor cantidad de razonamientos distintos, porque después lo que uno usa son los razonamientos que ya uno ha hecho, es difícil pensar un razonamiento nuevo, corresponde a un nivel mucho más elevado.
Entrevistadora: Por lo general nosotros recurrimos en cierta medida a lo que ya sabemos que ya me podría funcionar, que si yo tomo este camino puedo llegar a un resultado ¿Podríamos decir que esa es una forma de proceder en matemáticas, como una manera de hacer las cosas en matemáticas?
Diego: Yo diría que sí.
Entrevistadora: Siguiendo esa idea de que el pensamiento geométrico es distinto al pensamiento algebraico ¿Esto me facilita o me dificulta las cosas?
Diego: Facilita, porque te da herramientas de un mundo para atacar problemas de otro y viceversa.

[EED24] Volvemos a lo que usted decía de cambiar un problema por otro

Diego: Exactamente, se gana algo y se pierde otra cosa. Fíjate que toda la mecánica del continuo no hubiera sido posible sin este diccionario, porque lo que hacían era que cuando estudiaban física le ponían atribuciones geométricas a los fenómenos físicos. Galileo Galilei habla de que el universo esta escrito en lenguaje matemático, pero él no estaba pensando en ecuaciones, él estaba pensando en figuras geométricas; círculos, que la tierra giraba en torno a un circulo, un eclipse entorno al sol, que esto estaba en unas cajas grandes. Esa es la imagen que el tipo tenia, geométrica, no la ecuación, pero con este diccionario es posible ver un movimiento de un planeta como una ecuación, entonces eso permite el desarrollo del campo y el análisis.

[EED25] ¿Podría profundizar en la siguiente idea?

El método de reducción al absurdo era como un gambito mucho más hermoso que cualquiera de los que puede ofrecer un jugador de ajedrez, porque un jugador de ajedrez podría sacrificar un peón en un pieza, pero el matemático sacrificaba la partida completa
Diego: Esa idea no es mía, es de Hardy. El método de reducción al absurdo es cuando uno quiere obtener algo, una conclusión, un teorema que me dé una conclusión y en el proceso de razonamiento la demostración parte negando eso. Es decir medianamente estas sacrificando en el juego de la demostración, tú estás sacrificando toda tu partida porque en el fondo es lo que quieres demostrar. Ahora se admite ese tipo de argumento, antiguamente no era tan obvio que la gente aceptara ese tipo de argumentos. También tiene otro riesgo que puede no llevarte nunca a contradicción, no es cierto que siempre uno llega a contradicción y es lo que paso con la geometría y la demostración no se encontró, porque funciona bien cuando las proposiciones que tú quieres demostrar son decidibles que efectivamente se pueden probar. Puedes partir de una afirmación que no se puede probar y esa nunca va a llegar en contradicción es un tema nuevo porque en el fondo cuando tienes un axioma puedes tener la construcción matemática con el axioma descrito de una manera y tienes otra construcción matemática con la negación del axioma y ambas son válidas.

[EED26] ¿Qué nos podría decir sobre la resolución de problemas?

Diego: Lo que pasa es que cuando uno tiene un problema y hace una evaluación de cosas, eso también es una demostración, la gente piensa que calcular no es demostrar y eso no es cierto.
Entrevistadora: ¿Por qué?
Diego: ¿Qué es lo que dijimos que es una demostración?
Entrevistadora: Era una asociación de deducciones lógicas
Diego: Una tautología ... y si tengo que calcular el valor de x en la ecuación $3x+6=0$, tengo que $3x$ es igual a -6, x es igual a $-6/3$, x es -2. Si esto vale 0 [la ecuación] y x es un número real, entonces $3x+6-6$ es igual a -6. Entonces, un tercio de $3x$ que es igual a x es lo mismo que $-6/3$, por lo tanto esto es una demostración, de que -2 es solución. Este es el teorema.
Entrevistadora: Y esto es una demostración.
Diego: Sí, cuando digan que demostrar no es calcular, es mentira, estás demostrando, lo que pasa es que es una afirmación sobre esa ecuación en particular, por lo tanto es un teorema y

merece su demostración.
Entrevistadora: Lo que pasa es que nosotros tenemos diferentes tipos de demostraciones y la demostración deductiva es lo que nosotros solemos llamar demostración y las otras las ponemos en otro status.
Diego: Eso es super deductivo
Entrevistadora: Por ejemplo, esto no es formal.
Diego: Es que nadie escribió formal, sabes que es una demostración formal.
Entrevistadora: Cuando demuestro un teorema de cálculo, y yo voy a utilizar la definición de limite y trato de amoldarme a la definición y a la manera de como están escritas las proposiciones, a utilizar los conectores como son.
Diego: Porque no es tan necesario. Te acuerdas que te dije que hay un contrato entre la persona que habla y la que escucha, entre el que comunica matemática y él que no comunica matemática, el que está recibiendo la comunicación, hay un contrato de gran formalidad que yo puedo tener. Cuando hacemos esto, esto es cero pasa esto y esto, aquí implícitamente no es una demostración y hay un acuerdo mutuo que claro aquí no tengo que poner porque no es necesario, sino obstruimos la comunicación en vez de facilitarla.
Entrevistadora: Y los dos estamos entendiendo en qué contexto.
Diego: Exactamente. A ese contrato implícito es el que me refiero de la formalidad, nadie escribe formalmente, esto no parece muy formal, pero en el contrato que nosotros tenemos es formal. Es una demostración, este es un problema porque tú no sabes el valor de x, el teorema dice que x es igual a -2, es la solución y es la única. Porque uno podría decir, hay más no hay más. Porque aquí estamos diciendo si x es una solución, entonces el problema es este calcular el valor de x para la ecuación entre $x+6=0$ a esa ecuación. El teorema es que $x=-2$ es solución de $3x+6=0$ y la demostración es esta.

[EED27] ¿Cuál es el propósito de demostrar?

Diego: Cuando tú expones matemáticas quieres comunicar una verdad matemática, la pregunta es la vas a comunicar desde la expertise como un Dios puedes hacerlo, ahí puedes prescindir de las demostraciones, porque tú estas transmitiendo verdades matemáticas, pero eso ni siquiera se acerca a hacer matemática, lo que decíamos antes el hacer matemática es hacer estos teoremas y la única forma de establecer estos teoremas es a través de la demostración no hay otro camino. El teorema se establece con demostraciones, entonces si tú quieres comunicar matemáticas, es que comunicar es como poner en conocimiento, no es hacer matemáticas. Cuando uno va a hacer un curso de matemática no quiere que el otro aprenda los resultados de matemática, uno lo que quiere es que la persona sea capaz de hacer matemáticas en su nivel. Hay como una idea de convencer al otro de que lo que le estoy diciendo tiene sentido, de que no lo estoy engañando con lo que le estoy diciendo, hay una idea de convencimiento ahí. Depende de la audiencia y para quien estas comunicando. Cuando uno está exponiendo a otros colegas sí necesitas convencer que se puede establecer una verdad y por lo menos dar toda la demostración, aunque a veces por distintas condiciones no puedes hacerlo, porque tienes un tiempo finito en la charla o porque te piden un número de páginas para el trabajo, etc. Entonces pones los elementos más relevantes y que permitan a la otra persona decir .ah, si esto es cierto, faltan detalles”, pero eso se completa y ahí estás intentando convencer. Después para enseñar, es otra cosa, lo que quieres es hacer que la otra persona haga matemática o estas transmitiendo el teorema por el teorema y quieres que él no solamente incorpore la existencia de un teorema sino que aprenda a trabajar con esa teoría y ahí hay muchas razones de por qué uno hace demostraciones, no solo para convencer sino que a veces la demostración técnicamente, a veces es más importante la demostración que el enunciado, justamente en estos teoremas de existencia, yo podría hablar de teoremas de existencia .esto es asíz sería pésimo porque el corazón del teorema es la demostración, porque la demostración no te dice cuál es la solución, sino que te dice como hace el algoritmo para aproximar la solución, todo los mitos numéricos no funcionan con el teorema, funcionan con la demostración del teorema, se hacen por la demostración del teorema, entonces esto de que hago la demostración o no la hago, es una discusión que se tiene que hacer desde el conocimiento matemático, no se puede hacer desde lo pedagógico. Porque las demostraciones pueden ser útiles y de hechos hay muchos casos, todos los teoremas de existencia donde no se ve el objeto explícitamente, lo que se está haciendo ahí es que típicamente hay un argumento de aproximación y eso está en la demostración por cómo se hace esa construcción aproximativa, entonces qué es más importante el teorema o la demostración.

Curso Espacios Métricos

Sesión 1: Introducción a los espacios métricos

EM1.1 [17:15-27:40] Demostración por contradicción

Contexto del episodio: El profesor define una función d denominada distancia trivial y pide a los estudiantes que demuestren que es una métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

Luego de resolver algunas dudas de los estudiantes y revisar las demostraciones que ellos han hecho, el profesor expresa lo siguiente :

Juan: Cuando quiero demostrar algo así tengo que usar la definición porque no tengo teoremas ni caracterización, tengo que tomar cada una de las cosas [en la definición] y averiguar que se cumplen. La primera cosa que hay que averiguar es que d es positivo, aquí es obvio, pero aveces no es obvio. Lo segundo [$d(x,y) = d(y,x)$], se cumple por la definición de d, tenemos que si $x = y$, $d(x,y) = 0$ y $d(y,x) = 0$ entonces $d(x,y) = d(y,x)$ y si $x \neq y$ entonces $y \neq x$ y eso ustedes lo pueden escribir. Aquí el problema es la tercera propiedad, la desigualdad triangular [$d(x,y) < d(x,z) + d(z,y)$], porque esta cosa [d] vale 0 o 1 entonces hay que ver los casos, si $d(x,y)$ vale cero entonces la parte derecha de la desigualdad [$d(x,z) + d(z,y)$]

va a ser más grande que cero. Ahora hay que tratar de decir que pasa si vale 1 a la izquierda, hay que tratar de demostrar que en la derecha vale al menos 1, entonces

- Si $x = y$, $d(x,y) = 0$ entonces $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ porque esto [$d(x,z)$] es positivo y esto [$d(z,y)$] es positivo, ese es el primer caso.

- En el segundo caso tomamos x distinto a y, tenemos que demostrar que la parte de la derecha no puede ser cero. Mostremos que $d(x,z) + d(y,z)$ es distinto a 0, bueno, por el absurdo suponemos que $d(x,z) + d(y,z) = 0$, lo quiere decir que los dos son iguales a cero, ahí me estoy dejando llevar por la demostración, entonces, obviamente $d(x,z) = 0$ y $d(y,z) = 0$ y la única cosa que puedo hacer con eso es usar la definición que dice que cuando vale cero [la distancia] entonces los puntos son iguales, entonces $x = z$, y $z = y$, ahí tienen una contradicción, $x = y$, esa es contradicción con x diferente a y.

EM1.2 [39:00-42:50] Garantizar la existencia

Contexto del episodio: El profesor define $B(X,\mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$, luego define la distancia entre funciones acotadas como $d(f,g) = sup_{x\in X}|f(x) - g(x)|$ y pide a los estudiantes que demuestra que d es una métrica. La intervención del profesor que se presenta en el episodio queda escrita en el tablero de la siguiente forma

$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq C + C'$

$sup_{x\in X}|f(x) - g(x)| \leq C + C'$

Juan: Bueno, el primer punto (de la definición de métrica) es el menos trivial, el menos fácil de todos, porque estamos tomando un *sup* y cuando uno toma un *sup* tiene que demostrar que existe, hay que tener cuidado con eso, porque, sino, ¿por qué estoy mirando funciones acotadas y por qué no cualquier función?, para el *sup* sirven las funciones acotadas. Entonces para ver el *sup* tengo que acotar este valor absoluto y tenemos $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ entonces, f va a ser inferior a una constante C para cada x, y g va a ser inferior a una constante C' para cada x, y todo esto [señala la desigualdad $|f(x)| + |g(x)|$] va a ser menor que $C + C'$ para cada x, entonces el conjunto de estos valores [$|f(x) - g(x)|$] esta acotado por una constante, entonces el *sup* existe [$sup_{x\in X}|f(x) - g(x)| \leq C + C'$]. Aclaro, esto no estaba escrito, pero para que un *sup* exista el conjunto tiene que ser acotado y no vacío, entonces recuerden que X debe ser diferente de vacío [$X \neq \emptyset$].

EM1.3 [50:20-52:30] Doble implicación

Contexto del episodio: Al concluir la demostración de que la distancia entre funciones acotadas es una métrica el profesor realiza el siguiente comentario:

Juan: ¿Siguieron la parte lógica de la demostración? Queríamos demostrar que A es equivalente a B ¿cierto?, osea, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (aquí la distancia es el supremo y los puntos son funciones), lo que hemos mostrado es $B \to A$ en esta parte [$\forall x \in X$, si $f(x) = g(x)$ entonces

$sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|=0$] y acá en la última parte mostramos $A\rightarrow B$ [Si $sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|=0$ entonces $f\equiv g$] y hemos demostrado lo que queríamos. Entonces tenemos que tener la idea global de la demostración, la lógica de la demostración es lo más importante, más que los detalles es entender lo que tengo que hacer para demostrar la proposición.

Sesión 2: Espacios vectoriales normados

EM2.1 [8:20-13:30] Demostración por el método directo

Contexto del episodio: El profesor define $\|f\|_\infty = sup_{x\in X}|f(x)|$ y haciendo uso de la definición demuestra que esta función es una norma. En este episodio se presenta la demostración de la primera propiedad que queda escrita en el tablero de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f\equiv 0\\(\leftarrow) f\equiv 0, \forall x\in X, f(x)=0\\sup|f(x)|=0\\\|f\|_\infty=0.\\(\rightarrow)\|f\|_\infty=0, \forall x\in X, |f(x)|\leq 0\\|f(x)|=0\\f\equiv 0\end{aligned}$$

Juan: Yo quiero demostrar que eso es una norma, entonces tengo que usar la definición, hay que ver la definición que son varias propiedades, ver la definición item por item, así que empecemos por la primera propiedad, tenemos que mostrar que la norma infinito de f es igual a cero si y solo si f es igual cero [$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f\equiv 0$]. Recuerden que para las funciones ponemos tres barras que quiere decir que f aplicado en cada elemento es igual a cero, entonces empecemos por una implicación, hagamos esta [$\leftarrow$], entonces, $\forall x\in X, f(x)=0$ entonces $sup|f(x)|=0$ es decir $\|f\|_\infty=0$. Ahora así [$\rightarrow$] suponemos que la norma infinito de f es igual a 0 [$\|f\|_\infty=0$] y en general tenemos una caracterización, una cuestión que es más simple que decir eso [que decir que la norma es igual a cero], es decir que, para cada x, $|f(x)|$ es negativo [$|f(x)|\leq 0$ o cero]. ¿Ok? Eso lo puedo decir porque eso [la norma] es mucho más fuerte que eso [el valor absoluto]. Cuidado con esto : decir que algo está acotado y decir que la cuestión que acota es el *sup* no es lo mismo. Entonces si eso es negativo [$|f(x)|$], ¿saben lo que eso es? es que todos los elementos son iguales a 0 [$|f(x)|=0$], entonces tenemos que $f(x)$ es igual a 0, demostramos que la función es igual a 0. Ok, como ven no estoy inventando nada, lo único que estoy haciendo es debilitando la definición [de norma], esto es más débil [el valor absoluto] que la definición de norma.

Sesión 3: Métricas equivalentes y conjuntos acotados

EM3.1 [28:15-29:35] Demostración por contradicción

Contexto del episodio: El profesor pide a los estudiantes que demuestren la proposición: Sean $a \neq b$ en un espacio métrico (N,d). Sean $r > 0$, $s > 0$, tales que $s+r \leq d(a,b)$, entonces, $B(a,r) \cap B(b,s) = \emptyset$. Si además, $s+r < d(a,b)$ entonces $\overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,s) = \emptyset$. Luego discute con los estudiante el desarrollo de la demostración.
Juan: El ejercicio es tratar de demostrar la proposición en $\mathbb{R}^2$, empezar en $\mathbb{R}^2$ y después preguntarse si eso se puede escribir con la métrica, generalmente lo que se usa es la desigualdad triangular y por contradicción mirar que pasa si las dos bolas se juntan. Entonces, suponemos que existe x en la intersección [$\exists x \in B(a,r) \cap B(b,s)$] ¿ok? Ahora tengo que escribir eso con métricas, $d(a,b) \leq d(b,x) + d(x,a)$ ¿ok? Eso lo podemos escribir ¿cierto?, y aquí $d(b,x) < s$ y $d(a,x) < r$ entonces por desigualdad triangular $d(a,b)$ es inferior a $s+r$, contradicción.

Sesión 4: Ejercicios de topología

EM4.1 [9:58-11:58] Contraejemplo

Contexto: El profesor había demostrado que si $A \subset B \rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ y luego muestra que el recíproco es falso, usando un contraejemplo que queda escrito en el tablero en la siguiente forma: $A = [0,1] = \overline{A}, B = [0,1[, \overline{B} = [0,1] \supset \overline{A}$ pero $A \not\subset B$.
Juan: Queremos mostrar un $\overline{A}$ que este incluido en $\overline{B}$, pero que A no este incluido en B ¿ok? entonces tenemos que tomar A y B muy cercanos pero que se diferencien por unos puntos. Estos contraejemplos en general se encuentran en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o si no hay que mirar la distancia trivial, el espacio de sucesiones o de funciones. Entonces, vamos a tomar una bola, en el espacio $\mathbb{R}$ bueno la bola no, es el segmento, voy a tomar $[0,1]$ que es lo mismo que $\overline{A}$, porque es cerrado ¿ok? entonces quiero que $\overline{B}$ contenga eso [$\overline{A}$] , pero que B no este incluido en A, para que $\overline{B}$ contenga eso [$\overline{A}$] debe ser $[0,1]$ con... menos puntos... yo puedo solo borrar uno de los puntos, entonces voy a tomar B igual a $[0,1[$ por ejemplo, $\overline{B}$ igual a $[0,1]$ así, que eso contiene a $\overline{A}$, pero A no esta incluido en B ¿ya? y así hay muchos contrajemplos.

EM4.2 [14:30-15:30] Significado del cuantificador existencial

Contexto del episodio: El profesor está demostrando la proposición: A es abierto si y solo si $\forall x \in A, \exists\ U \in Vec(x)$ tal que $x \in U \subset A$.
Juan: [$\rightarrow$] Yo supongo que A es abierto y tomo un punto x en A y quiero encontrar un vecindario no se qué, pero para encontrarlo, hay que sacarlo de algún lado, entonces es importante ver que la definición acá [de abierto] dice que existe algo y existe algo es que yo encuentro una solución a mi problema, entonces como x pertenece a A existe una bola de centro x y radio r positivo tal que la bola esta incluida en A [$\exists B(x,r)/B(x,r) \subset A$], ya sabemos que la bola es un abierto y en particular es una vecindad, entonces la bola funciona [para afirmar la implicación de la proposición].

EM4.3 [19:35-28:15] Estrategia heurística

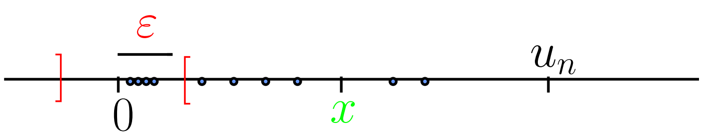
Contexto del episodio: El profesor desarrolla la demostración de la proposición $A = \left\{ \frac{1}{1+n} / n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ es un conjunto cerrado. La demostración queda escrita en el tablero en la siguiente forma: Sea $x \in \mathbb{R}/A$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|x-0| > \varepsilon$, sabemos que $\exists n > N / |u_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora, $x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ y $d(x, [-\varepsilon, \varepsilon]) = \alpha > 0$. Sea $r = min\{\alpha, d(x, u_n)/n \geq N\}$, entonces,

$$B(x, r/2) \cap \{[-\varepsilon, \varepsilon] \cup \{u_n/n \geq N\}\} = \emptyset$$

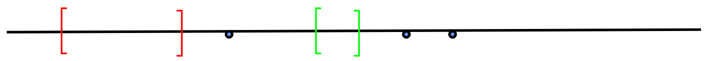
$$B(x, r/2) \cap A = \emptyset$$

$$B(x, r/2) \subset \mathbb{R}/A$$

Juan: En general demostrar que algo es cerrado, es demostrar que el complemento es abierto. Aquí hay varias maneras de demostrar el problema, pero se van a parecer mucho. Si tomo un conjunto finito de puntos en la recta es muy fácil demostrar que el complementario es abierto ¿cierto? porque tomo las distancias de cada punto y tomo unas bolitas que no tocan a nadie. Aquí el problema es que tengo una acumulación de puntos, una infinidad de puntos que están cerca de cero y lo que quiero hacer es borrar esos puntos y sacarlos de la discusión ¿ok? Voy a hacerlo directamente mostrando que A es cerrado si y solo si $\mathbb{R}/A$ es un abierto. Sea x perteneciendo a $\mathbb{R}/A$ mostraremos que existe r positivo, tal que la bola de centro x y radio r esta incluida en R/A, recordemos que esto es lo que queremos mostrar [Si $x \in \mathbb{R}/A$, $\exists r > 0, B(x, r) \subset \mathbb{R}/A$]. Lo bueno es que si tomo algo así [$x \in R/A$] no puedo estar cerca de cero, si estoy en $\mathbb{R}/A$ eso es decir de alguna manera que estoy lejos de 0. Entonces el dibujo es así, tengo mi cero acá, tengo mi sucesión, ahora tomo un punto x en el complemento y sabiendo que la sucesión converge a cero, yo sé que tengo una infinidad de puntos que van a estar cerca de cero ¿ok? así, sea un ε aquí [cerca de 0], tal que x no pertenece a esto [al intervalo alrededor de ε] y cuando borro este vecindario yo tengo cosas más lindas.



Sea ε positivo, tal que la distancia entre x y 0 es mayor a ε, para estar seguros de estar lejos ¿ok? [Sea $\varepsilon > 0, |x-0| > \varepsilon$] Sabemos que existe N, tal que para todo $n > N$, $|u_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Una observación importante es que x no pertenece al segmento $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y este dibujo lo puedo dibujar de manera mucho más simple. Yo tengo vecindario acá [en color rojo], después tengo mi sucesión acá, es como una infinitud de puntos [azules], el resto queda acá [el resto de los puntos de la sucesión queda en el intervalo] y yo quiero encontrar una bola en un x [en verde] que no pertenezca ni al rojo ni a los puntos azules.



EM4.4[29:00-32:47] Definiciones

Contexto del episodio: El profesor responde las dudas de los estudiantes sobre la demostración presentada en el episodio anterior.
Estudiante 1: Profe, tengo una pregunta. Al sacar los puntos donde se acumula la sucesión, pensando que $\mathbb{R}$ es denso, siempre va a haber elementos, porque uno tiene que probar que para todo, ¿o sea que tiene que probar solamente la existencia de una bola abierta dentro del abierto?
Juan: Mira, en que orden se hacen las cosas, para mostrar que eso es un abierto [$\mathbb{R}/A$], yo fijo un punto y después quiero encontrar la bola en este punto ¿Y cómo hice eso? sacando la vecindad de cero, hasta que el punto sea exterior.
Estudiante 1: Es que yo podría haber fijado un punto, por ejemplo, entre 1 y $1/2$ y ahí yo me aseguro y no tengo que hacer todo eso.
Juan: No porque lo tengo que mostrar para cualquier punto de esto [$\mathbb{R}/A$]
Estudiante: Pero es que al sacar ese vecindario ya no es para cualquier punto.
Juan: No, mira, yo tomo el punto y después saco el vecindario hasta que el punto no sea del vecindario, de eso depende la cosa. . .
Estudiante 2: Y se puede demostrar que la clausura de A es igual a A.
Juan: Si, pero tienes que pasar por este problema
Estudiante 2: Pero yo puedo decir que todos los puntos son aislados, menos el cero, y el cero es de acumulación. Entonces usted dijo en clases que los puntos de acumulación son iguales a la clausura menos los puntos aislados y ahí con acumulación igual a clausura menos puntos aislados ¿o estoy equivocado?
Juan: Hay varias maneras de hacerlo eso es cierto pero en algún momento vas a tener que decir que aparte de cero, no tienes otro punto de acumulación, para hacer lo que dices tu ¿cómo demuestras que los otros puntos no son puntos de acumulación? porque siempre va a haber una bola alrededor de cero, y cuando sacas la bola vas a tener que hacer todo esto, más o menos es la misma demostración. Hay muchas maneras de demostrar este problema, hay varias soluciones pero en algún momento hay que hacer esto de tomar un punto afuera o lejos de cero, pero esta demostración es la más linda porque estoy demostrando usando las definiciones, un cerrado es un conjunto que el complemento es abierto y así la demostración es más simple.

EM4.5[41:20-45:20] Definiciones

Contexto del episodio: El profesor hace una aclaración respecto a la forma en que los estudiantes realizaron los ejercicios propuestos como parte de un taller.
Juan: Me di cuenta que ustedes muchas veces tratan de cambiar las definiciones, por ejem-

plo, habíamos dicho que $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$, eso lo vimos, pero esa no es la definición de $\overline{A}$ y aveces es más complicado utilizar eso que la definición, eso se utiliza si no logro hacerlo con la definición, $\overline{A}$ es el conjunto de los x, tal que, para todo radio positivo la bola de centro x y radio r intersectado con A me da el conjunto vacío y esta definición [$\overline{A} = \{x/\forall r > 0, B(x,r) \cap A\} = \emptyset$] es mucho más fácil de utilizar, de hecho, si ven en algunos libros, la definición de $\overline{A}$ no es esta, sino que se define como el cerrado más pequeño que contiene a A, esta es una definición general, pero esa definición ¡para utilizarla! por eso yo trato de darles una definición que sea la más útil, que les sirva, esa definición general por supuesto la mostré porque ustedes tienen que conocerla, pero si doy esta definición es para ayudarles y de hecho si ven una demostración con esta [$\overline{A} = \{x/\forall r > 0, B(x,r) \cap A\} = \emptyset$] es más fácil que con la otra [$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$].

Sesión 5: Proposiciones sobre sucesiones

EM5.1 [3:20-14:40] Demostración por contrarecíproco

Contexto del episodio: El profesor esta haciendo un comentario sobre la proposición : $f : M \to N$ es continua en $a \in M$ si y solo si $x_n \to a$ entonces $f(x_n) \to f(a)$. La clase anterior había demostrado una implicación y ahora le corresponde demostrar la otra, que queda escrita en el tablero de la siguiente forma:
$\exists x_n \to a/f(x_n) \not\to f(a)$, esto es, $\forall B(f(a),\varepsilon), \exists x_n \notin B(f(a),\varepsilon), \varepsilon > 0$, luego,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \text{ grande } / f(x_n) \notin B(f(a),\varepsilon) \ \ (\star).$$

n grande quiere decir que $\forall N > 0, \exists n \geq N$. Ahora, si $f : M \to N$ es continua

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon) \ \ (\star\star).$$

De $(\star)$, $\exists N/N \in B(a,\delta)$ pero $f(x_N) \notin B(f(a),\varepsilon)$ y eso contradice $(\star\star)$ entonces $f : M \to N$ no es continua.
Juan: $(\to)$ Ahora sabemos que si x_n converge a a, bueno, es más o menos obvio que las imágenes tienen que ir hacia allá [$f(a)$]. Si las imágenes no van hacia $f(a)$ es que tengo un problema. Entonces lo que vamos a demostrar es que no B implica no A. Entonces ¿que es no B?, es que existe una sucesión x_n que converge a a, tal que $f(x_n)$ no converge hacia $f(a)$ y eso ¿qué quiere decir? es súper complicado decir que no converge, es que hay elementos de la sucesión arbitrariamente largos que están afuera de cualquier entorno de $f(a)$, esto es, $\forall B(f(a),\varepsilon), \exists x_n \notin B(f(a),\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.
Y aquí con esta notación cuando digo x_n no converge a a obviamente estoy hablando de una sucesión y aquí en $f(x_n)$ no converge a $f(a)$ estoy hablando de sucesión y aquí [$\exists x_n$] estoy hablando de un elemento, entonces tiene que ver con el contexto, la notación x_n, que quiere decir varias cosas. Entonces, estábamos en que $\forall B(f(a),\varepsilon), \exists x_n \notin B(f(a),\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ y esta notación la use para ayudar a leer las cosas, pero matemáticamente ustedes saben que no

se escribe así, matemáticamente lo correcto es decir $\forall\varepsilon > 0$ [al principio de la afirmación], pero es más fácil visualizar que lo que estoy tomando es una bola, por eso lo escribo así para ayudar a la lectura, pero así, no se que ε es positivo hasta la final de la frase, pero permito eso porque yo sé que ustedes saben escribir. Entonces, para todo ε positivo, existe n grande tal que $f(x_n)$ no pertenece a la bola. [$\forall\varepsilon > 0, \exists n / f(x_n) \notin B(f(a), \varepsilon)$], este n grande, quiere decir que para todo N positivo existe n más grande que N [$\forall N > 0, \exists n \geq N$]. Ok, esto es lo mismo que decir existe una subsucesión tal que,..., bueno lo que quiero decir, es que puedo crear una subsucesión que va lejos de $f(a)$, que para N grande siempre voy a encontrar nuevos elementos que van a estar lejos de $f(a)$. Ahora quiero decir que esta cosa $f : M \to N$ no va a ser continua ¿ok?, si f es continua, para todo ε positivo, existe δ positivo, tal que f de la bola de centro a y de radio δ está incluida en la bola de centro $f(a)$ y radio ε [$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$], tenemos esto ¿cierto? eso quiere decir que voy a tener una sucesión de elementos que van dentro de la bola [$f(B(a,\delta))$] tal que las imágenes no están dentro de esta otra [$B(f(a),\varepsilon)$] y eso es absurdo. A esto lo voy a llamar con $\star$ [$\forall\varepsilon > 0, \exists N$ tal que $f(x_n) \notin B(f(a),\varepsilon)$], y de $\star$ existe N, tal que x_N pertenece a la bola de centro a y de radio δ [$\exists N/N \in B(a,\delta)$] porque la sucesión converge hacia a, pero $f(x_N)$ no pertenece a la bola de centro $f(a)$ [$f(x_N) \notin B(f(a),\varepsilon)$] y eso contradice esa propiedad [$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$], entonces f no es continua.

Sesión 6: Convergencia simple y uniforme

EM6.1 [5:45-16:00] Demostración continuidad y convergencia

Contexto del episodio: El profesor esta demostrando el teorema: Si f_n es continua y converge uniformemente hacia f, entonces f es continua. Antes de escribir la demostración desarrolla con los estudiantes una idea de la demostración que queda escrita en el tablero en la siguiente forma:
Idea:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| \leq & \underset{f_n \to f}{|f(x) - f_n(x)|} & + \underset{continuidad}{|f_n(x) - f_n(a)|} & + \underset{f_n \to f}{|f_n(a) - f(a)|} \\ \leq & \frac{\varepsilon}{3} & + \frac{\varepsilon}{3} & + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, \forall x \in Dom f, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Juan: La idea aquí es usar una desigualdad triangular, pero poniendo varios términos en la desigualdad, entonces lo que queremos hacer, la idea es ver f de x menos f de a, ¿cierto? y minorar eso para x suficientemente cerca de a. Para hacer eso, vamos a introducir f_n de x, porque eso lo sabremos comparar a f de x. Vamos a introducir también f_n de a, y el tercer término es f_n de a menos f de a. Esto, por el hecho de que la función f_n converge hacia f y porque f_n es continua. Primero, yo voy a fijar un N grande, tal que esa cosa se achique y después voy a decir que f_n para ese N grande es continua, entonces eso está controlado. Entonces tenemos la idea de que f_n converge uniformemente hacia f dice que

para todo épsilon positivo existe N positivo, tal que para todo n positivo, todo n mayor que N y para todo x perteneciendo al dominio de f, vamos a decir que estamos en $\mathbb{R}$ para hacerlo más simple, el dominio de las funciones es $\mathbb{R}$, entonces tendríamos que adaptar nuestra definición, aquí [$x \in Dom$] es $x \in \mathbb{R}$ y tenemos que f_n de x menos f de x es inferior a épsilon. Y entonces ya habíamos dicho que en la convergencia uniforme esta expresión [$\forall x \in Dom$] va al inicio [$\forall x \in Dom, \forall \varepsilon > 0$] en vez de estar acá [después de $\forall \varepsilon, \forall n \geq N$], ¿si?, porque en la convergencia simple yo fijo un x y miro la convergencia, en la convergencia uniforme yo fijo epsilon y N grande y digo la afirmación para todos los términos y eso es lo mismo que decir que el *sup* es menor a epsilon. Bueno, lo que sé es que voy a tener tres elementos [en la desigualdad], entonces voy a tomar un epsilon sobre tres acá, para hacer mi suma. Entonces ahora empiezo a escribir las hipótesis, lógicamente lo que hago ahora es ir hacia lo que quiero demostrar, ¿ok?, lo que quiero demostrar es que para todo epsilon bla bla bla, lo que tengo que hacer acá es poner sea epsilon positivo y la definición [de la convergencia uniforme de f_n], y como el epsilon va a ser el mismo en cada término de la desigualdad conviene ponerlo dividido por tres, para que tengamos épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y épsilon al final. Entonces el N lo tengo que fijar, porque como tengo un existe, entonces después tengo que quiere decir que tomé el N, ¿ok?, coloco $N \in \mathbb{N}$.
Estudiante: Profe, es que no entiendo lo último que hizo, ¿porqué dividió ε?
Juan: ¿Por tres?
Estudiante: Si, ¿por qué hizo eso?
Juan: Porque yo sé que voy a tener tres elementos en mi desigualdad, entonces épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y épsilon sobre tres me da épsilon
Estudiante: ¿Y porque puso sea épsilon mayor que 0?, ¿porqué puso eso?
Juan: Porque lo que quiero demostrar es esto. Vamos a demostrar que f es continua. [$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$], entonces tengo que poner el épsilon positivo, y ahora tengo que introducir el delta en la izquierda. Ese es el teorema del que hablamos la última vez, el fin de la sesión anterior. Entonces cuando empiezo la demostración digo sea épsilon positivo, entonces tengo que usar la hipótesis y la introduzco, pero la idea [de la demostración], yo sé que es esta desigualdad, por eso tomo épsilon sobre tres, porque se que después me va a servir, o puedo tomar un epsilon prima y después mostrar una relación entre épsilon y épsilon prima, esa es otra manera de hacerlo. Y lo que se escribí acá en paréntesis, lo escribí aparte para tener la idea de lo que hay que hacer.

EM6.2 [1:10:05 - 1:16:05] Símbolos

Contexto: El profesor define una distancia $d(x,y) = \sum d_i(x,y)$ y el espacio métrico producto (M,d). Teniendo en cuenta esta distancia y este espacio pide a los estudiantes que demuestren que las proyecciones canónicas son continuas. Luego de algunos minutos presenta una demostración que queda escrita en el tablero de la siguiente forma: Por demostrar :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x,a) < \delta \rightarrow d_i(\Pi_i(x,a)) \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, suponemos $\delta = \varepsilon$, entonces, $d(x,a) < \delta$ y $d_i(\Pi_i(x,a)) \leq d(x,a) < \varepsilon$.

Juan: El ejercicio es demostrar que esta proposición es verdad y lo que queremos demostrar es la continuidad, entonces voy a escribir la definición de continuidad: $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, d(x,a) < \delta \to d_i(\Pi_i(x,a)) \leq \varepsilon$. Observen que $d_i \leq d$ porque d es la suma de las d_i. Ya, entonces si quiero que la distancia d_i sea menor a épsilon, es suficiente que yo tome d menor a épsilon, ¿cierto? Sea épsilon positivo, suponemos $\delta = \varepsilon$ y tenemos que $d(x,a)$ inferior a δ implica $d_i(\Pi(x),a)$ inferior a $d(x,a)$, inferior a épsilon. Eso es lo que queríamos demostrar.
Estudiante: ¿Porqué suponemos que delta es igual a épsilon?
Juan: Porque funciona! Yo tomo un épsilon positivo y quiero tener una desigualdad sobre d_i tal que esa distancia sea menor a épsilon, ¿ok? Luego, yo sé que $d_i(\Pi_i(x),a)$ es más chico que $d(x,a)$, que es menor a épsilon, entonces mi delta es épsilon. Suficiente, tomar delta igual a épsilon.

Sesión 7: Espacios métricos completos

EM7.1 [8:12-13:00] Toda sucesión convergente es de Cauchy

Contexto: El profesor presenta la definición de una sucesión de Cauchy, reflexiona sobre el significado de la misma señalando que después de cierto momento todos los elementos de la sucesión empiezan a estar muy cerca. Posteriormente enuncia la propiedad : Si x_n es una sucesión convergente entonces x_n es una sucesión de Cauchy. La demostración queda escrita en el tablero de la siguiente forma:
Sea $\varepsilon > 0$, $x_n \to l$, entonces, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $d(x_n,l) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por lo cual, si $n \geq N$ y $m \geq N$, $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,l) + d(x_m,l) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Juan: Bueno, yo supongo que sea x_n en cualquier sucesión que converge hacia l, lo estoy haciendo en conjunto M. Lo primero es que $d(x_m,x_n)$, va a ser chico, porque los dos elementos están cerca del límite, se ve que aquí voy a utilizar la desigualdad triangular. Y estas dos distancias [$d(x_m,l)$, $d(x_n,l)$] convergen hacia 0. Vamos a escribir entonces la prueba formal pero esta es la idea. Formalmente, sea épsilon mayor a 0 y x_m que converge a l, entonces existe N positivo, tal que para todo n más grande que N, $d(x_n,l)$ es menor que épsilon, por lo cual si n es más grande que N, y m es más grande que N, tenemos d de x_n a x_m es inferior a $d(x_n,l)$, más $d(x_m,l,)$ esto es inferior a 2ε, pero aquí no me gusta el dos, ¿cierto?, entonces aquí divido por dos, entonces épsilon sobre dos más épsilon sobre dos es inferior a épsilon.

EM7.2 [17:31-18:58] Sucesión de Cauchy

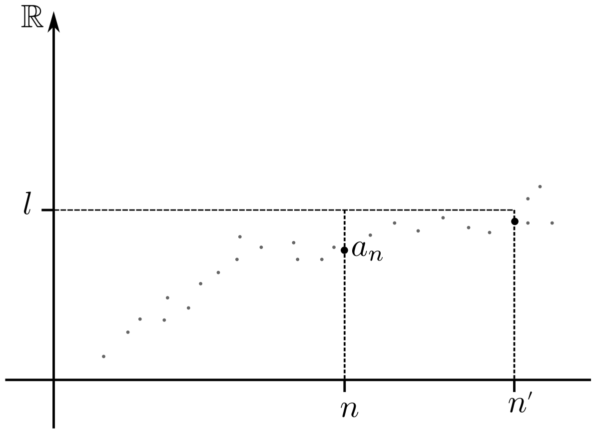
Contexto: El profesor había presentado la siguiente definición : Una sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, d(x_n,x_m) < \varepsilon$. Posteriormente, Juan presenta una forma equivalente de escribir la definición de sucesión de Cauchy : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 0$, $d(x_n,x_{n+p}) < \varepsilon$

Juan: La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera, para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} inferior a épsilon. Esta es la misma solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n+p$. Esta la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.

EM7.3 [40:10-57:15] Demostración $\mathbb{R}$ es completo

Contexto: El profesor afirma que el teorema más importante que tienen que saber en esta unidad es que $\mathbb{R}$ es completo y expone la demostración en el tablero en la siguiente forma :
Sea $Xn = \{x_k/k \geq n\}$, $a_n = infX_n$.
Por demostrar que $X_n \neq \emptyset$ y esta acotado: X_n es acotado si $\forall x_{k_1}, x_{k_2} \in X_n$, $\exists c$, $d(x_{k_1}, x_{k_2}) < c$.
Para $\varepsilon = 1$, $\exists N > 0$, X_N es acotado con c igual a 1.
Si $n \geq N$, $X_n \subset X_N$, entonces X_n es acotado.
Si $n \leq N$, $X_n = X_N \cup \{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N\}$, entonces X_n esta acotado.
a_n está bien definido. (Intuición: a_n converge hacia l).
Tomemos X_0 que es acotado, entonces, $\exists supX_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < supX_0$. Además, a_n es creciente porque para $n' > n$, $X_{n'} \subset X_n$ entonces $a'_n \geq a_n$. Como a_n es acotada y creciente entonces $\exists l \in \mathbb{R}$ tal que a_n converge hacia l.
Juan: Lo que voy a definir es X_n como el conjunto de los x_k tal que k es mayor o igual a n. Y defino a_n como el inf de los X_n donde lo que tengo son sucesiones de Cauchy. Entonces $X_n \neq \emptyset$ y cuando estoy diciendo esto, hablando del inf, estoy suponiendo que este conjunto está acotado, ¿cierto? entonces primero queremos demostrar que este conjunto está acotado... ¿cómo demuestro que un conjunto está acotado, ¿alguien de ustedes vio la definición?, ¿qué quiere decir que un conjunto está acotado? Un conjunto es acotado en $\mathbb{R}$ si...
Estudiante: Si existe un número que el valor absoluto es menor
Juan: Si, pero aquí para un conjunto acotado, tenemos una definición un poco más abstracta, es decir que la distancia entre dos elementos es más chica que algo, ¿ok?, X_n es acotado si para todos los elementos, x_{k_1}, x_{k_2}, que pertenecen a X_n, existe un c, tal que $d(x_{k_1}, x_{k_2})$ es inferior a c. Bueno, eso es muy parecido a la definición de ser de Cauchy, entonces para pasar a la definición de Cauchy, elijo un épsilon y eso me va a decir que existe un N. Se puede tomar $\varepsilon = 1$, entonces $\exists N > 0$, X_N es acotado con c igual a 1, eso por la definición de sucesión Cauchy, entonces tenemos que los elementos están cerca, porque N es suficientemente grande, entonces para el N suficientemente grande, X_N es acotado. Bueno, ahora se sabe que X_N es acotado, ¿cómo puedo decir que todos los X_n están acotados?, realmente si n es más grande que N, como estoy en un subconjunto de X_N, entonces X_n va a estar acotado. Ahora, como hago si tomo un n más chico, ¿cuál la diferencia entre X_N con n más chico que N?, ¿es cierto que si digo que n más chico va a ser acotado? Bueno, la diferencia entre X_n y X_N es solo que estoy poniendo unos segmentos más, pero es un número finito de elementos, ¿ya?,

eso es la definición de X_n. Entonces, si este está acotado, aquí pongo un número finito de elementos más, siempre será acotado. Ya, entonces, eso es acotado, por lo cual, a_n está bien definido.



Ahora miremos lo que estamos haciendo. Tenemos una sucesión que es de Cauchy, entonces nosotros vamos a demostrar que converge. Aquí pongo $\mathbb{R}$, aquí $\mathbb{N}$, aquí tengo un límite que existe, y tengo la sucesión acá. Lo que estoy haciendo, es que tomo un n particular, acá, y estoy mirando el inf que va a ser el a_n. Este a_n no va a ser el límite, pero si tomo n', cuando este n' va a ser más grande, ese n' va a acercarse al límite, ¿ok?. Entonces, la intuición es que a_n converge, ahí está lo que vamos a demostrar. Pero ¿cuál es la diferencia entre a_n y X_n?, que a_n claramente está acotado. Tomemos cero por ejemplo, tenemos que X_n está acotado, entonces X_0 es acotado, y claramente, para todo n en $\mathbb{N}$, tenemos que a_n es inferior a $\sup X_0$. Entonces tenemos una sucesión que está acotada por arriba, falta solo demostrar que es creciente. ¿Queda claro que a_n es creciente?, ¿por qué es creciente? Si tomo un n' más grande acá, el sup puede estar acá, ¿porque el sup acá (en n') es más grande que el sup acá (en n)?, solo porque este conjunto es más chico (n')... Entonces, lo bueno de acá es que tenemos una sucesión creciente acotada, entonces existe un límite [$\exists l \in \mathbb{R}$ tal que a_n converge hacia l]. Y en esta parte es donde estoy resolviendo todo el problema, antes dije que la diferencia entre ser de Cauchy y la definición de convergencia es que falta tener el límite en la definición de Cauchy, y aquí es donde estoy resolviendo el problema porque aparece un límite, y como hemos visto en un ejemplo antes, cuando tengo un límite o un candidato para límite, después es mucho más fácil demostrar que las cosas convergen. No puedo demostrar que algo converge si no tengo el límite, ¿ok?, entonces lo que hice antes, que les parecía raro, es solo para tener este límite, ¿ok? Ya, ahora falta demostrar que mi sucesión X_n converge hacía l, y para eso vamos a demostrar que existe una subsucesión que converge hacia l, porque es simple, es más fácil demostrar que existe una subsucesión ¿ok? Hasta acá, todo el mundo sigue la explicación?

EM7.4 [59:55-1:07:40] Símbolos

Contexto: Antes de finalizar la demostración de que $\mathbb{R}$ es completo, el profesor discute con los estudiantes los elementos claves de la demostración:
Juan: ¿tienen preguntas?, ¿hay dudas con algo?
Estudiante: Profe, yo no entiendo porqué elije $\varepsilon = 1$.
Juan: Acá es porque yo quiero tener mi conjunto acotado, entonces es para tener una idea, yo necesito una cota pero no es necesario que sea 1.
Estudiante 1:O sea yo podría haber puesto ε igual a una letra no más.
Juan: Si, cualquier cosa, pero con 1 especifiqué el epsilon. Es que aquí, para usar la definición de sucesión de Cauchy, tengo que para todo ε positivo, existe N positivo tal que X_N está acotado con $c = \varepsilon$, entonces yo quise hablar de un ε en concreto, pero también puedo escribir al principio fijamos ε positivo y N que depende de épsilon, ¿ok?, pero yo lo fije como 1.
Estudiante 1: Es que lo que pasa es que nosotros normalmente hemos visto que cuando fijan los números es porque es conveniente para algo, entonces por eso es que me generaba duda.
Juan: Yo lo fijo igual a 1 y ya está todo claro, que N existe y que X_N está acotado por epsilon igual a 1, porque cuando utilizo la frase *para cada*, cuando digo aquí *para todo* elemento, no quiere decir que ya tomé el elemento, tengo que tomarlo después, entonces yo tomo al tiro algo que me conviene, por ejemplo un 1 porque es fácil escribirlo [trabajar con el], ¿más preguntas?.

Sesión 8: Proposiciones sobre espacios métricos completos

EM8.1 [4:35-6:43] Cuantificadores

Contexto: El profesor hace un recuento de algunos resultados obtenidos en la clase anterior con respecto a sucesiones de Cauchy y funciones. Luego expone la definición de función uniformemente continua que queda escrita en el tablero en la siguiente forma:
$f : M \to N$ con M y N espacios métricos, es uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x, y \in M$, $d(x,y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Juan: Entonces vamos a introducir la noción de función uniformemente continua. Si tengo dos espacios métricos M y N, una función es uniformemente continua si toma sucesiones de Cauchy [y las envía] en sucesiones de Cauchy, pero eso en general no es lo que se dice, porque uno quiere una definición que vaya por el espacio métrico y el espacio topológico, entonces vamos a hablar de una cuestión de continuidad. f es uniformemente continua si para todo epsilon positivo, existe delta positivo, tal que $d(x,y)$ menor a delta, implica que $d(f(x), f(y))$ es inferior a epsilon. Esto dice que como tengo las cosas cercanas acá [en M], miro la imagen [de la función] y voy a tener cosas cercanas allá. Y aquí uno ve que esto es casi la definición de continuidad, pero lo que quiero es que la implicación sea válida en cualquier lugar de mi intervalo, ¿ok?, entonces en vez de poner para todo x, y acá [antes del existe], lo voy a poner después del existe, y eso es exactamente lo que quiere decir uniforme, que en general, el para todo que iba al principio en la continuidad aquí va después del existe.

E8.2 [1:17-1:20] Contraejemplo

Contexto: El profesor presenta la siguiente proposición: El conjunto de los polinomios $\{P : [0,1] \to \mathbb{R}[x] \diagup p \in \mathbb{R}[x]\}$ es un espacio que no es completo. La demostración de la proposición queda escrita en el tablero en la siguiente forma:
$\exp(x) = lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $\exp(x) \notin \mathbb{R}[x]$ y $\frac{x^k}{k!} \in \mathbb{R}[x]$, entonces $\{P : [0,1] \to \mathbb{R}[x] \diagup p \in \mathbb{R}[x]\}$ no es completo.
Juan: Voy a tomar una sucesión de polinomios de $[0,1]$ en $\mathbb{R}[x]$ que no converge, ¿ok?, o que converge a algo que no sea un polinomio, y eso ya conocen un montón de cosas así. Si tomo la exponencial de x, esta es el límite cuando n va al infinito, de la suma en k de 0 a n de x a la k sobre k factorial. Esos dentro de la sumatoria son polinomios, y la exponencial claramente no es un polinomio, por lo cual eso [el espacio que se había definido] no puede ser completo porque la sucesión converge, y el límite no pertenece al espacio, no es un polinomio. Y el espacio no es completo, simplemente porque no es cerrado. Eso lo anoto ahora porque es una cuestión super importante, es un contraejemplo que realmente hay que guardar en la cabeza, que en los polinomios, si no fijo el grado, me va a dar una cosa que es mucho más complicada que lo que imagino yo, y sirve para muchas cosas de topología, entonces, aunque este espacio parece realmente un espacio completo, porque es super simple, el espacio de polinomios parece simple, pero no es completo.

Entrevista Juan

Preguntas de información personal

a. ¿Cuántos años de experiencia docente posee? 8 años

b. ¿En qué niveles educativos ha enseñado? Solo en educación superior

c. ¿Qué cursos ha desarrollado con más frecuencia en los últimos tres años? Cursos de cálculo

d. ¿Cuántas veces ha desarrollado el curso de espacios métricos en los últimos años? Es la primera vez que lo hago

e. ¿Posee algún tipo de formación pedagógica o didáctica? Formación pedagógica general, organización de clases y de contenidos.

[EEM1]¿Cuál es el objetivo del curso de espacios métricos?

En el curso había dos objetivos distintos, para los estudiantes de pedagogía el curso estaba enfocado al razonamiento abstracto y en averiguar el nivel matemático de los estudiantes. Se dice que es el curso más difícil de la pedagogía porque uno no solo explica realmente se empieza a escribir matemáticas con todo rigor. Para los alumnos de licenciatura la idea es que pasen de los cursos de cálculo y se preparen para el curso de topología, así que se ven cosas que dieron antes pero un poco más abstracto, se introducen algunas cosas, pero sin la dificultad propia del curso de topología que es aún más abstracto. Y en ese curso era importante hacer demostraciones, porque es parte de hacer matemáticas es hacer demostraciones, para los de pedagogía era uno de los objetivos que se sintieran más cómodos con lo abstracto y como a ellos les causaba dificultad la primera cosa que hacer era mostrar ejemplos de demostraciones bien hechas. Ellos tenían dificultades con la lógica y tenían dificultades para escribir con rigor, tu puedes tener lógica pero si tienes que demostrar algo, explicar y escribir bien las cosas, ahí tienes que ser riguroso .. para los estudiantes de pedagogía más que el contenido quiero que conozcan los métodos, las formas de demostrar, yo creo que los estudiantes de pedagogía no necesariamente deben saber que es un espacio métrico, sino que un profesor de matemáticas debe tener la competencia y la aptitud de pensar en lo abstracto, eso es lo que necesitan, y el curso es un pretexto para desarrollar esto en quienes van a enseñar. Y para los estudiantes de licenciatura, tampoco es importante el contenido como tal, porque en el magister van a empezar topología y en topología hay muchos teoremas que se estudian de la misma manera que en espacios métricos, entonces el curso de espacios métricos es para que ellos sean más firmes en el pensamiento abstracto y tengan unas nociones de que quieren decir los objetos y tengan ejemplos para mirar .., haber trabajado en los espacios métricos hace que la topología sea más fácil. De hecho, cuando yo era estudiante nunca tuve un curso de espacios métricos, ni en pregrado, ni en posgrado, yo lo que tuve fue curso de topología y ese curso lo perdía todo el mundo, la gente lo consideraba como el curso más difícil en matemáticas, entonces yo pienso que lo que logra el curso de espacios métricos es que los estudiantes naturalmente vayan pensando las nociones .., yo me imagino que para paliar este problema hicieron este curso en dos etapas, se hacen los espacios métricos y luego la topología.

[EEM2] ¿Qué es una demostración?

Bueno es partir de las cosas que son admitidas como verdaderas o axiomas y hacer deducciones, es tratar de mostrar que un resultado es verdadero, para demostrar se parte de cosas que se sabe que son verdaderas y normalmente por implicación o por equivalencia se llega a un resultado nuevo, ya las etapas de implicación o de equivalencia depende del nivel de la persona [nivel de comprensión] que las escucha hay cosas que son más obvias para una persona y menos obvias para otra.

[EEM3]¿Son importantes las demostraciones cuando está enseñando?

¿Por qué?, ¿cuál es su papel?
Bueno hay diferentes papeles y motivaciones para hacer una demostración, de cierta manera cuando uno desarrolla una demostración, primero para los estudiantes por ejemplo los de pedagogía la demostración les enseña a manipular la lógica entonces ese es uno de los papeles de la demostración. También hay un papel científico, que bueno en este caso no es

tanto para mi, porque ya yo se que eso esta demostrado, entonces científicamente no hay ninguna motivación para hacerlo, pero uno tiene que hacer la demostración para asegurarse de que lo que esta diciendo es verdad. Pero también hay un papel de explicación, se trata de decir porqué lo que afirmamos es verdad y que todo el mundo entienda la misma cosa. Es que cuando uno hace la demostración es cuando uno empieza a entender los objetos más profundamente porque hay cosas que parecen obvias, pero después cuando uno desarrolla la demostración ve que hay muchos detalles que no había entendido y quizás lo que parecía obvio no era obvio, y ahí se entiende que los objetos tienen detalles escondidos, de hecho, muchos matemáticos leen demostraciones para inspirarse para demostrar otras cosas sobre otros objetos que tienen propiedades similares.

[EEM4]¿Qué es una definición?

Por ejemplo yo hice una tesis donde había muy pocas demostraciones pero muchas definiciones de objetos y luego me di cuenta que cambiando las definiciones las demostraciones salían más fáciles y justamente cuando uno define un objeto hay muchas maneras de escribir la definición del objeto y al realizar las demostraciones uno se da cuenta que quizás puede poner una definición equivalente por la cual la demostración va a ser mucho más simple y eso justamente era lo que decía sobre entender el objeto porque uno se da cuenta que cuando uno realiza la demostración entiende como debe pensar el objeto. Para mi, la definición tiene mucho que ver con la demostración, como lo dije, uno puede tomar como ejemplo la notación uno va a generar una notación porque quiere decir algo para entonces en vez de escribir una cosa súper grande puedo decir otra más chica que se entienda mas y que tenga más sentido, que sea profunda. Hay dos maneras de verla cosas, uno puede pensar que la meta de las matemáticas es el resultado matemático, pero si uno mira uno de los últimos resultados, si uno trata de expresarlo con una definición de hace años va a necesitar páginas y páginas para explicarlo entonces se puede ver la definición como una notación para llegar a un resultado, otra manera es ver la demostración más como organizamos los objetos y la meta es el objeto, con la demostración trato de ver un fenómeno.

[EEM5]¿Cuáles son los elementos de una definición?

Bueno una definición está bien construida porque que se ven las cosas fluir por ejemplo en mi tesis yo hablaba de árboles de esferas, entonces después de pensar y escribir las demostraciones yo tenía una tesis muy larga entonces me di cuenta que las cosas podían ser más simples si yo definía los árboles de esfera de otra manera, y al cambiar la definición pude hacer las mismas demostraciones más simples y mi tesis tuvo menos páginas. Las demostraciones salen simples y cortas con una buena definición.

[EEM6] ¿Por qué algunos objetos tienen varias definiciones?

¿Qué relación tienen dichas definiciones? Hay muchas maneras de definir la misma cosa, depende a donde vas, si quieres hablar de una cosa más abstracta o más general o más aplicada para que la demostración fluya. Hay una cosa que es la eficiencia de una demostración que puede ser un punto de vista, el otro punto de vista es la universalidad de los objetos donde uno piensa las matemáticas generales en que este objeto se define naturalmente, y de cierta manera cuando uno elabora un curso tiene varias definiciones y depende en que contexto, hay como una guerra entre los dos puntos de vista y tienes que encontrar la manera justa de decir la definición, ósea, podría usar la definición para facilitar la demostración o para revelar algo de la matemática, encerrarlo en un pensamiento más general de la matemática, entonces uno siempre esta entre las dos cosas, por eso hay un montón de definiciones, cada curso y cada profesor pone sus definiciones dependiendo de hacia donde va, que quiere demostrar y que quiere revelar de la matemática. Bueno, en este curso lo que hago es que generalizo las definiciones a otros espacios, tengo el objeto chico y lo pienso en un espacio más complicado, porque casi todo esto lo han visto antes, por eso les digo, bueno así se hace en los reales y para hacerlo ahora en espacios métricos cambio el valor absoluto por la distancia.

[EEM7] ¿Qué es una caracterización y en que difiere de una definición?

La caracterización en general viene después de las definiciones, es para que la demostración salga, pero yo sé que la definición matemática debe ser un poco más abstracta, por ejemplo hay una forma canónica de decir cosas, por ejemplo con la propiedad universal puedo definir un conjunto que satisface tal propiedad, o quiero definir un conjunto y aquí pongo un montón de cosas a la mano tal y tal propiedad qué son las que me van a servir para la demostración, después depende de lo que uno quiere enseñar, pero yo veo más la caracterización como cosas que me van a servir después para demostrar y la definición como algo más abstracto. Hay también caracterizaciones que son cosas que nunca se usan en la demostración pero son algo pedagógico para decir este es el sentido del objeto, eso te da una idea de porque el objeto es importante porque un objeto puede ser importante desde varios puntos de vista, entonces depende a que dirección vas a ir vas a poner tal o tal definición, entonces la más abstracta la colocas como una definición y la más subjetiva la voy a poner justo después de la definición, aunque esa no la vaya a usar, para presentar las cosas se puede establecer una caracterización sólo para razón pedagógica aunque no sea lo que vaya a usar en la práctica por eso no se pondría en la definición.

[EEM8] ¿Qué es un contraejemplo?

¿Por qué usted utiliza contraejemplos en sus clases? Bueno, una de las metas del curso era hacer ejemplos y contraejemplos, el objetivo era pasar de ese nivel Baby World al mundo abstracto. Ellos están acostumbrados a pensar de manera concreta para entender las cosas, entonces para dar el curso me pongo en la situación donde ellos reconocen cosas pero las

tengo que llevar hacia lo abstracto, entonces, yo digo lo que es una métrica pensándola como el valor absoluto y hago un montón de ejemplos y demostraciones donde estoy copiando lo que pasa en $\mathbb{R}$, pero haciendo eso [solo eso] ellos pueden pensar que lo que estoy haciendo [con las métricas] es como $\mathbb{R}$, entonces tengo que poner contraejemplos para decir, mira lo que hice no es lo que piensas, lo que escribí es un lenguaje más abstracto que $\mathbb{R}$ y eso abre las puertas a que ellos se puedan dar cuenta que puede que hayan escrito cosas que son falsas. Entonces, cuando están más cómodos ahí les digo que lo que están pensando les sirve para darse una idea, pero no es la verdad. Y el contraejemplo es para destruir algo que alguien esta construyendo que falso, pero yo justamente al principio los empujo a construir cosas y luego empezamos a destruir. A veces ellos piensan que algo es cierto y cuando hacen el contraejemplo se dan cuenta que no es cierto. Pero ¿de dónde viene esta idea de lo que es cierto?, viene de lo que vieron antes [de lo que piensan] y eso es algo que el profesor tiene que identificar bien para poner después los contraejemplo porque ellos [los estudiantes] ven generalidades donde no las hay, pero también cómo profesor uno a veces los empuja a hacer generalidades, entonces para afinar un poco la generalización de las cosas se hacen los contraejemplos.

[EEM9] ¿Cuándo y por qué se recurre a la consideración de casos para resolver un problema o hacer una demostración?

Los casos se usan cuando tratas de demostrar algo de alguna manera y vez que la idea general funciona pero hay detalles que no funcionan bien entonces se toman los casos, eso se hace cuando tengo un problema y trato de decir algo pero veo que no siempre es verdad, entonces este caso digo como se puedo hacer y después donde no es verdadero eso es otro caso. La aparición de los casos viene naturalmente cuando trato de resolver un problema, pero la estrategia que saque no funciona en general, pero normalmente si el objeto esta bien escrito todo junto funciona sin hacer excepciones. También aveces uno podría hacer una demostración sin hacer casos pero por razón pedagógica uno toma el problema de otra manera que le hable más al estudiante para demostrar la manera general, entonces hacemos este caso y después los otros casos salen de manera similar, porque no era la forma de hacerlo, pero yo lo hago de esta manera para los estudiantes y también esta revelando algo de mi objeto.

[EEM10] ¿Que cosas de su trabajo como matemático también están en sus clases?

Bueno, los ejemplos y los contraejemplos, y tratar de entender profundamente los objetos, hacerlos familiares, no verlos como algo abstracto, de hecho le digo siempre a mi curso que cuando un matemático empieza a trabajar los objetos en abstracto ahí ya esta perdido, va a tener dificultades, la primera meta [para la comprensión] es hacerse los objetos de manera concreta, y ver los límites posibles, que puedo hacer y que no puedo hacer con ellos y justamente están los contraejemplos, para entender la naturaleza del objeto. El objeto es lo que es, y el proceso de comprensión puede ser verlo con un ejemplo sencillo y luego más abstracto y más abstracto. Así se hace con los espacios métricos para entender la topología, empiezo con R, luego me voy al espacio vectorial normado, después me voy al espacio métrico y ahí puedo llegar a la topología y los ejemplos ayudan a comprender.

Curso Cálculo Vectorial

Sesión 1: Extensiones al espacio n-dimensional

CV1.1 [30:10-37:50] Definición del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$

Contexto del episodio: Luego de presentar las definiciones y propiedades del producto punto y de la norma el profesor introduce la definición de ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$. En el tablero queda escrito lo siguiente:

$$\theta := cos^{-1}\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}\right), \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$$

Andrés: Es fácil imaginarse hasta $\mathbb{R}^3$, que pueda existir un ángulo entre dos vectores ¿no es cierto? Dos vectores, uno para allá, otro para allá, y tengo el ángulo que forman los dos. Puede ser así, puede ser asá [lo indica con las manos]. ¿Qué pasa en $\mathbb{R}^4$? ¿puedo extender ese concepto?, ¿puedo entender lo que es un ángulo [en $\mathbb{R}^4$]?. Entonces, ¿cómo puedo definir el ángulo entre dos vectores cuando ya estoy en $\mathbb{R}^n$? Esta claro que yo ya no puedo visualizarlo, en los otros [espacios] yo puedo ver y puedo dar indicio de qué significa. Entonces, ¿qué significa ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$? ¿cómo creen que pueden definir eso? teniendo cero intuiciones geométricas... Cero intuiciones geométricas, ya no puedo ver lo que pasa. ¿Cómo defino el ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^4$? Con el producto punto, ¿cómo sería? Ya, voy a tomar dos vectores x punto y, ahora ¿qué le hago? Cuando estaba en $\mathbb{R}^3$, demostramos que el producto punto tiene una interpretación con el ángulo ¿ya? Ahora es un poco al revés, yo no tengo noción de ángulo, cuando estoy en $\mathbb{R}^4$ o en $\mathbb{R}^n$. Entonces qué voy a hacer, voy a extender la fórmula que ya tenía en el producto punto, eso ya me da una noción de ángulo. ¿Cómo extiendo esa fórmula? Tienen la formula por ahí, tiene que estar en el cuaderno, tres clases atrás.
Estudiante: Con la norma y el producto punto, ahí sale
Andrés: Estoy de acuerdo, yo quiero definir θ igual a qué ..., x punto y, dividido la norma de x por la norma de y, y el coseno a la menos uno. Ok, esa es una definición. Yo no me puedo imaginar un ángulo, qué es lo que es un ángulo de $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, pero puedo extender la definición que tenía para $\mathbb{R}^2$ y para $\mathbb{R}^3$. Es cierto, digo bueno, el ángulo es el coseno a la menos uno de eso. ¿Está bien definido, o no? ¿Está bien definido?, eso es super importante... ¿qué significa que este objeto esté bien definido?
Estudiante: ¿Se supone que esa fórmula corre para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, o no?
Andrés: Esa fórmula corre para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, porque en $\mathbb{R}$ el ángulo es 0, si es que uno va para allá y el otro va para allá en ángulo 0, o tengo la otra opción que el ángulo sea π. Entonces,

tengo que los dos apunten para el mismo lado y que ese ángulo sea 0, o estén en sentidos distintos, uno es positivo y el otro es negativo, en tal caso de tener ángulo en $\mathbb{R}$...
Estudiante: eso es para x, y distintos del vector nulo
Andrés: Si, se puede poner para $\vec{x}$, $\vec{y}$ distinto de $\vec{0}$, muy bien. Para que no se me indefina eso. Aunque el vector nulo no tiene ángulo, el vector nulo va para cualquier lado. Tiene norma 0, y puede ir para cualquier lado, da lo mismo. Ok, ¿a qué me refiero con que esté bien definido eso?, ..., ¿ a qué valores yo le puedo aplicar coseno a la menos uno?
Estudiante: Entre -1 y 1.
Andrés: Entre -1 y 1, ¿cierto?, el coseno va a parar a un número que está entre -1 y 1, por lo tanto, estar bien definido significa que esto $\left[\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||}\right)\right]$ en realidad es un número. Ya, estar bien definido, es decir, bueno esto en realidad es un número, no es algo que no sepa lo que es. Si yo multiplico dos vectores, x punto y, eso me va a dar un número real y al dividir por esto $[||\vec{x}||]$ y por esto $[||\vec{y}||]$ tengo una división con el denominador distinto de 0, ojo, esta división esta bien definida. Ok, voy a poner un número real ahí adentro, ¿dónde tiene que vivir ese número real? tiene que vivir entre el -1 y el 1, si no estamos mal, ¿ya?, ¿qué me garantiza que ese número real viva entre -1 y 1?
Estudiante: ¿Cauchy-Schwarz?
Andrés: Exactamente, el hecho que ese número de ahí viva entre el -1 y el 1, es fruto de la desigualdad de Cauchy-Schwarz...., Ok.

CV1.2 [38:35- 45:56]Demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Contexto del episodio: El profesor expone la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq ||\vec{x}||\,||\vec{y}||$. En el tablero la demostración queda escrita en la siguiente forma:
$0 \leq ||\vec{x}+t\vec{y}||^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+t\vec{y}||^2 &= (||\vec{x}+t\vec{y}||)\cdot(||\vec{x}+t\vec{y}||) \\ &= ||\vec{x}||^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2||\vec{y}||^2 \end{aligned}$$

$$f(t) = ||\vec{x}||^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2||\vec{y}||^2 \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Como $f(t) \leq 0$, $4(\vec{x}\cdot\vec{y}) - 4||\vec{x}||^2||\vec{x}||^2 \leq 0$, por tanto, $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq ||\vec{x}||\,||\vec{y}||$.

Andrés: La demostración es súper entretenida, de hecho, es la misma demostración que se hace después en análisis funcional, y tiene que ver con una parábola al final de cuentas. Es súper simple, miren. Uno sabe que la norma de cualquier vector es algo positivo ¿sí? ¿se acuerdan? es algo positivo o 0, entonces 0 siempre es más pequeño que si yo tomo la norma de x más t veces y al cuadrado. Hago esta combinación lineal, tomo x, y, construyo la combinación lineal x más t veces y, y esto siempre es positivo en 0, esto es para cualquier t de los números reales, para cualquiera, cualquiera, esto como es una norma al cuadrado esto siempre es mayor o igual a 0. Ok, desarrollemos esto en función del producto interno. Esta no es la misma demostración que hicimos para $\mathbb{R}^3$. Entonces, voy a desarrollar este tipo de acá, como es la norma al cuadrado, es igual al producto interno de x, más t veces y punto x

más t veces y. Entonces x más t veces y punto x más t veces y es igual a ¿qué?, empiezo a distribuir, x punto x ¿quién es? norma de x al cuadrado, y después queda t veces x punto y, y después hago t veces y con x. Como x punto y es lo mismo que y punto x, eso va a quedar 2 veces tx punto y. ¿Ya? Y, por último, es este [$t\vec{y}$] punto este [$t\vec{y}$], más t cuadrado norma de y al cuadrado. Y aquí viene lo bonito, esto de acá [$\|\vec{x}\|^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2\|\vec{y}\|^2$], yo lo puedo ver como una función de t. ¿Qué tipo de función es?
Estudiante: Cuadrática.
Andrés: Cuadrática. Ok. Y por otro lado tengo que esto de acá, es mayor o igual a 0 [$0 \leq \|\vec{x}+t\vec{y}\|^2$]. O sea, este f de t siempre es mayor o igual a 0 para todo t en los número reales. ¿Qué quiere decir eso? que mi función de t que es una función cuadrática, ¿cómo se gráfica? ¿cuál es la gráfica de una función cuadrática? una parábola, esa parábola, ¿está acá arriba?, ¿acá abajo?, ¿corta el eje?, ¿apunta para arriba, apunta para abajo?, ¿cómo es?
Estudiante: Apunta para arriba porque la norma de y es positiva.
Andrés: La norma es positiva, o sea, el término que acompaña a t al cuadrado es un número positivo. O sea, el caso 0 es trivial. Ok, entonces yo puedo asumir que son distintos de 0 [los vectores x e y], eso requiere que apunte para arriba la parábola. Entonces apunta para arriba así ¿o no? [hace un movimiento cómo si cortará el eje x].
Estudiante: no, no corta eje x
Andrés: No corta el eje x, ¿por qué?
Estudiante: Porque es positiva
Andrés: Porque es positiva, entonces está obligada a hacer algo así, puede ahí besar el eje x. Ok, ¿qué gracia tiene esa parábola? una es que, bueno, este tipo de acá tiene que ser positivo ($\|y\|^2$), por eso dijeron que apunta para arriba. No interseca el 0 hacia abajo, solamente lo besa en el mejor de los casos. ¿Cómo tiene que ser esa parábola?
Estudiante: El discriminante menor que cero.
Andrés: Súper bien, entonces como f de t tiene que ser mayor o igual a 0, el discriminante de esa parábola tiene que ser menor o igual a 0. El caso 0 es cuando besa, sino esta asomado. Perfecto ¿cuál es el discriminante? b cuadrado, bien, éste sería el término de t. Entonces cuatro veces x punto y al cuadrado menos cuatro veces a por c. Cuatro veces y cuadrado por x cuadrado tiene que ser menor o igual a 0. Ese es el discriminante..., pero acá en b es dos veces x por y, en lo que contiene t. El a es y cuadrado y el c es x. Identificando ahí los conceptos de la parábola. Entonces, el discriminante es menor que 0 es decir que eso es menor que 0, listo, simplifico por cuatro y aplico raíz, y al aplicar raíz tengo que poner módulo, por lo tanto, x punto y siempre es menor o igual que la norma de x por la norma de y, ya, ahí tengo la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Listo!

CV1.3 [59:16-1:16:15] Equivalencia entre definiciones de ortogonalidad

Contexto del episodio: Luego de definir la ortogonalidad. Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales si y sólo si, $\|\vec{x}+t\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|$. El profesor se propone demostrar que esa definición es equivalente a la definición usual $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$. En el tablero queda escrito lo siguiente :

Demostración :
$(\Rightarrow)$ $\|\vec{x}+t\vec{y}\|^2 \geq \|x\|^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\vec{x}+t\vec{y})\cdot(\vec{x}+t\vec{y}) &\geq \vec{x}\cdot\vec{x}\\ \vec{x}\cdot\vec{x}+2t\vec{x}\cdot\vec{y}+t^2\vec{y}\cdot\vec{y} &\geq \vec{x}\cdot\vec{x}\\ t(2\vec{x}\cdot\vec{y}+t\|\vec{y}\|^2) &\geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Supongamos que $\vec{x}\cdot\vec{y} \leq 0$, s.p.g., $\vec{x}\cdot\vec{y} > 0$. Asumimos $t < 0$, $2\vec{x}\cdot\vec{y}+t\|\vec{y}\|^2 \leq 0$, $\forall t < 0$.
$\dfrac{-2\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} < t < 0$.

Andrés: Entonces , ¿será que esa definición de ortogonalidad es equivalente a que x punto y es igual a cero?, veamos. Entonces x es ortogonal a y sí solo sí $x\cdot y$ vale cero y por lo tanto, si $x\cdot y$ vale cero, ¿cuánto vale el ángulo?, ¿cuál es el coseno a la menos uno de cero?
Estudiante: $\pi/2$
Andrés: x es ortogonal a y sí solo sí $x\cdot y$ es igual a cero. Es decir, el ángulo entre los dos, ya definí quien era el ángulo, es $\pi/2$. Y ahí esa definición de ángulo respetaría esta propiedad, pero vamos a ver si eso es cierto, si eso es consistente con la definición de ángulo entre vectores ¿Cómo se demuestra un si y solo si?
Estudiantes: Para un lado y para el otro.
Andrés: Para un lado y para otro, super bien, pero si quieren ser más académicos, digamos doble implicación [implicancia]. Ya, ¿cuál es mas fácil mostrar, esa [$x\cdot y$ es igual a cero implica que son ortogonales] o esa [si son ortogonales $x\cdot y$ es igual a cero]? Yo creo que vamos a hacer una demostración, la vamos a desarrollar y después nos vamos a devolver, vamos a hacer los pasos inversos y demostrar así, pero vamos hacia allá [la primera implicación], x es ortogonal a y significa que x más t veces y, la norma de eso, es mayor o igual a la norma de x, y eso es para todo t en los números reales ¿Cómo hago intervenir ahora el producto interno?, tengo que mostrar $x\cdot y$ es cero, si tengo normas. ¿Tienen claro que si pongo al cuadrado a un lado de la ecuación, también se pone al otro lado de la ecuación? Si elevamos al cuadrado en esa igualdad, son los dos positivos así que no hay problema. Ahora me voy a la definición de norma, la definición vía producto interno. Al lado de acá tengo que $x+ty$ punto $x+ty$ es siempre mayor o igual a x punto x. Bueno y empiezo a distribuir. Es decir acá tengo x punto x mas dos veces t por X punto y mas t^2 veces x punto y es mayor o igual a x punto x. Puedo factorizar por t, entonces $t(2x\cdot y+t\|y\|^2)$, eso es mayor o igual a cero, para todo t en los números reales. ¿Qué tenemos que mostrar? Que x por y es igual cero. ¿Cómo lo puedo mostrar? Cuando están desesperados y quieren hacer una demostración y no saben qué hacer, ¿qué hacen?
Estudiante 1: Hacer un dibujito.
Andrés: No, contradigan la tesis. ¿Qué significa contradecir o el absurdo aquí?
Estudiante: Suponer que x punto y es distinto de cero.
Andrés: Entonces supongamos que x punto y es distinto a cero, por lo tanto, x punto y va

a ser un número estrictamente positivo o estrictamente negativo. Las demostraciones van a hacer equivalentes, créanme. ¿Cuál quieren el positivo o el negativo?
Estudiantes: El positivo.
Andrés: Entonces sin pérdida de generalidad, puedo asumir que x punto y es mayor estricto que cero ($x \cdot y > 0$). Ya y esto es para cualquier t, para el que yo quiera, como esto ocurre para todo t, para el que yo quiera, voy a asumir que t es negativo, como se cumple para todo t voy a asumir que t es menor que cero y puedo dividir por t. Entonces me va a quedar: $2x$ punto y mas t veces las norma de y al cuadrado es menor o igual que cero [$2x \cdot y + t\|y\|^2 \leq 0$]. Si es negativo cambio la desigualdad, y esto es cierto para todo t negativo. ¿Que hago ahora? este número es positivo [$2x \cdot y$] y este número [$t\|y\|^2$] es negativo. Entonces el que esta haciendo negativo toda esta desigualdad, la suma completa, es un negativo, el que esta haciendo todo negativo es este término de acá [$t\|y\|^2$] , pero el t yo lo puedo dejar tan chico como yo quiera, este lo puedo hacer tender a cero [$t\|y\|^2$], y esto tiene que seguir siendo negativo [la desigualdad], cuál es la única manera en que esto ocurra si esto [$2x \cdot y$] es positivo. La única manera que esto pase, que siempre sea negativo, es que sea una contradicción y que, x punto y sea igual a cero. Entonces en la ortogonalidad que habíamos definido ahí, cumple que el x punto y sea cero. ¿Me puedo devolver o no? Negué que x punto y sea cierto, eso hicimos recién. Entonces x punto y es distinto de cero y sin perdida de generalidad supuse que x punto y es mayor que cero. Hay otra demostración, en que, si asumen que esto es negativo, van a hacer esto mismo con un t positivo y les da. Pero si esto es estrictamente positivo, igual que para todo t, también es cierto que para todo t es menor que cero, puedo dividir por ese t, y le cambio la desigualdad acá. Y esto tiene que ser cierto para todo t menor que cero. ¿Esto puede ser cierto que para todo t menor que cero, si x punto y es positivo? ¿Qué t me da la contradicción?. Hay otro t que me contradice esto. Cuando t es menor que cero, pero tiene que ser mayor que..., tiene que ser chico para que me funcione. Dos x punto y partido por la norma de y al cuadrado. x punto y es un número positivo, la norma de y es un número positivo, esta definición es positiva, y si le pongo un menos es negativo. Si considero un t que está ahí, ¿qué puedo hacer con esa desigualdad? Si quieren despejar t, t tiene que ser menor o igual, que $-2x$ punto y partido por la norma de y al cuadrado, o sea la desigualdad se cumple si el t es más chico que esto, pero ¿qué pasa si el t es mayor que eso? La desigualdad no se cumple, y ahí se llega a la contradicción. Si el t es mayor estricto que este numero que esta acá, esa desigualdad de ahí no se cumple. Y ahí hay contradicción.

Sesión 2: Nociones topológicas y límite de funciones

CV2.1 [14:30-21:39] Demostración de que un conjunto es abierto

Contexto del episodio: El profesor presenta la definición de conjunto abierto en un espacio topológico y desarrolla varios ejemplos, de bolas en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, luego discute con los estudiantes si el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} < r\}$ es abierto o no. La demostración queda escrita en el tablero en la siguiente forma:

Sea $r_0 = r - \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r_0\}$, por demostrar que $B \subseteq A$.

$$(x,y) \in B \to \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r - \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}.$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| &\leq \|(x-x_0, y-y_0)\| + \|(x_0 - y_0)\| \\ &< r - \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} + \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} = r. \\ &\to (x,y) \in A.\end{aligned}$$

Andrés : Tomo $n = 2$, estoy en $\mathbb{R}^2$, un disco de radio r. Entonces mi conjunto A van a ser todos los (x,y) de $\mathbb{R}^2$, tales que la raíz de x cuadrado más y cuadrado es menor a r ¿Ok? Este conjunto ¿es abierto, o no? Si, es abierto. De hecho, la frontera acá no está incluida. Lo podemos demostrar, de hecho. Yo me puedo dar un punto acá, (x_0,y_0). ¿Qué radio necesito generar en torno a ese (x_0,y_0), para que la bola que pueda generar entorno a él, esté completamente contenida en este conjunto A. Si yo digo que es abierto tengo que confiar que es abierto, pero ¿por qué el punto (x_0,y_0)? y yo les voy a demostrar que existe un radio tal que la bola de centro (x_0,y_0) de ese radio está totalmente contenida en este conjunto. ¿Qué radio me sirve? Sea r_0 igual ¿a quién?

Estudiante: La resta.

Andrés: La resta entre quien y quien.

Estudiante: r menos la distancia del centro al punto.

Andrés: es decir, r menos raíz de x_0 al cuadrado más y_0 al cuadrado. Ok, perfecto. Bien, entonces eso me va a generar un radio. Yo quiero mostrar ahora que cualquier punto ..., voy a construir la bola que está aquí. Entonces voy a decir, sea B igual al conjunto de los (x,y), que están en $\mathbb{R}^2$, tales que la distancia, es decir, la norma de (x,y), a (x_0,y_0), es menor estricta que r_0. Entonces para demostrar, que la A es abierta, yo tengo que demostrar... por demostrar que B es subconjunto de A, o sea que esta bola que construí ahí está totalmente contenida en el A ¿cómo se demuestra una inclusión de conjuntos? Tomo un punto que está acá [en B] y demuestro que está acá [en A] ¿Ok? Entonces, sea (x,y), en B. Si está en B ¿qué propiedad cumple? La propiedad que define al conjunto B. Es decir, la norma de (x,y), menos (x_0,y_0) es menor estricto que el r_0 que es r menos raíz de x_0 al cuadrado más y_0 al cuadrado. Por estar en B, el punto satisface esto ¿Y yo qué quiero demostrar? que ese punto de acá está en A, o sea que satisface esto [$\sqrt{x^2+y^2} < r$]. ¿ya? Bueno, hay que hacer lo que hay que hacer, tomo la raíz de x cuadrado más y cuadrado y veo si lo puedo hacer menor o igual a r. Bueno, esto es la norma de (x,y) ¿no es cierto?. Entonces, miren yo conozco el punto que está acá [en la bola de centro (x_0,y_0)], un punto que está ahí, yo no lo sé comparar todavía con ese [(x,y)], pero si puedo hacer este camino de éste acá y de éste acá [del punto en la bola a su centro (x_0,y_0) y de (x_0,y_0) a (x,y)]. Si hago eso ¿qué desigualdad ocupo?

Estudiantes: Desigualdad triangular.

Andrés: Exacto, entonces ésta [$\|(x,y)\|$] es menor o igual por desigualdad triangular que la norma de (x,y) menor que (x_0,y_0), más la norma de x_0. Sería desigualdad triangular. Introduje un punto ahí entremedio, y apliqué desigualdad triangular. Ok, esto de acá es esto de acá ¿no? , entonces yo se que el primer tipo de acá [$\|(x-x_0,y-y_0)\|$] es menor estricto que

r menos la raíz de x_0 cuadrado más y_0 cuadrado, pero éste objeto de acá es exactamente la raíz de x_0 cuadrado más y_0 cuadrado. Se cancela ese $[-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}]$ con ese $[\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}]$, y entonces un punto que está en B satisface esto, calculo su norma y veo que su norma es menor estricta que r. Todos los tipos que tienen norma menor estricta que r están en A. Partí de alguien que estaba en B y compruebo que está en A. Entonces las bolas, en general las bolas abiertas como éste son conjuntos abiertos. Éste proceso se puede hacer para cualquier x_0, y_0, puede estar muy cerca de la frontera, que también puedo hacer el mismo proceso. La demostración es la misma.

CV2.2 [1:03:05-1:10:40] Límites en términos de vecindades

Contexto del episodio: El profesor define el límite de una función en términos de vecindades : Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A es abierto, sea $\vec{x} \in \overline{A} = A \cup \partial A$, diremos que $lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ si y solo si $\forall V$, vecindad de $\vec{b}$, $\exists U$, vecindad de $\vec{x_0}$, tal que $f(U \cap A) \subseteq V$. Luego se apoya en un diagrama para exponer este concepto y posteriormente presenta el siguiente no-ejemplo del límite en términos de vecindades. En el tablero queda escrito lo siguiente:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$\exists V = (1/2, 3/2), f(U) \nsubseteq V, \forall U$, vecindad de $(0,0)$.

Andrés: Supongamos que tenemos la siguiente función, f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, aquí el n vale dos y en $\mathbb{R}$ el n vale uno. Tal que tomo un (x,y) y lo manda en 1 si x es mayor o igual a cero, 2 si x es menor estricto que cero. Entonces acá el $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^2$ y mediante la función, esto va a parar a la recta real, a $\mathbb{R}$. ¿A donde va a caer en $\mathbb{R}$?, tiene dos opciones o cae en cero si x es menor que cero, o cae en uno si x es mayor o igual a cero. Tengo esas dos opciones. Pregunta, ¿puedo decir que el límite cuando (x,y) tiende a un $(0,0)$ de $f(x,y)$, eso vale 1, puedo decir eso ¿no?

Estudiante: No.

Andrés: ¿Por qué no? Supongan que acá esta el punto y_0 es un punto ahí. Entonces si me aproximo al punto $(0,y_0)$, si me aproximo a él, puedo decir que $f(x,y)$, ¿vale uno?, ¿qué esta pasando?

Estudiante: No, hay que hacer el límite por la izquierda y por la derecha.

Andrés: Pero tratemos de verlo a la luz de esta definición [señala la definición de límite en términos de vecindades escrita en el tablero], si esto no esta pasando es porque existe alguna vecindad del 1, el $\vec{b}$ acá es el 1, tal que para que ninguna vecindad U de este punto $(0,0)$ eso se cumpla $[f(U \cap A) \subseteq V]$, ¿Que vecindad del 1 quieren? Si tomo una vecindad muy grande, miren lo que va a pasar, tomo una vecindad entorno al 1 de radio 2, algo super grande, que me va a incluir a cero, si tomo esa vecindad del 1, esa vecindad me incluye al uno y al cero, por lo tanto, si yo me tomo cualquier vecindad acá [en $\mathbb{R}^2$], la que sea, cualquiera vecindad acá [en $\mathbb{R}^2$], bajo la función va a ir a parar acá dentro [a la vecindad de 1 con radio 2], porque tengo dos opciones no más, ser cero o ser uno. Pero qué pasa si la achico y de mi vecindad

dejo fuera al cero, tomo una vecindad así no más, [señala una vecindad pequeña en torno al 1] ¿qué va a pasar?
Estudiante: Van a haber puntos x menores a cero, que van a caer solo en la vecindad de uno y no en la de cero.
Andrés: Exacto, para cualquier vecindad que este aquí [en $\mathbb{R}^2$], cualquiera por muy chica que sea, hay valores que están acá no cierto al lado izquierdo, y esos valores bajo la función se van a salir de esta vecindad acá [la vecindad pequeña de 1], porque van a caer acá [en la vecindad de 0], entonces no está pasando que el $f(U \cap A)$, sea subconjunto del V. Entonces esta va a ser mi vecindad V [la vecindad pequeña de 1], a cualquier U que tome acá [en $\mathbb{R}^2$], la f de esa U no va a estar completamente contenida acá [en la vecindad pequeña de 1], se sale, toma tanto valor acá [en 0] o acá [en 1] por muy chica que sea. Entonces se viola este concepto de limite que esta aquí, porque, existe una vecindad V de 1, por ejemplo, la vecindad $V = (1/2, 3/2)$, tal que f de U no esta contenido en V para toda U vecindad de $(0,0)$. Cualquier U vecindad que este en torno a ese punto va a contener tipos con x negativo, y por lo tanto no van a ir a parar ahí. Por eso ese límite de ahí no existe. Pero es un lío estar trabajando con vecindades, es lío completo estar trabajando con vecindades y haciendo el dibujito, para eso existen los épsilon delta, justamente para poder manipular, para poder analizar.

CV2.3 [1:10:55-1:14:20] Equivalencia de las definiciones de límite

Contexto del episodio: El profesor expone la definición de límite en términos de épsilon y delta y hace una relación con la definición que había presentado antes en términos de vecindades. En el tablero queda escrito lo siguiente :
$lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{b}$, $\Leftrightarrow$ $\forall V$, vecindad de $\vec{b}$, $\exists U$, vecindad de $\vec{x_0}$, tal que $f(U \cap A) \subseteq V$.
$lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, si $\vec{x} \in A$, $\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta$, $\to$, $\|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$.
Andrés: Entonces diremos que limite cuando x tiende a x_0, de f de x es igual a b, sí solo sí, para todo épsilon mayor que cero, ese para todo épsilon mayor que cero me esta diciendo para cualquier vecindad V de b, para bolas en torno a b tan pequeñas como yo lo desee. Existe un delta mayor que cero, ahí voy a decir que existe una vecindad U de x_0 en el dominio, tal que, si x pertenece al dominio, y la norma de x menos el x_0 es menor que delta. Aquí estoy diciendo, si el x pertenece al A y su norma es menor que el delta significa que x pertenece a la vecindad $U \cap A$, entonces la distancia de f de x a b es mas chica que épsilon. Lo que estoy diciendo acá es lo siguiente. Tomo el b, me construyo una bola de radio épsilon en torno al b y acá esta el x_0, el x_0 puede o no estar en el dominio. La gracia es que si el x esta en el A, si el x esta en el conjunto A y su distancia de x_0 es menor que delta, entonces bajo la función tengo que ir a parar acá, es decir, f de x menos b tiene que ser menor estricto que esto. El f de x tiene que estar dentro de esa bola [una bola de radio épsilon]. Es la misma definición que esta acá, pero con objetos matemáticos que puedo manipular, vamos a ver como se usa. Entonces para todo épsilon mayor que cero, para cualquier vecindad del b, por muy pequeña que sea, puede ser así o asa. Siempre va a existir un delta mayor que cero, una vecindad del

x_0 acá, tal que cuando yo la intersecto con el A, o sea si el x esta en A y en la bola de centro delta, la imagen de ese x tiene que ir a parar a la bola de allá [una bola de épsilon].

Sesión 3: Límites y continuidad

CV3.1 [7:05-12:05] Demostración de la existencia de un límite

Contexto del episodio: El profesor desarrolla varios ejemplos del límite de una función. Luego presenta el siguiente límite, analiza su comportamiento con los estudiantes, donde además demuestra la existencia del límite utilizando la definición épsilon-delta.

$lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

$\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right|$ es muy pequeño cuando $\sqrt{x^2+y^2}$ es muy pequeño.

$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$

$x^2 \leq |x|\sqrt{x^2+y^2}.$

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Para $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\delta = \varepsilon$, tal que, si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$, entonces$\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$.

Andrés: Entonces la intuición me dice que este límite se debe ir a cero, ¿cómo puedo demostrar que esto se va a cero?, tengo que acotar. Una herramienta poderosa para demostrar que esto se va a cero es acotar, porque yo quiero mostrar que x cuadrado, dividido en x cuadrado mas y cuadrado, menos cero, es tan pequeño como yo quiera, cuando x e y se van a $(0,0)$, es decir, quiero demostrar que esto es muy pequeño $\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right|$ cuando la distancia de este punto (x,y) a este punto $(0,0)$ es muy pequeña, es decir, cuando la raíz de x cuadrado mas y cuadrado es muy pequeña. Quiero demostrar que esto es muy pequeño $\left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right|$, o más chico que épsilon cuando esto de acá es la distancia del x coma y al 0 coma 0 es muy pequeña, o sea cuando este $\sqrt{x^2+y^2}$ es mas chico que un delta, eso es lo que quiero demostrar. ¿Qué herramientas tengo?, ¿cómo lo puedo hacer?, ¿el módulo de x a quien es menor o igual? El módulo de x, ¿cuál es?

Estudiante: Raíz de x cuadrado.

Andrés: Raíz de x cuadrado. ¿Este número de acá [$\sqrt{x^2}$] es más chico que este número de acá [$\sqrt{x^2+y^2}$]?

Estudiantes: Sí.

Andrés: Bueno, entonces lo uso, esto mas chico que x cuadrado mas y cuadrado [$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$]. ¿Qué pasa si ahora multiplico todo esto por modulo de x? Voy a obtener: modulo de x por módulo de x es x cuadrado, va a ser menor o igual a modulo de x por la raíz de x cuadrado más y cuadrado. ¿De qué me sirve eso?, me sirve para decir que x al cuadrado

partido por la raíz de x cuadrado mas y cuadrado, que es lo que yo quiero acotar, es menor o igual que el modulo de x. Y el módulo de x yo se que es mas chico que la raíz de x cuadrado más y cuadrado, $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ¿si o no?
Estudiante: ahí si podría aplicar el límite.
Andrés: Exacto, si el x coma y tiende a 0 coma 0, esto de acá [$\sqrt{x^2+y^2}$] va a tender a 0, y esto $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, obviamente es mayor o igual a 0, y va a ser que esto $\sqrt{x^2+y^2}$ converja a 0. Entonces puedo decir que para épsilon mayor que 0 existe delta igual al épsilon, tal que si la raíz de x cuadrado mas y cuadrado es mas chico que el delta que es igual al épsilon, entonces x cuadrado partido por raíz de x cuadrado mas y cuadrado, como esto es siempre más chico que esto, es más chico que épsilon, pueden hacerlo así, pueden justificar también diciendo, bueno si esto es se va a cero [$\sqrt{x^2+y^2}$] necesariamente esto queda como un sándwich dentro, se tiene que ir a cero.

Sesión 4: Diferenciabilidad en varias variables

CV4.1 [43-00 -48:00] Una condición suficiente para la diferenciabilidad

Después de exponer un teorema que presenta una condición necesaria para la diferenciabilidad el profesor enuncia un teorema que muestra una condición suficiente para la diferenciabilidad y expresa lo siguiente :
Andrés: Entonces el teorema de la caracterización de la diferenciabilidad es una condición necesaria, una función diferenciable tiene que ser continua, ahora les voy a dar una condición suficiente, pero no necesaria, solamente suficiente. Esta si sirve para demostrar que una función es diferenciable en un punto, la condición necesaria sirve para demostrar que no es diferenciable, porque si no es continua, ni a palos es diferenciable. Entonces, el teorema dice que si tengo una función de la cual existen las derivadas parciales y son continuas entonces puedo concluir que la función es diferenciable. Entonces el resumen de todas estas implicancias es f con derivadas parciales continuas implica f diferenciable y f diferenciable implica que existen las derivadas parciales y f es continua, entonces, si f es diferenciable entonces la f es continua y además tengo esta información, que existen las derivadas parciales.

CV4.2 [48:30- 57:30] Recíproco de la condición suficiente

Contexto del episodio: El profesor profundiza en las implicaciones antes expuestas y muestra que el recíproco de la condición suficiente no se cumple, esto es, una función puede ser diferenciable sin que sus derivadas parciales sean continuas. En el tablero queda escrito lo siguiente :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$lim_{x\to 0}f(x) = 0 = f(0)$, f es continua en $x = 0$.

$lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 sen(1/x)}{x} = 0$, f es diferenciable en $x = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsen(1/x) - cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$lim_{x\to 0}f'(x) = \nexists$

Andrés: Esta función f, ¿es continua o no, cuando x es diferente de cero?, esto es la multiplicación de dos funciones continuas y puedo calcular el límite cuando x se va a cero de $f(x)$ eso es igual a cero y eso es $f(0)$. Entonces la f es continua y tengo la esperanza de que sea diferenciable. ¿Qué pasa ahora?, quiero ver si le puedo sacar una derivada en cero, el límite cuando x tiende a 0 de $f(x) - f(0)$ partido por x menos 0. Hacemos eso y esto es 0, entonces f es diferenciable en $x = 0$. Vamos ahora a calcular la derivada parcial, f prima de x. Si derivo, tengo que hacer regla del producto, $2x$ por seno de 1 sobre x, mas x cuadrado por coseno de 1 sobre x por menos 1 por x cuadrado, eso es cuando x es distinto de cero. ¿Y que pasa cuando x vale cero?, la derivada es cero. Entonces, ahí esta la derivada, cuando x es distinto de cero es eso $[2xsen(1/x) - cos(1/x)]$, y cuando x es cero es 0. ¿Esa función es continua o no?, ¿qué pasa con el límite cuando x tiende a cero en f prima de x? ¿me da f prima de cero eso o no? Este limite se va a cero $[2xsen(1/x) - cos(1/x)]$ porque este es acotado $[sen(1/x)]$ y este se va a cero $[2x]$. Y este $[cos(1/x)]$ ¿cuando x se va a cero que pasa?
Estudiante 1: infinito.
Estudiante 2: no existe.
Estudiante 3: el coseno se indefine.
Andrés: Ese límite no existe. Si me voy a cero, el coseno empieza a oscilar cada vez mas rápido. Si x se va a cero, el coseno es un numero muy grande, en torno a cero, esto se mueve mucho entre menos 1 y 1. Entonces el limite de esto no existe, por lo tanto, f prima es discontinua en x igual a cero. Entonces esto es un contra ejemplo. Tengo una f que es diferenciable, sin embargo, las derivadas parciales no son continuas, tengo una f que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Entonces puede darse este caso, que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Ya, pero como la f es diferenciable, las derivadas parciales existen, y la f es continua, esta implicancia funciona, pero de acá a acá no funciona. f es continua, existen derivadas parciales pero f no es diferenciable.

Entrevista Andrés

Preguntas de información personal

a. ¿Cuántos años de experiencia docente posee? Desde el año 2006 (12 años)

b. ¿En qué niveles educativos ha enseñado? Siempre en educación superior

c. ¿Qué cursos ha desarrollado con más frecuencia en los últimos tres años? Análisis funcional y Cálculo III

d. ¿Cuántas veces ha desarrollado el curso de Calculo III en los últimos años? El curso de Cálculo lo he hecho desde el 2016

e. ¿Posee algún tipo de formación pedagógica o didáctica? No, licenciado en matemáticas y doctor, pero pedagogía, nada.

[ECV1]¿Qué es una definición?

Yo comparo mucho la manera como se hace matemática con el derecho, ósea, tú tienes que definir el concepto que vas a usar para luego hablar de él y hacer desarrollos sobre él. Cuando uno escribe un artículo, uno está escribiendo un teorema y de repente tú usas un objeto matemático y te das cuenta que hay que definirlo, entonces eso es un ejercicio al cuál uno está sometido constantemente. Se define para que no quede ambigüedad al respecto.

[ECV2]¿Cuáles son los elementos de una definición?

Para mí una definición de un objeto matemático es identificarlo de manera que no quede ambigüedad al respecto, lo identifico como algo y que yo no pueda decir, pero mira, existe este otro que también es esto, no deben quedar cabos sueltos. Que no pueda venir otra persona y decirme, mira, el objeto que estas definiendo no puede existir porque es contradictorio esto, con esto, o que sea lo suficientemente específico, bueno hay definiciones de cosas generales, pero que sea específico para poder trabajar con él y sacarle propiedades después. Es identificar algo de manera precisa y sin ambigüedades, es eso y no puede ser otra cosa.

[ECV3] ¿Cómo se genera una definición?

En mi caso, yo siempre las genero a posteriori, no a priori, puede haber otros matemáticos que lo hagan distinto, pero yo estoy trabajando, explicando algún resultado o tratando de idear como explico algo y bueno me doy cuenta que estoy usando un objeto matemático que en realidad merece haber sido definido como tal anteriormente, porque si lo haces así es más fácil el trabajo, tú partes definiéndolo y luego lo usas y la gente sabe, que lo que se está usando acá es lo que definí previamente. Eso lo aplico mucho en la clase, aunque en la clase a veces me sucede que estoy explicando algo y digo: no lo definí, pero normalmente la manera en que se presenta en la clase o en un artículo es que tú defines primero y luego lo usas, cuando tu generas algo es porque eso merece una definición porque hace más fácil la presentación.

[ECV4] ¿Son importantes las definiciones cuando se está enseñando?

¿por qué?, ¿cuál es su papel?
Hacen más fácil la presentación, hace más didáctica yo creo la presentación, porque tú defi-

nes algo y luego lo usas, eso es más simple que estar tratando de explicar algo y que aparezca este objeto, pero este objeto no está definido entonces tienes que explicarlo en el momento, entonces es más simple definirlo antes y luego usarlo. La definición se da primero también para uno ordenarse en la estructura matemática de algo que quiere transmitir.

[ECV5] ¿Cuál es el rol de los ejemplos que usted presenta luego de las definiciones?

Los ejemplos son para aterrizar [los conceptos], porque si no los conceptos pueden ser muy abstractos, tu defines un concepto matemático y el estudiante te dice ¿qué será eso?, por ejemplo, tú defines una distancia como una cosa que satisface ciertas propiedades y luego alguien puede decir, bueno, pero eso qué sentido tiene, entonces luego tú dices, bueno, esto y esto es una distancia, la métrica euclidiana es una distancia, puedes definir una distancia a partir de una norma, y eso da más intuición de lo que estás tratando de transmitir. Entonces los ejemplos posteriores a la definición son para aterrizar, porque a veces la gente no sabe de dónde agarrarse, entonces con el ejemplo tú lo contextualizas.

[ECV6] ¿Cuál es su objetivo al cuestionar a los estudiantes sobre la definición del producto cruz?

Usted pregunta a los estudiantes si tiene sentido definir el producto cruz en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}$
Bueno, ya les había explicado a los estudiantes en qué consistía el producto cruz, esto era un repaso, ya les había explicado que tienes dos vectores y tienes que hacer necesariamente salir un tercero que es ortogonal a los otros dos, entonces, ya te tienes que salir del plano. Era, ponerlos en el aprieto de pensar si era posible hacerlo en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}$ dada la situación geométrica que se estaba dando.

[ECV7] Profundice en la siguiente situación:

Al hablar de ángulo entre dos vectores, usted les pregunta a los estudiantes si se puede extender esa definición a $\mathbb{R}^n$ y luego de presentar la definición, les cuestiona si eso está bien definido, ¿porqué?
Claro porque ahí tú te puedes ir a cualquier dimensión, pero pierdes la intuición geométrica, sin embargo, existe una definición de ese concepto, del producto interno que la extiende a otras dimensiones y se extiende porque eso te da una propiedad que es súper importante en cualquier dimensión incluso en dimensiones infinitas que te sirven para calcular distancias, por ejemplo, para calcular el tipo que mejor se aproxima en un cierto conjunto. Dado un conjunto tengo alguien fuera del conjunto, cómo cálculo la distancia mínima de este tipo que está afuera a este conjunto que esta acá, eso tiene que ver mucho con el producto punto en espacios con producto interno, espacios de Hilbert, en muchos espacios y ahí también trato de hacer un link con el curso que dicto después, el curso de análisis funcional, donde extendemos todas estas nociones incluso a dimensión infinita. Tú puedes hablar de ángulos entre vectores en dimensión infinita y hablar de bien definido ahí es en el sentido de las

funciones, a mí me enseñaron que tu defines una función, en este caso sería el producto punto que va a parar a $\mathbb{R}$, en ese sentido estaba bien definido significa que dado dos pares acá esto efectivamente te dé un número real y no a otra cosa. Por ejemplo, si esto estuviese mal definido significa que, si tienes un x y un y acá, haces el producto y va a parar a un número complejo.

[ECV8] Explique la siguiente expresión sobre la definición de ángulo entre dos vectores:

El hecho que ese número de ahí viva entre el -1 y 1 es fruto de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Yo creo que ustedes me están preguntando algo profundo, yo creo que no dije nada más, pero la desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene un papel mayor, me demuestra hasta la desigualdad triangular. La desigualdad triangular que es más básica y que uno puede explicar más intuitivamente se demuestra con eso, así que esa no es la mayor implicancia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Me sirvió en ese momento para decirle a los chicos que gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz uno puede definir ese ángulo. Lo que pasa es que, uno tiene capacidad de imaginación en dos y tres dimensiones pero después ¿cómo defines un ángulo en n dimensiones?, yo no se verlo, pero yo solamente digo, esta definición que esta ahí, esto que lo puedo definir así, calza con la definición en 2d, calza con la definición en 3d, pero es válida para n dimensiones. No me lo sé imaginar, simplemente es válido y lo que me garantiza que eso sea valido, que eso sea un número que corresponda a un ángulo, es la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La desigualdad de Cauchy-Schwarz me permite extender mi definición de ángulo a más dimensiones, eso es lo que quería decir, porque la desigualdad es válida para n dimensiones y me permite extender la formula. Es que cuando tu defines un ángulo en dos o tres dimensiones lo haces de una manera que es válida solamente para ese tipo de dimensiones, pero esta desigualdad te permite hacer la extensión porque ella es válida para n dimensiones y esta definición es consistente, por ejemplo, porque esta definición de ángulo calza con el concepto de ortogonalidad. La ortogonalidad es algo que está bien definido incluso en dimensión infinita y se define como que dos vectores son ortogonales cuando x punto y vale cero, además, uno tiene la noción de que algo es ortogonal cuando hay perpendicularidad y efectivamente si tu ocupas esta definición de ángulo con coseno a la menos uno de x punto y dividido con ..., entonces te das cuenta que cuando x punto y es cero, vas a recuperar que el ángulo entre ellos es pi medio y que hay perpendicularidad, entonces calza en todo sentido la definición de ángulo. Si, yo creo que es eso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es algo que esta definido de manera n-dimensional y nos permite extender la definición de ángulo a n dimensiones.

[ECV9] ¿A qué se refiere con graficar naturalmente?

Que lo pueda ver al menos en el computador, lo que pasa es que vivimos en un espacio tridimensional, eso es cómo lo tangible, entonces que opciones tengo para poder ver una gráfica, algo que sea de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, algo que sea de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, algo que sea de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, también puedo graficar cosas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ en la pizarra, ósea, que a cada punto le asigno un vector, quizás puedo graficar de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ en el computador en que a cada punto le asignas un vector y puedes graficar un flujo, pero más allá de eso la pizarra no aguanta tanto, pero la definición de gráfica se puede hacer para cualquier dimensión, la gráfica la defines simplemente como el conjunto de los pares $(x, f(x))$ donde x está en el dominio de la función. Ahí lo hice al revés dije que cosas se pueden graficar y luego dije, la cosa en realidad se puede extender, primero los ejemplos y después la definición.

[ECV10] ¿Cuál es su propósito al usar la definición de limite en términos épsilon-delta ?

En el curso de cálculo III es tan complicado hacerles entender a los alumnos el concepto de límite, siento que tengo que hacer el esfuerzo porque es uno de los conceptos más complicados de explicar, me sale mucho más fácil explicar ese concepto en cursos de análisis, pero no en el curso de cálculo III que se entiende que es un poco más operativo. A veces lo hago [uso la definición] porque hay que hacerlo, pero no porque realmente sienta que le estoy entregando al estudiante algo más poderoso, pero creo que si uno lo quiere enseñar bien tiene que hacerlo en detalle. La definición épsilon-delta lo que te permite realmente hacer una demostración de que tal cosa converge a tal otra cosa. La definición tiene esa gracia de permitirte escribir la demostración. Antiguamente el curso de cálculo III era con esa definición, pero hoy en día no se está exigiendo tanto esa competencia [la demostración] eso lo aprenden en espacios métricos después.

[ECV11] ¿Cree usted que la definición topológica de frontera, coincide con la idea usual que tenemos de frontera?

La frontera es algo que es común, tu te paras ahí y te das un abierto y necesariamente con ese abierto estas interceptando Chile y Perú al mismo tiempo. En el fondo, ¿Chile es un abierto? o ¿Chile es un cerrado?

[ECV12] ¿Cuándo y por qué se recurre a la consideración de casos para resolver un problema ?

A mí me gustaría hacerlo siempre que sea posible. Bueno, yo improviso mucho en clase, yo no tengo una clase a priori tan preparada y cuando hago casos es porque me sale en el momento, pero pienso que es necesario cuando el concepto que estoy tratando de explicar da para mucho, pues todos los casos en realidad son el mismo concepto. Aunque a veces digo casos como para decir ejemplos, pero cuando los casos son para resolver un problema hago eso, porque mi área de la matemática requiere mucho resolver problemas con el computador y eso es una cosa que se viene ahora, enseñar matemáticas e introducir un lenguaje computacional, porque quizás hoy en día no es tan importante resolver una integral, antes cuando yo estudiaba matemáticas me enseñaban técnicas de integración, pero eso te lo hace el computador, incluso te lo hace en muchos casos analíticamente, entonces hay que enseñar a los estudiantes a plantear los problemas y saber que eso se resuelve con una integral, pero una vez que tu lo tienes planteado no es tan importante escribir el resultado final, eso se lo puedes dejar a la máquina, lo que sí es importante es escribir un algoritmo que pueda ser llevado a una máquina, en eso los casos son importantes, y mi formación computacional me lleva a hacer las cosas en casos porque en el computador siempre tienes que hacer eso, mira si el x está aquí o acá pasa una situación matemática completamente distinta, entonces a veces hasta tienes que ocupar una técnica distinta, por ejemplo, si estas analizando máximos y mínimos, es una técnica distinta buscarlos en el interior o buscarlos en la frontera, en una se ocupa derivar e igualar a cero y en el otro se ocupan multiplicadores de Lagrange.

[ECV13] ¿Usted hace alguna diferencia entre verificar y demostrar?

Bueno, a veces no soy muy prolijo en el uso del lenguaje pero para mi verificar significa ver que algo cumple ciertas propiedades, es lo que muchas veces llamo el problema directo, por ejemplo si tu tienes una ecuación $f(x) = 0$, verificar que x satisface eso significa enchufar x ahí y ver que me de 0, el problema inverso es encontrar x tal que $f(x)$ sea cero, verificar es que tú tienes el x en la mano y quieres chequear que eso se cumple, el problema inverso es encontrar x que satisfaga eso.

[ECV14] ¿Para usted es importante hacer demostraciones en clase?

Depende del curso, lo que hago acá [en pedagogía] y en matemática, no podría hacerlo en ingería. En este curso son estudiantes de pedagogía entonces tienen que tener nociones de demostraciones y dentro de la audiencia también hay estudiantes que van a ir a licenciatura que su trabajo va a ser hacer demostraciones después, entonces me siento obligado a mostrarles varias cosas de las demostraciones. A parte, yo como estudiante, yo estudie ingeniería y no me gustaba que el profesor no explicara el porqué de las cosas, quizás eso me motivo a las cambiarme después a las matemáticas yo siempre fui crítico de eso y me gusta hacer las demostraciones, siento que si no lo hago soy mal profesor. Y para los que van a ser profesores, siento que la mejor manera de explicar, para mí, es cuando tu estas realmente convencido de que la cosa es cierta y uno se convence de algo cuando conoce la demostración sabes porque es, es como que uno después explica las cosas con propiedad porque sabe como esta funcionando la matemática interna, es llegar al fondo de las cosas al final, cuando sabes cómo funciona la estructura lo explicas con mayor propiedad.

Anexo 2

Categorización del conocimiento de la práctica matemática

Índice

Demostrar **168**

Desarrollo de demostraciones **168**

○ Generalización 168
75:3 Cita 75:3 [ED5.1] 168
72:10 Cita 72:10 [EED3] 168
71:9 Cita 71:9 [EM3.1.1] 169
20:29 Cita 20:29 [EEM10] 169

○ Casos 169
73:6 Cita 73:6 [CV1.3.4] 169
11:29 Cita 11:29 [AR1.2] 170

○ Contraejemplo 170
71:2 Cita 71:2 [EM4.1] 170
71:3 Cita 71:3 [EM8.2] 171
20:24 Cita 20:24 [EEM8] 171
20:28 Cita 20:28 [EEM10] 172

Métodos de demostración **172**

○ Demostracion directa 172
71:19 Cita 71:19 [EM6.2.1] 172
73:2 Cita 73:2 [CV1.2] 173
73:11 Cita 73:11 [CV2.1] 173

○ Contradicción 174
11:33 Cita 11:33 [AR1.5] 174
11:39 Cita 11:39 [AR1.7] 174
72:34 Cita 72:34 [EED25] 175
71:30 Cita 71:30 [EM1.1] 175
71:8 Cita 71:8 [EM3.1.2] 176
73:5 Cita 73:5 [CV1.3.3] 176

○ Induccion 177
72:33 Cita 72:33 [EED22] 177
72:33 Cita 72:33 [EED22] 177

○ Contrareciproco 178
71:23 Cita 71:23 [EM5.1] 178

Tipos de demostraciones **178**

○ Bicondicional 178
71:14 Cita 71:14 [EM1.3] 178

71:31 Cita 71:31 [EM2.1] 179
11:43 Cita 11:43 [EAR4] 179
73:4 Cita 73:4 [CV1.3.2] 180
73:17 Cita 73:17 [CV4.1] 180
73:18 Cita 73:18 [CV4.2] 181

○ Existencia 181
11:31 Cita 11:31 [AR1.4.2] 181
11:41 Cita 11:41 [EAR3] 182
11:52 Cita 11:52 [EAR8] 182
72:31 Cita 72:31 [EED16] 183
72:25 Cita 72:25 [ED2.1.1] 183
72:36 Cita 72:36 [EED20] 184
72:37 Cita 72:37 [EED21] 184
72:37 Cita 72:37 [EED27] 185
71:10 Cita 71:10 [EM1.2] 185

○ Unicidad 186
72:24 Cita 72:24 [ED2.1.2] 186
72:27 Cita 72:27 [ED3.1] 186
72:35 Cita 72:35 [EED19] 186
72:14 Cita 72:14 [EED5] 187

Roles de la demostración 187

○ Verificación 187
11:30 Cita 11:30 [AR1.3] 187
11:54 Cita 11:54 [AR1.7] 188
20:30 Cita 20:30 [EEM3] 188

○ Conviccion 188
11:53 Cita 11:53 [AR1.4.1] 188
20:31 Cita 20:31[EAR11] 189
74:38 Cita 74:38 [EED27] 189
73:10 Cita 73:10 [ECV14] 189

○ Explicación 190
11:50 Cita 11:50 [EAR9] 190
20:31 Cita 20:31[EEM3] 190

Definir 190

Construcción de definiciones 190

○ Extensión 190
73:1 Cita 73:31 [CV1.1] 190
73:22 Cita 73:22 [ECV7] 191
73:23 Cita 73:23 [ECV8] 192

Características de la definicion 192

○ No ambiguedad 192
72:17 Cita 72:17 [EED12] 192
72:18 Cita 72:18 [EED13] 193
73:19 Cita 73:19 [ECV1] 193
73:20 Cita 73:20 [ECV2] 193

○ Equivalencia 194
72:22 Cita 72:22 [EED17] 194
71:6 Cita 71:6 [EM7.2] 194
71:29 Cita 71:29 [EEM4] 195
73:7 Cita 73:7 [CV1.3.1] 195
73:14 Cita 73:14 [CV2.3] 195
73:24 Cita 73:24 [ECV8] 196

○ Elegancia 197
71:22 Cita 71:22 [EM4.4] 197
71:28 Cita 71:28 [EM4.5] 197

Resolver problemas 198

Estrategias heurísticas 198

○ Casos 198
72:4 Cita 72:4 [ED1.1] 198
72:7 Cita 72:7 [EED2] 199
20:26 Cita 20:26 [EEM9] 199
73:25 Cita 73:25 [ECV12] 199

○ Reformular un problema 200
74:1 Cita 74:1 [ED4.1] 200
72:9 Cita 72:9 [EED2] 200
72:11 Cita 72:11 [EED4] 201

○ Elemento auxiliar 201
72:29 Cita 72:29 [EED7] 201
72:30 Cita 72:30 [EED7] 202
71:33 Cita 71:33 [EM6.1.1] 202
73:27 Cita 73:27 [CV3.1] 203

○ Diagramas 203
71:12 Cita 71:12 [EM7.3] 203
71:11 Cita 71:11 [EM4.3] 204

Papel del lenguaje matemático 204

Uso de los símbolos 204

71:5 Cita 71:5 [EM6.2.2] 204

71:15 Cita 71:15 [EM6.1.2] 205
71:15 Cita 71:15 [EM6.1.4] 206
71:17 Cita 71:17 [EM7.1] 206
71:7 Cita 71:7 [EM7.4] 207

○ Cuantificadores 207
11:36 Cita 11:36 [AR1.6] 207
11:44 Cita 11:44 [EAR5] 207
11:48 Cita 11:48 [EAR8] 208
73:6 Cita 73:6 [CV1.3.4] 208
71:21 Cita 71:21 [EM4.2] 209
71:24 Cita 71:24 [EM5.1.1] 209
71:20 Cita 71:20 [EM6.1.3] 209
71:26 Cita 71:26 [EM8.1] 210
73:13 Cita 73:13 [CV2.2] 210

Uso del lenguaje **211**

○ Precisión y economía 211
11:28 Cita 11:28 [AR1.1] 211
11:46 Cita 11:46 [EAR6] 211
11:47 Cita 11:47 [EAR7] 212
72:15 Cita 72:15 [EED12] 212
72:19 Cita 72:19 [EED14] 213
72:21 Cita 72:21 [EED15] 213

Demostrar

Desarrollo de demostraciones

○ Generalización

75:3 Cita 75:3 [ED5.1]

En documento:
75 EDO_revisado.pdf

Codificando:
○ generalización

Contenido:

> **Diego**: Esto lo que dice es que si a B le hago un cambio de coordenadas es lo mismo que hacerle el cambio de coordenadas a la exponencial de B. Entonces si quiero calcular la exponencial empecemos por $(PBP^{-1})^n$, primero lo voy a calcular al cuadrado, $(PBP^{-1})^2$. Eso queda P por B por P^{-1} por P, por B y por P^{-1}. Y lo que va a pasar es que estas dos del medio se van a cancelar [señala $P^{-1}P$] y me queda PB^2P^{-1}. Si lo pusiera al cubo las del medio se van a cancelar, efectivamente, entonces cuando lo tengo al cubo me queda P por B por B por B por P^{-1} ¿Está bien? PB^3P^{-1}. Así, lo que podemos deducir, aunque hay que hacer la prueba por inducción, es que si coloco la expresión a la n, entonces B queda a la n, osea, $(PBP^{-1})^n = PB^nP^-1$. Entonces si divido por n

72:10 Cita 72:10 [EED3]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ casos

Contenido:

> estás guiando una generalización pero...cuando tú haces matemáticas, haces casos particulares y para generalizar primero se te tienen que ocurrir los casos particulares, tienes que saber discriminar cuáles de esos casos particulares son los que te sirven o los que te van a dar luces para el problema general, que no lo sabes. Entonces el profesor siempre

71:9 Cita 71:9 [EM3.1.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ generalización

Contenido:

> **Juan**: El ejercicio es tratar de demostrar la proposición en $\mathbb{R}^2$, empezar en $\mathbb{R}^2$ y después preguntarse si eso se puede escribir con la métrica, generalmente lo que se usa es la desigualdad triangular y por contradicción mirar que pasa si las dos bolas se juntan.

20:29 Cita 20:29 [EEM10]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ particularizar

Contenido:

> naturaleza del objeto. El objeto es lo que es, y el proceso de comprensión puede ser verlo con un ejemplo sencillo y luego más abstracto y más abstracto. Así se hace con los espacios métricos para entender la topología, empiezo con R, luego me voy al espacio vectorial normado, después me voy al espacio métrico y ahí puedo llegar a la topología y los ejemplos ayudan a comprender.

○ Casos

73:6 Cita 73:6 [CV1.3.4]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ casos

Contenido:

> **Andrés**: Entonces supongamos que x punto y es distinto a cero, por lo tanto, x punto y va a ser un número estrictamente positivo o estrictamente negativo. Las demostraciones van a hacer equivalentes, créanme. ¿Cuál quieren el positivo o el negativo?
> **Estudiantes**: El positivo.
> **Andrés**: Entonces sin pérdida de generalidad, puedo asumir que x punto y es mayor estricto que cero $(x \cdot y > 0)$. Ya y esto es para cualquier t, para el que yo quiera, como esto ocurre para todo t, para el que yo quiera, voy a asumir que t es negativo, como se cumple para todo t voy a asumir que t es menor que cero y puedo dividir por t.

11:29 Cita 11:29 [AR1.2]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ casos

Contenido:

Entonces yo ya les había comentado, les había adelantado, la idea de la demostración que es la siguiente : Tome un intervalo $[a, b]$ cualquiera y vamos a medir la longitud del intervalo [Lo representa en la recta numérica]. ¿Cuánto mide este intervalo? [Señala la recta]: longitud $b - a$, entonces a esa longitud ϵ es un número positivo porque a es menor que b y el intervalo no es degenerado, entonces la longitud es positiva.
Vamos a suponer que a y b son dos números positivos, que no es una gran suposición porque si fueran negativos por ejemplo los dos números trabajo con $-a$ y $-b$, tengo a y b acá [los indica en el tablero, fuera de la recta], luego $-a$, $-b$ están del otro lado del cero. Y si encuentro un numero racional acá [señala en la recta], entonces menos el numero va a ser racional si encuentro un número irracional, menos el otro es irracional
Y si uno es positivo y el otro es negativo, entonces el cero es racional y está entre los dos y el irracional va a salir de la proposición.

○ Contraejemplo

71:2 Cita 71:2 [EM4.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ contraejemplo

Contenido:

Juan: Queremos mostrar un $\overline{A}$ que este incluido en $\overline{B}$, pero que A no este incluido en B ¿ok? entonces tenemos que tomar A y B muy cercanos pero que se diferencien por unos puntos... Estos contraejemplos en general se encuentran en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, o si no hay que mirar la distancia trivial, el espacio de sucesiones o de funciones. Entonces, vamos a tomar una bola, en el espacio $\mathbb{R}$ bueno la bola no, es el segmento, voy a tomar $[0, 1]$ que es lo mismo que $\overline{A}$, porque es cerrado ¿ok? entonces quiero que $\overline{B}$ contenga eso [$\overline{A}$] , pero que B no este incluido en A, para que $\overline{B}$ contenga eso [$\overline{A}$] debe ser $[0, 1]$ con... menos puntos... yo puedo solo borrar uno de los puntos, entonces voy a tomar B igual a $[0, 1[$ por ejemplo, $\overline{B}$ igual a $[0, 1]$ así, que eso contiene a $\overline{A}$, pero A no esta incluido en B ¿ya? y así hay muchos contrajemplos.

71:3 Cita 71:3 [EM8.2]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ contraejemplo

Contenido:

> **Juan**: Voy a tomar una sucesión de polinomios de [0,1] en $\mathbb{R}$ que no converge, ¿ok?, o que converge a algo que no sea un polinomio, y eso ya conocen un montón de cosas así. Si tomo la exponencial de x, esta es el límite cuando n va al infinito, de la suma en k de 0 a n de x a la k sobre k factorial. Esos dentro de la sumatoria son polinomios, y la exponencial claramente no es un polinomio, por lo cual eso [el espacio que se había definido] no puede ser completo porque la sucesión converge, y el límite no pertenece al espacio, no es un polinomio. Y el espacio no es completo, simplemente porque no es cerrado. Eso lo anoto ahora porque es una cuestión súper importante, es un contraejemplo que realmente hay que guardar en la cabeza, que en los polinomios, si no fijo el grado, me va a dar una cosa que es mucho más complicada que lo que imagino yo, y sirve para muchas cosas de topología, entonces, aunque este espacio parece realmente un espacio completo, porque es súper simple, el espacio de polinomios parece simple, pero no es completo.

20:24 Cita 20:24 [EEM8]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ contraejemplo

Contenido:

> Bueno, una de las metas del curso era hacer ejemplos y contraejemplo, el objetivo era pasar de ese nivel Barbie World al mundo abstracto. Ellos están acostumbrados a pensar de manera concreta entonces para dar el curso me pongo en la situación donde ellos reconocen cosas pero las tengo que llevar a lo abstracto, entonces, yo digo lo que es una métrica pensándola como el valor absoluto y hago un montón de ejemplos y demostraciones donde estoy copiando lo que pasa en R, pero haciendo eso [solo eso] ellos pueden pensar que lo que estoy haciendo es R, entonces tengo que poner contraejemplos para decir, mira lo que hice no es lo que piensas, lo que escribí es un lenguaje más abstracto que R y eso abre las puertas a que ellos se puedan dar cuenta que puede que hayan escrito cosas que son falsas. Cundo están más cómodos ahí les digo que lo que están pensando sirve para darte una idea, pero no es la verdad. Y el contraejemplo es para destruir algo que alguien esta construyendo, pero falso, pero yo justamente al principio los empujo a construir cosas y luego empezamos a destruir cosas. A veces ellos piensan que algo es cierto y cuando hacen el contraejemplo se dan cuenta que no es cierto y esta idea de lo que es cierto viene de lo que vieron antes, de lo que piensas y eso es algo que el profesor tiene que identificar bien para poner contraejemplos porque ellos hacen generalidades que no hay, pero también cómo profesor uno los empuja a hacer generalidades y entonces para afinar un poco las generalidades se hacen los contraejemplos.

20:28 Cita 20:28 [EEM10]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ contraejemplo

Contenido:

Bueno, los ejemplos y los contraejemplos, y tratar de entender profundamente los objetos, hacerlos familiares, no verlos como algo abstracto, de hecho le digo siempre a mi curso que cuando un matemático empieza a trabajar los objetos en abstracto ahí ya esta perdido, va a tener dificultades, la primera meta es hacerce los objetos de manera concreta, y ver los límites posibles, que puedo hacer y que no puedo hacer con ellos y justamente estan los contraejemplos, para entender la naturaleza del objeto. El objeto es lo que es, y el proceso de comprensión puede ser verlo con un

---

Métodos de demostración

○ Demostracion directa

71:19 Cita 71:19 [EM6.2.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ demostracion directa

Contenido:

Contexto del episodio: El profesor esta demostrando el teorema: Si f_n es continua y converge uniformemente hacia f, entonces f es continua. Antes de escribir la demostración desarrolla con los estudiantes una idea de la demostración que queda escrita en el tablero en la siguiente forma:

Idea:

$$|f(x)-f(a)| \leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{f_n\to f} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(a)|}_{continuidad} + \underbrace{|f_n(a)-f(a)|}_{f_n\to f}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, \forall x \in Dom f, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Juan: La idea aquí es usar una desigualdad triangular, pero poniendo varios términos en la desigualdad, entonces lo que queremos hacer, la idea es ver f de x menos f de a, ¿cierto? y minorar eso para x suficientemente cerca de a. Para hacer eso, vamos a introducir f_n de x, porque eso lo sabremos comparar a f de x. Vamos a introducir también f_n de x y f_n de a, y el tercer término es f_n de a menos f de a. Esto, por el hecho de que la función f_n converge hacia f y porque f_n es continua. Primero, yo voy a fijar un

73:2 Cita 73:2 [CV1.2]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ demostracion directa

Contenido:

Contexto del episodio: El profesor expone la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$. En el tablero la demostración queda escrita en la siguiente forma:
$0 \leq \|\vec{x}+t\vec{y}\|^2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}+t\vec{y}\|^2 =& (\|\vec{x}+t\vec{y}\|)\cdot(\|\vec{x}+t\vec{y}\|)\\ =& \|\vec{x}\|^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2\|\vec{y}\|^2\end{aligned}$$

$$f(t) = \|\vec{x}\|^2 + 2t\vec{x}\cdot\vec{y} + t^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Como $f(t) \leq 0$, $4(\vec{x}\cdot\vec{y}) - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^2 \leq 0$, por tanto, $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.
Andrés: La demostración es súper entretenida, de hecho, es la misma demostración que se hace después en análisis funcional, y tiene que ver con una parábola al final de cuentas. Es súper simple, miren. Uno sabe que la norma de cualquier vector es algo positivo ¿sí? ¿se acuerdan? es algo positivo o 0, entonces 0 siempre es más pequeño que si yo tomo la norma de x más t veces y al cuadrado. Hago esta combinación lineal, tomo x, y, construyo la combinación lineal x más t veces y, y esto siempre es positivo en 0, esto es para cualquier t de los números reales, para cualquiera, cualquiera, esto como es una norma al cuadrado esto siempre es mayor o igual a 0. Ok, desarrollemos esto en función del producto interno. Esta no es la misma demostración que hicimos para $\mathbb{R}^3$. Entonces, voy a desarrollar este tipo de acá, como es la norma al cuadrado, es igual al producto interno de x, más t veces y punto x más t veces y. Entonces x

73:11 Cita 73:11 [CV2.1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ demostracion directa

Contenido:

Andrés: es decir, r menos raíz de x_0 al cuadrado más y_0 al cuadrado. Ok, perfecto. Bien, entonces eso me va a generar un radio. Yo quiero mostrar ahora que cualquier punto ..., voy a construir la bola que está aquí. Entonces voy a decir, sea B igual al conjunto de los (x, y), que están en $\mathbb{R}^2$, tales que la distancia, es decir, la norma de (x, y), a (x_0, y_0), es menor estricta que r_0. Entonces para demostrar, que la A es abierta, yo tengo que demostrar... por demostrar que B es subconjunto de A, o sea que esta bola que construí ahí está totalmente contenida en el A ¿cómo se demuestra una inclusión de conjuntos? Todo un punto que está acá [en B] y demuestro que está acá [en A] ¿Ok? Entonces, sea (x, y), en B. Si está en B ¿qué propiedad cumple? La propiedad que define al conjunto B. Es decir, la norma de (x, y), menos (x_0, y_0) es menor estricto que el r_0 que es r menos raíz de x_0 al cuadrado más y_0 al cuadrado.

○ Contradicción

11:33 Cita 11:33 [AR1.5]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ contradicción

Contenido:

> ¿qué le podría sumar astutamente para llegar a una contradicción? Si él fuera racional le voy a sumar algo que sé que es irracional, que la suma me va a dar irracional.
>
> **Estudiante**: $-a$
>
> **Diego**: Le sumo $-a$, a es racional, $-a$ es racional y la suma me da z que debiera ser racional, pero z ya sé que es irracional, así que la suma $-a+a+z$ es irracional, no puede ser racional, listo, gane, se acabó.

11:39 Cita 11:39 [AR1.7]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ contradicción

Contenido:

> ...que es igual a $pr_0 - pr_0 + p$. Es p que es menor que ϵ, y por lo tanto es menor que la mitad de esta longitud [señala en el tablero $b-a$], entonces como puede ser que la longitud de este intervalo $(p(r_0 - 1), pr_0)$ sea mayor que la otra. Si estos son los extremos de los intervalos $pr_0 - 1$ y pr_0 que contiene al $[a, b]$ su longitud tiene que ser mayor, ¿no? ahí está la contradicción, entonces si el r_0p es mayor que b, entonces $r_0p - (r_0 - 1)p$ es mayor que $b - a$. Lo que estoy diciendo es que si ocurre pr_0 más grande que b, este intervalito $(p(r_0 - 1), pr_0)$ contiene al intervalo (a, b), por lo tanto su longitud tiene que ser mayor. ¿Cuál es la longitud de este? .... Pero esto ya lo calculamos, da p que es menor que ϵ, que es $b - a/2$, entonces como $b - a/2$ va a ser mayor que $b - a$. Contradicción. Entonces ahora pueden decirle a sus alumnos con propiedad que entre dos racionales siempre hay un irracional

72:34 Cita 72:34 [EED25]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ reduccion al absurdo

Contenido:

> proceso de razonamiento la demostración parte negando eso. Es decir medianamente estas sacrificando en el juego de la demostración, tú estás sacrificando toda tu partida porque en el fondo es lo que quieres demostrar. Ahora se admite ese tipo de argumento, antiguamente no era tan obvio que la gente aceptara ese tipo de argumentos. También tiene otro riesgo que puede no llevarte nunca a contradicción, no es cierto que siempre uno llega a contradicción y es lo que paso con la geometría y la demostración no se encontró, porque funciona bien cuando las proposiciones que tú quieres demostrar son decidibles que efectivamente se pueden probar. Puedes partir de una afirmación que no se puede probar y esa nunca va a llegar en contradicción es un tema nuevo porque en el fondo cuando tienes un axioma puedes tener la construcción matemática con el axioma descrito de una manera y tienes otra construcción matemática con la negación del axioma y ambas son válidas.

71:30 Cita 71:30 [EM1.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ reduccion al absurdo

Contenido:

> En el segundo caso tomamos x distinto a y, tenemos que demostrar que la parte de la derecha no puede ser cero. Mostremos que $d(x,z)+d(y,z)$ es distinto a 0, bueno, por el absurdo suponemos que $d(x,z)+d(y,z)=0$, lo quiere decir que los dos son iguales a cero, ahí me estoy dejando llevar por la demostración, entonces, obviamente $d(x,z)=0$ y $d(y,z)=0$ y la única cosa que puedo hacer con eso es usar la definición que dice que cuando vale cero [la distancia] entonces los puntos son iguales, entonces $x=z$, y $z=y$, ahí tienen una contradicción, $x=y$, esa es contradicción con x diferente a y.

71:8 Cita 71:8 [EM3.1.2]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ contradicción

Contenido:

Juan: El ejercicio es tratar de demostrar la proposición en $\mathbb{R}^2$, empezar en $\mathbb{R}^2$ y después preguntarse si eso se puede escribir con la métrica, generalmente lo que se usa es la desigualdad triangular y por contradicción mirar que pasa si las dos bolas se juntan. Entonces, suponemos que existe x en la intersección [$\exists x \in B(a,r) \cap B(b,s)$] ¿ok? Ahora tengo que escribir eso con métricas, $d(a,b) \leq d(b,x) + d(x,a)$ ¿ok? Eso lo podemos escribir ¿cierto?, y aquí $d(b,x) < s$ y $d(a,x) < r$ entonces por desigualdad triangular $d(a,b)$ es inferior a $s + r$, contradicción.

73:5 Cita 73:5 [CV1.3.3]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ contradicción

Contenido:

Que x por y es igual cero. ¿Como lo puedo mostrar, cuando están desesperados y quieren hacer una demostración y no saben qué hacer, que hacen?
Estudiante 1: Hacer un dibujito.
Andrés: No, contradigan la tesis. ¿Qué significa contradecir o el absurdo aquí?
Estudiante: Suponer que x punto y es distinto de cero.

Entonces me va a quedar: dos x punto y mas t veces y [la norma de y] al cuadrado es menor o igual que cero [$2x \cdot y + t\|y\|^2 \leq 0$]. Si es negativo cambio la desigualdad, y esto es cierto para todo t negativo. ¿Que hago ahora? este número es positivo [$2x \cdot y$] y este número [$t\|y\|^2$] es negativo. Entonces el que esta haciendo negativo toda esta desigualdad, la suma completa, es un negativo, el que esta haciendo todo negativo es este término de acá [$t\|y\|^2$] , pero el t yo lo puedo dejar tan chico como yo quiera, este lo puedo hacer tender a cero [$t\|y\|^2$], y esto tiene que seguir siendo negativo [la desigualdad], cuál es la única manera en que esto ocurra si esto [$2x \cdot y$] es positivo. La única manera que esto pase, que siempre sea negativo, es que sea una contradicción y que, x punto y sea igual a cero. Entonces en la ortogonalidad que habíamos definido ahí, cumple que el x punto y sea cero. ¿Me puedo devolver o no? Negué que x punto

○ Induccion

72:33 Cita 72:33 [EED22]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ induccion

Contenido:

> **Diego**: Es que la inducción es la definición de los números naturales, tú cuando vas a hacer una demostración por inducción estas chequeando la definición de los naturales.
> **Entrevistadora**: Los naturales siempre sé que existe el siguiente.
> **Diego**: Porque los naturales son un conjunto que tiene ciertas propiedades, entonces tú tienes que chequearlas. Quiero demostrar que esto vale para todos los naturales, ósea quiero decir que todos los números que satisfacen esta propiedad, los naturales todos ellos satisfacen la propiedad ¿Cómo sé que esos son los naturales? Los naturales por definición el 1 tiene que estar y la otra propiedad que tienen que define a los naturales es que si un numero está [en el conjunto] implica que el siguiente está, entonces esas dos condiciones implican que todo ese conjunto deben ser los naturales, esa es la definición de los naturales. Entonces lo que uno hace es que chequea esa propiedad, definitoria en los naturales. Lo que estas chequeando cuando haces inducción es la definición de los naturales.

72:33 Cita 72:33 [EED22]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ induccion

> **Diego**: Recurrí a la inducción, lo que pasa es que la inducción no es sobre las matrices, nunca es en sobre un objeto que no sea un numero natural. Ese teorema si tú te fijas hace una afirmación sobre los naturales. Esto es una afirmación para todos los números naturales. Formalmente digo. ¿Cuál es el conjunto de los números N mayor igual que uno, tal que P por L por P a la menos 1 es igual a B? Entonces lo que quiero demostrar que esta propiedad vale para todos los naturales ósea que lo que quiero demostrar es que hay un conjunto S que es igual a $\mathbb{N}$. Lo que dice la propiedad de inducción es que si tengo un subconjunto de números naturales cualquiera, tal que 1 está en S y si n está en S implica que el sucesor está en S, entonces S tiene que ser igual a $\mathbb{N}$, no le queda otra. Este es uno de los axiomas que define a los naturales, hay unos elementos y hay un sucesor que hace que valga la propiedad de inducción. Entonces lo que he hecho acá es la propiedad de inducción.
> **Entrevistadora**: Claro, aunque el contexto sean las matrices lo que estoy haciendo es probando la propiedad sobre los naturales, no son los matrices.
> **Diego**: Exactamente y eso lo que permite cambiarte de distintos contextos, porque le da una propiedad que termina probando sobre los números naturales, no sobre el contexto que estás trabajando.

○ Contrareciproco

71:23 Cita 71:23 [EM5.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ contrareciproco

Contenido:

> Juan: Entonces lo que vamos a demostrar es que no B implica no A. Entonces ¿que es no B?, es que existe una sucesión x_n que converge a a, tal que $f(x_n)$ no converge hacia $f(a)$ [...] Ahora quiero decir que esta cosa $f : M \to N$ no va a ser continua ¿ok?, si f es continua, para todo ε positivo, existe δ positivo, tal que f de la bola de centro a y de radio δ está incluida en la bola de centro $f(a)$ y radio ε $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)]$, tenemos esto ¿cierto? eso quiere decir que voy a tener una sucesión de elementos que van dentro de la bola [$f(B(a,\delta))$] tal que las imágenes no están dentro de esta otra $[B(f(a),\varepsilon)]$ y eso es absurdo.

Tipos de demostraciones

○ Bicondicional

71:14 Cita 71:14 [EM1.3]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ bicondicional

Contenido:

> **Juan**: ¿Siguieron la parte lógica de la demostración? Queríamos demostrar que A es equivalente a B ¿cierto?, osea, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (aquí la distancia es el supremo y los puntos son funciones), lo que hemos mostrado es $B \to A$ en esta parte [$\forall x \in X$, si $f(x) = g(x)$ entonces $sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| = 0$] y acá en la última parte mostramos $A \to B$ [Si $sup_{x \in X}|f(x) - g(x)| = 0$ entonces $f \equiv g$] y hemos demostrado lo que queríamos. Entonces tenemos que tener la idea global de la demostración, la lógica de la demostración es lo más importante, más que los detalles es entender lo que tengo que hacer para demostrar la proposición.

71:31 Cita 71:31 [EM2.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ bicondicional

Contenido:

> elemento es igual a cero, entonces empecemos por una implicación, hagamos esta [$\leftarrow$], entonces, $\forall x \in X, f(x) = 0$ entonces $sup|f(x)| = 0$ es decir $\|f\|_\infty = 0$. Ahora así [$\rightarrow$] suponemos que la norma infinito de f es igual a 0 [$\|f\|_\infty = 0$] y en general tenemos una caracterización, una cuestión que es más simple que decir eso [que decir que la norma es igual a cero], es decir que, para cada x, $|f(x)|$ es negativo [$|f(x)| \leq 0$ o cero]. ¿Ok?

11:43 Cita 11:43 [EAR4]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ condición suficiente

Contenido:

> Tu tienes p implica q, una proposición de este estilo, p es una condición suficiente para q, y q es una condición necesaria para p, y cuando doy flecha p es necesaria y suficiente para q y q es necesaria y suficiente para p, por ejemplo si es derivable entonces es continua, ser derivable es suficiente para que una función sea continua pero puede ser continua sin ser derivable. Ahora ser continuo es necesario para que sea derivable pero no es suficiente. El que implica es suficiente el implicado es necesario. Por ejemplo, si es un número natural entonces es racional, ser racional no es suficiente para ser natural, pero al reves si, ser natural es suficiente para ser racional.

73:4 Cita 73:4 [CV1.3.2]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ bicondicional

Contenido:

> **Andrés**: x es ortogonal a y sí solo sí $x \cdot y$ es igual a cero. Es decir, el ángulo entre los dos, ya definí quien era el ángulo, es $\pi/2$. Y ahí esa definición de ángulo respetaría esta propiedad, pero vamos a ver si eso es cierto, si eso es consistente, ¿Cómo se demuestra un si y solo si?
>
> **Estudiantes**: Para un lado y para el otro.
>
> **Andrés**: Para un lado y para otro, super bien, pero si quieren ser más académicos, doble implicancia. Ya, ¿cuál es mas fácil mostrar, esa [$x \cdot y$ es igual a cero implica que son ortogonales] o esa [si son ortogonales $x \cdot y$ es igual a cero]? Yo creo que vamos a

73:17 Cita 73:17 [CV4.1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ condicion necesaria y suficiente

Contenido:

> condición necesaria, una función diferenciable tiene que ser continua, ahora les voy a dar una condición suficiente, pero no necesaria, solamente suficiente. Esta si sirve para demostrar que una función es diferenciable en un punto, la condición necesaria sirve para demostrar que no es diferenciable, porque si no es continua, ni a palos es diferenciable. Entonces, el teorema dice que si tengo una función de la cual existen las derivadas parciales y son continuas entonces puedo concluir que la función es diferenciable. Entonces el resumen de todas estas implicancias es f con derivadas parciales continuas implica f diferenciable y f diferenciable implica que existen las derivadas parciales y f es continua, entonces, si f es diferenciable entonces la f es continua y además tengo esta información, que existen las derivadas parciales.

73:18 Cita 73:18 [CV4.2]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ condicion necesaria y suficiente

Contenido:

> f prima es discontinua en x igual a cero. Entonces esto es un contra ejemplo. Tengo una f que es diferenciable, sin embargo, las derivadas parciales no son continuas, tengo una f que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Entonces puede darse este caso, que la puedo derivar, pero la derivada no es continua. Ya, pero como la f es diferenciable, las derivadas parciales existen, y la f es continua, esta implicancia funciona, pero de acá a acá no funciona. f es continua, existen derivadas parciales pero f no es diferenciable.

○ Existencia

11:31 Cita 11:31 [AR1.4.2]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

> **Diego**: Yo sé que raíz de dos no pertenece a los números racionales, eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero m, ¿raíz de dos dividido m va a seguir siendo racional o no?, lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este, [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional? Entonces lo que digo es lo siguiente, al menos uno de estos números tiene que estar en ese intervalo $(0, \varepsilon)$ Y hago la siguiente afirmación : Existe m en los naturales tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} < \varepsilon$. En efecto, fíjense que es casi igual que la propiedad arquimediana, si tomo la propiedad arquimediana para $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ existe m en los naturales tal que 0 es menor que $1/m$ y menor $\tilde{\varepsilon}$, y eso implica que $\frac{\sqrt{2}}{m} < \varepsilon$ y este bicharraco no pertenece a $\mathbb{Q}$. Así que entre 0 y ε por más chiquitico que sea ε, siempre hay un racional y siempre hay un irracional. Ok, entonces, vamos a escribir esto, esta afirmación que acabo de demostrar, la vamos a escribir como lema, ya, ósea es algo que lo vamos a utilizar un poquito más adelante, y está antes de la demostración.

11:41 Cita 11:41 [EAR3]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ existencia
○ construcción

Contenido:

> Yo cuando construyo algo lo doy explícitamente, ahora escoger un número es otra cosa, tu puedes saber que existe pero no te puedo decir cual es, hay un mínimo y tomo ese, ahí estoy escogiendo, lo construiría si te muestro como obtengo ese número por un proceso iterativo, algorítmico, una sucesión. En el caso de $\sqrt{2}/n$, ahí seleccione y construí, seleccioné $\sqrt{2}$ y construí $\sqrt{2}/n$, lo estoy exhibiendo explícitamente, ahí es constructivo porque tu puedes saber como obtener ese número. Ahí para probar el lema, cualquier irracional te sirve desde que sepas que es irracional.

11:52 Cita 11:52 [EAR8]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

> no te dice nada y la demostración te da una técnica para, por ejemplo, el teorema del punto fijo ...... el argumento para darle sustento a la afirmación, también te dice como encontrar el punto y ahí la demostración es más valiosa que el enunciado en realidad y así hay demostraciones porque te dan el algoritmo para generar, para calcular y los chicos no ven, no son capaces de distinguir si la demostración es meramente argumentativa o el valor esta en la demostración. Otro clásico es: Si una función es armónica de variable compleja, existe la armónica conjugada, entonces la demostración es constructiva que te da un algoritmo, te dice como encontrar la armónica conjugada.

72:31 Cita 72:31 [EED16]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ existencia
○ construcción

Contenido:

> cambio el teorema del punto fijo de banach te dice cómo encontrar ese punto fijo, no te dice cuál es pero te dice cómo encontrarlo. En cambio en el teorema de la función implícita, ni el teorema ni su demostración te dicen cómo encontrar esa función. Por eso los dos son teoremas de existencia pero de calidad super distintas. Porque en uno es el hecho de que existe y el otro te dice existe y se puede aproximar así. El teorema de punto fijo te dice existe y así se encuentra, toma el límite, y chao. Lo mismo pasa con el teorema de valor intermedio, dice que si tienes una función real en un intervalo cerrado donde en un lado es positivo y en el otro es negativo entonces entre medio tienes el 0 siempre, ahí hay un punto y además te dice cómo encontrar la raíz, dividir en dos si esta va arriba, y ahí hasta que encuentra la intersección del intervalo encuentras lo que andas buscando. Entonces el teorema existe en el cero de la función pero la demostración te dice cómo encontrar el 0 o uno al menos. Pero después el teorema del valor intermedio no dice nada, porque te dice que hay un punto, pero cuál es, no tienes idea. Lo que hace la demostración es tomar una función rara, girarla y después... entonces ya se perdió. Los dos son teoremas de existencia.

72:25 Cita 72:25 [ED2.1.1]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

> En la demostración, tomemos un punto cualquiera $x \in X$, entonces para n igual o mayor que 1 definamos x_n, la sucesión F compuesto con $F(x)$, n veces. A esa sucesión la voy a llamar la potencia F^n, $x_n = F \circ F \circ \cdots F(x) = F^n(x)$. [...] esa sucesión que construí, x_n es de Cauchy [...] entonces existe un número z_0 en X, tal que el límite cuando n es infinito de x_n es el punto z_0 [$lim_{n \to \infty} x_n = z_0$.] [...] Bien, ¿entonces el límite de $F(x_n)$ era el límite de $F(F^n(x))$ pero entonces esto que está aquí no es otra cosa que $F^{n+1}(x)$ y esto que está acá es el límite de x_{n+1}, pero si el límite de x_n es z_0 el límite de x_{n+1} es lo mismo, así que esto [$F(z_0)$] me queda igual a z_0. Así que z_0 es un punto fijo.

72:36 Cita 72:36 [EED20]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ existencia
○ negar existencia

Contenido:

> **Diego**: Cuando uno prueba la existencia una de las formas de probarlo es mostrar el objeto que necesita explícitamente, eso es cierto, pero muchas veces eso no es lo que ocurre, aveces tú no muestras la existencia del objeto explícitamente ¿Cómo sabes que existe raíz de dos?
> **Entrevistadora**: Tengo una demostración que ese número existe.
> **Diego**: No hay ninguna demostración. Lo que uno demuestra es que no puede haber en los reales un número que al cuadrado me de dos, eso es lo que tu demuestras, que lo sabía Euclides o Aristóteles, eso es muy viejo. Después demostrar que raíz de dos es real, es otra cosa. Que hay un número real que al cuadrado me da dos, eso es otra cosa y eso tú nunca dices cuál es el número, siempre hay un número que tiene esa propiedad. Hay existencias que son mucho más sutiles, por ejemplo: las raíces de una ecuación, todo polinomio de grado tres tiene las mismas raíces [tres] ¿Y cuáles son? No sé, no hay ninguna fórmula. De hecho, justamente el problema más antiguo era que no podíamos conseguir una formula general que te de todas las raíces, eso hoy día no se puede hacer. Hace rato sabemos que no se puede hacer, pero existe, tiene raíces ¿Y cuáles son? No sé, ese es otro problema.

72:37 Cita 72:37 [EED21]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

> **Diego**: Es que son dos cosas distintas, la existencia de un objeto matemático y que yo pueda decir quien es precisamente, muchas veces no puedo decir eso. Por ejemplo las ecuaciones, toda ecuación de grado 17 tiene una raíz ¿Puedes dar una fórmula para encontrar esa raíz real, en función de los coeficientes del problema? No puedes, pero sabes que existe. Entonces la existencia no tiene que ver con exhibir necesariamente al objeto, lo que se termina haciendo es que tu no exhibes el objeto, pero si exhibes como aproximar el objeto. Tú no sabes quién es raíz de dos, pero sabes cómo aproximar la raíz de dos. Tú no sabes cuál es la solución de una ecuación, pero sabes cómo aproximarlo. No exhibes el objeto propiamente tal, sino que exhibes aproximaciones cada vez mejores.

72:37 Cita 72:37 [EED27]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

a veces es más importante la demostración que el enunciado, justamente en estos teoremas de existencia, yo podría hablar de teoremas de existencia "esto es así" y sería pésimo porque el corazón del teorema es la demostración, porque la demostración no te dice cuál es la solución, sino que te dice como hace el algoritmo para aproximar la solución, todo los mitos numéricos no funcionan con el teorema, funcionan con la demostración del teorema, se hacen por la demostración del teorema, entonces esto de que hago la demostración o no la hago, es una discusión que se tiene que hacer desde el conocimiento matemático, no se puede hacer desde lo pedagógico. Porque las demostraciones pueden ser útiles y de hechos hay muchos casos, todos los teoremas de existencia donde no se ve el objeto explícitamente, lo que se está haciendo ahí es que típicamente hay un argumento de aproximación y eso está en la demostración por cómo se hace esa construcción aproximativa, entonces qué es más importante el teorema o la demostración.

71:10 Cita 71:10 [EM1.2]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ existencia

Contenido:

Juan: Bueno, el primer punto (de la definición de métrica) es el menos trivial, el menos fácil de todos, porque estamos tomando un *sup* y cuando uno toma un *sup* tiene que demostrar que existe, hay que tener cuidado con eso, porque, sino, ¿por qué estoy mirando funciones acotadas y por qué no cualquier función?, para el *sup* sirven las funciones acotadas... Entonces para ver el *sup* tengo que acotar este valor absoluto y tenemos $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ entonces, f va a ser inferior a una constante C para cada x, y g va a ser inferior a una constante C' para cada x, y todo esto [señala la desigualdad $|f(x)| + |g(x)|$] va a ser menor que $C + C'$ para cada x, entonces el conjunto de estos valores [$|f(x) - g(x)|$] esta acotado por una constante, entonces el *sup* existe [$sup_{x\in X}|f(x) - g(x)| \leq C + C'$]. Aclaro, esto no estaba escrito, pero para que un *sup* exista el conjunto tiene que ser acotado y no vacío, entonces recuerden que X debe ser diferente de vacío [$X \neq \emptyset$].

○ Unicidad

72:24 Cita 72:24 [ED2.1.2]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ Unicidad

Contenido:

> El teorema no termina ahí, además dice que es único. Supongamos que haya otro. Si z_1 distinto a z_0 es otro punto fijo de F. ¿Qué pasa? ¿Entonces cuánto vale la distancia de z_1 a z_0 ? Bueno, no sé, pero debe ser positiva, estrictamente positiva, porque son distintos. Entonces $F(z_1)$ es z_1, así que poner z_1 o $F(z_1)$ es lo mismo, porque son puntos fijos. Y poner z_0 o $F(z_0)$ es lo mismo. Pero esto, por ser una contracción la distancia $d(F(z_0), F(z_1))$ es más pequeño que la distancia $d(z_1, z_0)$. ¿Entonces cómo es que un número positivo es estrictamente más pequeño que él mismo? No puede ser, por lo tanto, z_0 es único.

72:27 Cita 72:27 [ED3.1]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ Unicidad

Contenido:

> **Diego**: Entonces vamos a hacer la demostración de la unicidad. Yo tengo que demostrar que la γ_1 de t y γ_2 de t son iguales en todo. Entonces, sean γ_1 de un intervalo I_1 en $\mathbb{R}^D$ y γ_2 de un intervalo I_2 en $\mathbb{R}^D$, soluciones del problema de valor inicial, vamos a dar 2 soluciones. Entonces, vamos a llamar J a los t en $I_1 \cap I_2$, tal que γ_1 de t es igual a γ_2 de t. Vamos a ver dónde coinciden estas dos soluciones. Entonces, J es distinto al vacío.

72:35 Cita 72:35 [EED19]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ Unicidad

Contenido:

> **Diego**: Depende de la unicidad que quieras demostrar, es decir, hay técnicas de demostración. La unicidad típicamente se demuestra por contradicción o suponiendo que hay dos y demuestras que son iguales, eso es como lo clásico. Ahora no se me ocurre ninguna otra manera. Yo diría que esa es la primera cosa que intentaría, o tú muestras

72:14 Cita 72:14 [EED5]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ Unicidad

Contenido:

lo fundamental es que en este caso, casi todas las ecuaciones corresponden a problemas físicos, entonces si la solución es única sabes que no son los movimientos posibles es el movimiento posible, no hay más. O sea tengo los planetas, la velocidad inicial, y por más complejos que se muevan, se van a mover de una única manera, no se van a mantener de dos maneras distintas. Tienes la temperatura, tienes la presión, tienes la humedad, y sabes que el clima va a comportarse de una única forma, no hay dos posibles porque si no nuestra capacidad se pierde.

Roles de la demostración

○ Verificación

11:30 Cita 11:30 [AR1.3]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ verificación

Contenido:

Diego: ¿Raíz de 2 es mayor o menor que 1?

Estudiante: Es mayor que 1

Diego: Ahora, pregunta ¿conozco algún número irracional que sea menor que 1?, y ¿mayor que 0?

Estudiante: La raíz de la raíz de 2

Diego: Ah y ¿porque es menor que 1? Hay que probar que existe, y espera, hay que probar que existe esa raíz y que es un número menor que uno, probar que la raíz existe y probar otra cosa porque no nos dijeron un número entre cero y uno, sino un numero irracional entre 0 y 1, entonces, tu puedes tomar un número real, probar que la raíz existe, pero todavía no sabes si es irracional o no.

11:54 Cita 11:54 [AR1.7]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ verificación

Contenido:
> que es $b - a/2$, entonces como $b - a/2$ va a ser mayor que $b - a$. Contradicción. Entonces ahora pueden decirle a sus alumnos con propiedad que entre dos racionales siempre hay un irracional

20:30 Cita 20:30 [EEM3]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ verificación

Contenido:
> Bueno hay diferentes papeles y motivaciones para hacer una demostración, de cierta manera cuando uno desarrolla una demostración, primero para los estudiantes por ejemplo los de pedagogía la demostración les enseña a manipular la lógica entonces ese es uno de los papeles de la demostración. También hay un papel científico, que bueno en este caso no es tanto, porque ya yo se que eso esta demostrado, entonces científicamente no hay ninguna motivación para hacerlo, pero uno tiene que hacer la demostración para asegurarse de que lo que uno esta diciendo es verdad por

○ **Conviccion**

11:53 Cita 11:53 [AR1.4.1]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ conviccion

Contenido:
> $\sqrt{2}$ yo sé que no pertenece a los racionales, lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un n número entero $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ¿va a seguir siendo racional o no? Así que $\sqrt{2}$ no es racional y $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ¿tampoco es?

20:31 Cita 20:31[EAR11]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ conviccion

Contenido:
> un conjunto infinito. Con los racionales les cuesta entender, así lo demuestres, pero que pasa, que ellos no ven por ejemplo, aunque tu se los muestres que los reales no son numerables, no te entienden, ellos pueden seguir la demostración, cachar [darse cuenta] que hay una contradicción pero a pesar de eso, siguen pensando que los reales se pueden poner en correspondencia con los racionales, ahí hay una situación media extraña... El

74:38 Cita 74:38 [EED27]

En documento:
74 EDO_revisado.pdf

Codificando:
○ conviccion

Contenido:
> demostraciones. Hay como una idea de convencer al otro de que lo que le estoy diciendo tiene sentido, de que no lo estoy engañando con lo que le estoy diciendo, hay una idea de convencimiento ahí. Depende de la audiencia y para quien estas comunicando, así de general

73:10 Cita 73:10 [ECV14]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ conviccion

Contenido:
> mostrarles varias cosas de las demostraciones. A parte, yo como estudiante, yo estudie ingeniería y no me gustaba que el profesor no explicara el porqué de las cosas, quizás eso me motivo a las cambiarme después a las matemáticas yo siempre fui crítico de eso y me gusta hacer las demostraciones, siento que si no lo hago soy mal profesor. Y para los que van a ser profesores, siento que la mejor manera de explicar, para mí, es cuando tu estas realmente convencido de que la cosa es cierta y uno se convence de algo cuando conoce la demostración sabes porque es, es como que uno después explica las cosas con propiedad porque sabe como esta funcionando la matemática interna, es llegar al fondo de las cosas al final, cuando sabes cómo funciona la estructura lo explicas con mayor propiedad.

○ **Explicación**

11:50 Cita 11:50 [EAR9]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Codificando:
○ explicación

Contenido:

> La afirmación matemática siempre tiene que estar sustentada por la demostración, pero probablemente era porque estaba haciendo clases en pedagogía, lo que pasa es que en ese curso especialmente que es de análisis en la recta si tengo cuidado de mostrarle a los estudiantes que hay un montón de cosas que sus profesores les enseñaron y ellos las aprendieron como loritos; entre dos racionales hay un irracional, π es irracional, e es irracional; pero, ¿por qué?, ¿cuál es la demostración de que π es irracional? Claro porque ellos aprenden, tienen un montón de conocimientos que se muestran como verdades establecidas, entonces en algún minuto hay que ver que detrás hay un argumento.

20:31 Cita 20:31[EEM3]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf

Codificando:
○ explicación

Contenido:

> eso también hay un papel de explicación, se trata de decir porque lo que afirmamos es verdad y que todo el mundo entienda la misma cosa. Es que cuando uno hace la demostración es cuando uno empieza a entender los objetos más profundamente porque hay cosas que parecen obvias, pero después cuando uno desarrolla la demostración ve que hay muchos detalles y quizás lo que parecía obvio no era obvio, y ahí se entiende que los objetos tienen detalles escondidos. Muchos

Definir

Construcción de definiciones

○ **Extensión**

73:1 Cita 73:31 [CV1.1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ extender-definicion

Contenido:

Andrés: Es fácil imaginarse hasta $\mathbb{R}^3$, que pueda existir un ángulo entre dos vectores ¿no es cierto? Dos vectores, uno para allá, otro para allá, y tengo el ángulo que forman los dos. Puede ser así, puede ser asá [lo indica con las manos]. ¿Qué pasa en $\mathbb{R}^4$? ¿puedo extender ese concepto?, ¿puedo entender lo que es un ángulo [en $\mathbb{R}^4$]?. Entonces, ¿cómo puedo definir el ángulo entre dos vectores cuando ya estoy en $\mathbb{R}^n$? Esta claro que yo ya no puedo visualizarlo, en los otros [espacios] yo puedo ver y puedo dar indicio de qué significa. Entonces, ¿qué significa ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$? ¿cómo creen que pueden definir eso? teniendo cero intuiciones geométricas... Cero intuiciones geométricas, ya no puedo ver lo que pasa. ¿Cómo defino el ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^4$? Con el producto punto, ¿cómo sería? Ya, voy a tomar dos vectores x punto y, ahora ¿qué le hago? Cuando estaba en $\mathbb{R}^3$, demostramos que el producto punto tiene una interpretación con el ángulo ¿ya? Ahora es un poco al revés, yo no tengo noción de ángulo, cuando estoy en $\mathbb{R}^4$ o en $\mathbb{R}^n$. Entonces qué voy a hacer, voy a extender la fórmula que ya tenía en el producto punto, eso ya me da una noción de ángulo. ¿Cómo extiendo esa fórmula? Tienen la formula por ahí, tiene que estar en el cuaderno, tres clases atrás.
Estudiante: Con la norma y el producto punto, ahí sale
Andrés: Estoy de acuerdo, yo quiero definir θ igual a qué ..., x punto y, dividido la norma de x por la norma de y, y el coseno a la menos uno. Ok, esa es una definición. Yo no me puedo imaginar un ángulo, qué es lo que es un ángulo de $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, pero puedo extender la definición que tenía para $\mathbb{R}^2$ y para $\mathbb{R}^3$. Es cierto, digo bueno, el ángulo es el coseno a la menos uno de eso. ¿Está bien definido, o no? ¿Está bien definido?, eso es super importante... ¿qué significa que este objeto esté bien definido?

73:22 Cita 73:22 [ECV7]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ extender-definicion

Contenido:

Claro porque ahí tú te puedes ir a cualquier dimensión, pero pierdes la intuición geométrica, sin embargo, existe una definición de ese concepto, del producto interno que la extiende a otras dimensiones y se extiende porque eso te da una propiedad que es súper importante en cualquier dimensión incluso en dimensiones infinitas que te sirven para calcular distancias, por ejemplo, para calcular el tipo que mejor se aproxima en un cierto conjunto. Dado un conjunto tengo alguien fuera del conjunto, cómo cálculo la distancia mínima de este tipo que está afuera a este conjunto que esta acá, eso tiene que ver mucho con el producto punto en espacios con producto interno, espacios de Hilbert, en muchos espacios y ahí también trato de hacer un link con el curso que dicto después, el curso de análisis funcional, donde extendemos todas estas nociones incluso a dimensión infinita. Tú puedes hablar de ángulos entre vectores en dimensión infinita

73:23 Cita 73:23 [ECV8]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ extender-definicion

Contenido:

> digo, esta definición que esta ahí, esto que lo puedo definir así, calza con la definición en 2d, calza con la definición en 3d, pero es válida para n dimensiones. No me lo sé imaginar, simplemente es válido y lo que me garantiza que eso sea valido, que eso sea un número que corresponda a un ángulo, es la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La desigualdad de Cauchy-Schwarz me permite extender mi definición de ángulo a más dimensiones, eso es lo que quería decir, porque la desigualdad es válida para n dimensiones y me permite extender la formula. Es que cuando tu defines un ángulo en dos o tres dimensiones lo haces de una manera que es válida solamente para ese tipo de dimensiones, pero esta desigualdad te permite hacer la extensión porque ella es válida para n dimensiones y esta definición es consistente, por ejemplo, porque esta definición

---

Características de la definicion

○ No ambiguedad

72:17 Cita 72:17 [EED12]

En documento:
72 EDO.pdf
○ no ambigüedad

Contenido:

> **Diego**: Es que cuando tu estableces esa categoría y quieres llamar a los elementos de una manera así, y que lo vas a hacer recurrentemente, entonces inventas una definición y dices que este objeto lo voy a llamar tanto y sí satisface estas condiciones, porque si no tendría que poner a cada rato las condiciones. Por ejemplo, un número primo, un

72:18 Cita 72:18 [EED13]

En documento:
72 EDO.pdf
○ no ambigüedad

Contenido:

> **Diego**: Es que la definición es establecer un conjunto de cosas, un conjunto. Uno se refiere a ese conjunto con cierto nombre, y a los elementos de ese conjunto con cierto nombre. Pero son elementos que están dentro de otra cosa, no sé, números, son otros objetos matemáticos dependiendo de la teoría en la que está. El cero es natural o no es

73:19 Cita 73:19 [ECV1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ no ambigüedad

Contenido:

> él. Cuando uno escribe un artículo, uno está escribiendo un teorema y de repente tú usas un objeto matemático y te das cuenta que hay que definirlo, entonces eso es un ejercicio al cuál uno está sometido contantemente. Se define para que no quede ambigüedad al respecto.

73:20 Cita 73:20 [ECV2]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ no contradiccion
○ no ambigüedad

Contenido:

> Para mí una definición de un objeto matemático es identificarlo de manera que no quede ambigüedad al respecto, lo identifico como algo y que yo no pueda decir, pero mira, existe este otro que también es esto, no deben quedar cabos sueltos. Que no pueda venir otra persona y decirme, mira, el objeto que estas definiendo no puede existir porque es contradictorio esto, con esto, o que sea lo suficientemente específico, bueno hay definiciones de cosas generales, pero que sea específico para poder trabajar con él y sacarle propiedades después. Es identificar algo de manera precisa y sin ambigüedades, es eso y no puede ser otra cosa.

○ Equivalencia

72:22 Cita 72:22 [EED17]

En documento:
72 EDO.pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

> **Diego**: Bueno, lo que pasa es que ponen definiciones distintas por varias razones. Una es porque la comunidad no se ha puesto de acuerdo en cuál es la definición, y eso es super usual, es un proceso que se va dando con el tiempo hasta que un concepto se cómo opera, la matemática madura un concepto. Lo que hablábamos antes es que cada uno define, en principio puede definir cualquier cosa, y que en general la definiciones que uno usa son funcionales a lo que uno quiere comunicar, eso también lo habíamos visto. Lo otro es que pueden haber distintas definiciones dependiendo de la aproximación que haga del objeto matemático, en el ejemplo que tú me diste son tres aproximaciones distintas de algo. Las definiciones son equivalentes, pero en realidad no es que uno diga: bueno voy a definir. Uno ve cuál de esas definiciones utiliza.

71:6 Cita 71:6 [EM7.2]

En documento:
71 EM.pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

> **Contexto**: El profesor presenta una forma equivalente de escribir la definición de sucesión de Cauchy : $\forall \varepsilon$, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 0$, $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$
> **Juan**: La definición de sucesión de Cauchy se reformula de la siguiente manera, para todo épsilon positivo, existe n positivo, tal que para todo n mayor que N, y aquí cambia un poco la formulación, para todo p positivo, la distancia de x_n a x_{n+p} inferior a épsilon. Esta es la misma solo que tengo un p positivo, y cambio el m, m lo pongo igual a $n + p$. Esta la pongo porque es muy útil, y a veces en la literatura se usa esta definición como definición de sucesión de Cauchy en vez de la otra, es más fácil usar esta que la otra en algunas demostraciones, pero claramente dicen la misma cosa.

71:29 Cita 71:29 [EEM4]

En documento:
71 EM.pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

> Por ejemplo yo hice una tesis donde había muy pocas demostraciones pero muchas definiciones de objetos y luego me di cuenta que cambiando las definiciones las demostraciones salían más fáciles y justamente cuando uno define un objeto hay muchas maneras de escribir la definición del objeto y al realizar las demostraciones uno se da cuenta que quizás puede poner una definición equivalente por la cual la demostración va a ser mucho más simple y eso justamente era lo que decía sobre entender el objeto porque uno se da cuenta que cuando uno realiza la demostración entiende como debe pensar el objeto.

73:7 Cita 73:7 [CV1.3.1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

> **Andrés**: Entonces , ¿será que esa definición de ortogonalidad es equivalente a que x punto y es igual a cero?, veamos. Entonces x es ortogonal a y sí solo sí $x \cdot y$ vale cero y por lo tanto, si $x \cdot y$ vale cero, ¿cuánto vale el ángulo?, ¿cuál es el coseno a la menos uno de cero?
> **Estudiante**: $\pi/2$
> **Andrés**: x es ortogonal a y sí solo sí $x \cdot y$ es igual a cero. Es decir, el ángulo entre los dos, ya definí quien era el ángulo, es $\pi/2$. Y ahí esa definición de ángulo respetaría esta propiedad, pero vamos a ver si eso es cierto, si eso es consistente, ¿Cómo se demuestra

73:14 Cita 73:14 [CV2.3]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

Contexto del episodio: El profesor expone la definición de límite en términos de épsilon y delta y hace una relación con la definición que había presentado antes en términos de vecindades. En el tablero queda escrito lo siguiente :
$lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{b}, \Leftrightarrow \forall V$, vecindad de $\vec{b}$, $\exists U$, vecindad de $\vec{x_0}$, tal que $f(U \cap A) \subseteq V$.
$lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, si $\vec{x} \in A$, $\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta$, $\rightarrow$, $\|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$.
Andrés: Entonces diremos que limite cuando x tiende a x_0, de f de x es igual a b, sí solo sí, para todo épsilon mayor que cero, ese para todo épsilon mayor que cero me esta diciendo para cualquier vecindad V de b, para bolas en torno a b tan pequeñas como yo lo desee. Existe un delta mayor que cero, ahí voy a decir que existe una vecindad U de x_0 en el dominio, tal que, si x pertenece al dominio, y la norma de x menos el x_0 es menor que delta. Aquí estoy diciendo, si el x pertenece al A y su norma es menor que el delta significa que x pertenece a la vecindad $U \cap A$, entonces la distancia de f de x a b es mas chica que épsilon. Lo que estoy diciendo acá es lo siguiente. Tomo el b, me construyo una bola de radio épsilon en torno al b y acá esta el x_0, el x_0 puede o no estar en el dominio. La gracia es que si el x esta en el A, si el x esta en el conjunto A y su distancia de x_0 es menor que delta, entonces bajo la función tengo que ir a parar acá, es decir, f de x menos b tiene que ser menor estricto que esto. El f de x tiene que estar dentro de esa bola [una bola de radio épsilon]. Es la misma definición que esta acá, pero con objetos matemáticos que puedo manipular, vamos a ver como se usa. Entonces para todo épsilon mayor que cero, para cualquier vecindad del b, por muy pequeña que sea, puede ser así o asa. Siempre va a existir un delta mayor que cero, una vecindad del x_0 acá, tal que cuando yo la intersecto con el A, o sea si el x esta en A y en la bola de centro delta, la imagen de ese x tiene que ir a parar a la bola de allá [una bola de épsilon].

73:24 Cita 73:24 [ECV8]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ eqivalencia-definicion

Contenido:
para n dimensiones y esta definición es consistente, por ejemplo, porque esta definición de ángulo calza con el concepto de ortogonalidad. La ortogonalidad es algo que está bien definido incluso en dimensión infinita y se define como que dos vectores son ortogonales cuando x punto y vale cero, además, uno tiene la noción de que algo es ortogonal cuando hay perpendicularidad y efectivamente si tu ocupas esta definición de ángulo con coseno a la menos uno de x punto y dividido con ..., entonces te das cuenta que cuando x punto y es cero, vas a recuperar que el ángulo entre ellos es pi medio y que hay perpendicularidad, entonces calza en todo sentido la definición de ángulo. Si, yo creo que es eso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es algo que esta definido de manera n-dimensional y nos permite extender la definición de ángulo a n dimensiones.

○ Elegancia

71:22 Cita 71:22 [EM4.4]

En documento:
71 EM.pdf
○ elegancia-definicion

Contenido:

> **Juan**: Hay varias maneras de hacerlo eso es cierto pero en algún momento vas a tener que decir que aparte de cero, no tienes otro punto de acumulación, para hacer lo que dices tu ¿cómo demuestras que los otros puntos no son puntos de acumulación? porque siempre va a haber una bola alrededor de cero, y cuando sacas la bola vas a tener que hacer todo esto ... más o menos es la misma demostración. Hay muchas maneras de demostrar este problema, hay varias soluciones pero en algún momento hay que hacer esto de tomar un punto afuera o lejos de cero,..., pero esta demostración es la más linda porque estoy demostrando usando las definiciones, un cerrado es un conjunto que el complemento es abierto y así la demostración es más simple.

71:28 Cita 71:28 [EM4.5]

En documento:
71 EM.pdf
○ elegancia-definicion
○ eqivalencia-definicion

Contenido:

> **Juan**: Me di cuenta que ustedes muchas veces tratan de cambiar las definiciones, por ejemplo, habíamos dicho que $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)$, eso lo vimos, pero esa no es la definición de $\overline{A}$ y aveces es más complicado utilizar eso que la definición, eso se utiliza si no logro hacerlo con la definición, $\overline{A}$ es el conjunto de los x, tal que, para todo radio positivo la bola de centro x y radio r intersectado con A me da el conjunto vacío y esta definición $[\overline{A} = \{x/\forall r > 0, B(x,r) \cap A\} = \emptyset]$ es mucho más fácil de utilizar, de hecho, si ven en algunos libros, la definición de $\overline{A}$ no es esta, sino que se define como el cerrado más pequeño que contiene a A, esta es una definición general, pero esa definición .. para utilizarla! por eso yo trato de darles una definición que sea la más útil, que les sirva, esa definición general por supuesto la mostré porque ustedes tienen que conocerla, pero si doy esta definición es para ayudarles y de hecho si ven una demostración con esta $[\overline{A} = \{x/\forall r > 0, B(x,r) \cap A\} = \emptyset]$ es más fácil que con la otra $[\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup Fr(A)]$.

Resolver problemas

Estrategias heurísticas

○ Casos

72:4 Cita 72:4 [ED1.1]

En documento:
72 EDO.pdf
○ caso_rp

Contenido:

> **Diego**: Entonces habíamos hecho una separación de variables y la solución era $ln|\dfrac{x-1}{x}| = t+c$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. Entonces esas son las soluciones y la tarea era ver que pasaba con ellas, porque con esto no sabemos cuál es el comportamiento de la solución y lo que hay que hacer es, ¡Aah!, hay que ver caso por caso. Entonces, caso 1, x mayor que 1. Entonces en ese caso ese cociente que está aquí, x menos 1, que es positivo, dividido por x que es positivo, es mayor que cero. Y por lo tanto esto [señala $ln|\frac{x-1}{x}|$] es igual a t más una constante. Ahora exponenciamos, pero tenemos que x menos 1 partido por x es igual a una constante c_1, por e elevado a la t. ¿Está bien esto? Entonces factorizo x factor de 1, menos c_1 elevado a t nos da 1, entonces queda x es igual a 1 partido por $1-c_1e^t$ ¿Sí? Esa es la solución, implícita, ¿por qué? Porque recuerden que la solución de esto [de la ecuación $x' = x(x-1)$] es una función γ que va desde el intervalo a, b en $\mathbb{R}$, ¿sí?, tal que satisface que, $\gamma'(t)$ tiene que ser igual a $\gamma(t)(\gamma(t)-1)$. Eso es lo que habíamos dicho que era la solución, bueno, aparte de las condiciones de a y b. Entonces, no sé cuál es el x de t, no sé cuál es. Bueno y ¿cómo se calcula esa constante c_1? En este caso, cuando t vale 0, tengo $x(0)$ menos 1 partido por $x(0)$ igual a c_1. Esa es la constante. Bueno, lo que quiero decir es lo siguiente, para poder analizar que pasa con la población primero hay que calcular la solución implícita, ver la relación que tiene con la constante y ahí uno puede hacer un análisis tal cual uno lo hace en Cálculo 1. Vamos a hacer otros casos. ¿Qué pasa con $0 < x < 1$? y ¿Qué pasa en el caso $x < 0$?

72:7 Cita 72:7 [EED2]

En documento:
72 EDO.pdf
○ caso_rp

Contenido:

Diego: Es que depende de lo que tomes, pero hay veces que no es fácil agrupar todos. O sea si tú quieres hacer una ecuación para todos los elementos dentro del conjunto, pero a veces no puedes tratarlos todos por igual. Porque los elementos dentro de ese conjunto pueden tener propiedades distintas o pueden tener propiedades que en algunos casos te ayudan o te dificultan más una prueba. No sé, busquemos la solución de la raíz de una

20:26 Cita 20:26 [EEM9]

En documento:
20 Entrevista1_EM.pdf
○ caso_rp

Contenido:

[20:10-22:30] ¿Cuándo y por qué se recurre a la consideración de casos para resolver un problema o hacer una demostración?
Los casos se usan cuando tratas de demostrar algo de alguna manera y vez que la idea general funciona pero hay detalles que no funcionan entonces se toman los casos, eso se hace cuando tengo un problema y trato de decir algo pero veo que no siempre es verdad, entonces este caso digo como se puedo hacer y después donde no es verdadero eso es otro caso. La aparición de los casos viene naturalmente cuando trato de resolver un problema pero la estrategia que saque no funciona en general, pero normalmente si el objeto esta bien escrito todo junto funciona sin hacer excepciones.

73:25 Cita 73:25 [ECV12]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf
○ caso_rp

Contenido:

lo que sí es importante es escribir un algoritmo que pueda ser llevado a una máquina, en eso los casos son importantes, y mi formación computacional me lleva a hacer las cosas en casos porque en el computador siempre tienes que hacer eso, mira si el x está aquí o acá pasa una situación matemática completamente distinta, entonces a veces hasta tienes que ocupar una técnica distinta, por ejemplo, si estas analizando máximos y mínimos, es una técnica distinta buscarlos en el interior o buscarlos en la frontera, en una se ocupa derivar e igualar a cero y en el otro se ocupan multiplicadores de Lagrange.

○ Reformular un problema

74:1 Cita 74:1 [ED4.1]

En documento:
74 EDO_revisado.pdf
○ cambiar un problema

Contenido:

¿Cuál es el espíritu del teorema? Si x es regular entonces puedo decir como es localmente. ¿Acá qué que dice el teorema? Dice que si tengo una singularidad en algunos casos localmente cerca del punto estacionario este va a ser conjugado al flujo de la parte lineal. ¿Cierto? Estoy cambiando el problema, de un problema que es no lineal en un campo de vectores por un problema que se resuelve con matrices, ¿ya?. Ahora, no saco nada con cambiar el problema si no sé cómo se resuelven las flaquezas. O sea, te cambio algo que no sé resolver por otra cosa que no sé resolver. ¿Cuál fue la ganancia? Ninguna. ¿No? Acá teníamos algo que no sabíamos cómo era y lo cambiamos por algo que sabemos cómo es. Entonces hay 2 problemas que tenemos que abordar... el primer problema es cómo son los puntos lineales. Lo primero es intentar describir si A es una transformación lineal de $\mathbb{R}^D$ en $\mathbb{R}^D$, ¿sí?, si es lineal es posible estudiar x' igual a Ax. Si puedo decir algo ahí, entonces puedo decir algo allá [en el teorema]. ¿Sí? Y después, 2, es que de repente en una de esas, si estudio eso voy a poder decir: ¡Ah!, es que cuando pasa que en el flujo lineal se comporta de una manera decente, tal vez esa es la condición técnica que me sirve para que, en el caso no lineal también se comporte... ¿Se entiende la idea? O sea, si yo tengo, por ejemplo, bueno, ustedes ya han estudiado esto. Por ejemplo, ¿cuál es la condición técnica para que haya inversa local en una función cualquiera?

72:9 Cita 72:9 [EED2]

En documento:
72 EDO.pdf
○ cambiar un problema

Contenido:

Diego: Claro, pero ahí podrías hacerlo para 0,1, pero lo que uno debería hacer es explicar por qué es suficiente hacerlo para 0,1. ¿Eso es un caso?, no sé a lo que le llamas un caso. Eso es como reducir un problema grande a un problema que puedes manejar. Pero puedes hacer esas reducciones pero tienes que explicar bien por qué puedes hacer esa reducción. O sea que entre los intervalos 5, 7 es lo mismo, o que el intervalo 0, 1/2, o que -1, -10,

72:11 Cita 72:11 [EED4]

En documento:
72 EDO.pdf
○ cambiar un problema

Contenido:

> **Diego**: Una de las cosas que hacemos en matemáticas es tratar de transformar un problema en otro, a veces pasa que, es super usual en matemática, que transformas un problema que puede tener alguna dificultad intrínseca en otro problema que si tienes más herramientas para resolver, y a veces esas herramientas son mucho más abstractas. A veces tienes una ecuación diferencial en términos de n, o $r2$, y te paso un problema de punto fijo, es más fácil el problema, pero el operador, ya no está en r o en n, está en un espacio de Banach, una cosa mucho más compleja. Ganas simplicidad, o sea el problema es más simple en un contexto más complejo, siempre ganas y pierdes, siempre todo suma 0. Lo mismo por ejemplo, cuando decíamos que vamos a ver solo las ecuaciones de primer orden porque la ecuación de segundo orden se reduce a la primera. Se reduce, pero tienes que aumentar la dimensión, entonces perdiste ... o sea tenías un problema más simple por una parte pero perdiste... Es medio así, tienes un montón de ejemplos matemáticos donde puedes tomar un problema, reducirlo a lo conocido o a algo más fácil, pero siempre vas a tener que pagar un costo, y ese costo es que se dificulte otra cosa, puede ser la dimensión o qué sé yo.

○ Elemento auxiliar

72:29 Cita 72:29 [EED7]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ elemento_auxiliar

Contenido:

> **Diego**: No sé. No sé en qué momento uno pasa... Yo recuerdo cuando estaba en primer año, el tipo sumaba un 0, cómo sabe cuál es el 0 o el 1 que hay que sumar, y después en algún minuto, no sé cómo, por arte de magia, pasa a ser de lo más natural. En la medida que se vaya practicando. No sé, yo no sé cómo se hace eso. Pero es lo mismo que pasa en geometría, que es exactamente lo mismo, vamos a poner este puntito y este segmento auxiliar, y listo, y ahí se acabó, resolvió el problema, cómo se le ocurrió, no sé, pero lo haces tantas veces. Después tu miras el problema dices "tiro esta recta y...".

72:30 Cita 72:30 [EED7]

En documento:
72 EDO.pdf

Codificando:
○ elemento_auxiliar

Contenido:

un punto de la recta, lo que queda seguiría siendo homomorfo... Supongamos que el cero va al origen, saco el 0 y saco la imagen por el homorfismo que es el origen. Pero acá me quedan dos intervalos, 0 con infinito, que ese conjunto no es conexo, pero el plano menos un punto sigue siendo conexo, no se puede separar. Eso significa que esos dos puntos no son homomorfos porque tienen un conexo que va al mismo conexo y por lo tanto lo otro tampoco puede ser.

Entrevistadora: En ese ejemplo está quitando.

Diego: Quitas cosas, ahí dices "quiero resolver, y qué hago para resolver, quito, no sumo". Hay veces que sumas y otras veces que quitas.

71:33 Cita 71:33 [EM6.1.1]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ elemento_auxiliar

Contenido:

Idea:

$$|f(x)-f(a)| \leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{f_n\to f} + \underbrace{|f_n(x)-f_n(a)|}_{continuidad} + \underbrace{|f_n(a)-f(a)|}_{f_n\to f}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, \forall x \in Dom f, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Juan: La idea aquí es usar una desigualdad triangular, pero poniendo varios términos en la desigualdad, entonces lo que queremos hacer, la idea es ver f de x menos f de a, ¿cierto? y minorar eso para x suficientemente cerca de a. Para hacer eso, vamos a introducir f_n de x, porque eso lo sabremos comparar a f de x. Vamos a introducir también f_n de x y f_n de a, y el tercer término es f_n de a menos f de a. Esto, por el hecho de que la función f_n converge hacia f y porque f_n es continua. Primero, yo voy a fijar un

73:27 Cita 73:27 [CV3.1]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ elemento_auxiliar

Contenido:

> cuando este $\sqrt{x^2+y^2}$ es mas chico que un delta, eso es lo que quiero demostrar. ¿Qué herramientas tengo?, ¿cómo lo puedo hacer?, ¿el módulo de x a quien es menor o igual? El módulo de x, ¿cuál es?
> **Estudiante**: Raíz de x cuadrado.
> **Andrés**: Raíz de x cuadrado. ¿Este número de acá [$\sqrt{x^2}$] es más chico que este número de acá [$\sqrt{x^2+y^2}$]?
> **Estudiantes**: Sí.
> **Andrés**: Bueno, entonces lo uso, esto mas chico que x cuadrado mas y cuadrado [$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$]. ¿Qué pasa si ahora multiplico todo esto por modulo de x? Voy a obtener: modulo de x por módulo de x es x cuadrado, va a ser menor o igual a modulo de x por la raíz de x cuadrado más y cuadrado. ¿De qué me sirve eso?, me sirve para decir que x al cuadrado partido por la raíz de x cuadrado mas y cuadrado, que es lo que yo quiero acotar, es menor o igual que el modulo de x. Y el módulo de x yo se que es mas chico que la raíz de x cuadrado más y cuadrado, $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ¿si o no?

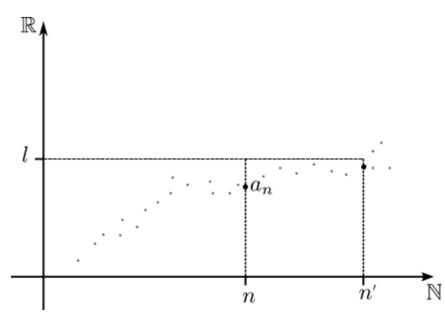
○ Diagramas

71:12 Cita 71:12 [EM7.3]

En documento:
71 EM.pdf
○ usar_diagrama

Contenido:

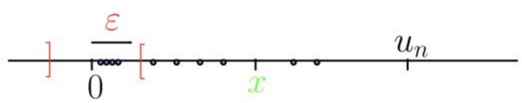
> Ahora miremos lo que estamos haciendo. Tenemos una sucesión que es de Cauchy, entonces nosotros vamos a demostrar que converge. Aquí pongo $\mathbb{R}$, aquí $\mathbb{N}$, aquí tengo un límite que existe, y tengo la sucesión acá. Lo que estoy haciendo, es que tomo un n particular, acá, y estoy mirando el inf que va a ser el a_n. Este a_n no va a ser el límite, pero si tomo n, cuando este n va a ser más grande, ese n va a acercarse al límite, ¿ok? ... Entonces, la intuición es que a_n converge, ahí está lo que vamos a demostrar.



71:11 Cita 71:11 [EM4.3]

En documento:
71 EM.pdf
○ usar_diagrama

Contenido:

> Entonces el dibujo es así, tengo mi cero acá, tengo mi sucesión, ahora tomo un punto x en el complemento y sabiendo que la sucesión converge a cero, yo sé que tengo una infinidad de puntos que van a estar cerca de cero ¿ok? ... así, sea un ε aquí [cerca de 0], tal que x no pertenece a esto [al intervalo alrededor de ε] y cuando borro este vecindario yo tengo cosas más lindas.
>
> 
>
>
> Sea ε positivo, tal que la distancia entre x y 0 es mayor a ε, para estar seguros de estar lejos ¿ok? [Sea $\varepsilon > 0, |x - 0| > \varepsilon$] Sabemos que existe N, tal que para todo $n > N$, $|u_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Una observación importante es que x no pertenece al segmento $[-\varepsilon, \varepsilon]$ y este dibujo lo puedo dibujar de manera mucho más simple. Yo tengo vecindario acá [en color rojo], después tengo mi sucesión acá, es como una infinitud de puntos [azules], el resto queda acá [el resto de los puntos de la sucesión queda en el intervalo] y yo quiero encontrar una bola en un x [en verde] que no pertenezca ni al rojo ni a los puntos azules.
>
> 

Papel del lenguaje matemático

Uso de los símbolos

71:5 Cita 71:5 [EM6.2.2]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ selección

Contenido:

> **Juan**: El ejercicio es demostrar que esta proposición es verdad y lo que queremos demostrar es la continuidad, entonces voy a escribir la definición de continuidad: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x,a) < \delta \rightarrow d_i(\Pi_i(x,a)) \leq \varepsilon$. Observen que $d_i \leq d$ porque d es la suma de las d_i. Ya, entonces si quiero que la distancia d_i sea menor a épsilon, es suficiente que yo tome d menor a épsilon, ¿cierto? Sea épsilon positivo, suponemos $\delta = \epsilon$ y tenemos que $d(x,a)$ inferior a δ implica $d_i(\Pi(x), a)$ inferior a $d(x,a)$, inferior a épsilon. Eso es lo que queríamos demostrar.
>
> **Estudiante**: ¿Porqué suponemos que delta es igual a épsilon?
>
> **Juan**: Porque funciona! Yo tomo un épsilon positivo y quiero tener una desigualdad sobre d_i tal que esa distancia sea menor a epsilon, ¿ok? Luego, yo sé que $d_i(\Pi_i(x), a)$ es más chico que $d(x,a)$, que es menor a epsilon, entonces mi delta es épsilon. Suficiente, tomar delta igual a épsilon.

71:15 Cita 71:15 [EM6.1.2]

Codificando:
○ uso de los simbolos

Contenido:

> Bueno, lo que sé es que voy a tener tres elementos [en la desigualdad], entonces voy a tomar un epsilon sobre tres acá, para hacer mi suma. Entonces ahora empiezo a escribir las hipótesis, lógicamente lo que hago ahora es ir hacia lo que quiero demostrar, ¿ok?, lo que quiero demostrar es que para todo epsilon bla bla bla, lo que tengo que hacer acá es poner sea epsilon positivo y la definición [de la convergencia uniforme de f_n], y como el epsilon va a ser el mismo en cada término de la desigualdad conviene ponerlo dividido por tres, para que tengamos épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y épsilon al final. Entonces el N lo tengo que fijar, porque como tengo un existe, entonces después

71:15 Cita 71:15 [EM6.1.4]

Codificando:
○ uso de los simbolos

Contenido:

Estudiante: Profe, es que no entiendo lo último que hizo, ¿porqué dividió ε?

Juan: ¿Por tres?

Estudiante: Si, ¿por qué hizo eso?

Juan: Porque yo sé que voy a tener tres elementos en mi desigualdad, entonces épsilon sobre tres, épsilon sobre tres y épsilon sobre tres me da épsilon

Estudiante: ¿Y porque puso sea épsilon mayor que 0?, ¿porqué puso eso?

Juan: Porque lo que quiero demostrar es esto. Vamos a demostrar que f es continua. $[\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$, entonces tengo que poner el épsilon positivo, y ahora tengo que introducir el delta en la izquierda. Ese es el teorema del que hablamos la última vez, el fin de la sesión anterior. Entonces cuando empiezo la demostración digo sea épsilon positivo, entonces tengo que usar la hipótesis y la introduzco, pero la idea [de la demostración], yo sé que es esta desigualdad, por eso tomo épsilon sobre tres, porque se que después me va a servir, o puedo tomar un epsilon primo y después mostrar una relación entre épsilon y épsilon primo, esa es otra manera de hacerlo.

71:17 Cita 71:17 [EM7.1]

Codificando:
○ uso de los símbolos

Contenido:

Juan: Bueno, yo supongo que sea x_n en cualquier sucesión que converge hacia l, lo estoy haciendo en conjunto M. Lo primero es que $d(x_m, x_n)$, va a ser chico, porque los dos elementos están cerca del límite, se ve que aquí voy a utilizar la desigualdad triangular. Y estas dos distancias $[d(x_m, l)$, $d(x_n, l)$] convergen hacia 0. Vamos a escribir entonces la prueba formal pero esta es la idea. Formalmente, sea épsilon mayor a 0 y x_m que converge a l, entonces existe N positivo, tal que para todo n más grande que N, $d(x_n, l)$ es menor que épsilon, por lo cual si n es más grande que N, y m es más grande que N, tenemos d de x_n a x_m es inferior a $d(x_n, l)$, más $d(x_m, l,)$ esto es inferior a 2ϵ, pero aquí no me gusta el dos, ¿cierto?, entonces aquí divido por dos, entonces épsilon sobre dos más épsilon sobre dos es inferior a épsilon.

71:7 Cita 71:7 [EM7.4]

En documento:
71 EM.pdf

Codificando:
○ selección

Contenido:

> **Juan**: ¿tienen preguntas?, ¿hay dudas con algo?
>
> **Estudiante**: Profe, yo no entiendo porqué elije $\varepsilon = 1$.
>
> **Juan**: Acá es porque yo quiero tener mi conjunto acotado, entonces es para tener una idea, yo necesito una cota pero no es necesario que sea 1.
>
> **Estudiante 1**:O sea yo podría haber puesto ε igual a una letra no más.
>
> **Juan**: Si, cualquier cosa, pero con 1 especifiqué el epsilon. Es que aquí, para usar la definición de sucesión de Cauchy, tengo que para todo ε positivo, existe N positivo tal que X_N está acotado $c = \varepsilon$, entonces yo quise hablar de un ε en concreto, pero también puedo escribir al principio fijamos ε positivo y N que depende de épsilon, ¿ok?, pero yo lo fije como 1.

○ Cuantificadores

11:36 Cita 11:36 [AR1.6]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> **Estudiante**: Ahora falta que caiga adentro [del intervalo $[a, b]$]
>
> **Diego**: Que caiga adentro porque ese m puede ser súper grande, pero ese es el problema, uno dice, con el para todo yo siempre puedo escoger cuál de todos es el que me conviene, pero cuando es la existencia, es lo que cayó no más, ahí uno no se puede... lo que cayó en la noche....entonces como el existe te da lo que cayó no más, uno tiene que hacer algún trabajo para que lo que caiga sea conveniente.

11:44 Cita 11:44 [EAR5]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> Eso, que existe te dice que hay uno pero no sabes, en principio hasta podría ser el único, no tienes posibilidad de elección, cuando hay una proposición que dice existe un objeto con tal propiedad, tu tienes que tomar ese objeto y arreglártelas si necesitas construir algo con ese objeto, arreglártelas para que la construcción te de lo que quieres, pero, la existencia es justamente eso, hay un tipo con el que pasa eso, no tienes chance de escoger dentro del universo. El comentario [la existencia es lo que cayó no más] es una analogía, por ejemplo la propiedad arquimediana te da un número natural que satisface que si tu tomas un número real hay un número natural… no son todos los naturales.

11:48 Cita 11:48 [EAR8]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> reducción al absurdo, por la negación sobre todo y propiedades que tienen muchos cuantificadores, distintos para todos y existe son un problema en general, porque además tenemos la mala costumbre y esto hasta dentro de los matemáticos de no usar una regla fundamental en la elaboración de las proposiciones que primero van los cuantificadores, entonces ponemos el para todo al final y cuando hay que negar eso, ese para todo, va antes del existe, va después, entonces, eso siempre hay una dificultad cuando hay una negación allí. Cada vez que hay una negación que puede

73:6 Cita 73:6 [CV1.3.4]

En documento:
73 Calculo Vectorial .pdf

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> **Andrés**: Entonces supongamos que x punto y es distinto a cero, por lo tanto, x punto y va a ser un número estrictamente positivo o estrictamente negativo. Las demostraciones van a hacer equivalentes, créanme. ¿Cuál quieren el positivo o el negativo?
> **Estudiantes**: El positivo.
> **Andrés**: Entonces sin pérdida de generalidad, puedo asumir que x punto y es mayor estricto que cero $(x \cdot y > 0)$. Ya y esto es para cualquier t, para el que yo quiera, como esto ocurre para todo t, para el que yo quiera, voy a asumir que t es negativo, como se cumple para todo t voy a asumir que t es menor que cero y puedo dividir por t.

71:21 Cita 71:21 [EM4.2]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> **Juan**: [$\rightarrow$] Yo supongo que A es abierto y tomo un punto x en A y quiero encontrar un vecindario no se qué, pero para encontrarlo, hay que sacarlo de algún lado, entonces es importante ver que la definición acá [de abierto] dice que existe algo y existe algo es que yo encuentro una solución a mi problema, entonces como x pertenece a A existe una bola de centro x y radio r positivo tal que la bola esta incluida en A [$\exists B(x,r)/B(x,r) \subset A$], ya sabemos que la bola es un abierto y en particular es una vecindad, entonces la bola funciona [para afirmar la implicación de la proposición].

71:24 Cita 71:24 [EM5.1.1]

Codificando:
○ negacion cuantificadores

Contenido:

> ¿que es no B?, es que existe una sucesión x_n que converge a a, tal que $f(x_n)$ no converge hacia $f(a)$ y eso ¿qué quiere decir? es súper complicado decir que no converge, es que hay elementos de la sucesión arbitrariamente largos que están afuera de cualquier entorno de $f(a)$, esto es, $\forall B(f(a),\varepsilon), \exists x_n \notin B(f(a),\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

71:20 Cita 71:20 [EM6.1.3]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> que f_n de x menos f de x es inferior a épsilon. Y entonces ya habíamos dicho que en la convergencia uniforme esta expresión [$\forall x \in Dom$] va al inicio [$\forall x \in Dom, \forall \varepsilon > 0$] en vez de estar acá [después de $\forall \varepsilon, \forall n \geq N$], ¿si?, porque en la convergencia simple yo fijo un x y miro la convergencia, en la convergencia uniforme yo fijo epsilon y N grande y digo la afirmación para todos los términos y eso es lo mismo que decir que el *sup* es menor a epsilon. Bueno, lo que sé es que voy a tener tres elementos [en la desigualdad], entonces

71:26 Cita 71:26 [EM8.1]

Codificando:
○ cuantificadores-significado

Contenido:

> topológico, entonces vamos a hablar de una cuestión de continuidad. f es uniformemente continua si para todo epsilon positivo, existe delta positivo, tal que $d(x, y)$ menor a delta, implica que $d(f(x), f(y))$ es inferior a epsilon. Esto dice que como tengo las cosas cercanas acá [en M], miro la imagen [de la función] y voy a tener cosas cercanas allá. Y aquí uno ve que esto es casi la definición de continuidad, pero lo que quiero es que la implicación sea válida en cualquier lugar de mi intervalo, ¿ok?, entonces en vez de poner para todo x, y acá [antes del existe], lo voy a poner después del existe, y eso es exactamente lo que quiere decir uniforme, que en general, el para todo que iba al principio en la continuidad aquí va después del existe.

73:13 Cita 73:13 [CV2.2]

Codificando:
○ negacion cuantificadores

Contenido:

> porque van a caer acá [en la vecindad de 0], entonces no está pasando que el $f(U)$, sea subconjunto del V. Entonces esta va a ser mi vecindad V [la vecindad pequeña de 1], a cualquier U que tome acá [en $\mathbb{R}^2$], la f de esa U no va a estar completamente contenida acá [en la vecindad pequeña de 1], se sale, toma tanto valor acá [en 0] o acá [en 1] por muy chica que sea. Entonces se viola este concepto de limite que esta aquí, porque, existe una vecindad V de 1, por ejemplo, la vecindad $(1/2, 3/2)$, V tal que f de U no esta contenido en V para toda U vecindad de $(0, 0)$. Cualquier U vecindad que este en torno a ese punto va a contener tipos con x negativo, y por lo tanto no van a ir a parar ahí. Por eso ese límite de ahí no existe. Pero es un lío estar trabajando con vecindades,

Uso del lenguaje

○ Precisión y economía

11:28 Cita 11:28 [AR1.1]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Contenido:

$\mathbb{R}$ tal que x se encuentra entre a_n y b_n para todo n mayor o igual que 1. Y esta proposición indica que cada vez que intersecto intervalos cerrados y acotados que están encajados. Están encajados, ah! eso me faltaba decir, tienen que estar encajados si no, no es cierto, si no están encajados los intervalos la intersección es vacía, toma el intervalo $[0, 1]$ y después toma el intervalo $[10, 12]$ y la intersección nada, tienen que estar encajados. Entonces para decir que tienen que estar encajados, se escribe así, yo lo había escrito pero voy a escribir a_n menor que b_n para todo I_n conteniendo a I_{n+1}. Que hemos demostrado con esto, entonces, que tomo un intervalo encajado, que cada vez son más pequeños, que son cerrados y acotados entonces en la intersección de todos ellos hay algo, algo hay ahí.

11:46 Cita 11:46 [EAR6]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Contenido:

Justamente, eso es la matemática, la matemática no se puede hacer más fácil, pero hay un intervalo, un intervalito, algo más pequeño, después la formalización, lo escrito, responde a ideas que uno tiene. No es que uno tienda a hacer más fácil eso. Cuando les digo, lo que ahí hay adentro, eso es no formal, eso es una explicación para que tengan una idea, la idea de la intersección, de lo que esta ocurriendo en ese fenómeno y decir intersección no vacia es una formalización de una idea, que ahí adentro hay algo. La matemática es la formalización de una idea, no al revés, no hay matemática sin ideas, si no, no tiene ningún sentido.

11:47 Cita 11:47 [EAR7]

En documento:
11 Resumen_ClaseAnálisis.pdf

Contenido:

En el fondo, las formulaciones en el lenguaje matemático son simplemente formulaciones de ideas que no tienen porque ser necesariamente expresadas desde el inicio en un carácter puramente riguroso, de hecho una idea mía es que no hay formas de escribir nada puramente riguroso, osea hay formas pero son impracticables para la comunicación, tu no puedes comunicar matemática si usaras el rigor lógico absoluto, en el ejemplo [de la continuidad] que te di antes, el delta siempre depende del punto, del epsilon, de la función, si te pones a escribir todo eso en el lenguaje matemático nadie termina entendiendo nada, entonces uno tiene que aceptar cierta licencia de formalidad. De repente tu puedes tratar de captar la misma idea con distintas analogías [metáforas] y después la formalización es otra cosa, pero por

72:15 Cita 72:15 [EED12]

En documento:
72 EDO.pdf

Contenido:

una definición que evite esa repetición. Ahora, puede pasar que esas condiciones, esa definición... esa definición en general existe cuando uno escribe un texto, un trabajo o habla o expone, estableces esa definición para economizar el lenguaje. El lenguaje tiene que tener un principio de economía. Por eso es que la gente, los lingüistas sobre todo, se oponen a estos y estas, damas y caballeros, porque no hay economía de lenguaje. Es un principio de la lengua, que debería ser económica. Entonces uno establece definiciones para la economía de la transmisión del contenido. Eso en principio puede durar lo que dura la transmisión del contenido, el capítulo del libro, el texto o la clase. Pero a ve-

72:19 Cita 72:19 [EED14]

En documento:
72 EDO.pdf

Contenido:

Diego: Porque de alguna manera, en cierto sentido la matemática es un lenguaje, entonces lo que uno hace es ir aproximándonos a usar lenguaje formal, o sea aproximarse a ese lenguaje como culto. Lo que pasa es que escribir matemática pura es imposible, o sea es posible pero yo no he visto hablar a ningún matemático lógico que escriba la matemática en la forma correcta y pura. Entonces ahí pasa de nuevo el tema de la economía, que en realidad cuando escribes, escribes porque quieres transmitir, también. Entonces dices renuncio a escribir formalmente, super formalmente, a fin de que la trasmisión sea un poco más expedita. Pero no puedo renunciar a alejarme tanto de esa formalidad de manera que la trasmisión vuelva a ser inexpedita. Tengo que alejarme para que la trasmisión se facilite, porque estoy hablando con otra persona que no habla el lenguaje de la matemática, español o inglés, o habla lo que sea, me tengo que alejar de ese lenguaje formal para que nos podamos comunicar pero no tanto como para que se deje de entender el mensaje. Por ejemplo, qué sería alejarse mucho, no establecer los cuantificadores, porque ahí tienes la expresión, esto vale para todo, hay alguno, entonces.

72:21 Cita 72:21 [EED15]

En documento:
72 EDO.pdf

Contenido:

desde cualquier consideración cultural, cualquiera. O sea quedó escrito en un lenguaje único universal. Lo que pasa que no puedes escribir todas las clases así, porque además queremos comunicarnos, uno renuncia un poco a eso, como que uno se va alejando de eso, va aumentando el espacio de precisión. Entonces, uno se aleja y establece una especie de contrato intrínseco con el interlocutor, que ya es conversado, donde ambos entendemos que a este nivel las imprecisiones que uno tenga no van a ser relevantes. No voy a decir una mentira porque en una cosa fui impreciso. Ahí hay una especie de contrato mutuo. Pero tampoco estoy tan alejado para que efectivamente lo que diga no se pueda entender.

Entrevistadora: O sea, se puede ser riguroso sin ser formal.

Diego: Es medio subjetivo todo. O sea para mí la rigurosidad es cuando escribes formal, pero en general la gente no hace eso, sino que usualmente va a abriendo el espectro para facilitar la comunicación. Y eso depende mucho del interlocutor. Por ejemplo, si yo hablo con un colega en algunas cosas puedo ser mucho más laxo y en otras cosas puedo ser mucho más preciso, y si hablo con un estudiante en algunas cosas debo ser mucho más preciso y en otras cosas puedo ser mucho más laxo.