

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas



**La modelización matemática en la formación de
ingenieros. El caso de Ingeniería Civil.**

**Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática**

SAÚL ERNESTO COSMES ARAGÓN

Tesis dirigida por
Dra. Elizabeth Montoya Delgadillo

Valparaíso – CHILE 2020

*LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE
INGENIEROS. EL CASO DE INGENIERÍA CIVIL.*

de

SAÚL ERNESTO COSMES ARAGÓN

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 10 diciembre del año 2020 ante la Comisión de Tesis

Integrada por:

Dra. **Carolina Guerrero Ortiz**, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesora interna

Dr. **Jaime Mena Lorca**, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesor interno

Dra. **Elizabeth Montoya Delgadillo**, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Directora de tesis

Dra. **Ruth Rodríguez Gallegos**, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Profesora externa

Este trabajo de tesis contó con financiamiento de la Beca de Doctorado Nacional de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ex CONICYT) folio 21160846 y del proyecto Fondecyt 1171744, Chile.

CHILE, 2020

Agradecimientos

A Dios por su infinito amor. Sin su amor nada me fuera posible.

A mi familia, su apoyo y amor incondicional me sostienen.

A mi directora de tesis, la Dra. Elizabeth Montoya, por su alto nivel de profesionalismo y gran dedicación mostrada en la dirección de la presente tesis. Por su gran calidad humana. Siempre estuvo disponible y presente en mi formación doctoral, con el mayor entusiasmo. Pero sobre todo, por haber creído en mí y darme esa gran oportunidad de fungir como mi directora de tesis. Mi agradecimiento por siempre.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT de Chile (Hoy llamado Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, ANID) por su financiamiento, que obtuve a través de concurso académico, mediante la Beca de Doctorado Nacional, año 2016, Folio 21160846. Y al financiamiento del Proyecto FONDECYT regular 1171744 a cargo de la Dra. Elizabeth Montoya. Dos grandes apoyos, fundamentales para poder realizar mis estudios doctorales. Además, de agradecer a la Dirección de Estudios Avanzados de la PUCV por la beca término de tesis otorgada.

A la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad donde se realizó el levantamiento de datos. Al profesor de la asignatura que se observó, por su excelente disposición y apertura para con la investigación. A los ayudantes y estudiantes del curso de Análisis Estructural por su disposición y entusiasmo. Al estudiante en su rol de tesista, por su excelente actitud para aportar con sus conocimientos en el área de estructuras a la investigación y por esas largas reuniones de trabajo que tuvimos, las cuales fueron de gran aporte a la investigación.

A las profesoras y los profesores del Doctorado en Didáctica de la Matemática de la PUCV, por sus valiosos aportes brindados en los diversos espacios de mi formación doctoral: asignaturas, seminarios, coloquios, talleres.

A los profesores externos a la universidad y con los que tuve la oportunidad de dialogar, de forma presencial, mi trabajo de tesis, y recibir sus valiosos puntos de vista y retroalimentación: Dra. Michel Artigue, Dra. Ruth Rodríguez, Dra. Rita Borromeo, Dr. Alain Kuzniak y Dr. Laurent Vivier. Muchas gracias.

A la comisión evaluadora del presente trabajo de tesis, por su disposición como evaluadores: Dra. Carolina Guerrero, Dr. Jaime Mena, Dra. Elizabeth Montoya y Dra. Ruth Rodríguez, que de antemano son bienvenidos sus aportes y sugerencias en esta investigación.

A las compañeras y los compañeros estudiantes del doctorado, por sus puntos de vista, brindados en diversos escenarios donde tuve la oportunidad de exponer, como son: asignaturas, seminarios, coloquios.

A la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por sus espacios facilitados para mi formación doctoral, pero sobre todo por su alta capacidad relacionada al aspecto humano. Le agradezco el financiamiento otorgado en algunos momentos de mis estudios, como es para la asistencia a congresos y la beca de término de tesis. A los(as) directores(as) del doctorado en Didáctica de la Matemática por su amabilidad y alto nivel de profesionalismo otorgados a mi persona

Al Instituto de Matemáticas de la PUCV y sus trabajadores, en especial agradecimiento a los recepcionistas y al bibliotecario. Todos los que laboran en IMA, cuando necesité de sus servicios, éstos fueron bien correspondidos.

A Chile, país que me ha dado tanto en estos últimos años. Puedo decirle muchas cosas como agradecimiento, pero las resumo en una pequeña y significativa frase: Chile te quedas por siempre en mi corazón.

Resumen

El presente trabajo de tesis trató sobre investigar el rol de la modelización matemática en la formación de ingenieros, cuyo objetivo fue caracterizar las tareas de modelización presentes en su formación. Para ello se consideró la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y el ciclo de modelización (CM). Se realizaron adaptaciones a ambos enfoques con la finalidad de ser más precisos en cuanto a su operacionalización para ser utilizados en nuestra investigación. Del ETM se realizó una adaptación al trabajo de Moutet (2016) y se propuso un ETM extendido para la ingeniería y del CM se propuso una extensión al mundo de la ingeniería. Además del ciclo clásico de modelización, se utilizó el CM con tecnología, a través de uso de software profesional.

La metodología utilizada fue de tipo cualitativo bajo un paradigma interpretativo, específicamente se utilizó el estudio de caso de tipo instrumental, toda vez que el caso nos proporcionó información para comprender el rol de la modelización en ingeniería. El caso seleccionado es el programa de formación de Ingeniería Civil en una universidad chilena, y se trabajó en el área de formación profesional, en la sección de análisis de estructuras.

El caso nos permitió levantar información relacionada con el ETM idóneo del profesor de la asignatura observada (Análisis Estructural) y del ETM extendido personal del estudiante, relacionado con evaluaciones y a la elaboración de un proyecto de modelización.

Se evidenció que la modelización matemática está presente en la formación de ingenieros, pero también, de otro tipo de modelización propia de la ingeniería, llamada modelización estructural, por tanto hablamos de una modelización matemático-ingenieril como un trabajo indisoluble. En el dominio del Cálculo, se evidenció el uso de la noción de función, derivada e integral en problemas de ingeniería, específicamente sus interpretaciones y significados en el contexto de modelos asociados al estudio de estructuras. Además, se identificaron relaciones entre modelos de ingeniería y objetos matemáticos; lo que permite pensar en un rol de la modelización como potencial articulador de los diversos ejes de formación de un ingeniero.

Índice

Introducción	1
Capítulo 1. Problemática y antecedentes de investigación	4
1.1 Contextualización	4
1.2 La modelización matemática en ingeniería.....	9
1.2.1 Modelización matemática.....	9
1.2.2 Modelización en ingeniería.....	11
1.2.2.1 Exigencias institucionales	12
1.3 La competencia de modelización en ingeniería.....	14
1.4 La modelización como promotor de vínculos entre los diversos ejes de formación en ingeniería	17
1.5 La modelización en su estatus de construcción de conocimiento matemático	24
1.6 El proceso de modelización	26
1.7 Perspectivas de modelización	34
1.8 El rol de la matemática en los lugares de trabajo.....	39
1.8.1 La invisibilidad de la matemática	39
1.8.2 Sobre las brechas que existen entre la matemática en escenarios escolares y la matemática en escenarios profesionales.....	41
1.8.3 Sobre las herramientas de trabajo utilizadas en la actividad profesional.....	42
1.8.4 Sobre las implicaciones educacionales de confrontar la matemática escolar con la matemática en los lugares de trabajo	44
1.9 Aproximación epistemológica a la problemática	45
1.9.1 Breve desarrollo de la noción de función.....	50
1.9.2 La noción de función en la modelización	52
1.9.3 Relacionando la función con su función derivada.....	52
1.10 Investigaciones relacionadas	62
1.10.1 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista cognitivo.....	62
1.10.2 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista de epistemología relativa.....	67
1.10.3 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista epistemológico	72

1.11 Preguntas de investigación	75
Capítulo II Marco Conceptual.....	79
2.1 El Espacio de Trabajo Matemático.....	80
2.2 El nivel epistemológico y cognitivo en el ETM.....	80
2.2.1 Componentes del nivel epistemológico.....	81
2.2.2 Componentes del nivel cognitivo.....	81
.....	81
2.3 ETM y el enfoque por paradigmas	81
2.4 La modelización y la activación de las génesis en el ETM.....	82
2.5 ETM de referencia, idóneo y personal.....	83
2.6 El ciclo de modelización de Borromeo Ferri.....	83
2.7 El ciclo de modelización con uso de tecnología digital (software) ...	89
2.8 Un Espacio de Trabajo Matemático Extendido a la Ingeniería	92
2.9 Trayectorias teóricas de interacción entre el ciclo de modelización y el ETM	93
2.10 Objetivo general y objetivos específicos.....	95
2.10.1 Objetivo general	95
2.10.2 Objetivos específicos	96
Capítulo III Metodología.....	98
3.1 Metodología de la investigación.....	98
3.2 Fases y Etapas de la investigación.....	98
3.2.1 Fase de planeación	99
3.2.2 Fase de recolección de datos	100
3.2.3 Fase de análisis de datos.....	105
3.2.4 Fase de resultados.....	113
Capítulo 4 (1). Aproximación al ETM de referencia y un primer acercamiento al contexto de ingeniería.....	116
4.1 Aproximación al ETM de referencia.....	116
4.1.1 Los programas de ingeniería y las áreas de formación	116
4.1.2 La selección del caso: el programa de formación de Ingeniería Civil de una universidad chilena.....	119
4.1.3 El programa de Ingeniería Civil	120

4.1.4 Reporte de observación de clases correspondiente a la asignatura de Análisis Estructural en la carrera de Ingeniería Civil	122
Capítulo 4 (2). Conceptos de la ingeniería y de la matemática presentes en los modelos estructurales.	135
1. Sobre el contenido disciplinar en ingeniería para el análisis de estructuras estáticamente determinadas.....	135
2. Sobre el contenido matemático presente en los modelos utilizados para resolver los problemas del análisis estructural.....	136
4.1 Sobre el contenido disciplinar en ingeniería para el análisis de estructuras estáticamente determinadas.	136
4.1.1 Conceptos de la Mecánica de Materiales	136
4.1.2 Conceptos del Análisis Estructural	146
4.2 Sobre el contenido matemático relacionado con los modelos utilizados para resolver los problemas que seleccionamos del análisis estructural.	167
4.2.1 Sobre la noción de función.....	167
4.2.2 Sobre la definición de límite	169
4.2.3 Sobre las funciones continuas.....	169
4.2.4 Sobre la derivada de una función	172
4.2.5 Sobre el significado de la derivada.....	173
4.2.6 Sobre la integral de una función	175
Capítulo 5. ETM extendido idóneo: análisis y resultados	182
5.1 Contexto y metodología de análisis.....	182
5.2 Problemas analizados en el ETM extendido idóneo.....	185
5.2.1 Explicación del tema de reacciones externas y esfuerzos internos.....	185
5.2.2 Modelo estructural tipo viga.....	191
5.2.3 Modelo estructural tipo marco	209
5.2.4 Modelo estructural tipo armadura.....	216
5.2.5 Deformación de un modelo estructural tipo viga	227
5.2.6 Deformación de un modelo estructural tipo marco	235
5.3 Resultados en el ETM idóneo.....	243
5.3.1 Resultados sobre las situaciones académicas abordadas en el curso.....	243
5.3.2 Resultados sobre la relación objeto matemático – modelo matemático – modelo de ingeniería.....	245
Capítulo 6. ETM extendido personal.....	251

6.1 Estudiante resolviendo problemas de evaluaciones	251
6.1.1 Descripción de la tarea y procedimientos esperados	253
6.1.2 Análisis de la producción del estudiante	263
6.2 Estudiantes trabajando en un proyecto de modelización estructural real.....	278
6.2.1 Descripción del proyecto	281
6.2.2 Análisis de la producción de los estudiantes	281
6.2.2.1 Análisis de la entrega 1. Modelado geométrico del edificio en el software de análisis estructural SAP 2000	282
6.2.2.2 Análisis de la entrega 2. Construcción del modelo estructural analítico.	291
6.2.2.3 Análisis de la entrega 3 del proyecto. Designación sobre las cargas actuantes en el edificio y el “Run Analysis” del software	300
6.2.2.4 Análisis de la entrega 4. Modelado de la cercha (armadura) del edificio con el software SAP 2000	307
6.3 Resultados en el ETM extendido personal	317
6.3.1 Resultados relacionados con el trabajo con el proyecto de los estudiantes	317
6.3.2 Resultados relacionados con el trabajo con modelos	322
Capítulo 7. Conclusiones	327
7.1 Conclusiones a partir de los objetivos	327
7.2 Conclusiones generales	335
7.3 Limitaciones de la investigación	339
7.4 Perspectivas de la investigación	340
Bibliografía	342
Anexos.....	352
Anexo 1. Glosario de términos del Análisis Estructural (McCormac, 2010)	352
Anexo 2. Entrevista al profesor de la asignatura	353
Anexo 3. Entrevista a estudiante tesista respecto del proyecto	359
Anexo 4. Solución del problema de evaluación, por experto	367
Anexo 5. Solución del problema por estudiante del curso	371
Anexo 6. Transcripción del proyecto.....	374

Índice de figuras

Figura 1.1 Aplicaciones función cuadrática (Zill & Dewar, 2012, p.80)	6
Figura 1.2 Aplicaciones función cuadrática (Zill & Dewar, 2012, p. 80).....	7
Figura 1.3 Contenidos matemáticos mínimos para los programas de ingeniería...	13
Figura 1.4 Desarrollo para cada dominio de la matemática propuesta	14
Figura 1.5 Relación entre los ejes de formación en ingeniería.....	19
Figura 1.6 Relación entre los ejes de formación en ingeniería considerando los escenarios de labor.....	21
Figura 1.7 Recipiente conteniendo el líquido (Salinas, et. Al, 2012, p.95)	22
Figura 1.8 Enfoques alternativos sobre la enseñanza de la matemática (Hellblom, Wedelin & Adawi, 2016, p. 102).....	29
Figura 1.9 Cuadro comparativo de los tres enfoques alternativos (Hellblom, Wedelin & Adawi, 2016, p. 102).....	29
Figura 1.10 Ciclo de modelización (Hitt y Cortés, 2009, p.7)	31
Figura 1.11 Ciclo de modelización (Arrieta y Díaz, 20015, p.37)	31
Figura 1.12 Ciclo de modelación matemática (Bliss, Fowler & Galluzzo, 2014, p.6)	32
Figura 1.13 Ciclo de modelación extendido (Greefrath, 2011, p.302, citado en Greefrath & Vorholter, 2016, p. 23)	32
Figura 1.14 Modelización generada por datos (Frejd & Bergsten, 2016, p.21).....	33
Figura 1.15 A model of mathematical literacy in practice (OECD, 2013, p. 26)....	34
Figura 1.16 Modelo polinomial (Cosmes, 2012).....	41
Figura 1.17 Clasificación de herramientas identificadas (Trianfantillou & Potari, 2010, p. 290).....	43
Figura 1.18 Proceptos en funciones y cálculo (Tall, 1997, p.5).....	47
Figura 1.19 Representación del tiempo y la velocidad (Alanís, 1996, p. 44)	48
Figura 1.20 Movimiento uniforme (Alanís, 1996, p. 44).....	48
Figura 1.21 Movimiento uniformemente diforme (Alanís, 1996, p. 45)	49
Figura 1.22 Movimiento diformemente diforme (Alanís, 1996, p. 45).....	49
Figura 1.23 Semejanza de misma forma (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 13).....	53
Figura 1.24 Semejanza geométrica (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 14).....	54
Figura 1.25 Relación por covariación mediante la inclinación de la pendiente (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 19).....	54
Figura 1.26 Trazando un gráfico para ver y sentir la gráfica como un objeto (Tall, 2012, p. 53)	57
Figura 1.27 Deslizando una mano a lo largo del gráfico para sentir el cambio de pendiente (Tall, 2012, p. 53).....	57
Figura 1.28 Visualización dinámica vs simbolismo (Tall, 2012, p.55).....	57
Figura 1.29 Reconociendo una anti-derivada (Artigue, 1991, p. 190)	58
Figura 1.30 Diagramas de V y M para cargas puntuales (Hibbeler, 2009, p. 155)60	
Figura 1.31 Diagramas de V y M para carga distribuida triangular (Hibbeler, 2009, p. 155).....	61

Figura 1.32 Enfriamiento del café (Escañero y López 2007, p.153 citado en Arrieta y Díaz, 2015, p. 23)	68
Figura 1.33 La red de lo lineal (Arrieta y Díaz, 2015, p.43)	70
Figura 2.34 Esquema general de ETM.....	81
Figura 2.35 Ciclo de modelización (Blum y Leib, 2005, p. 1626)	84
Figura 2.36 Ciclo de modelización (Blum, 2015, p. 76)	84
Figura 2.37 Perspectiva sobre matemáticas aplicadas (Pollak 1979, p.256 citado en Greefrath & Vorholter 2016, p.6)	86
Figura 2.38 Ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (Borromeo 2006, p.92)	87
Figura 2.39 Ciclo de modelización numérico	90
Figura 2.40 Dos espacios de trabajo: matemático e ingeniería.....	93
Figura 2.41 ETM extendido para la ingeniería. (Elaboración propia). Adaptado de Moutet (2016)).....	93
Figura 3.42 La recolección de datos para el caso del programa de formación de Ingeniería Civil.....	100
Figura 3.43 Etapas en el CM y planos verticales en el ETM extendido.	114
Figura 4.44 Marco traslacional	124
Figura 4.45 Elemento de viga sometido a desplazamientos en rotación como incógnita y traslación como dato del problema	124
Figura 4.46 Viga hiperestática.....	126
Figura 4.47 Diagrama de Cuerpo Libre de la viga.....	127
Figura 4.48 Esquema de momentos en los extremos.....	129
Figura 4.49 Diagrama de cortante.....	130
Figura 4.50 Diagrama de momento	130
Figura 4.51 Diagramas de los momentos totales generados en los extremos del elemento	131
Figura 4.52 Idealización de fuerzas sobre un cuerpo (Hibbeler, 1997, p.3).....	138
Figura 4.53 Viga genérica (Hibbeler, 1997, p. 3).....	139
Figura 4.54 Tipos de apoyos (Hibbeler, 1997, p. 4).....	139
Figura 4.55 Sistema de fuerzas coplanares (Hibbeler, 1997, p. 8)	142
Figura 4.56 Cuerpo seccionado (Hibbeler, 1997, p. 8).....	142
Figura 4.57 Diagrama de esfuerzo-deformación (Hibbeler, 1997, p. 88)	144
Figura 4.58 Esfuerzo-deformación para el acero (Hibbeler, 1997, p. 94).....	146
Figura 4.59 Fases de un proyecto típico de ingeniería estructural (Kassimali (2001))	149
Figura 4.60 Tipos de vigas (Hibbeler, 2012, p. 4).....	151
Figura 4.61 Sección transversal para una viga (Hibbeler, 2012, p. 5).....	151
Figura 4.62 Columna (Hibbeler, 2012, p.6)	152
Figura 4.63 Armaduras (Hibbeler, 2012, p. 7) Marcos. Los marcos se suelen usar galpones y estructuras de acero, están compuestos por vigas y columnas conectadas rígidamente o mediante articulaciones (Figura 4.64). Al igual que las vigas, los marcos se extienden en dos o tres dimensiones. La carga en un marco ocasiona flexión de sus elementos; y si tiene conexiones de unión rígidas, por lo	

general esta estructura es “indeterminada” desde el punto de vista analítico. La resistencia de un marco de este tipo se deriva de las interacciones de momento entre las vigas y las columnas en las uniones rígidas.	153
Figura 4.64 Marco (Hibbeler, 2012, p. 8)	153
Figura 4.65 Sistemas en una dirección (Hibbeler, 2012, p. 40).....	155
Figura 4.66 Sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 41).....	156
Figura 4.67 Ejemplo de sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 42)	157
Figura 4.68 Ejemplo de sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 42).....	157
Figura 4.69 Cargas en una viga (Hibbeler, 2012, p. 139).....	158
Figura 4.70 Carga genérica sobre una viga (Hibbeler, 2012, p. 150).....	160
Figura 4.71 Fuerza concentrada y momento par en una viga (Hibbeler, 2012, p. 152)	162
Figura 4.72 Diferenciales curva elástica (Hibbeler, 2012, p. 305).....	163
Figura 4.73 Carga real y carga virtual (Hibbeler, 2012, p. 364).....	165
Figura 4.74 Momento real y momento virtual (Hibbeler, 2012, p. 364).....	166
Figura 5.75 Diferencial en una viga genérica.....	187
Figura 5.76 Diagramas de esfuerzo cortante (azul) y momento flector (rosa)	188
Figura 5.77 Relación cortante constante y momento lineal	188
Figura 5.78 Cortante con sección nula y momento constante	189
Figura 5.79 Esquema del problema.....	192
Figura 5.80 CM extendido (Elaboración propia), Adaptado de Borromeo Ferri (2006).....	193
Figura 5.81 Ciclo CM momento 1	194
Figura 5.82 CM extendido momento 1	194
Figura 5.83 ETM extendido momento 1	194
Figura 5.84 Diagrama de Cuerpo Libre (DCL).....	195
Figura 5.85 CM momento 2.....	197
Figura 5.86 ETM extendido momento 2.....	197
Figura 5.87 Momento en el nodo C	197
Figura 5.88 Momentos en el nodo B	198
Figura 5.89 Momentos a la izquierda del nodo C.....	198
Figura 5.90 Primer corte.....	199
Figura 5.91 Suma de momentos y fuerzas para primer corte.....	199
Figura 5.92 Suma de momentos y fuerzas para el segundo corte	200
Figura 5.93 Suma de momentos yFigura 5.94 fuerzas para el tercer corte	201
Figura 5.95 Suma de momentos y fuerzas	201
Figura 5.96 Suma de momentos y cortes para el quinto tramo	202
Figura 5.97 Modelo de equilibrio para momentos en el punto B	202
Figura 5. 98 Cálculo de funciones de momento y cortante para esfuerzos internos	203
Figura 5.99 Suma de momentos en B.....	204
Figura 5.100 CM momento 3a.....	205
Figura 5.101 ETM extendido momento 3a.....	205

Figura 5.102 Suma de momentos y fuerzas en corte 3	205
Figura 5.103 CM momento 3b.....	205
Figura 5.104 ETM extendido momento 3b.....	205
Figura 5.105 Diagrama de fuerza cortante	206
Figura 5.106 Diagrama de momentos flectores	207
Figura 5.107 CM momento 4	208
Figura 5.108 ETM extendido momento 4.....	208
Figura 5.109 Esquema del problema	209
Figura 5.110 CM momento 1	210
Figura 5.111 CM extendido momento 1	210
Figura 5.112 ETM extendido momento 1	211
Figura 5.113 Apoyos en la estructura	211
Figura 5.114 Condiciones de equilibrio.....	212
Figura 5.115 CM momento 2	213
Figura 5.116 ETM extendido momento 2	213
Figura 5.117 Punto de convergencia O.....	213
Figura 5.118 Reacción vertical en A.....	214
Figura 5.119 Reacción en b.....	214
Figura 5.120 CM momento 3	216
Figura 5.121 ETM extendido momento 3.....	216
Figura 5.122 Armadura	216
Figura 5.123 CM momento 1	219
Figura 5.124 CM extendido momento 1	219
Figura 5.125 ETM extendido momento 1	219
Figura 5.126 DCL para la armadura.....	219
Figura 5.127 CM momento 2	221
Figura 5.128 ETM extendido momento 2	221
Figura 5.129 Reacción vertical en A.....	221
Figura 5.130 Reacción horizontal en A	222
Figura 5.131 Fuerzas en el nudo A.....	222
Figura 5.132 Fuerzas en el nudo B.....	223
Figura 5.133 CM momento 3	224
Figura 5.134 ETM extendido momento 3.....	224
Figura 5.135 Diagrama de solución.....	224
Figura 5.136 CM momento 4	226
Figura 5.137 ETM extendido momento 4.....	226
Figura 5.138 Esquema de la viga.....	228
Figura 5.139 CM momento 1	229
Figura 5.140 ETM extendido momento 1	229
Figura 5.141 DCL para la viga.....	229
Figura 5.142 CM momento 2	230
Figura 5.143 CM extendido momento 2	230
Figura 5.144 ETM extendido momento 2.....	230

Figura 5.145 Reacción en A.....	231
Figura 5.146 Suma de momentos en P	231
Figura 5.147 Reacción en A.....	231
Figura 5.148 Función de momento para carga virtual.....	232
Figura 5.149 Integral de desplazamiento	232
Figura 5.150 Cálculo del desplazamiento	232
Figura 5.151 CM momento 3a.....	234
Figura 5.152 ETM extendido momento 3a.....	234
Figura 5.153 CM momento 3b.....	234
Figura 5.154 ETM extendido momento 3b.....	234
Figura 5.155 Esquema del problema.....	235
Figura 5.156 CM momento 1	236
Figura 5.157 CM extendido momento 1	236
Figura 5.158 ETM extendido momento 1	236
Figura 5.159 DCL de la estructura.....	237
Figura 5.160 CM momento 2	238
Figura 5.161 ETM extendido momento 2	238
Figura 5.162 Corte para el elemento vertical.....	238
Figura 5.163 Corte para el tramo horizontal.....	239
Figura 5.164 Asignación de momento virtual.....	239
Figura 5.165 DCL.....	239
Figura 5.166 Corte tramo vertical.....	239
Figura 5.167 Corte tramo horizontal	240
Figura 5.168 Cálculo del desplazamiento angular.....	240
Figura 5.169 CM momento 3a.....	241
Figura 5.170 ETM extendido momento 3a.....	241
Figura 5.171 CM momento 3b.....	242
Figura 5.172 ETM extendido momento 3b.....	242
Figura 6.173 La recolección de datos.....	251
Figura 6.174 Problema de evaluación	253
Figura 6.175 Respuesta experta. Sumatoria de fuerzas externas a la estructura	254
Figura 6.176 Respuesta experta. Diagrama de Cuerpo Libre	255
Figura 6.177 Respuesta experta. Sumatoria de momentos a la izquierda de la rótula	255
Figura 6.178 Respuesta experta. D.C.L.	256
Figura 6.179 Descomposición de fuerzas.....	257
Figura 6.180 Respuesta experta. Cálculo de la fuerza axial	257
Figura 6.181 Respuesta experta. Cálculo de la fuerza cortante	257
Figura 6.182 Respuesta experta. Función de momento para el elemento 1	258
Figura 6.183 Respuesta experta. Ángulo inclinación elemento 2.....	258
Figura 6.184 Respuesta experta. Descomposición vectores fuerza	259

Figura 6.185 Respuesta experta. Descomposición del vector de fuerza equivalente	259
Figura 6.186 Respuesta experta. Función de esfuerzo axial para el elemento 2	259
Figura 6.187 Respuesta experta. Función de cortante para el elemento 2	260
Figura 6.188 Respuesta experta. Función de momento para el elemento 2	260
Figura 6.189 Respuesta experta. Momento nulo coincidente en la rótula	260
Figura 6.190 Respuesta experta. Corte en el elemento 3	261
Figura 6.191 Respuesta experta. Función de esfuerzo axial para elemento 3	261
Figura 6.192 Respuesta experta. Función de esfuerzo cortante para elemento 3	261
Figura 6.193 Respuesta experta. Función de esfuerzo cortante para el elemento 3	261
Figura 6.194 Respuesta experta. Diagrama de esfuerzo axial	262
Figura 6.195 Respuesta experta. Diagrama de cortante	262
Figura 6.196 Respuesta experta. Diagrama de momento	263
Figura 6.197 Respuesta experta. Justificación momento máximo	263
Figura 6.198 D.C.L.	264
Figura 6.199 Seccionamiento del marco	265
Figura 6.200 Diagrama de Cuerpo Libre	265
Figura 6.201 Cálculo de reacciones externas	266
Figura 6.202 Descomposición de fuerzas y determinación de funciones N, V y M	267
Figura 6.203 Cálculo de reacciones externas	268
Figura 6.204 Determinación de las funciones de N, V y M para cada elemento de la estructura	270
Figura 6.205 Diagramas solución	271
Figura 6.206 Justificación momento máximo	271
Figura 6.207 Criterio de la primera derivada para valores máximos y/o mínimos	272
Figura 6.208 Génesis y planos verticales en el proceso de modelización para la evaluación	277
Figura 6.209 Ciclo de modelización con tecnología (Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018, p. 101)	283
Figura 6.210 CM extendido con tecnología. Elaboración propia. (Adaptado de Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018)	283
Figura 6.211 Modelo realizado por equipo 1	285
Figura 6.212 Modelo realizado por el equipo 2	287
Figura 6.213 Dibujos dificultad 1 Equipo 3	288
Figura 6.214 Dibujos dificultad 2 Equipo 3	288
Figura 6.215 Modelo realizado por el equipo 4	290
Figura 6.216 CM extendido con tecnología para entrega 1	291
Figura 6.217 Elementos finitos, malla en el plano XY, según Z	294
Figura 6.218 Vista de malla de elementos finitos por equipo 2	296
Figura 6.219 Discretización de la estructura Equipo 3	298

Figura 6.220 Malla elementos finitos Equipo 4.....	299
Figura 6.221 CM extendido con tecnología para entrega 2	300
Figura 6.222 Diagrama de momentos 1, viga plano E1 Equipo 1	304
Figura 6.223 Diagrama de momentos 2, viga plano 6 Equipo 1	304
Figura 6.224 Diagramas de momento Equipo 2.....	305
Figura 6.225 Diagrama de momentos M2-2.....	306
Figura 6.226 Diagramas para carga 1,3 <i>Sismo X</i> + 1,9 <i>Sismo Y</i>	306
Figura 6.227 Diagrama de momentos plano YZ.....	306
Figura 6.228 CM extendido con tecnología para la entrega 3	307
Figura 6.229 Geometría de la armadura.....	310
Figura 6.230 Perfil metálico utilizado	310
Figura 6.231 Secciones de acero utilizadas	311
Figura 6.232 Aplicación carga muerta.....	311
Figura 6.233 Aplicación carga viva.....	311
Figura 6.234 Diagrama de esfuerzos axiales.....	311
Figura 6.235 Diagrama de esfuerzos de corte en el plano ZX.....	312
Figura 6.236 Diagrama para momentos flectores en el plano ZX.....	312
Figura 6.237 Modelo de la armadura.....	313
Figura 6.238 Deformada de la armadura.....	313
Figura 6.239 Deformada de la armadura.....	314
Figura 6.240 CM extendido con tecnología para la entrega 4	315
Figura 6.241 Planos verticales activados y CM extendido durante el trabajo con el proyecto	316

Introducción

La modelización matemática ha estado presente en la investigación en didáctica de la matemática por más de cuatro décadas, sin embargo, la literatura muestra evidencia de que aún falta investigación para que esta sea incorporada al aula de clase en el día a día (Kaiser & Brand, 2015; Borromeo, 2018; Blum, 2015). Específicamente en la formación de ingenieros, la modelización matemática presenta una brecha de investigación mayor, pues falta más investigación relacionada con considerar la dimensión didáctica de la modelización matemática en ingeniería y cómo esta puede ser incorporada al sistema educativo, toda vez que la modelización matemática es una competencia necesaria para la formación de un ingeniero (Alpers, 2017; Niss, 2016; Rodríguez, 2018; Romo, 2014).

Estudiar la modelización matemática en ingeniería, permite además, establecer implicancias para la formación en otros niveles del sistema escolar y establecer una transposición de la modelización de un ingeniero o profesional al sistema educativo (Gainsburg, 2013; Frejd & Bergsten, 2016).

En la presente investigación abordamos el estudio de la modelización matemática en la formación de ingenieros desde la teoría de los espacios de trabajo matemático y el ciclo de modelización.

Para llevar a cabo la investigación se desarrollaron 7 capítulos.

En el capítulo 1 se desarrolla la problemática de nuestra investigación relacionándola con la formación de un ingeniero desde la perspectiva de su formación matemática y de su formación por competencias, específicamente en la modelización. Como elementos de antecedentes se muestran investigaciones relacionadas tanto con la modelización en lo general como en la modelización en ingeniería en particular. Se realiza una aproximación a la noción de función y su relación con la modelización. Finalmente, establecemos las preguntas de investigación.

En el capítulo 2 se desarrolla el marco teórico utilizado, para ello se presentan los aspectos utilizados de la teoría de ETM y de los ciclos de modelización (clásico y con tecnología). En este capítulo realizamos adaptaciones a ambos enfoques teóricos, con la finalidad de ser operacionalizados en el estudio de la modelización en ingeniería. Finalmente, establecemos el objetivo general y los tres objetivos específicos de la investigación.

En el capítulo 3 se muestra la metodología, a través de las diversas etapas de la investigación. Para ello, se declara el método a utilizar y se desarrollan las etapas en las que se dividió el trabajo.

En el capítulo 4 se desarrolla una aproximación al ETM de referencia extendido. Para ello, el capítulo se dividió en dos partes. La primera parte 4

(1) consistió en indagar planes y programas de estudio, además de la realización de una observación piloto al aula de ingeniería, ello con la finalidad de sustentar la selección del caso en estudio. La segunda parte del capítulo 4 (2) consistió en desarrollar un ETM de referencia extendido a la ingeniería, para ello se utilizaron libros correspondientes a los tres ejes de formación identificados en el programa curricular, un libro para el eje de formación en ciencias de la ingeniería (Mecánica de Materiales), dos libros para el eje de formación profesional (Análisis Estructural) y un libro para el eje de formación en ciencias básicas (Cálculo). La finalidad del desarrollo de esta segunda parte del capítulo fue contar con nociones de referencia que nos ayudarían a sustentar y comprender las nociones y objetos presentes en nuestro estudio.

En el capítulo 5 se desarrolló el ETM idóneo extendido de un profesor de ingeniería, en el contexto de observación de clases de un curso de formación profesional llamado análisis estructural. Para ello, se analizaron situaciones de clase relacionadas con explicaciones y problemas desarrollados por el profesor.

En el capítulo 6 se trabajó en torno al ETM personal extendido del estudiante de ingeniería. Esto se desarrolla en el mismo contexto del curso de Análisis Estructural, pero en su componente práctica. Para ello se analiza la producción relacionada con la evaluación de un estudiante y en el análisis del trabajo de los estudiantes con un proyecto de modelización de un edificio, el cual tuvo distintas funcionalidades para cada equipo. El trabajo con este capítulo permitió no sólo encontrar resultados internos al capítulo sino también para establecer relaciones con los resultados el capítulo 5.

En el capítulo 7 se muestran las conclusiones de la investigación. Para ello se muestran las conclusiones para cada uno de los objetivos específicos, conclusiones generales. Por último se presentan las limitaciones y perspectivas de la investigación.

Capítulo 1

Problemática y antecedentes de investigación

Capítulo 1. Problemática y antecedentes de investigación

1.1 Contextualización

La formación de estudiantes de ingeniería debe contribuir al desarrollo de competencias profesionales, acordes a las exigencias de diversos organismos acreditadores pero también de competencias que les contribuyan en su futuro desarrollo profesional. En Alpers, et al. (2013), la modelización matemática es una de las competencias necesarias para ser desarrolladas en la formación de ingenieros.

La modelización matemática ha estado presente en la investigación didáctica desde hace más de cuatro décadas y permanece relevante en la agenda de investigación en didáctica de la matemática. Muestra de ello es la preocupación en el tema en los diversos grupos y programas de investigación a nivel internacional, como son el International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), el Congress of European Research in Mathematics Education (CERME) o el International Congress on Mathematical Education (ICME) o en Latinoamérica el grupo Modelación y Tecnología en el marco de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME).

Biembengut (2016) menciona al respecto lo siguiente,

El movimiento por el Modelaje Matemático en la Educación Básica y Superior tiene su inicio en los años 70, en diversos países incluyendo Brasil, por las mismas razones: descontentos y críticas por parte de profesores y de empresarios, en relación a la formación de graduados en áreas que requerirían conocimiento matemático para solución de problemas y la toma de decisiones. (p. 90)

En la actualidad, la modelización es promovida en los currículos de nivel liceo y se espera que los ingenieros sean formados bajo la competencia de modelización, esto de acuerdo al perfil requerido de egreso, como los trabajados en Tuning (2013) quien señala como meta-perfil para la formación de un Ingeniero Civil basado en competencias agrupadas en 4 dimensiones: la dimensión cognitiva, la dimensión tecnológica e internacional y la dimensión interpersonal. Los cuestionamientos que nos hacemos es saber, si y como, la modelización está presente en la sala de clases en la sala de clases, ¿qué problemas son los que se modelan de tal manera que los estudiantes sean formados conforme a las competencias con las que se pretende egresen de la universidad?, ¿de qué manera lo normado por la institución produce la relación entre el trabajo con situaciones reales y lo institucional?, ¿qué implicancias tiene el uso de recursos relacionados con la tecnología digital en la solución de las tareas propuestas a nivel de la profesión?

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Diversos grupos de investigación en modelización matemática dan evidencia de la importancia de su inclusión en el currículo escolar, pero sobre todo en el día a día del salón de clase, e.g en Blum (2015) se presentan las siguientes justificaciones:

- *Justificación pragmática:* la enseñanza de tareas vía la actividad de modelización debe ser enseñada explícitamente en el salón de clase, pues no se considera una transferencia instantánea de conocimiento extra matemático sólo por enseñar contenido matemático formal.
- *Justificación formativa:* el trabajo con actividades de modelización permite formar en el estudiante competencias, sobre todo competencias de modelización y de argumentación basada en pruebas relacionadas con la realidad.
- *Justificación cultural:* que el estudiante visualice a la matemática como una ciencia útil, depende de su relación con contextos extra matemáticos.
- *Justificación psicológica:* al trabajar con este tipo de tareas los estudiantes se sienten más interesados y motivados por crear matemática; ello permite crear un aprendizaje más duradero.

El proceso de modelización matemática puede ser considerado como una meta competencia, ya que se considera que no sólo es útil para abordar situaciones problema sino también para promover el trabajo en equipo, la comunicación, el razonamiento. Realizando un análisis de las prácticas de enseñanza de las matemáticas, podemos observar que se trivializan las prácticas de modelización. En el mejor de los casos se presenta muy someramente y sin un diseño apropiado de instrucción. Fonseca, Casas, Bosch, Gascón (2009) señalan que lo que se enseña respecto de la modelización es más bien una matemática aplicada más que la modelización en sí.

Se hace necesario rediseñar las metodologías de enseñanza actuales de la matemática en la formación de ingenieros, al respecto Camarena, Trejo & Trejo (2013) mencionan que:

Los retos y desafíos de las Universidades, actualmente han cambiado, el desarrollo tecnológico exige que los ingenieros que se formen en la educación superior sean competitivos en el ámbito nacional e internacional para hacer frente al proceso de globalización, por lo que se hace necesario el replantear el porqué de las matemáticas, sus contenidos y la metodología de enseñanza, de modo que los estudiantes tengan la capacidad para ser creativos, innovadores y razonar en torno a la solución de problemas del área de desarrollo que les compete. (p. 398)

Consideramos que en la formación de ingenieros, es importante una enseñanza que produzca un aprendizaje de una matemática que le permite

afrontar de una mejor manera su ejercicio profesional, a través del uso de contextos afines a la ingeniería y enmarcados en procesos de modelización matemática, al respecto, Tosmur & Behiye (2013) se refieren de la siguiente manera,

In order to get more productive engineers in formulating mathematical model of a given physical situation, interpreting its solution and refining its model, mathematical courses should be taught in an engineering context and students should know why and when a mathematical idea is going to be relevant to their engineering discipline. This can be provided by choosing mathematical examples which are relevant to engineering disciplines during the lectures. (p. 37)

Las prácticas de enseñanza pertenecientes a la matemática escolar tienden a presentar un conocimiento acabado, que no permite el libre tránsito de ideas entre los estudiantes ante la situación que se esté abordando. A continuación, se muestran imágenes correspondientes al estudio de la función lineal y cuadrática en un libro de pre cálculo de Zill & Dewar (2012), (Figura 1.2 y Figura 1.2).

Aplicaciones diversas

53. Termómetros La función que relaciona a T_C , en grados Celsius, y T_F , en grados Fahrenheit, es lineal.

- a) Exprese T_F en función de T_C si $(0^\circ\text{C}, 32^\circ\text{F})$ y $(60^\circ\text{C}, 140^\circ\text{F})$ están en la gráfica de T_F .
- b) Demuestre que 100°C equivale al punto de ebullición en grados Fahrenheit, 212°F . Vea la FIGURA 2.3.15.

54. Termómetros: continuación La función que relaciona a T_C , en grados Celsius, con T_K , en kelvins, es lineal.

- a) Exprese T_K en función de T_C si $(0^\circ\text{C}, 273\text{ K})$ y $(27^\circ\text{C}, 300\text{ K})$ están en la gráfica de T_K .
- b) Exprese el punto de ebullición, 100°C , en kelvins. Vea la figura 2.3.15.

Figura 1.1 Aplicaciones función cuadrática (Zill & Dewar, 2012, p.80)

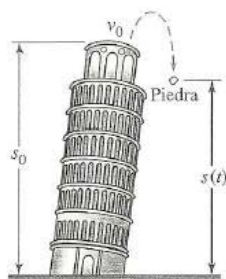


FIGURA 2.4.10 Piedra lanzada hacia arriba desde una altura inicial s_0

□ **Objeto en caída libre** Supongamos que un objeto, como una pelota, se lanza ya sea directamente hacia arriba (hacia abajo) o simplemente se deja caer desde una altura inicial. Entonces, si la dirección positiva se toma hacia arriba, la altura $s(t)$ del objeto sobre el suelo determina con la función cuadrática

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \quad (5)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (-32 pies/ s^2 o -9.8 m/ s^2); v_0 es la velocidad inicial que se imparte al objeto, y t es el tiempo, expresado en segundos. Vea la FIGURA 2.4. Si se deja caer el objeto, entonces $v_0 = 0$. Para deducir la ecuación (5), lo cual es un ejercicio directo en cálculo integral, es que el movimiento se efectúa cerca de la superficie terrestre entonces no se tiene en cuenta los efectos de retardo debidos a la resistencia del aire. También la velocidad del objeto cuando está en el aire se determina con la función lineal

$$v(t) = gt + v_0. \quad (6)$$

Vea los problemas 49 a 52, en los ejercicios 2.4.

Figura 1.2 Aplicaciones función cuadrática (Zill & Dewar, 2012, p. 80)

Como podemos observar, que en dicho libro ambas situaciones se estudian una vez que se han estudiado todos los conceptos matemáticos relacionados con este tipo de funciones, reduciendo a la actividad de modelización sólo como una actividad de aplicación de contenidos.

Una enseñanza que favorezca contenidos descontextualizados, en espera de que el estudiante aplique el conocimiento matemático en el momento en el que lo vaya a necesitar, hace alusión a considerar que el fenómeno de la transferibilidad de conocimiento es eficaz. Existen investigaciones que demuestran la dificultad de aplicar conocimientos para su uso al momento de ser necesitados, cuando se haya tenido por única prioridad a la matemática como objeto de estudio. Wake (2014) la cuestiona de la siguiente manera,

The issue of the transferability of what is learned and known from one setting to another has greatly, and the mathematics education community in particular, over many years.

The classical cognitivist view might be characterized as suggesting that the generality of mathematics and its abstract nature means that it should be possible to easily apply it in a wide range of situations. On the other hand, situated cognition its demonstrate how the context of situations is often inextricably bound up with the development, understanding and learning of mathematics for individuals, and indeed communities, in ways that inhibit such transferability. (p 271)

Bomhoj (2009), menciona que la forma en que la modelización matemática y las aplicaciones se organizan en los planes de estudio y, sobre todo, cómo se evalúan estas partes de los planes de estudio revela una influencia muy limitada de la investigación realizada en educación matemática. Y, cuando se trata con el nivel de la práctica docente en el aula, sigue siendo una cuestión pendiente, en qué medida los numerosos proyectos de modelado

llevados a cabo y analizados por las investigaciones, han influido en realidad sobre las prácticas de enseñanza de la modelización matemática.

Además, la modelización como estrategia didáctica de promoción de contenidos matemáticos está ausente en el currículo de la matemática escolar, pues esta se presenta en el mejor de los panoramas, sólo en la versión de aplicaciones de los contenidos matemáticos previamente aprendidos, debilitando de esta manera la potencialidad de la articulación de la matemática escolar. Al respecto Bosch, García, Gascón, Ruiz (2006), detallan que para explorar la evolución de lo que podemos llamar el “problema de la modelización” en la investigación en la Educación matemática, proponen comenzar a partir de dos cuestiones problemáticas, inicialmente disjuntas:

- 1) Por un lado, la idea de tomar de la matemática sabía los procesos de modelización como una herramienta “valiosa” desde el punto de vista didáctico. Es decir, aquí cabe la pregunta: ¿cómo podrían los procesos de modelización mejorar la enseñanza de las matemáticas y la comprensión de los conceptos matemáticos?
- 2) Por otro lado, la necesidad, en determinadas instituciones, de enseñar explícitamente la modelización como un contenido más, por lo general restringida a la relación de las matemáticas con alguna disciplina concreta, al servicio de un determinado campo profesional o de una formación científica especializada. Es decir, aquí cabe la pregunta: ¿cómo conseguir que los alumnos desarrollen competencias de modelización en relación con su campo científico o profesional de especialización? (p. 44).

De forma personal, como docente, también se evidencia que las prácticas de modelización no se promueven y se construye conocimiento matemático sin su utilización. La comunidad de Didáctica de la Matemática a la que pertenecemos presenta como problemática principal intervenir en el sistema didáctico, con el fin de eficientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, para a su vez formar individuos capaces de valorar la utilidad de las matemáticas en su vida diaria y hacer uso de ellas, es en este sentido que consideramos que trabajar desde el enfoque de la modelización aportan elementos para disminuir esa problemática general.

La promoción de tareas de modelización es un área de investigación relevante para nuestra disciplina, Fonseca, Casas, Bosch, Gascón (2009) afirman que durante muchos años, la “modelización y las aplicaciones” han estado limitadas, en las instituciones escolares, a la aplicación de un conocimiento matemático previamente aprendido por los alumnos a determinadas situaciones más o menos reales, con la doble finalidad de mostrar su utilidad y servir de motivación al aprendiz. Aún hoy en día este

uso perdura en los sistemas de enseñanza. Sin embargo, en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, la “modelización y las aplicaciones” constituye un dominio de investigación que no ha dejado de crecer intensamente en los últimos años.

Es en este mismo grupo español de investigación en modelización donde se problematiza la enseñanza de la matemática vía el aplicacionismo, Serrano (2013) a través de un estudio de modelización matemática en la enseñanza de la economía en la Universidad lo menciona así:

En las instituciones escolares (tanto en el bachillerato de ciencias sociales como en la enseñanza universitaria), se considera que las matemáticas no son de ninguna manera constitutivas del conocimiento económico ni necesarias para la resolución de problemas empresariales. Las matemáticas una vez construidas, se aplican a las ciencias económicas sin “contaminarse” por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática económica a cuyo estudio contribuyen. Se supone que las matemáticas y la economía tienen una existencia y un desarrollo independientes. La actividad de modelización se entiende así como una mera “aplicación” del conocimiento matemático previamente construido o, en los casos más extremos, como una simple “ejemplificación” del uso de las herramientas matemáticas a ciertos sistemas económicos que, en ocasiones, se construyen artificialmente para que se ajusten a la utilización de las herramientas matemáticas que se quieren aplicar. (p. 51)

1.2 La modelización matemática en ingeniería

1.2.1 Modelización matemática

Bassanezi & Biembengut (1997) señala que la modelización matemática es la que se utiliza en el campo de la modelización profesional y que la modelación matemática es un método que se utiliza con la finalidad de enseñar y aprender matemática. Bassanezi & Biembengut aluden el término Modelación a una contracción entre los términos Modelización y Educación. Modelación = modelización más educación. Entonces, dado que nuestros sujetos de estudio pertenecen al área de ingeniería y los problemas son de ingeniería, utilizamos el término modelización matemática para nuestra investigación.

Es a partir del término Modelización que consideraremos el proceso de solución de un problema pero también las implicancias para la educación matemática de ingenieros. Por lo tanto, la modelización matemática retoma principios de la modelización profesional pero ésta considera los aspectos didácticos que deben ser tomados en cuenta cuando es transpuesta a escenarios escolares. Al respecto, Frejd & Bergsten (2016), mencionan que, para realizar la transposición didáctica de la modelización matemática es necesario tomar en cuenta cómo ésta es conceptualizada y utilizada por la modelización matemática involucrada en modeladores profesionales,

considerando a estos en escenario de lugares de trabajo, instituciones de investigación, situaciones de la vida diaria.

De esta manera la modelización matemática se preocupa de qué tipo de tareas son las idóneas para llevar a un salón de clase en un determinado nivel académico, de cómo puede ser un proceso de formación de profesores en formación, en capacitación continua o en ejercicio, de cuál será el proceso de evaluación cuando la modelización es considerada como método de enseñanza y aprendizaje de la ingeniería. Específicamente, en el caso de la formación de ingenieros, la modelización matemática conduce a investigaciones relacionadas con el tipo de situaciones que los estudiantes de ingeniería modelan y cómo este tipo de situaciones pueden ser consideradas en la trasposición didáctica para la clase de matemática.

Modelización en el sentido de Pollak (2012) es la interacción entre el mundo real (extra matemático y lo matemático), a través de, un proceso en el que la interconexión entre ambos mundos es seguida a través de un proceso (p.e. el proceso de las siete etapas de Blum-Borromeo). En esa interacción, el conocimiento de las situaciones extra matemáticas en conjunto con lo matemático conduce a la creación de un modelo matemático, del cual se obtienen resultados que son interpretados y confrontados con la situación real.

Se puede ver que, en el proceso de modelización se realiza una separación entre el mundo de la matemática y el mundo de la realidad, esta tradición es muy utilizada en los países de habla alemana, Blum (2015) establece que está interesado en “estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el contexto de las relaciones entre la matemática y el mundo extra-matemático”. (p.77) Greefrath y Vorholter (2016) mencionan que, en el proceso de modelización en los países de habla alemana se considera una separación entre las matemáticas y la realidad.

El modelo matemático, que es parte del proceso de modelización matemática. Una definición de modelo matemático desde el enfoque de mapeo entre los contextos extra matemáticos y la matemática es presentada en Niss (2012)

A Mathematical Model can be defined in terms of an extra-mathematical domain, D , a mathematical real, M , and a mapping (translation), f , from D to M . Metaphorically, we can then think of a mathematical model as the triple (D, F, M) , which indicates that each of D , F and M is an indispensable component of the model. Sometimes F is also called a “mathematisation” of D by means of M . (p. 50)

En Kaiser y Sriraman (2006), se presentan diversas perspectivas de modelización matemática, posteriormente en Blomhoj (2009) son utilizadas para categorizar las aportaciones realizadas en el marco del congreso de

ICME 11 dentro del grupo de trabajo “Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics”.

Si bien, puede resultar complejo ubicar un trabajo en modelización bajo una sola perspectiva, podemos mencionar que, coincidimos con la visión de la perspectiva educacional, debido a que, bajo esta perspectiva, la modelización es trabajada desde el enfoque de competencia y a su vez es considerada como una alternativa para la enseñanza de la matemática. Además, se considera crucial que los sistemas educacionales la consideren en sus diseños curriculares. Las nociones desarrolladas bajo esta perspectiva son: modelo, modelización, ciclos de modelización, aplicaciones de la modelización y competencia.

1.2.2 Modelización en ingeniería

No obstante al reconocido desarrollo que ha tenido la investigación en modelización matemática, aún queda muchas cuestiones abiertas o que se deben profundizar, específicamente en el problema que nos atañe, la de la formación de ingenieros, por lo que coincidimos con (Alpers, 2017; Rodríguez, 2016, 2018; Romo 2014). Siendo conscientes de que si bien la modelización matemática está presente en planes y programas de estudio, queda aún limitada, en el sentido del abordamiento didáctico que se necesita para enseñar a modelar a futuros ingenieros o en la naturaleza de los problemas de modelización que puedan ser llevado al aula en el marco de una institución escolar.

En el marco de discusión del grupo (Mathematics Working Group) de la Sociedad Europea Formación de Ingenieros (SEFI por las siglas en francés) Alpers (2010) presenta un resumen sobre la formación matemática de ingenieros desde la competencia de modelización matemática. Dicha discusión fue precedida por Gabriele Kaiser, y se asociaron las competencias de modelización con las diferentes etapas que pueden ocurrir durante el proceso de modelización (ya sea bajo el trabajo con algunas de las etapas o con el ciclo completo).

En el reporte de discusión, se concluye que, las competencias de modelización son muy importantes para la formación de un ingeniero, “In the group discussions it was recognized that modeling competencies are quite important for engineers. It is necessary for engineers to understand the problems of customers by sort of turning a problem situation into a real model” (p.1). Además, se destaca que, etapas como la validación (ser críticos de los resultados obtenidos en los resultados matemáticos especialmente cuando usan herramientas (software), adquirir sentido de dirección con el objetivo de que el estudiante monitoree su propio trabajo y la habilidad de argumentar sus soluciones, son necesarias para aportar en la competencia de modelización en ingeniería.

Posteriormente, en ese mismo grupo de discusión, Alpers (2016) reporta un resumen sobre Mathematical Competence en el marco de 18 SEFI Mathematics Working Group Seminar, donde basado en la noción de competencia matemática de Niss & Jensen (2011), se destaca de nuevo la competencia de modelización para la formación de ingenieros: como motivación al estudiante, como útil para el diálogo entre colegas de las asignaturas de matemáticas y de las asignaturas de especialidad, e incluso por su utilidad para formarlos de acuerdo a los requerimientos de los empleadores de la industria. Basándose en su importancia para crear sentido de utilidad a la matemática, al ser utilizada en contextos de ingeniería, desarrollando así motivación en el estudiante:

"Students need more motivation when dealing with mathematical concepts. They have to see the connections to engineering reality, mere hints on important later usage are not sufficient. Since the competence concept puts emphasis on doing and using mathematics in relevant contexts and situations, it provides orientation in this direction". (p.1)

Con el propósito de establecer un trabajo entre disciplinas que conforman el currículo de ingeniería, en el MWG 18, se menciona la importancia del trabajo entre colegas miembros del área de formación en matemática y del área de asignaturas de aplicación en ingeniería, pues ello posibilita retroalimentación útil para trabajar contextos cercanos al ingeniero

"For getting information on relevant contexts and forms of usage a close linkage with colleagues teaching application subjects is required. The split of responsibility between mathematics and application subjects needs to be discussed, particularly regarding the modelling competency, since the colleagues are the experts on relevant models in their fields of application". (p.1)

Por otra parte, la modelización en ingeniería contiene elementos de la modelización matemática a su servicio, por lo que tanto nociones matemáticas asociadas a un proceso de matematización vertical como nociones de ingeniería asociadas a un proceso de matematización horizontal y propiamente hablando a la relación de dichas nociones con contextos extra matemáticos. Siendo así que los escenarios de ingeniería establecen una relación entre ambos mundos: el matemático y el ingenieril, contribuyendo a estudiar genuinos procesos que promueven la competencia de modelización matemática en el sentido de Niss & Hojgaard (2019).

1.2.2.1 Exigencias institucionales

El estudio de la construcción de nociones matemáticas vía la modelización en estudiantes de ingeniería está declarada implícitamente en el currículo cuando se menciona que el estudiante desarrollará la habilidad para resolver problemas propios de la disciplina. Es importante resaltar que no existe la promoción de actividades de modelización y dista mucho de lograrse lo que el currículo pretende, incluso y a priori ello se puede visualizar en los

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

contenidos matemáticos solicitados por instituciones acreditadoras de programas de ingeniería, responsables de vigilar la calidad académica de las mismas, donde la modelización luce ausente.

En México, uno de los programas acreditadores de programas de calidad en ingeniería es el Consejo para la Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería, cuya misión es:

Contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación superior en el área de las ingenierías, mediante la prestación del servicio de acreditación de programas de enseñanza en este campo del conocimiento, en tal forma que la sociedad pueda identificar cuáles son aquellos programas o carreras que satisfacen un determinado conjunto de estándares y parámetros que garantizan un alto nivel de calidad de su quehacer académico.

Este organismo declara a su vez lo que se espera de los estudios de matemáticas en ingeniería:

Contribuir a la formación del pensamiento lógico-deductivo del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza.

El Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería, CACEI (2014) explicita que los contenidos mínimos exigidos para ciencias básicas y en particular para matemáticas, como aparece en la siguiente (Figura 1.3)



ANEXO 4	CONTENIDOS TEMÁTICOS MÍNIMOS	RESUMEN
CIENCIAS BÁSICAS PARA TODAS LAS CARRERAS		
MATEMÁTICAS	FÍSICA	QUÍMICA
Algebra Cálculo Geometría Analítica*** Ecuaciones Diferenciales Probabilidad y Estadística Métodos Numéricos	Mecánica Electromagnetismo Óptica*** Acústica*** Termodinámica Física Moderna* Física de Semiconductores** Estructura y Propiedades de los Materiales***	Química Básica Química Orgánica**** Química Analítica****

Figura 1.3 Contenidos matemáticos mínimos para los programas de ingeniería

Y presenta un desarrollo para la matemática (Figura 1.4) en específico que corresponde a cada uno de los dominios presentados en la figura anterior:



ANEXO 4	CONTENIDOS TEMÁTICOS MÍNIMOS-DESGLOSE	CIENCIAS BÁSICAS

MATEMÁTICAS

ALGEBRA LINEAL: 1. Números reales y complejos. 2. Polinomios. 3. Funciones. 4. Sistemas de ecuaciones lineales. 5. Matrices y determinantes. 6. Espacios vectoriales. 7. Transformaciones lineales. CALCULO. 1. Límites y continuidad. 2. Derivación y aplicaciones físicas y geométricas. 3. Diferenciación. 4. Sucesiones y series. 5. Las integrales definida e indefinida. 6. Métodos de integración. 7. Funciones escalares de varias variables. 8. Derivación y diferencias de funciones de varias variables. 9. Extremos para funciones de varias variables. 10. Funciones vectoriales. 11. Integral de línea. 12. Integrales múltiples. 13. Funciones de variable compleja. 14. Análisis de Fourier.

Figura 1.4 Desarrollo para cada dominio de la matemática propuesta

Se puede evidenciar que tareas relacionadas con la resolución de problemas o modelización de situaciones quedan por demás implícitas y se delegan como responsabilidad a afrontar por las instituciones de educación superior que sean acreditadas.

Con respecto a Chile, el organismo que acredita las carreras de ingeniería es la Comisión Nacional de Acreditación (CNA), siendo esté el mismo organismo acreditador del sistema educativo universitario en general.

1.3 La competencia de modelización en ingeniería

Se considera que vía modelización matemática, los estudiantes de ingeniería pueden aplicar los conocimientos adquiridos, pero también, se considera la modelización matemática como la vía en la que el estudiante desarrollará y construirá su conocimiento matemático. Al respecto, Rodríguez (2016, 2018) menciona que, el desarrollo de actividades de modelización da elementos para promover un aprendizaje significativo (en su caso desarrolla actividades donde el objeto matemático interviniente son las ecuaciones diferenciales en ingeniería) de las matemáticas, en tanto objeto matemático así como herramienta para la modelización de diversos fenómenos.

Hitt y Cortés (2009) mencionan que la modelización matemática es importante en la mayoría de las aplicaciones de las matemáticas a las otras ciencias. Su utilidad ha sido demostrada constantemente con las aplicaciones de la matemática en la física, ingeniería, comercio y administración, por mencionar solamente algunas. La importancia del modelo no solamente puede servir para explicar el fenómeno con los datos con los que se cuentan en ese momento, sino también para predecir lo que podría suceder con el pasar de los años.

En específico, en la formación de ingenieros, precisa que se desarrollen competencias básicas necesarias para su quehacer profesional, dependiendo del país de origen las instituciones de educación superior prescriben el perfil

de egreso por competencias genéricas y específicas. Existen diversos organismos que sirven como acreditadores o que proporcionan estrategias metodológicas para el desarrollo de programas y perfiles de titulación de los estudiantes, tal es el caso del Consejo para la Acreditación para la Enseñanza en Ingeniería en México o el Proyecto Tuning de Latinoamérica.

En el Proyecto Tuning de Latinoamérica participan 18 países formando una red de colaboración, en un marco metodológico que sirve de base para la creación de perfiles de egreso y el diseño de planes de estudio. Específicamente para la carrera de Ingeniería Civil Tuning (2013) establece las siguientes competencias genéricas:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis.
- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.
- Conocimientos sobre el área de estudio y la profesión.
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.
- Habilidades en el uso de tecnologías de la información y de la comunicación.
- Capacidad para tomar decisiones.
- Capacidad de trabajo en equipo.
- Capacidad para formular y gestionar proyectos.
- Compromiso ético.
- Compromiso con la calidad.

El proyecto seleccionó una competencia de las anteriores y estableció las sub-competencias que el estudiante debe evidenciar como logro de la misma. La competencia seleccionada fue: identifica, plantea y resuelve problemas.

Esta competencia se definió como: Habilidad que posee un graduado universitario de identificar problemas de la realidad, plantear un modelo de resolución y sus posibles soluciones, de acuerdo a su área de estudio.

Resultados esperados para esta sub-competencia:

- Identifica e interpreta problemas dentro de un contexto (de la realidad).
- Formula una hipótesis.
- Identifica los principios que intervienen en la resolución del problema.
- Delimita y modela el problema.
- Plantea soluciones al problema.
- Selecciona y justifica una solución.
- Valida la solución.

En las competencias sugeridas para el egreso de un ingeniero presentadas de acuerdo al proyecto Tuning se evidencia la importancia de la promoción

del desarrollo de contenidos matemáticos vía la modelización. Con respecto a la formación por competencias, Rodríguez (2016) menciona que, en la formación de ingenieros las competencias de índole matemáticas deben ser promovidas en conjunto con competencias de habilidades del uso de tecnología y de colaboración, tal como se pretende lograr con la propuesta de enseñanza vía la modelización.

Maaß (2006) señala que la formación en la competencia de modelización requiere que los estudiantes pasen por las distintas etapas del proceso de modelización. Señala las siguientes subcompetencias asociadas a las etapas del proceso de modelización:

- o Competencias para comprender el problema real y configurar un modelo basado en la realidad.
- o Competencias para montar un modelo matemático a partir del modelo real.
- o Competencias para resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático.
- o Competencias para interpretar resultados matemáticos en una situación real.
- o Competencias para validar la solución (p. 139)

Además, Maaß (2006) señala que existen otras competencias indispensables para desarrollar la competencia de modelización, como es la meta cognición (autorregulación de los procesos de pensamiento), las actitudes del modelador (matemáticas y propias del modelado) y tener un claro objetivo de dirección sobre qué es lo que se quiere resolver en el problema a modelar. Entonces, observamos coherencia con las competencias que promueve el proyecto Tuning para la formación de ingenieros, pues los ingenieros no deberán solamente resolver problemas sino también deben tener presentes los objetivos de la situación que estén modelizando y tener la capacidad de reflexionar sobre sus propios procesos de solución, tanto en lo individual como en equipo.

Niss & Hojgaard (2019) mencionan que la matemática es utilizada desde situaciones cotidianas hasta situaciones académicas o científicas donde la construcción o uso de modelos matemáticos se hace presente ya sea de manera explícita o implícita.

Específicamente en ingeniería, Alpers (2017) declara que los estudiantes de ingeniería se enfrentan a situaciones en las cuales deben resolver problemas a través de construir y/o utilizar modelos matemáticos, por lo que considera que la competencia de modelización matemática es central en la formación de ingenieros.

Además, Kaiser & Brand (2015) declaran que si bien el constructo competencia de modelización matemática ha sido abordado en la investigación aún falta por investigar el rol de la noción de competencia y cómo esta se puede caracterizar en los diferentes niveles académicos. Cabe

señalar, que para ellas la competencia de modelización es más que una habilidad; es además, la disposición del sujeto para afrontar una situación de modelización.

Niss & Hojgaard (2019) en el marco del proyecto Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas (KOM en su sigla en danés) definen ocho competencias matemáticas, una de ellas es la competencia de modelización matemática. Además, se establece que las competencias están interrelacionadas, definiendo la competencia de modelización matemática como sigue:

This competency focuses on mathematical models and modelling, i.e., on mathematics being put to use to deal with extra-mathematical questions, contexts and situations. Being able to construct such mathematical models, as well as to critically analyse and evaluate existing or proposed models, whilst taking purposes, data, facts features and properties of the extra-mathematical domain being modelled into account, are the core of this competency. It involves relating to and navigating within and across the key processes of the “modelling cycle” in its various manifestations (p.16).

Cabe señalar, que en su definición de competencia de modelización matemática, consideran que el conocimiento extra matemático debe ser explícito y guardar una genuina relación con el mundo matemático. En nuestro caso ese dominio extra matemático son los problemas de ingeniería que se resuelven tanto en contexto de clase como de proyecto, donde lo extra matemático corresponde a situaciones de ingeniería en contexto de clase y lo relacionado con la matemática son los modelos utilizados y contruidos a partir de nociones de cálculo.

1.4 La modelización como promotor de vínculos entre los diversos ejes de formación en ingeniería

Favorecer el aprendizaje de la matemática es una tarea elemental para los programas de ingeniería, pues ello permitirá que el estudiante desarrolle competencias tanto disciplinares como profesionales. Son diversas las dimensiones que se favorecen con un adecuado aprendizaje de la matemática.

Por una parte, está el favorecer el trabajo matemático dentro de la disciplina misma, pues permite que el entendimiento adecuado en una asignatura sea favorecedor de una mejor comprensión en una asignatura de matemática subsiguiente, por ejemplo una adecuada comprensión en cálculo 1 permitiría una mejor comprensión en cálculo dos y así sucesivamente (el orden no es necesariamente lineal). Entonces se favorecería en entendimiento del conocimiento matemático en asignaturas de matemáticas.

Por otra parte, el adecuado entendimiento de la matemática puede favorecer en el estudiante de competencias disciplinares relacionadas con el uso de las mismas en asignaturas fuera del eje de las matemáticas, como es el su uso y aplicación en el eje de asignaturas en ciencias de la ingeniería o incluso en el eje de asignaturas de aplicación. Entonces favorecería el entendimiento en las asignaturas no matemáticas (de la especialidad).

Una consideración final, es que permitiría el desarrollo de competencias para afrontar un escenario profesional. Godwin & Iwuchukwu (2013) mencionan que: "Mathematics is the heart of engineering, being both a language for the expression of ideas and means of communicating results. Engineering mathematics has always been the fundamental and important courses in engineering curriculum. Engineering students are required to understand the fundamental of mathematics and apply this knowledge to solve real world problem" (p.523)

Para promover la formación por competencias del estudiante de ingeniería, nos parece necesario que, a nivel escolar, se establezcan diálogos entre los diversos ejes de formación de ingenieros (Figura 1.5). En este sentido, la transposición didáctica de la matemática, debiera tomar en cuenta no sólo los saberes involucrados en la matemática como disciplina sino también otros saberes, como por ejemplo, los pertenecientes a contextos propios de la ingeniería.

En la formación de ingenieros se reconoce que, institucionalmente, por un lado están las asignaturas relacionadas con las matemáticas, donde el objeto de estudio es la matemática como disciplina. Por otra parte está la formación de asignaturas de ingeniería donde la matemática deja de ser el objeto de estudio y se convierte en una herramienta para la solución de problemas (Wake, 2016). A su vez, (Bissell & Dillon, 2000) declaran que en el ejercicio profesional de la ingeniería el uso de la matemática interviene en la explicación y el diseño de modelos (entre otros) esto por sobre un uso intra matemático, tal como pudiese ser resolver una integral o una derivada.

A continuación, se esquematiza (Figura 1.5) el diálogo que proponemos debe establecerse para desarrollar la modelización en ingeniería. Por tanto, un diálogo entre las asignaturas de ciencias básicas con las de ciencias de la ingeniería y así mismo con asignatura del eje de formación profesional, permitiría abordar tal competencia, cuestión que nos parece fundamental para establecer una retroalimentación bidireccional entre los diversos ejes de formación.

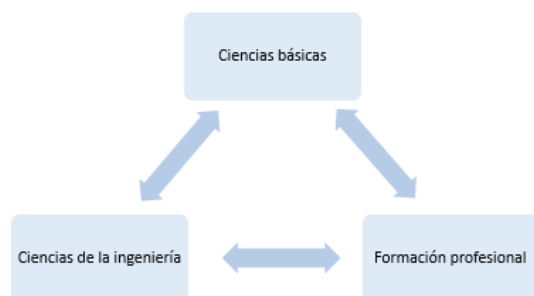


Figura 1.5 Relación entre los ejes de formación en ingeniería

Tal vínculo no es una tarea fácil, y presenta una brecha de investigación, el caracterizar espacios de trabajo matemático en ejes de formación externos al eje de ciencias básicas. La necesidad antes mencionada se hace presente en la Asociación Europea de Educación en Ingeniería (Alpers, et al., 2013) que declara lo siguiente: "It is obvious that a strong link between those responsible for mathematical education and those who are in charge of proper engineering courses is decisive for achieving a good integration of mathematics into the engineering curriculum". (p.65).

Además, Van der Wal, Bakker, & Drijivers (2017) al investigar sobre las ideas y opiniones sobre el uso de la matemática aprendida en un contexto escolar con respecto a la matemática utilizada en contextos profesionales de ingeniería, encontraron que, en la formación matemática de ingenieros, el uso de contextos profesionales son necesarios no sólo para la motivación sino también para entender las nociones matemáticas, lo que refuerza nuestra idea de una vinculación entre matemática con ingeniería.

Para fomentar un diálogo, proponemos que este sea mediante el enfoque de la modelización, pero para ello, es necesario conocer la naturaleza de las tareas de modelización a las que son enfrentados los estudiantes de ingeniería, en particular cuando estudian una asignatura de formación profesional. Al referirnos a la modelización en ingeniería, nos cuestionamos por las características de los problemas de modelización que son abordados en ingeniería, los procesos involucrados y los objetos matemáticos que emergen en los modelos tratados.

Consideramos que, tanto por el aspecto de formación de ingenieros desde la modelización como por la necesidad del vínculo (Fig.1), es necesario caracterizar y desarrollar espacios de trabajo matemático completo y coherente, a través de, tareas capaces de desarrollar esa potencialidad. Esto es, tanto para la formación de ingenieros (Romo, 2014; Rodríguez, 2016, 2018; Bissell & Dillon, 2000), como para la formación matemática en general (Kaiser y Brand, 2015; Blum & Borromeo, 2009; Blum, 2015; Borromeo, 2018). Al respecto Tosmur y Behiye (2013) mencionan que los cursos de matemáticas deben ser enseñados utilizando contextos propios

de la ingeniería, con la intención de promover una matemática más relevante para la ingeniería.

Con respecto la figura 1.2, se puede observar que para abordar la formación del estudiante de ingeniería donde la modelización matemática, se hace necesario vincular las asignaturas de matemática con las asignaturas de los ejes correspondientes a las ciencias de la ingeniería y/o ciencias del diseño (especialidad). Tal vínculo no es una tarea fácil y presenta una brecha de investigación, el caracterizar espacios de trabajo matemático en ejes de formación externos al eje de ciencias básicas. La necesidad antes mencionada se hace presente en (SEFI, 2013) que declara lo siguiente: "It is obvious that a strong link between those responsible for mathematical education and those who are in charge of proper engineering courses is decisive for achieving a good integration of mathematics into the engineering curriculum" (p.65)

Recientemente, la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), a la cual los únicos países latinoamericanos pertenecientes son México y Chile, publicó un libro sobre las habilidades que debieran tener las personas adultas para afrontar situaciones laborales (OECD Skills Outlook, 2017). La habilidad cognitiva las define como "these skills involve the understanding interpretation, analysis and communication of complex information and the ability to apply this information in situations of everyday life. These skills are general in nature and relevant for all kinds of occupations, considered necessary to provide a foundation for effective and successful participation in social and economic life (p.14)

En la literatura, las habilidades relacionadas con la componente matemática siempre han presentado un área de oportunidad, donde existen aún mucho trabajo por hacer, por parte de los distintos actores, desde los pertenecientes a los escenarios educativos hasta los relacionados con políticas gubernamentales en lo general. Ante ello, es conveniente mencionar que la relación de los adultos con las habilidades relacionadas con literacy y numeracy presentan debilidades según el programa PIAAC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies), por lo que, según la OCDE, los gobiernos necesitan implementar políticas estructurales que permitan el desarrollo de habilidades en los adultos, de tal manera que estén preparados para la globalización.

Si a lo anterior (desarrollo de habilidades cognitivas en escenarios escolares) se le añade la componente que corresponde a escenarios laborales, el esquema que vincula ambos escenarios queda representado de la siguiente manera (Figura 1.6)

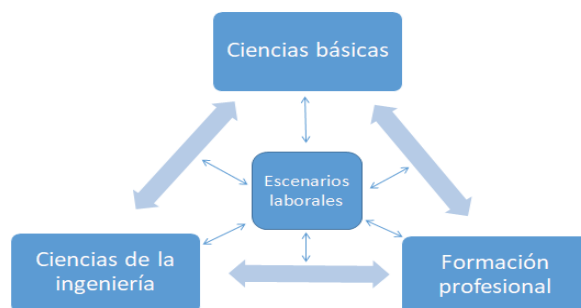


Figura 1.6 Relación entre los ejes de formación en ingeniería considerando los escenarios de labor

Considerando lo anterior, es importante que la transposición de contenidos matemáticos en la enseñanza en ingeniería, considere no sólo al saber sabio de la disciplina matemática, sino también al saber en uso trabajado en las disciplinas correspondientes a los ejes de Ciencias de la Ingeniería y/o de formación profesional. Por tanto, el uso de los objetos matemáticos que forman parte de la actividad del estudiante en el eje de ciencias de la ingeniería dista del uso de los objetos matemáticos aprendidos en las asignaturas de ciencias básicas. Un ejemplo se tiene en el siguiente problema, donde se considera la situación de calcular la fuerza hidrostática sobre las paredes de un recipiente.

En un contexto puramente matemático en Flores, Valencia, Dávila, & García (2008) se muestra uno de los objetos que a priori podrían ser utilizados cuando el alumno aborde la tarea, el de integral en una variable y su expresión para la evaluación de la integral de una función:

Si una función continua tiene una primitiva, entonces la integral de la primera sobre cada intervalo cerrado es igual a la diferencia de valores de la primitiva en sus extremos.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f , es decir $\frac{dg}{dx}(x) = f(x)$.

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dg}{dx}(x)dx = g(b) - g(a)$

Es importante aclarar que en nuestro trabajo consideramos que una situación en contexto no es “*per se*” una actividad de modelización (como si podría serlo por ejemplo para el grupo de modelización de la Teoría Antropológica de lo Didáctico o para el grupo de la Educación Matemática Realista), pues de acuerdo a lo planteado en Blum (2015) esta debe exigir una alta demanda cognitiva en el estudiante, y esa demanda es producto de una serie de factores, como por ejemplo la naturaleza de la tarea en sí misma, la cual debe ser real y preferentemente de interés para el estudiante. Además, en el ámbito de la matemática la tarea debe permitir el trabajo con el modelo matemático planteado, pero además, se debe facilitar que la tarea permita una continua vinculación entre la parte real y la parte matemática para de esa manera crear escenarios donde las

situaciones de validación permitan al estudiante argumentar sus producciones y resultados.

Tomando en cuenta lo anterior y a reserva de lo que la tarea presentada pueda representar en cuanto a la modelización, un ejemplo de situación en contexto extra matemático, donde la necesidad del uso del objeto integral de una función es el propuesto en Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio., Garza, José (2012) se presenta a continuación

Un estanque lleno de agua (Figura 1.7) tiene una de sus paredes inclinadas, formando un ángulo de 30° con la vertical, como se muestra en la siguiente figura, la profundidad del estanque es de 8 metros y su base es cuadrada con 10 metros de lado.

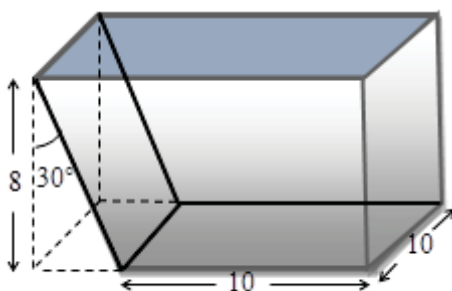


Figura 1.7 Recipiente conteniendo el líquido
(Salinas, et. Al, 2012, p.95)

La tarea anterior necesita que el estudiante modele primero la función matemática que le permitirá posteriormente, a través del teorema fundamental del cálculo, calcular el cambio acumulado de la magnitud fuerza hidrostática sobre las diversas paredes del recipiente mostrado.

El problema presentado nos da evidencia de la importancia de contextualizar la matemática en situaciones afines a la ingeniería, donde los objetos matemáticos adquieren significados de acuerdo al contexto. Es importante indagar en cómo una situación de modelización puede impactar en la relación entre el contexto, la modelización y la formación de ingenieros. La modelización matemática en ingeniería debe ser parte de su formación profesional.

En SEFI (Alpers et al., 2013) la modelización matemática es una de las competencias necesarias para ser desarrolladas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en las escuelas de ingenierías, primero establece como una de las competencias necesarias en el aprendizaje de la matemática de manera general y basados en la noción de competencias matemáticas promovidas como una de las ocho competencias del KOM Project:

Modelling mathematically: This competency also has essentially two components: the ability to analyse and work in existing models (find

properties, investigate range and validity, relate to modelled reality) and the ability to 'perform active modelling' (structure the part of reality that is of interest, set up a mathematical model and transform the questions of interest into mathematical questions, answer the questions mathematically, interpret the results in reality and investigate the validity of the model, monitor and control the whole modelling process. (p. 14)

De la definición de competencia de modelización anterior, podemos observar que, no sólo se requiere establecer un proceso de modelización completo, sino además, de tener la capacidad de usar y comprender modelos existentes, lo anterior guarda concordancia con nuestro estudio, pues en algunas ocasiones los estudiantes de ingeniería deben usar modelos preexistentes. Pero aquí, es importante que se haga un verdadero uso de esos modelos, a través de, la comprensión conceptual, procedimental y de aplicación del modelo y que este no sea utilizado solamente como una fórmula al estilo de una caja negra, donde solo se le sustituyan datos para obtener resultados. Específicamente, con respecto a la competencia de modelización matemática en ingeniería en SEFI (2013) se le define de la siguiente manera:

Regarding the competency of mathematical modelling, students should be able to use well-known modelling means (like forces, torques, equilibrium principle, cutting principle) learnt before (mostly in application subjects) to set up models in different situations (for example model a mechanical configuration by identifying important forces and using equilibrium equations; use the function concept for modelling motion). Students are not expected to develop new modelling means but they should be able to reflect on useful simplifications and on the validity of a simplified model. (p. 19)

Las cuestiones relacionadas con la educación matemática en el nivel superior, y específicamente ingeniería, son evidenciados en estados del arte elaborados en el marco de los congresos ICME, por ejemplo el libro sobre estado del arte "Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State of the Art and Lookings Ahead (ICME 13), donde tratan con temáticas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario. A saber: el rol de las matemáticas en otras disciplinas enseñadas en el nivel superior, el papel de los libros de texto, la evaluación y las prácticas de estudio de los estudiantes y la última temática trabajada es sobre la transición de la escuela al nivel universitario, los avances teóricos – metodológicos para la investigación en educación matemática para el nivel superior.

Dentro de las temáticas señaladas anteriormente, nos es pertinente comentar la que tiene que ver con el rol de las matemáticas en la formación de otras disciplinas, debido a que, nuestra investigación guarda relación con la formación matemática para no matemáticos, y nos cuestionamos la naturaleza de la matemática que necesita ser enseñada, y aprendida por los ingenieros. De esta manera, es como conectamos a través del proceso

de transposición didáctica (en (Chevallard) del saber sabio al saber a enseñar y enseñado, pues consideramos que, para realizar tal transposición es necesario considerar que en la formación matemática de los sujetos de estudio se promueva un diálogo entre la matemática y otras disciplinas.

En esta misma temática, donde se cuestionan las matemáticas en el sistema escolar de los no matemáticos, el libro habla sobre las matemáticas y sus aplicaciones, específicamente sobre la modelización, mencionando a Frejd & Bergsten (2016) quienes analizaron a la modelización matemática como una tarea profesional. En su artículo, mencionan lo que relatamos en el párrafo anterior pues enfatizan que si la modelización matemática es considerada como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, esta debiera pasar por una transposición donde lo sabio no sólo provenga de la matemática formal sino también de cómo los modeladores profesionales tratan con la modelización en sus diversos escenarios profesionales. Poniendo de relieve a la modelización matemática en los procesos de transposición de la matemática.

1.5 La modelización en su estatus de construcción de conocimiento matemático

Si bien estamos interesados en estudiar el rol de la modelización matemática en la formación del estudiante de ingeniería, en cursos de ingeniería; también se buscan las relaciones, entre asignaturas de formación matemática y de formación en ingeniería, de la modelización cuando ésta se considera como una herramienta para la construcción de conocimiento matemático. En cuanto al estatus de construcción de conocimiento matemático, consideramos estudiar relaciones en torno al objeto matemático función. Específicamente, funciones reales de variable real (noción relacionada con la función, derivada e integral) y la forma en la que estas son utilizadas como modelo matemático en situaciones de ingeniería.

El objeto función, es basal dentro de la enseñanza en ingeniería, como representación de diversos fenómenos donde es posible relacionar diversas variables intervinientes y de esta manera generar un modelo matemático para su estudio, análisis y validación; y a su vez, dentro de la matemática misma, pues es un concepto central y transversal, en el sentido de que la noción de función puede ser estudiada, a través de, diversos roles, desde el concepto mismo hasta su relación con objetos matemáticos como la derivada o la integral.

El estudio del objeto matemático función, puede ir en dos direcciones:

1. Para construir modelos de situaciones extra matemáticas que tengan involucrada la noción de función (Herramienta)

2. Para construir la noción dentro del ámbito de la matemática (intra matemática (Objeto matemático))

Con relación a lo anterior, Rodríguez (2016) menciona que el proceso de modelización proporciona la posibilidad de que el estudiante aborde situaciones extra-matemáticas y así mismo asocie significados que permitan el entendimiento en tanto objeto matemático (en su caso las ecuaciones diferenciales)

Es necesario que, el sistema educativo considere ambos aspectos importantes, en cuanto a la educación matemática. Considerar la utilización de la matemática por los futuros ingenieros y considerar la comprensión de los objetos matemáticos. De un adecuado manejo de estos aspectos dependerá también que los estudiantes aborden de una manera más reflexiva tanto sus asignaturas de matemáticas como las materias donde las utiliza; y así mismo al momento de ser un profesional de la ingeniería. Una reflexión al respecto es presentada por Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin & Ohtani (2017),

A self-evidence issue here is the role of more formal mathematics. Our focus has mainly been on the practical value of mathematics in the world outside school. The goal of mathematics education, however, is also to prepare students for further education to which we may add the importance of understanding and appreciating mathematics as a goal in and of itself. Thus, a proper balance will have to be sought. (p. 118)

En esta misma dirección, Wake (2014) también establece la importancia de que los estudiantes aprendan matemática con la doble finalidad, tanto en su uso, como por su importancia *per se*, criticando al sistema educativo que diseña currículos de matemática donde la prioridad es considerar a la matemática como el único objeto de estudio, siendo que cuando el estudiante por ejemplo es un futuro profesionista, deberá desempeñarse utilizando la matemática como una herramienta, cuya utilidad aportará en la producción de resultados, mencionando que "In school, mathematics is mainly the object of study, whereas in the workplace, it is used as a tool for mediating activity that is inevitably focused in the productive outcomes that are *raison d'être* of the workplace" (p. 272)

Con respecto de la importancia del trabajo con funciones, Michelsen (2006) señala, que "el origen histórico del concepto de función radica en el estudio de fenómenos naturales, y las funciones matemáticas juegan un rol significativo en el estudio de las ciencias naturales, ciencias sociales, ingeniería y tecnología". (p.274)

De la misma manera como se reflexionó anteriormente, Williams & Wake (2007) estudian la relación de la matemática con su uso en el lugar de trabajo, a través de un estudio de casos, basándose en la teoría de la actividad. Comentan que, por ejemplo, en el caso de funciones, éstas

adquieren sentido práctico cuando son aprendidas a través de contextos en actividades específicas, siendo así utilizadas como representantes de modelos matemáticos. En el caso de las funciones presentan dos posibilidades de aprendizaje,

(1) As a mediating tool of activity, say as a model for extrapolating from past data to predict future, (2) as a pure mathematical function, which is the subject of algebraic and graphical transformations and manipulations. We note, therefore, that a mathematical sign may have an infinite variety of different meanings in different setting, and in particular that the same might be a tool for one activity bet the object of action in another. (p.323)

En este trabajo se consideraran las siguientes funcionalidades del objeto matemático función, en contextos relacionados con la ingeniería estructural.

1. Noción de función
2. Noción de función y su relación con la derivada
3. Noción de función y su relación con la integral

Aunque no conocemos al momento los objetos matemáticos que puedan intervenir en el trabajo con modelos estructurales, si estamos interesados en indagar la relación de esos objetos con la modelización en ingeniería. Dado que estos objetos se relacionan con las nociones básicas que un ingeniero debe manejar en cuanto al dominio del cálculo: la noción de función, la derivada y la integral. Y que este conocimiento es transversal a otras especialidades, no sólo a la especialidad en estructuras.

Las etapas anteriores incluso pueden estar interrelacionadas y no estar necesariamente disjuntas.

1.6 El proceso de modelización

En lo que sigue se hace referencia a lo que se entiende por proceso de modelización y posteriormente se presentan algunos ciclos de modelización que dan evidencia de ese proceso y que nos parecieron relevantes.

Para Blum (2015), el proceso de modelización puede ser caracterizado por un ciclo compuesto por siete etapas. Al respecto, Pollak (2012) refuerza la idea de estudiar el proceso de modelización mediante las etapas de un ciclo. En su postura se destaca la importancia de la idealización:

Whether the problem is huge or little, the process of "interaction" between the mathematics and the real world is the same: the real situation usually has so many facets that you can't take everything into account, so you decide which aspects are most important and keep those. At this point, you have an idealized version of the real-world situation, which you can then translate into mathematical terms.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

What do you have now? A mathematical model of the idealized question (p. Viii).

Posterior a la formulación del modelo matemático, Pollak señala que es necesario, no solamente obtener respuestas de ese modelo, sino que, compararlas con la situación que se está modelando:

You then apply you mathematical instincts and knowledge to the model, and again interesting insights, examples, approximations, theorems, and algorithms. You translate all this back into the real-world situation, and you hope to have a theory for the idealized question. But you have to check back: are the results practical, the answers reasonable, the consequences acceptable? If so, great! If not, take another look at the choices you made at the beginning, and try again. This entire process is what is called mathematical modelling. (p. Viii)

El modelo matemático, que es parte del proceso de modelización matemática es definido en Bliss, Fowler & Galluzzo (2014) como "a representation of a system or scenario that is used to gain qualitative and/or quantitative understanding of some real -world problems and to predict future behavior" (p.3).

Es notorio el énfasis que dan a la modelización matemática como una herramienta de aplicación, pues aseguran que existe la creencia de que la modelización matemática es un proceso siempre complejo, donde sólo matemáticas avanzadas tienen lugar. Además, muestran que, es un área útil para las distintas disciplinas "Models are used in a variety of disciplines, such as biology, engineering, computer science, psychology, sociology, and marketing. Because models are abstractions of reality, they can lead to scientific advances, provide the foundation for new discoveries, and help leaders make informed decisions" (p.3)

La modelización matemática y la resolución de problemas son líneas de investigación ampliamente estudiadas en diversos grupos de trabajo, tales como los CERME (applications and modelling), ICMI (mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics), PME (problema solving). Pudiera ser que incluso exista una creencia general que modelización matemática y resolución de problemas se refieren a lo mismo.

Con el resguardo que se debe tener en cuanto al uso de las tareas implicadas en cada una de esas actividades respecto de los diversos grupos de investigación, los cuales se adhieren a diversas perspectivas por ejemplo para el caso de modelización matemática. En nuestro trabajo consideramos que la modelización matemática y la resolución de problemas son distintas pero que en algún momento pudieran tener puntos en común y que la resolución de problemas puede estar contenida dentro del proceso de modelización matemática. Compartimos la diferencia que realiza (Pollak,

2012) al respecto de la modelización matemática y la resolución de problemas.

Comienza refiriéndose a la resolución de problemas, señalando que no necesariamente alude a situaciones de la vida real:

You may be wondering how mathematical modelling differs from what you already teach particularly, "problem solving". Problem solving may not refer to the outside world at all. Even when it does, problem solving usually begin with the idealized real-world situation in mathematical terms, and ends with a mathematical result. (p. Vii)

Posteriormente, se refiere a la modelización matemática, la cual siempre está motivada por el mundo real.

Mathematical modelling, on other hand, begins in the "unedited" real world, requires problem formulating before problem solving, and once the problem is solved, moves back into the real world where the results are considered in their original context. Additionally, it would take us too far afield to discuss whimsical problems mathematics. They make no pretense of being problems motivated by the real world. (p. Vii)

En este mismo sentido, en un artículo presentado en el congreso de la Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs. Hellblom, Wedelin & Adawi (2016), discuten sobre diversos enfoques alternativos para la enseñanza de las matemáticas (Matemáticas como un arte, resolución de problemas y modelización matemática), los cuales tienen como fin mostrar a los estudiantes el propósito de la matemática en su educación y que de esta manera les sea más interesante y se muestre a la disciplina como útil.

Utilizan el siguiente diagrama (Figura 1.8) donde a su consideración se relaciona a los tres enfoques y se puede evidenciar que, al igual que Pollak, diferencian entre resolución de problemas y modelización matemática, otorgándole a la modelización matemática un rol más de utilidad para el mundo real, tal como se muestra a continuación

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

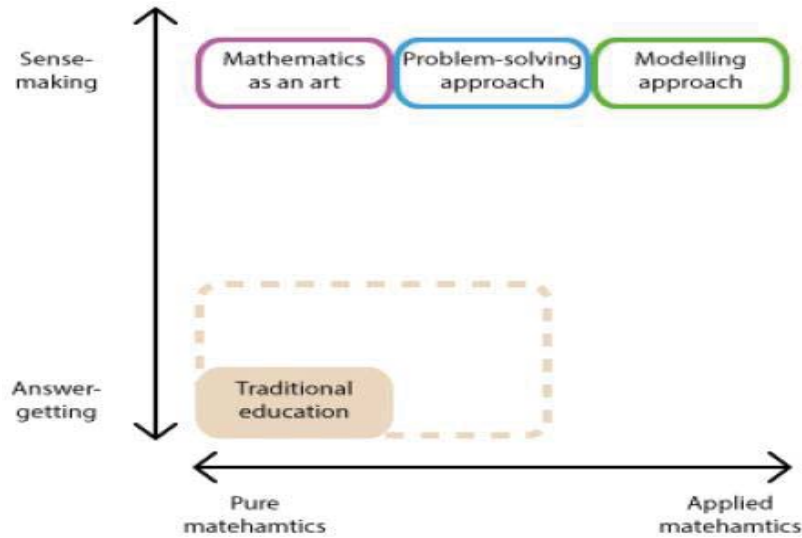


Figura 1.8 Enfoques alternativos sobre la enseñanza de la matemática (Hellblom, Wedelin & Adawi, 2016, p. 102)

Hellblom, Wedelin & Adawi (2016) presentan un cuadro comparativo (Figura 1.9) donde se presenta el porqué, cómo y para qué de los tres enfoques y concordamos con su visión en que la modelización matemática es más útil en el sentido de que puede ser aplicada a la formación de profesionistas y que las situaciones que aborda la modelización matemática son de carácter abierto e indefinido. Además, que en el mismo sentido de nuestra consideración, ven importante el seguir un ciclo de modelización donde la validación este presente. A continuación se muestra el cuadro comparativo:

	Why?	What?	How?
Common ideas for all three approaches	-	Strategies rather than algorithms, rules and formulas.	Collaborative work, discussions and analysis.
Modelling approach	Problem-solving and modelling abilities are useful in many everyday situations.	Modelling strategies that can be used in many professions or situations in everyday life.	Using the modelling cycle, the iterative process and validation of results to solve ill-defined problems.
Problem-solving approach	Problem-solving ability is useful in many everyday situations.	Problem-solving strategies that will help students deal with everyday problems.	Solving well-defined problems with a focus on strategies and methods.
Mathematics as an art	Mathematics is interesting, stimulating and fascinating.	Developed insight in creativity and the philosophy of mathematics.	Pattern finding and exploration.

Figura 1.9 Cuadro comparativo de los tres enfoques alternativos (Hellblom, Wedelin & Adawi, 2016, p. 102)

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En la literatura existen diversas propuestas de ciclos de modelización, la selección del proceso a desarrollar dependerá de las características del mismo y de la perspectiva tomada por el grupo de investigación.

Borromeo Ferri (2006) realiza una clasificación de ciclos de modelización con base en su estructura cognitiva, es decir, la relación de un determinado ciclo con la diferenciación, o no, entre las nociones de situación real - modelo de la situación (representación mental de la situación)- modelo real y modelo matemático.

Por otra parte Borromeo Ferri (2018) realiza una clasificación de los ciclos en cuanto a 4 perspectivas: matemáticas aplicadas, didáctica o pedagógica, psicológica y cognitiva. En nuestro caso no ha sido el objetivo clasificar ciclos de modelización, sino mostrar algunos ciclos de la literatura que nos han parecido relevantes en cuanto a su manejo de los datos, en cuanto a su explicitación de representaciones o en cuanto a su uso directamente en pruebas estandarizadas, como lo es PISA, todo ello con la finalidad de visualizar que los diseños de problemas de modelización por parte del docente/investigador y el análisis de la producción de estudiantes al resolver problemas de modelización, pueden ser comprendidos mediante ciclos de modelización.

Borromeo Ferri (2018) plantea que en un proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática, otro punto de interés es sobre la pertinencia de utilizar de forma explícita con los estudiantes los ciclos de modelización, pues ellos podrían permitir una mejor comprensión del proceso de modelización o incluso aportar al desarrollo de habilidades meta cognitivas que potencien la capacidad del estudiante de autorregular sus propios procesos de aprendizaje y reflexionar sobre lo que ha realizado. Para ello, la autora presenta las siguientes ventajas de utilizar de manera explícita los ciclos de modelización en procesos de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática,

- o Ofrecer a las personas una comprensión de lo que significa la modelización matemática (¿qué significa?)
- o Orientar a las personas dentro de su proceso de modelización (¿Dónde me encuentro en el proceso?)
- o Permitir que las personas piensen en su proceso de modelización de manera retrospectiva y en un nivel meta cognitivo (¿Qué fases atravesé y cuáles me faltan?) (Traducción propia, p.28).

Existen ciclos de modelización que se corresponden de una mejor manera a procesos de modelización donde se está interesado en la construcción de un objeto matemático como es el de función, debido a que, considera que el modelo quedará representado no sólo por su representación algebraica sino que también por una gráfica por ejemplo. Un caso, es el ciclo de (Hitt & Cortez, 2009), donde las diversas representaciones del objeto matemático que emerja del proceso de modelización se pueden apreciar en el interior

del diagrama perteneciente a la modelización matemática (Figura 1.10). Entonces mediante el ciclo se representan los diversos modelos asociados a la resolución de la situación.

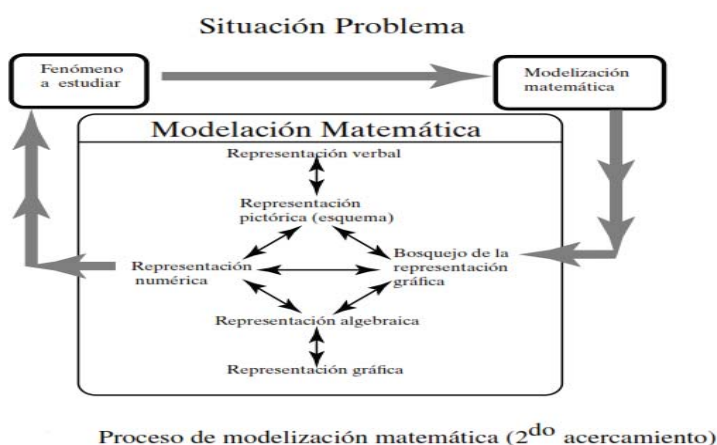


Figura 1.10 Ciclo de modelización (Hitt y Cortés, 2009, p.7)

Otro ciclo propuesto por Arrieta y Díaz (2015) tiene la característica de que la información inicial parte de datos numéricos (por ejemplo datos recolectados y tabulados de un determinado fenómeno), obtenidos de la interacción con el fenómeno (Figura 1.11). En el ciclo podemos apreciar que no se muestra una separación en el mundo real y el mundo matemático.

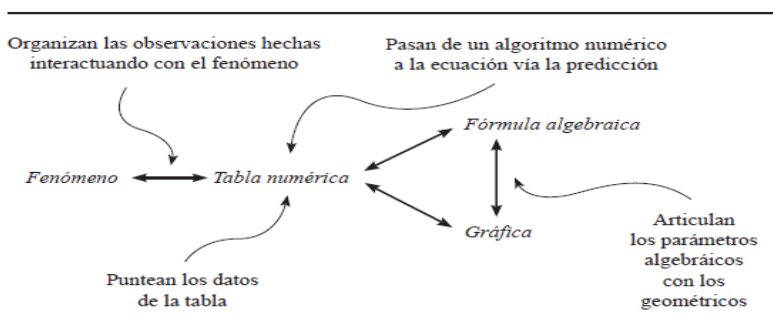


Figura 1.11 Ciclo de modelización (Arrieta y Díaz, 2015, p.37)

En el capítulo de elementos teóricos que sustentan a la presente investigación se detallará el ciclo de modelización considerado para la presente investigación.

Otro proceso es el presentado por el modelo de Bliss, Fowler & Galluzzo (2014), en su perspectiva de modelización ellos consideran a la modelización matemática como una herramienta útil para resolver situaciones y que su enseñanza en un escenario escolar es posible, para ello consideran el siguiente ciclo de modelización (Figura 1.12).

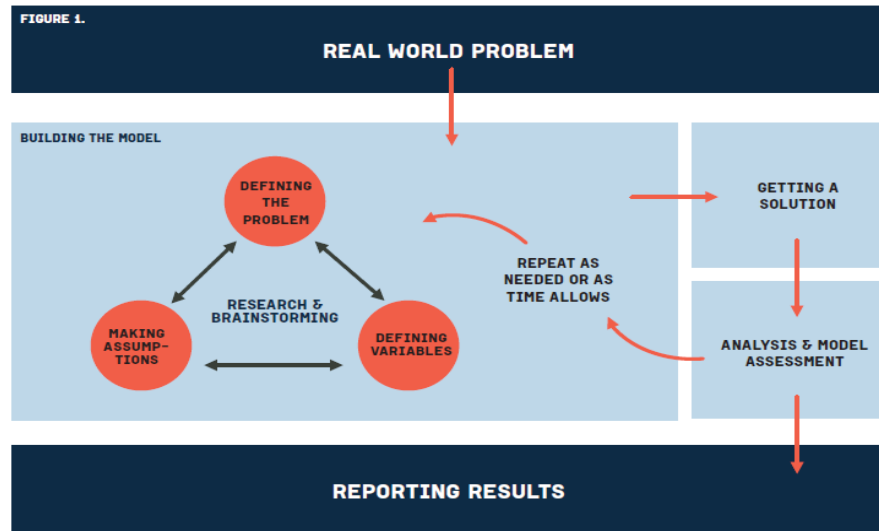


Figura 1.12 Ciclo de modelación matemática (Bliss, Fowler & Galluzzo, 2014, p.6)

Otro modelo es el de Greefrath (2011) citado en el libro realizado en el marco del ICME13 donde se realiza un estado del arte de la modelización matemática en los países de habla germana, Greefrath & Vorholter (2016), es interesante que considera el uso de tecnología digital y adhiere al modelo de Blum un tercer componente, el tecnológico digital, lo cual es relevante pues en nuestra época tanto en escenarios escolares como laborales, las herramientas digitales están presentes (Figura 1.13).

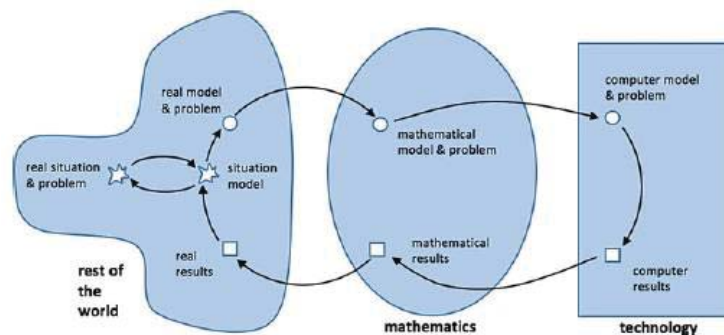


Figura 1.13 Ciclo de modelación extendido (Greefrath, 2011, p.302, citado en Greefrath & Vorholter, 2016, p. 23)

Otro ciclo de modelización encontrado en la literatura que nos parece relevante, es el presentado por Frejd & Bergsten (2016), si bien, ellos identifican tres tipos de actividades de modelización matemática desarrolladas por modeladores profesionales (modelización generada por

datos, modelización generada por teoría y modelización generada por modelos). Nos interesó el ciclo de modelización donde los modeladores desarrollan modelos con base en los datos (Figura 1.14), debido a que según su investigación es la actividad que más apareció.

Ellos consideran a la modelización matemática inmersa dentro de los lugares de trabajo, a través de un diálogo entre la terna, cliente, constructor y experto, para ello considera a la modelización matemática (constructor) en una constante interacción con los solicitantes de servicios por un lado (clientes), quienes proporcionan el problema a los constructores y a través de un trabajo generalmente interdisciplinario se contactan con especialistas en otras ramas relacionadas con el problema (i.e. biólogos, informáticos. etc.). Con la efectividad de los resultados obtenidos con la modelización matemática por otro (experto) se busca que el modelo matemático construido sea el más útil para los propósitos del cliente, el ciclo lo presenta de la siguiente manera.

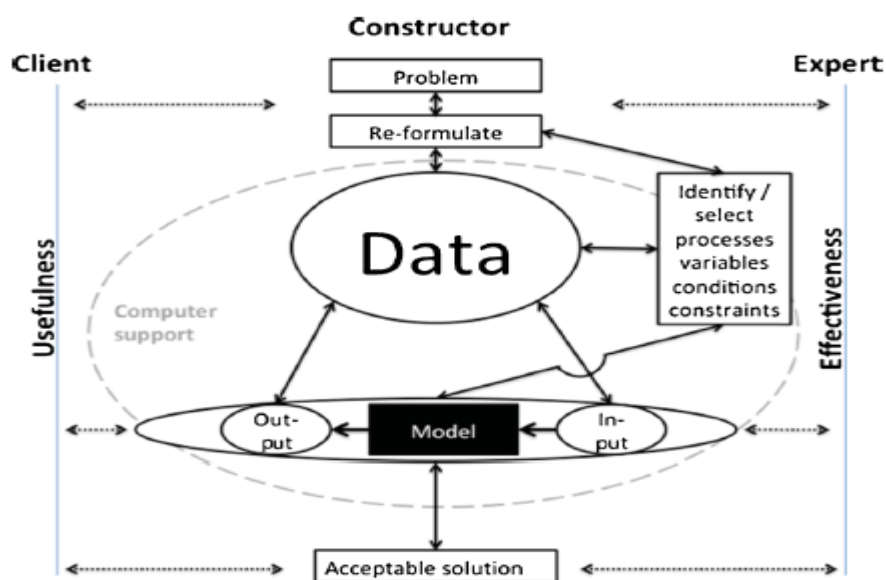


Figura 1.14 Modelización generada por datos (Frejd & Bergsten, 2016, p.21)

Otro ciclo de modelización es el presentado por la OECD (2012), en el marco de los estudios PISA (Figura 1.15), el ciclo es presentado en un ámbito relacionado con lo escolar y considera a la modelización matemática como piedra angular en la construcción de conocimiento matemático, al permitir desarrollar en el estudiante la competencia matemática (descrita en secciones posteriores) es el siguiente ciclo de modelización.

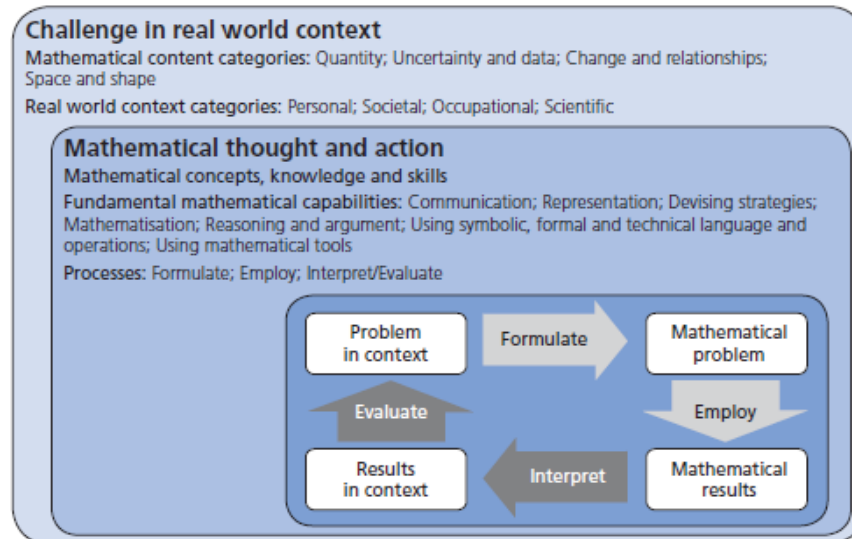


Figura 1.15 A model of mathematical literacy in practice (OECD, 2013, p. 26)

1.7 Perspectivas de modelización

Desde una mirada internacional a la modelización en Kaiser y Siraman (2006) se presentan las diferentes perspectivas de modelización (Tabla 1.1) de acuerdo a su objetivo central en Didáctica de la Matemática.

Tabla 1.1 Clasificación de perspectivas de modelización en Kaiser & Siraman (2006)

Perspectiva	Objetivo central
Modelización Realística y aplicada	Fines pragmáticos–utilitarios, es decir, resolver problemas del mundo real, entender el mundo real, promover las competencias de modelización.
Modelización Contextual	Fines relacionados con el sujeto y psicológicos, es decir, resolver problemas en contexto.
Modelización Educativa diferenciada en: a) Didáctica b) Conceptual	Objetivos pedagógicos y relacionados al sujeto: a) Estructurar sus procesos de aprendizaje y su promoción. b) Introducción y desarrollo de conceptos.
Modelización Socio-Crítica	Objetivos pedagógicos tales como el entendimiento crítico del mundo que los rodea.
Modelización Teórica o Epistemológica	Fines orientados a la teoría, es decir, la promoción de desarrollo de la teoría.
Modelización Cognitiva (Se considera que esta perspectiva es transversal a todas las anteriores)	Tiene como objetivos: a) Análisis cognitivo de los procesos que intervienen en la modelización y el entendimiento de esos procesos cognitivos.

	b) De tipo psicológico como es la promoción de procesos de pensamiento matemático al participar en la modelización o incluso imágenes físicas o hacer énfasis en la modelización como procesos mentales tales como la abstracción o la generalización.

Con base en las perspectivas presentadas por Kaiser y Siraman (2006) se presentan ahora las perspectivas en modelización elaboradas en Blomhoj (2009) en el marco del congreso de ICME 11 dentro del grupo de trabajo "Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics". Para elaborar dichas perspectivas tomó en cuenta los artículos presentados en tal congreso, mencionando que en la actualidad existen muy variados enfoques y perspectivas en la investigación relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática.

Con base en Blomhoj (2009) se presentan una breve descripción sobre las diferentes perspectivas de modelización matemática en la investigación.

I. La perspectiva realística

En esta perspectiva, la modelización matemática es vista desde un enfoque de aplicación de las matemáticas, en este lente la modelización matemática es una competencia necesaria y debe ser desarrollada en el estudiante, para de esta manera dotarlo de habilidades que le permitan afrontar las situaciones de la vida. Por tanto, dependiendo del nivel educativo en el que se encuentre el estudiante, se le deberán presentar situaciones de modelización matemática pertenecientes a la vida real, cuando el nivel educativo sea el profesional, la modelización matemática deberá tomar en cuenta contextos pertenecientes a la profesión que el estudiante se encuentre cursando.

Para este enfoque, es por tanto primordial que, la modelización matemática le sea enseñada y que además, esta enseñanza se corresponda con un proceso completo de modelización. En esta perspectiva, un factor a considerar es la interdisciplinariedad, para que de esta manera la matemática sea vinculada mediante la modelización, con otras disciplinas.

II. La perspectiva contextual

Se originó en Norte América, se basa en que las actividades de modelización matemática deben tomar en cuenta las características psicológicas de los estudiantes, por lo que está fuertemente vinculada con teorías psicológicas del aprendizaje. Debido a la influencia teórica de esta perspectiva, la construcción de un conocimiento significativo se hace presente en los principios que enuncia necesarios para el desarrollo de situaciones de modelización.

En consecuencia señala que en Lesh y Doerr (2003) se establece que se deben seguir los siguientes seis principios básicos: el principio de la realidad, con la finalidad de que le sea significativa al estudiante, al devenir de contextos, el principio de construcción de modelos, mediante el cual el estudiante sea capaz de desarrollar constructos matemáticos significativos, el principio de la autoevaluación, los estudiantes deben ser capaces de evaluar sus propias construcciones, el principio de la documentación, mediante el cual la situación debe permitir al estudiantes expresar su pensamiento durante el proceso de modelización, el principio de la generalización, por lo que la situación modelada debe promover la capacidad de extender a otras situaciones similares lo trabajado en la situación inicial.

Blomhoj destaca que, a pesar de que el principio de la realidad puede dar lugar a asemejar la perspectiva contextual con la perspectiva realística, a su vez, la perspectiva contextual se diferencia de la anterior en el sentido de que para su diseño toma en cuenta fuertes principios didácticos y exige actividades fuertemente estructuradas con base en los principios anteriormente mencionados.

III. La perspectiva educacional

Es trabajada en la Europa Occidental, considera que la modelización matemática es una alternativa para la enseñanza de la matemática, y además, esta debe ser vista como una competencia. Considera crucial que los sistemas educacionales la tomen en cuenta en sus diseños curriculares por lo que investiga no sólo la enseñanza de la modelización matemática sino también constructos relacionados con este enfoque de modelización. Las nociones desarrolladas bajo esta perspectiva son: modelo, modelización, ciclo de modelización, aplicaciones de la modelización y competencia.

El autor señala que si bien la perspectiva contextual toma fuertes consideraciones didácticas en el diseño de las situaciones de modelización, se diferencia de la perspectiva educacional en que esta toma en cuenta a la modelización como competencia desarrollar en el sistema escolar.

IV. La perspectiva epistemológica

El uso de este enfoque de investigación considera a la modelización matemática como una herramienta que es útil para desarrollar teorías de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, por ejemplo, es ampliamente utilizada por la teoría de la Educación Matemática Realista y por la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Por revisión en las teorías antes mencionadas, podemos evidenciar que las situaciones de modelización desarrolladas deben cumplir con ser en contexto pero este no necesariamente debe pertenecer a un contexto extra matemático, sino que se considera que toda actividad matemática es

susceptible de ser contextualizada para ser desarrollada como una actividad de modelización. En el caso de la Educación Matemática Realista, la realidad no es solo la que le es cotidiana al sujeto que abordará la tarea, sino que situaciones del mundo de la imaginación también susceptibles de ser modelizadas.

V. *La perspectiva cognitiva*

Bajo este lente la comprensión de las diversas funciones cognitivas desarrolladas por los sujetos cuando resuelven una tarea de modelización es considerada el principal objeto de estudio. Por lo que es crucial determinar los pasos que sigue el modelador al momento de trabajar con las situaciones. Ya que es en el abordaje de estos pasos en el proceso de modelización lo que da las pautas para caracterizar el trabajo de modelización e identificar las dificultades presentadas por el estudiante. Borroneo Ferri (2006, 2010, 2013, 2018) es un buen ejemplo de investigador bajo esta perspectiva.

VI. *La perspectiva socio-crítica*

Considera que la modelización matemática y el uso de modelos matemáticos son fundamentales para el desarrollo de sujetos capaces de desenvolverse eficientemente bajo una perspectiva crítica de la sociedad a la que pertenece. Por tanto, el abordaje con modelización matemática permite formar sujetos críticos y capacitados para defender derechos de igualdad y justifica social bajo un ambiente de democracia. La contribución de la modelización matemática en el desarrollo de la capacidad crítica en el sujeto es debido a que la modelización es considerada un lenguaje de poder para los miembros de la sociedad.

A continuación, se muestra la tabla donde presentan a manera de resumen las diferentes perspectivas y los objetivos y preguntas de investigación correspondientes a cada perspectiva de acuerdo a lo presentado es el congreso (Tabla 1.2).

Tabla 1.2 Template overview of different perspectives in research on the teaching and learning of mathematical modelling, (Blomhoj, 2009, p. 15).

Perspective	Aims	Background	Research question or aim	Role of modelling cycle
Realistic	Prgamatic- utilitarian goals	Pollak (1969)	What conditions and support (in form of IT) are needed to model a particular real problem?	Used for analyzing a real life practice or problem situation.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Contextual	Subject related and psychological goals	Lesh & Doerr (2003) Lesh & Caylor (2007)	How to design contexts for student's meaningful modelling activities?	The modelling process is not in focus – Modelling Eliciting Activities are.
Educational (learning mathematics)	Modelling as a means of learning mathematics	Niss (1987,1989) Blum & Niss (1991) Blum & Leiss (2005) Blum, Niss et al. (2006)	How to challenge the student's mathematical coceptions (GVs) and how to support their mathematical learning?	Used for designing and analysing modelling tasks with respect to particular intentions for the student's learning.
Educational (learning modelling)	Modelling competency as an educational goal		What is good modelling task? What specific learning difficulties can be detected in the different phases in modelling?	Used for defining mathematical modelling competency as a learning goal.
Epistemologica l	Re-constructing mathematics through modelling. RME. Math praxeologies	Freudenthal (1983) Treffers (1987) Chevallard	How can modelling be used to re-construct the function concept for learning?	Emphasizing mathematisation and the "model of-model for" transition. Used to characterise a modelling praxeology.
Cognitive	Analyses of cognitive processes involved in mathematical modelling	Piaget, Skempt Borromeo Ferri (2006)	Which cognitive structures are involved in modellingcompetency and which cognitive skills are related to the different phases in the modelling cycle?	Used to structure the modelling process so as to identify the cognitive skills needed to model a given situation.
Sociocritical	Critical and reflexive understanding of reality and the use of mathematical modelling	Skovmose (1994, 2005) D'Ámbrosio (1999)	Uncover the formatting power of math modelling. How to create reflexive discourses among students?	To structure the critique and reflections in relation to the modelling process and the application process.

1.8 El rol de la matemática en los lugares de trabajo

Las investigaciones realizadas sobre la relación entre el conocimiento matemático escolar y el conocimiento matemático que emerge en escenarios relacionados con el campo profesional, nos dan evidencia de algunas cuestiones que consideramos en el planteamiento de la problemática de nuestra investigación. El problema de considerar el vínculo entre la matemática escolar y la industria es considerado fructífero desde el punto de vista de Godwin & Iwuchukwu (2013) quienes declaran que para tener una mejor relación entre la matemática escolar y la industria, es necesario una relación entre ambas: "From the perspective of professional practice, the mathematics problem can be viewed somewhat differently. There are opinions that academics might fruitfully consider the place of mathematics at the other interface, between university and industry" (p.526)

Algunas categorías de análisis que hemos evidenciado y que consideramos pertinentes para nuestro interés están relacionadas con la invisibilidad de la matemática, debido a que esta aparece generalmente inmersa en una caja negra; las brechas que existen entre la matemática en escenarios escolares y la matemática entre escenarios profesionales; los instrumentos de trabajo utilizados en la actividad profesional; además, de las implicancias educacionales de los estudios realizados, donde se presenta la necesidad de utilizar contextos relacionados con el área de especialización de los futuros profesionistas.

1.8.1 La invisibilidad de la matemática

El estudiante de ingeniería se debe formar también en competencias que se correspondan con el uso de tecnología digital, pues, en los lugares de trabajo, el uso de tecnología es ampliamente utilizado y permea las actividades de un ingeniero. Es por ello que se debe hacer un uso reflexivo de la tecnología digital y que de esta manera el estudiante no la utilice como mera caja negra, donde sólo se alcance a visualizar su valor pragmático y queden visualizadas como cajas negras que invisibilizan las matemáticas presentes tal como suele suceder en tanto en el ámbito en formación como estudiante así como en el campo profesional. Con respecto a lo anterior, Gravemeijer, et al (2017), mencionan lo siguiente,

Looking at the role of mathematics in the digital society, we many observe that mathematics is both pervasive and invisible. The role of mathematics grows together with the role of technology, as mathematics is at the core of what computers do. At the same time, the omnipresent mathematics is mainly hidden in all sorts of apparatus, which function as black boxes for its users. This leads to the apparent paradox, in spite of the role of mathematics in our society, we do not see mathematics and only, few people seem to do mathematics. (p.107)

Es importante mencionar que, si bien en este momento nos estamos refiriendo que la tecnología puede invisibilizar la matemática y ser una caja negra, en los lugares de trabajo Williams & Wake (2007), han detectado además, de instrumentos tecnológicos, otros tipos de cajas negras causantes de esa invisibilidad, como son el uso de procedimientos rutinarios o en las jerarquías dominantes que suelen suceder en la división del trabajo.

En un estudio posterior, Wake (2015) reflexiona sobre cómo se podría construir una epistemología de la enseñanza y aprendizaje de la matemática basada en la modelización matemática, considerando las relaciones entre los escenarios escolares y los escenarios relacionados con el lugar de trabajo. En este estudio vuelve a comentar sobre la invisibilidad de la matemática en escenarios de lugares de trabajo, donde los trabajadores realizan sus actividades mediadas por artefactos y herramientas que tienden a invisibilizar la matemática.

Para ello hace alusión al fenómeno de las cajas negras estudiado en Williams & Wake (2007), mencionando que la principal problemática de la invisibilidad ocasionada por el uso de tecnología en los lugares de trabajo, es cuando los trabajadores necesitan ampliar los dominios sobre los cuales están trabajando, teniendo la necesidad de realizar, por ejemplo, prácticas de modelización y al no entender fehacientemente lo que está detrás de esos artefactos y herramientas, los trabajadores se ven inhabilitados o poco capaces para ese tipo de actividades, perdiendo la oportunidad de un empoderamiento en su escenario laboral.

Investigadores sobre la formación matemática en ingeniería, como Tosmur & Behiye (2013) mencionan que, la amplia influencia del uso de instrumentos tecnológicos utilizados en los campos de trabajo profesional, debe dar cabida para reflexionar el uso de los mismos en el aprendizaje matemático de los estudiantes de ingeniería, ya que ellos deben ser capaces de reflexionar y discutir los resultados que otorga, por ejemplo, un determinado software. Además, señalan que, en la enseñanza y aprendizaje de la matemática algunas veces consideramos que el software pudiera resolver el problema en lo que concierne a la matemática en su totalidad y ello puede originar falta de comprensión de los procesos matemáticos que darán espacio a dicha reflexión y análisis de resultados, al respecto mencionan que,

The increased use of computers by professional engineers should not influence the topics in engineering mathematics courses. It is an accepted practice to use computers as tools for doing tedious calculations. However, computers cannot do all the mathematical work. This suggests that computers can be used to make work easier, not to replace knowledge of mathematical concepts. Students should be aware that they should use software packages discerningly from a base of mathematical knowledge that will inform them when the answers may be unreliable. (p. 37)

En cuanto al uso de tecnología para el aprendizaje de la matemática existen software que además, del valor pragmático permite añadir valor epistémico, en el sentido de Artigue (2011), a la actividad matemática, pues permite el diseño de tareas que posibiliten la comprensión de diversos objetos matemáticos, por ejemplo el software GeoGebra que privilegia ampliamente el manejo de las distintas representaciones que pueden suceder al trabajar una situación problema.

Por ejemplo si abordamos situaciones de variación la siguiente vista en pantalla de una construcción que realizamos en GeoGebra nos da evidencia del trabajo con representaciones (Figura 1.16).

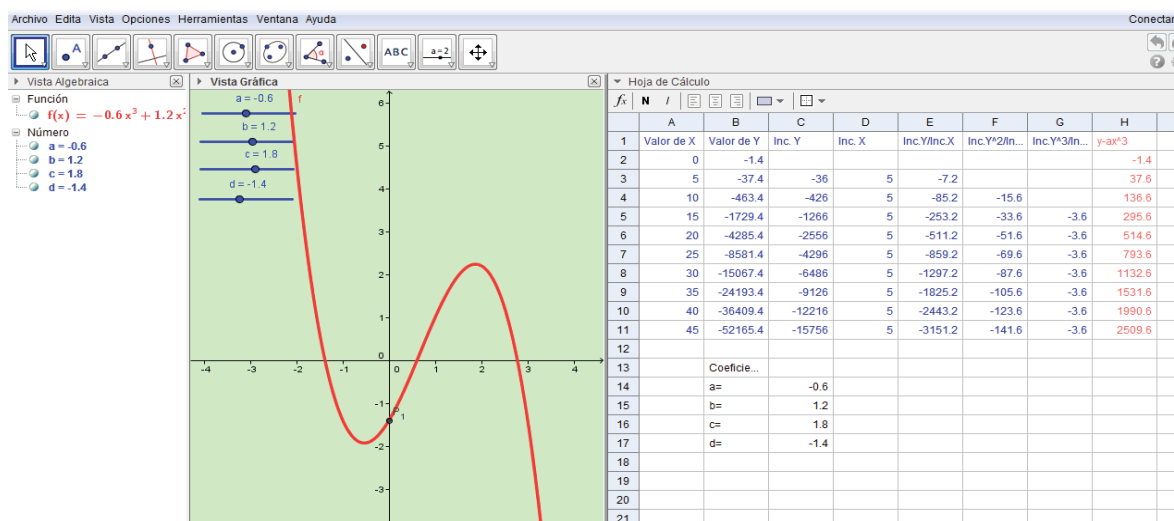


Figura 1.16 Modelo polinomial (Cosmes, 2012)

1.8.2 Sobre las brechas que existen entre la matemática en escenarios escolares y la matemática en escenarios profesionales

Diversos factores afectan la relación entre la enseñanza de la matemática a nivel escolar y la matemática presente en los escenarios profesionales, los estudios realizados al respecto, dan evidencia de que la relación no es la adecuada y por tanto visualizan la existencia de brechas entre ambos escenarios.

Triantafyllou & Potari (2010) mencionan que, estudiar los escenarios laborales les permite investigar la construcción y uso de significados matemáticos, que en su caso consideran influenciados por el uso de herramientas de diversa índole. Las brechas en su caso las podemos evidenciar cuando comentan "several studies try compare and connect the mathematical practice inside and outside the school environment and identify ways of building bridges between them" (p.276).

Identificamos que los puentes a los que hacen mención son un tipo de brechas entre los escenarios confrontados debido a que su objetivo es investigar discrepancias e invariantes entre dichos escenarios. En su caso han estudiado situaciones donde estudiantes de ingeniería confrontan un escenario de práctica profesional (en la práctica de Telecomunicaciones), la matemática aprendida en su formación universitaria con la matemática que se utiliza en escenarios de trabajo profesional.

Otro estudio que da evidencia de tales brechas es el realizado por Roth (2014) donde realiza un estudio bajo una metodología etnográfica, para confrontar la matemática aprendida por electricistas en su educación formal con respecto a la matemática en el trabajo. Roth atribuye a que en dicha relación aparece un factor importante, la personalidad del sujeto, modificada por un proceso de subjetivación. Para ello, se plantea preguntas relacionadas con las prácticas matemáticas y la distinción entre contextos educacionales formales y las practicas del trabajo profesional.

Una pregunta más teórica es la que se hace cuando considera la cognición en la práctica pero desde un proceso de subjetivación como constituyente de los cambios en la personalidad del sujeto debidos a su relación laboral y con respecto a ello se pregunta cómo podemos apreciar la cognición en escenarios escolares formales y en escenarios de lugares de trabajo. Al respecto de las brechas menciona: "Since around the publication of *Cognition in Practice* (Lave, 1988), much has been written about the differences between formal mathematics as taught in school and colleges and mathematics in a variety of work-related activities" (p. 178)

1.8.3 Sobre las herramientas de trabajo utilizadas en la actividad profesional

Triantafyllou & Potari (2010) evidencian que la matemática en escenarios laborales (Telemática p.e) es una herramienta que está relacionada con otros tipos de instrumentos como los físicos. Ellos consideran que las herramientas son más allá que artefactos físicos, que además, incluye objetos semióticos. En su estudio, identifican herramientas de tipo físicas, de texto escrito, matemáticas (comunicativas como por ejemplo diagramas y de pensamiento matemático como por ejemplo procesos y conceptos).

A continuación, se muestra un diagrama (Figura 1.17) donde se presentan las diversas categorías y sub categorías de los diferentes tipos de herramientas que identificaron en su estudio.

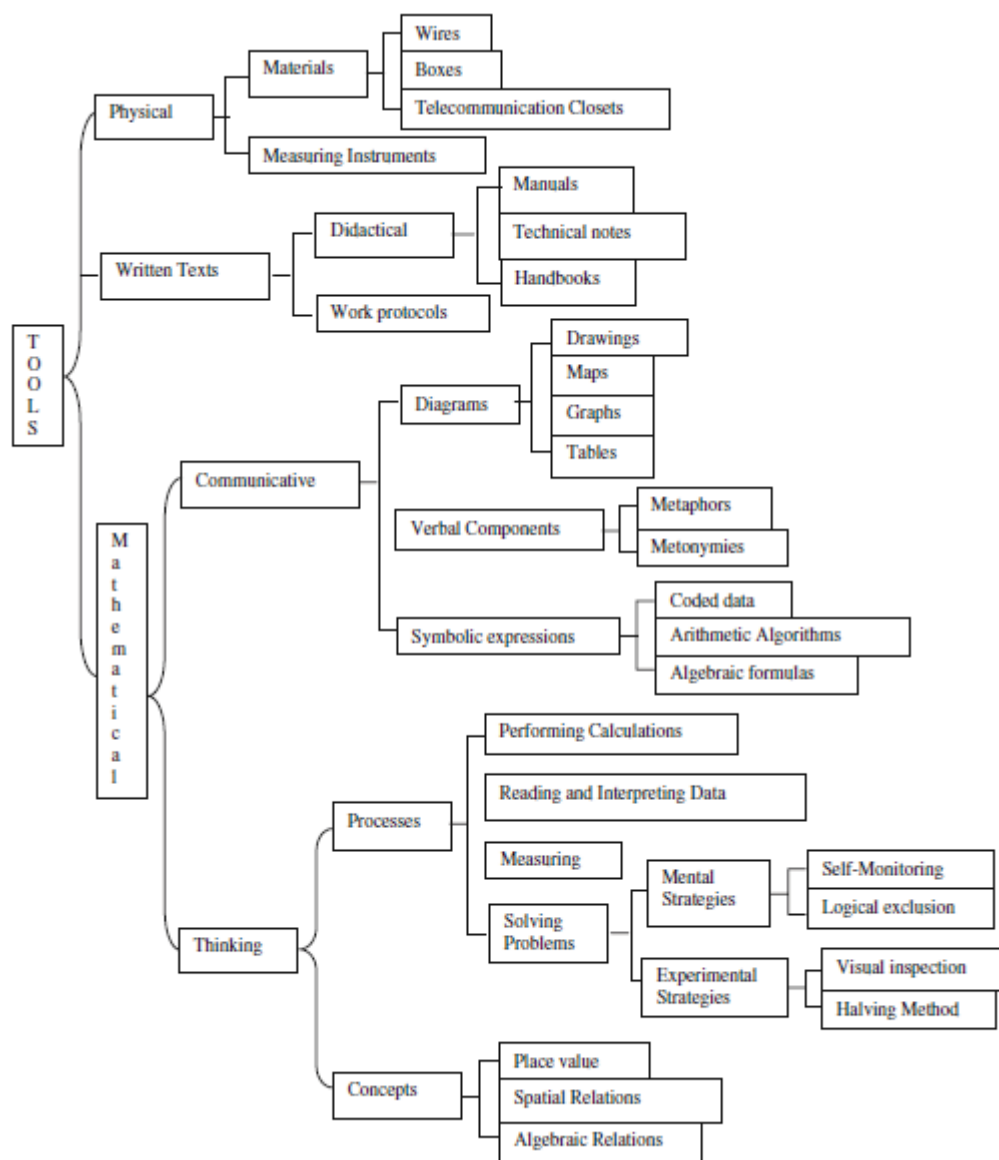


Figura 1.17 Clasificación de herramientas identificadas (Trianfantillou & Potari, 2010, p. 290)

Respecto de las herramientas matemáticas utilizadas en un escenario escolar, evidenciaron que en el caso de las representaciones de la función están desvinculadas con las necesarias en el escenario laboral, y no sólo porque en el escenario laboral las diferentes representaciones de la función no tienen la finalidad principal de desarrollar la construcción de la noción *per se*, sino porque además, se presenta con diferentes características lingüísticas, relacionadas claramente con el contexto profesional.

By analyzing the mathematical communicative tools in the category of diagrams and symbolic expressions, we identified a number of differences from the relatively typical mathematical representations. For example, the table, the elaborated formula, and the graph that represented a

mathematical function and the technical map that represented a three-dimensional area had different linguistic features from the ones used in school and colleges. (Triantafyllou & Potari, 2010, p.291)

1.8.4 Sobre las implicaciones educativas de confrontar la matemática escolar con la matemática en los lugares de trabajo

Triantafyllou & Potari (2010) presentan una reflexión sobre las implicancias educativas de estudiar los lugares de trabajo. Mencionan que, por ejemplo, en el caso de la noción de función, es recomendable considerar múltiples representaciones, pero además, que se encuentren en contextos relacionados con los que emergerán en los futuros lugares de trabajo de los estudiantes.

The educational implications of our study can be seen in mathematics education either at a vocational level or in a typical school context. For example, vocational students can face the authentic situations identified either in the context of their courses or in their practicum. These situations can challenge existing views and knowledge of mathematics that they have developed during their school and academic experiences and possibly help them to make connections. (p.292)

Por otra parte en Wake (2014), se presenta un estudio donde analiza la relación entre la matemática escolar y la matemática en la práctica, específicamente investiga sobre la matemática presente en los ingenieros de vías férreas. En su artículo, hace mención a los procesos de matematización considerados por la teoría de la Educación Matemática Realista y los conceptos de matematización horizontal y vertical.

En este sentido, alude que, en un contexto educativo formal tradicional, la matematización vertical es promovida pero que hace falta un diálogo entre la matemática escolar y la de los lugares de trabajo para promover así mismo la matematización horizontal, mencionando que: "we might, therefore, consider an individual's everyday understanding as emerging from horizontal activity through interaction with the world within a number of different communities and, in contrast to this, the vertical development of knowledge is relating to formal structured educational activity". (p.280)

En nuestro estudio también consideramos importante la promoción de ambos tipos de matematización, para relacionarlas consideramos a la modelización matemática, a través de vincular la matemática presente en la institución en diálogo con las disciplinas, en este caso, de la ingeniería. Con ello, pensamos se contribuye al desarrollo de la competencia de modelización de fenómenos, solicitada por el currículo de ingeniería e incluso por algunos programas de asignatura.

Por otra parte, están las implicancias relacionadas con el rol de la tecnología digital en la matemática de los lugares de trabajo. Gravemeijer, et. al. (2017) cita a Wolfram (2010) para reflexionar sobre qué matemáticas deberían ser enseñadas en una era donde la tecnología digital resuelve muchos de los procesos algorítmicos matemáticos que en una época donde había ausencia de ordenadores, estos se debía realizar a mano, por tanto Wolfram presenta las siguientes actividades matemáticas: Recognizing where mathematics is applicable, translating practical problems into mathematical problems, solving the mathematical problem, interpreting and evaluating the outcomes.

Las actividades que él menciona son desde la perspectiva de que si bien el ordenador puede realizar los algoritmos matemáticos, es importante que el utilizador comprenda los fundamentos matemáticos que subyacen a los cálculos del computador. Gravemeijer, et. al. (2017) menciona que el primero, el segundo y el último paso corresponden a la modelización y aplicaciones y que considerarlos tiene consecuencias curriculares en cuanto al contenido y a la estructura.

1.9 Aproximación epistemológica a la problemática

Cuando el centro de atención es la modelización matemática en ingeniería, es complejo saber a priori las nociones matemáticas involucradas en los problemas de ingeniería. Sin embargo, es conocida la relevancia de la noción de función y su derivada cuando se estudian ese tipo de problemas de modelización. A continuación, se hará un breve estudio a dichas nociones.

En la literatura se pueden encontrar diversos estudios de investigación relacionados con la noción de función que permiten dar una mirada a la problemática desde la didáctica. Por ejemplo en Sierpinska (1992) se presentan algunas sugerencias didácticas para abordar el estudio de la noción de función:

1. *Sobre la motivación:* a los estudiantes se les debería dar la oportunidad para usar sus conocimientos acerca de las funciones en la explicación de fenómenos relacionados con su vida diaria, o en diversos contextos de las ciencias. Las funciones podrían aparecer como modelos de ciertas relaciones que ellos observen.
2. *Sobre la introducción de contextos:* Se debería introducir el estudio de funciones como una herramienta para la modelización de situaciones de la vida real o de diversos contextos científicos. En este punto es importante que al estudiante se le presenten verdaderos problemas susceptibles de ser modelados, y no aquellos que hagan las veces de ejercicios con procesos algorítmicos rápidamente identificables.

3. *Sobre el desarrollo de contextos:* Se pueden alcanzar niveles profundos de comprensión de la noción de función a través del uso y construcción de métodos de interpolación realizando tratamientos con contextos matemáticos sustentados en tablas numéricas.
4. *Sobre profundizar en los niveles de comprensión de la noción de función:* A través del estudio de los contextos mencionados con anterioridad, es importante que los estudiantes analicen el comportamiento de los cambios entre las variables, no sólo verbalizando el cómo cambia sino además, que cambia.
5. *Sobre los prerrequisitos:* En la enseñanza tradicional es común comenzar el estudio de funciones a través de definiciones. La autora considera que esa manera de introducir la noción no crea sentido en el estudiante si previamente no ha desarrollado una cultura matemática.
6. *Sobre las representaciones:* Es importante proveer a los estudiantes de un amplio espectro de formas de representar funciones para que estos desarrollen una amplia flexibilidad en sus usos.
7. *Sobre la discriminación entre la noción de función y otras nociones generales:* Discutir en clase sobre las similitudes y diferencias entre relaciones funcionales y causales puede contribuir hacia un mejor entendimiento de ambas nociones.

Otras investigaciones que dan cuenta de los procesos cognitivos ligados al aprendizaje de la noción de función son los desarrollados por el Advanced Mathematical Thinking (AMT) ampliamente desarrollada por el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), cuyo fin es estudiar los procesos cognitivos ligados a los modos del pensamiento cuando un sujeto aborda el estudio de determinado contenido matemático.

En cuanto a AMT, Azcárate & Camacho (2003) señalan que los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas son abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualiza, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar.

Es en esta línea de investigación donde se han desarrollado distintos constructos teóricos para el análisis de los procesos cognitivos, por ejemplo el mencionado por Azcárate y Camacho (2003) relacionado con la dualidad proceso – objeto donde Tall (1995) desarrolla la noción de procepto: “Definimos un procepto como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos”. (p.139)

Por ejemplo:

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

La expresión $f(x) = x^2 - 16$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x .

Tall (1997) relaciona este constructo propio del pensamiento matemático avanzado con el procepto de funciones en cálculo y presenta el siguiente esquema (Figura 1.18).

Procept		
Change: FUNCTION	doing	calculating values
	undoing	solving equations
Rate of change: DERIVATIVE	doing	differentiation
	undoing	anti differentiation, solving differential equations
Cumulative growth: INTEGRAL	doing	integration
	undoing	fundamental theorem of calculus

Three procepts in functions and calculus

Figura 1.18 Proceptos en funciones y cálculo (Tall, 1997, p.5)

En el marco de PISA (2012) podemos evidenciar la relación entre el desarrollo del pensamiento matemático y la modelización, al definir competencia matemática como:

La capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan. (p. 10)

Así mismo, declara que la noción de construcción de modelos es una piedra angular del marco de matemáticas de PISA por lo que tal construcción es pieza clave para promover el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

Algunos investigadores asocian a una determinada noción matemática un pensamiento matemático específico, por ejemplo, si hablamos de álgebra le asocian un pensamiento algebraico, o de estadística un pensamiento estadístico, en cuanto a nuestro objeto matemático de interés, que son las funciones, le asocian el pensamiento funcional. Un ejemplo de ello es la realizada por Hoffkamp (2009) donde analiza el efecto del uso de la tecnología en la promoción del pensamiento funcional en los estudiantes y relaciona función y pensamiento funcional de la siguiente manera:

The concept of function and functional thinking includes many aspects and competencies: On one hand functional dependencies can be described and detected in several representational systems like graphs, words, real situations, tables or formulas. On the other hand the nature of functional

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

dependencies has different characteristics (Vollrath 1989 or Dubinsky, Harel 1992): Functional dependency as a pointwise relation (horizontal, static aspect), functional dependency as a dynamic process (aspects of covariation and change, vertical aspect), Functions viewed as objects or as a whole. (p. 1201)

La noción de función ha sido un saber desarrollado con una constante evolución, Kleiner (1987) menciona que el concepto de función se remonta 4000 años atrás; de los cuales 3700 años son de sólo anticipaciones; y que además, la noción de función no emergió de forma explícita hasta los comienzos del siglo XVIII.

Alanís (1996), menciona que en N. Oresme (1323-1382), se presenta un momento importante relacionado con la noción de función cuando Oresme realiza un estudio del movimiento en aquel entonces llamado Colegio de Merton. Señala que Oresme presenta un estudio cualitativo sobre la variación entre magnitudes relacionadas con la velocidad y el tiempo a través de la representación gráfica. Su método consistía en utilizar la "longitud" como una línea que representó al tiempo y para cada tiempo trazó líneas perpendiculares "la latitud" que representaba la intensidad de la velocidad del móvil en ese tiempo (Figura 1.19). Obteniendo representaciones como la siguiente.

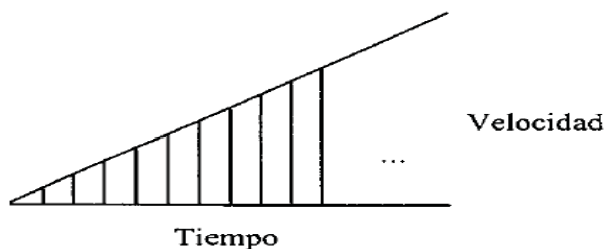


Figura 1.19 Representación del tiempo y la velocidad (Alanís, 1996, p. 44)

A continuación, se muestran algunas representaciones según el tipo de movimiento estudiado:

Configuración uniformemente uniforme asociada a un movimiento uniforme (Figura 1.20)

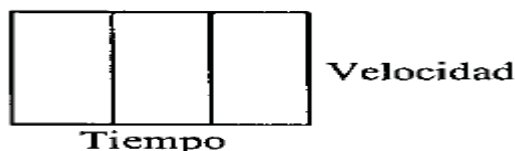


Figura 1.20 Movimiento uniforme (Alanís, 1996, p. 44)

Configuración uniformemente diforme (Figura 1.21) correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado, dependiendo de la velocidad inicial la figura estaba representada por un triángulo o un trapecio.

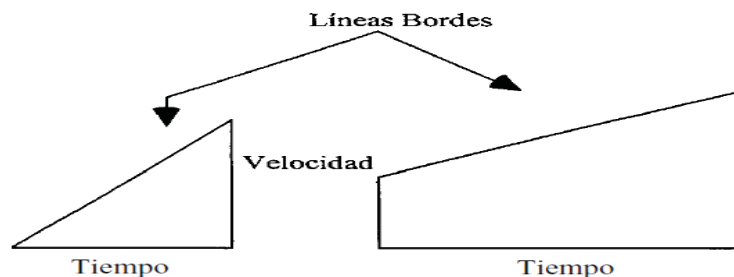


Figura 1.21 Movimiento uniformemente diforme (Alanís, 1996, p. 45)

Para cualquier otra configuración el movimiento era diformemente diforme (Figura 1.22), en estos casos la aceleración del móvil no es constante. Por tanto las líneas borde no eran representadas por líneas rectas.



Figura 1.22 Movimiento diformemente diforme (Alanís, 1996, p. 45)

Se sabe que la primera aparición de la palabra función fue en los trabajos de Leibniz. Cantoral (1995) en su estudio sobre la didáctica de la Serie de Taylor menciona que L'Hôpital basado en Leibniz y las enseñanzas de Bernoulli publica el primer libro sobre cálculo diferencial en 1696 titulado "Analyse des Infiniment Petits pour l'intelligence des Lignes Corbes, en el cual presenta el siguiente acercamiento a la noción de función:

Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por lo contrario, cantidades constantes las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian. De esta manera, en una parábola las ordenadas y las abscisas son cantidades variables, en tanto que el parámetro es una cantidad constante (p. 64).

De la obra original (L'Hôpital 1696, p.1)

Definition I

N appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement & au contraire quantités constantes elles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainfi dans une parabole les appliquées & les coupées font des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

Así mismo, muestra una representación geométrica para mostrar la relación entre variables y dar una explicación de los diferenciales como elementos infinitesimales y desarrollar las ideas algebraicas y geométricas sobre las cuales se construiría el cálculo infinitesimal.

Kleiner (1987) menciona que Euler (1748) en su clásico *Introductio in Analysin Infinitorum* fue el primero en realizar un trabajo en donde el concepto de función jugó un rol explícito y central, sosteniendo que el análisis matemático es la ciencia de las variables y sus funciones, proporcionando la siguiente definición de función:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera de esa cantidad variable y números o cantidades constantes. (23, p.72)

1.9.1 Breve desarrollo de la noción de función

A continuación, se presenta un breve desarrollo histórico de la noción de función, para ello, se ha tomado el trabajo de Ponte (1992), esto debido a que presenta una conexión entre el desarrollo de la noción de función y la modelización. Ponte (1992) presenta una evolución histórica del concepto de función. Señala que la noción de función es clave en el desarrollo de las matemáticas, donde las nociones función y derivada son la base del análisis matemático. En un orden cronológico, Ponte presenta el siguiente desarrollo de la noción de función.

Oresme (1323-1382) quien desarrollo una teoría geométrica de las latitudes de formas que representan diferentes grados de intensidad y extensión. En su teoría, algunas ideas generales sobre cantidades variables independientes y dependientes parecen estar presentes. Aunque reconoce que la función como objeto de estudio en sí mismo es reciente, datando hasta el final del siglo 17. (p. 1)

Posteriormente menciona que:

Descartes (1596-1650) afirmó que una ecuación en dos variables, representada geométricamente por una curva, indica dependencia entre cantidades variables. La idea de derivada surgió como una forma de encontrar la tangente a cualquier punto de esta curva. (p.2)

A continuación presenta a Newton (1642-1727), mencionando que:

Newton fue uno de los primeros en mostrar cómo se podía desarrollar funciones en series de potencia, permitiendo así la intervención de procesos infinitos. Usó "fluido" para designar variables independientes, "relata quantitas" para indicar variables dependientes y "genita" para referirse a cantidades obtenidas de otros usando las cuatro operaciones fundamentales. (p. 2)

Destaca que Leibniz es el primero en utilizar el término función en 1673. Señalando:

"Leibniz tomó la función para designar, en términos muy generales, la dependencia de cantidades geométricas como subtangentes y subnormales de la forma de una curva. También introdujo los términos "constante", "Variables" y "parámetro". (p.2)

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Señala que la evolución la necesidad de desarrollar la noción de función se observa en el estudio de curvas representadas por medio de expresiones analíticas a través de cantidades dependientes en una variable. A continuación menciona:

La primera definición de función fue establecida por Bernoulli en 1718, “una función de una variable es una cantidad que está compuesta de alguna manera a partir de esa variable y constantes”. Aunque más tarde, Euler (1707-1793), quien fue alumno de Bernoulli, agrega su toque a esta definición hablando de expresión analítica en lugar de cantidad. (p. 2)

Señala que hasta este momento, el desarrollo de la noción de función está adherido a la idea de una función representada por una expresión analítica. Sin embargo, ello presenta incoherencias como las del caso de funciones representadas por más de una expresión analítica o que la definición de Euler a través de funciones analíticas, presenta una reducción a un subconjunto de funciones de una clase de por si pequeña de funciones continuas. Sin embargo, señala que durante el siglo XIX la noción de función un acelerado desarrollo, cambiando así su naturaleza y significado.

Para avanzar en esa dependencia del desarrollo de la noción de función donde la noción se asocia a una expresión analítica, en Ponte (1992) se señala el trabajo de Dirichlet quién da una demostración de las ideas de Fourier que estableció (sin demostrar) que cualquier función podía ser representada por medio de una serie trigonométrica en un intervalo adecuado. Para ello Dirichlet realiza una separación entre el concepto de función de su representación analítica en 1837 define a una función como:

Una correspondencia arbitraria entre variables que representan conjuntos numéricos. Una función, entonces, se convirtió en una correspondencia entre dos variables para que a cualquier valor de la variable independiente, se asocie uno y sólo un valor de la variable dependiente. Presentado el ejemplo de una función que es discontinua en todos los puntos del dominio $[0,1]$:

0 si x es un número racional

1 de otra manera (p. 3)

A continuación, señala que en el siglo XX, el desarrollo de la noción continúa en evolución, esto a través del desarrollo de la teoría de conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918): “la noción de función se amplió para incluir todas las correspondencias arbitrarias que satisfacen la condición de unicidad entre conjuntos, numéricos o no numéricos” (p. 3)

Hasta aquí, del escrito de Ponte sobre el desarrollo de la noción de función, podemos evidenciar cuatro momentos clave en el desarrollo de la noción de función: 1. Relacionado con prenociones como el trabajo de Oresme a través de representaciones gráficas de movimientos. 2. La noción de función asociada a una expresión analítica, lo cual reducía la noción de función a un subconjunto relacionado con funciones continuas. 3) El trabajo de Dirichlet

que a través de demostrar condiciones suficientes para las ideas de Fourier sobre el trabajo con desarrollo en series trigonométricas, amplía la hasta entonces reducida noción de función, a otros subconjuntos de funciones no continuas. 4) La ampliación generada por la teoría de conjuntos, a correspondencias arbitrarias a conjuntos numéricos o no numéricos.

1.9.2 La noción de función en la modelización

Algo que queremos resaltar del artículo de Ponte (1992) es que la noción de función en su desarrollo inicial, estuvo de la mano con la solución de problemas físicos. Ponte presenta el siguiente descubrimiento de Newton relacionado con la variación, en el que podemos notar la importante relación entre el estudio de funciones y sus derivadas para la solución de fenómenos físicos:

Uno de los descubrimientos más extraordinarios de Newton proporciona un ejemplo sobre la naturaleza de la variación. Newton descubrió que la ley de variación del movimiento de un cuerpo material de masa m , que en la notación moderna puede estar dada por la función $S(t)$, el espacio que varía como una función del tiempo, no tiene una relación directa con la fuerza f que actúa sobre ese cuerpo. No existe una relación simple para la ley de velocidad dada por $V(t)$, en la cual V es la velocidad de S dS/dt . Sin embargo, dicha relación existe para la aceleración del cuerpo, dada por $a(t)$, la segunda derivada de S , es decir dV/dt , y se expresa mediante una ley muy simple $f = ma$. (p. 4)

Ponte cierra su escrito asociando la implicancia educacional de la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función, señalando que, si bien el desarrollo histórico de la noción de función estuvo ligado a fenómenos de la física, hoy en día la función tiene aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, como es ciencias sociales, economía e ingeniería. Nos parece de relevancia actual lo que señala con respecto a la enseñanza de la noción de función en el sistema educativo que se enfoca en la manipulación algebraica y deja de lado el tratamiento con problemas de modelización y el uso adecuado de tecnología en la resolución de dichos problemas.

En ingeniería, la noción de función y el estudio de la variación es clave para el desarrollo de nociones propias de ingeniería, como es el caso del estudio de estructuras, donde la función representa fuerzas y momentos asociados a la resistencia y deformación de la estructura. En el caso del estudio de fluidos, el comportamiento estático y dinámico del mismo en diversos componentes como son presas, tuberías o compuertas o en el área de suelos, donde el estudio de los asentamientos y su resistencia a corte, hace necesario el estudio de la noción de función y su variación.

1.9.3 Relacionando la función con su función derivada

Nemirovsky & Rubin (1992), señalan que la relación entre una función y su derivada es un tema central en el estudio del cálculo, y que, a pesar de ser

un tema matemáticamente complejo, pues involucra conceptos formales como límites, continuidad y convergencia, el estudio de las relaciones entre una función y su derivada está presente en contextos de la vida diaria y permiten a los estudiantes el estudio de situaciones que involucren funciones y sus derivadas.

El citado estudio se realizó con estudiantes de secundaria donde se identificaron distintos tipos de relaciones que realizan los estudiantes al relacionar fenómenos físicos, como el movimiento de móviles o de flujo de fluidos, a través de relacionar la función con su derivada. Para ello destacan dos tipos de relaciones: la semejanza y lo variacional.

Un supuesto de semejanza refleja una taxonomía informal de gráficos basada en los atributos que participan en el parecido. Así, estas taxonomías espontáneas e implícitas pueden indicar qué atributos gráficos el estudiantes considera relevantes en ese momento (p. 11)

Entonces señalan que las semejanzas reflejan una acción que se asocia más a lo espontáneo y que puede no favorecer la comprensión de la relación entre la función y su derivada al no reflejar un aspecto más analítico como lo sería el establecimiento de relaciones variacionales.

Por ejemplo, los estudiantes pueden relacionar la función con su derivada a través del supuesto de semejanza basado en que líneas rectas corresponden a líneas rectas (Figura 1.23)

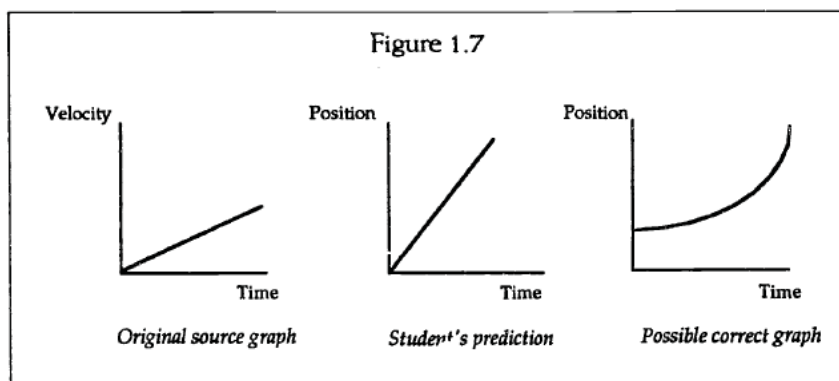


Figura 1.23 Semejanza de misma forma (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 13)

Otro ejemplo de supuesto de semejanza puede ocurrir cuando un estudiante relacione la función con su derivada a través de suponer una misma transformación geométrica (Figura 1.24)

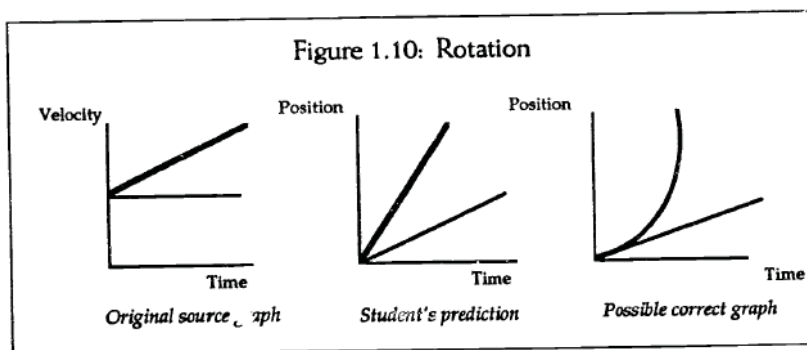


Figura 1.24 Semejanza geométrica (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 14)

Con respecto a lo variacional para relacionar la función con su derivada, señalan que los estudiantes utilizan nociones matemáticas para la relación de las funciones desde una forma local. Tal como la noción de pendiente, que puede ser utilizada como un descriptor de apreciación gráfico descriptivo de los gráficos, “la pendiente es una característica gráfica-perceptiva. Observar la pendiente permite a los estudiantes hacer comparaciones cualitativas entre puntos en la misma curva (p. 19)”. O también la pendiente puede ser utilizada como tasa de cambio, “la pendiente de una curva es la tasa de cambio en y con respecto al cambio en x (p. 20)”.

Por ejemplo, utilizando una relación cualitativa entre la función y su derivada a través de la pendiente, los estudiantes pueden hacer la siguiente relación (Figura 1.25)

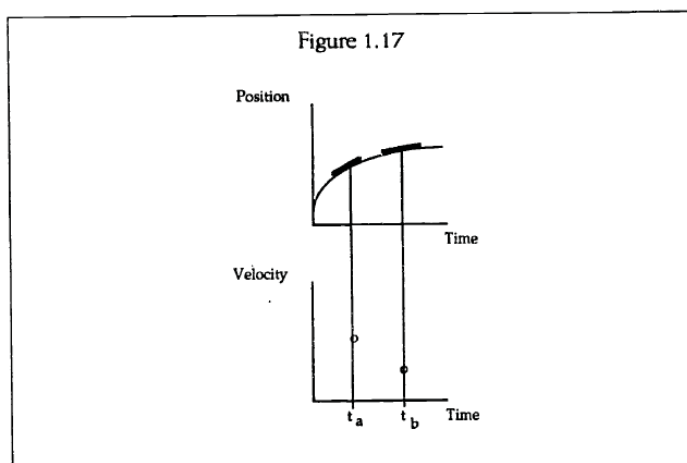


Figura 1.25 Relación por covariación mediante la inclinación de la pendiente (Nemirovsky y Rubin, 1992, p. 19)

En la figura (Figura 1.25) se puede observar que la inclinación de la pendiente puede permitir al estudiante trazar la función derivada, utilizando la inclinación diría que las rectas tangente que va trazando en la curva posición tiempo van teniendo una inclinación cada vez menor y por tanto la velocidad en el punto $t = a$ debiera ser menor a la velocidad en el punto $t = b$.

En tanto, Nemirovsky y Rubín (1992) podemos ver que los aspectos cualitativos ya sea por semejanza o por covariación, son un descriptor posible para entender algunas relaciones cualitativas que se pueden establecer al relacionar la función y su derivada o la derivada y su función (como acumulación de una antiderivada). En ingeniería es un aspecto importante a considerar pues es frecuente encontrar representaciones en lenguaje basado en diagramas donde aspectos variacionales permiten establecer relaciones entre diagramas.

Por su parte Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed (2012), declaran que un adecuado estudio de funciones debe atravesar tanto por un trabajo elemental, como es simples cálculos hasta un trabajo más avanzado como es el estudio de la diferenciación y la integración, “las funciones llegan a ser objetos matemáticos que son representados en diferentes maneras, se ordenan en diferentes tipos de acuerdo a sus propiedades y se someten a procesos de orden superior, como la diferenciación y la integración” (p. 1243).

Para desarrollar un pensamiento funcional, Doorman et. al (2012, p.1246) utilizan los siguientes tres aspectos interrelacionados del concepto de función:

1. La función como una asignación de entrada-salida

La función es una asignación de entrada-salida que ayuda a organizar y realizar un proceso de cálculo. Esta noción algo vaga y operacional gradualmente adquiere más matices: ¿Cómo funciona la salida que depende de la entrada?; ¿Cómo determina la entrada la salida?; ¿Qué patrones se pueden ver? La representación de una cadena de entrada-salida es apropiada para esta visión de función.

2. La función como un proceso dinámico de covariación

Este aspecto refiere a la noción de que la variable independiente, mientras se ejecuta a través del conjunto de dominios origina que la variable dependiente recorra a través de un conjunto de rango. La variable dependiente covaría con la independiente. Inicialmente, el cambio vinculado puede notarse de alguna manera fenomenológica. A continuación, surge la pregunta de cómo y por qué tiene lugar este proceso de dinámica conjunta. Útiles representaciones para estudiar la covariación son tablas y gráficas, que pueden desplazarse o rastrearse.

3. La función como objeto matemático

Una función es un objeto matemático que se puede representar en diferentes formas, como cadenas de flechas, tablas, gráficos, fórmulas y frases, cada una de las cuales proporciona una vista diferente del mismo objeto. La visión más estructural sobre las funciones puede ser promovida por tareas centradas en un nivel global, por ejemplo en familias de funciones, en comparación de funciones, y más tarde en la diferenciación o integración de funciones (p. 1246).

Tall (1997), señala que uno de los propósitos del estudio de funciones es estudiar el cambio, por tanto, a partir de este propósito, es natural el paso al estudio de la tasa de cambio (diferenciación) y el crecimiento acumulado (integración), así como el teorema fundamental del cálculo, mediante el cual se estudia la derivada y la integral como procesos inversos.

Respecto a la noción de función, Tall (1997), presenta la primera emergencia de la palabra función y presenta una definición de función presente hacia el siglo 20, basada en la teoría de conjuntos. Menciona que la primera aparición de la noción de función ocurre en un escrito de Leibniz a finales del siglo XVII: "Utilizó el término "functio" para describir una variable "y" cuyo valor dependía de una variable cambiante x" (p. 9).

Posteriormente para el siglo XX presenta la definición de función desde la teoría de conjuntos:

En el siglo XX, la idea visual del gráfico $f: A \rightarrow B$ llegó a ser considerado como un conjunto de pares ordenados $\{(x, y) \in AXB | x \in A, y = f(x)\}$, dando la posibilidad de una definición desde la teoría de conjuntos. Una función puede ahora ser cualquier conjunto G de pares ordenados $G = \{(x, y) \in AXB | x \in A, y \in B\}$, siempre que para cada $x \in A$ exista un $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$ y que este y sea único (si $(x, y_1), (x, y_2) \in G$ entonces $y_1 = y_2$). (p.9)

Sin embargo, señala que si bien tal definición formal del concepto de función es adecuada para la formulación sistemática de la matemática, no es así para propósitos de enseñanza, incluso menciona a Bakar (1991) para remarcar que la definición formal tiene menos énfasis en los cursos de servicio, como el caso de estudiantes de ingeniería, en los cuales la definición formal se olvida.

En su enfoque de visualización gráfica para el desarrollo de nociones del cálculo, utiliza, mediante recursos computacionales, la idea de que un gráfico diferenciable bajo aumento infinito es una línea recta. Tall (2012), habla de la idea de la rectitud local (local straightness):

Un gráfico puede verse como un objeto y uno puede trazar un dedo a lo largo de él para sentirlo como un objeto. Entonces es posible deslizar una mano enderezada a lo largo de la curva para sentir su pendiente cambiante como una concepción natural. (p.52)

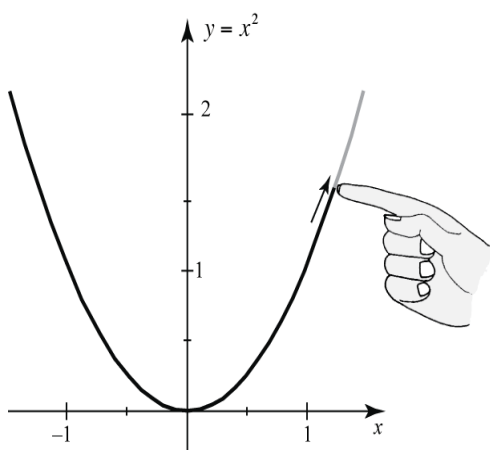


Figura 1.27 Deslizando una mano a lo largo del gráfico para sentir el cambio de pendiente (Tall, 2012, p. 53)

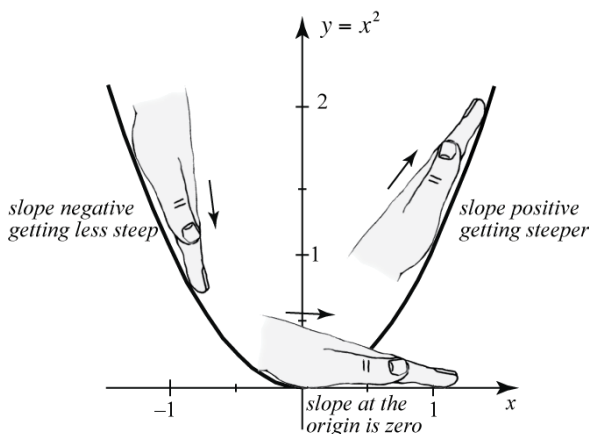


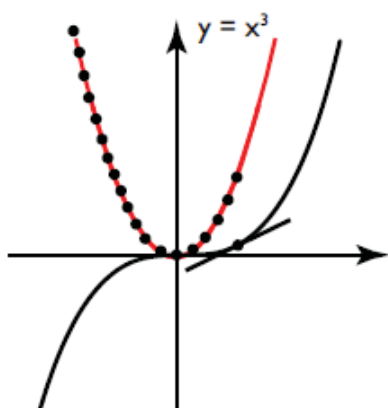
Figura 1.26 Trazando un gráfico para ver y sentir la gráfica como un objeto (Tall, 2012, p. 53)

Con ayuda del computador, Tall realiza una operación local a través de seleccionar una porción de la curva $y = f(x)$ y se trazan pendientes que se estabilizan en su derivada Df . Para ello sigue la idea fundamental:

La función derivada $f'(x)$ es el resultado de una operación global D que opera sobre la función original f para dar la derivada de la función

$$Df(x) = f'(x). \text{ (Tall, 2012, p. 54)}$$

Con la ayuda de software y aprovechando la potencialidad de la visualización dinámica (Figura 1.28): Para $f(x) = x^3$



Slope from x to $x + h$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh \end{aligned}$$

For small h the slope stabilises to $3x^2$.

Dynamic visualisation

Symbolism

Figura 1.28 Visualización dinámica vs simbolismo (Tall, 2012, p.55)

Señalando que, después de un trabajo con la visualización dinámica, considera más apropiada la introducción de la notación:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para experimentar su enfoque gráfico, y sin necesidad de pasar por la definición formal de límite, realiza una experimentación a estudiantes universitarios y los comparó con un grupo de control. Encontró que para la pregunta de la fig. 1, el 68 % de los estudiantes acertó en su respuesta comparado con el 8 % de los estudiantes pertenecientes al grupo de control.

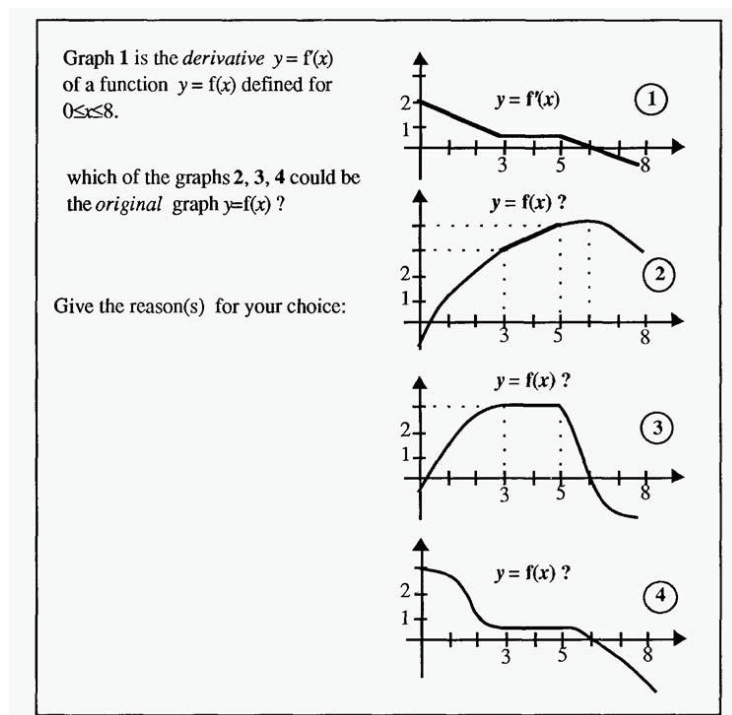


Figura 1.29 Reconociendo una anti-derivada (Artigue, 1991, p. 190)

La aproximación a la problemática mostrada, desde la noción de función y su relación con su derivada, nos proporciona elementos para comprender la importancia de la conexión entre estos objetos matemáticos.

Como se puede notar, hemos dado relevancia a aproximaciones que promueven un acercamiento gráfico. Como podemos ver en Tall (2012) desde la noción de rectitud local o en Nemirovsky y Rubin desde acercamientos variacionales (locales) o de semejanza (globales). En ello se aprecia la importancia de conectar la función y su derivada, lo que requiere

una genuina conexión entre ambos objetos y no sólo trabajar de manera aislada entre ellos.

En ingeniería la conexión entre ambos objetos desde un lenguaje gráfico es relevante para la comprensión del fenómeno. Como podemos ver a continuación en Hibbeler (2009) en los dos ejemplos siguientes

En Hibbeler se muestran dos ejemplos donde se hace relevante la comprensión de la relación entre los diagramas que se generan debido a las fuerzas internas en una estructura. En estos ejemplos los diagramas de momento representan la función y los diagramas de momento representan la función derivada. Las cuales están discretizadas y se representan por polinomios que se asocian a cada elemento discretizado.

En un primer ejemplo podemos ver la relación entre un elemento estructural y sus diagramas de cortante y de momento caracterizados por cargas que son puntuales.

Representación de diagramas	Razonamiento cualitativo
Figura 1.30 Diagramas de V y M para cargas puntuales (Hibbeler, 2009, p. 155)	Se puede observar que la estructura representada en (a) contiene cargas puntuales. La representación de la función de corte por medio del diagrama en (b) se puede relacionar con la representación de la función de momento por medio del diagrama en (c). Para las secciones del diagrama en (b) que se encuentran por debajo del eje x, se asocia una variación constante negativa del cortante a través de una pendiente constante negativa, por tanto el diagrama de momento deberá tener un comportamiento decreciente con pendiente constante negativa. Por lo contrario, para las secciones del diagrama en (b) que se encuentran por arriba del eje x, se asocia una variación constante positiva del cortante a través de una pendiente constante positiva, por tanto el diagrama de momento deberá tener un comportamiento creciente con pendiente constante positiva.

En un segundo ejemplo podemos ver la relación entre un elemento estructural y sus diagramas de cortante y de momento caracterizados por cargas que son distribuidas variables.

Representación de diagramas	Razonamiento cualitativo
Figura 1.31 Diagramas de V y M para carga distribuida triangular (Hibbeler, 2009, p. 155)	Se puede observar que la estructura representada en (b) contiene cargas distribuidas variables de comportamiento creciente y de tipo triangular. La representación de la función de corte por medio del diagrama en (c) se puede relacionar con la representación de la función de momento por medio del diagrama en (d). Para la sección del diagrama en (c) que se encuentran por arriba del eje x, se asocia una variación decreciente positiva del cortante a través de una pendiente negativa, por tanto el diagrama de momento deberá tener un comportamiento creciente positivo con pendiente positiva decreciente. Por lo contrario, para la sección del diagrama en (c) que se encuentran por abajo del eje x, se asocia una variación negativa creciente del cortante a través de una pendiente negativa, por tanto el diagrama de momento deberá tener un comportamiento decreciente con pendiente negativa creciente. Además, justo cuando el cortante cambia de positivo a negativo, es decir la variación de V sea nula, se tendrá un valor máximo del momento.

Consideramos, que también es importante el trabajo con otros registros adicionales al gráfico. En el capítulo 4.1 se da evidencia de ello y se presentan distintos conceptos de la ingeniería en distintos registros.

Como podemos ver la comprensión de la relación entre una función y su derivada es útil para la interpretación de resultados en un problema de ingeniería. Las aproximaciones a la problemática previamente mostradas permiten reflexionar sobre la relación del objeto matemático con la actividad de modelización y el papel que se propone juegue en esta investigación.

1.10 Investigaciones relacionadas

En este apartado se muestran trabajos relacionados con el tema de investigación con la finalidad mostrar la pertinencia del tema, en cuanto a que es un objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática. Las investigaciones que se presentan se categorizan en cuanto al programa de investigación que se considera pertenecen, ya sea de manera explícita o implícita y de acuerdo a las diversas perspectivas que se plantearon en el apartado anterior.

1.10.1 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista cognitivo

Aquí consideramos investigaciones que tengan relación con el estudio de representaciones externas y su relación con las representaciones internas, independientemente que se adhieran a una perspectiva o a un grupo de modelización específica. Por tanto, las consideramos investigaciones en modelización desde un punto de vista cognitivo.

Como primer antecedente a la problemática de investigación es el trabajo que he realizado en la tesis de magister (Cosmes, 2012), en dicho estudio se estuvo interesado en investigar los procesos de construcción del concepto de función lineal desde el punto de vista de modelización con estudiantes de primer semestre de ingeniería, el lente teórico de la investigación fue basado en la teoría de los registros de representación semiótica, Duval (1998) y su relación con la teoría de las representaciones funcionales en un marco de interacción social del aprendizaje. Desde ese punto de vista, el concepto de función se definió como la variación conjunta entre dos magnitudes, donde se analizó como cambiaba una magnitud cuando la otra cambiaba.

El elemento que sirvió de eje central de todo el trabajo de tesis fue la noción de razón de cambio constante, de tal manera que se interesó en cómo los estudiantes abordaban los procesos de modelización de fenómenos mediante funciones lineales cuando eran enfrentados a diversas situaciones problema relacionadas con el contexto de la ingeniería.

El trabajo tuvo como objetivo general promover en los estudiantes la construcción de la función lineal en un ambiente de modelización de fenómenos.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Para analizar los procesos de construcción del concepto se diseñó un instrumento basado en una extensa (a manera de cuadernillo) secuencia didáctica conformada de acuerdo a la metodología propuesta por Hitt y Cortés (2009) ACODESA (d` apprentissage Collaboratif, débat et Scientifique et d`auto _ réflexion), mediante esta metodología se planeó un proceso de instrucción compuesto por tres etapas: etapa de situaciones problema, problemas y ejercicios, la metodología sirvió principalmente para las dos primeras etapas.

Algunas de las dificultades que presentaron los estudiantes fueron:

- Dificultad para abordar un problema matemático donde se plantee una situación divergente, es decir, que no existiendo un camino directo, la tarea los obliga a la búsqueda de alternativas, esa búsqueda puede estar ligada a intentos por entender la tarea.
- Dificultad para comunicar ideas, esto en la medida de que la actividad sugiere una constante comunicación de resultados primero en el equipo y después grupal.
- Dificultad para tomar decisiones en cuanto a los aspectos matemáticos que intervienen en las situaciones, por ejemplo al establecer la relación directamente proporcional de las magnitudes intervinientes.
- Poca capacidad para generalizar un patrón algebraico que induzca la producción de modelos matemáticos en algunos estudiantes.

De acuerdo al objetivo planteado se encontró que el estudiante:

- Adquiere habilidades para modelar extra-matemáticamente, es capaz de identificar variables y relaciones entre variables, en general presenta habilidad para representar sus soluciones.
- Desarrolla el objeto matemático "función lineal" haciendo uso de distintas representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Una representante ampliamente reconocida por la comunidad de modelización matemática es Borromeo Ferri (2006, 2009, 2010, 2018), ella ha realizado trabajos en modelización matemática donde ha investigado sobre la formación de profesores en modelización matemática y sobre la relación entre la modelización matemática y el aprendizaje. En esas líneas de investigación utiliza como referente teórico el proceso de modelización de Blum, y como se mencionó anteriormente, al está interesada en el estudio cognitivo del proceso de modelización, extiende el uso del ciclo de modelización y además, caracteriza rutas individuales de modelización realizadas por los estudiantes, para ello desarrolla los conceptos de estilo de pensamiento matemático (descritos en el apartado teórico).

Hace más de una década en Borromeo (2006) se reporta la existencia de pocos estudios relacionados con tomar en cuenta los procesos cognitivos

asociados a la solución de un problema de modelización. Ella propuso un ciclo de modelización (el cual es utilizado en nuestra investigación y es descrito en la sección de marco teórico) donde destaca la importancia de la representación mental de la situación y del uso del contexto extra matemático principalmente en la conformación del modelo real y en la matematización horizontal.

Para realizar el estudio cognitivo, señala la importancia de reconstruir las fases de su ciclo propuesto, ello con base en declaraciones realizadas por los estudiantes y tomando en cuenta el conjunto de representaciones externas. Dos constructos que ella utiliza para ello son: 1. Los estilos de pensamiento matemático (formas de proceder de los estudiantes de acuerdo a sus preferencias, p. e. de manera analítica privilegia el trabajo con el modelo matemático por sobre lo extra matemático) y 2. Las rutas individuales de modelización, las cuales se corresponden con una no linealidad en el recorrido de las fases propuestas por el ciclo de modelización.

Ella reflexiona que realizar un estudio desde un punto de vista cognitivo no es una tarea fácil, pues requiere grandes esfuerzos por considerar aspectos como el problema propuesto en conexión con las declaraciones de los estudiantes y, además, del conjunto de representaciones externas realizadas.

En su artículo sobre el efecto de los estilos del pensamiento matemático en el comportamiento de los estudiantes cuando afrontan una tarea de modelización (Borromeo, 2010), a través de, un estudio cualitativo basado en la teoría fundamentada, profundiza en la relación entre las tareas de modelización matemática y los estudiantes, al trabajar en su solución. Para ello, se planteó como pregunta de investigación: Cómo los estudiantes de grado 10 resuelven tareas de modelización, y qué influencias tienen los estilos de pensamiento matemático en los estudiantes cuando se enfrentan a lecciones matemáticas relacionadas con procesos de modelización. Encontró que el estilo de pensamiento matemático de los estudiantes influencia en el proceso de modelización.

En este sentido de lo cognitivo, a través de, la reconstrucción mental de lo trabajado por el estudiante, es que considera el proceso de modelización de Blum (2006), pero hace adecuaciones teóricas como la noción de representación mental de la situación, la cual tiene como finalidad caracterizar el entendimiento de la tarea dada al estudiante, además, incorpora el elemento "conocimiento extra matemático" las cuales afectan a las fases de simplificación y matematización de la tarea.

Cierra su artículo mencionando que la modelización bajo una perspectiva cognitiva es un campo amplio para la investigación donde preguntas aún abiertas corroboran esa amplitud, como la de investigar cuales

conocimientos teóricos y metodológicos debe tener el profesor acerca de la modelización matemática para ser usada en la escuela. Además, de que esta línea de investigación busca generar más indicadores para contribuir a su enseñanza efectiva.

En el marco de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático recientemente Reyes (2019) reporta un trabajo sobre modelización con estudiantes de nivel preparatoria. Ella ha trabajado con la noción de función desde la modelización a través de considerar la teoría de los espacios de trabajo matemático y el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007). Los problemas de modelización están en el marco de la Física, específicamente del área de la cinemática. Entonces ella propone los siguientes paradigmas en el marco de su propuesta de ET Cinemático:

- Paradigma C1: El trabajo en este paradigma lo asocia a lo real y la conexión con los sentidos. Destaca la realización de análisis cualitativos. Por ejemplo, cuando un estudiante señala que un móvil va lento o rápido. Y también señala que la utilización de material concreto es relevante.
- Paradigma C2: Aquí la medida de magnitudes y su cuantificación es altamente relevante. A diferencia del paradigma anterior donde no habría necesidad de medir ni cuantificar. Por ejemplo, magnitudes de velocidad o aceleración. Destaca la importancia de que en este paradigma se concreten conceptualizaciones basadas en el uso de objetos matemáticos. Sin embargo, el uso de objetos matemáticos no es desde lo formal.
- Paradigma C3: Debe existir una relación formal y procesos de idealización. Es decir, relación entre el saber sabio (matemática formal) y leyes y conceptos de la física.

Es a través de los paradigmas anteriores que caracteriza el trabajo de los estudiantes y a través del ciclo de Blum y Leiss establece la conexión entre las génesis del ET cinemático, los paradigmas y la etapa del ciclo de modelización en que se encuentren.

Es de destacar la importancia que se observa en su trabajo con respecto al uso de tecnología, toda vez que le permite llevar a cabo las experimentaciones de las situaciones físicas tratadas. En su escrito reporta el uso de Tracker (software para modelar fenómenos físicos a través de videos) y GeoGebra.

Como parte de sus conclusiones, señala que el uso del ETC propuesto le es útil para el diseño de situaciones físicas pero también para el análisis. Además, el uso del ciclo de modelización en el diseño de sus situaciones le permite propiciar la activación de los planos en el ETC.

Otro trabajo reciente sobre el uso de la teoría ETM y modelización es el de Moutet (2019). Moutet ha investigado sobre una extensión del ETM para

diseñar y analizar producciones de estudiantes ante tareas relacionadas con la relatividad especial. Para ello propone una extensión al ETM asignando un plano epistemológico de la física (relatividad especial) y dejando un solo plano cognitivo, justificando que es un solo sujeto el que realiza los procesos cognitivos al solucionar los problemas.

Una característica relevante del trabajo de Moutet es el uso de diagramas pues él señala que éstos no están adecuadamente promovidos en el marco de la enseñanza secundaria en Francia. Se justifica desde lo que postula Duval en cuanto al uso y conversión de al menos dos registros de representación, donde el registro gráfico es el gatillante en su propuesta.

Moutet (2019) presenta un estudio de conexión entre matemáticas y física y entre matemáticas y química. Ello en conexión con el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2005). Con respecto a la conexión entre Matemáticas y Física, utiliza su propuesta de ETM extendido a la Física. Realiza una experimentación de una secuencia didáctica de relatividad especial con un enfoque diagramático, el cual aplica a 34 estudiantes de 12 grado. La experimentación la realiza en escenarios a lápiz y papel y en escenarios con uso de GeoGebra. Destaca la posibilidad de experimentación con los diagramas que proporciona GeoGebra.

Destaca que Geogebra es un artefacto que enriquece la génesis semiótica en el sentido de las representaciones dinámicas y la génesis instrumental en el sentido de que las funcionalidades del cursor permiten cambiar las condiciones experimentales.

Con respecto al ETM extendido, señala su utilidad para analizar tareas de física de acuerdo a las etapas del ciclo de modelización. En su reporte encontró que el estudiante utilizado para el informe moviliza con mayor facilidad interacciones semiótico-instrumentales y que las interacciones instrumental-discursivas se produjeron de manera más marginal.

Otro trabajo en modelización y ETM es el de Montoya, Viola y Vivier (2017). Realizaron un estudio con profesores en formación de Francia y Argentina cuando realizan una tarea de modelización. La tarea es de una canaleta que debe ser optimizada para que permite un caudal máximo. La tarea de modelización corresponde al dominio del cálculo y se relaciona con nociones de derivación y optimización de funciones.

La tarea podía ser resuelta con distintas estrategias: utilizando la derivada, a través de propiedades de una función cuadrática como es la simetría o utilizando simplemente tablas de valores. Pero se cuestionaban sobre la emergencia de situaciones donde la naturaleza de los objetos matemáticos fuera una necesidad para ser cuestionada.

La caracterización del trabajo de los estudiantes la realizaron a través de paradigmas en el análisis (Montoya y Vivier 2016). Los cuales pasan desde

considerar intuiciones relacionadas con el mundo real, el uso de objetos matemáticos a manera de herramienta y el cuestionamiento sobre la naturaleza de los objetos matemáticos.

En cuanto al ciclo de modelización utilizan el ciclo de Blum y señalan que principalmente están interesados en estudiar los procesos de matematización horizontal y vertical asociados a las etapas 3 y 4 del ciclo de modelización. Además, se destaca la visión de refinamiento que proponen en cuanto al uso de dos ciclos de experimentación (aunque en este artículo reportan sólo el primero). Un primer ciclo de experimentación se correspondería con presentar la tarea y estudiar las producciones, y a partir de ahí con base en los objetivos del profesor plantear la necesidad de continuar con otro ciclo de trabajo (segundo ciclo) donde se busque afianzar el contenido matemático objetivo, para de esta manera el profesor reorganice e institucionalice el conocimiento.

1.10.2 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista de epistemología relativa

Dentro de los estudios sobre modelización matemática bajo un enfoque que considera un relativismo epistemológico en Cordero (2016) se habla sobre este programa de investigación donde se trabaja a través de la caracterización de categorías para enseñanza y aprendizaje de la matemática considerando que dichos procesos se ven afectados por una epistemología relativista, es decir, considera no sólo a la disciplina matemática sino también a los sujetos a los cuales se busca favorecer su aprendizaje, donde por ejemplo en estudiantes de ingeniería, la epistemología de la matemática se verá afectada por las prácticas de la comunidad de ingenieros que esté siendo atendida.

Para ello, sitúa como problemática principal que la matemática escolar tiende a provocar desvinculación con la matemática del cotidiano (del ingeniero) por ejemplo y que para atender esa desvinculación es necesario construir marcos de referencia donde la matemática se resignifique, y que para la construcción de dichos marcos debe haber un dialogo entre la matemática escolar y el cotidiano.

Las principales investigaciones realizadas bajo esta perspectiva están las relacionadas con Socioepistemología.

Un breve recorrido sobre investigaciones dentro de esta línea de investigación en modelización matemática lo presentan Arrieta & Díaz (2015), en dicho recorrido presentan las distintas intenciones educativas que han tenido las diversas investigaciones con respecto a vincular la escuela con el entorno del ciudadano, los deslizamientos en la naturaleza de la modelización matemática; es decir, qué representaciones de lo modelado

han sido consideradas en el tiempo y además, presentan la relación entre la matemática y la realidad considerada por diversas posturas, para finalmente cerrar con aportes resultado de sus investigaciones en modelización matemática.

Con respecto a la vinculación de la matemática escolar con el entorno del ciudadano, Arrieta y Díaz comentan que existen distintas perspectivas que han atendido la problemática relacionada con tender puentes entre la escuela y su entorno, se comenta que un pionero en la contextualización en la enseñanza de la matemática surge con Freudenthal cuando enfatiza los siguiente: “las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mí me gustaría que las matemáticas más abstractas fueran enseñadas dentro de contextos más concretos” (Freudenthal, 1981, p. 139), pero que a su juicio algunas de ellas lo reducen a la utilización de situaciones artificiales cuyos contextos no representan las propiedades reales del mismo y lo ejemplifica con el siguiente contexto (Figura 1.32) propuesto en Escareño y López (2007).

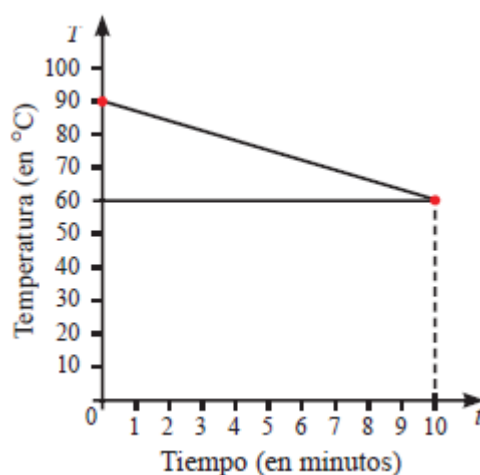


Figura 1.32 Enfriamiento del café (Escañero y López 2007, p.153 citado en Arrieta y Díaz, 2015, p. 23)

La crítica que realizan es que en un afán de contextualizar la matemática se corre el riesgo de plantear situaciones que no se corresponden con la realidad, pues en este caso el modelo de la tasa de café se correspondería de una mejor manera con un modelo exponencial. Por lo que Arrieta & Díaz (2015) mencionan que “las problemáticas a las que da lugar la separación de la escuela de su entorno están aún lejos de ser resueltas. En la escuela se siguen construyendo lugares artificiales donde suceden cosas que en la vida no suceden o no tienen razón de ser” (p. 24)

Arrieta y Díaz señalan los deslizamientos que se han estado presentes en torno a la modelización matemática, para ello plantea dos deslizamientos:

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

1. Deslizamiento relacionado con los modelos: la ampliación que va de considerar como modelo sólo las representaciones algebraicas y/o diferenciales a considerar un universo de modelos como son por ejemplo los modelos gráficos, tablas, entre otros.
2. Deslizamiento relacionado con las intenciones de la modelización matemática, donde cita a Biembengut (2012) quien se refiere a que en un principio la modelización matemática era considerada como una aplicación de la matemática donde el principal rol de la modelización era la utilidad que ella tiene por ejemplo para disciplinas como la ingeniería. Pero a través del tiempo han surgido diversas intencionalidades, como las que consideran a la modelización matemática como una estrategia de enseñanza y aprendizaje, por lo que resulta útil tanto para fines pedagógicos como para la investigación. Además, contrapone ese punto de vista de la modelización como herramienta didáctica al citar a Cordero (2006) quien postula que la modelización no es una "herramienta didáctica" al no tener por prioridad la construcción de objetos matemáticos (sin soslayarlos) sino que más bien busca la funcionalidad de la matemática a través de la modelización.

Por último, Arrieta y Díaz establecen que la relación entre la matemática y la realidad no es trivial en la modelización matemática, pero que algunos investigadores, ya sea a través de su discurso o de sus ciclos de modelización, presentan una separación entre la matemática y la realidad pero que en el caso de las investigaciones en Socioepistemología tal separación no se hace presente (al menos no explícitamente). Por ello, su perspectiva de modelización la visualiza de la siguiente manera: "la modelización es, entonces, una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La intervención sobre lo modelado es diversa, por ejemplo, para la predicción, el diagnóstico y/o la evaluación" (Arrieta & Díaz, 2015, p. 35)

Para cerrar con su perspectiva de modelización proporciona un ejemplo llevado a cabo con estudiantes mexicanos de tercer grado de secundaria que consiste en modelar la elasticidad de los resortes, en la caracterización de los posibles modelos considera la utilización de una red de modelos, en este caso de lo lineal. A continuación, se muestra la red de modelos (Figura 1.33) que presentan como resultado de la experimentación de su situación.

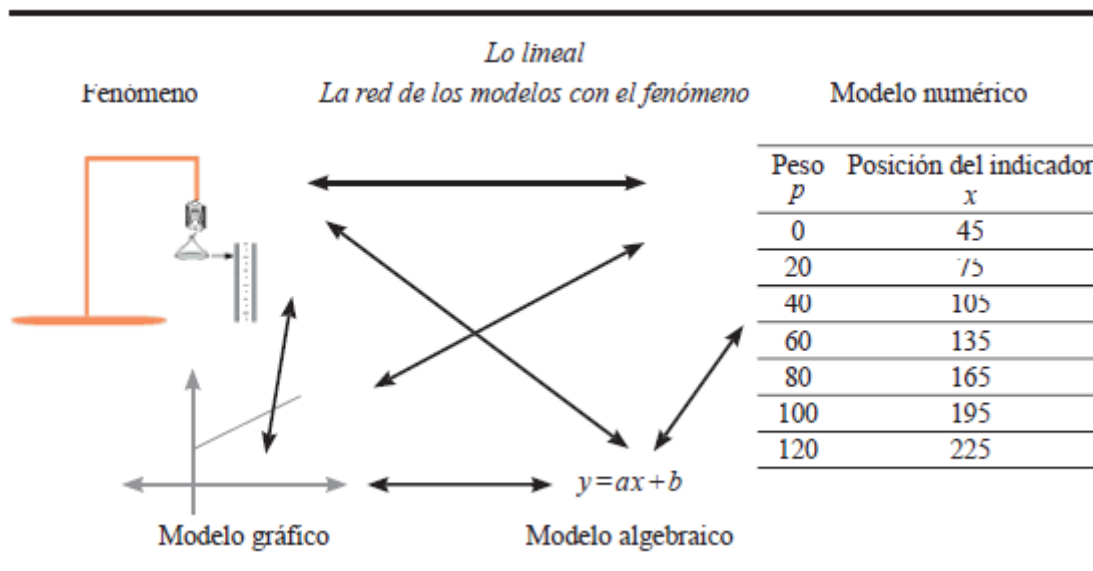


Figura 1.33 La red de lo lineal (Arrieta y Díaz, 2015, p.43)

Concordamos con sus resultados donde propone caracterizar una red de modelos bajo distintas representaciones de lo modelado para ser consideradas como modelo, de hecho en nuestra investigación de magister realizamos situaciones de modelización para lo lineal que también consideraron un universo de representación de modelos.

Algo interesante y que también estamos de acuerdo es que ellos proponen considerar la analogía (del fenómeno de lo lineal) de la situación trabajada bajo lo lineal para modelar otro tipo de situaciones representables bajo este tipo de variación, pues de esa manera, se contribuye a reducir el obstáculo que podría conducir la contextualización bajo el diseño de una situación y de esa manera mostrar al estudiante que bajo esa misma variación es posible trabajar otras situaciones pero que atienden a otras consideraciones de tipo extra matemático.

Otro estudio relacionado con este programa de investigación es el trabajo desarrollado dentro de su tesis doctoral por Arrieta (2003) en México, donde exploró las prácticas discursivas que ejercen los estudiantes y el profesor en el aula en contextos discursivos centrados en las prácticas de modelización de fenómenos donde construyen, interactivamente, argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con el fenómeno a modelar.

En su trabajo, investigó las interacciones entre estudiantes y profesores con fenómenos modelables mediante relaciones lineales y no lineales, en un proceso de matematización en el aula, y cómo coadyuvan a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos de cambio y variación, donde se buscó predecir estados futuros de un proceso de cambio con base en datos que provienen de la empírea y de la matematización del fenómeno en sí.

Dentro de los resultados de su investigación cabe resaltar la importancia que le confiere a las prácticas sociales en la formación matemática del individuo a través de la interacción en sociedad, pues al ejercer las prácticas sociales de modelización, construyen lo lineal y lo cuadrático como herramientas para intervenir en sus comunidades. Concluye que esto precisamente es lo que se constituye en conocimiento.

Otro trabajo relacionado es la tesis doctoral de Méndez (2013) desarrollada en México, quien realiza una investigación en el nivel medio superior buscando promover a la modelización desde el lente teórico de la Socioepistemología. La visión de modelización promovida en su tesis es que la modelización no solamente debiera ser utilizada para aplicar conocimiento sino de manera implícita para desarrollar una epistemología de construcción del conocimiento.

Declara que su trabajo tiene como finalidad generar marcos de referencia a través de proporcionar elementos para un rediseño del discurso matemático escolar donde la funcionalidad de la matemática construida sea medida en términos del uso de la misma, pero no entendido el uso como una mera aplicación de conocimientos matemáticos sino como aquel que se resignifica en la medida en que los participantes afrontan el problema en una situación en específico.

Para levantar evidencias, realiza diseños de situación a través de un desarrollo de usos del conocimiento matemático a saber el uso de las gráficas, las tablas de datos y las expresiones analíticas, es este desarrollo de red de usos dentro de una comunidad de conocimiento matemático la que caracteriza un tipo de variación según la situación abordada.

Establece la modelización desde tres planos:

- I. Como ente teórico: considerada como una práctica social generadora de conocimiento matemático.
- II. Como mecanismo de intervención: al ser una categoría de conocimiento matemático que se basa en los usos (epistemología de prácticas).
- III. Como argumento de desarrollo de red de usos: a través de desarrollo de diseños de situaciones.

Menciona que, su categoría de modelización promovida desde el desarrollo de una red de usos del conocimiento matemático fue entretrejida con elementos de otras categorías desarrollada en el programa de investigación socioepistemológico en la línea de modelización, a saber: la categoría de Comportamiento Tendencial de Funciones, la Modelación-Graficación y La Numerización de los Fenómenos.

Como parte de sus reflexiones finales comenta que con su investigación se evidenció que su categoría de modelación produce en los estudiantes diferentes tipos de comportamientos mediante el estudio de las cualidades de las gráficas, sus intervalos de variación y su relación con condiciones experimentales, dichos comportamientos fueron caracterizados y organizados por el uso de las tablas, expresiones algebraicas y las gráficas.

1.10.3 Investigaciones en modelización matemática desde un punto de vista epistemológico

Otra categoría de investigaciones relacionadas con la modelización matemática son las de tipo epistemológico. Las principales investigaciones realizadas bajo esta perspectiva son desarrolladas bajo un marco teórico conocido como la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en Gascón (2006) se declara que bajo esta perspectiva de modelización matemática, la modelización no es vista solamente desde el punto de vista de la aplicación de un determinado conocimiento matemático (lo cual es fuertemente criticado y lo caracterizan como el fenómeno del aplicacionismo) , sino que contrario a ello la modelización matemática permite construir conocimiento matemático funcional. Por lo que postulan que toda actividad matemática es una actividad de modelización, las cuales son diseñadas a través de dispositivos didácticos llamados Recorridos de Estudio e Investigación y sustentados en estudios epistemológicos realizados en Modelos Epistemológicos de Referencia.

En cuanto al estudio de organizaciones matemáticas, ha desarrollado un constructo llamado Modelo Epistemológico de Referencia (MER), el cual es útil para caracterizar, explicar y describir la naturaleza del conocimiento matemático que se pretende desarrollar y hace una analogía con por ejemplo lo que realiza la teoría APOE con la Descomposición Genética o la Teoría de Situaciones Didácticas con la Situación Fundamental o la teoría del enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática con el desarrollo de las Trayectorias Epistémicas.

Así mismo, para el estudio de las organizaciones didácticas (OD) ha desarrollado los llamados Recorridos de Estudio e Investigación (REI), los cuales son dispositivos didácticos que sirven para el diseño y puesta en escena de las actividades propuestas en la organización matemática (OM).

Serrano (2013), menciona que los Recorridos de Estudio e Investigación son dispositivos didácticos que permiten una rica interacción entre el docente, el estudiante y el contenido matemático a través de tareas previamente organizadas (trabajo en grupo, formulación de problemas, redacción de informes, presentación oral de resultados, búsqueda de información, contraste empírico de conjeturas, planificación del trabajo, resolución de problemas durante un periodo largo de tiempo). Describe que el REI, es un

dispositivo que tiene como característica principal partir de una cuestión generatriz con fuerte poder para promover organizaciones prexeológicas de complejidad creciente (praxeología puntual, local y global)

También García (2005), realizó en su tesis doctoral en España, una investigación relacionada con la modelización en la educación secundaria obligatoria española, en ella muestra a ésta práctica cómo una herramienta de articulación de la matemática escolar, al estudiar la relación de proporcionalidad entre magnitudes y las relaciones funcionales. En su trabajo de investigación utilizó como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para cuestionar y reformular la noción de procesos de modelización dentro del programa epistemológico de investigación en didáctica de la matemática.

García, construye un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a la modelización, por medio del cual hace evidente los siguientes puntos:

- ✚ Muestra el fenómeno de la desarticulación del estudio de las relaciones funcionales entre magnitudes en la Educación Secundaria en la organización matemática a enseñar propuesta por el currículo y por los libros de texto
- ✚ Permite construir una organización didáctica, como un recorrido de estudio e investigación, que supone la reconstrucción de una organización matemática regional entorno a la modelización de sistemas de variación que, partiendo del estudio de una cuestión crucial planteada más allá del nivel disciplinar, da lugar a la realización de un “verdadero” proceso de modelización en la Educación secundaria, esto es, de un proceso de construcción de un conjunto de praxeologías de complejidad creciente.

Como parte de sus conclusiones, respecto del diseño y experimentación del recorrido de estudio e investigación (REI), en la cual elige una cuestión generatriz en un entorno de tipo económico-comercial, presenta que el REI permite mostrar las dificultades de gestionar fases en las que los alumnos actúen con una verdadera autonomía didáctica (en el sentido de Chevallard, 2002^a). Además, muestra la posibilidad de que sean los propios alumnos los que desarrollen el momento de institucionalización.

Ozdemir y Usel (2013) realizaron un estudio de caso sobre las prácticas de enseñanza del profesor en torno a la modelización matemática, en su estudio se refieren a las matemáticas como una forma sistemática de pensar que mejoran la solución a los estados del mundo real y los problemas con modelos matemáticos. Además, detallan el proceso de modelización matemática propuesto por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), representado como un proceso iterativo de cinco pasos: 1. Construcción de una versión simplificada de la situación problema inicial, 2. Construcción de un modelo matemático del problema simplificado,

3. La identificación de soluciones dentro del marco del modelo matemático, 4. La interpretación de estas soluciones en términos de la situación del problema simplificado, 5. Verificar que las soluciones del problema idealizado son las soluciones para el problema inicial.

Por otra parte, se tiene el proyecto doctoral realizado por Serrano (2013), quien trabajó con la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa en una Universidad española. Uno de sus productos de investigación fue el diseño, puesta en escena y análisis de una propuesta didáctica caracterizada por promover una organización matemática de contenidos relacionada con tarea de modelización. Una justificación elemental de su problemática de investigación radica en criticar la epistemología dominante del sistema educativo universitario para el diseño de programas de estudio y orientar la organización matemática escolar en general:

La epistemología dominante del “aplicacionismo” refuerza la estructura estándar de los programas como una secuencia de temas para estudiar y dificulta su evolución hacia un conjunto de cuestiones para responder. (p. 55)

El enfoque teórico utilizado fue la Teoría Antropológica de lo Didáctico por lo que las actividades de modelización propuestas estuvieron basadas en el diseño de Recorridos de Estudio e Investigación. Dichos recorridos son caracterizados como dispositivos didácticos que permiten una rica interacción entre el docente, el estudiante y el contenido matemático a través de tareas previamente organizadas (trabajo en grupo, formulación de problemas, redacción de informes, presentación oral de resultados, búsqueda de información, contraste empírico de conjeturas, planificación del trabajo, resolución de problemas durante un periodo largo de tiempo).

Serrano, describe que el REI es un dispositivo que tiene como característica principal partir de una cuestión generatriz con fuerte poder para promover organizaciones prexeológicas de complejidad creciente (praxeología puntual, local y global), por lo que la respuesta a tal cuestión no aparece directamente accesible. De esta manera, los REI permiten a la actividad de modelización vivir institucionalmente.

Es importante resaltar el rol que juega la actividad de modelización tanto en el trabajo de Serrano como en general para este programa de investigación, pues la modelización es una actividad donde tanto lo extra matemático como lo intra matemático (es decir la modelización matemática de sistemas matemáticos) tiene contextos susceptibles de ser modelizados.

Los REI fueron implementados en distintos cursos y en diferentes ciclos escolares, por ejemplo para el ciclo 2010/11 los REI aplicados en forma de taller fueron los siguientes:

- ✚ Primer trimestre: Un recorrido de estudio e investigación sobre evolución discreta.
- ✚ Segundo trimestre: Un recorrido de estudio e investigación sobre evolución continua.
- ✚ Tercer trimestre: Un recorrido de estudio e investigación sobre evolución matricial.

Algunas de sus conclusiones, producto e implementación y análisis de los construidos con los REI, menciona que, efectivamente los REI puestos en escena resultan ser un medio apropiado que permite la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa. Tal como lo menciona a continuación:

Resulta en definitiva, que la implementación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la epistemología “aplicacionista” imperante, sino también las restricciones que impone la ideología pedagógica dominante en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y “gestos” didácticos que hasta ahora permanecían reclusos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual (P.).

1.11 Preguntas de investigación

En nuestra problemática, consideramos que la modelización matemática no sólo forma al estudiante de ingeniería para resolver problemas futuros relacionados con su profesión, sino también, que la modelización matemática puede permitir la comprensión de vínculos entre los diversos ejes de formación en ingeniería, esto al ser considerada de manera transversal en el currículo escolar. Para ello, se van a estudiar tareas de modelización en un contexto de formación profesional en ingeniería, usando elementos teóricos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático extendido a la ingeniería y el ciclo de modelización propuesto por Borromeo Ferri (2006).

Como lo hemos venido planeando en las secciones anteriores la problemática que abordamos se sitúa en la formación de ingenieros considerando la modelización matemática. Identificamos la necesidad de que sean formados en competencias que contribuyan a su formación, y la modelización es una de ellas. Con lo que hemos presentado en las investigaciones y antecedentes en general, podemos afirmar que es importante promover la modelización en la formación de ingenieros. Por lo que nos parece oportuno conocer cómo es el uso y relación que existe entre objetos de la matemática con nociones de la ingeniería para que de esta manera se puedan potenciar vínculos entre los ejes de formación profesional

y de matemáticas. De tal manera que se aporte a la construcción de un currículo cada vez más integrado.

Para operacionalizar lo anterior, necesitamos por un lado investigar los problemas de modelización que son tratados en ingeniería, que en nuestro caso, son a nivel institucional y por otro lado, investigar los vínculos entre matemáticas e ingeniería. Así, nos planteamos las siguientes dos preguntas de investigación:

1 ¿Cómo son los problemas de modelización matemática llevados a cabo en contextos de Ingeniería Civil, específicamente en el área de formación profesional?

2 ¿Qué vínculos podemos establecer entre los ejes de formación en Ingeniería Civil: Ciencias Básicas (matemáticas) y Formación Profesional al considerar la modelización trabajada en el eje de formación profesional?

Se decide investigar en la carrera de Ingeniería Civil dado que es una ingeniería que tiene una relevancia social muy alta. El abastecimiento de aguas para consumo humano, para riego de sembradíos en la industria alimentaria, la administración, diseño y construcción de edificaciones que permiten suplir necesidades tan básicas como la vivienda, el diseño y construcción de carreteras, aeropuertos, puentes, presas y demás obras civiles, entre muchos otros aportes sociales que son considerados necesidades fundamentales para el ser humano.

Dado que esta problemática se inserta en la formación de ingenieros nos pareció relevante que en el Proyecto Tuning la única ingeniería seleccionada, a nivel latinoamericano, fuese la Ingeniería Civil. En el año 2013 Chile participó en este proyecto cuyo objetivo fue generar un espacio para la educación superior en América Latina. Tuning (2013) define Ingeniería Civil de la siguiente manera:

En América Latina, el Ingeniero/a Civil se define como un profesional con un amplio manejo de las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería que le permiten desarrollar soluciones de ingeniería, ya sea vial, habitacional, hidráulica o sanitaria. El Ingeniero/a Civil debe tener la capacidad de diseñar, proyectar, planificar, gestionar y administrar los proyectos de implementación de dichas soluciones (p.18).

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Entonces, estudiar la modelización en esta ingeniería aportara a la formación requerida que ha declarado el proyecto Tuning como relevante para la formación de ingenieros.

En el siguiente capítulo se presentan los enfoques teóricos que sustentarán la investigación.

Capítulo 2

Marco Conceptual

Capítulo II Marco Conceptual

En este capítulo se desarrollan los elementos teóricos que serán considerados en la investigación. Los cuales se corresponden con la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y en particular la propuesta de extensión de los espacios de trabajo para la ingeniería. Además, se utiliza un ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva para estudiar problemas de modelización en el marco de la formación de ingenieros.

Consideramos la teoría de los ETM dado que nos interesa conocer la relación de ésta con la modelización en ingeniería; es decir, conocer con mayor precisión desde un punto de vista semiótico, instrumental y discursivo cada fase que se identifica en el CM. De esta manera nos permitirá estudiar el uso y construcción de modelos donde intervienen signos, artefactos y nociones de matemática y de ingeniería.

Todo lo anterior visto de la propuesta de extensión al ETM que se profundiza en la sección 2.8. Realizar investigaciones que interactúen entre el saber matemático y otras disciplinas es de reciente interés para la teoría ETM, así lo declaran Kuzniak, Tanguay y Elia (2016), "and this calls for an observation of the mathematical practices in the school settings, but also in professional and everyday settings, if one is eager to comprehend furthermore the usage of mathematics in the society" (p. 724).

Para comprender el proceso de modelización se ha elegido el ciclo de modelización propuesto por Borromeo Ferri, el cual tiene una perspectiva cognitiva lo que es adhoc a la teoría de ETM. Entonces, utilizaremos el ciclo como una herramienta metodológica que nos permitirá comprender la participación de las distintas fases del ciclo para un problema dado.

Una característica relevante que nos llevó a la decisión de la utilización de este ciclo es la alta relevancia que se le da al conocimiento extra matemático (EMK en inglés) como motor de la actividad de modelización. En este sentido, Borromeo (2018) se refiere a la importancia del EMK, dado que éste permite que los problemas de modelización sean interesantes para el estudiantes pero también hace visible el grado de utilidad de la matemática para resolver problemas que conecten la realidad y matemáticas "Using, applying and generating extra-mathematical knowledge makes modeling problems very interesting for pupils. The connections between reality and mathematics and the usefulness of mathematics become apparent" (p. 16).

Por lo tanto, la utilización de ambos enfoques teóricos (ETM y ciclo de modelización) nos permitirá una mejor comprensión del perfil de la

formación de un ingeniero, el cual de acuerdo a Tuning (2013) tiene un meta perfil de 4 componentes: *cognitivo*, tecnológico e internacional, interpersonal y social.

2.1 El Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak & Richard, 2014; Montoya Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016; Montoya Delgadillo & Vivier, 2016) es una teoría que en sus inicios fue desarrollada para modelar el espacio de trabajo geométrico y en etapas posteriores como producto de diversas investigaciones relacionadas con estudiar el espacio de trabajo matemático en diversos dominios como el álgebra, el análisis o incluso la estadística, el modelo evolucionó y hoy se pueden encontrar trabajos que pasaron de ser exclusivamente $ET_{\text{Geometría}}$ a otros dominios como $ET_{\text{Álgebra}}$, $ET_{\text{Análisis}}$, $ET_{\text{Estadística}}$.

En la presente investigación se van a relacionar dominios extra matemáticos con dominios intramatemáticos, como por ejemplo la relación de la modelización con elementos del análisis tales como nociones relacionadas con la función, su derivada o integral, siendo estas nociones pertenecientes al dominio del cálculo.

El Espacio de Trabajo Matemático se precisa con el objetivo de comprender mejor lo que, desde el punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos.

2.2 El nivel epistemológico y cognitivo en el ETM

Este modelo teórico considera el principio de articular el ETM en dos niveles (Figura 2.34) uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas. El ETM considera que la construcción del conocimiento matemático se logra cuando el estudiante se enfrenta a un tipo de tarea donde se articulan estos dos niveles. La articulación se obtiene a través de la activación de génesis, las cuales son componentes de los planos epistemológico y cognitivo. Las génesis involucradas son:

- Génesis instrumental, que hace funcional los artefactos en el proceso constructivo.
- Génesis semiótica, que asegura el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura de los signos vinculados.

- Génesis discursiva, que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación.

2.2.1 Componentes del nivel epistemológico

Representamen: Conjunto de objetos tangibles tales como signos, representaciones

- Artefactos: son los utilizados por el individuo para iniciar un proceso de construcción de la tarea y pueden ser material simbólico o programas informáticos
- Referencial: sistema teórico basado en definiciones y propiedades

2.2.2 Componentes del nivel cognitivo

- Visualización: Estrechamente asociada a la intuición y a los esquemas operatorios sobre los signos y las representaciones
- Construcción: es determinado cuando los artefactos han sido instrumentados
- Prueba: Validaciones producidas con base en definiciones y propiedades sustentadas en lo teórico.

A continuación se muestra un esquema general del modelo:

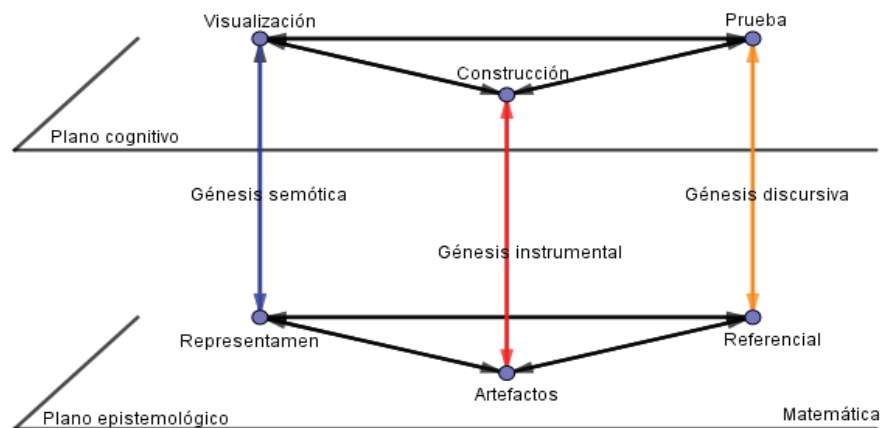


Figura 2.34 Esquema general de ETM

2.3 ETM y el enfoque por paradigmas

Es importante mencionar que el ETM en su interés de pensar y organizar de la mejor manera posible el espacio de construcción de nociones matemáticas y para analizarlos desde diversas perspectivas, considera que, el trabajo matemático se puede corresponder con paradigmas. Para

ello, según el dominio en estudio, realiza una categorización justificada de los paradigmas. Por lo tanto, ETM considera abordar los fenómenos didácticos desde un enfoque de paradigmas.

El paradigma es considerado en el sentido de Kuhn (1965), a saber el desarrollo de teorías es el resultado del intento de grupos de investigación pertenecientes a una disciplina específica los que motivados por un paradigma pretenden instituir una ciencia que explique los fenómenos que ocurren alrededor de las problemáticas que identifican dentro de dicha disciplina y los cuales tratan de modelar, estudiar, explicar e intervenir en un sistema.

Kuhn (1965) establece que los paradigmas de investigación transitan entre enigmas y anomalías en el proceso de una suerte de revoluciones científicas las cuales según Kuhn (1965) son *"aquellos episodios de desarrollo no acumulativo en que un antiguo paradigma es reemplazado, completamente o en parte, por otro nuevo e incompatible"* (p. 149); es decir, del paso de una ciencia que catalogada como normal por dedicarse a resolver enigmas definidos en Kuhn (1965) como *"aquella categoría especial de problemas que puede servir para poner a prueba el ingenio o la habilidad para resolverlos"* (p. 70) a una ciencia producto de una revolución científica que cataloga como ciencia madura producto de haber atendido una serie de anomalías detectadas en la ciencia normal.

El estudio de funciones que se pretende realizar pertenece al dominio de análisis. Una categoría que da cuenta de los procesos de construcción que pueden intervenir cuando el estudiante se enfrenta a la solución de alguna situación problema:

- ✚ Análisis-Geométrico/Aritmético (AG) que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real, probablemente, con muchos implícitos.
- ✚ Análisis-Calculatorio (AC) donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- ✚ Análisis real (AR) es caracterizado por un trabajo de aproximación: supremos e ínfimos, cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): "cerca de ξ ", "lo despreciable".

2.4 La modelización y la activación de las génesis en el ETM

La construcción de la noción de función dentro del ETM será estudiada en el marco de situaciones de modelización, las cuales no son parte del ETM pero consideramos a priori que tienen la capacidad de activarlo y

permitirán una adecuada circulación entre las génesis que conectan los planos epistemológicos y cognitivo. En la sección 2.9 se amplía esta relación.

2.5 ETM de referencia, idóneo y personal

Con el objetivo de describir el trabajo matemático en un marco escolar los ETM se clasifican en ETM de referencia, ETM personal y ETM idóneo.

- ETM de referencia: Está compuesto por las matemáticas que pertenecen a la institución y que idealmente provienen de la matemática formal
- ETM idóneo: Es un espacio de trabajo diseñado y construido por un experto, de tal manera que sea apto para su uso por utilizadores potenciales. Depende de una institución y debe ser definido con base en la manera en que este saber se enseña
- ETM personal: Es el espacio de trabajo donde en una determinada institución escolar, un estudiante o profesor atiende un problema matemático. Está condicionado al conocimiento y las capacidades cognitivas del sujeto que lo atiende.

De esa manera ETM logra realizar vigilancias (didácticas, epistémicas y cognitivas) que son básicas para el buen funcionamiento del sistema educativo y brindan elementos para su intervención en el mismo.

2.6 El ciclo de modelización de Borromeo Ferri

Para la investigación se utilizará en conjunto con ETM los constructos teóricos desarrollados por Borromeo Ferri, en la sección 2.9 se teoriza sobre tal interacción. La perspectiva de modelización cognitiva de Borromeo Ferri (2006) está esquematizada en un ciclo de modelización que confronta la matemática con la realidad, considerada la realidad como todo lo que no es matemáticas, es decir los contextos extra matemáticos del mundo real.

Las ideas de Borromeo Ferri (2006) respecto del ciclo de modelización son reconstruidas del ciclo de Blum y Leib (2005) (Figura 2.36) y del ciclo de Pollak (Figura 2.37).

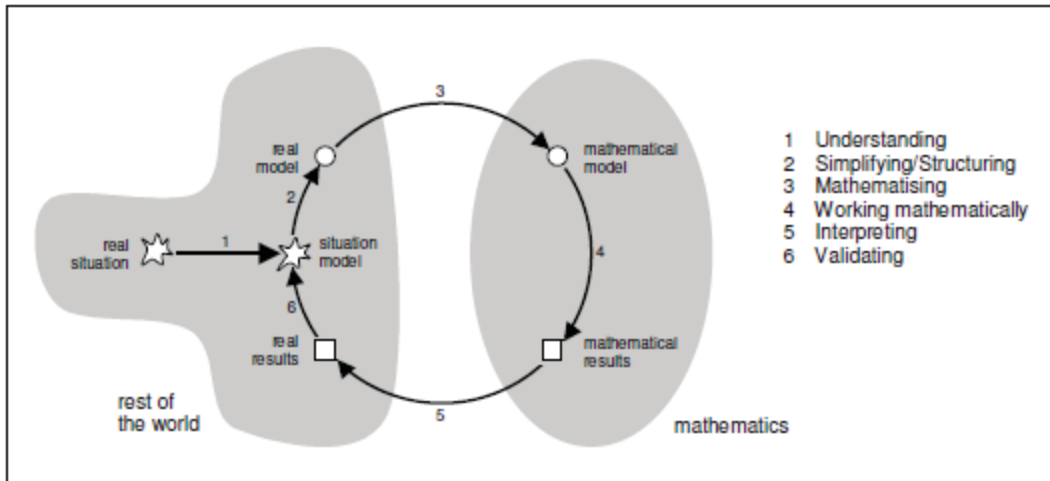


Figura 2.35 Ciclo de modelización (Blum y Leib, 2005, p. 1626)

Sin embargo, en el ciclo propuesto por Borromeo Ferri (2006) se hace hincapié de manera explícita el EMK (ExtraMathemaical Knowledge) y para hacer más fuerte el aspecto cognitivo, señala que en lugar de utilizar la noción de Situation model, utiliza la noción de Representación Mental de la Situación.

Respecto de las relaciones entre la matemática y la realidad, Blum (2015) menciona que está interesado en “estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el contexto de las relaciones entre la matemática y el mundo extra – matemático.” (p.77)

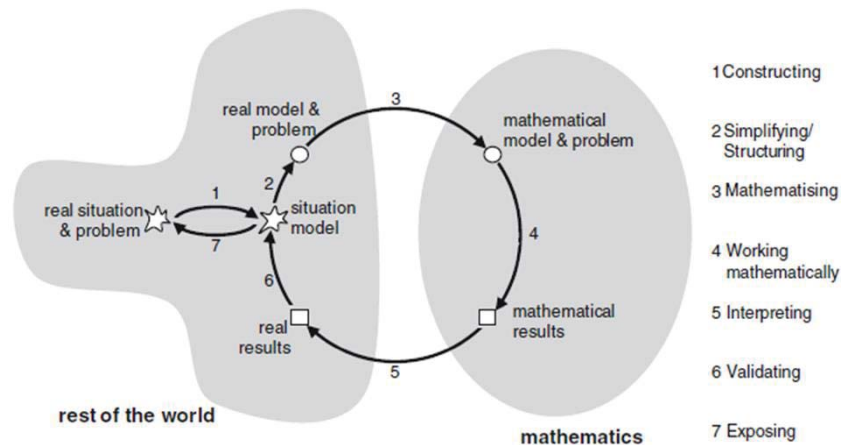


Figura 2.36 Ciclo de modelización (Blum, 2015, p. 76)

Blum (2015) declara que su modelo para analizar cognitivamente un proceso de modelización se basa en considerar: Modelos de matemáticas aplicadas (Pollak 1979; Burghes 1936), modelos lingüísticos (Kintsch & Greeno 1985), Psicología cognitiva (Staub & Reusser 1995).

Como se puede evidenciar en el modelo anterior, la concepción de realidad es un aspecto importante a considerar. Antes de continuar con los aspectos teóricos del ciclo plantearemos nuestra postura sobre la misma basada en algunas evidencias trabajadas en la literatura.

Existen diferentes definiciones sobre modelización en didáctica de la matemática, todas coinciden en que esta trata de relacionar las matemáticas con una realidad susceptible de ser modelizada, a través de, la utilización de modelos matemáticos. Lo que es diferente son las perspectivas en cuanto a la relación entre la realidad y la matemática, de acuerdo a Borromeo Ferri (2018). Mientras existen posturas que separan la realidad de las matemáticas, existen otras que no hacen tal separación, ello dependerá de las posturas filosóficas a las que pertenezcan las visiones teóricas desde donde es analizado y estudiando el proceso de modelización.

Nuestra postura de la realidad es aquella relacionada con los contextos extra matemáticos y como estos se relacionan con la matemática para en conjunto realizar el proceso de modelización. Entonces los contextos extra matemáticos se corresponden con situaciones que surgen de una necesidad de resolver un problema real, el cual en nuestro caso será un problema de ingeniería. Por tanto la realidad en nuestra investigación se corresponde con la realidad de un ingeniero. Blum (2015) establece que está interesado en “estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el contexto de las relaciones entre la matemática y el mundo extra-matemático”. (p.77)

Greefrath & Vorholter (2016) mencionan que en el proceso de modelización en los países de habla alemana se considera una separación entre las matemáticas y la realidad. En la literatura se tienen las siguientes visiones sobre la realidad cuando esta es tomada en cuenta para atender procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Para Heuvel-Panhuizen (2003) la realidad se refiere a la creación de contextos intra y extra matemáticos pertenecientes a la organización de contenidos matemáticos a enseñar, pero que esa realidad está relacionada con cualquier situación que a los estudiantes les parezca real, incluso puede ser una situación imaginaria. Su visión está enmarcada dentro de la Educación Matemática Realista (EMR). Tal como lo describe:

Por una parte, el adjetivo realista concuerda definitivamente con la forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro de la EMR, pero por la otra, este término también puede dar lugar a confusión. En holandés, el verbo *zich realiseren* significa “imaginar”. En otras palabras, el término realista se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar, que a la “realidad” o autenticidad de los problemas. Sin embargo, esto último no significa que la relación con la vida real no sea importante. Sólo implica que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real. (p.10)

Por otra parte en Villa-Ochoa (2010) encontramos que estudia la relación de la realidad con la modelización, relacionando a la realidad con las funciones sociales de la matemática como es el cotidiano.

Otro punto de vista social de la realidad y su relación con la modelización es estudiado por Cordero (2016) donde problematiza la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la necesidad de promover una matemática funcional por lo que la realidad está relacionada con el cotidiano del sujeto que aprende, en este caso con la escuela, el trabajo e incluso la ciudad en lo general. Al respecto menciona lo siguiente.

La matemática escolar ha perdido el eslabón con la realidad. La realidad debería ser interpretada en lo habitual de los escenarios (todos los niveles educativos y las diversas disciplinas, así como el trabajo y la ciudad), donde se expresan sus usos rutinarios. Es decir, los cotidianos del disciplinario, del trabajador y del ciudadano. (p. 61)

Penrose (2006) con respecto a la realidad menciona que existen tres tipos de realidad: la física, la mental y la matemática (platónica) y que éstas tres guardan relación. Además, considera que no podemos hablar propiamente de realidad sin entender su conexión con la conciencia mental y el mundo de las matemáticas.

La postura que para nuestra investigación hemos tomado se corresponde con Blum (2015) quien considera la realidad en el sentido de Pollak (1979) visualizando a ésta como aquello que pertenece "al resto del mundo (lo que no son matemáticas)", incluyendo la naturaleza, la cultura, la sociedad o la vida diaria. Tal como lo representa en la siguiente figura.

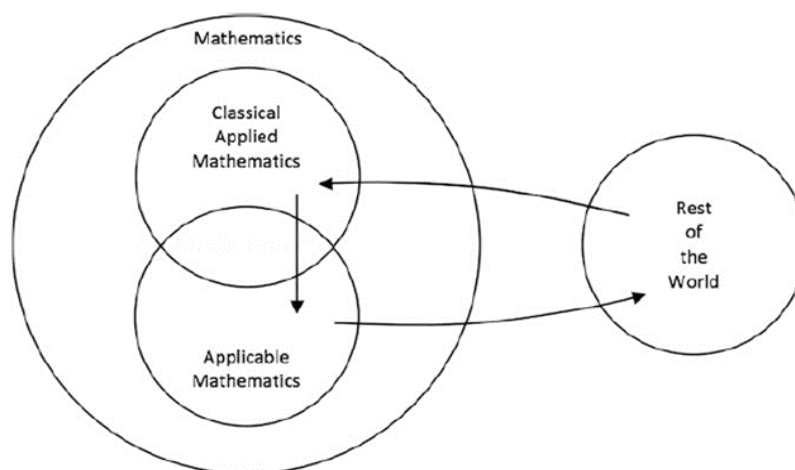


Figura 2.37 Perspectiva sobre matemáticas aplicadas (Pollak 1979, p.256 citado en Greefrath & Vorholter 2016, p.6)

Retomando las consideraciones teóricas sobre el ciclo de modelización propuesto por Borromeo Ferri (2006), se tiene que han estado trabajando

La transición entre la representación mental de la situación hacia el modelo real consiste en idealizar la situación a través del uso de conocimiento extra matemático.

El modelo real es una representación externa que realiza el individuo, la cual está fuertemente conectada con la representación mental de la situación y está construida con base en las declaraciones verbales del individuo.

La transición del modelo real al modelo matemático ocurre cuando el individuo comienza a realizar una matematización horizontal de la situación, en esta transición el individuo se basa fuertemente en su conocimiento extra matemático.

El modelo matemático es construido como producto del trabajo de matematización horizontal, el individuo realiza sobre todo representaciones externas, las cuales son verbalizadas con un lenguaje mayormente relacionado con lo matemático.

En la transición entre el modelo matemático y los resultados matemáticos, el uso de competencias matemáticas tiene lugar.

Los resultados matemáticos son obtenidos a través de trabajar con el modelo matemático, por ejemplo resolver una ecuación o graficar e interpretar una función, etc.

La transición entre los resultados matemáticos y los resultados reales consiste en interpretar los resultados obtenidos al trabajar matemáticamente con el modelo.

Los resultados reales son el producto de confrontar los resultados matemáticos con la situación presentada.

La fase de validación consiste en que el individuo verifique la correspondencia de los resultados reales obtenidos con la representación mental que realizó con base en la situación presentada.

Para analizar el trabajo de los modeladores con el ciclo son estudiadas las rutas individuales de modelización, En Blum & Borromeo (2009) se presenta la siguiente caracterización realizada por Borromeo (2004) en cuanto al comportamiento de los estudiantes ante una situación real y que son interpretados como estilos de pensamiento matemático:

- Visual: este tipo de pensadores se enfoca más al trabajo relacionado con los procesos del mundo real a través del trabajo con representaciones internas y externas basadas en imágenes y diversas ilustraciones.
- Analítico: este tipo de estudiantes se enfoca a trabajar con más peso sobre el lado matemático del proceso de modelización y lo hace a

través del trabajo con representaciones internas y externas relacionadas con lo formal y verbal.

- Integrado: este tipo de pensadores se caracteriza por combinar lo visual con lo analítico durante el proceso de modelización.

Otro aspecto importante de la perspectiva de modelización, tomada por Blum y Borromeo, es que, están interesados en estudiar los procesos cognitivos en lo individual cuando los estudiantes abordan tareas de modelización, pues consideran que lo crucial en ese tipo de tareas es la dificultad para abordarlos pues exigen una alta demanda de habilidades cognitivas. Al respecto Blum (2006) menciona lo siguiente:

Las tareas de modelización son usualmente difíciles para los estudiantes. Una razón importante son las demandas cognitivas de las tareas de modelización. La modelización está vinculada de manera inseparable con otras competencias matemáticas como son la lectura, comunicación, diseño y aplicación de estrategias de resolución de problemas, o el trabajo matemático (razonar, resolver ecuaciones, calcular,...). Particularmente útil para el análisis cognitivo de tareas de modelización es un modelo del "ciclo de modelización" para resolver dichas tareas. (p.46)

2.7 El ciclo de modelización con uso de tecnología digital (software)

Otra consideración importante es la relación del ciclo de modelización con el uso de herramientas digitales, en Greefrath & Vorholter se puede encontrar que dicha relación tiene preguntas abiertas de investigación. Niss et al. Citado en Greefrath & Vorholter 2016, p.23 plantea las siguientes preguntas de investigación con respecto al uso de tecnología digital:

¿Cómo se supone que deben las herramientas digitales ser utilizadas para apoyar el proceso de modelización en sus diferentes etapas? ¿Cuál es el efecto de las herramientas digitales en el espectro de problemas que pueden ser trabajados en modelización? ¿Cómo la cultura de enseñanza es influenciada por la existencia de herramientas digitales? ¿En qué momentos el uso de herramientas digitales podría mejorar o incluso obstaculizar las oportunidades de aprendizaje durante el proceso de modelización?

Al respecto del uso de tecnologías digitales en el proceso de modelización, Borromeo Ferri (2018) señala que es indispensable la inclusión de la tecnología digital en la modelización, tanto en la escuela como en la formación de profesores. Cuando se trata de resolver problemas complejos de la vida real, estos son indispensables. Para ello señala dos posibles usos: uso de computadoras para buscar datos relacionados con el problema y uso de la computadora para los cálculos y trabajo con el modelo. Consideramos que incluso la mezcla de ambos enfoques es necesaria. Con base en Sonar (2001), señala que la simulación es parte de un proceso de modelado, a

través del desarrollo de un modelo numérico, por lo que propone un ciclo de modelización denominado “ciclo de modelización numérico” (Figura 2.39)

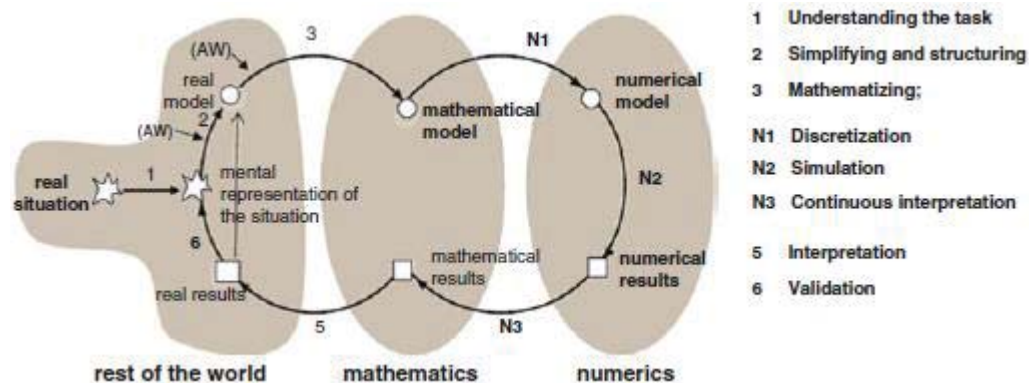


Figura 2.39 Ciclo de modelización numérico

(Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018, p. 101)

Entonces, el ciclo con tecnología propone dos transiciones adicionales, al ciclo de modelado de Meister/Borromeo Ferri (2018): N1 representa la transición que se realiza al traducir el lenguaje de las matemáticas al lenguaje de la computadora y N3 donde los resultados de la computadora necesitan ser transferidos al mundo de la matemática. Cabe señalar, que en su descripción del ciclo considera el uso de software CAS, el cual es utilizado para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En nuestro caso lo aplicaremos al uso de software profesional, específicamente el uso del ciclo con tecnología propuesto por Meister/Borromeo Ferri adaptado al uso de SAP 2000, el cual es un software profesional para el análisis de estructuras por medio de elementos finitos.

Como hemos señalado, el CM con tecnología es un ciclo propuesto para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pero que hemos utilizado con las particularidades que corresponden a las situaciones de ingeniería.

En este sentido, la fase N1 de discretización, el uso del CM con tecnología se referirá a la utilización del estudiante de comandos del software que le permitirán posibilitar al modelo estructural para ser simulado. Por tanto el paso de la matemática a un modelo numérico es realizado por el software a través de la discretización por elementos finitos.

En el uso de software para la modelización de problemas de ingeniería relacionados con el análisis estructural, la discretización se refiere al “proceso de traducir el dominio material de un modelo basado en objetos a un modelo analítico adecuado para el análisis.” (<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Discretization>).

Por lo tanto, en el CM con tecnología propuesto por Meister/Borromeo Ferri la discretización se refiere al uso de un modelo matemático que el software traduce al lenguaje de la computadora para ser resuelto. En el caso de

ingeniería el modelo que toma el software es un modelo estructural que vía la interacción del estudiante con comandos que posibilitan la discretización se llega al modelo discretizado (computacional).

Con base en Oñate 2009 identificaremos distintos modelos en el proceso de solución de un problema de ingeniería y los adaptaremos a ciclo para comprender el proceso de solución de modelado de un problema ingenieril.

Modelo conceptual: Los métodos computacionales, como el FEM, se aplican a los modelos conceptuales de un problema real, y no al problema en sí. Incluso los métodos experimentales en laboratorios de estructuras hacen uso de reproducciones a escala del modelo conceptual elegido (también llamado modelos físicos) a menos que la estructura real se pruebe en tamaño real, lo que rara vez ocurre. Se puede desarrollar un modelo conceptual una vez que se comprende la naturaleza física del problema. En la derivación de un modelo conceptual, debemos tratar de excluir detalles superfluos e incluir todas las características relevantes del problema en consideración para que el modelo pueda describir la realidad con suficiente precisión. (pp. 4-5.)

Un modelo conceptual para el estudio de una estructura debe incluir todos los datos necesarios para su representación y análisis. Claramente, diferentes personas tendrán diferentes percepciones de la realidad y, en consecuencia, el modelo conceptual para la misma estructura puede tomar una variedad de formas. (p.5)

Modelo estructural: Un modelo estructural debe incluir tres aspectos fundamentales. La descripción geométrica de la estructura por medio de sus componentes geométricos (puntos, líneas, superficies, volúmenes), la expresión matemática de las leyes físicas básicas que rigen el comportamiento de la estructura (es decir, las ecuaciones de equilibrio - fuerza y las condiciones de contorno) generalmente escritas en términos de ecuaciones diferenciales y / o integrales y la especificación de las propiedades de los materiales y de las cargas que actúan sobre la estructura. Debemos tener en cuenta que una solución encontrada a partir de un modelo conceptual o estructural incorrecto será una solución incorrecta, lejos de los valores físicos correctos, incluso si se obtiene con el método numérico más preciso. (p. 5)

Modelo computacional: La aplicación del FEM requiere invariablemente su implementación en un código de computadora. El análisis de una estructura con el FEM implica alimentar el código con información cuantitativa sobre las propiedades mecánicas de los materiales, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas (los parámetros físicos), así como las características de la discretización elegida (es decir, tipo de elemento, tamaño de malla, etc.). El resultado de este proceso es lo que llamamos modelo computacional para el análisis de una estructura (p.5).

2.8 Un Espacio de Trabajo Matemático Extendido a la Ingeniería

En los últimos años en el marco de la teoría de los ETM se han venido realizando investigaciones que consideran insumos metodológicos para el análisis cuando se trabaja con problemas de modelización o problemas que involucran una conexión entre la matemática y otra disciplina.

Trunkenwald y Laval (2019) estudian la conexión entre la probabilidad, la estadística y los algoritmos informáticos, en situaciones que promueven un enfoque frecuentista para la solución de tareas de probabilidad, para ello consideran una metodología que les permite considerar diversos espacios de trabajo (ET's), un espacio de trabajo para la probabilidad, un espacio de trabajo para la estadística y un espacio de trabajo para los algoritmos informáticos, realizando conexiones entre los tres espacios de trabajo.

Otro es el caso de Minh y Lagrange (2016) que considera diversos ETM para el trabajo con funciones, a los que llama espacios de trabajo funcionales, al considerar tres tipos de espacio y sus conexiones, 1. Espacio de trabajo en geometría dinámica (estudio de la covariación y dependencia en un sistema físico), 2. Espacio de trabajo en medida (estudio de la covariación y dependencia entre magnitudes o medidas), 3. Espacio de trabajo algebraico (funciones matemáticas de una variable real), los cuales considera son fundamentales para la adecuada comprensión de los objetos matemáticos involucrados, esto bajo la hipótesis de que una situación de enseñanza debe ser organizada en varios espacios de trabajo y permitir conexiones entre los espacios considerados a priori o en emergencia.

Por último, se tiene el caso de Moutet (2016) que considera un sólo ETM, que le llama ETM extendido para el estudio de situaciones que involucren matemática y física (relatividad especial), en su ETM extendido considera un plano epistemológico para la física, un plano epistemológico para la matemática y un solo plano cognitivo, al considerar que es un solo sujeto pensante el que está resolviendo o diseñando los problemas físicos, en este caso.

De las tres posibles vertientes para el estudio del trabajo matemático e ingenieril analizado en este artículo, nosotros consideramos la propuesta de Moutet (2016) y presentamos un ETM extendido para la ingeniería. Consideramos un prisma de dos niveles, en un primer nivel se encuentra el plano epistemológico de la ingeniería, que considera los signos, artefactos y la teoría relacionada con las definiciones y propiedades de las nociones de la ingeniería presentes en los problemas analizados, y pasa al plano epistemológico de la matemática, posteriormente se tiene que para el segundo nivel del prisma, se llega a al plano cognitivo, que considera la visualización, construcción y prueba de las nociones u objetos (tanto matemáticos como ingenieriles) trabajados e involucrados en los problemas.

A continuación se presenta el diagrama que proponemos ETM extendido (Figura 2.41) para la ingeniería.

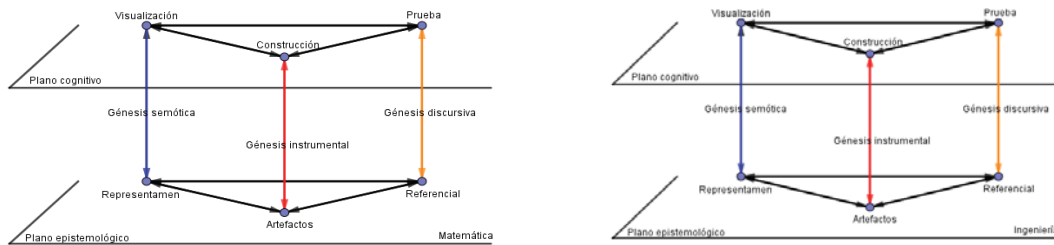


Figura 2.40 Dos espacios de trabajo: matemático e ingeniería

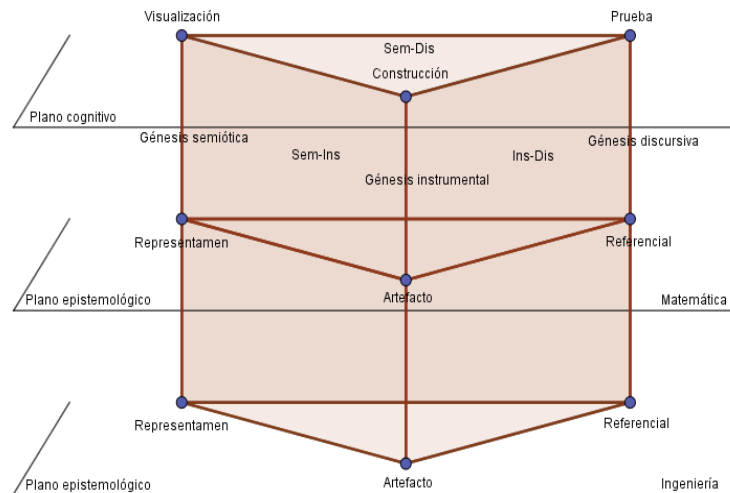


Figura 2.41 ETM extendido para la ingeniería. (Elaboración propia). Adaptado de Moutet (2016))

Si bien, como se muestra en la (Figura 2.41), consideramos un solo ETM extendido, otra posibilidad de trabajo con los ET's se puede observar en la (Figura 2.40), a través de utilizar Espacios de Trabajo por separado, uno para la matemática y otro para la ingeniería, para posteriormente establecer las conexiones entre ambos espacios.

2.9 Trayectorias teóricas de interacción entre el ciclo de modelización y el ETM

Desde nuestra perspectiva de modelización, esto es, una perspectiva cognitiva dado que nos interesa estudiar la actividad de un sujeto a través de las distintas etapas del CM y su relación con signos, artefactos y referentes teóricos que se operacionalizan para hacer tangibles los modelos

intervinientes en el proceso de modelización. Además, acogemos la perspectiva educacional, dado que nos interesa aportar con aspectos didácticos que promuevan la modelización en el sistema educativo.

Lo anterior implica estudiar las relaciones que emergen cuando se diseñan o resuelven problemas de modelización entre la realidad que pertenece a contextos extra matemáticos y las nociones matemáticas asociadas a los modelos matemáticos que representan esa realidad. Donde el trabajo matemático asociado a lo extra matemático, es un catalizador de representaciones, uso de tecnología y argumentaciones, que permiten estudiar el problema de modelización. Para ello se considera una interacción entre la teoría del ETM y su relación con el proceso de modelización presentado por Borromeo Ferri.

En el momento que el sujeto aborda la situación, éste trata de comprenderla, y desarrolla simplificaciones, entonces, se tiene el supuesto de que ocurrirá un proceso de matematización horizontal que sirve de base para llevar la situación problema al campo de la matemática, de manera que dentro de este campo ocurre un proceso de matematización vertical. Es ahí donde ocurre una interacción en un ciclo dinámico entre el proceso de modelización y el Espacio de Trabajo Matemático.

Se tienen dos procesos de matematización. Un proceso de matematización horizontal el cual permite un pasaje del mundo real al mundo de la matemática y un proceso de matematización vertical perteneciente al mundo de la matemática y es allí donde se trabaja con el modelo matemático. Heuvel-Panhuizen (2003) menciona que ambos procesos de matematización fueron inicialmente propuestos por Treffers (1987) y que posteriormente fueron adoptados por Freudenthal (1991), aunque él ya había considerado implícitamente ambos procesos de matematizar, estableciendo que la matematización es la meta central de la educación matemática:

Lo que los seres humanos tienen que aprender no son las matemáticas como un sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p.7, citado en Heuvel-Panhuizen, 2003, p.11)

Las diferentes fases teóricas del proceso de modelización considerando la interacción con ETM quedarían compuestas como se muestra a continuación. Es importante considerar que son fases teóricas del proceso de modelización para la interacción entre el ciclo de modelización y ETM.

Una primera interacción entre el ciclo de modelización y ETM sucede cuando el sujeto inicia el proceso de matematización vertical, en esta fase se produce la activación de las génesis semiótica e instrumental, en ella el estudiante trabaja matemáticamente con el modelo, desarrolla y trabaja en la construcción de representaciones.

Una segunda interacción entre ambos modelos ocurre una vez el sujeto ha trabajado con las representaciones donde contrasta sus resultados obtenidos en el trabajo matemático con la situación real, para de esta manera interpretar y validar sus resultados. En esta fase a priori se considera que el sujeto se dirija al ciclo de modelización desde el plano semiótico-instrumental, esto dado que los procesos semióticos asociados al trabajo con las representaciones se vinculará con artefactos que permitirán construir el modelo matemático. Sin embargo, también es posible que exista actividad en el plano semiótico – discursivo o instrumental discursivo, esto al utilizar registros de representación o procesos de construcción de instrumentos como elementos que provoquen discursos de explicación o justificación de sus procedimientos, pero es posible que sean débiles comparado con la actividad en el plano semiótico-instrumental.

En un sentido de refinamiento de su proceso de validación entre el espacio de trabajo matemático y su contraste con la situación real teóricamente puede suceder una interacción en la que el sujeto se vea en la necesidad de regresar a trabajar en la matematización vertical dirigiéndose al plano instrumental- discursivo. En esta tercera interacción se espera que el razonamiento matemático se dé con mayor fuerza y la activación de la génesis discursiva permita refinar su validación matemática.

En una cuarta fase se espera que el sujeto regrese de nuevo a la situación real pero esta vez estaría dirigido desde el plano semiótico- discursivo.

2.10 Objetivo general y objetivos específicos

Con base en ello, nos planteamos los siguientes objetivos, general y específicos.

2.10.1 Objetivo general

Hemos declarado la problemática, relacionada con estudiar el rol de la modelización en la formación de ingenieros. Y el marco conceptual con el cual se va a abordar, relacionado con una propuesta de extensión al ETM, denominada ETM ingeniería y su interacción con el Ciclo de Modelización (clásico de acuerdo a Borromeo Ferri 2006 y con tecnología de acuerdo a Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018).

A su vez y desde un interés teórico, nos planteamos las posibles interacciones entre el ciclo propuesto por Borromeo Ferri (2006) y la teoría de Espacio de Trabajo Matemático, de la siguiente manera:

¿De qué manera se ve afectado el análisis del trabajo matemático de matematización vertical en el ciclo de Borromeo Ferri, cuando éste es

analizado considerando la teoría de Espacio de Trabajo Matemático?¿Cómo se puede caracterizar la relación entre ambos planteamientos teóricos, considerando el rol de la tarea trabajada?

Por lo anteriormente expuesto nos planteamos como objetivo general el siguiente:

Caracterizar el trabajo en modelización llevado a cabo en contextos de Ingeniería Civil pertenecientes al área de formación profesional.

2.10.2 Objetivos específicos

OE1. Analizar problemas de modelización que son enseñados en un contexto de ingeniería.

OE2. Indagar posibles vínculos entre los ejes de Formación Profesional (Análisis Estructural) con las Ciencias Básicas (Cálculo) en ingeniería en un contexto institucional.

OE3. Articular la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático y el ciclo de modelización para el estudio de los problemas de modelización.

Es de especial interés, estudiar la relación entre el lenguaje de la especialidad (análisis estructural) y el lenguaje matemático. Además, los procesos de matematización horizontal y vertical; y buscar vínculos entre el análisis estructural y la matemática, con la finalidad de retroalimentar la enseñanza de ambas áreas.

Capítulo 3

Metodología

Capítulo III Metodología

3.1 Metodología de la investigación

La metodología a emplear en la investigación es de tipo cualitativa, a través del estudio de caso de tipo instrumental en el sentido de Stake (1995) y enmarcada en un paradigma interpretativo. El caso es de tipo instrumental debido a que nos aportará información sobre la modelización matemática en la formación de ingenieros.

A continuación, se explicitan las fases de desarrollo de la investigación. Cada fase, tiene explicitadas las etapas que se están considerando para su cumplimiento; es importante aclarar que tanto las etapas como las fases son dinámicas y no pretenden seguir un patrón lineal, debido a que al encontrarse en determinada fase o etapa, se considera necesario la retroalimentación de fases o etapas anteriores o incluso siguientes.

3.2 Fases y Etapas de la investigación

A continuación, se presentan las fases y etapas que corresponden a cada una de las fases de la investigación. El trabajo se desarrolló en cuatro fases. Una primera fase, relacionada con la planeación; en esta fase se desarrollaron la problemática de la investigación y las consideraciones teóricas. Una segunda fase, relacionada con la recolección de datos; en esta fase se recolectaron datos con respecto al ETM de referencia (libros y programas de curso); con respecto al ETM idóneo (observación de clases de un curso, compuesta de dos partes, una piloto y otra de semestre completo; así como documentos proporcionados por el profesor de la asignatura observada); y con respecto al ETM personal (la elaboración de un proyecto y exámenes de evaluación de un estudiante; así como entrevista con un tesista). Una tercera fase relacionada con los análisis, para ello se construyen las categorías de análisis para el ETM idóneo y el ETM personal del estudiante. Una cuarta fase que consiste en la elaboración de resultados producto del análisis.

La estructura metodológica de la investigación sigue el siguiente desarrollo.

Tabla 1.3 Estructura de la investigación

Fase de la investigación	Etapas
I. Fase de planeación	Etapa 1. Problemática de investigación Etapa 2. Consideraciones teóricas

II. Fase de recolección de datos	Etapa 3. ETM extendido de referencia Etapa 4. ETM extendido idóneo Etapa 5. ETM extendido personal
III. Fase de análisis de datos	Etapa 6. Análisis de datos para el ETM extendido idóneo Etapa 7. Análisis de datos para el ETM extendido personal
IV. Fase de resultados	Etapa 8. Resultados en el ETM idóneo y personal

3.2.1 Fase de planeación

Etapa 1. Problemática de investigación: *Se realiza la revisión de literatura y construcción del estado del arte, con el objetivo de mostrar la relevancia del objeto de estudio al que se inscribe la investigación.*

En esta etapa se realiza la revisión de literatura relacionada con la modelización en educación matemática y en particular en educación en ingeniería. Se presentan diversas perspectivas de modelización y el proceso de modelización. Además, se realiza un estado del arte de investigaciones relacionadas con la modelización y se hace una revisión de literatura relacionada con la matemática en los lugares de trabajo.

Etapa 2. Consideraciones teóricas: *ETM y ciclo de modelización de Borromeo Ferri. Replanteamiento de la investigación con base en las reflexiones teóricas.*

En esta etapa se desarrollan los enfoques teóricos utilizados en la investigación, a saber: la teoría de los ETM extendida a la ingeniería, el ciclo de modelización con y sin tecnología. Los ETM extendidos y el ciclo de modelización clásico servirán para analizar el espacio de trabajo idóneo. Los ETM extendidos y el ciclo de modelización con tecnología servirán para analizar el espacio de trabajo personal.

El caso del programa de formación de Ingeniería Civil: La recolección de datos

De las áreas de formación en Ingeniería Civil (Estructuras, Hidráulica, Suelos y administración de proyectos) se ha elegido para la recolección de datos el área de Ingeniería Estructural (Figura 3.42).

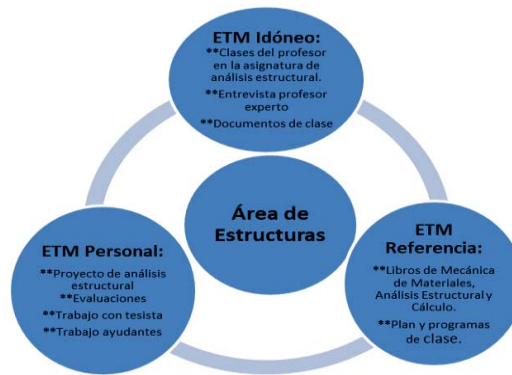


Figura 3.42 La recolección de datos para el caso del programa de formación de Ingeniería Civil

A continuación, se explicitan los datos recolectados conforme a la figura anterior.

3.2.2 Fase de recolección de datos

El objetivo de esta fase es la recolección de datos (programas de curso, observación de clases, entrevistas y libros) que conformaran los diversos ETM que son parte la investigación. A saber: ETM extendido de referencia relacionado con programa de curso y libros; ETM idóneo relacionado con la observación de clases y ETM personal del estudiante relacionado con la elaboración de un proyecto. A continuación se detallan.

Etapas 3. Conceptos de la ingeniería y de la matemática presentes en los modelos estructurales y una aproximación al ETM de referencia.

Conceptos de la ingeniería y de la matemática, presentes en los modelos estudiados en el análisis de estructuras estáticamente determinadas. Se realiza a través del análisis de programas de estudio para carreras de ingeniería de una universidad chilena. Lo anterior con la finalidad de identificar el saber que está siendo enseñado, en nuestro caso relacionado con la modelización.

Es en esta etapa donde se selecciona el caso a investigar, el cual corresponde a la carrera de Ingeniería Civil, dentro del programa de estudios de dicho programa educativo nos ubicaremos específicamente en la asignatura de Análisis Estructural (sexto semestre). Dicha asignatura es seleccionada debido a que pertenece al área del eje de formación profesional la cual tiene como finalidad la aplicación de las ciencias básicas y de las ciencias de ingeniería a situaciones propias de la ingeniería.

El área de especialidad a la que pertenece el curso observado (análisis estructural) es en estructuras. El curso de análisis estructural se encuentra ubicado en el sexto semestre de la malla curricular para ingeniería civil, en total consta de 60 horas de clase cátedra. La asignatura de análisis estructural pertenece al eje de formación profesional, la asignatura que le

antecede en cuanto al eje de ciencias de la ingeniería es mecánica de sólidos y de prerequisite en cuanto al eje de ciencias básicas se encuentran las asignaturas de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Los informes oficiales para la formación en ingeniería muestran que en Ingeniería Civil la modelización está presente en áreas como fluidos y estructuras. Es cierto que el área de estructuras es transversal a otras ingenierías tales como la Ingeniería Mecánica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Aeroespacial, Biomecánica. Específicamente, para Ingeniería Civil se seleccionó el área de estructuras dado que en entrevista con dos profesores de la Facultad no hicieron ver que en dicha área la modelización era más visible.

El contenido del análisis de estructuras como así también el contenido matemático involucrado en su estudio contiene nociones que son parte del referencial teórico del plano epistemológico del ETM, y a su vez, son nociones fundamentales para estudiar el ETM de referencia.

El contenido del capítulo 4(2) es una fiel transcripción del contenido que se ha desarrollado y tomado de los recursos bibliográficos mencionados párrafos abajo. En dicho capítulo se describen las nociones y conceptos que se han seleccionado con base en lo declarado para los incisos a y b que se presentan más adelante.

En esta etapa se estudian los conceptos y nociones que se relacionan por una parte con el antecedente de la asignatura análisis estructural, con el análisis estructural mismo y con la matemática presente en los modelos matemáticos estudiados en el curso. Esto se realiza a través de estudiar los contenidos de interés en cuatro libros, tres del área de ingeniería estructural y uno de matemática (Cálculo). El objetivo de este estudio es establecer las nociones de ingeniería y de matemáticas de referencia consideradas en el estudio de esta área de la ingeniería.

Se trabaja en dos aspectos:

a) Sobre el contenido disciplinar en ingeniería para el análisis de estructuras estáticamente determinadas

Para la formulación de este capítulo se selecciona el libro Hibbeler denominado Análisis Estructural, el cual es parte de la bibliografía recomendada en el programa de curso de la asignatura de análisis estructural. Además, se incluyen contenidos que son fundamento del análisis estructural en la asignatura de Mecánica de Sólidos, la cual es una asignatura antecedente, asignatura para la cual también se selecciona el libro de Hibbeler denominado Mecánica de Materiales. Para ello, se presentan nociones elementales como: fuerza, estructura, momento,

esfuerzo cortante, normal y axial, diagramas de axial, cortante y momento. Además, se presenta una hipótesis fundamental para el análisis de estructuras, la cual está relacionada con la linealidad constitutiva del material desde la ley de elasticidad lineal de Hooke. En la presentación de las nociones se hace énfasis en los registros figúrales y gráficos, por ser este lenguaje parte importante del trabajo del ingeniero.

b) Sobre el contenido matemático presente en los modelos utilizados para resolver los problemas del análisis estructural

Durante la investigación se observó que el contenido matemático de los modelos matemáticos utilizados en la solución de los problemas del análisis estructural, son indisolubles (aparecen integradas las nociones de ingeniería y matemática), pues el modelo estudiado, en todo momento dialoga con cuestiones de la matemática pero también del análisis estructural. No obstante, en esta sección y con el fin de encaminar el trabajo hacía realizar una mirada con afán de conexión entre disciplinas de la matemática y de la especialidad, se muestra el contenido matemático presente en los modelos del análisis estructural.

Ubicamos el contenido matemático de los modelos en las asignaturas de ciencias básicas correspondientes a Cálculo I y Cálculo II, esto en el marco de la universidad en la cual se está realizando la investigación. Para ello se ha seleccionado el libro de Spivak (Cálculo Infinitesimal), el cual maneja los conceptos de cálculo desde un nivel formal y con fundamentos. Al igual que en la sección anterior, se presentan los contenidos matemáticos desde la óptica de potenciar el registro gráfico y su posible vinculación con el trabajo de modelización, interés de nuestro estudio.

Los contenidos relacionados con las nociones que pertenecen a los modelos del análisis estructural se eligieron con base en la identificación de nociones relacionadas con al cálculo y los problemas de ingeniería.

Entonces, al identificar en este capítulo nociones de ingeniería y matemáticas, nos permiten entender desde los referentes teóricos, los vínculos entre matemáticas e ingeniería vía la modelización.

En cuanto a la modelización, la selección que se ha realizado para los incisos a y b nos permitirá comprender lo que significa entender el problema de modelar una estructura, cómo son los procesos de simplificación y estructuración, qué roles tienen dichas nociones con los procesos de matematización y trabajo con los modelos; además, nos permitirá comprender los procesos de interpretación y validación.

Por tanto, con base a, 1. Comprender relaciones entre los modelos estructurales y la matemática, 2. Tener un sustento teórico para el referencial de los planos epistemológico de la matemática y de la ingeniería, 3. Comprender la modelización de un problema de ingeniería, es que se han

seleccionado los contenidos presentes en la aproximación al ETM de referencia del capítulo 4(1).

Etapas 4. ETM extendido idóneo: *se realizará a través de la observación de clases y materiales utilizados por el profesor de la asignatura de Análisis Estructural.*

En esta etapa se trabajará con la recolección de datos resultado de la observación de clases en un curso de ingeniería civil de una universidad chilena, lo anterior es realizado en el marco del ETM idóneo del profesor de una asignatura denominada Análisis Estructural, dicha asignatura pertenece al eje de formación profesional de la carrera.

La asignatura está compuesta por seis unidades. Para el análisis se ha considerado la primera parte del curso (análisis de estructuras estáticamente determinadas) por estar relacionadas con el dominio del cálculo.

Así mismo, en esta parte del curso existen 4 unidades y se han seleccionado las unidades dos y cuatro, correspondientes a la determinación de reacciones y esfuerzos internos para la unidad dos y a la determinación de deformaciones para la unidad cuatro.

Para ubicar las unidades que se han seleccionado se presentan las unidades a las que pertenece el programa de curso de análisis estructural.

UNIDAD I. Introducción

UNIDAD II. Determinación de Reacciones Externas

UNIDAD III. Líneas de Influencia

UNIDAD IV. Cálculo de Deformaciones

UNIDAD V. Estructuras Hiperestáticas

UNIDAD VI. Análisis Matricial

A continuación, se especifican los problemas que se van a analizar, es decir, a qué sección de la unidad corresponde. Como se mencionó las unidades seleccionadas para describir y analizar fueron las unidades II y IV, de dichas unidades se seleccionaron problemas resueltos por el profesor en clase, ambas unidades corresponden al tratamiento de estructuras estáticamente determinadas.

Para la unidad 2, se seleccionaron problemas relacionados con la resolución mediante estática, esto debido a que el profesor hizo más énfasis en ese método por el tiempo empleado en desarrollarlo. Para la unidad 4, los problemas que seleccionamos se relacionan con el método de los trabajos virtuales, la selección fue con base en la generalidad del método expresada por el profesor; y además, porque desde la observación clase, nos pareció más accesible para su estudio. Además, en ambas unidades se presentan

problemas que se relacionan con nociones de cálculo. A continuación, se muestra una tabla (Tabla 5.7) con el tipo de problema seleccionado para cada una de las dos unidades.

Tabla 5.3 Tipos de problemas seleccionados

Unidad II: Determinación de reacciones externas	Unidad IV: Deformaciones
1. Explicación del tema de reacciones externas y esfuerzos internos	5. Deformación de una estructura estáticamente determinada tipo viga
2. Estructura estáticamente determinada tipo viga	6. Deformación de una estructura estáticamente determinada tipo marco
3. Estructura estáticamente determinada tipo marco	
4. Estructura estáticamente determinada tipo armadura	

Por último, se presenta en forma de anexo la entrevista realizada al profesor de la asignatura, la cual fue realizada con la finalidad de confrontar las apreciaciones hechas por el observador del curso con lo declarado verbalmente en la entrevista por el profesor, teniendo como hilo conductor de la entrevista la formación de estudiantes de ingeniería en la competencia de modelización y como la modelización matemática está implícita en la modelización de los elementos estructurales estudiados en el curso, además, y por la formación y experiencia del profesor entrevistado, fue posible establecer vínculos con el ejercicio profesional del ingeniero civil en el área de la ingeniería estructural como analista profesional.

Etapas 5. ETM extendido personal: *Se procederá a indagar en el ETM personal del estudiante de ingeniería a través del trabajo con un proyecto de modelización encargado por el profesor en el marco del programa de ayudantía del curso de análisis estructural.*

En esta etapa se muestran elementos que nos permiten acercarnos al ETM personal del estudiante de ingeniería, en el contexto del salón de clase cuando éste resuelve problemas de ingeniería y bajo los siguientes casos:

- 1) Resolución de problemas de exámenes de evaluación
- 2) Estudiantes trabajando en un proyecto de modelización estructural
- 3) Entrevista a estudiante en trabajo de tesis

A continuación, se explica cada uno de esos casos

1. Estudiante resolviendo problemas en exámenes de evaluación

Se nos proporcionaron los exámenes correspondientes a la evaluación de un estudiante, los cuales realizó durante el semestre académico. Cabe señalar, que el estudiante obtuvo un buen desempeño académico. Se presenta la producción escrita que realizó para un problema correspondiente a la sección del cálculo de reacciones externas y esfuerzos internos y se muestra un panorama general del resto de su evaluación.

2. Estudiantes trabajando en un proyecto de modelización estructural “real”

Contexto

Se analiza la producción realizada por cuatro equipos de tres integrantes cada uno, en cuanto a al trabajo con un proyecto de análisis estructural de un edificio, ello con la finalidad de evidenciar etapas de modelización en el desarrollo de su proyecto, además, de conectar la utilidad del curso (teórico) de análisis estructural con la elaboración de dicho proyecto.

Descripción del proyecto

La clase de análisis estructural que hemos reportado en el ETM idóneo tuvo como complemento académico un programa que utiliza la universidad como medida de reforzamiento académico de los temas explicados por el profesor. El programa es llamado “ayudantía” y consiste en dos sesiones de clase durante el semestre académico en donde los estudiantes son acompañados por dos estudiantes de curso superior. Como producto final de la ayudantía se solicitó la entrega de un producto final de la ayudantía, el producto consistió en la modelización estructural de un edificio de cuatro niveles y en el grupo se formaron 4 equipos de tres integrantes cada uno.

El proyecto de fin de ayudantía consistió en realizar un modelado estructural de un edificio de cuatro niveles, para ello se proporcionó a los estudiantes un plano sobre el edificio en un archivo de AutoCAD y el plano arquitectónico de la fachada del mismo en versión del programa Revit. El proyecto se solicitó fuera realizado utilizando el software de análisis estructural SAP 2000 V. 19.

La entrega del proyecto se dividió en cuatro fases (anexo 6) y son las que utilizamos para realizar el análisis de la producción de los estudiantes. Al proceso seguido para la elaboración del proyecto se le llamó “modelización estructural del edificio”.

3.2.3 Fase de análisis de datos

En esta fase se realizó una organización y análisis de los datos levantados, para la organización se construirán categorías que se realizarán con base en el ciclo de Borromeo Ferri y los elementos teóricos del ETM extendido para la ingeniería. La operacionalización de los elementos teóricos anteriores se llevará a cabo de la siguiente manera.

Etapas 6. Análisis de datos para el ETM extendido idóneo

Para realizar la descripción, explicación y análisis se han seleccionado problemas representativos, resueltos por el profesor en clase, de cada unidad mencionada, tres son problemas resueltos para la unidad 2 y dos para la unidad 4.

A la asignatura analizada le antecede la asignatura de mecánica de sólidos como parte de la formación del estudiante en ciencias de la ingeniería.

a) Descripción de las prácticas de especialidad y matemáticas del profesor en la resolución de la tarea resuelta en clase

Se realiza una explicación de las prácticas del profesor en dos sentidos, en el sentido de la especialidad del análisis estructural y en el sentido de la práctica matemática y la relación entre ambas prácticas. Presentamos una descripción de lo realizado por el profesor en el desarrollo de la tarea resuelta en clase así como una conexión entre la tarea trabajada y los elementos matemáticos presentes, ello con la finalidad de establecer la relación entre la tarea del análisis estructural y la matemática.

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo ingenieril asociado a la situación.

Momento 4. Presentación de los resultados obtenidos y análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos realizados y validarlos.

b) Análisis del proceso de abordaje de la tarea desde el CM y el ETM extendido

Se realiza un análisis teórico considerando elementos presentes en la práctica del profesor en las etapas del CM y las génesis trabajadas en el ETM. Para después, establecer algunas conexiones entre ambos modelos teóricos para esta tarea específica.

Para el análisis se consideran tareas de estructuras estáticamente determinadas (reacciones externas y esfuerzos internos, diagramas de fuerza cortante y momento flector, deformaciones (deflexiones y rotaciones), correspondientes a las unidades II y IV de la asignatura de análisis estructural.

A continuación se presentan las categorías de análisis (Tabla 2.4) que se utilizan para analizar el ETM extendido en el idóneo.

Tabla 2.4 Categorías para el análisis de las situaciones de clase (problemas de modelización que fueron observados)

Momento de clase 1	Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.
Trabajo en el CM	Trabajo en ETM extendido
En este momento de clase se analiza el trabajo del profesor con respecto a las siguientes etapas del CM: <u><i>Etapas 1. Entendiendo la tarea</i></u> Esta etapa describirá la transición entre el problema real mostrado por el profesor y las herramientas que utiliza para explicarlo y hacerlo entender.	En este momento de clase se analiza el ETM extendido del profesor con respecto al trabajo en las siguientes génesis: <u><i>Génesis semiótica:</i></u> En este momento el trabajo con la génesis semiótica se puede corresponder al lenguaje verbal utilizado para presentar el problema a resolver. Así mismo, este lenguaje puede conectar con la visualización en dado caso de que el profesor presente un esquema del problema. <u><i>Génesis instrumental:</i></u> En este momento no se espera trabajo con la génesis instrumental. <u><i>Génesis discursiva:</i></u> Se espera que el profesor evidencia conocimiento extraído desde su referencial teórico para mostrar el problema a resolver y que este conocimiento se justifique y sirva para probar la teoría útil en el entendimiento de la situación.
Momento de clase 2	Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.
Trabajo en el CM	Trabajo en ETM extendido

En este momento de clase se analiza el trabajo del profesor con respecto a las siguientes etapas del CM: <u><i>Etapas 2. Simplificando/estructurando la tarea.</i></u> Esta etapa muestra la transición entre el entendimiento de la tarea y la construcción de un modelo real, a través de, realizar idealizaciones; dichas idealizaciones se ven fuertemente influenciadas por el conocimiento del contexto extra matemático perteneciente al contexto de estructuras.	En este momento de clase se analiza el ETM extendido del profesor con respecto al trabajo en las siguientes génesis: <u><i>Génesis semiótica:</i></u> Se analizan los signos asociados a esquemas construidos en el proceso de estructuración del problema, en este caso de la visualización de los modelos estructurales que permiten bien entender la situación y colaborar con iniciar el proceso de matematización. <u><i>Génesis instrumental:</i></u> En este momento no se espera trabajo con la génesis instrumental. <u><i>Génesis discursiva:</i></u> Se analiza considerando las herramientas teóricas que sustentan y validan el uso y/o la construcción de esquemas asociados a modelos estructurales.
Momento de clase 3	Identificación de la presencia de un modelo ingenieril asociado a la situación.
Trabajo en el CM	Trabajo en ETM extendido
En este momento de clase se analiza el trabajo del profesor con respecto a las siguientes etapas del ciclo de CM: <u><i>Etapas 3. Matematizando</i></u> Aquí se realizan consideraciones entre las herramientas matemáticas presentes en el referencial teórico del profesor y las herramientas propias del contexto extra matemático. El resultado de este proceso de matematización es la construcción de un modelo matemático-ingenieril.	En este momento de clase se analiza el ETM extendido del profesor con respecto al trabajo en las siguientes génesis: <u><i>Génesis semiótica:</i></u> Los signos se corresponden con los que emergen de los modelos matemático-ingenieriles construidos, ya sean del tipo algebraico y/o figural, esos modelos se visualizan a través del trabajo con sus representaciones.

<u><i>Etapas 4. Trabajo matemático</i></u> Se considera el trabajo con el modelo matemático-ingenieril construido y /o utilizado. _En esta etapa se analiza trabajo en dos sentidos principalmente: a) Trabajo matemático con expresiones analíticas b) Trabajo matemático a través de la construcción de diagramas El objetivo del trabajo matemático con los modelos será la obtención de resultados matemáticos.	Lo signos asociados a los modelos trabajados permitirán interpretar los resultados del modelo, a través del uso de nociones teóricas de la ingeniería que permitirán probar dicha interpretación. <u><i>Génesis instrumental:</i></u> Se espera que el proceso de construcción y/o uso de modelos matemático-ingenieriles haga emerger el uso de artefactos simbólicos, que desde nociones de la física se instrumentalicen en orden de contribuir a la construcción de los modelos. <u><i>Génesis discursiva:</i></u> Desde el conocimiento teórico de nociones ingenieriles se espera se valide internamente la construcción o uso de modelos, y esto sea utilizado para probar la pertinencia del uso de los modelos en la solución de los problemas.

Momento de clase 4	Presentación de los resultados obtenidos y análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos realizados y validarlos.
Trabajo en el CM	Trabajo en ETM extendido
En este momento de clase se analiza el trabajo del profesor con respecto a las siguientes etapas del CM: <u><i>Etapas 5. Interpretación</i></u> Esta etapa se analizará considerando la transición que ocurre para llegar a los resultados reales, a través de	En este momento de clase se analiza el ETM extendido del profesor con respecto al trabajo en las siguientes génesis: <u><i>Génesis semiótica:</i></u> Lo signos asociados a los modelos trabajados permitirán interpretar los

interpretar los resultados matemáticos y hacerlos contrastar con la situación real (ingenieril) presentada. <u>Etapa 6. Validación</u> Los resultados reales se validan tomando en cuenta el modelo real trabajado y haciendo uso del conocimiento extra matemático.	resultados del modelo, a través del uso de nociones teóricas de la ingeniería que permitirán probar dicha interpretación. <u>Génesis instrumental:</u> En este momento no se espera trabajo con la génesis instrumental. <u>Génesis discursiva:</u> El uso de referencial teórico basado en la interpretación de signos, permitirá probar que los resultados son consistentes tanto matemáticamente como ingenierilmente.

Etapa 7. Análisis de datos para el ETM extendido personal

1. Resolución de problemas de exámenes de evaluación

- a) Descripción de lo realizado por el estudiante
- b) Análisis de su producción desde el CM
- c) Análisis de su producción desde el ETM extendido

En esta sección de la etapa 7, se trabajó con un tesista para la solución y entendimiento del problema analizado.

2) Estudiante trabajando en un proyecto de modelización estructural

La finalidad de analizar la producción de los estudiantes en cuanto a la elaboración del proyecto, se realiza con respecto a los siguientes tres direcciones:

1. Uso del ciclo de modelización con tecnología extendido adaptado de (Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018) para analizar las fases de trabajo.
2. Uso de ETM extendido para estudiar el trabajo con el software

3. Evidenciar la relación de la parte teórica del curso de Análisis Estructural con la componente práctica.

Por tanto, para cada fase del proyecto, se analiza la producción de los estudiantes por equipo, a través de categorías de análisis que provienen, tanto del ciclo de modelización con uso de software como del ETM extendido (sus génesis, polos y relaciones entre ellos).

Categorías utilizadas para el análisis del proyecto con base en el CM y ETM extendido.

A diferencia de las categorías de análisis para el ETM idóneo, en el caso del personal referido al proyecto, se presentan categorías con resultados esperables para un proyecto, el cual ya contiene las etapas que va a ser presentado. Entonces, a cada una de las etapas le aplicamos lo esperable con base en el ETM extendido a la ingeniería y el Ciclo de modelización con tecnología.

Entrega 1: Construcción del modelo estructural geométrico

Con respecto al ciclo de modelización: (modelo geométrico en el software SAP2000): mundo real, configuración de un modelo real que se conforma desde los planos (arquitectónico y estructural) otorgados del edificio. *Paso de la situación real al modelo real, a través de la construcción de un modelo estructural geométrico.*

Con respecto al ETM extendido: Se espera que el trabajo de los estudiantes active la génesis semiótica, esto a través de iniciar el polo del representamen de la ingeniería vía el uso de signos asociados a los planos proporcionados.

Después se pasaría al polo del representamen de la matemática, pero sólo en las medidas y configuración geométrica de las grillas en dos dimensiones y posteriormente del modelo geométrico estructural en tres dimensiones.

Una vez ello, se espera se active la génesis instrumental, esto al iniciarse trabajo en el polo del representamen de la ingeniería, al utilizar el software SAP 2000 vía la alimentación de medidas tomadas de los planos, para de esta manera pasar al polo constructivo de la construcción.

Entrega 2: Construcción del modelo estructural analítico

Con respecto al ciclo de modelización: Dar dimensiones a los elementos estructurales (vigas, muros y losas); además, de cargar los elementos con base en el tipo de edificio asignado. *Paso de la situación*

real al modelo real, a través de la construcción de un modelo estructural analítico.

Con respecto al ETM extendido: En esta entrega se espera que se trabaje con la visualización de los signos asociados a las propiedades geométricas y mecánicas de los diversos elementos estructurales (vigas, muros y losas). Además, de signos asociados a la interpretación de fórmulas que se establecen vía las normas de construcción de acuerdo a la asignación del uso que se le va a dar a su edificio. Por tanto, se espera la activación de la génesis semiótica. Posteriormente, se espera un pasaje a la génesis instrumental en dos momentos:

Un primer momento relacionado con la activación de la génesis instrumental, a través del uso de software como artefacto de la génesis epistemológica de la ingeniería, que se instrumentaliza a través de uso de comandos útiles para alimentar tanto las propiedades geométricas como físicas del modelo estructural. Además, comandos que le permitirán la alimentación de las cargas y combinaciones de carga a los elementos.

Lo anterior permitirá la construcción de un modelo estructural analítico, lo que permite pasar al polo cognitivo de la construcción.

Un segundo momento, relacionado con la activación de la génesis instrumental, donde se utiliza el software para realizar la discretización de los elementos estructurales, en este momento, se pasa al polo del artefacto de la matemática a través de la matematización, la cual ocurre mediante el uso de herramientas matemáticas que utiliza SAP 2000, en específico SAP 2000 utiliza el método de los elementos finitos para la discretización del modelo. Como resultado se obtiene un modelo estructural computacional, pasando así al polo cognitivo de la construcción.

Entrega 3: Construcción del modelo estructural computacional, e interpretación de resultados

Con respecto al ciclo de modelización: Cargar por sismo y realizar una simulación a través del Run Analysis: *Paso del modelo real al trabajo con el modelo computacional (a través de compilar una simulación del modelo analítico) y paso del modelo computacional a la interpretación de resultados, a través de analizar (de acuerdo a lo solicitado en esta etapa) elementos para cortante máximo y momentos.*

Con respecto al ETM extendido:

Aquí se espera que los estudiantes trabajen con la simulación del modelo estructural computacional que construyeron en la etapa dos del proyecto. Por tanto, se trabaja en la génesis instrumental, a través de la simulación llevada a cabo por el software (polo del artefacto de la matemática) y la

construcción de los diagramas y resultados numéricos (polo cognitivo de la construcción).

Posteriormente, se espera se active la génesis discursiva, esto a través del uso de nociones de la ingeniería que le permitirán a los estudiantes interpretar los resultados. Se activa el polo del referencial de la ingeniería: comportamiento cualitativo de los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector que fueron estudiados en el curso de análisis estructural y demás nociones establecidas en normas de construcción. Lo anterior permitirá probar sus resultados y justificarlos, pasando así al polo cognitivo de la prueba.

Entrega 4: Construcción de los modelos geométrico, analítico y computacional de la armadura e interpretación de resultados.

Con respecto al ciclo de modelización: Modelar y analizar la estructura que soporta la techumbre del último nivel. Aquí se pasa por todas las fases del ciclo. *Situación real: la estructura tipo armadura que deberá soportar la techumbre. Modelo real: modelo geométrico y analítico de la armadura con base a los materiales y las condiciones de carga de acuerdo a normas. Modelo computacional: Simulación del modelo analítico (modelo geométrico cargado en SAP2000). Resultados (interpretación): con base en los resultados de la simulación (contrastando con la forma en la que la estructura fue cargada).*

Se contó con la colaboración de un estudiante tesista, el cual aportó información sobre las características de cada una de las etapas del proyecto. El estudiante se encontraba cursando el último semestre de sus estudios de pregrado en ingeniería civil, y se encontraba realizando su trabajo de tesis en el área de ingeniería estructural. Se le realizó una entrevista semi estructurada con la finalidad de contrastar su punto de vista con el proyecto desarrollado.

3.2.4 Fase de resultados

Etapa 8. Resultados en el ETM idóneo y personal

En esta fase se presentan los resultados para los ETM idóneo y personal. Para ello se revisitan los análisis realizados en la investigación para cada uno de los ETM y se contrastan con lo que dice la literatura a manera de discusión. El lente se pone en resultados con base en la circulación de planos verticales en los ETM, lo que caracterizó la modelización de las estructuras y su relación con objetos matemáticos, la emergencia de modelos y su dialéctica con la matemática.

Coordinación para las categorías

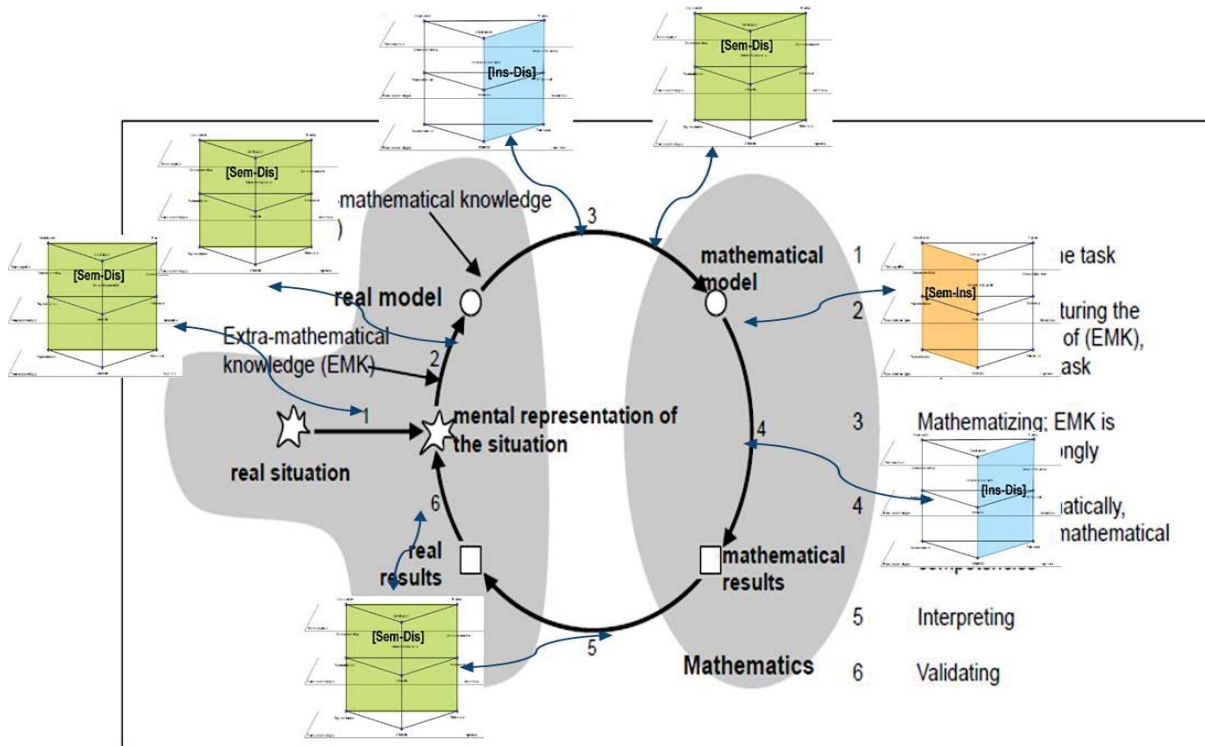


Figura 3.43 Etapas en el CM y planos verticales en el ETM extendido.

Capítulo 4 (1)
**Aproximación al ETM de referencia y un
primer acercamiento al contexto de
ingeniería**

Capítulo 4 (1). Aproximación al ETM de referencia y un primer acercamiento al contexto de ingeniería

En este capítulo presentamos las definiciones de las nociones que corresponden a los modelos que emergieron en los problemas estudiados en el curso de Análisis Estructural relacionados con Cálculo. El capítulo es sólo una aproximación al ETM de referencia desde las nociones de ingeniería y matemáticas consideradas. Es importante destacar que este capítulo fue realizado después del estudio los problemas observados en la asignatura del curso. Cabe señalar, que en este capítulo emerge la noción de función y en el capítulo 1 sección 1.9 se realiza una aproximación epistemológica a dicha noción, cuestión que es de interés para abordar el ETM de referencia de una institución.

El capítulo 4 se presenta en dos subcapítulos. El subcapítulo 4(1) consistió en la revisión de la malla curricular de ingeniería de una universidad chilena, además de, programas de curso y entrevistas a profesores de ingeniería. A partir de ahí, se decide el caso con el cual se va a trabajar para la recolección de información y datos. Como parte de esta primera etapa y con la finalidad de validar empíricamente la presencia de modelización en ingeniería, al menos declarada en planes y programas de estudio, se decide realizar un piloto de la asignatura de Análisis Estructural por un periodo de 2 meses. Esta observación nos permitió validar la información recabada y reforzó la decisión de la selección del caso.

El subcapítulo 4(2), consistió en la identificación de los saberes de referencia presentes en los modelos trabajados en el curso observado de ingeniería. Para ello se consideraron cuatro libros, un libro de mecánica de los materiales, dos libros de análisis de estructuras y un cuarto libro, de cálculo. Ello nos permitió tener de base, los saberes con respecto a los cuales íbamos a contrastar nuestro estudio con el caso seleccionado y para los cuales se iba a trabajar con los datos seleccionados, para el espacio de trabajo matemático extendido idóneo (capítulo 5) y personal (capítulo 6), expuestos en los capítulos siguientes.

4.1 Aproximación al ETM de referencia

4.1.1 Los programas de ingeniería y las áreas de formación

Se revisan planes de estudio y se contrastan con las exigencias de los programas acreditadores, tales como el Consejo para la Acreditación de la Enseñanza en Ingeniería CACEI (2018), CNA (2016) y el Proyecto TUNING (2013). La constatación de lo que establecen los programas acreditadores con lo que declaran los planes de estudio, nos da margen para categorizar

CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA

la enseñanza en ingeniería en cuatro grandes componentes, los cuales en CACEI (2014, p.124) se declaran de la siguiente manera:

➤ **Formación en Ciencias Básicas**

Las asignaturas impartidas en esta área de formación tienen como objetivo que el estudiante trabaje con los conocimientos fundamentales para abordar fenómenos de la naturaleza a través de expresiones cuantitativas y el uso del método científico.

Dentro de esta área de formación, CACEI especifica el objetivo de los estudios de Matemáticas en la formación del estudiante de ingeniería: "El objetivo de los estudios en Matemáticas es contribuir a la formación del pensamiento lógico-deductivo del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita *modelar los fenómenos de la naturaleza*"

➤ **Formación en Ciencias de la Ingeniería**

La formación en ciencias de la ingeniería tiene como fundamento a las ciencias básicas, en esta área se tiene como objetivo que el estudiante aplique de una manera creativa los conocimientos adquiridos en las asignaturas de ciencias básicas. Se consideran, por tanto, una conexión entre ambos ejes de formación, el de ciencias básicas y el de los problemas abordados por las asignaturas del eje de ciencias de la ingeniería

Además, recomienda la forma de tratar las diversas disciplinas de esta área de formación: "Los principios fundamentales de las distintas disciplinas deben ser tratados con la profundidad conveniente para su clara identificación y aplicación en las soluciones de problemas básicos de la ingeniería"

➤ **Formación en Ingeniería Aplicada**

La formación se corresponde con la vinculación entre lo aprendido en las asignaturas de Ciencias Básicas y de la Ingeniería con la finalidad de proyectar y diseñar sistemas, componentes o procedimientos acordes a las necesidades y metas establecidas. Además, se deben incluir los elementos fundamentales para que el estudiante sea capaz de realizar los diseños propios de la ingeniería.

➤ **Formación complementaria**

Comprende asignaturas relacionadas con las ciencias sociales y humanidades, además, de otros cursos, como formación empresarial, cuidado ambiental, legislación laboral, entre otros.

En Chile la Comisión Nacional para la Acreditación en Ingeniería maneja ejes de formación similares a los de CACEI (México), en CNA (2016) se declara

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

que el proceso formativo debe desarrollar en el graduado de ingeniería, conocimientos y comprensión de:

- Las ciencias básicas que sustentan una amplia gama de disciplinas de la ingeniería con un nivel suficiente para planificar, diseñar, dirigir y administrar proyectos de desarrollo, procesos productivos, investigaciones o proyectos multidisciplinarios;
- Las ciencias sociales y económicas relacionadas con el diseño, gestión y desarrollo de proyectos de investigación y de inversión;
- Las ciencias de la ingeniería, en forma completa y actualizada, y de las tecnologías y las herramientas asociadas con una o más disciplinas de su especialidad;
- Los métodos de investigación y diseño en ingeniería y de sus aplicaciones;
- Los principios, métodos y restricciones asociados con las disciplinas de la especialidad, aplicando conocimientos novedosos, y
- Los métodos de comunicación de información. (p.3)

Como puede observarse, el rol de las matemáticas en ingeniería a nivel de curriculum es el de su uso en contextos propios tanto en la formación de los estudiantes de ingeniería a través de las distintas asignaturas correspondientes a los distintos ejes de formación como a su uso en contextos propios del lugar de trabajo, al cual accederán una vez inmersos en el campo laboral. La modelización propuesta se hace presente de manera implícita o explícita en los diversos programas acreditadores, como los antes citados.

La exigencia (explícita o implícita) de la actividad de modelización se hace presente no sólo en América latina, a nivel internacional existen organismos como la European Society for Engineering Education (SEFI) que propone un diálogo entre la matemática y su uso en los contextos antes descritos con la finalidad de tener un curriculum integrado dentro de los cursos de ingeniería.

En SEFI, la modelización es tomada en cuenta en la formación matemática de estudiantes de ingeniería. Pero además, se discute sobre la importancia de vincular la matemática vista durante los cursos de matemáticas con la matemática vista en los cursos de aplicación propios de la ingeniería, los cuales según los ejes de formación antes declarados se corresponden con los ejes de ciencias de la ingeniería y de formación profesional.

La conexión entre lo matemático y lo extra matemático es vista en SEFI de acuerdo a la definición de competencia matemática declarada por Niss (2003): "the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of intra- and extra- mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role" (p.64)

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

Por ello, muestra la necesidad de vincular la matemática con sus usos en las asignaturas de aplicación en ingeniería: "It is quite obvious that a strong link between those responsible for the mathematical education and those who are in charge of proper engineering courses is decisive for achieving a good integration of mathematics into the engineering curriculum" (p.65)

4.1.2 La selección del caso: el programa de formación de Ingeniería Civil de una universidad chilena

Se revisaron programas de ingeniería, de acuerdo a la accesibilidad a la información de la plataforma digital de la universidad donde se hizo la exploración, la carrera de ingeniería industrial y la carrera de ingeniería civil nos parecen representativas y nos dan margen para poder estudiar el dialogo entre programas acreditadores – planes de estudio y asignaturas impartidas, ello debido a que en dichos programas se hace explicito el proceso de modelización requerido tanto por los organismos acreditadores, como por el perfil de egreso de la carrera así como su ubicación explicita en algunas de sus asignaturas.

Del plan de estudio de Ingeniería Industrial se pueden distinguir 3 asignaturas donde hay presencia de modelización:

-  Introducción al Modelamiento Discreto (ubicada en el primer semestre)
-  Optimización Lineal (Ubicada en el séptimo semestre)
-  Modelamiento de Procesos y Sistemas (ubicada en el décimo semestre)

En una primera instancia hemos decidido estudiar el ETM de referencia en modelización específicamente en la carrera de Ingeniería Civil en la asignatura de Análisis Estructural, ello debido a lo que se ha comentado que cumple de acuerdo a los perfiles de egreso requeridos por los organismos acreditadores y, además, lo explicita en la asignatura antes mencionada.

Además, de los requisitos en cuanto al perfil de egreso relacionados a la modelización de la asignatura seleccionada para aproximarse al ETM de referencia en modelización, se ha considerado debido a que es una asignatura transversal, y si bien es estudiada en el marco de la carrera de Ingeniería Civil, es una asignatura que se considera transversal, pues en otras ingenierías como ingeniería mecánica, ingeniería en aeronáutica, ingeniería mecatrónica, entre otras, el análisis de elementos mecánicos resulta fundamental.

4.1.3 El programa de Ingeniería Civil

De acuerdo a la categorización de los campos donde se ubican las diversas asignaturas en ingeniería, consideramos que para aproximarnos al ETM de referencia acercarnos en una primera instancia a las asignaturas de matemáticas no nos daría evidencia del proceso de modelización, por lo que, el campo de ciencias de la ingeniería nos podría proporcionar de suficientes elementos para aproximarnos al ETM de referencia en modelización pues como se describió proporciona un balance entre la matemática y las ciencias de la ingeniería que más adelante será requerida para el diseño y análisis propios de la ingeniería.

Dado un diálogo con profesores de Ingeniería Civil, se decidió indagar en una asignatura relacionada con el área de formación profesional, pues se llegó a la conclusión de que podría proporcionar un acercamiento más preciso al rol de la modelización en ingeniería.

CACEI (2014) menciona que las ciencias básicas son indispensables para el aprendizaje de las ciencias en ingeniería. En el caso de la carrera de Ingeniería Civil, en el eje de **Formación en Ciencias Básicas** en cuanto a matemáticas, se tiene que se han estudiado las siguientes asignaturas: álgebra, cálculo 1, geometría, álgebra lineal, cálculo 2, cálculo 3 y ecuaciones diferenciales.

En la sección del eje de formación en Ciencias de la Ingeniería, relacionadas con la asignatura seleccionada, se tiene como antecedente la asignatura de Mecánica de Sólidos.

En el eje de **Formación Profesional** se cuenta con diversas asignaturas, a continuación se describe la asignatura de Análisis Estructural, debido a que se ha considerado para realizar observaciones de clase.

De acuerdo al programa de curso (Tabla 4.5), se presenta la descripción y contextualización de la asignatura de Análisis Estructural en el currículo de Ingeniería Civil

Esta asignatura es teórica y práctica, se ubica en el sexto semestre de la carrera de Ingeniería Civil. Asimismo, se enmarca en el eje de Formación Profesional, específicamente en el área de Especialidad.

El propósito de esta asignatura es consolidar al estudiante en la modelación de diversas estructuras, tales como vigas, marcos y modelos en 3D. Adicionalmente, resolver estructuras estáticamente determinadas e hiperestáticas, empleando varios métodos.

En cuanto a los resultados relacionados con el aprendizaje se espera que al finalizar el curso el estudiante sea capaz de:

-  Resolver problemas de estática de alta dificultad

**CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA**

- ✚ Modelar y resolver estructuras simples con variados tipo de cargas isostáticas, considerando distintos métodos.
- ✚ Modelar y resolver estructuras hiperestáticas complejas, resolverlas mediante variados métodos.
- ✚ Entender el concepto físico de la matriz de rigidez

Tabla 4.5 Programa de curso de análisis estructural

UNIDAD I. Introducción	UNIDAD II. Determinación de Reacciones Externas
• Alcances del curso • Campos de aplicación • Situaciones no previstas en el curso • Ejemplos prácticos	• Resolución mediante estática • Estructuras de reticulados • Resolución mediante trabajos virtuales
UNIDAD III. Líneas de Influencia	UNIDAD IV. Cálculo de Deformaciones
• Concepto de línea de influencia • Cálculo de líneas de influencia • Principio de Müller-Breslau • Trenes de carga	• Método de doble integración • Método de viga conjugada • Método de trabajos virtuales
UNIDAD V. Estructuras Hiperestáticas	UNIDAD VI. Análisis Matricial
• Introducción al método de flexibilidad • Introducción al método de rigidez • Simplificación a las estructuras hiperestáticas • Método de flexibilidad generalizado • Método de Rigidez • Método de rigidez directa	• Matriz de rigidez para estructuras de reticulados • Matriz de rigidez para elementos flexurales • Resolución de problema

Para continuar con la investigación se van a realizar observaciones de clase y entrevista a profesor, para la ingeniería y asignatura seleccionada. El objetivo de las observaciones de clase es identificar los elementos de la clase donde la matemática se hace explícita y como esta se vincula con la disciplina en estudio específicamente en el análisis estructural. Esa relación entra la matemática utilizada y su vínculo nos dará elementos para identificar la formación matemática que está siendo trabajada en el salón de clase de ciencias de la ingeniería e identificar una referencia para poder establecer vínculos entre los distintos ejes de formación en ingeniería.

4.1.4 Reporte de observación de clases correspondiente a la asignatura de Análisis Estructural en la carrera de Ingeniería Civil

A continuación se reporta una observación de clases, la cual se decidió realizar con la finalidad de levantar evidencia, sobre, la relación entre la matemática y las disciplinas de la ingeniería desde el enfoque de la modelización matemática. Lo anterior nos permitirá indagar sobre el rol de la modelización matemática en las disciplinas de la ingeniería, específicamente en la asignatura de análisis estructural, la cual se encuentra en el sexto semestre de la carrera de ingeniería civil de una universidad chilena y pertenece al eje de formación profesional. Los insumos recogidos durante el periodo de observación de las clases fueron los siguientes:

- La toma de notas con respecto a la observación de clases llevada a cabo durante 10 sesiones de clases de dos horas, de la asignatura donde se estudió el tema de “Análisis de estructuras hiperestáticas” bajo el método de las flexibilidades, el método de las rotaciones y de las rigideces.
- 23 archivos correspondientes a los apuntes del profesor en formato power de point relacionados con los métodos antes mencionados, en ellos se presenta de manera detallada cada uno de los métodos, como es su explicación, fundamentación, condiciones de aplicabilidad y ejercicios resueltos a manera de ejemplo.
- Una entrevista realizada al profesor de la asignatura con la finalidad de indagar sobre su punto de vista sobre el rol de la modelización matemática en ingeniería.

A continuación, se presenta la exposición de clases del profesor para uno de los métodos vistos durante la observación de clases, “el método de las rotaciones”. El reporte de observación de ese método se ha realizado a través de momentos de clase.

El problema corresponde a la clase observada número 2, para la asignatura de análisis estructural, correspondiente a la unidad 5, específicamente, el estudio de estructuras hiperestáticas por el método de las rotaciones.

II Momentos de clase

Momentos de clase: A continuación, se explican los momentos de clase desarrolladas por el profesor, las clases tienen una estructura libre, donde el profesor presenta los contenidos a estudiar, por la característica de la unidad de observación, la cual consiste en la solución de estructuras hiperestáticas, a través de diversos métodos, el profesor presenta

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

momentos de clase divididos en las condiciones y restricciones del método. Así como su aplicabilidad a algunos ejemplos de estructuras y observaciones que se deben considerar para aplicación del método, la explicación del método y ejemplo de solución a través de la modelización matemática de la estructura.

Momento 1: Condiciones y restricciones del método así como su aplicabilidad

En este momento describe las consideraciones que se deben tomar en cuenta para poder aplicar el método, además, de establecer qué tipo de estructuras pueden ser resueltas por el método. Justifica el método desde un punto de vista de la exactitud y lo coloca como base para poder entender métodos como el de las rigideces que sirven para resolver la estructura por métodos matriciales adhoc a ser trabajados con herramientas computacionales. El profesor menciona que, al aplicar el método de las rotaciones, se consideran únicamente las deformaciones debidas a flexión, despreciándose el resto de las deformaciones, por lo que es aplicable a estructuras tipo viga y marcos.

Las hipótesis que sobre las cuales se basa la aplicación del método son las siguientes:

-  Los elementos poseen sección constante entre los apoyos o nudos
-  Los nudos pueden rotar y desplazarse, pero los ángulos de los elementos permanecen constantes.

Momento 2: El profesor presenta las diversas condiciones a las que podrían estar sujetas las estructuras a las que aplica el método

Ejemplifica el tipo de incógnitas que estarán presentes en el modelo matemático que servirá de base para resolver la estructura, siendo estas variables de carácter cinemática (desplazamientos rotacionales θ y traslacionales Δ), los cuales dependen de las condiciones de carga de la estructura y de la geometría de la misma.

Las variables cinemáticas consisten en los posibles desplazamientos que pueda tener la estructura ya sea de forma rotacional donde θ es el ángulo de desplazamiento y queda expresado en radianes y Δ es el desplazamiento traslacional, ambas variables cinemáticas dependen de la naturaleza geométrica de la estructura que se requiera modelizar y de la deformada elástica del elemento estructural.

A continuación, se presenta un diagrama mostrado por el profesor, donde se representan ambos tipos de desplazamiento, para un determinado elemento estructural. En la (Figura 4.44) se muestra para el caso de un marco traslacional y para la (Figura 4.45) se muestra para el caso de un elemento de viga.

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

Es importante mencionar que para el caso del marco traslacional y como se mencionó anteriormente el desplazamiento traslacional es una incógnita a resolver, pero para el caso del elemento viga, el desplazamiento traslacional Δ es un dato del problema, que depende del valor del asentamiento diferencial del terreno en el cual esté dispuesta la estructura y estaría implícitamente representado dentro de la siguiente relación $\varphi = \frac{\Delta}{L}$.

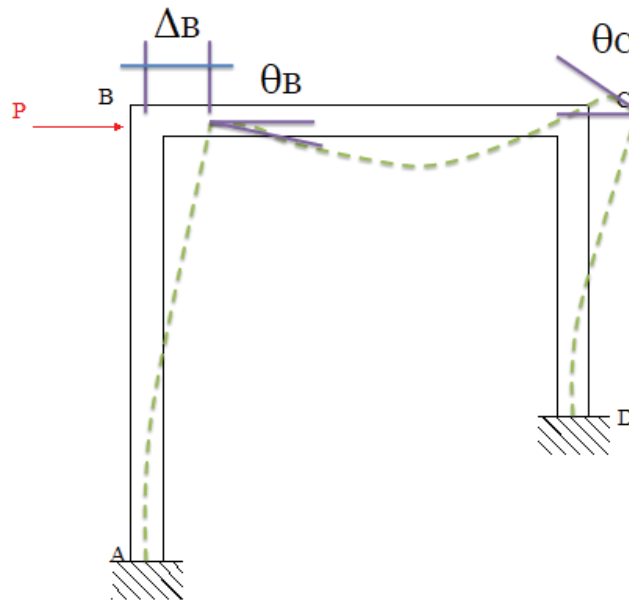


Figura 4.44 Marco traslacional

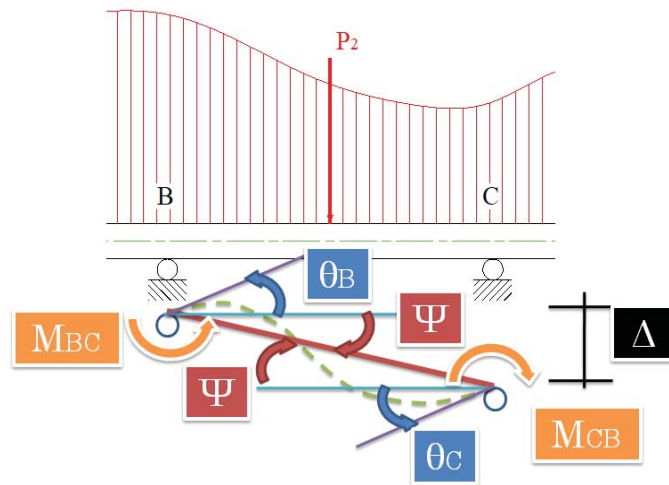


Figura 4.45 Elemento de viga sometido a desplazamientos en rotación como incógnita y traslación como dato del problema

Momento 3. El profesor explica el método a utilizar para resolver la estructura hiperestática, en esta ocasión por el método de las rotaciones.

**CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA**

El método de solución de la estructura que servirá de modelo matemático es el método de las rotaciones, para ello el profesor menciona que la demostración del método general que servirá de base para la posterior construcción del modelo matemático (sistemas de ecuaciones lineales), es a base de procedimientos analítico, presentando por ejemplo para un elemento cuyos nudos estén representados por las letras B y C, de la siguiente manera:

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ij}$$
$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (2\theta_j + \theta_i) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ji}$$

 Significado del modelo matemático anterior desde el ámbito de la ingeniería

El significado ingenieril para cada uno de los términos involucrados se describe a continuación:

M_{ij} , M_{ji} es el momento de empotramiento aplicado en el nudo i y j respectivamente. Los momentos de empotramiento corresponden a los momentos que se produciría sobre una viga de igual luz y rigidez que la del elemento analizado, sometido a las mismas cargas externas, pero que tiene sus elementos empotrados.

$\frac{2EI}{L}$, es un término que depende de las características geométricas del elemento estructural.

$2\theta_i + \theta_j$, representan los desplazamientos angulares de los nudos que componen el elemento estructural.

$\frac{6EI}{L} \varphi$, (Donde $\varphi = \frac{\Delta}{L}$, siendo Δ el desplazamiento relativo entre los nudos i e j) es un término que depende de las características geométricas del elemento estructural y de acuerdo al tipo de estructura, depende de la curva de la deformada elástica del elemento y en el caso de vigas ese parámetro se determina de acuerdo a la información proporcionada por el geotecnista a partir de los asentamientos diferenciales del terreno donde esté ubicada la estructura.

M^o_{ji} , representa los momentos de empotramiento perfecto de los nudos del elemento, dichos momentos se pueden determinar por métodos analíticos o por tablas de formulas para su cálculo, las formulas de las tablas dependen de las condiciones de carga del elemento estructural. Para el caso de que el elemento estructural no tenga cargas aplicadas, los momentos de empotramiento perfecto se consideran nulos.

Momento 4: Un ejemplo de modelización matemática en estructuras hiperestáticas

Una vez representado el modelo matemático anterior, se procede a realizar sumatoria de momentos en cada uno de los nudos de la estructura que se esté modelizando, en este paso, las incógnitas del sistema de ecuaciones formado, son, a lo más, las incógnitas cinemáticas del problema, θ_i , θ_j y Δ , con la solución de dicho sistema de ecuaciones se resuelve para las incógnitas anteriores y se procede a calcular los momentos reales de la estructura para por último determinar las reacciones faltantes y validar los resultados a través de aplicar condiciones de equilibrio al sistema global.

En una clase posterior (clase 4 se resuelve la siguiente estructura)

El problema explicado por el profesor es el siguiente:

Aplicando el método de las rotaciones calcular la siguiente viga (Figura 4.46). Considérese EI constante.

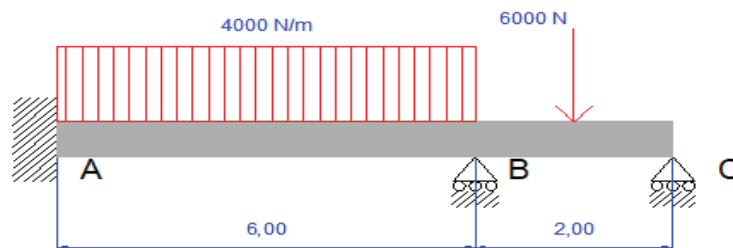


Figura 4.46 Viga hiperestática

Primeramente, el profesor analiza la naturaleza y geometría del problema para determinar la condición de hiperestaticidad de la viga, una parte importante es que para que el problema pueda resolverse, se debe garantizar a priori el equilibrio del sistema, y para ello se necesita calcular el valor de las reacciones y momentos en los nudos de la estructura.

Debido a que, el problema se corresponderá con una estructura hiperestática, de entrada, el número de ecuaciones que proporciona un análisis puramente estático será menor al número de incógnitas del sistema, y el profesor, por tanto, menciona que para obtener los valores concretos y numéricos de las reacciones y momentos, se debe tener al menos un número igual de ecuaciones que de incógnitas.

Para lograr que el sistema de ecuaciones formado por el modelo matemático cumpla con la condición anterior, se recurre a considerar variables cinemáticas, mismas que proporcionaran la capacidad de añadir al sistema de ecuaciones las ecuaciones faltantes para su solución.

Solución de la estructura:

**CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA**

Se determina que el grado de indeterminación cinemática es dos, debido a que el sistema puede presentar desplazamiento debido a la rotación de los nudos B y C pero no del nudo A debido a que presenta que se encuentra empotrado. En esta ocasión no se presenta desplazamiento debido a la rotación de la deformada elástica dado que no se consideran los asentamientos diferenciales del terreno.

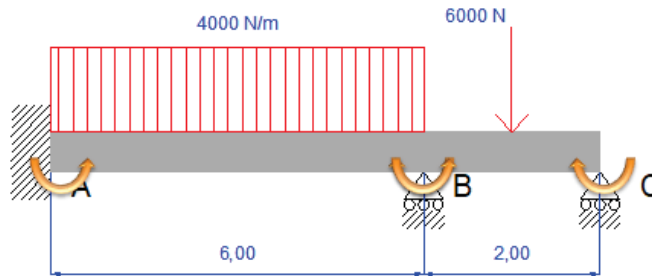


Figura 4.47 Diagrama de Cuerpo Libre de la viga

Una vez analizada la naturaleza geométrica y física de la estructura (Figura 4.47), el profesor procede a realizar los cálculos de los momentos de empotramiento perfecto para cada uno de los nudos, para ello realiza una discretización de la estructura (inicialmente continua) y realiza los cálculos de dichos empotramientos para cada elemento discretizado. Cabe señalar que, el estudiante puede utilizar tablas proporcionadas en diversos recursos, como las proporcionadas por el profesor o las que se encuentran en las contraportadas de libros de texto de la asignatura.

Consideramos que para que el estudiante tenga una total comprensión de las fórmulas utilizadas en dichos calculo, este debe recordar o estudiar los métodos vistos para su solución de manera analítica. Una noción clave correspondiente a la matemática es la noción de función, derivada de una función e integral de una función.

Los momentos de empotramiento resultante se presentan a continuación

🚦 Para el elemento A-B

$$M_{AB}^o = \frac{WL^2}{12} = 12\,000 \text{ Nw.m}$$

$$M_{BA}^o = -\frac{WL^2}{12} = -12\,000 \text{ Nw.m}$$

🚦 Para el elemento B-C

$$M_{BC}^o = \frac{PL}{8} = 15\,000 \text{ Nw.m}$$

$$M_{CB}^o = -\frac{PL}{8} = -15\,000 \text{ Nw.m}$$

**CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA**

Posteriormente el profesor plantea las ecuaciones basadas en el modelo matemático del método de las rotaciones (al final de esta sección presentamos su demostración)

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (2\theta_j + \theta_i) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ji}$$

Aquí es importante regresar al contexto inicial, donde se determinó que las variables cinemáticas se corresponden con los desplazamientos rotacionales debido a que no se consideran asentamientos diferenciales, por lo que del modelo anterior se elimina el parámetro φ . Por tanto el sistema se reduce a las siguientes ecuaciones genéricas para un elemento discretizado de la estructura

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L_{ij}} (2\theta_i + \theta_j) + M^o_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L_{ji}} (2\theta_j + \theta_i) + M^o_{ji}$$

Tomando en cuenta el modelo matemático se procede a determinar las ecuaciones que representan a cada elemento de la estructura

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L_{AB}} (2\theta_A + \theta_B) + M^o_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_{BA}} (2\theta_B + \theta_A) + M^o_{BA}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}} (2\theta_B + \theta_C) + M^o_{BC}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_{CB}} (2\theta_C + \theta_B) + M^o_{CB}$$

Recordando que el nudo A es empotrado y que la rotación es por tanto nula, se procede a plantear las ecuaciones de equilibrio para los nudos B y C

🚧 Para el nudo B

$$0,167\theta_A + 1,33\theta_B + 0,5\theta_C = \frac{5250}{EI}$$

🚧 Para el nudo C

$$2\theta_C + \theta_B = \frac{L_{CB}}{2EI} (M_C - M^o_{CB}) = \frac{1500}{EI}$$

Al ser $\theta_A = 0$ (Nudo empotrado), resulta el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Es importante mencionar que las incógnitas que se van a calcular al resolver el sistema siguiente, no son las incógnitas

**CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA**

de interés para la solución final del problema, sino que son las incógnitas cinemáticas que posteriormente van a auxiliar en la solución del problema al ser sustituidas en el modelo matemático inicial

$$1,33\theta_B + 0,5\theta_C = \frac{5250}{EI}$$

$$\theta_B + 2\theta_C = \frac{1500}{EI}$$

Resolviendo el sistema para θ_B y θ_C

$$\theta_B = \frac{4500}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{1500}{EI}$$

Recordamos que EI no es incógnita del problema, sino dato, pero por ser valores extremadamente grandes comparados con el numerador, se recomienda dejar expresados los desplazamientos en términos de EI

Sustituyendo en el modelo matemático inicial, los valores calculados para las variables cinemáticas y los momentos de empotramiento, se tienen los siguientes momentos para cada nudo correspondiente al cada elemento discretizado.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L_{AB}} (2\theta_A + \theta_B) + M^o_{AB} = \frac{2EI}{6} \left(2(0) + \frac{4500}{EI} \right) + 12\,000 = 13\,500 \text{ Nw.m}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_{BA}} (2\theta_B + \theta_A) + M^o_{BA} = \frac{2EI}{6} \left(2\frac{4500}{EI} + (0) \right) + (-12\,000) = -9\,000 \text{ Nw.m}$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}} (2\theta_B + \theta_C) + M^o_{BC} = \frac{2EI}{2} \left(2\frac{4500}{EI} + \left(-\frac{1500}{EI} \right) \right) + 15\,000 = 9\,000 \text{ Nw.m}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_{CB}} (2\theta_C + \theta_B) + M^o_{CB} = \frac{2EI}{2} \left(2\left(-\frac{1500}{EI} \right) + \frac{4500}{EI} \right) + (-15\,000) = 0 \text{ Nw.m}$$

Posteriormente el profesor comenta que una vez calculados los momentos en los extremos es posible calcular las reacciones en los apoyos, presentando el siguiente esquema (Figura 4.48)

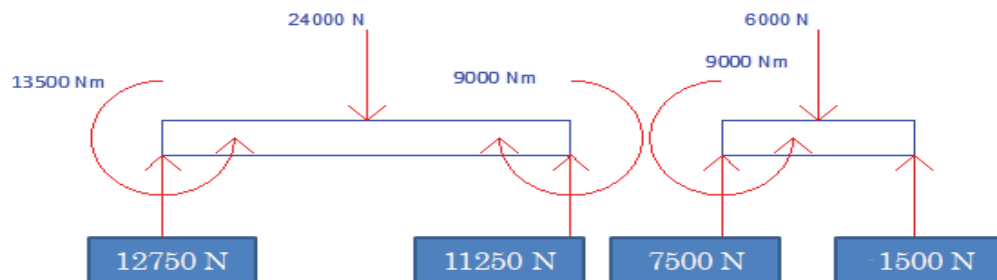


Figura 4.48 Esquema de momentos en los extremos

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

En este momento el profesor menciona que se puede realizar una primera validación de los resultados, considerando que cada elemento debe estar en equilibrio estático, es decir que se cumplan las siguientes condiciones de la estática

$$\sum F_y = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_y = 0$$

Posteriormente, el profesor presenta los diagramas finales para representar de manera gráfica la solución del problema, a través de los diagramas de esfuerzo cortante (Figura 4.49) y momentos flectores (Figura 4.50) (De nuevo y así como mencionamos en el cálculo de los momentos de empotramiento perfecto, es importante que el estudiante cuente con las nociones matemáticas de derivada e integral para que comprenda la justificación de los diagramas que el profesor presenta).

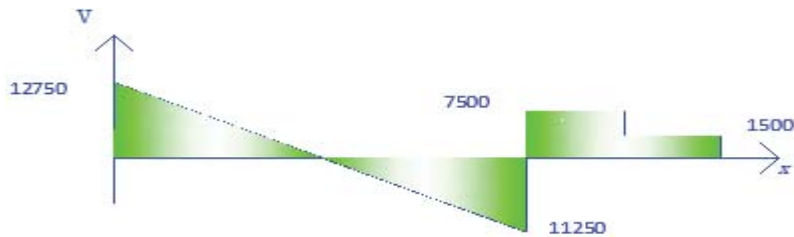


Figura 4.49 Diagrama de cortante

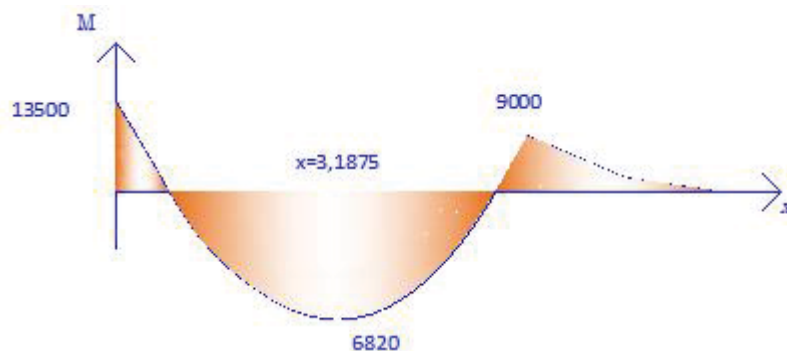


Figura 4.50 Diagrama de momento

Significado del modelo matemático utilizado en el método de las rotaciones

Debido a la importancia del método de las rotaciones para el sustento teórico de métodos matriciales para el análisis estructural, como lo es el método de las rigideces, presentamos la deducción del modelo matemático asociado.

Para la demostración del modelo matemático resultante se realizó una revisión bibliográfica en un libro y en unos apuntes elaborados para la asignatura de análisis estructural.

Deducción de las ecuaciones que forman parte del modelo matemático para el método de las rotaciones.

Tomando en cuenta solamente las deformaciones por flexión los Momentos totales en el elemento quedan representados por la siguiente igualdad.

$$M_{\text{totales}} = M_{\text{empotramiento}} + M_{\text{desplazamiento}}$$

Gráficamente la igualdad anterior queda representada de la siguiente manera (Figura 4.51)

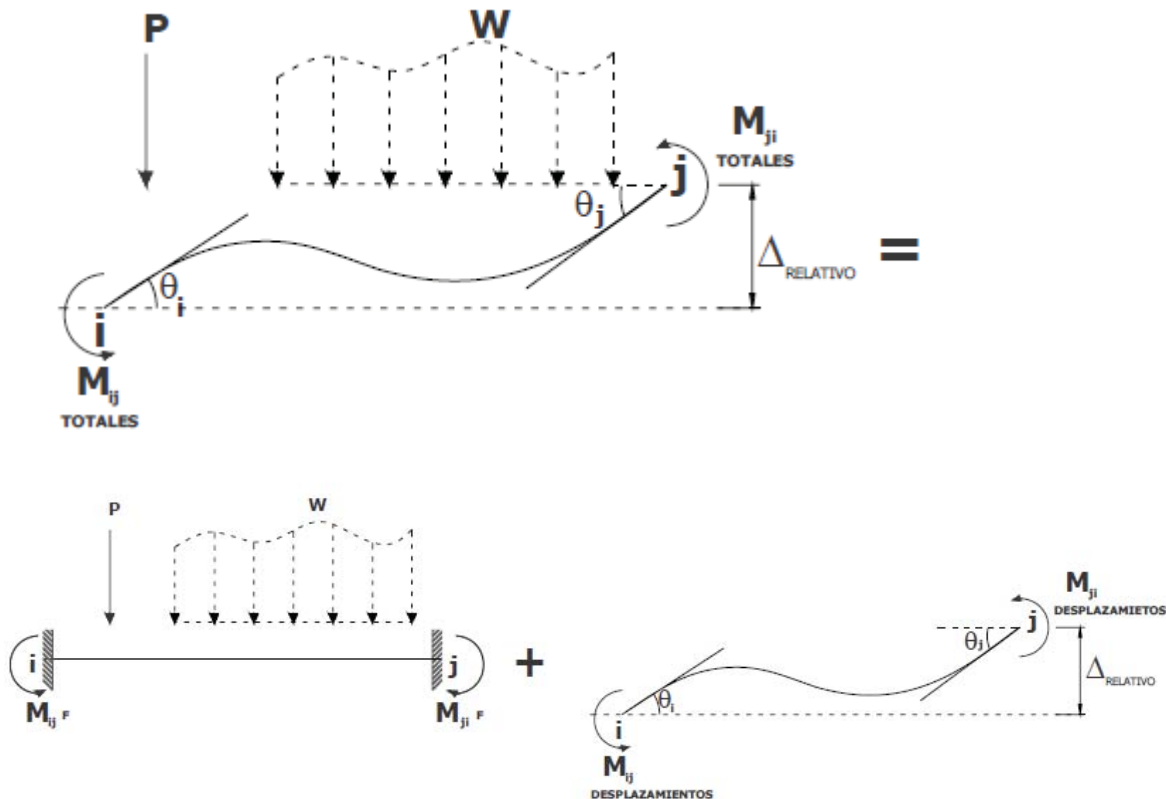


Figura 4.51 Diagramas de los momentos totales generados en los extremos del elemento

(Escobar, 2007, p.37)

McCormac (2012) presenta la siguiente deducción matemática

Considerando que, para una viga particular, el cambio de pendiente es igual a la fuerza cortante en el extremo de la viga cuando está cargada con el diagrama M/EI

Tomando momentos con respecto al extremo derecho de la viga, hacemos $\sum M_j = 0$, se tiene:

$$\theta_i L - \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ij}}{EI} \right) L \left(\frac{2}{3} L \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ji}}{EI} \right) L \left(\frac{1}{3} L \right) = 0$$

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

Despejando la rotación θ_A

$$\theta_i = \frac{L}{6EI} (2M_{ij} - M_{ji})$$

Ahora tomando momentos con respecto al extremo izquierdo de la viga, hacemos $\sum M_j = 0$, se tiene:

$$\theta_j L - \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ji}}{EI} \right) L \left(\frac{2}{3} L \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{M_{ij}}{EI} \right) L \left(\frac{1}{3} L \right) = 0$$

Despejando la rotación θ_j

$$\theta_j = \frac{L}{6EI} (2M_{ij} - M_{ji})$$

Si uno de los apoyos se asienta o deflexiona una cantidad Δ , los ángulos θ_i y θ_j cambiarían una cantidad $\varphi = \frac{\Delta}{L}$, por lo tanto las ecuaciones quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\theta_i = \frac{L}{6EI} (2M_{ij} - M_{ji}) + \varphi$$

$$\theta_j = \frac{L}{6EI} (2M_{ij} - M_{ji}) + \varphi$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado, se tienen los valores para los momentos M_{ij} y M_{ji}

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L} (2\theta_j + \theta_i) - \frac{6EI}{L} \varphi + M^o_{ji}$$

Del problema anterior, podemos observar basados en la clase del profesor, en la asignatura se promueve el trabajo con modelos matemáticos. De manera general, se evidencia cómo el proceso de modelización ocurre. Para la etapa de comprensión de la tarea, el profesor muestra la estructura a modelar: además, aquí hay conocimientos que se deben poner en juego que vienen del referencial de la ingeniería, como es el tipo de estructura que se está trabajando y la verificación del cumplimiento de las hipótesis de trabajo, es decir, si es una estructura estáticamente indeterminada. Por tanto se observó actividad en la génesis discursiva.

Posteriormente, se observa que el profesor indica la naturaleza de las incógnitas, y al ser una estructura indeterminada, las ecuaciones de equilibrio que proporciona la estática no son suficientes para la solución del problema. Por tanto, se introduce el estudio de variables cinemáticas como son los desplazamientos traslacionales y rotacionales. En esta fase, podemos observar que el uso del conocimiento extra matemático es

*CAPÍTULO 4 (1). APROXIMACIÓN AL ETM DE REFERENCIA EN
MODELIZACIÓN Y UN PRIMER ACERCAMIENTO AL CONTEXTO DE
INGENIERÍA*

fundamental para el proceso de modelización. En una siguiente fase, el subproceso de matematización es iniciado, se observa que el profesor construye un diagrama de cuerpo libre de la estructura, y además, diagramas asociados a la naturaleza de los desplazamientos. Se observa la activación del plano instrumental-discursivo, esto al utilizar el método de las rotaciones como un artefacto que permitirá construir el modelo algebraico compuesto por un sistema de ecuaciones lineales y también porque desde las ecuaciones de equilibrio justifica que se trata de una estructura estáticamente indeterminada.

En el proceso de la formación y trabajo con el modelo matemático, se observa la construcción del sistema de ecuaciones lineales formado a partir del modelo matemático proporcionado por el método de las rotaciones. Aquí, es importante señalar que se promueve el uso de tablas que son proporcionadas en libros de la especialidad, lo cual contribuye a invisibilizar otros posibles objetos matemáticos. El proceso de validación se produce de manera interna, al utilizar diagramas construidos como respuesta final al problema, a partir de ahí se puede verificar el equilibrio para la estructura en general o para la sección que se requiera. Se observa actividad en el plano semiótico-instrumental, esto porque se utilizan artefactos mediados por tablas que permiten construir el modelo matemático proporcionado por el método de las rotaciones, pero además, se identifican los signos que permitirán bien comprender el uso, construcción y solución del modelo estructural.

De este primer subcapítulo del capítulo 4, se seleccionó el caso con el que se iba a trabajar en el resto de la investigación. De entrevistas a profesores y revisión de planes y programas de estudio, pudimos identificar que la modelización era solicitada por el currículo, y además, trabajada en el curso. Del caso que seleccionamos, pudimos realizar un estudio piloto, que nos sirvió como una primera aproximación a la modelización en ingeniería, donde se evidenciaron modelos y el trabajo con modelos para una sección del curso de análisis estructural. Además, y de una manera muy incipiente aún, pudimos identificar ciertos elementos que iban a poder ser caracterizados bajo la teoría de los ETM, como hemos visto en los párrafos anteriores.

Capítulo 4(2)
**Conceptos de la ingeniería y de la
matemática presentes en los modelos
estructurales.**

Capítulo 4 (2). Conceptos de la ingeniería y de la matemática presentes en los modelos estructurales.

Se muestran las nociones presentes en los modelos que emergieron en los problemas del curso que se observó, específicamente nociones relacionadas con el análisis estructural, la mecánica de materiales y matemáticas (cálculo). Las nociones se muestran considerando libros correspondientes a las disciplinas mencionadas. Cabe mencionar, que todo el contenido del presente capítulo es una fiel transcripción del contenido que se ha desarrollado y tomado de los recursos bibliográficos mencionados párrafos abajo.

El área de especialidad a la que pertenece el curso observado (análisis estructural) es de especialidad en ingeniería estructural. El curso de análisis estructural se encuentra ubicado en el sexto semestre de la malla curricular para ingeniería civil, en total consta de 60 horas de clase cátedra. La asignatura de análisis estructural pertenece al eje de formación profesional, la asignatura que le antecede en cuanto al eje de ciencias de la ingeniería es Mecánica de Sólidos y de prerrequisito. En cuanto al eje de Ciencias Básicas se encuentran las asignaturas de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En este capítulo se estudian los conceptos y nociones que se relacionan con el antecedente de la asignatura análisis estructural, con el análisis estructural mismo y con la matemática presente en los modelos matemáticos estudiados en el curso observado. Lo anterior se realiza a través de analizar los contenidos de interés en cuatro libros, tres del área de ingeniería estructural y uno de matemática (Cálculo).

Cabe señalar que el estudio del ETM de referencia es mucho más que un listado de definiciones y propiedades, que son más bien parte del referencial teórico. Hemos dejado de lado el tratamiento de este, sus signos y registros para concentrarnos en los objetos emergentes en la resolución de los problemas planteados en el ETM idóneo por necesidad para comprender los objetos en cuestión.

Una parte consagrada a los aspectos epistemológicos de las funciones se desarrolló en el capítulo 1, y por ende, este capítulo es una parte de lo que configura el ETM de referencia.

Se trabaja en dos aspectos:

1. Sobre el contenido disciplinar en ingeniería para el análisis de estructuras estáticamente determinadas

Para la formulación de este capítulo se seleccionaron 3 libros. Un primer libro es el de Hibbeler denominado Análisis Estructural, el cual es parte de la bibliografía recomendada en el programa de curso de la asignatura de

análisis estructural. Un segundo libro es el de Kassaimali. Además, se incluyen contenidos que son fundamento del Análisis Estructural en la asignatura de Mecánica de Sólidos, la cual es una asignatura antecedente, asignatura para la cual también se selecciona un tercer libro de Hibbeler denominado Mecánica de Materiales. Para ello, se discuten nociones elementales como fuerza, estructura, momento, esfuerzos cortante, normal y axial, diagramas de esfuerzo axial, cortante y momento. Además, se presenta una hipótesis fundamental para el análisis de estructuras, la cual está relacionada con la linealidad constitutiva del material desde la ley de elasticidad lineal de Hooke. En la discusión se hace énfasis en los registros figúrales y gráficos, por ser este lenguaje parte importante del trabajo del ingeniero.

2. Sobre el contenido matemático presente en los modelos utilizados para resolver los problemas del análisis estructural

Durante la investigación se ha observado que el contenido matemático de los modelos utilizados en la solución de los problemas del análisis estructural, son indisolubles, pues el modelo estudiado, en todo momento dialoga con cuestiones de la matemática pero también del análisis estructural. No obstante, en esta sección y con el fin de encaminar el trabajo hacía realizar una mirada con afán de conexión entre disciplinas de la matemática y de la especialidad, se muestra y reflexiona sobre el contenido matemático presente en los modelos del análisis estructural.

Ubicamos el contenido matemático de los modelos en las asignaturas de ciencias básicas correspondientes a Cálculo I y Cálculo II, esto en el marco del currículo de la universidad en la cual se está realizando la investigación. Para ello, se ha seleccionado el libro de Spivak (Cálculo Infinitesimal), el cual maneja los conceptos de cálculo desde un nivel formal. Se presentan los contenidos matemáticos desde la óptica de potenciar el registro gráfico y su posible vinculación con el trabajo de modelización, interés de nuestro estudio.

4.1 Sobre el contenido disciplinar en ingeniería para el análisis de estructuras estáticamente determinadas.

4.1.1 Conceptos de la Mecánica de Materiales

Los conceptos que se escriben a continuación son relacionados con la Mecánica de Materiales, la cual es una ciencia sobre la que se fundamenta fuertemente el análisis estructural. Los conceptos que interesan para aportar a la comprensión del análisis estructural y que posteriormente analizamos en las sesiones de clase observadas se pueden clasificar como sigue:

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

- Nociones como esfuerzo y deformación, las cuales son parte de la hipótesis de trabajo basal del análisis estructural, ya que sirve para caracterizar si un material tiene un comportamiento elástico lineal (hipótesis bajo la cual se trabaja en el curso observado, es decir, análisis lineal de estructuras).
- Nociones como fuerza axial, cortante y momento flector, las cuales son parte de las fuerzas externas o esfuerzos internos (al considerar el área de la sección transversal) de un elemento estructural. Y servirá para caracterizar los estados de esfuerzo y deformación en la estructura, elementos básicos para una asignatura subsiguiente al análisis estructural, que servirá para el diseño de elementos de acero y concreto.
- Las relaciones diferenciales entre la fuerza actuante, la fuerza cortante y el momento flector y la deflexión de elementos estructurales.

El libro del cual se escribe lo anterior es el libro de Mecánica de Materiales de (Hibbeler, 1998)

Comenzamos con el contenido del capítulo 1. Esfuerzo, donde se retoman conceptos y nociones de interés para el análisis estructural.

Primero se define el objeto de estudio de la mecánica de materiales, a través de implicar las fuerzas externas y los esfuerzos internos para un cuerpo que se deforma.

La mecánica de materiales es la rama de la mecánica que estudia las relaciones entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo deformable y la intensidad de las fuerzas internas que actúan dentro del cuerpo. Esta disciplina de estudio implica también calcular las deformaciones del cuerpo y proveer un estudio de la estabilidad del mismo cuando está sometido a fuerzas externas.

Posteriormente se describe como se caracterizan las cargas externas sobre una estructura, de importancia para el análisis estructural, ya que ellas condicionan fuertemente el estado de los elementos estructurales.

Cargas externas: Un cuerpo puede estar sometido a diversos tipos de cargas externas; sin embargo, cualquiera de éstas puede clasificarse como fuerza de superficie o como fuerza de cuerpo.

Fuerzas de superficie. *Como su nombre lo indica, las **fuerzas de superficie** son causadas por el contacto directo de un cuerpo con la superficie de otro. En todos los casos, esas fuerzas están distribuidas sobre el área de contacto entre los cuerpos (Figura 4.52). En particular si esta área es pequeña en comparación con el área total del cuerpo, entonces la fuerza superficial puede idealizarse como una sola **fuerza concentrada**, que es aplicada a un punto sobre el cuerpo. Si la carga superficial es aplicada a lo largo de un*

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

área estrecha, la carga puede idealizarse como una carga **linealmente distribuida** $w(s)$. Aquí la fuerza se mide como si tuviese una intensidad de fuerza/longitud a lo largo del área y se representa gráficamente por una serie de flechas a lo largo de la línea s .

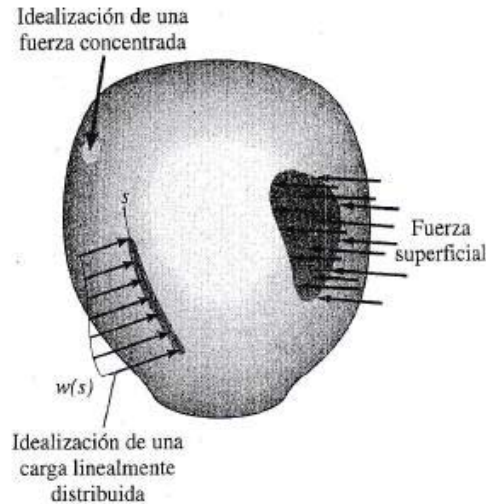


Figura 4.52 Idealización de fuerzas sobre un cuerpo (Hibbeler, 1997, p.3)

Del párrafo anterior se puede resaltar el uso del término “*idealizar*”, el cual es un verbo que representa una parte clave del proceso de modelización, debido a que cuando el profesor/estudiante necesita afrontar una situación en contexto (en este caso en contexto de ingeniería estructural), debe idealizar la situación para comprenderla mejor y proceder a modelar la estructura.

Además, se puede ver que aparece la relación funcional $w(s)$, a través de relacionar la carga linealmente distribuida sobre el cuerpo deformable en función de la longitud.

A continuación, se ejemplifica el caso de una viga (Figura 4.53) sometida a las fuerzas anteriormente definidas, el cual es un ejemplo que aparece constantemente, al ser este (la viga) un elemento estructural de edificaciones. Para ello se menciona que **la fuerza resultante F_R de $w(s)$ es equivalente al área bajo la curva de la carga distribuida, y esta resultante actúa a través del centroide C o centro geométrico de esta área.**

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

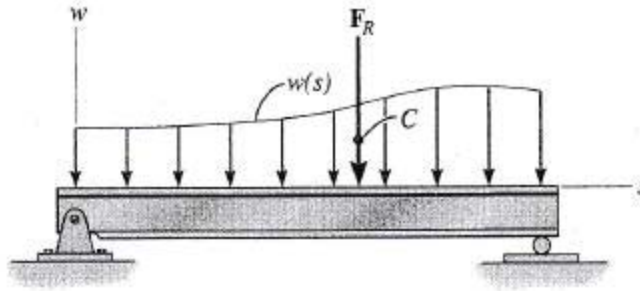


Figura 4.53 Viga genérica (Hibbeler, 1997, p. 3)

Fuerza de cuerpo. Una **fuerza de cuerpo** se desarrolla cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo sin contacto físico directo entre estos. En el caso de la gravitación, esta fuerza se llama el **peso** del cuerpo y actúa a través del centro de gravedad del mismo.

En análisis estructural en lo que corresponde a las reacciones externas (generadas por los apoyos sobre los cuales se fijan los elementos estructurales), se dice que estas originan fuerzas incógnita, y se resuelven a través de diversos métodos, dependiendo del tipo de estructura con la cual interactúe el apoyo.

Reacciones en los soportes. Las fuerzas de superficie que se desarrollan en los soportes o puntos de contacto entre cuerpos se llaman **reacciones**. En problemas bidimensionales, es decir, en cuerpos sometidos a sistemas de fuerzas coplanares, los soportes más comúnmente encontrados se muestran a continuación (Figura 4.54).

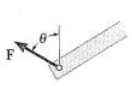
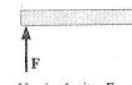
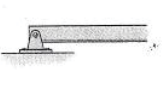
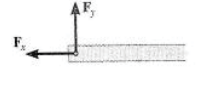
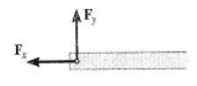
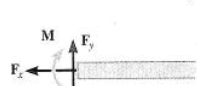
Tipo de conexión	Reacción
 Cable	 Una incógnita: F
 Rodillo	 Una incógnita: F
 Pasador externo	 Dos incógnitas: F_x, F_y
 Pasador interno	 Dos incógnitas: F_x, F_y
 Empotramiento	 Tres incógnitas: F_x, F_y, M

Figura 4.54 Tipos de apoyos (Hibbeler, 1997, p. 4)

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

Para la figura anterior, menciona que, si el soporte impide la traslación en una dirección dada, entonces una fuerza debe desarrollarse sobre el miembro en esa dirección. Igualmente, si se impide una rotación, debe ejercerse un momento sobre el miembro. Por ejemplo, para el apoyo tipo rodillo, menciona que el soporte de rodillo sólo puede impedir la traslación en la dirección del contacto, perpendicular o normal a la superficie. Por consiguiente, el rodillo ejerce una fuerza normal F sobre el miembro en el punto de contacto. Como el miembro puede girar libremente respecto al rodillo, no puede desarrollarse un momento sobre el miembro.

Otro aspecto relacionado con el análisis estructural son las ecuaciones de equilibrio, que servirán para determinar el equilibrio estático de la estructura. Ya que en el análisis lineal de estructuras se debe asegurar estabilidad de la edificación y de cualquier estructura en general.

Ecuaciones de equilibrio. El equilibrio de un miembro requiere un balance de fuerzas para impedir que el cuerpo se traslade o tenga movimiento acelerado a lo largo de una trayectoria recta o curva, y un balance de momentos para impedir que el cuerpo gire. Estas condiciones pueden expresarse matemáticamente con las dos ecuaciones vectoriales:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{M}_o &= 0\end{aligned}$$

Aquí, $\sum \vec{F}$ representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y $\sum \vec{M}_o$ es la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a cualquier punto O sobre la fuerza o cuerpo. Si se fija un sistema de coordenado x, y, z con el origen en el punto O , los vectores fuerza y momento pueden resolverse en componentes a lo largo de los ejes coordenados y las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma escalar como seis ecuaciones, que son:

$$\begin{array}{ccc}\sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0\end{array}$$

A continuación, escribe sobre las ecuaciones que son utilizadas para determinar el equilibrio estático de la estructura en cuestión, con base en que en el curso de análisis se trabaja en el plano $x - y$, mencionando que, a menudo *en la **práctica ingenieril** la carga sobre un cuerpo puede representarse como un sistema de fuerzas coplanares, si es éste el caso y las fuerzas se encuentran en el plano $x - y$* , entonces las condiciones para el equilibrio del cuerpo pueden especificarse por medio de sólo tres ecuaciones escalares de equilibrio; éstas son:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

En este caso, si el punto O es el origen de coordenadas, entonces los momentos estarán siempre dirigidos a lo largo del eje z , que es perpendicular al plano que contiene las fuerzas.

Posteriormente, se hace mención al D.C.L. (Diagrama de cuerpo libre), utilizado cuando se comienza a idealizar el modelo estructural (y en general el D.C.L. es planteado cuando se resuelve cualquier problema físico) cuando se plantea resolver una estructura, colocando en él, las fuerzas idealizadas y las reacciones incógnita de acuerdo al tipo de apoyo al que esté sujeto el o los elementos estructurales, mencionando que: la correcta aplicación de las ecuaciones de equilibrio requiere la especificación completa de todas las fuerzas conocidas y desconocidas que actúan sobre el cuerpo. **La mejor manera de tomar en cuenta esas fuerzas es dibujando el diagrama de cuerpo libre del cuerpo.**

Lo escrito anteriormente da cuenta de lo visto en clase sobre fuerzas externas, a continuación, describe los esfuerzos internos presentes en un cuerpo, para nuestro caso, tomamos en cuenta la descripción de los esfuerzos internos en el plano $x - y$.

Fuerzas internas resultantes. Una de las aplicaciones más importantes de la estática en el análisis de problemas que implican a la mecánica de materiales es poder determinar la fuerza y el momento resultantes que actúan dentro de un cuerpo y que son necesarias para mantener unido al cuerpo cuando éste está sometido a cargas externas. Para obtener las cargas internas sobre un cuerpo, éste debe seccionarse (Figura 4.55). Si un cuerpo es largo y delgado, como en el caso de una barra o una viga, la sección por considerarse se toma generalmente perpendicular al eje longitudinal del miembro. A esta sección se le llama **sección transversal**. Para el caso de lo estudiado en análisis estructural, nos interesan los siguientes tres tipos de fuerzas internas:

N Se llama **fuerza normal**, ya que actúa perpendicularmente al área. Esta fuerza se desarrolla siempre que las cargas externas tienden a empujar o jalar sobre los dos segmentos del cuerpo.

V Se llama **fuerza cortante**. La fuerza cortante reside en el plano del área y se desarrolla cuando las cargas externas tienden a ocasionar que los dos segmentos del cuerpo resbalen uno sobre el otro.

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

M se llama momento flexionante. El momento flexionante es causado por las cargas externas que tienden a flexionar el cuerpo respecto a un eje que se encuentra dentro del plano del área.

Para nuestro interés, al trabajar en el plano $x - y$, el cuerpo está sometido a un sistema de fuerzas coplanares, (Figura 4.55), entonces sólo componentes de fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante existirán en la sección, (Figura 4.55).

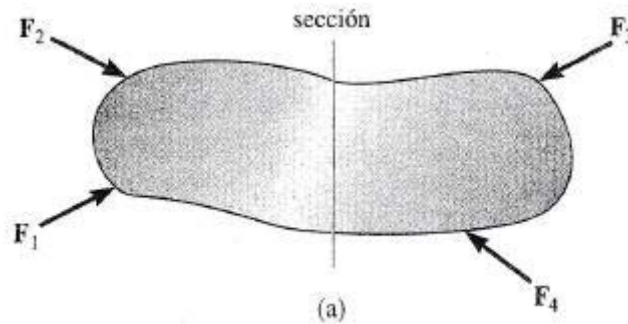


Figura 4.55 Sistema de fuerzas coplanares (Hibbeler, 1997, p. 8)

Advierta que esas cargas deben ser iguales en magnitud y opuestas en sentido sobre cada una de las partes seccionadas (tercera ley de Newton). Si usamos los ejes coordenados x, y, z , con origen en el punto O , como se muestra sobre el segmento izquierdo, entonces una solución directa para N puede obtenerse aplicando la ecuación $\sum F_x = 0$ y V puede obtenerse directamente aplicando $\sum F_y = 0$. Finalmente, el momento flexionante M_O puede determinarse directamente sumando momentos respecto al punto O (punto por donde pasa el eje z) $\sum M_O = 0$, para eliminar los momentos generados por las incógnitas N y V (Figura 4.56).

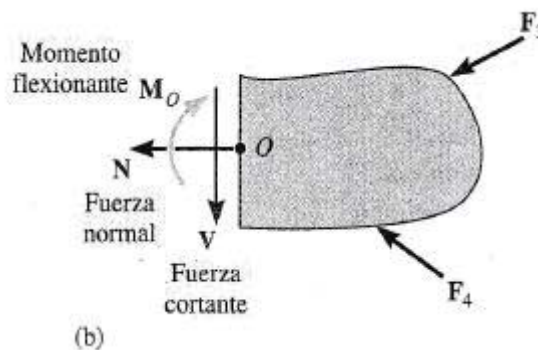


Figura 4.56 Cuerpo seccionado (Hibbeler, 1997, p. 8)

Con la finalidad de definir la ley de Hooke, utilizada en la hipótesis fundamental del análisis estructural, basado en un análisis elástico lineal para un material sometido a esfuerzo y deformación, se considera la definición de esfuerzo y desplazamiento descrito en el capítulo 2

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

(Deformaciones). Además, las deformaciones son un concepto clave para el análisis que realizamos en la observación de clases con respecto a la unidad cuatro (Deformaciones en estructuras).

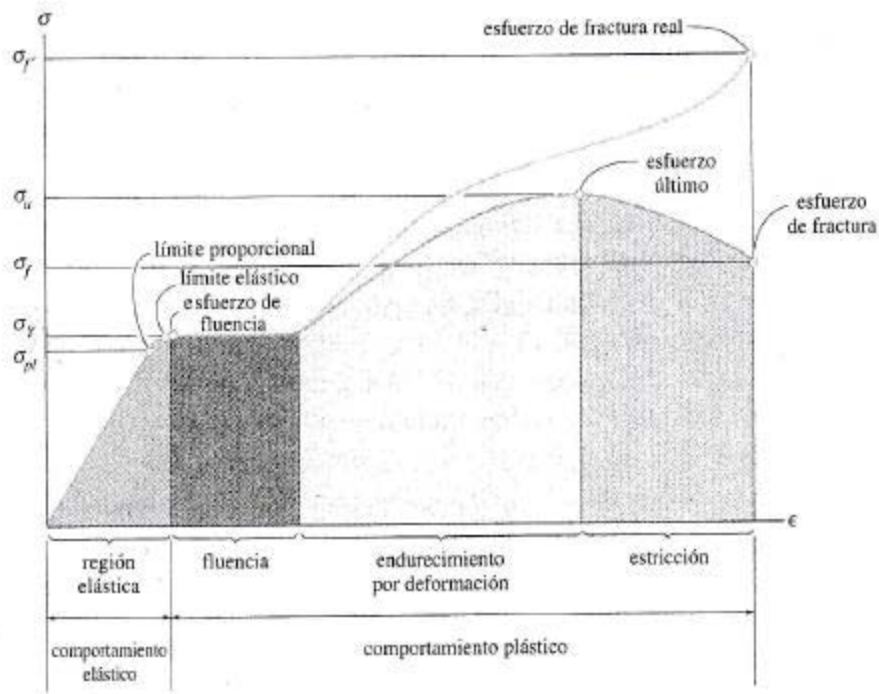
Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, ésta tiende a cambiar la forma y tamaño del cuerpo. A esos cambios se les llama deformación y ésta puede ser visible o prácticamente inadvertida.

Posteriormente, en el capítulo 3 del libro se estudia el diagrama esfuerzo (σ) - deformación unitaria (ϵ) para terminar con la ley de Hooke. Para esto, se menciona que la resistencia de un material depende de su capacidad para soportar una carga sin deformación excesiva o falla. Esta propiedad es inherente al material mismo y debe determinarse por experimentación.

Entre las pruebas más importantes están las de tensión y compresión (pruebas de ensayo de materiales que no es nuestra finalidad describir en este espacio). A partir de los datos de un ensayo de tensión o de compresión, es posible calcular varios valores del esfuerzo y la correspondiente deformación unitaria del espécimen y luego graficar los resultados. La curva resultante se llama diagrama esfuerzo - deformación unitaria.

El diagrama esfuerzo-deformación unitaria es muy importante en la ingeniería ya que proporciona los medios para obtener datos sobre la resistencia a tensión (o a compresión) de un material sin considerar el tamaño o la forma geométrica del material.

A continuación, se presenta un diagrama en el que se muestran las cuatro maneras diferentes en que el material se comporta (en este caso el diagrama corresponde al acero), dependiendo de la cantidad de deformación unitaria inducida en el material. Para efectos de nuestro interés describimos la fase 1, que sería la primera de cuatro maneras de comportamiento de un material sometido a esfuerzo-deformación, ya que en el curso de análisis estructural se trabajó bajo la hipótesis de que el material sometido a un estado de esfuerzo - deformación se comporta de la primera manera, es decir bajo un comportamiento lineal elástico representado por una línea recta como puede observarse en la figura siguiente, a partir de la cual, a continuación, explicamos este comportamiento.



Diagramas esfuerzo-deformación unitaria, convencional y real, para un material dúctil (acero) (no de escala)

Figura 4.57 Diagrama de esfuerzo-deformación (Hibbeler, 1997, p. 88)

Comportamiento elástico. Se dice que la muestra responde elásticamente si retorna a su longitud o forma originales cuando se retira la carga que actúa sobre ella. Este comportamiento elástico ocurre cuando las deformaciones unitarias en el modelo están dentro de la región ligeramente sombreada (Figura 4.57). Puede verse que la curva es en realidad una *línea recta* a través de toda esta región, así que el esfuerzo es *proporcional* a la deformación unitaria. En otras palabras, se dice que el material es linealmente elástico.

El límite superior del esfuerzo en esta relación lineal se llama límite proporcional. Si el esfuerzo excede un poco el límite proporcional, el material puede todavía responder elásticamente; sin embargo, la curva tiende a aplanarse causando un incremento mayor de la deformación unitaria con el correspondiente incremento en el esfuerzo. Esto continúa hasta que el esfuerzo llega al límite elástico. Para determinar este punto en cualquier espécimen, debemos aplicar, y luego retirar, una carga creciente hasta que se detecte una deformación permanente en el mismo. Sin embargo, en el acero rara vez se determina el límite elástico, puesto que está muy cerca del límite proporcional y, por lo tanto, su detección es bastante difícil.

El autor cierra la explicación del diagrama mencionando que la mayor parte del diseño en ingeniería se lleva a cabo dentro de la zona elástica (descrita en el párrafo anterior), ya que la distorsión del material en general no es

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

severa dentro de este intervalo. Siempre que el material sea rígido, como son la mayoría de los metales, la deformación unitaria hasta el límite de elasticidad permanecerá pequeña y el error en el uso de los valores nominales de σ (correspondiente a la *fuerza/área*) y de ϵ (correspondiente al cambio de la longitud final con respecto a la longitud inicial del elemento) será muy pequeño.

La ley de Hooke

Como se observó en la sección anterior, los diagramas de esfuerzo-deformación unitaria para la mayoría de los materiales de ingeniería exhiben una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria dentro de la región elástica. Por consiguiente, un aumento en el esfuerzo causa un aumento proporcional en la deformación unitaria. Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 en los resortes, y se conoce como ley de Hooke. Puede expresarse matemáticamente como:

$$\sigma = E\epsilon$$

Donde E representa la constante de proporcionalidad, que se llama módulo de elasticidad o módulo de Young, en honor de Thomas Young, quien publicó en 1807 un trabajo sobre el tema.

La ecuación anterior representa en realidad la ecuación de la porción inicial de la recta del diagrama de esfuerzo-deformación hasta el límite proporcional. Además, el módulo de elasticidad representa la pendiente de esta línea. Puesto que la deformación unitaria no tiene dimensiones, según la ecuación, E tendrá unidades de esfuerzo, tales como psi, ksi o pascales.

A continuación, se muestra (Figura 4.58) el límite proporcional para diferentes tipos de acero.

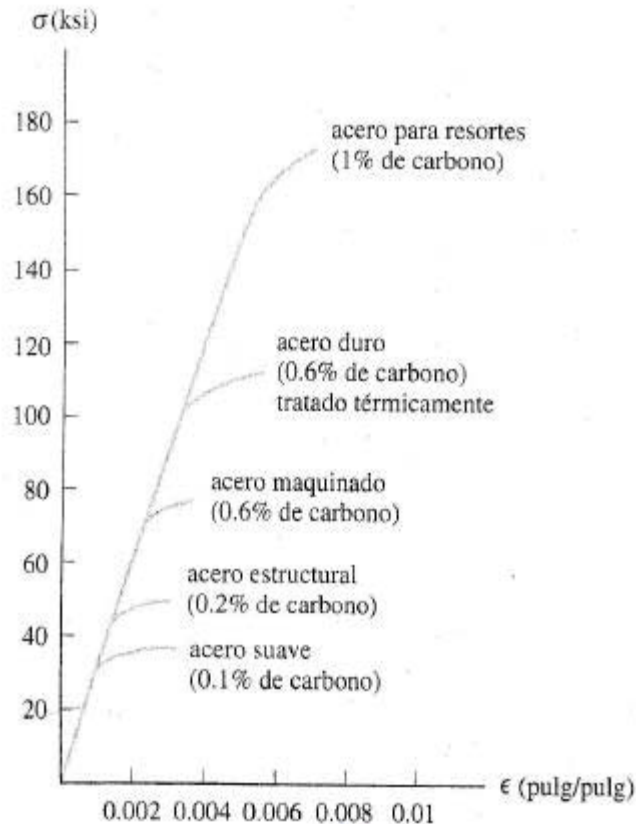


Figura 4.58 Esfuerzo-deformación para el acero (Hibbeler, 1997, p. 94)

Los valores comunes de E para los diversos materiales de ingeniería están a menudo tabulados en códigos de ingeniería y en libros de referencia.

4.1.2 Conceptos del Análisis Estructural

Consideramos importante comenzar con los antecedentes históricos de la ingeniería estructural, esto nos permitirá ubicar en el tiempo la aparición de los modelos identificados en el curso observado. Kassimali (2001), realiza la siguiente introducción histórica.

Desde los albores de la historia, la ingeniería estructural ha sido parte esencial del esfuerzo humano. Sin embargo, no fue sino hasta alrededor de la mitad del siglo XVII que los ingenieros comenzaron a aplicar el conocimiento de la mecánica (las matemáticas y la ciencia) en el diseño de estructuras.

Las primeras estructuras de ingeniería se diseñaron por tanteos y con la aplicación de reglas empíricas basadas en la experiencia pasada. Algunas de las magníficas estructuras de las eras antiguas, como las pirámides egipcias (alrededor del año 3000 a. C.), los templos griegos (500-200 a.C.), los coliseos y acueductos romanos (200 a.C. – 200 d. C.) y las catedrales

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

góticas (1000-1500 d.C.), todavía en pie, son en la actualidad testimonio del ingenio de sus constructores.

En general, Galileo Galilei (1564-1642) se considera como el iniciador de la teoría de estructuras. En su libro titulado *Dos ciencias nuevas*, que se publicó en 1638, Galileo analizó la falla de algunas estructuras simples, incluyendo las vigas en voladizo. Aun cuando las predicciones de Galileo de las resistencias de las vigas sólo fueron aproximadas, su trabajo puso el cimiento para los desarrollos futuros en la teoría de las estructuras y anunció una nueva era de la ingeniería estructural, en la cual los principios analíticos de la mecánica y la resistencia de los materiales tendrían una importante influencia en el diseño de las estructuras.

Después del trabajo precursor de Galileo, el conocimiento de la mecánica estructural avanzó a paso rápido en la segunda mitad del siglo XVII y hacia el XVIII. Entre los investigadores notables de ese periodo se encuentran Robert Hooke (1635-1703), quien desarrolló la ley de las relaciones lineales entre la fuerza y la deformación de los materiales (ley de Hooke); Sir Isaac Newton (1642-1727), quien formuló las leyes del movimiento y desarrolló el cálculo; Jhon Bernoulli (1667-1748), quien formuló el principio del trabajo virtual; Leonard Euler (1707-1783), quien desarrolló la teoría del pandeo de columnas, y C.A. Coulomb (1736-1806), quien presentó el análisis de la flexión de las vigas elásticas.

En 1826, L.M. Navier (1785-1836) publicó un tratado sobre el comportamiento elástico de estructuras, el cual se considera como el primer libro de texto sobre la teoría moderna de la resistencia de los materiales. El desarrollo de la mecánica estructural continuó a un paso tremendo durante todo el resto del siglo XIX y hacia la primera mitad del siglo XX, cuando se desarrollaron la mayor parte de los métodos clásicos para el análisis de las estructuras.

Los colaboradores importantes de este periodo incluyeron a B.P. Clapeyron (1799-1864), quien formuló la ecuación de los tres momentos de las vigas continuas; J.C. Maxwell (1831-1879), quien presentó el método de las deformaciones coherentes la ley de deflexiones recíprocas; Otto Mohr (1835-1918), quien desarrolló el método de la viga conjugada para el cálculo de las deflexiones y los círculos de Mohr del esfuerzo y la deformación unitaria; Alberto Castigliano (1847-1884), quien desarrolló el teorema del trabajo mínimo; C.E. Greene (1842-1903), quien desarrolló el método del momento-área; H. Müller Breslau (1851-1925), quien presentó un principio para la construcción de las líneas de influencia ; G.A. Maney (1888-1947), quien desarrolló el método de la pendiente – deflexión, que se considera como precursor del método matricial de las rigideces, y Hardy Cross (1885-1959), quien desarrolló el método de la distribución de momentos, en 1924.

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

El método de la distribución de momentos proporciona a los ingenieros un procedimiento iterativo sencillo para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Este método, fue usado con mayor amplitud por los ingenieros en estructuras durante el periodo de 1930 a 1970, contribuyó de manera significativa a comprender el comportamiento de los armazones estáticamente indeterminados. Se diseñaron muchas estructuras durante ese periodo, como edificios muy altos, lo cual no habría sido posible sin disponer del método de la distribución de momentos.

El advenimiento de las computadoras en la década de 1970 revolucionó el análisis estructural. Debido a que la computadora podía resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas, los análisis que llevaban días y, a veces, semanas en la era previa a la computadora ahora se podían realizar en segundos. El desarrollo de los métodos actuales, orientados a la computadora, se puede atribuir, entre otros, a J. H. Argyris, R.W. Clough, S. Kelsey, R. K. Livesley, H.C. Martín, M.T. Turner, E.L. Wilson y O.C. Zienkiewicz.

De Hibbeler (2012)

Define una estructura como aquella que se refiere a un sistema de partes conectadas que se utiliza para soportar una carga. Entre los ejemplos más importantes relacionados con la ingeniería civil están los edificios, los puentes y las torres; en otras ramas de la ingeniería puede decirse que son importantes las estructuras de barcos y aviones, los tanques, los recipientes a presión, los sistemas mecánicos, y las estructuras de soporte de líneas eléctricas también son importantes.

Con la finalidad de mostrar el papel del análisis estructural, Kassimali (2001) proporciona el siguiente diagrama de flujo (Figura 4.59), donde se muestra a través de un proceso iterativo, las diferentes fases de un proyecto de ingeniería estructural

*CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES*

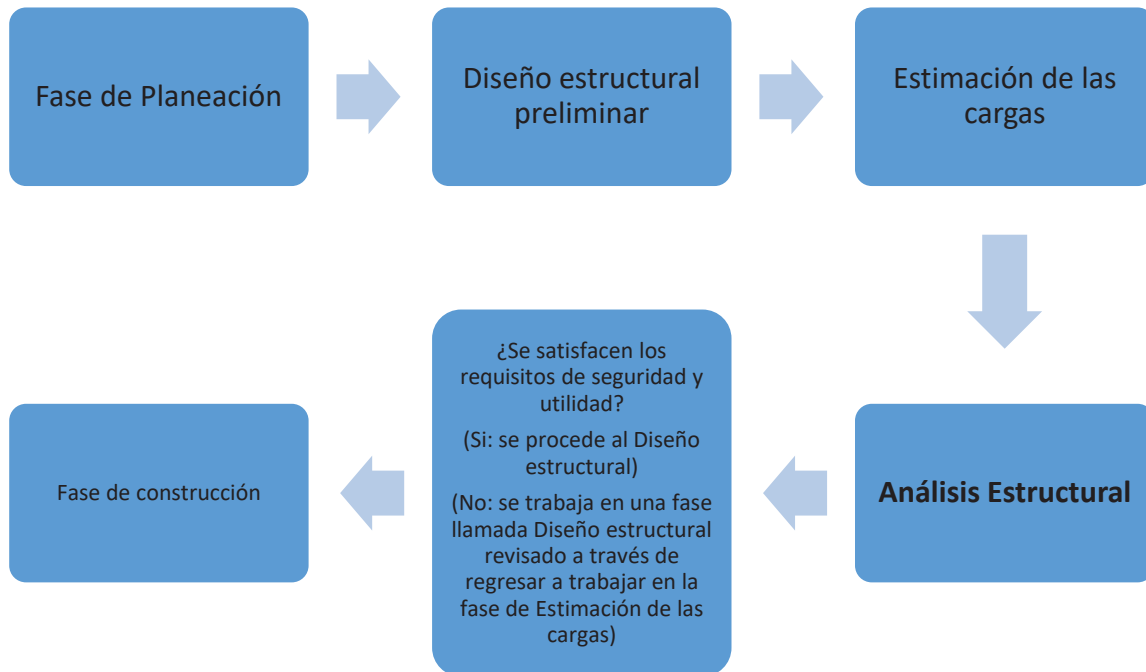


Figura 4.59 Fases de un proyecto típico de ingeniería estructural (Kassimali (2001))

Y a continuación describe cada una de las fases del proyecto

1. Fase de planeación. La fase de planeación suele comprender el establecimiento de los requisitos de funcionamiento de la estructura propuesta, la consideración de los tipos posibles de estructuras (por ejemplo, armazón rígido o armadura) que puedan ser factibles y los tipos de materiales que se van a usar (por ejemplo, acero estructural o concreto reforzado). Esta fase también puede comprender la consideración de factores no estructurales, como la estética, el impacto ambiental de la estructura, etcétera. Por lo común, el resultado de esta fase es un sistema estructural que cumple con los requisitos de funcionamiento y que se espera sea el más económico. Quizá es la más decisiva de todo el proyecto y requiere experiencia y conocimiento de las prácticas de construcción, además, de una plena comprensión del comportamiento de las estructuras.
2. Diseño estructural preliminar. En la fase preliminar del diseño de la estructura, se estiman los tamaños de los diversos miembros del sistema estructural seleccionado con base en un análisis aproximado, la experiencia pasada y los requisitos de los códigos. En la fase siguiente, se usan los tamaños de los miembros seleccionados de esta manera para estimar el peso de la estructura.
3. Estimación de las cargas. La estimación de las cargas comprende la determinación de todas las cargas que puede esperarse actúen sobre la estructura.

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

4. Análisis estructural. En el análisis estructural, se usan los valores de las cargas para llevar a cabo un análisis de la estructura para determinar los **esfuerzos** o las resultantes de los esfuerzos en los miembros, y las **deflexiones** en los diversos puntos de la estructura.
5. Comprobaciones de seguridad y utilidad. Se usan los resultados del análisis para determinar si la estructura satisface o no los requisitos de seguridad y utilidad de los códigos de diseño. Si estos requisitos se satisfacen, entonces se preparan los dibujos de diseño y las especificaciones de la construcción, y se inicia la fase de construcción.
6. Diseño estructural revisado. Si no se satisfacen los requisitos de los códigos, entonces se revisan los tamaños de los miembros y se repiten las fases 3 a 5 hasta que se satisfagan todos los requisitos de seguridad y utilidad.

A continuación, se presenta lo que Hibbeler (2012) presenta para:

Clasificación de estructuras

Para un ingeniero estructural es importante reconocer los distintos tipos de elementos que componen una estructura, y ser capaz de clasificar las estructuras de acuerdo con su forma y función.

En Hibbeler (2012) se describen los modelos estructurales que abordamos en nuestro estudio, los cuales corresponden a vigas, columnas, armaduras y marcos.

Vigas. Por lo general, las vigas son elementos rectos horizontales que se usan principalmente para soportar cargas verticales. Con frecuencia se clasifican según la forma en que están apoyadas, como se indica a continuación (Figura 4.60).

*CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES*



Figura 4.60 Tipos de vigas (Hibbeler, 2012, p. 4)

Las vigas se diseñan en principio para resistir momentos de flexión; sin embargo, si una viga es corta y soporta grandes cargas, la fuerza cortante interna puede llegar a ser bastante grande y regir el diseño de la viga. Cuando el material utilizado para una viga es un metal como el acero o el aluminio, la sección transversal resulta más eficiente si tiene la forma que se muestra a continuación (Figura 4.61).

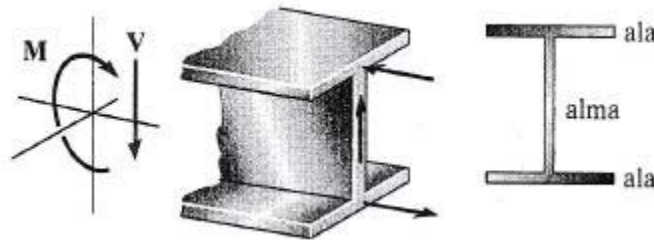


Figura 4.61 Sección transversal para una viga (Hibbeler, 2012, p. 5)

Aquí, las fuerzas desarrolladas en las alas (patines) superior e inferior de la viga forman el par necesario que se usa para resistir el momento M aplicado, mientras que el alma es eficiente al resistir la fuerza cortante V aplicada.

Por lo general, las vigas de concreto tienen secciones transversales rectangulares porque esta forma es fácil de construir directamente en el campo. Como el concreto es bastante débil en cuanto a su resistencia a la tensión, se colocan varillas de acero de refuerzo dentro de la viga en las regiones de la sección transversal sometidas a tensión.

Las vigas de madera pueden obtenerse de una pieza sólida de madera o laminarse. Las vigas laminadas se construyen con secciones sólidas de madera unidas entre sí mediante adhesivos de alta resistencia.

Columnas. Los elementos que generalmente son verticales y resisten cargas de compresión axial se conocen como columnas, figura 1-4. Las secciones transversales tubulares y de ala ancha se suelen utilizar para columnas de metal, y las secciones transversales circulares y cuadradas, con varillas de refuerzo, se utilizan para columnas de concreto. En ocasiones, las columnas están sujetas simultáneamente a una carga axial y a un momento de flexión, como se muestra a continuación (Figura 4.62). Estos elementos se denominan columnas de viga.

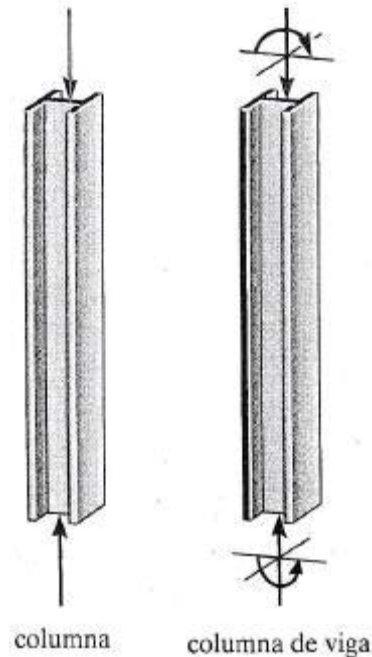
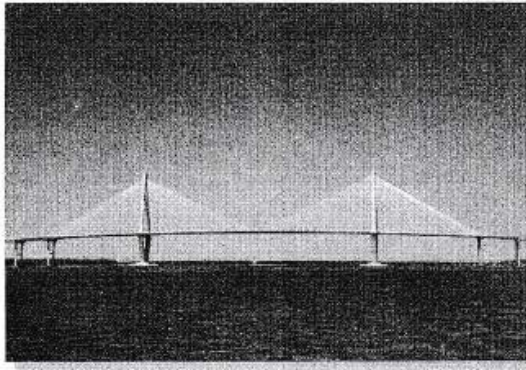


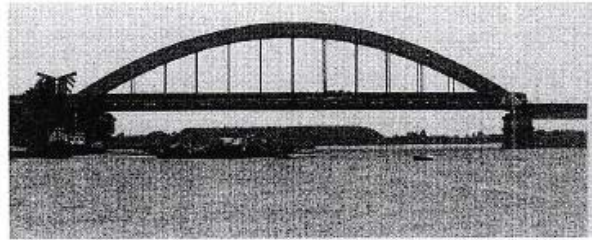
Figura 4.62 Columna (Hibbeler, 2012, p.6)

Armaduras. Cuando se requiere que el claro de una estructura sea grande y su profundidad, o peralte, no es un criterio importante para el diseño, se puede elegir una armadura. Las armaduras consisten en elementos delgados, por lo general colocados en forma triangular. Las armaduras planas se componen de elementos ubicados en el mismo plano y se utilizan para el soporte de puentes y techos, en tanto que las armaduras espaciales tienen elementos que se extienden en tres dimensiones y son adecuadas para grúas y torres.

Debido a la disposición geométrica de sus elementos, las cargas que hacen que toda la armadura se deforme se convierten en fuerzas de tensión o compresión en los elementos (Figura 4.63). En consecuencia, una de las principales ventajas de una armadura en comparación con una viga es que utiliza menos material para soportar una carga determinada.



Los cables soportan sus cargas en tensión.
(a)



Los arcos soportan sus cargas en compresión.
(b)

Figura 4.63 Armaduras (Hibbeler, 2012, p. 7) **Marcos.** Los marcos se suelen usar galpones y estructuras de acero, están compuestos por vigas y columnas conectadas rígidamente o mediante articulaciones (Figura 4.64). Al igual que las vigas, los marcos se extienden en dos o tres dimensiones. La carga en un marco ocasiona flexión de sus elementos; y si tiene conexiones de unión rígidamente, por lo general esta estructura es "indeterminada" desde el punto de vista analítico. La resistencia de un marco de este tipo se deriva de las interacciones de momento entre las vigas y las columnas en las uniones rígidamente.

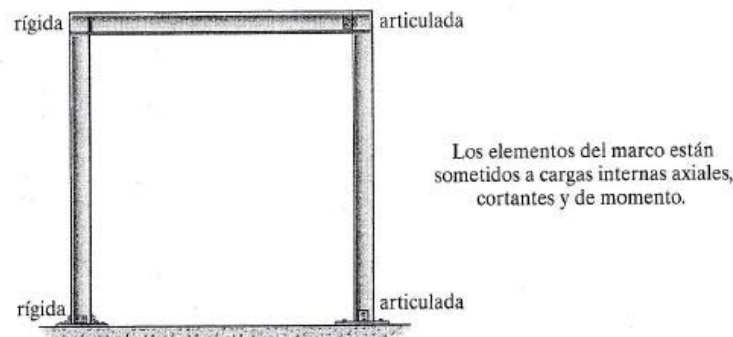


Figura 4.64 Marco (Hibbeler, 2012, p. 8)

Cargas

Una vez que se han definido los requisitos dimensionales para una estructura, es necesario determinar las cargas que debe soportar la estructura. La anticipación de las diferentes cargas que se impondrán a una estructura suele proporcionar el tipo básico de estructura (tipología estructural) que se elegirá para el diseño. Por ejemplo, las estructuras muy altas deben soportar grandes fuerzas laterales causadas por el viento, y entonces se seleccionan muros para cortante y sistemas de marco tubular, en tanto que los edificios ubicados en zonas propensas a terremotos deben diseñarse con marcos y conexiones flexibles. (En Chile, la tipología

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

estructural en edificaciones se basa en estructuras de concreto llamadas muros)

La carga de diseño de una estructura suele estar especificada en códigos. En general, el ingeniero estructural trabaja con dos tipos de códigos: los códigos generales de construcción especifican los requisitos de los organismos gubernamentales para las cargas mínimas de diseño en las estructuras y las normas mínimas para la construcción. Los códigos de diseño proporcionan normas técnicas detalladas y se utilizan para establecer los requisitos en el diseño real de estructuras.

Una estructura puede estar sometida a diversos tipos de carga, como por ejemplo la carga muerta, compuesta por los pesos de los diversos elementos estructurales y los pesos de todos los objetos que están unidos de manera permanente a la estructura. Por lo tanto, las cargas muertas de un edificio son el peso de las columnas, vigas y trabes, la losa del piso, el techo, paredes, ventanas y otros accesorios diversos. Otro tipo de carga a la que es sometida una estructura pueden ser las denominadas cargas vivas, las cuales pueden variar tanto en su magnitud como en su ubicación. Ejemplos de cargas vivas pueden ser los distintos muebles presentes en un edificio (asientos, sala, de oficina), el tráfico en un puente, el peso de las personas que transitan sobre la estructura, entre otras.

En países sísmicos (y no) una carga a considerar muy importante es la carga por terremoto. Los terremotos producen cargas sobre una estructura a través de su interacción con el suelo y las características de su respuesta. Estas cargas resultan de la distorsión de la estructura a causa del movimiento del suelo y la resistencia lateral de la estructura. Su magnitud depende de la cantidad y tipo de aceleraciones del suelo y de la masa y la rigidez de la estructura.

Estructura idealizada

*El análisis exacto de una estructura es imposible de realizar, debido a que siempre hay que realizar estimaciones de las cargas y la resistencia de los materiales que componen la estructura. Además, tienen que estimarse los puntos de aplicación de las cargas. Por lo tanto, en la práctica es importante que el ingeniero calculista desarrolle la **capacidad de modelar o idealizar una estructura** a fin de poder efectuar un análisis de fuerzas de los elementos.*

El paso de la estructura real a la estructura idealizada.

Se presentan dos ejemplos que ilustran un proceso de idealización estructural relacionada con la carga tributaria.

Cuando las superficies planas como paredes, pisos o techos están soportadas por un marco estructural, es necesario determinar la forma en que se transmiten la carga sobre estas superficies hacia los diversos

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

elementos estructurales utilizados para su soporte. En general, existen dos formas en las que puede hacerse esto. La elección depende de la geometría del sistema estructural, el material del que está hecho y el método empleado para su construcción.

**Sistema de una dirección.* Una losa o una cubierta que se apoya de tal manera que transfiere su carga a los elementos de soporte mediante una acción en un solo sentido, se conoce como una losa en una dirección. Para ilustrar el método de transmisión de cargas, considere el sistema estructural que se muestra en (Figura 4.65 a), donde las vigas AB, CD y EF descansan sobre las traveses AE y BF. Si se coloca una carga uniforme de 100 lb/pie^2 sobre la losa, entonces puede suponerse que la viga central CD soporta la carga que actúa sobre el área tributaria, la cual se muestra con un sombreado oscuro en el plano del marco estructural (Figura 4.65 b). Por lo tanto, el elemento CD se somete a una distribución de carga lineal de $(100 \text{ lb/pie}^2)(5 \text{ pies}) = 500 \text{ lb/pie}$, que se muestra en la viga idealizada de la (Figura 4.65 c). Las reacciones sobre esta viga (2500 libras) se aplicarán después al centro de las traveses AE (y BF), que se muestran idealizadas en la (Figura 4.65 d). Si se usa este mismo concepto, ¿es posible observar como el resto de la carga de la losa se transmite a los extremos de la trabe con un valor de 1250 libras?

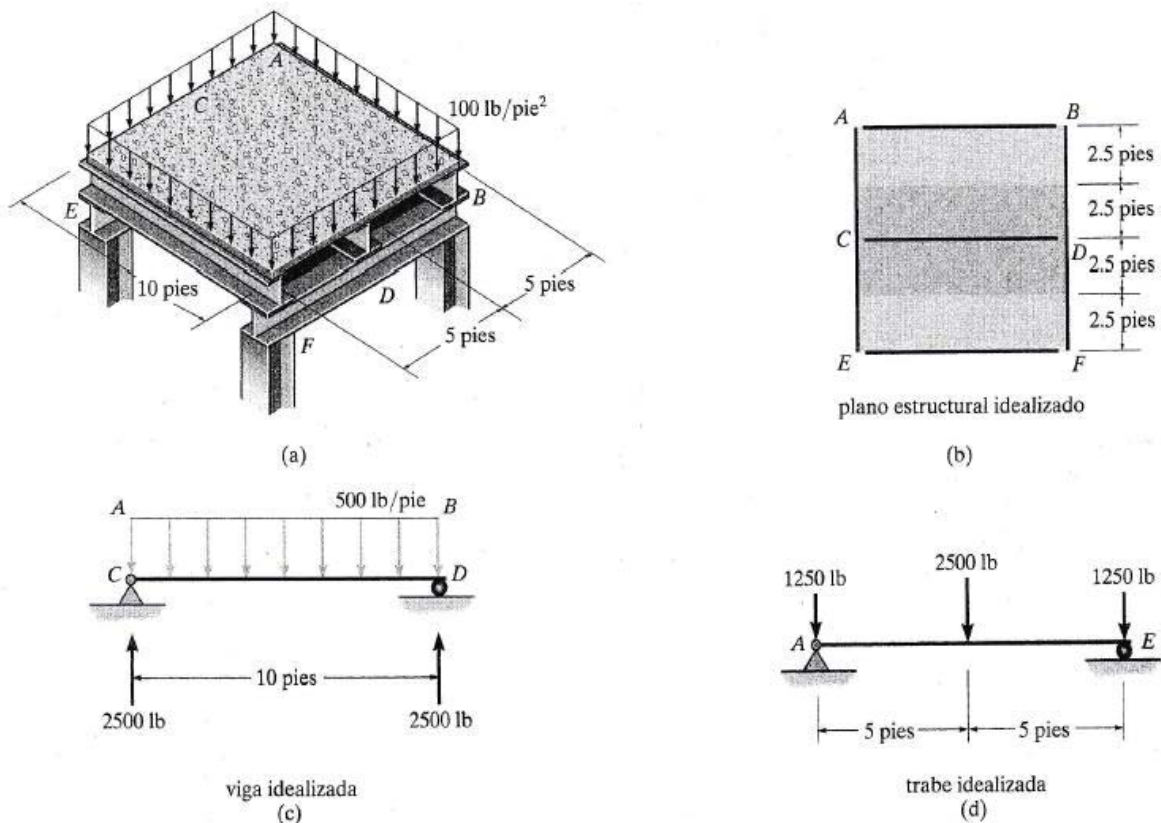


Figura 4.65 Sistemas en una dirección (Hibbeler, 2012, p. 40)

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

Si la losa es plana en las partes superior e inferior y se refuerza en dos direcciones, entonces es necesario considerar la posibilidad de que la carga se transmita a los elementos de soporte en uno o dos sentidos. Por ejemplo, considere la losa y el plano estructural de la (Figura 4.66). De acuerdo con el American Concrete Institute, código ACI 318, si $L_2 > L_1$ y si la relación del claro $(L_2/L_1) > 2$, la losa se comportará como una losa en una dirección, dado que como L_1 se hace más pequeño, las vigas AB, CD y EF proporcionan una mayor rigidez para soportar la carga.

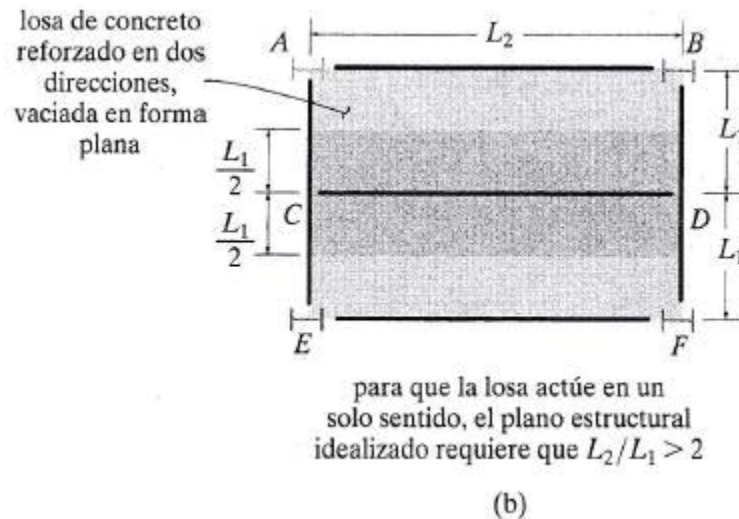


Figura 4.66 Sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 41)

**Sistema en dos direcciones.* Si de acuerdo con el código de concreto ACI 318 la relación de soporte en la (Figura 4.66) es $(L_2/L_1) \leq 2$, se supone que la carga se transfiere a las vigas de soporte y a las trabes en dos direcciones. Para mostrar un método mediante el cual pueda estudiarse este caso considere la losa cuadrada de concreto que se muestra en la (Figura 4.67 a), la cual está soportada por cuatro vigas en el borde, de 10 *pies* de largo: AB, BD, DC y CA . Aquí $L_2/L_1 = 1$. El área tributaria supuesta para la viga AB , debida a la acción de la losa en dos direcciones, se muestra con un sombreado oscuro en la (Figura 4.67 b). Esta área se determina al construir líneas diagonales a 45° como se muestra en la figura. Por lo tanto, si se aplica una carga uniforme de 100 lb/pie^2 sobre la losa, se obtendrá una intensidad máxima de $(100 \text{ lb/pie}^2)(5 \text{ pies}) = 500 \text{ lb/pie}$ sobre el centro de la viga AB , lo que resulta en una distribución de cargas triangular como la que se muestra en la (Figura 4.67 c).

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

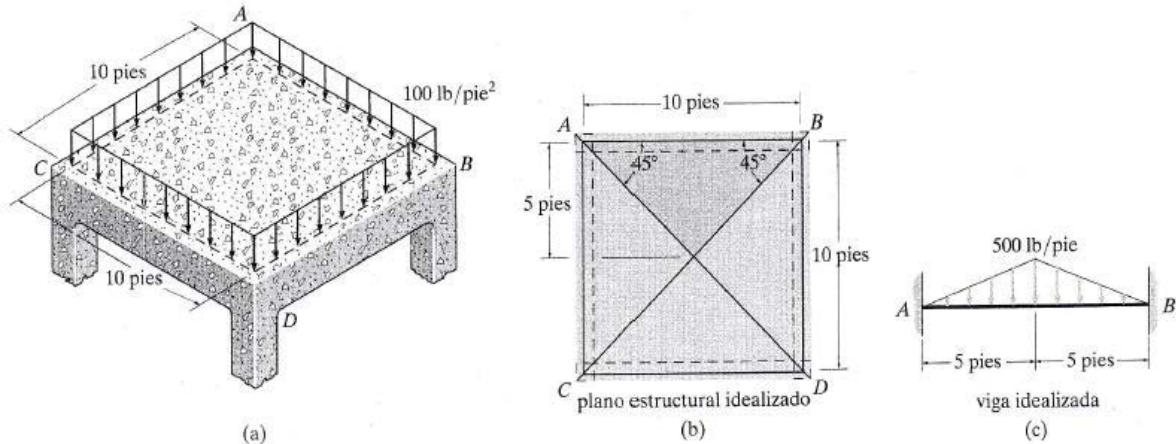


Figura 4.67 Ejemplo de sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 42)

Para otras geometrías que ocasionan acciones en dos direcciones, puede emplearse un procedimiento similar. Por ejemplo, si $L_2/L_1 = 1.5$ entonces es necesario construir líneas cruzadas a 45° , como se muestra en la (Figura 4.68 a). De esta forma, una carga de 100 lb/ft^2 colocada en la losa producirá cargas distribuidas trapezoidales y triangulares en los elementos AB y AC respectivamente, (Figura 4.68 b) y (Figura 4.68 c)

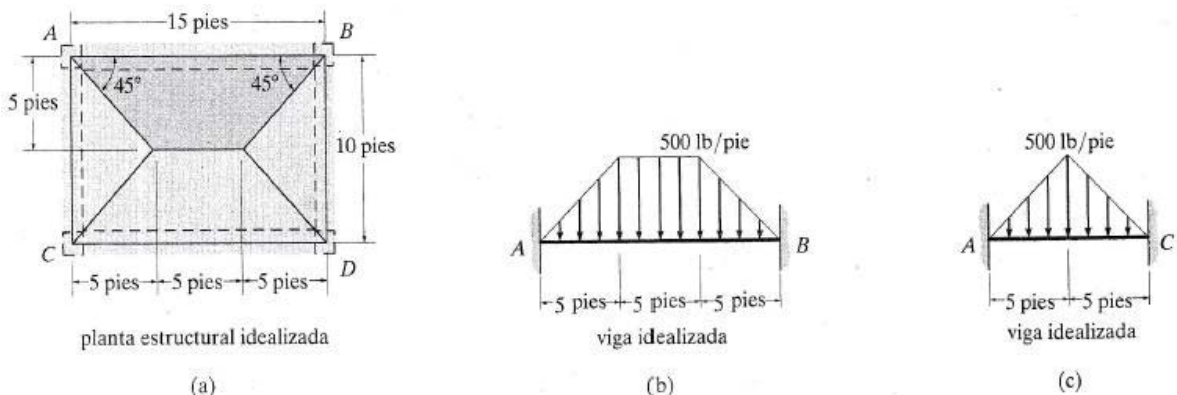


Figura 4.68 Ejemplo de sistema en dos direcciones (Hibbeler, 2012, p. 42)

Funciones de fuerza cortante y de momento

El diseño de una viga requiere un conocimiento detallado de las variaciones de la fuerza cortante V y el momento M internos que actúan en cada punto a lo largo del eje de la viga. Por lo general, la fuerza normal interna no se considera por dos razones: (1) en la mayoría de los casos las cargas aplicadas a una viga actúan en forma perpendicular a su eje y, por lo tanto, sólo producen una fuerza interna cortante y un momento flexionante; (2) y para fines de diseño, la resistencia a la fuerza cortante de la viga y, en particular, a la flexión, es más importante que su capacidad para resistir la fuerza normal. Sin embargo, hay una excepción importante a esto cuando

las vigas están sometidas a fuerzas axiales de compresión, puesto que deben investigarse el pandeo o la inestabilidad que pudieran ocurrir.

Las variaciones de V y M en función de la posición x de un punto arbitrario a lo largo del eje de la viga pueden obtenerse mediante el método de las secciones, a través de seccionar en tramos la estructura y determinar en cada tramo el valor de la función de V y M . Sin embargo, aquí es necesario localizar la sección imaginaria o cortar a una distancia arbitraria x desde un extremo de la viga en vez de en un punto específico.

En general, las funciones de la fuerza cortante y del momento internos serán discontinuas, o su pendiente será discontinua, en los puntos donde el tipo o la magnitud de la carga distribuida cambia, o bien donde se apliquen las fuerzas concentradas o los momentos de par. Debido a esto, las funciones de la fuerza cortante y del momento deben determinarse para cada región de la viga localizada entre cualquiera de las dos discontinuidades de carga.

Por ejemplo, las coordenadas x_1, x_2 y x_3 deberán usarse para describir la variación de V y M en toda la longitud de la viga en la (Figura 4.69 a). Estas coordenadas serán válidas sólo dentro de las regiones desde A hasta B para x_1 , de B a C para x_2 , y de C a D para x_3 . Aunque cada una de estas coordenadas tiene el mismo origen, como se ha señalado aquí, éste no tiene por qué ser el caso. De hecho, puede ser más fácil desarrollar las funciones de fuerza cortante y de momento, empleando las coordenadas x_1, x_2 y x_3 que tienen orígenes en A, B y D como se muestra en la (Figura 4.69 b). Aquí x_1 y x_2 son positivas hacia la derecha y x_3 es positiva hacia la izquierda.

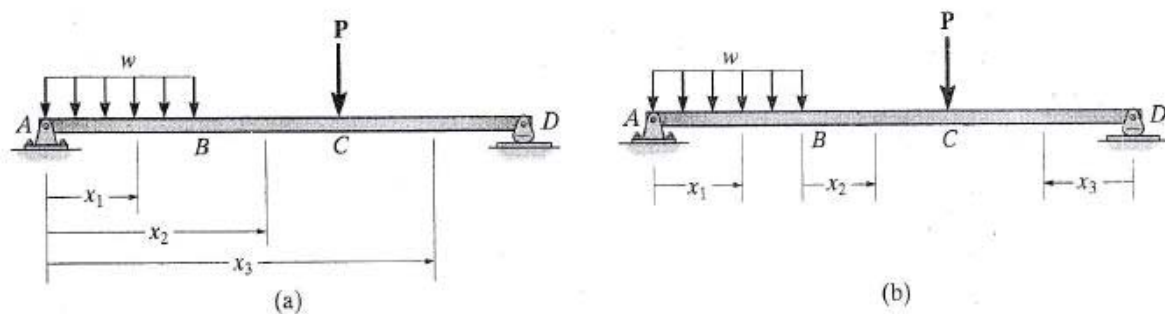


Figura 4.69 Cargas en una viga (Hibbeler, 2012, p. 139)

Diagramas de fuerza cortante y de momento para una viga

Al representar gráficamente las variaciones de V y M en función de x que se obtuvieron en la sección anterior, las gráficas resultantes se denominan diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento, respectivamente. En los casos donde una viga está sometida a varias fuerzas concentradas, pares y cargas distribuidas, la graficación de V y M en comparación con x puede ser bastante tediosa puesto que deben representarse varias funciones. En esta sección se analiza un método más simple para la construcción de estos

diagramas; un método basado en las **relaciones diferenciales que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento**.

Para obtener estas relaciones, considere la viga AD de la (Figura 4.70a), la cual está sometida a una carga arbitraria distribuida $w = w(x)$ y a una serie de fuerzas concentradas y pares (par momento). En el siguiente análisis, la carga distribuida se considerará positiva cuando actúe hacia arriba como se muestra en la figura. Se considerará el diagrama de cuerpo libre para un pequeño segmento de la viga con longitud Δx , (Figura 4.70b). Como este segmento se eligió en un punto x a lo largo de la viga que no está sometido a una fuerza concentrada o a un par, los resultados obtenidos no son aplicables a los puntos con carga concentrada.

Se supone que la fuerza cortante y el momento flexionante internos que se muestran en el diagrama de cuerpo libre actúan en la dirección positiva de acuerdo con la convención de signos establecida, figura 4-1. Se debe tener en cuenta que tanto la fuerza cortante como el momento que actúan sobre la cara derecha deben aumentar en una cantidad pequeña y finita con el fin de mantener el segmento en equilibrio. La carga distribuida se reemplazó por una fuerza concentrada $w(x)\Delta x$ que actúa a una distancia fraccional $\varepsilon(\Delta x)$ desde el extremo derecho, donde $0 < \varepsilon < 1$. (Por ejemplo, si $w(x)$ es uniforme o constante, entonces $w(x)\Delta x$ actuará en $\frac{1}{2}\Delta x$, así que $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Al aplicar las ecuaciones de equilibrio, se tiene

Haciendo: $+\uparrow \sum F_y = 0$

$$V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = w(x)\Delta x$$

Continuando con la sumatoria de momentos: $\sum M_o = 0$

$$-V\Delta x - M - w(x)\Delta x \varepsilon(\Delta x) + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + w(x)\Delta x \varepsilon(\Delta x)^2$$

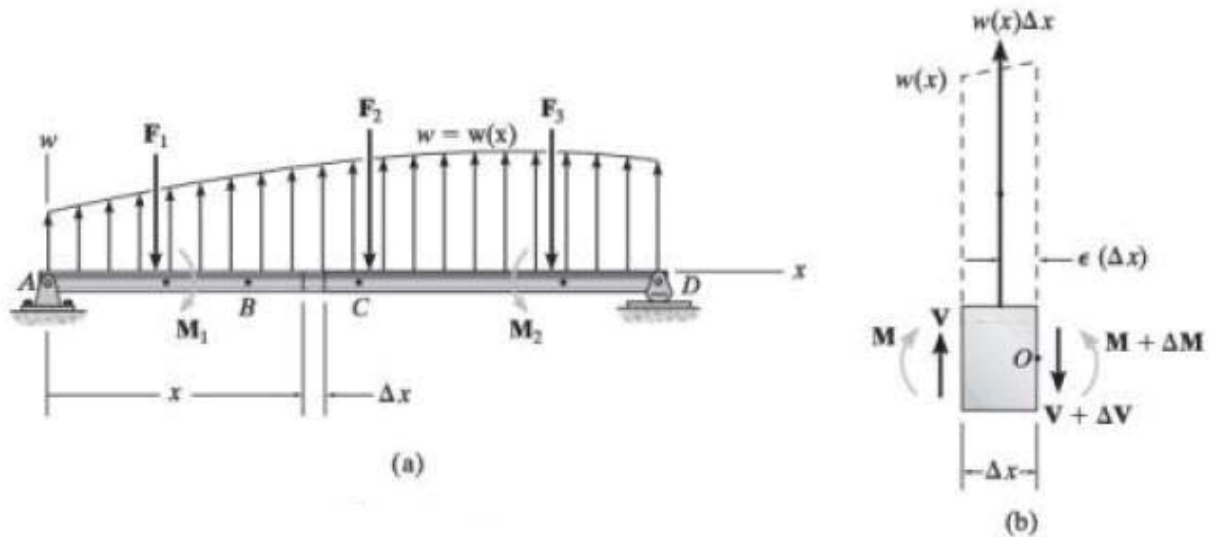


Figura 4.70 Carga genérica sobre una viga (Hibbeler, 2012, p. 150)

Si se divide entre Δx y se toma el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, estas ecuaciones se convierten en:

La función de carga $w(x)$

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

Donde:

$\frac{dV}{dx}$ Es la pendiente del diagrama de fuerza cortante

$w(x)$ Es la intensidad de la carga distribuida

La función de cortante V

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Donde:

$\frac{dM}{dx}$ Es la pendiente del diagrama de momento

V Es la fuerza cortante

Como se ha señalado, la ecuación $\frac{dV}{dx} = w(x)$ establece que la pendiente del diagrama de fuerza cortante en un punto (dV/dx) es igual a la intensidad de la carga distribuida $w(x)$ en ese punto. Del mismo modo, la ecuación $\frac{dM}{dx} = V$ establece que la pendiente del diagrama de momento (dM/dx) es igual a la intensidad de la fuerza cortante en ese punto.

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

Las ecuaciones $\frac{dV}{dx} = w(x)$ y $\frac{dM}{dx} = V$ pueden “integrarse” desde un punto hasta el otro entre fuerzas concentradas o pares (por ejemplo, de B a C en la figura 4-9a), en cuyo caso

El cambio en la fuerza cortante ΔV

$$\Delta V = \int w(x)dx$$

Donde:

ΔV Es el cambio en la fuerza cortante

$\int w(x)dx$ Es el área bajo el diagrama de carga distribuida

El cambio en el momento

$$\Delta M = \int V(x)dx$$

Donde:

ΔM Es el cambio en el momento

$\int V(x)dx$ Es el área bajo el diagrama de fuerza cortante

Como se ha señalado, la ecuación $\Delta V = \int w(x)dx$ establece que el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos cualesquiera de una viga es igual al área bajo el diagrama de carga distribuida entre esos puntos. Del mismo modo, la ecuación $\Delta M = \int V(x)dx$ establece que el cambio en el momento entre dos puntos de una viga es igual al área bajo el diagrama de fuerza cortante entre esos puntos.

Con base en la derivación anterior debe observarse que las ecuaciones $\frac{dV}{dx} = w(x)$ y $\Delta V = \int w(x)dx$ no pueden usarse en los puntos donde actúa una fuerza concentrada, puesto que estas ecuaciones no toman en cuenta el cambio repentino de la fuerza cortante en estos puntos. Del mismo modo, debido a una discontinuidad del momento, las ecuaciones $\frac{dM}{dx} = V$ y $\Delta M = \int V(x)dx$ no pueden emplearse en los puntos donde se aplica un momento par.

A fin de considerar estos dos casos, es necesario tomar los diagramas de cuerpo libre de los elementos diferenciales de la viga que se muestran en la figura 4-9a, los cuales están en puntos con fuerza concentrada y momentos de par. En las (Figura 4.71 a) y (Figura 4.71 b), respectivamente, se muestran ejemplos de estos elementos. A partir de la (Figura 4.71 a) se observa que el equilibrio de fuerzas requiere que el cambio en la fuerza cortante sea

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad ; \quad \Delta V = -F$$

Así, cuando F actúa hacia abajo sobre la viga, ΔV es negativa por lo que el diagrama de corte muestra un “salto” hacia abajo. Del mismo modo, si F actúa hacia arriba, el salto (ΔV) es hacia arriba. Con base en la (Figura 4.71

b), cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el equilibrio de momentos requiere que el cambio en el momento sea

$$\sum M_O = 0 ; \quad \Delta M = M'$$

En este caso, si se aplica un momento par externo M' en sentido horario, ΔM es positivo, por lo que el diagrama de momento salta hacia arriba, y cuando M actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el salto (ΔM) debe ser hacia abajo.

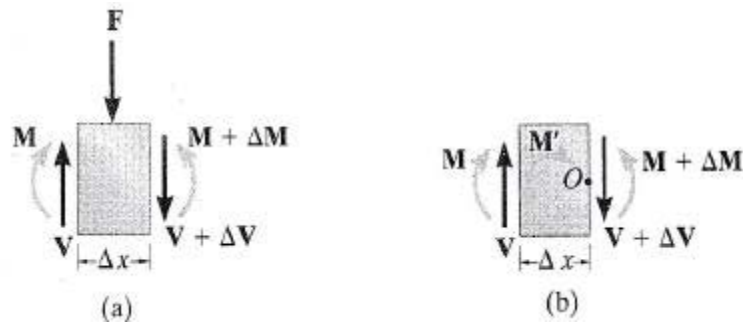


Figura 4.71 Fuerza concentrada y momento par en una viga (Hibbeler, 2012, p. 152)

Sobre el cálculo de deflexiones

La segunda parte que consideramos para el estudio de las estructuras estáticamente determinadas se relaciona con el cálculo de deflexiones en elementos estructurales, de los modelos estudiados, presentamos a continuación lo que el autor expone sobre el cálculo de deflexiones para modelos tipo viga y marco. Son diversos los métodos para el cálculo de deflexiones en estructuras, en esta sección se estudió el método del trabajo virtual.

Teoría de la viga elástica

A continuación, se desarrollan dos ecuaciones diferenciales importantes que relacionan el momento interno en una viga con el desplazamiento y la pendiente de su curva elástica. Estas ecuaciones forman la base de los métodos de deflexión que se presentan en este capítulo, y por esa razón hay que comprender plenamente los supuestos y las limitaciones que se apliquen en su desarrollo.

Para obtener estas relaciones, el análisis se limitará al caso más común de una viga que en principio es recta y que se deforma elásticamente debido a las cargas aplicadas de manera perpendicular al eje x de la viga, y que se sitúan en el plano de simetría $x - v$ de la sección transversal de la viga, (Figura 4.72 a). Debido a las cargas, la deformación de la viga es causada tanto por la fuerza cortante interna como por el momento de flexión. Si la viga tiene una longitud mucho mayor que su profundidad, la mayor

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

deformación será causada por la flexión y, por ende, la atención se dirigirá a sus efectos.

Cuando el momento interno M deforma el elemento de la viga, cada sección transversal se mantiene plana y el ángulo entre ellas se convierte en $d\theta$, (Figura 4.72 b).

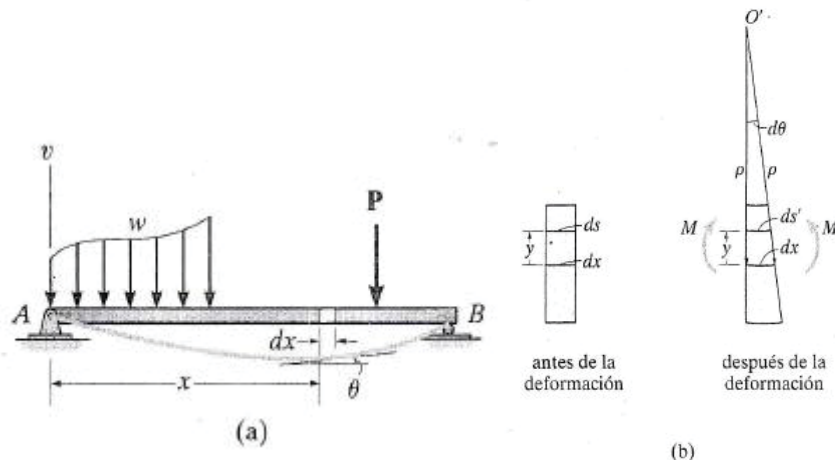


Figura 4.72 Diferenciales curva elástica (Hibbeler, 2012, p. 305)

El arco dx que representa una porción de la curva elástica interseca el eje neutro de cada sección transversal. El radio de curvatura de este arco se define como la distancia ρ , que se mide desde el centro de la curvatura O' hasta dx . Cualquier arco en el elemento distinto a dx está sometido a una deformación normal. Por ejemplo, la deformación en el arco ds , que se ubica en una posición y respecto al eje neutro, es $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. Sin embargo, $ds = dx = \rho d\theta$ y $ds' = (\rho - y)d\theta$, y así

$$\epsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} \quad \text{O bien} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$

Si el material es homogéneo y se comporta de manera lineal elástica, entonces puede aplicarse la ley de Hooke $\epsilon = \sigma/E$. Además, dado que también es aplicable la fórmula de la flexión $\sigma(y) = -My/I$, al combinar estas ecuaciones y sustituir en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Aquí:

ρ = el radio de curvatura en un punto específico de la curva elástica ($\frac{1}{\rho}$ se conoce como la curvatura)

M = el momento interno en la viga en el punto donde debe terminarse ρ

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

E = el módulo de elasticidad del material

I = el momento de inercia de la viga calculado respecto del eje neutro

En esta ecuación el producto EI se conoce como la rigidez a la flexión, y siempre es una cantidad positiva. Puesto que $dx = \rho d\theta$, entonces a partir de

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

Si se elige el eje v como positivo hacia arriba, (Figura 4.72a), y si es posible expresar la curvatura ($1/\rho$) en términos de x y v , entonces se puede determinar la curva elástica de la viga. En la mayoría de los libros de cálculo **se demuestra** que esta relación de curvatura es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}}$$

Esta ecuación representa una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Su solución $v = f(x)$ proporciona la forma exacta de la curva elástica; suponiendo, por supuesto, que las deflexiones de la viga se producen sólo por flexión. Con el fin de facilitar la solución de un mayor número de

problemas, la ecuación $\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}}$ se modificará al hacer una

importante simplificación. Como la pendiente de la curva elástica para la mayoría de las estructuras es muy pequeña, se empleará la teoría de la pequeña deflexión y se supondrá que $dv/dx \approx 0$. En consecuencia, su cuadrado será insignificante en comparación con la unidad y por lo tanto la

ecuación $\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(dv/dx\right)^2\right]^{3/2}}$ se reduce a

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

También debe señalarse que al suponer que $dv/dx \approx 0$, la longitud original del eje x de la viga y el arco de su curva elástica serán aproximadamente

los mismos. En otras palabras, ds en la (Figura 4.72b) es aproximadamente igual a dx , puesto que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} dx \approx dx$$

Este resultado implica que los puntos de la curva elástica sólo se desplazarán de manera vertical más no horizontal.

Método del trabajo virtual: vigas y marcos

El método del trabajo virtual puede aplicarse a los problemas de deflexión de vigas y marcos, ya que las deformaciones debidas a la flexión son la causa principal de las deflexiones en este tipo de elementos estructurales.

El principio del trabajo virtual o, más exactamente, el método de la fuerza virtual, puede formularse para deflexiones en vigas y marcos al considerar la viga que se muestra en la figura (Figura 4.73b). Aquí debe determinarse el desplazamiento Δ de un punto A . Para calcular Δ se coloca una carga virtual unitaria que actúa en la dirección de Δ sobre el punto A , y el momento virtual interno m se determina mediante el método de las secciones en una ubicación arbitraria x medida desde el soporte de la izquierda, (Figura 4.73 a). Cuando las cargas reales actúan sobre la viga, (Figura 4.73 b), el punto A se desplaza Δ . Siempre que estas cargas causen una respuesta material elástica lineal, entonces el elemento dx se deforma o gira $d\theta = (M/EI) dx$.

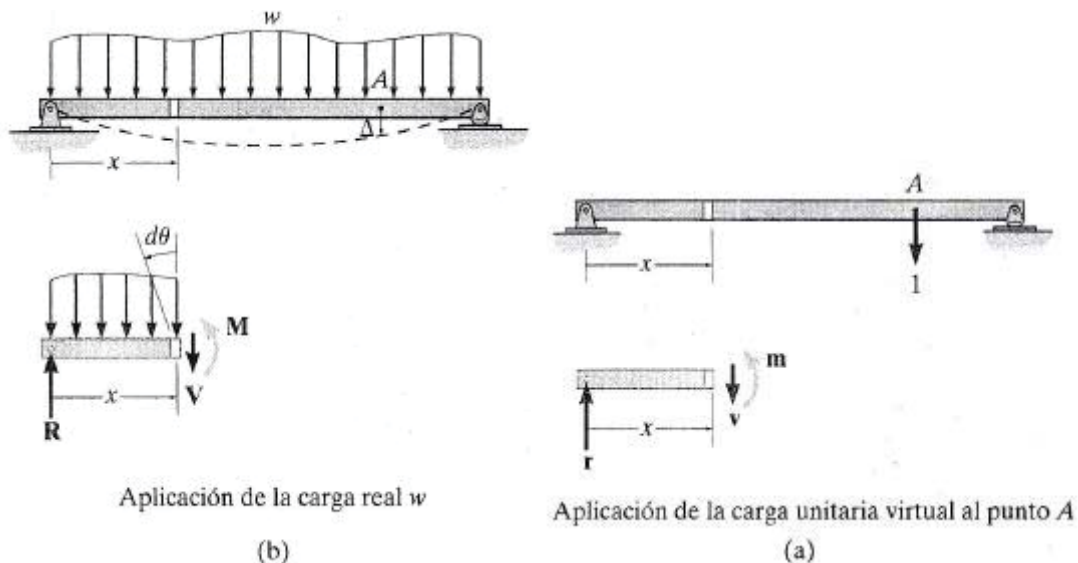


Figura 4.73 Carga real y carga virtual (Hibbeler, 2012, p. 364)

Aquí, M es el momento interno en x causado por las cargas reales. En consecuencia, el trabajo virtual externo realizado por la carga unitaria es $1 \cdot \Delta$, y el trabajo virtual interno realizado por el momento m es $m d\theta =$

**CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES**

$m(M/EI)dx$. La sumatoria de los efectos sobre todos los elementos dx a lo largo de la viga requiere una integración y, por tanto, se tiene

$$1. \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$$

Donde:

1 = Carga unitaria virtual externa que actúa sobre la viga o el marco en la dirección de Δ .

m = Momento virtual interno en la viga o el marco, expresado como una función de x y que es causado por la carga virtual externa.

Δ = Desplazamiento externo del punto causado por las cargas reales que actúan sobre la viga o el marco.

M = Momento interno en la viga o el marco, expresado como una función de x y que es causado por las cargas reales.

E = Módulo de elasticidad del material.

I = Momento de inercia del área transversal, calculando con respecto al eje neutro.

De una manera semejante, si debe determinarse la rotación de la tangente o el ángulo θ de la pendiente en un punto A de la curva elástica de la viga, (Figura 4.74), se aplica primero un momento de par unitario en el punto, y se determinan los momentos internos correspondientes m_θ .

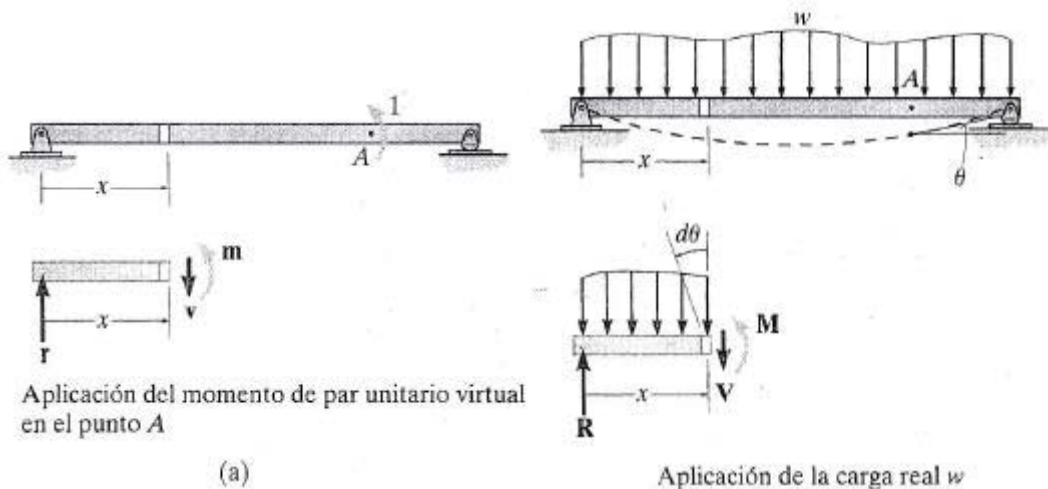


Figura 4.74 Momento real y momento virtual (Hibbeler, 2012, p. 364)

Como el trabajo del par unitario es $1. \theta$, entonces

$$1. \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

De las ecuaciones anteriores, es importante tener en cuenta que las integrales definitivas al lado derecho representan en realidad la cantidad de energía de deformación virtual que está almacenada en la viga. Si sobre la viga actúan fuerzas concentradas o momentos de par o si la carga distribuida es discontinua, no se puede realizar sólo una integración a través de toda la longitud de la viga. En vez de esto deberán elegirse coordenadas x separadas dentro de las regiones que no tienen discontinuidad de carga. Además, no es necesario que cada x tenga el mismo origen; sin embargo, la x seleccionada para determinar el momento M real en una región particular debe ser la misma x que la seleccionada para determinar el momento virtual m o m_θ dentro de la misma región.

4.2 Sobre el contenido matemático relacionado con los modelos utilizados para resolver los problemas que seleccionamos del análisis estructural.

A continuación, presentamos algunas nociones matemáticas en la línea de Cálculo Diferencial e integral presentes en los modelos estructurales abordados en las secciones anteriores. Para ello, consideramos el libro de Cálculo de Michael Spivak (2009) por ser un libro referente en los programas de Matemáticas.

Como no estamos analizando el tratamiento sino solamente aspectos del referencial teórico no consideramos apuntes u otros textos usados en los cursos del eje de Cálculo, tales como Swokowski, Larson, entre otros.

4.2.1 Sobre la noción de función¹

El autor comienza proporcionando una definición provisional de lo que llama “la noción intuitiva de función”

Definición intuitiva

Una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real

A la definición de función anterior, el autor le hace algunas advertencias como por ejemplo que una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que pueda ser expresada mediante una fórmula algebraica; ni es tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica.

¹ Una aproximación epistemológica a la noción de función se realizó en el capítulo 1 sección 1.9

Con base en la definición intuitiva el autor define una función polinómica

Una función f es una función polinómica si existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ para todo } x$$

. Posteriormente el autor menciona que presentará una definición completa de función

Una primera definición completa

Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento.

A continuación presenta una definición de Función haciendo alusión que corresponde a una definición con rigor

Definición formal

Si f es una función, el **dominio** de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b , tal que (a, b) está en f . Si a está en el dominio de f , se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f . Este b único se designa por $f(a)$.

En la definición de función dada por el autor, se puede observar un paso de la intuición al rigor en sus definiciones. Respecto de ello señala que lo importante de una función f es que el número $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio. Además, aclara que la definición de función como una regla no es excluyente de su definición anterior. Y cierra recomendando que la mejor representación de una función es dibujarla.

Luego declara lo siguiente:

Con esta definición hemos alcanzado nuestro objetivo: Lo importante de una función f es que el número $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio. El lector puede tener la impresión de que hemos llegado al punto en que una definición intuitiva ha sido sustituida por una abstracción que la mente puede apenas captar. Dos consuelos podemos ofrecer a esto. En primer lugar, aunque una función ha sido definida como una colección de pares, nada impide que el lector imagine una función como una regla. En segundo lugar ni la definición intuitiva ni la formal nos dan la mejor manera de representarse una función. La mejor manera consiste en hacer dibujos (Spivak, 2009 p. 61).

El comentario del autor nos parece muy relevante, dado que pone de relieve dos categorías de la noción de función: desde la intuición y desde el formalismo. Sin embargo, parece que el autor promueve ambas visiones, al señalar que tanto la definición como pares ordenados y la definición como regla de correspondencia le parecen útiles.

4.2.2 Sobre la definición de límite

Al igual que en la definición de la noción de función, el autor comienza proporcionando una definición provisional para después proveer la definición formal.

Definición intuitiva

La función f tiende hacia el límite l cerca de a , si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de l haciendo que x esté suficientemente cerca de a , pero siendo distinto de a .

Definición formal

La función f **tiende hacia el límite l en a** significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x , si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

4.2.3 Sobre las funciones continuas

Continuidad en un punto

La función f es continua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Para la definición anterior presenta algunos casos para los cuales no se cumple necesariamente que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

1. f puede incluso no estar definida en a , en cuyo caso la ecuación no tiene sentido.
2. Puede no existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
3. Aun estando definida f en a y existiendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, el límite puede no ser igual a $f(a)$.

Continuidad uniforme

La función f es uniformemente continua en un intervalo A si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para cualquier x e y de A se cumple

Si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

A continuación, el autor presenta los siguientes teoremas sobre las funciones continuas, a los primeros tres teoremas les llama “teoremas fuertes” debido a que caracterizan a una función desde lo *global*, presentando como consecuencia de los anteriores, ocho teoremas adicionales basados en propiedades *locales* de una función.

Teoremas sobre funciones continuas

Teorema 1

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

Esto significa que la gráfica de una función continua que empieza por debajo de eje horizontal y termina por encima del mismo debe cruzar a este eje en algún punto.

Teorema 2

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \leq N$ para todo x en $[a, b]$.

Esto significa que la gráfica de f queda por debajo de alguna línea paralela al eje horizontal.

Teorema 3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

Teorema 4

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Teorema 5

Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Teorema 6

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f está acotada inferiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a, b]$.

Teorema 7

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún número y en $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$.

(Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su mínimo en dicho intervalo)

A continuación el autor presenta los teoremas 8, 9, 10 y 11, mencionando son consecuentes a la deducción de las consecuencias triviales (teoremas 4, 5, 6, y 7) de los teoremas 1, 2 y 3.

Teorema 8

Todo número positivo posee una raíz cuadrada. En otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número x tal que $x^2 = \alpha$.

Teorema 9

Si n es impar, entonces cualquier ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Posee una raíz.

Teorema 10

Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, entonces existe un número y tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x .

Teorema 11

Consideremos la ecuación (*) $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = c$,

Y supongamos que n es par. Entonces existe un número m tal que (*) posee una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna $c < m$.

4.2.4 Sobre la derivada de una función

En esta sección el autor expone sobre la derivabilidad de una función, presenta la definición de derivada de una función y un teorema que relaciona la continuidad de una función con la derivada de una función en a , además, y producto de esta relación menciona un tipo especial de funciones que se caracterizan por ser continua en todas partes pero derivable en ningún punto, como por ejemplo la función de Weierstrass.

Función derivable en a

Definición

La función f es **derivable en a** si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe.}$$

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de **derivada de f en a** . (Decimos también que f es derivable si f es **derivable** en a para todo a del dominio de f .)

El autor continúa agregando dos comentarios

1. Definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente $f'(a)$. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable en a .
2. El símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números a tales que f es derivable en a , y cuyo valor para tal número a es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(Para ser muy precisos: f' es el conjunto de todos los pares

$$\left(a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

Para los que existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.) la función f' recibe el nombre de **derivada** de f .

Teorema

Si f es derivable en a , entonces f es continua en a .

Demostración

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$ es equivalente a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; así, pues, f es continua en a .

El autor hace hincapié en que el recíproco del teorema anterior no se cumple. Una función derivable es continua, pero una función continua no es necesariamente derivable. Como ejemplo de ello menciona que las funciones continuas que ha examinado hasta ahora han sido derivables en todos los puntos con una excepción a lo sumo, pero existen funciones que dejan de ser derivables en varios puntos e incluso en un número infinito de ellos. En realidad, el caso puede ser mucho peor, existen funciones que son continuas por todas partes y derivables en ningún punto.

4.2.5 Sobre el significado de la derivada

El valor máximo de una función

Definición

Sea f una función y A un conjunto de números contenido en el dominio de f . Un punto x de A se dice que es un **punto máximo** de f sobre A si

$$f(x) \geq f(y) \text{ Para todo } y \text{ de } A.$$

El número $f(x)$ mismo recibe el nombre de **valor máximo** de f sobre A (y decimos también que f "alcanza en x " su valor máximo sobre A).

Con respecto a la definición anterior, el autor menciona que el valor máximo de f sobre A puede ser $f(x)$ para varios x distintos; en otras palabras, una función puede tener distintos puntos máximos sobre A , aunque puede tener a lo sumo un valor máximo. Nos interesará por lo general el caso en que A es un intervalo cerrado $[a, b]$; si f es continua, entonces el teorema 7-3 nos garantiza que f tiene efectivamente un valor máximo sobre $[a, b]$.

A continuación presenta una definición posible de mínimo: **f tiene un mínimo** sobre A en x , si f tiene un máximo en x sobre A .

Teorema 1

Sea f una función definida sobre (a, b) . Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a, b) , y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Demostración

Si h es un número cualquiera tal que $x + h$ está en (a, b) , entonces

$$f(x) \geq f(x + h) ,$$

Puesto que f tiene un máximo sobre (a, b) en x . Esto significa que

$$f(x + h) - f(x) \leq 0 .$$

Así, pues, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0 ,$$

Y en consecuencia

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0 .$$

Por otra parte, si $h < 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 ,$$

De modo que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 .$$

Por hipótesis, f es derivable en x , de modo que estos dos límites deben ser iguales entre sí e iguales a $f'(x)$. Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{Y} \quad f'(x) \geq 0 ,$$

De lo cual se sigue que $f'(x) = 0$

Puesto que $f'(x)$ depende solamente de los valores de f cerca de x , resulta casi evidente cómo obtener una versión más fuerte del teorema 1, a través de la siguiente definición

Sea f una función, y A un conjunto de números contenido en el dominio de f . Un punto x de A es un **punto máximo o (mínimo) local** de f sobre A si existe algún $\delta > 0$ tal que x es un punto máximo [mínimo] de f sobre $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.

Teorema 2

Si f está definida sobre (a, b) y tiene un **máximo (o mínimo) local** en x , y f es derivable en x , entonces $f'(x) = 0$.

Posteriormente el autor solicita tener precaución en el sentido de que el recíproco del teorema 2 no es cierto; es posible que $f'(x)$ sea 0 aunque x no sea un punto máximo o mínimo local de f . Razón por la cual se ha adoptado una terminología especial para describir números x que satisfagan la condición $f'(x) = 0$.

Definición

Se llama **punto singular** de una función f a todo número x tal que

$$f'(x) = 0.$$

El número $f(x)$ mismo recibe el nombre de **valor singular** de f .

El problema de hallar el máximo o mínimo de f en un intervalo cerrado $[a, b]$

Entonces, si f es continua, podemos por lo menos estar seguros de que existe un máximo y un mínimo.) Para localizar el máximo y el mínimo de f deben considerarse tres clases de puntos.

- 1) Los puntos singulares de f en $[a, b]$.
- 2) Los extremos a y b .
- 3) Los puntos x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x .

Para las clases de puntos anteriores, comenta

Si x es un punto máximo o un punto mínimo de f sobre $[a, b]$, entonces f debe estar en una de las tres clases de arriba enumeradas: pues si x no está en el segundo o en el tercer grupo, entonces x está en (a, b) y f es derivable en x ; en consecuencia $f'(x) = 0$, por el teorema 1, y esto significa que x pertenece al primer grupo.

Si hay muchos puntos en estas tres categorías, puede todavía no ser fácil hallar el máximo y el mínimo de f , pero cuando existen solamente unos pocos puntos singulares, y solamente unos pocos puntos en los cuales f no es derivable, el procedimiento es bastante directo: Se halla simplemente $f'(x)$ para cada x que satisface $f'(x) = 0$ y $f(x)$ para cada x tal que f no es derivable en x y, finalmente, $f(a)$ y $f(b)$. El mayor de todos éstos será el valor máximo de f y el menor será el mínimo.

4.2.6 Sobre la integral de una función

Definición de partición

Sea $a < b$. Recibe el nombre de **partición** del intervalo $[a, b]$ toda colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b .

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

Los puntos de una partición pueden ser numerados $t_0, \dots, t_n$ de manera que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b ;$$

Supondremos siempre que se ha dado siempre una numeración de este tipo.

Definición de suma inferior y suma superior

Supongamos que f es acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$. Sea

$$m_i = \inf \{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$

$$M_i = \sup \{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

La suma inferior de f para P , designada por $L(f, P)$, se define poniendo

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}).$$

La suma superior de f para P , designada por $U(f, P)$, se define poniendo

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (t_i - t_{i-1}).$$

Teorema 1

Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$, y sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$$

Definición de integral de Riemann

Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\sup \{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \inf \{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de **integral** de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

(El símbolo f recibe el nombre de *signo integral* y en su origen era una *s* alargada, por «suma»; los números a y b reciben el nombre de *límites de integración inferior y superior*.) La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de **área** de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$.

CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES

La notación $\int_a^b f$ puede ser escrita de manera análoga a la notación de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

$\int_a^b f(x)dx$ Significa precisamente lo mismo que $\int_a^b f$

Si f es integrable, entonces según esta definición,

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) \text{ Para todas las particiones } P \text{ de } [a, b].$$

Además, $\int_a^b f$ es el único número con esta propiedad.

Teorema 2

Si f está acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Teorema 3

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Teorema 4

Sea $a < c < b$. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Recíprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 5

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$ entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Teorema 6

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces para cualquier número c , la función cf es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f.$$

Teorema 7

Supóngase f integrable sobre $[a, b]$ y que

$$m \leq f(x) \leq M \text{ para todo } x \text{ de } [a, b]$$

Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema 8

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

Entonces F es continua sobre $[a, b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 1. Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en c de $[a, b]$, entonces F es derivable en c , y

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b , entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por la derecha o por la izquierda de F .)

Teorema 2. Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g , entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Teorema 3

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Como hemos señalado, nuestro objetivo en este capítulo fue la de mostrar las nociones de ingeniería y de matemáticas que permitieran tener un dominio de validez para nuestros análisis en el ETM idóneo y personal. Por lo que no presentamos un ETM de referencia con su análisis sino sólo una aproximación. Sin embargo, vale la pena señalar algunos elementos que nos permiten reflexionar en torno a las génesis del ETM y que nos permiten dar luz y cabida a los análisis que, en profundidad realizamos en los capítulos 5 (ETM idóneo) y 6 (ETM personal).

De la génesis semiótica: aquí identificamos signos que permitirán comprender la construcción y uso de modelos y visualizar de forma analítica sus componentes. Tal es el caso de los macrosignos que se asocian a diagramas que permiten comprender los constituyentes de los sistemas de equilibrio, o elementos estructurales donde sus diversos componentes pueden visualizarse para idealizar cargas de peso que deben resistir los elementos. También identificamos signos asociados a registros simbólicos, esto se evidenció con riqueza de significados, pues permitió identificar funciones que modelan el comportamiento interno y externo de una estructura. Además de la identificación de la ecuación diferencial que modela elementos estructurales sujetos a flexión. Aquí se identificaron signos que asocian hipótesis fundamentales del análisis de una estructura como son: la linealidad del material, la relación esfuerzo deformación y el equilibrio.

De la génesis instrumental: en esta génesis identificamos principalmente tres artefactos. Artefactos constituidos por las ecuaciones de equilibrio que permiten plantear y resolver funciones que rigen el comportamiento interno y externo de una estructura. Artefactos asociados a relaciones desplazamiento-deformación que permiten entender la integral que modela el desplazamiento de un determinado punto de la estructura.

De la génesis discursiva: identificamos elementos que permiten argumentar y justificar soluciones de una estructura. Por ejemplo las condiciones de equilibrio interno y externos puede de alguna manera dar elementos que justifiquen un buen procedimiento de solución. Además las hipótesis fundamentales (linealidad del material y compatibilidad de deformaciones) permiten que las nociones trabajadas tengan una estructura sólida y lógica.

Como cierre del capítulo, cabe señalar que, hemos presentado solamente las definiciones de las nociones que corresponden a los modelos que emergieron en los problemas estudiados en el curso de Análisis Estructural. Por tanto, el capítulo es sólo una aproximación al ETM de referencia desde las nociones de ingeniería y matemáticas consideradas. Es importante destacar que este capítulo, por ende, fue realizado después del estudio del

*CAPÍTULO 4 (2). CONCEPTOS DE LA INGENIERÍA Y DE LA MATEMÁTICA
PRESENTES EN LOS MODELOS ESTRUCTURALES*

ETM idóneo. Sin embargo, en el capítulo 1 sección 1.9 se realiza una aproximación epistemológica a la noción de función. En las nociones expuestas en este capítulo podemos observar que en ingeniería el registro figural es indispensable y se observan como una constante. En las nociones de cálculo, si bien Spivak utiliza los registros gráficos, estos no son lo fuerte.

Capítulo 5

ETM extendido idóneo: análisis y resultados

Capítulo 5. ETM extendido idóneo: análisis y resultados

Introducción

El presente capítulo se discuten y analizan los problemas asociados a los temas que se han seleccionado. Para ello, se realiza un análisis con base en categorías que hemos construido (en el capítulo 3, de metodología, se muestra a detalle el insumo metodológico que hemos realizado para el análisis) con base en el Ciclo de Modelización (CM) y el ETM extendido. Por último, se discuten los resultados del capítulo.

5.1 Contexto y metodología de análisis

Contexto

A continuación, se presenta la descripción y análisis resultado de la observación de clases en un curso de ingeniería civil de una universidad chilena, lo anterior es realizado en el marco del ETM idóneo del profesor de una asignatura denominada Análisis Estructural, dicha asignatura pertenece al eje de formación profesional de la carrera. Para el análisis que se presenta a continuación se ha considerado la primera parte del curso (análisis de estructuras estáticamente determinadas) así mismo dentro de esa parte del curso se han seleccionado las unidades dos y cuatro, correspondientes a la determinación de reacciones y esfuerzos internos para la unidad dos y a la determinación de deformaciones para la unidad cuatro.

Metodología para el análisis de los problemas

Para realizar la descripción, explicación y análisis se han seleccionado problemas representativos, resueltos por el profesor en clase, de cada unidad mencionada, cuatro son problemas resueltos para la unidad 2 y dos para la unidad 4. Cabe señalar que los problemas seleccionados se resolvieron durante sesiones de clase de 1.45 hrs. Los problemas 1 y 2 fueron abordados en la clase número 4, el problema 3 durante la clase número 3, el problema 4 durante la clase número 5, el problema 5 y 6 durante la clase número 12.

A la asignatura que se va a analizar le antecede la asignatura de mecánica de sólidos como parte de la formación del estudiante en ciencias de la ingeniería.

El análisis que se presenta a continuación consta de las siguientes dos etapas:

a) Descripción de las prácticas de especialidad y matemáticas del profesor en la resolución del problema resuelto en clase.

En esta primera etapa se realiza una explicación de las prácticas del profesor en dos sentidos, en el sentido propia de la especialidad del análisis

estructural y en el sentido de la práctica matemática y relación entre ambas prácticas. Presentamos una descripción de lo realizado por el profesor en el desarrollo de la tarea resuelta en clase así como una conexión entre el problema trabajado y los elementos matemáticos presentes, ello con la finalidad de establecer la relación entre los contenidos del análisis estructural y la matemática.

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo ingenieril asociado a la situación.

Momento 4. Presentación de los resultados obtenidos y análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos realizados y validarlos.

c) **Análisis de la tarea desde el CM y el ETM extendido.**

En una segunda etapa se realiza un análisis teórico considerando elementos presentes en la práctica del profesor en las etapas del CM y las génesis y sus relaciones, en el ETM extendido. Para después, establecer algunas conexiones entre ambos modelos teóricos para esta tarea específica.

Cada momento de clase fue analizado con base en categorías tomadas desde el modelo de ETM extendido para la ingeniería (se estudió cómo el profesor trabajó en las génesis: semiótica, instrumental y discursiva, además, de sus relaciones) y el CM (en qué etapa y de qué manera el profesor trabajó en las etapas: entender la tarea, estructurar/simplificar en orden de configurar un modelo real, matematizar, trabajo matemático con modelos, interpretación/validación)

Para analizar se consideran tareas de estructuras estáticamente determinadas (reacciones externas y esfuerzos internos, diagramas de fuerza cortante y momento flector, deformaciones (deflexiones y rotaciones), correspondientes a las unidades II y IV de la asignatura de análisis estructural (Tabla 5.6).

Para ubicar las unidades que se han seleccionado se presentan las unidades a las que pertenece el programa de curso de análisis estructural.

Tabla 5.6 Programa de la asignatura de análisis estructural

UNIDAD I. Introducción	UNIDAD II. Determinación de Reacciones Externas
- Alcances del curso - Campos de aplicación	- Resolución mediante estática - Estructuras de reticulados

CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

• Situaciones no previstas en el curso • Ejemplos prácticos	• Resolución mediante trabajos virtuales
UNIDAD III. Líneas de Influencia	UNIDAD IV. Cálculo de Deformaciones
• Concepto de línea de influencia • Cálculo de líneas de influencia • Principio de Müller-Breslau • Trenes de carga	• Método de doble integración • Método de viga conjugada • Método de trabajos virtuales
UNIDAD V. Estructuras Hiperestáticas	UNIDAD VI. Análisis Matricial
• Introducción al método de flexibilidad • Introducción al método de rigidez • Simplificación a las estructuras hiperestáticas • Método de flexibilidad generalizado • Método de Rigidez • Método de rigidez directa	• Matriz de rigidez para estructuras de reticulados • Matriz de rigidez para elementos flexurales • Resolución de problema

A continuación, se especifican los problemas que se van a analizar, es decir, a qué sección de la unidad corresponde. Como se mencionó las unidades seleccionadas para describir y analizar fueron las unidades II y IV, de dichas unidades se seleccionaron problemas resueltos por el profesor en clase, ambas unidades corresponden al tratamiento de estructuras estáticamente determinadas.

Para la unidad 2, se seleccionaron problemas relacionados con la resolución mediante estática, esto debido a que el profesor hizo más énfasis en ese método por el tiempo empleado en desarrollarlo. Para la unidad 4, los problemas que seleccionamos se relacionan con el método de los trabajos virtuales, la selección fue con base en la generalidad del método expresada por el profesor; y además, porque desde la observación clase, nos pareció más accesible para su estudio. A continuación, se muestra una tabla (Tabla 5.7) con el tipo de problema seleccionado para cada una de las dos unidades.

Tabla 5.7 Tipos de problemas seleccionados

Unidad II: Determinación de reacciones externas	Unidad IV: Deformaciones
1. Explicación del tema de reacciones externas y esfuerzos internos	5. Deformación de una estructura estáticamente determinada tipo viga

2. Estructura estáticamente determinada tipo viga	6. Deformación de una estructura estáticamente determinada tipo marco
3. Estructura estáticamente determinada tipo marco	
4. Estructura estáticamente determinada tipo armadura	

En este capítulo nos interesa indagar en las relaciones que emerjan entre nociones relacionadas con objetos matemáticos, modelos matemáticos y modelos ingenieriles. En lo que sigue se analizan 6 problemas correspondientes a las unidades descritas en la tabla precedente.

5.2 Problemas analizados en el ETM extendido idóneo

5.2.1 Explicación del tema de reacciones externas y esfuerzos internos

Este apartado tiene por finalidad mostrar cómo el profesor explica un problema en el transcurso de la clase. Aquí, no se usará los momentos descritos antes. Sin embargo, esta clase que mostramos la encontramos significativa porque el profesor lo hace para introducir cada unidad del Programa (lo cual es una forma de proceder del profesor en clase para los temas que trata durante el curso), y por otro lado, es un promover un tratamiento conceptual que va a relacionar los métodos que usará para resolver los problemas de plantea en el curso. Ello se muestra concordante con la entrevista inicial realizada al profesor, donde plantea la importancia de lo conceptual del curso, para de esta manera el estudiante afronte situaciones no rutinarias o el manejo de las potencialidades pero también restricciones que le pudiera proporcionar el manejo de software profesional.

[Entrevistador]: Y por ejemplo, en el ejercicio profesional, como ya me comentó, también se utiliza el software, no sé si pudiera comentar buenas experiencias o desventajas del uso del programa.

[Profesor]: sí, el software se utiliza bastante, en cuanto al uso de este programa específico hay que señalar que en Chile, la gran mayoría de los empleadores prácticamente cuando publican algún tipo de llamado a estudiantes en práctica o profesionales Juniors, siempre les exigen el manejo de este programa. Esto genera siempre una presión en el estudiante porque siente que de alguna forma debe recibir esta formación, aparte de la *formación conceptual que nosotros les brindamos en clase*. La manera que hemos encontrado nosotros para solventar este problema ha sido mediante las ayudantías, donde se les brinda la oportunidad a los estudiantes de formarse con los ayudantes en el uso del programa.

El profesor introduce el tema con una resolución mediante estática de estructuras estáticamente determinadas y distingue las estructuras estáticamente determinadas de las estructuras estáticamente

indeterminadas. El profesor explica que cuando el número de incógnitas es mayor al número de ecuaciones proporcionadas por el análisis de equilibrio de la estructura, entonces las estructuras se denominan hiperestática o estructura estáticamente indeterminada. Cabe señalar, que la noción de solución de un sistema de ecuaciones perteneciente al álgebra lineal se hace presente en el contexto de solución del problema.

En estática para que un elemento estructural bidimensional se considere en equilibrio debe cumplir que las condiciones de equilibrio sean igual a cero. Así, se tiene:

Sumatoria de fuerzas en el eje x igualada a cero $\sum F_x = 0$

Es decir, se debe considerar la sumatoria de todas las fuerzas a las que está sujeta la estructura, y se debe hacer en el eje X, ello con la finalidad de mantener en equilibrio traslacional horizontal a la estructura.

Sumatoria de fuerzas en el eje y igualada a cero $\sum F_y = 0$

Es decir, se debe considerar la sumatoria de todas las fuerzas a las que está sujeta la estructura, y se debe hacer en el eje Y, ello con la finalidad de mantener en equilibrio traslacional vertical a la estructura.

Sumatoria de momentos (un momento es una fuerza perpendicular el eje centroidal de la sección considerada por la distancia al punto respecto de donde se desea calcular la sumatoria de momentos) igualada a cero $\sum M = 0$

Por último, se debe considerar la sumatoria de momentos, ello se realiza con la finalidad de mantener a la estructura en equilibrio rotacional, es decir que no rote de manera angular.

Otra condición donde emerge relación entre la matemática y el análisis estructural son las condiciones de trabajo supuestas, las cuales, están relacionadas con la estructura (y sus elementos) que guardan una relación de proporcionalidad lineal en cuanto a la relación esfuerzo – deformación que cumplen los materiales, la cual es llamada *linealidad del material*, que es una hipótesis dada a los materiales. La otra relación lineal supuesta es cuando ocurre que los desplazamientos y giros son pequeños, llamada *linealidad geométrica*.

Al aplicar las condiciones de equilibrio (sumatoria de fuerzas y momentos) se obtienen los valores incógnitas de las reacciones externas, seguidamente se trazan los gráficos relacionados con los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante. La relación entre ambos gráficos hace que emerja otra relación entre la matemática y la disciplina, donde el profesor menciona la relación sujeta a las condiciones de carga y los gráficos (de cortante y momento flexionante). El profesor proporciona el siguiente diagrama (Figura 5.75)

[Profesor]: Tómesese como ejemplo la viga que se muestra a continuación:

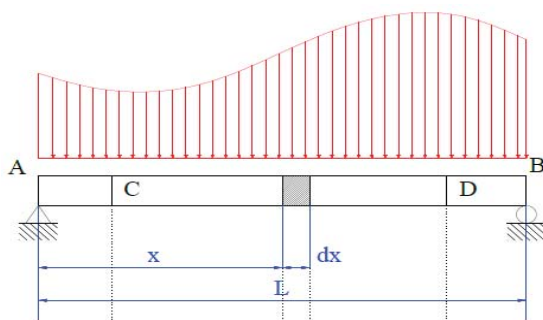


Figura 5.75 Diferencial en una viga genérica

En el Diagrama se muestra una relación entre condiciones de carga y diagramas de esfuerzo cortante (V Se llama fuerza cortante (definida en capítulo 4(2) p. 144). Hibbeler (1997) la define como “la fuerza que reside en el plano del área y se desarrolla cuando las cargas externas tienden a ocasionar que los dos segmentos del cuerpo resbalen uno sobre el otro” (p.7)) y momento flexionante (M se llama momento flexionante (definido en capítulo 4(2) p. 145). Hibbeler (1997) lo define como “un momento causado por las cargas externas que tienden a flexionar el cuerpo respecto a un eje que se encuentra dentro del plano del área” (p.7).

Ante ello el profesor declara lo siguiente:

[Profesor]: Si existe una función continua $M_{(x)}$ y además, existe dM/dx , cuando ocurre que $V = 0$ significa que se ha alcanzado un máximo o mínimo en el valor de M . En caso de que se tenga corte nulo en un tramo, implica que el momento flector es constante en dicho tramo (condición de flexión pura). Donde: $M_{(x)}$ es la función de momento dM/dx , es la derivada del momento con respecto a x

A continuación, se presentan tres diagramas donde el profesor realiza un análisis cualitativo con la finalidad de establecer las relaciones entre ambos diagramas. El diagrama en azul representa al diagrama de fuerza cortante, dicho diagrama se utiliza con la finalidad de garantizar el soporte de las cargas verticales a las cuales está sometida la estructura. El diagrama en rosa, se denomina diagrama de momento flector (flector debido a que puede causar que la estructura se deforme).

En el diagrama de la Figura 5.76, se puede observar que cuando la función cortante V se hace cero, es decir, que cuando la primera derivada del momento con respecto a x se hace cero se presenta un valor máximo (o mínimo) del momento flector. Además, se puede observar que una variación lineal en el diagrama de fuerza cortante se corresponde con una variación cuadrática en el momento flexionante, el cual es un comportamiento general de estructuras sujetas a este tipo de distribución de cargas.

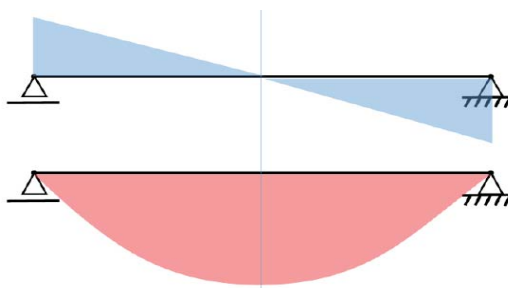


Figura 5.76 Diagramas de esfuerzo cortante (azul) y momento flector (rosa)

Después proporciona otra posible relación entre el esfuerzo cortante y el momento flexionante, esquematizada a través del siguiente diagrama (Figura 5.77)

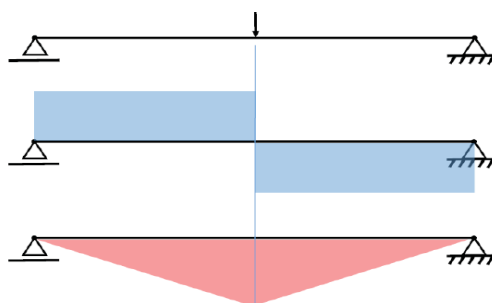


Figura 5.77 Relación cortante constante y momento lineal

Declarando con respecto al diagrama de la figura 3 lo siguiente:

Profesor: Si la carga distribuida de un tramo es nula, el esfuerzo cortante en dicho tramo es constante y el momento flector varía linealmente en dicho tramo (flexión simple)

En el diagrama anterior, observamos que la representación gráfica del cortante y del momento presenta un salto, debido a que las cargas puntuales sobre la estructura originan saltos en las gráficas (continuas). Además, en el caso anterior se tiene que para una variación constante del diagrama del cortante (diagrama en azul con una representación de línea horizontal) se tiene una variación lineal del diagrama de momento (diagrama en rosa con una representación lineal).

Y continua presentando el último caso de relación entre el diagrama (Figura 5.78) de esfuerzo cortante (azul) y momento flexionante (rosa)

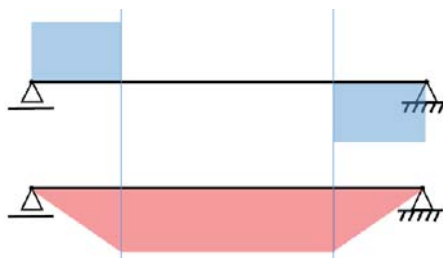


Figura 5.78 Cortante con sección nula y momento

Mencionando que:

[Profesor]: Si la carga distribuida de un tramo es constante, el esfuerzo cortante en dicho tramo variará linealmente y el momento flector varía según una función cuadrática en dicho tramo.

En este diagrama también se puede observar la relación entre los diagramas de cortante y momento en cuanto a los valores máximos (o mínimos del momento) y el tipo de variación presente. Para la figura anterior se observa que cuando el diagrama de cortante pasa por el eje horizontal (cero) el diagrama de momento presenta un valor máximo y en cuanto a la variación se tiene que el diagrama de cortante presenta una variación constante por lo tanto el diagrama de momento presentará una variación lineal.

La pertinencia de los diagramas presentados por el profesor se corresponde con el comportamiento que estos van a estar presentando cada vez que se dibujen los diagramas solicitados en la solución de los problemas. Es decir, la relación entre la cargas y los diagramas de cortante y momento, son realizadas con la lógica de la relación entre las formas de variación presentada por el profesor. Por tanto, el comportamiento esperado de los diagramas será un indicador que valide el trazo de los mismos, tal como se ha explicado en los casos anteriores.

La forma que evidenciamos de trabajo del profesor en clase, se corresponde con la entrevista que le realizamos, donde él menciona lo siguiente:

[Entrevistador]: Y en esas situaciones que menciona que pudieran salir nuevas, en donde las rutinas ya no aplican, si volvemos a lo básico, obviamente que el software no va a ser la solución inmediata directa, me imagino y allí es donde se tiene que hacer uso de una mayor especialidad donde la modelización matemática sería parte de esa especialización fundamental.

[Profesor]: Si, de hecho desde hace unos veinte años dentro de la ingeniería estructural hay algo que se denomina ingeniería conceptual, es el trabajar con modelos muy sencillos, esto es por ejemplo un extracto normativo (muestra un manual americano de normas de diseño de estructuras) de cómo se debe estructurar una edificación con la finalidad de que la respuesta sísmica de esta edificación se encuentre dentro de unos parámetros de aceptabilidad, *esto que se denomina ingeniería conceptual o diseño conceptual de edificios no tiene cabida dentro de software, es algo que el estudiante tiene que internalizar, es*

CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

algo que el estudiante tiene que digerir y tiene que manejar previo a la utilización del programa ...

Por tanto en la primera situación de clase analizada podemos evidenciar que la forma de trabajar del profesor se corresponde con sus preocupaciones mostradas en la entrevista, donde el tratamiento conceptual de la asignatura es relevante para hacer que se corresponda con la formación de estudiantes de ingeniería, que posteriormente en los lugares de trabajo tendrán que hacer uso de otras herramientas adicionales a la teoría del curso. Dichas actividades tendrán que ver con hacer un balance entre sus herramientas teóricas con herramientas adicionales, como es el uso de software, el adecuado manejo de las normas de construcción y otras relacionadas con la edificación, como son costos y tiempos idóneos. Por tanto, el proceso de modelización de una estructura hasta este momento, es un proceso donde lo conceptual es clave para el adecuado manejo de las herramientas teóricas y su relación con otras herramientas.

Con respecto a las relaciones entre los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante mostradas anteriormente el profesor rescata de su referencial saberes relacionados con la matemática y con el análisis estructural, nociones matemática presentes en su discurso son:

- Las relaciones de proporcionalidad lineal en una relación con la relación entre los esfuerzos y las deformaciones del material, condición necesaria dentro de la hipótesis de trabajo llamada linealidad del material.
- La noción matemática de variación y acumulación pues rescata de su referencial teórico y de especialidad la noción de variación que relaciona los diagramas de esfuerzo cortante y momento flexionante.
- La noción de solución de un sistema de ecuaciones (lineales) relacionada con la posibilidad de resolver una estructura bajo las condiciones de la estática, llamando en dicho caso que la estructura es del tipo estáticamente determinada.

De las nociones de matemáticas y de ingeniería observadas hasta la unidad 2, podemos resumir las relaciones entre el análisis estructural y la matemática, como se muestran a continuación (Tabla 5.8)

Tabla 5.8 Dialéctica: lenguaje del análisis estructural y de la matemática

En el lenguaje del análisis estructural	En el lenguaje matemático
Linealidad del material acorde a la relación entre los esfuerzos y las deformaciones (Ley de Hooke)	Proporcionalidad

Variación del momento flector con respecto a X	Primera derivada de una función
Variación de la fuerza cortante con respecto a X	Primera derivada de una función
La función de carga sobre la estructura vista como la variación de la variación del momento flector con respecto a X	Segunda derivada de una función
Cambio acumulado de la carga sobre la estructura	Integral definida
Cambio acumulado de la función que representa la fuerza cortante	Integral definida
Condiciones de la estática para determinar si una estructura es estáticamente determinada	Solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones lineales

A continuación, se presenta el análisis de los problemas asociados a 5 situaciones de clase, las cuales son analizadas de acuerdo a lo descrito en la sección de la metodología y descrito brevemente al inicio del presente capítulo.

5.2.2 Modelo estructural tipo viga

a) Descripción de las prácticas de especialidad y matemáticas del profesor en la resolución de la tarea resuelta en clase, estructurando la explicación del profesor con base a los siguientes momentos:

Unidad 2: Reacciones y esfuerzos internos

Se presenta la explicación de una tarea resuelta por el profesor y se realizan algunas conexiones entre la disciplina (análisis estructural) con la matemática. El problema pertenece a un ejemplo resuelto por el profesor y es correspondiente a la unidad dos "Reacciones y esfuerzos internos".

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Problema:

[Profesor]: Obtener los diagramas de los esfuerzos internos de la viga mostrada

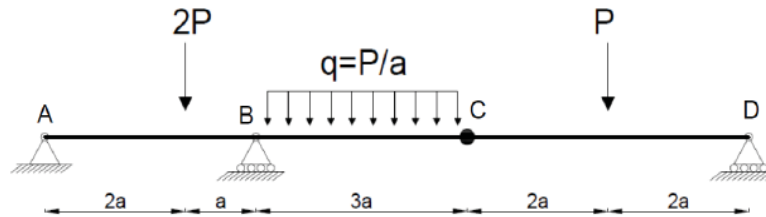


Figura 5.79 Esquema del problema

El problema que presenta el profesor corresponde a una estructura del tipo viga (Figura 5.79), compuesta por dos elementos estructurales, los elementos se encuentran separados por una rótula en C. Como se aprecia la estructura se encuentra sobre tres apoyos:

El primer apoyo (A) es del tipo apoyo fijo, lo que implica que justo en ese punto, la estructura está impedida para moverse tanto de manera horizontal como vertical.

En el segundo apoyo, punto B, está apoyada sobre un rodillo, en este punto la estructura está impedida para moverse en el eje vertical.

El tercer apoyo se presenta con una rótula en C, la cual cumple la función de unir los elementos AC y CD, de tal manera que ello contribuye a que la estructura sea isostática (estáticamente determinada). Una rótula es un dispositivo que permite seccionar la estructura para de esta manera convertirla en una estructura estáticamente determinada, en este caso permite seccionar la viga en dos cuerpos e incluso brinda la posibilidad de realizar un análisis por separado, al no generar restricción con respecto a rotación.

Por último se presenta el cuarto apoyo en D, el cual tiene la misma función que el apoyo de tipo rodillo en B.

La estructura está sometida a dos cargas puntuales (P), las cuales pertenecen a las solicitaciones a las que está sometida la estructura. La primera en la sección AB y la segunda en la sección CD. Además, se somete a una carga uniformemente distribuida (de tipo rectangular) para la sección BC.

La tarea es determinar los diagramas de esfuerzos internos de la viga y con ello dibujar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector. Los diagramas solicitados son la representación del efecto que causa en la estructura por una parte los apoyos sobre los cuales está colocada y por otra las solicitaciones (cargas puntuales y distribuidas) a las que está sujeta.

El objetivo de determinar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector es la de proporcionar al diseñador estructural las condiciones donde la estructura presenta esfuerzos máximos y mínimos, esto es útil para

efectos del diseño de la estructura, lo que permite proporcionar estabilidad y seguridad estructural.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 1

En este momento el profesor presenta un modelo real, el cual se muestra idealizado debido a que consta de un modelo estructural tipo viga, donde están representados, tanto los apoyos donde está sujeta la estructura como el tipo de cargas a los cuales está sometida (dos puntuales y una uniformemente distribuida). Por tanto, se está en presencia de un modelo real que posteriormente iniciará la matematización de acuerdo al CM (Figura 5.81).

De acuerdo al CM, la transición que implica la etapa 3, hace necesario un trabajo en el mundo de la matemática. Sin embargo, observamos que en esta etapa, si bien el profesor evidencia un pasaje entre el modelo real y un modelo de ingeniería, aún no se muestra un trabajo con algún modelo matemático. Es por ello, que proponemos un ciclo de modelización (Figura 5.80) que extiende el ciclo, al agregar un tercer mundo - el mundo de la ingeniería - el cual posee, definiciones, praxis, teoría y formas de proceder distintas al mundo de la matemática. Donde lo aproximado y normado por la especialidad de la ingeniería se hace presente.

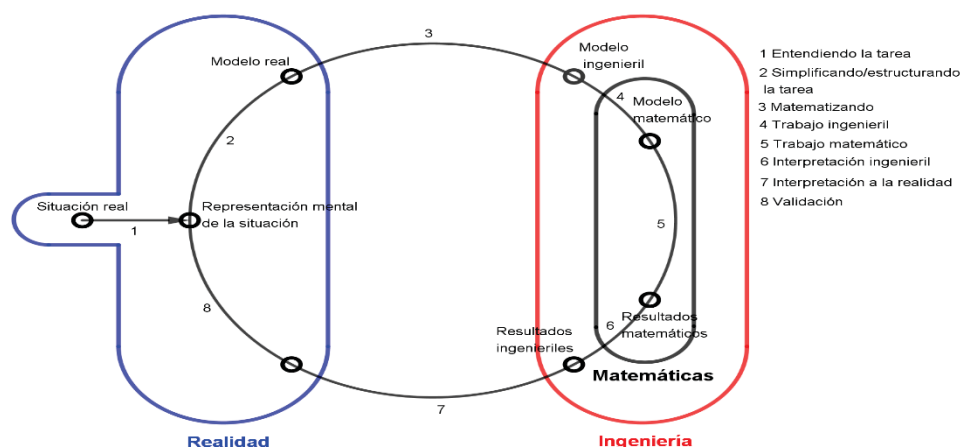


Figura 5.80 CM extendido (Elaboración propia), Adaptado de Borromeo Ferri (2006)

Por lo que para este momento la actividad en el CM propuesto queda representado en la (Figura 5.82)

ETM extendido para el momento 1

Recordamos que el problema es determinar los diagramas de esfuerzos internos de la viga, es decir, los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector. Los diagramas solicitados son la representación del efecto que causa en la estructura, por una parte, los apoyos sobre los cuales está colocada,

y por otra, las solicitaciones (cargas puntuales y distribuidas) a las que está sujeta.

Se activa la génesis discursiva (Figura 5.83), debido a que en este momento el profesor utiliza nociones relacionadas con el referencial de la ingeniería que van a permitir resolver la estructura, consideraciones como que el modelo estructural corresponde a una viga, y que la estructura es estáticamente determinada, resultan elementales para bien comprender el modelo estructural.

El registro figural presente está relacionado con el esquema que proporciona el profesor, el cual representa el modelo real del problema.

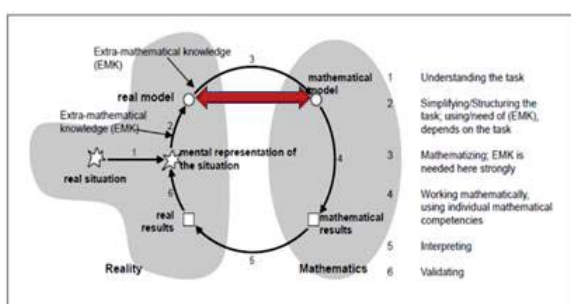


Figura 5.81 Ciclo CM momento 1

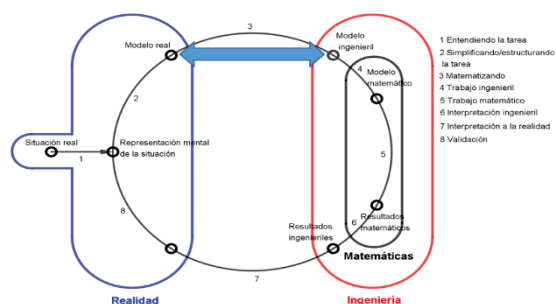


Figura 5.82 CM extendido momento 1

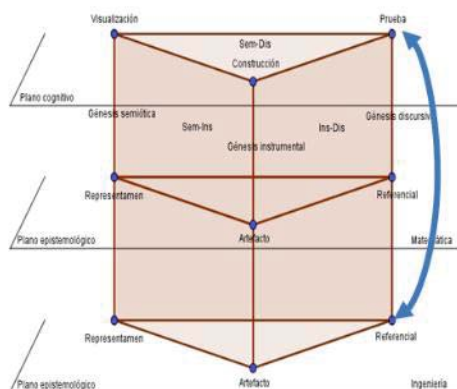


Figura 5.83 ETM extendido momento 1

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

[Profesor]: Las reacciones externas representan las incógnitas

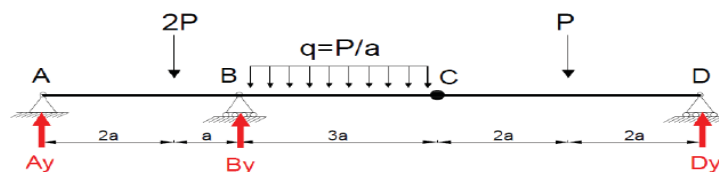


Figura 5.84 Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)

Como se mencionó, para resolver la tarea, es necesario considerar el efecto de los apoyos y de las solicitaciones, por tanto lo primero que realiza el profesor es dibujar un diagrama (Figura 5.84) de cuerpo libre de la estructura (DCL), el cual es útil para idealizar las incógnitas que corresponde a las reacciones externas (A_y, B_y, D_y) en este caso.

Los vectores representan las fuerzas de reacción de la estructura como respuesta al apoyo (basados en el principio de que a toda acción le corresponde una reacción pero de sentido contrario). Para el apoyo en A se tiene restricción de movimiento tanto horizontal como vertical, por lo que genera dos vectores fuerza de reacción, se puede notar que en el D.C.L. sólo se representa el vector fuerza para el eje vertical, debido a que en la estructura no existen solicitaciones de tipo horizontal (axiales a los elementos estructurales).

Lo mismo ocurre para los apoyos en B y C, los cuales quedan representados por vectores fuerza de reacción en el eje vertical, debido a que los apoyos tipo rodillo restringen el movimiento vertical en esos puntos.

La sección BC presenta una carga distribuida, el efecto de ésta sobre la estructura (y para efectos del cálculo) se idealiza mediante una carga puntual equivalente. El cálculo de dicha carga se realiza considerando el tipo de distribución de la carga (en este caso la carga es uniformemente distribuida de geometría rectangular).

Además, el valor para esa carga puntual y la posición de la misma debe corresponderse con el centro de gravedad de la carga distribuida. En este caso la carga distribuida es uniforme (rectangular). El valor de la carga puntual es el área del rectángulo (base $3a$ y altura la carga $q = P/a$) = $3p$ y la localización es a la mitad de la longitud de la sección $3a/2$ (al ser rectangular, la mitad de la sección coincide con el centro de gravedad de la carga).

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 2

En este momento, el profesor presenta los diversos conocimientos que desde el contexto extra matemático (EMK, en adelante: Extra Mathematical Knowledge) se deben considerar, en este caso, el EMK se corresponde con

aspectos que llevan a dibujar un DGL (Diagrama de Cuerpo Libre) de la estructura para avanzar en la matematización horizontal; ello servirá para estructurar la tarea a realizar, pues deben considerarse aspectos como el tipo de apoyo a los cuales está sometida la estructura, ya que de ello dependerá la contabilización del número de incógnitas que se corresponden a las reacciones externas de la estructura. Además, de considerar el tipo de cargas, siendo en este caso, que se debe considerar la carga uniformemente distribuida a través de su representación por una carga puntual establecida en el centroide de la región.

Podemos evidenciar que, si bien el profesor aún se encuentra con aspectos relacionados con el contexto extra matemático, se encuentra en una etapa de matematización vertical. Para ello, trabaja con la localización de fuerzas de reacción externas y sobre la condensación de la fuerza uniformemente distribuida en una fuerza equivalente puntual con localización al centro de la región donde se encuentra la carga uniformemente distribuida, por lo que podemos decir que el profesor se mueve entre la etapa tres (matematización) y la cuatro (trabajo con el modelo matemático-ingenieril) (Figura 5.85).

ETM extendido para el momento 2

En un trabajo de simplificación, el profesor realiza un diagrama utilizado frecuentemente en el análisis de estructuras (y en general es utilizado para resolver problemas físicos mecánicos), por tanto, aquí utiliza nociones del referencial de la ingeniería (en éste caso las de determinar el tipo de reacciones externas de acuerdo a la forma en que está apoyada la estructura y que va a representar como vectores fuerza normales al eje de la estructura). Además, se realizan idealizaciones geométricas para determinar el efecto de las cargas a las cuales está sometida la estructura, por ejemplo, en la sección donde la carga es uniformemente distribuida.

Por tanto, se activa la génesis discursiva (Figura 5.86), observándose un pasaje del referencial de la ingeniería (tipos de apoyos, tipos de cargas) hacía el referencial de la matemática (representación de vectores fuerza, cargas concentradas al centroide de la región rectangular correspondiente a la carga uniformemente distribuida). Por ejemplo, cuando realiza el cálculo de la magnitud y posición de la fuerza resultante equivalente a esa carga distribuida:

El valor de la carga puntual es el área del rectángulo (base $3a$ y altura la carga $q = P/a$) = $3p$ y la localización es a la mitad de la longitud de la sección $3a/2$ (al ser rectangular, la mitad de la sección coincide con el centro de gravedad de la carga).

Posteriormente, continua con el referencial de la ingeniería para probar que va a trabajar con una estructura estáticamente determinada, es decir, que el número de fuerzas incógnita sea igual o menor al número de ecuaciones

que puede proporcionar la estática, a saber y considerando que se está trabajando con un sistema de fuerzas coplanares, a saber $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M = 0$. En este momento, se debe comprobar tal condición. Por tanto, desde el representamen de la ingeniería (condiciones de equilibrio) se traslada hacia el representamen de la matemática (la sumatoria de fuerzas) para probar el equilibrio estático. Además, Se activa la génesis semiótica a través de los signos asociados a la representación figural asociada al D.C.L.

Así, el registro figural de este momento de la clase es el diagrama de cuerpo libre. Se observa activación de las génesis semiótica e instrumental. Se identifica el plano semiótico – discursivo [Sem-Dis].

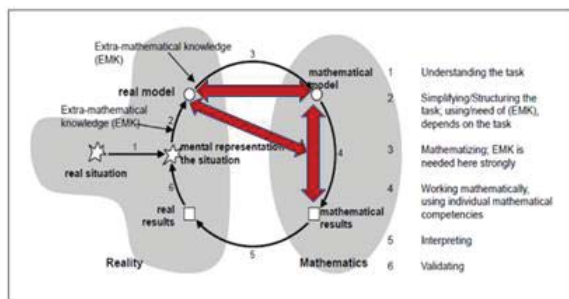


Figura 5.85 CM momento 2

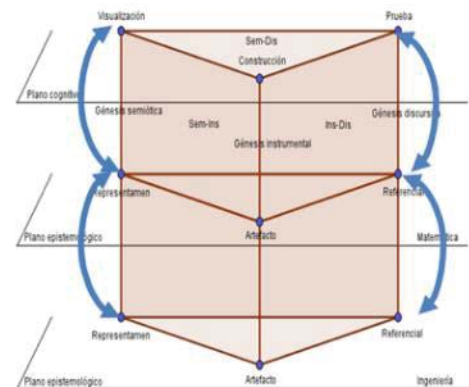


Figura 5.86 ETM extendido momento 2

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo (ingenieril) asociado a la situación.

[Profesor]: Aprovechando la presencia de una rótula en C, se toman momentos justo en ese punto que separa a las dos partes de la estructura

$$\begin{aligned}\sum M_C(\text{der}) &= 0 \\ 4a Dy - 2Pa &= 0 \\ Dy &= \frac{P}{2}\end{aligned}$$

Figura 5.87 Momento en el nodo C

A continuación, el profesor procede a determinar el valor de las incógnitas en cuanto a las reacciones (A_y, B_y, D_y). Para ello, menciona sobre aprovechar la presencia de una rotula en el punto C (es importante mencionar que es por esa rotula que la estructura es isostática (estáticamente determinada),

pues la rótula hace los efectos de conexión de elementos sin generar reacción alguna, debido a que no genera restricción de movimiento.

Por tanto, antes de la rótula se tienen dos incógnitas de reacción y se cuenta con dos ecuaciones que proporciona la estática ($\sum F_y$ y $\sum M$) y para el elemento que está después de la rótula se tiene una incógnita de reacción para dos posibles ecuaciones que proporciona la estática. Cabe destacar que, sin la presencia de la rótula en el punto C, la estructura sería del tipo hiperestática (estáticamente indeterminada) debido a que se tendrían tres incógnitas de reacción para dos ecuaciones que estaría proporcionando la estática, esto al no haber reacciones axiales.

En este paso, el profesor calcula la reacción D_y (Figura 5.87), a través de realizar una sumatoria de momentos a la derecha del punto C, aprovechando los efectos de la rótula antes mencionados.

[Profesor]: Se toma momentos respecto del punto B, en el cual se encuentra una de las reacciones incógnita

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ \frac{P}{2}(7a) - P(5a) - 3P\left(\frac{3a}{2}\right) + 2P(a) - A_y(3a) &= 0 \\ A_y &= -\frac{4P}{3}\end{aligned}$$

Figura 5.88 Momentos en el nodo B

A continuación, para calcular el valor de la reacción A_y (Figura 5.88) realiza sumatoria de momentos respecto del punto B, debido a que en ese punto se encuentra una reacción, la cual por estática no genera momento en el punto donde se aplica la sumatoria, por tanto puede calcular el valor de la incógnita A_y .

Se puede notar que, la reacción A_y en principio se representó suponiendo un vector fuerza dirigido hacia arriba, y en el cálculo, se obtuvo una reacción de valor negativo, ello indica que se supuso de manera contraria y debe cambiarse la dirección de la fuerza, es decir, se debe representar dirigida hacia abajo.

[Profesor]: Conocidas dos de las tres incógnitas, simplemente se resuelve considerando equilibrio de fuerzas según y o simplemente tomando momentos en C, pero para el miembro de la izquierda

$$\begin{aligned}\sum M_C(izq) &= 0 \\ \frac{4P}{3}(6a) + 2P(4a) - B_y(3a) + 3P\left(\frac{3a}{2}\right) &= 0 \\ B_y &= \frac{41P}{6}\end{aligned}$$

Figura 5.89 Momentos a la izquierda del nodo C

Por último, con respecto al cálculo del valor de las incógnitas para reacciones externas, procede a realizar sumatoria de momentos con respecto al punto

C , esta vez, hacia la izquierda y obtiene el valor de la reacción B_y (Figura 5.89).

[Profesor]: El paso siguiente es el de determinar las leyes de esfuerzos: Se puede trabajar en un sentido u otro, en este caso se comenzará a trabajar de izquierda a derecha.

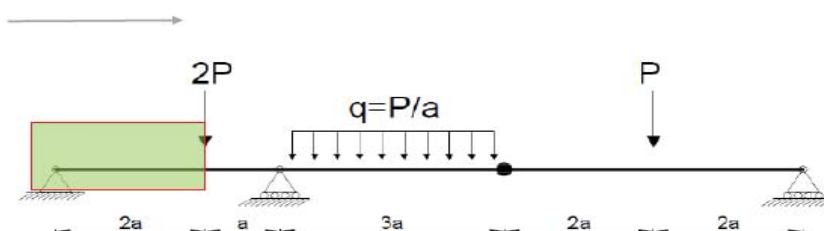
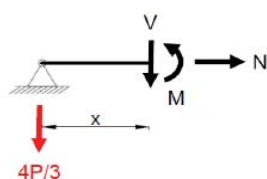


Figura 5.90 Primer corte

Una vez que se han determinado las reacciones externas (A_y, B_y, D_y), se procede a determinar las leyes de esfuerzos internos, los cuales serán útiles para construir y comprender el comportamiento gráfico de los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector. Para ello, se debe discretizar la estructura en tramos, el número de tramos se corresponde con el número de cambios en apoyo y con el cambio de cargas.

Por tanto, para la presente estructura se deben realizar las leyes de esfuerzos internos para los siguientes tramos: un primer tramo (Figura 5.90) desde A hasta justo antes de llegar a la primer carga $2p$; un segundo tramo justo después de la carga $2p$ y hasta el punto B; un tercer tramo desde el punto B hasta llegar a la rótula (punto C); un cuarto tramo justo después de la rótula (punto C) y hasta llegar a la carga P y un quinto tramos justo después de la carga P y el final de la estructura (punto D)

Para este primer tramo:



Con $0 \leq x \leq 2a$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{corte} &= 0 \\ M(x) &= -\frac{4P}{3}x \\ \Sigma F_y &= 0 \\ V &= -\frac{4P}{3}\end{aligned}$$

Figura 5.91 Suma de momentos y fuerzas para primer corte

Producto de las particiones en tramos, se presentan justo en el punto de corte, esfuerzos internos: axiales N (vector que coincide con el eje del elemento estructural), Cortantes V (vector que es perpendicular al eje de la estructura) y un momento M . La dirección de los tres esfuerzos internos se supone y en caso de resultar negativos se cambia la dirección supuesta sin afectar los cálculos realizados.

La convención de signos se considera como sigue: para momentos, es positiva en sentido de rotación a las manecillas del reloj; para la carga axial, positiva con vector dirigido a la derecha y para el esfuerzo cortante, positivo dirigido hacia arriba.

Para la función de momento encontrada (Figura 5.91) se aprecia que es el producto de la fuerza cortante por el desplazamiento hasta donde se realizó el corte para el primer tramo. Dónde: a es la distancia del tramo, x es la distancia desde el inicio (izquierda) de la viga y P es un parámetro para representar un valor determinado de carga.

Para la función cortante (Figura 5.91), se observa que es el valor de la suma algebraica de las magnitudes de los vectores fuerza, tomando como convención de signos la que se declara en párrafos atrás.

Para este tramo, se puede apreciar que la ley de esfuerzos para momento es de tipo lineal y para el esfuerzo cortante es de tipo constante. El tipo de variación presente en cada una de las leyes era de esperarse debido a la explicación del profesor donde presenta las relaciones diferenciales entre la carga a la cual está sujeto el tramo, el cortante y el momento flector. Donde se estableció que, la derivada del momento flector representa la ley de esfuerzo cortante y que la derivada de la ley de esfuerzo cortante representa a la carga a la cual esta solicitada la estructura en ese tramo.

Puede observarse que, como el tramo no tiene carga distribuida, el cortante varia de manera constante y el momento varia de manera lineal.

Para el segundo tramo:

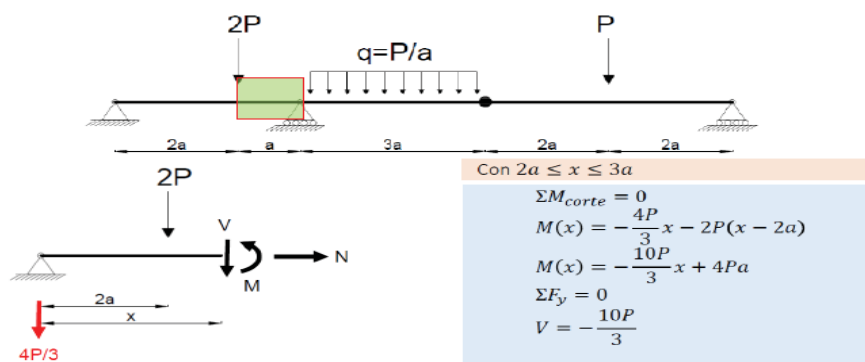


Figura 5.92 Suma de momentos y fuerzas para el segundo corte

Para este segundo tramo (Figura 5.92), puede observarse que al no existir carga distribuida, las leyes de esfuerzos internos para cortante son de tipo constante, y por tanto, es de esperarse que la ley de momento sea de tipo lineal.

Para el tercer tramo:

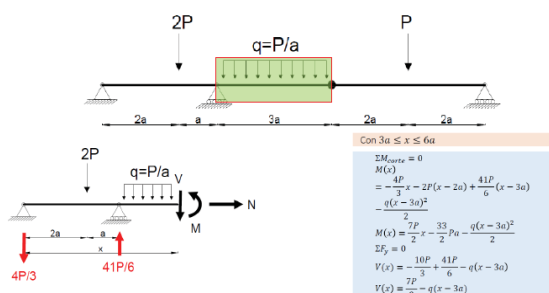


Figura 5.93 Suma de momentos y Figura 5.94 fuerzas para el tercer corte

[Transcripción]

Con $3a \leq x \leq 6a$

$$\sum M_{corte} = 0 \quad M(x) = -\frac{4p}{3}x - 2p(x - 2a) + \frac{41p}{6}(x - 3a) - \frac{q(x-3a)^2}{2}$$

$$M(x) = -\frac{7p}{2}x - \frac{33}{2}pa - \frac{q(x-3a)^2}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \quad V(x) = -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(x - 3a) = \frac{7p}{2} - q(x - 3a)$$

Para este tercer tramo (Figura 5.93), a diferencia de los anteriores, se tiene carga distribuida, presentado una ley de cortante que varía lineal, y por tanto, una ley de momento que varía de acuerdo a una función cuadrática.

Para el cuarto tramo:

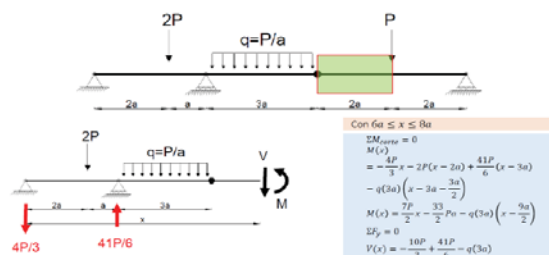


Figura 5.95 Suma de momentos y fuerzas para el cuarto corte

[Transcripción]

Con $6a \leq x \leq 8a$

$$\sum M_{corte} = 0 \quad M(x) = -\frac{4p}{3}x - 2p(x - 2a) + \frac{41p}{6}(x - 3a) - q(3a)(x - 3a - \frac{3a}{2})$$

$$M(x) = -\frac{7p}{2}x - \frac{33}{2}pa - q(3a)(x - \frac{9a}{2})$$

$$\sum F_y = 0 \quad V(x) = -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(3a) = -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(3a)$$

Al igual que en los tramos 1 y 2, este cuarto tramo (Figura 5.95) no presenta carga distribuida, por lo que era de esperarse que la ley de esfuerzo cortante sea de tipo constante, y que, la ley de momento flector sea de tipo lineal.

Para el quinto tramo:

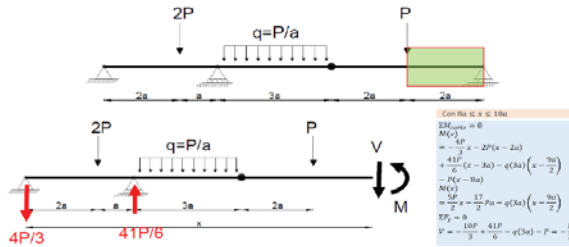


Figura 5.96 Suma de momentos y cortes para el quinto tramo

[Transcripción]

Con $8a \leq x \leq 10a$

$$\sum M_{corte} = 0 \quad M(x) = -\frac{4p}{3}x - 2p(x - 2a) + \frac{41p}{6}(x - 3a) - q(3a)\left(x - \frac{9a}{2}\right) - p(x - 8a)$$

$$M(x) = \frac{5p}{2}x - \frac{17}{2}pa - q(3a)\left(x - \frac{9a}{2}\right)$$

$$\sum F_y = 0 \quad V(x) = -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(3a) - p = \frac{5p}{2} - q(3a)$$

En este último tramo (Figura 5.96), tampoco hay carga distribuida por lo que el cortante es de tipo constante y el momento es de tipo lineal.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 3

En este momento, el profesor trabaja según la etapa 4 del CM (Figura 5.100), no obstante y por la naturaleza de la tarea, el profesor continuamente está realizando un pasaje entre el modelo real y etapa cuatro, debido al conocimiento necesario de lo extra matemático en la formulación, uso y trabajo con los modelos matemáticos.

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

Por ejemplo, cuando resuelve el valor de las incógnitas causadas por las reacciones externas de la estructura, tal como ocurrió para el cálculo de la reacción A_y

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ \frac{P}{2}(7a) - P(5a) - 3P\left(\frac{3a}{2}\right) + 2P(a) - A_y(3a) &= 0 \\ A_y &= -\frac{4P}{3} \end{aligned}$$

Figura 5.97 Modelo de equilibrio para momentos en el punto B

En el cálculo anterior (y en todo el proceso) (Figura 5.97), el profesor requirió tanto del EMK como el trabajo con el modelo formulado. Por un lado, el conocimiento del EMK permitió formular el modelo, al considerar primero la posibilidad del uso de la condición de equilibrio "suma de momentos a la derecha del punto c igual a cero", posteriormente formula el modelo considerando que, para momentos bajo fuerzas coplanares, cada término del modelo se formula como resultado de multiplicar el valor de la fuerza

por la distancia perpendicular (llamada brazo de palanca) desde la localización de la fuerza hasta el punto donde se realiza el equilibrio de momentos (B). Finalmente, realiza un trabajo algebraico para la simplificación y posterior despeje para encontrar el valor de la reacción A_y .

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar los esfuerzos internos

En esta etapa, se continua considerando las condiciones de equilibrio, pero ahora, a través de realizar cortes para cada sección de la estructura, estableciendo funciones de momento y funciones de corte para cada una de las cinco secciones de la estructura. Por ejemplo, para la sección tres se obtuvieron las siguientes funciones de momento y corte internas (Figura 5.98).

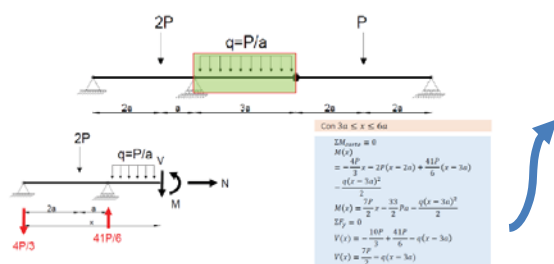


Figura 5. 98 Cálculo de funciones de momento y cortante para esfuerzos internos

[Transcripción] Con $3a \leq x \leq 6a$

$$\begin{aligned} \sum M_{corte} &= 0 \quad M(x) = -\frac{4p}{3}x - 2p(x-2a) + \frac{41p}{6}(x-3a) - \frac{q(x-3a)^2}{2} \\ M(x) &= -\frac{4p}{3}x - 2p(x-2a) + \frac{41p}{6}(x-3a) - \frac{q(x-3a)^2}{2} \\ V(x) &= -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(x-3a) \\ V(x) &= -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(x-3a) \end{aligned}$$

Se puede observar que, el profesor continua entre el trabajo con el modelo real y la etapa 4 (Figura 5.103), pues en la formulación de las funciones de momento y cortante, son necesarios los conocimientos de equilibrio estático y de la posición de las cargas. Además, considera ciertas convenciones en sus cálculos, como que el momento es positivo para cada uno de los términos que componen el modelo de función de momento, en cuanto a que la flexión que origine la fuerza cause una rotación contraria a las manecillas del reloj, caso contrario negativo y que el signo de cada uno de los términos que componen el modelo para la función cortante, deberá ser positivo que es causado por una fuerza con dirección hacia arriba, caso contrario negativa.

Así mismo, recordamos que para este tercer tramo a diferencia de los anteriores, se tiene carga distribuida, presentado una ley de cortante que varía lineal y por tanto una ley de momento que varía de acuerdo a una función cuadrática.

ETM extendido para el momento 3

En éste momento, se observan dos tipos de trabajos con modelos, un primer trabajo es el uso de las condiciones de equilibrio de la estática que permiten formular modelos para el cálculo de las reacciones externas y un segundo

trabajo con modelos donde se construyen funciones que representan esfuerzos internos de la estructura.

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

El profesor procede a determinar el valor de las incógnitas en cuanto a las reacciones (A_y, B_y, D_y). Por ejemplo, para el caso del cálculo de la reacción A_y , realiza sumatoria de momentos respecto del punto B (Figura 5.99), debido a que en ese punto se encuentra una reacción, la cual por estática no genera momento en el punto donde se aplica la sumatoria, por tanto puede calcular el valor de la incógnita A_y .

[Profesor]: Se toma momentos respecto del punto B, en el cual se encuentra una de las reacciones incógnita

$$\begin{aligned}\Sigma M_B &= 0 \\ \frac{P}{2}(7a) - P(5a) - 3P\left(\frac{3a}{2}\right) + 2P(a) - A_y(3a) &= 0 \\ A_y &= -\frac{4P}{3}\end{aligned}$$

Figura 5.99 Suma de momentos en B

Se observa que, la ecuación que construye es resultado de considerar el tipo de ecuaciones de equilibrio proveniente de la estática, en este caso $\Sigma M = 0$, pero aquí, ese conocimiento no es para probar equilibrio sino para plantear el modelo y resolver, por lo que las ecuaciones de equilibrio pasan a ser artefactos de la ingeniería y de la matemática que permiten la construcción y posterior trabajo con el modelo. Sin embargo, se considera ambos pasajes son consecuencia de partir del referencial (Figura 5.101) de la ingeniería (una artefacto simbólico). Por lo anterior, se observa que estas ecuaciones que provienen del referencial teórico se convierten en un instrumento pues permiten resolver y con esto se produce la activación de la génesis instrumental.

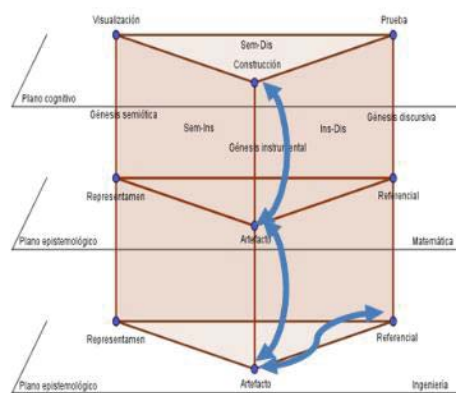
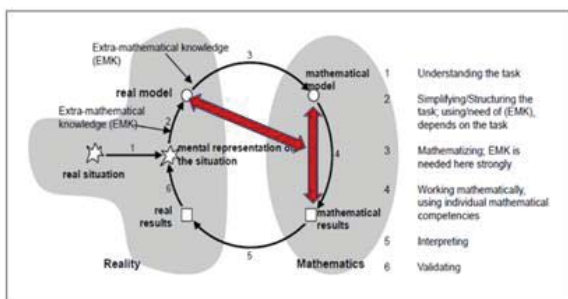


Figura 5.100 CM momento 3a

Figura 5.101 ETM extendido momento 3a

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar los esfuerzos internos

En este trabajo con modelos, se considera la construcción de funciones que representan los esfuerzos internos de la estructura.

Para ello, como se explicó en la descripción de la tarea, el profesor discretiza la estructura y calcula funciones de esfuerzos internos para cada sección, a saber: funciones de momento flector $M(x)$ y funciones de cortante $V(x)$. Aquí, se observa la activación de la génesis semiótica (Figura 5.104), a través de un pasaje del representamen de la ingeniería al representamen de la matemática para llegar a la visualización de las funciones construidas.

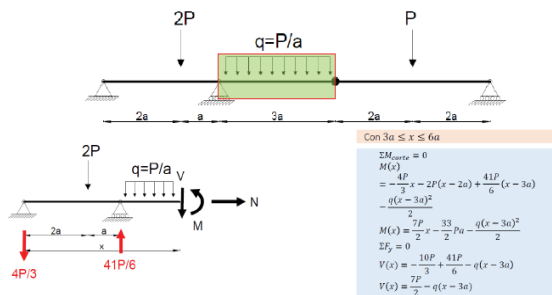


Figura 5.102 Suma de momentos y fuerzas en corte 3

[Transcripción]

Con $3a \leq x \leq 6a$

$$\Sigma M_{corte} = 0 \quad M(x) = -\frac{4p}{3}x - 2p(x-2a) + \frac{41p}{6}(x-3a) - \frac{q(x-3a)^2}{2}$$

$$M(x) = \frac{7p}{2}x - \frac{33}{2}pa - \frac{q(x-3a)^2}{2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad V(x) = -\frac{10p}{3} + \frac{41p}{6} - q(x-3a) = \frac{7p}{2} - q(x-3a)$$

De la tarea antes descrita, por ejemplo, se tienen las funciones mencionadas para el tipo de carga uniformemente distribuida (Figura 5.102)

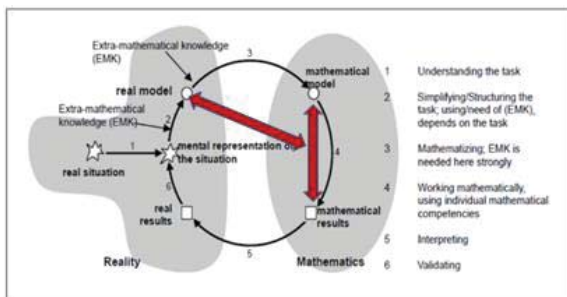


Figura 5.103 CM momento 3b

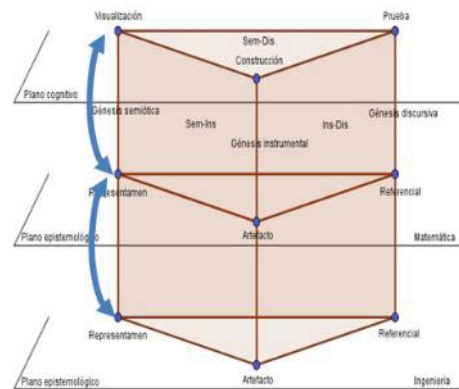


Figura 5.104 ETM extendido momento 3b

En la segunda parte del momento 3, identificamos la fuerte presencia de la génesis semiótica a través del trabajo en el registro figural que conecta con el algebraico. En términos generales en este tercer momento de clase, el registro figural aparece representado por los cortes que se realizan en la viga, esto en conexión con el registro algebraico relacionado con las ecuaciones de cortante y de momento. Así, se observa una activación de las génesis instrumental, discursiva y semiótica. Se identifica el plano Instrumental – Discursivo [Ins-Dis] con mayor énfasis en este momento.

Momento 4. Presentación de los resultados obtenidos y análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos realizados y validarlos.

Diagrama de esfuerzos cortantes:

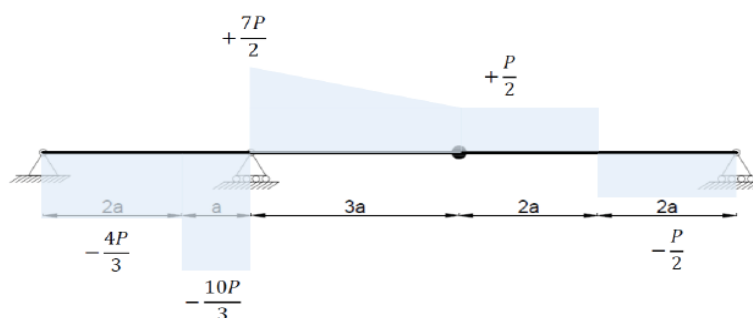


Figura 5.105 Diagrama de fuerza cortante

Con toda la información y consideraciones realizadas, se procede a representar gráficamente la ley de esfuerzos cortantes. El análisis estructural esta información es de suma importancia pues proporciona los valores críticos para el diseño de la estructura, en este caso por cortante como se muestra en la figura anterior.

Se puede notar la variación en el diagrama (Figura 5.105) y su correspondencia con la ley de esfuerzo cortante calculada en los pasos anteriores. En los tramos donde la representación es constante se corresponde con una función constante de la ley de cortante y en los tramos donde el diagrama varía linealmente se corresponde con una función lineal de la ley de esfuerzo cortante.

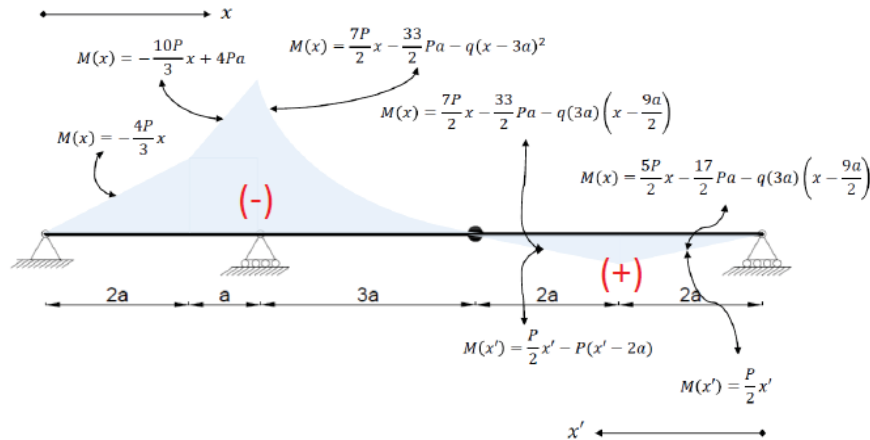


Figura 5.106 Diagrama de momentos flectores

X' Es una distancia que considera como inicio la parte derecha de la viga, esto debido a que el cálculo de las funciones de momento se puede realizar considerando un inicio por la izquierda o bien por la derecha, debiendo de cualquier manera, arrojar funciones equivalentes para el dominio considerado de acuerdo a la partición.

Por último, se traza el diagrama del momento flector (Figura 5.106), aquí es importante hacer varias conexiones para su mejor comprensión. Se puede apreciar que, en los tramos donde la variación es lineal se corresponde ya sea con una ley de cortante constante o con un tramo de carga distribuida nula. En el tramo BC se nota una variación cuadrática que se corresponde ya sea con un diagrama de cortante de variación lineal o con un tramo con carga distribuida. Además, de la conexión que ocurre dentro del mismo diagrama en cuanto a su representación como ley o como gráfica.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 4

En este momento, el profesor trabaja con la representación en forma gráfica de las leyes de esfuerzos internos de cortante y momento, los cuales son los diagramas que fueron solicitados en la tarea planteada por él. Se observa que, en la representación de los diagramas el profesor privilegia la conexión entre ambas representaciones (la representación figural y la representación analítica en forma de función que depende cierta distancia " x ", al mostrar para cada diagrama construido y eso lo realiza para cada sección. Al igual que en el momento tres, el profesor también se está moviendo constantemente entre la etapa tres (considerando el EMK) y la etapa 4 (trabajando con el modelo) del CM (Figura 5.107), en este caso los diagramas.

También se puede observar trabajo con la etapa 5 pues se interpretan los resultados obtenidos con la finalidad de establecer los máximos valores de momento y cortante a los cuales estará sometida la estructura.

ETM extendido para el momento 4

En este momento, el profesor utiliza la información sobre las funciones calculadas para cada una de las secciones en las que discretizó la estructura, aquí se evidencia pasaje del uso de funciones (momento, cortante) como artefactos simbólicos que van a permitir construir los diagramas solicitados (para éste problema: diagrama de cortante y diagrama de momento).

Los diagramas en esta ocasión, son modelos que permiten analizar el comportamiento de la estructura en cuanto a esfuerzos, por ejemplo establecer el valor máximo de momento y/o de cortante de manera local, para un punto de interés o de manera global los valores máximos o mínimos para una determinada sección. Se evidencia que, los diagramas juegan el rol de proporcionar información del tipo respuesta para la situación, entonces, ellos sirven para probar los resultados obtenidos. Por tanto, al trabajar con los diagramas, se observa activación de la génesis semiótica (Figura 5.108), esto al pasar del representamen de la matemática a la visualización. Posteriormente, se activa la génesis discursiva, esto en conexión con el referencial de la ingeniería y de la matemática permiten probar en el plano cognitivo.

Para este cuarto momento, el registro algebraico se conecta con el registro figural, esto a través de la representación algebraica de las funciones asociadas los esfuerzos y momento internos de la estructura y su conexión con el registro figural, a través de los diagramas mostrados. Se observa activación de las génesis semiótica y discursiva. Así, identificamos el plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

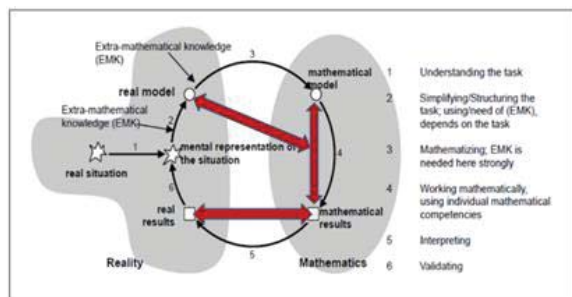


Figura 5.107 CM momento 4

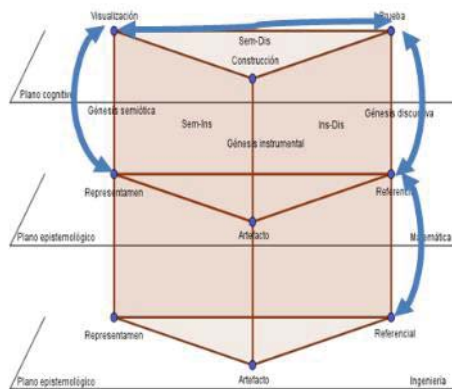


Figura 5.108 ETM extendido momento 4

Así, en la resolución del problema tratado por el profesor en su clase se identifica una circulación entre los planos [Sem-Dis] asociado al momento 2 y en el plano [Ins-Dis] asociado al momento 3. Posteriormente, hay una circulación entre los planos [Ins-Dis] asociado al momento 3 y en el plano [Sem-Dis] asociado al momento 4.

5.2.3 Modelo estructural tipo marco

Se presenta un problema resuelto por el profesor, correspondiente a la determinación de las reacciones externas en una estructura de tipo marco. La tarea corresponde a la unidad dos, dentro del tipo de estructuras estáticamente determinadas. Se continúa estableciendo relaciones entre la disciplina (análisis estructural) y la matemática utilizada.

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Problema:

Calcular las reacciones externas del pórtico siguiente

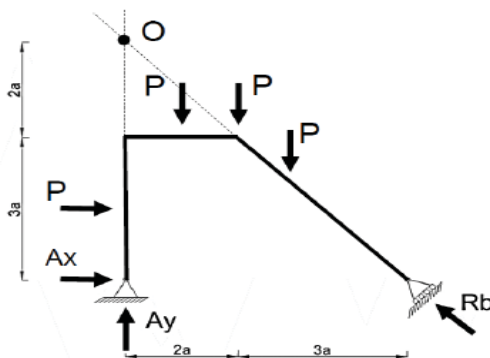


Figura 5.109 Esquema del problema

El problema consta en determinar el valor de las reacciones externas en el pórtico (Figura 5.109). Si bien es una estructura diferente a la estudiada en la tarea anterior, sigue las mismas leyes de la estática para la determinación de las incógnitas del problema. Como puede observarse en la figura anterior, el pórtico presenta un apoyo de tipo fijo en A y de tipo simple en B. Además, está sujeto a dos cargas puntuales verticales aplicadas para el elemento horizontal, una carga puntual vertical aplicada al elemento inclinado y una carga puntual horizontal aplicada al elemento vertical.

Resumen de las reacciones: Número de incógnitas = $2 + 1 = 3$

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 1

Se observa trabajo en la etapa 3 del CM (Figura 5.110), debido a que se comienza a trabajar con un problema ya idealizado, donde la naturaleza de las cargas a las que está sometida o las condiciones sobre las que está construida la estructura, no son consideradas. Se observa la presencia de la etapa tres (Matematizando), donde el proceso de matematización ocurre a través de considerar principios de la estática para bien comprender el problema a resolver, cómo es, por ejemplo, el considerar el tipo de reacción a la cual está sujeta la estructura para así determinar el número de

incógnitas debidas a las reacciones generadas por los apoyos en el punto *A* y en el punto *B*.

Se considera adicionalmente el CM extendido (Figura 5.111), debido a que no se observa trabajo en el mundo de la matemática. Por tanto, en el CM extendido, el proceso de matematización visualizado en el CM (Figura 5.110), es más bien dirigido a un proceso que involucra nociones de ingeniería.

ETM extendido para el momento 1

Se activa la génesis discursiva (Figura 5.112), al observarse que se trabaja en el plano epistemológico de la ingeniería, debido a que utiliza elementos del referencial teórico de la estática y la mecánica de materiales para determinar el número de incógnitas a resolver, producto de los vectores fuerza resultantes por las condiciones a las cuales está apoyada la estructura. Posteriormente, y sin pasar por el plano epistemológico de la matemática, se llega a la prueba en el plano cognitivo donde basándose en el referencial mencionado se llega a la construcción del diagrama de cuerpo libre.

Así, se tiene presencia del registro figural con fines discursivos, representado por el modelo real. Se observa activación de la génesis discursiva.

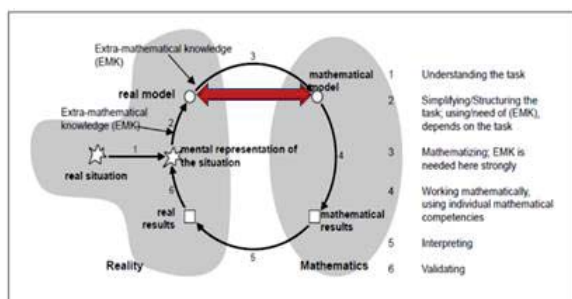


Figura 5.110 CM momento 1

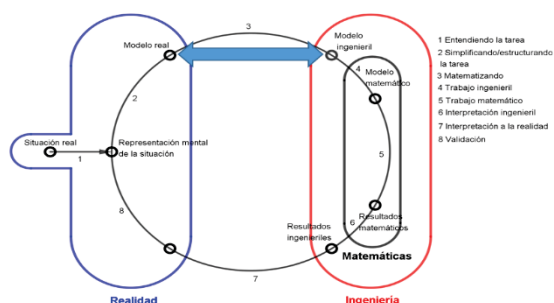


Figura 5.111 CM extendido momento 1

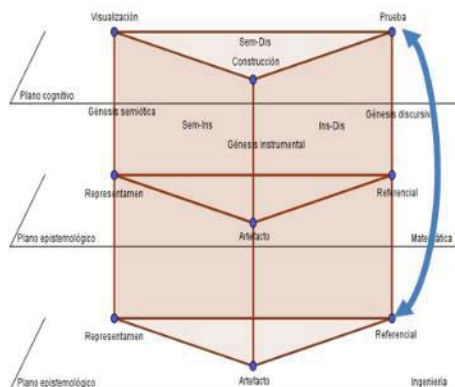


Figura 5.112 ETM extendido momento 1

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación

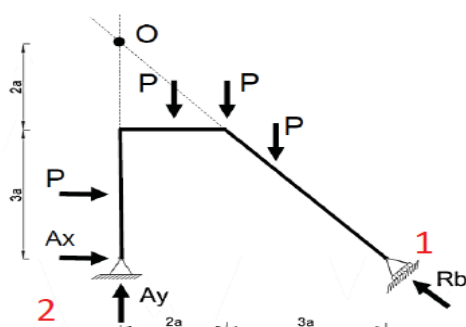


Figura 5.113 Apoyos en la estructura

Primero se determina cuáles son las incógnitas del problema. Como la tarea solicita determinar las reacciones externas al pórtico, lo primero es considerar el tipo de apoyos sobre la cual está sujeta la estructura (Figura 5.113). Dado que en A la estructura está sujeta a un apoyo fijo, esto indica que la estructura en ese punto está restringida tanto al movimiento vertical como al movimiento horizontal, no así con respecto a la rotación, porque si podría rotar en A. Como se sabe, la restricción al movimiento general reacción, por tanto en el punto A se tienen dos incógnitas en este caso A_x (reacción horizontal en A) y A_y (reacción vertical en A).

En el punto B la estructura está sostenida por un apoyo simple, por lo que genera restricción con dirección en el mismo sentido del elemento que apoya, en este caso R_b .

[Profesor]: Al ser estáticamente determinada, se puede resolver aplicando:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_o &= 0\end{aligned}$$

Figura 5.114 Condiciones de equilibrio

Posteriormente, el profesor relaciona las incógnitas del problema con las ecuaciones de la estática. Contando las incógnitas se tiene que son tres y como se mencionó en el ejemplo anterior por estática se tienen tres ecuaciones ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0$), por lo tanto, la estructura es estáticamente determinada (número de incógnitas debe ser menos o igual al número de ecuaciones proporcionadas por la estática (Figura 5.114)).

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 2

Se observa trabajo en la etapa cuatro (trabajando matemáticamente) del CM (Figura 5.115), donde se toman en cuenta las condiciones de equilibrio de la estática (uso del conocimiento extramatemático que conecta el modelo real con la etapa 4 del ciclo) para justificar que se va a trabajar con una estructura estáticamente determinada. Se puede notar una mezcla del uso de modelos de ecuaciones de la estática sobre los principios de equilibrio de una estructura y el uso de la matemática que incluye a la noción de formación de una ecuación a través de sumatorias e igualación a cero.

ETM extendido para el momento 2

Desde la plano epistemológico de la ingeniería se activa la génesis semiótica (Figura 5.116) a través de considerar los signos y la visualización de las ecuaciones de equilibrio de la estática y se llega a la génesis semiótica de la matemática al considerar la sumatoria y la conformación de la igualdad. Posteriormente, hay un pasaje hacia la génesis discursiva de la ingeniería que permite pasar desde el referencial teórico de la ingeniería, al usar las nociones de equilibrio hasta la prueba en el plano cognitivo, estableciendo así que la estructura es estáticamente determinada.

Se tiene presencial del registro figural, en el sentido de visualizar los signos asociados a la construcción el diagrama de cuerpo libre de la estructura y el registro algebraico, al presentar las ecuaciones de equilibrio representadas por las sumatorias. Se observa la activación de las génesis semiótica y discursiva. Así identificamos al plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

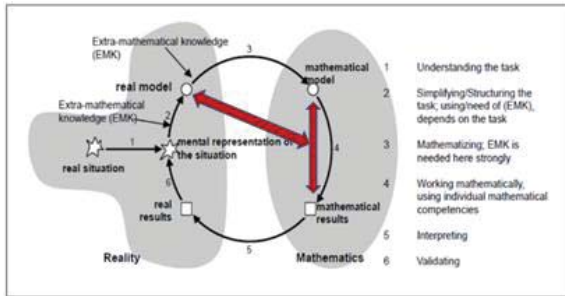


Figura 5.115 CM momento 2

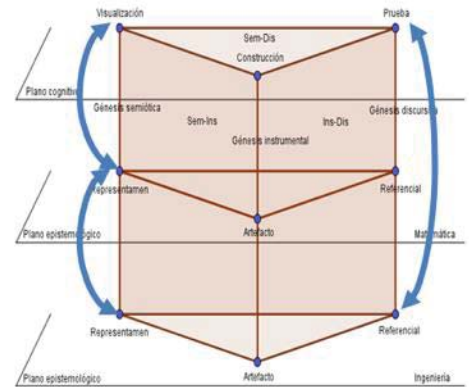


Figura 5.116 ETM extendido momento 2

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo (ingenieril) asociado a la situación.

[Profesor]: Gracias al punto de convergencia de las reacciones “O”, se inicia por

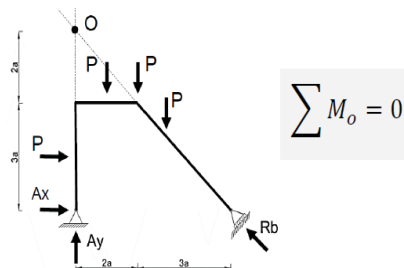


Figura 5.117 Punto de convergencia O

La estrategia de solución del profesor fue considerar el punto de convergencia de las reacciones en el punto O, de esta manera evita descomponer el vector fuerza en B. Otra estrategia pudo haber sido no utilizar el punto de convergencia en O (Figura 5.117) y descomponer el vector fuerza en B, tanto en su componente horizontal como vertical, pero esta segunda estrategia habría ocasionado menos economía en la solución debido a la presencia de razones trigonométricas *seno* y *coseno*.

[Profesor]: Tomando momentos respecto del punto O

$$-Pa - P2a - P3a + P3,5a + A_x 5a = 0$$

Despejando

$$A_x = 0,5P$$

A continuación, se procede a realizar sumatoria de momentos con respecto al punto O, con la convención de signos conocida (momento rotando en sentido contrario a las manecillas del reloj es positivo). En la ecuación

mostrada en la figura anterior se observa la presencia de tres letras, donde P representa los vectores fuerza, a representa distancia y A_x la reacción incógnita. El rol de cada letra es distinto, P y a son parámetros con algún valor fijo y A_x es la incógnita que depende del valor de los parámetros P y a . En la solución $A_x = 0,5P$ puede verse que A_x queda en función de P al cancelarse el valor del parámetro como parte del proceso de despeje en la ecuación.

[Profesor]: Seguidamente, se hace:

Nótese que se tomó un segundo momento con respecto a otro punto

$$\sum M_B = 0$$

$$-A_y 5a - P 1,5a + P 4a + P 3a + P 2a = 0$$

Despejando:

$$A_y = 1,5P$$

Figura 5.118 Reacción vertical en A

Posteriormente, el profesor, para encontrar el valor de la reacción en A_y , considera calcular sumatoria de momentos en B e igualar a cero, resultado la ecuación mostrada en la (Figura 5.118). Al igual que en la fig. 41 puede notarse el rol que juegan cada una de las letras, y se observa que en el resultado de la incógnita $A_y = 1,5 P$ está escrito como una relación funcional, donde A_y depende del valor del parámetro P .

[Profesor]: Finalmente, se hace:

$$\sum F_x = 0$$

$$-R_b \cos 45 + A_y = 0$$

Despejando:

$$R_b = 0,5P / \cos 45$$

Figura 5.119 Reacción en b

Para calcular el valor de la última incógnita, la reacción R_b , se procede a realizar la sumatoria de fuerzas en x , aquí podemos notar que, aunque en la (Figura 5.117) se aprovecha la convergencia en O de las reacciones, en este paso de todas maneras es necesario descomponer el vector fuerza R_b , en su componente horizontal. Para ello, se utiliza la razón trigonométrica *coseno* (el vector R_b tiene un ángulo de inclinación de 45° , y se descompone horizontalmente con la finalidad de utilizar para el cálculo un vector con

dirección paralela al eje x . Por tanto, $\cos 45^\circ = R_x/R_b \rightarrow R_x = R_b \cos 45^\circ$). La respuesta a la incógnita queda una vez más expresada como una relación funcional, donde R_b depende del valor de P (Figura 5.119).

Si bien en clase el profesor sólo determina el valor de las reacciones externas, también menciona que a partir de ellas se puede proceder a determinar el valor de las reacciones internas, estableciendo leyes de momento y cortante, para a través de ello trazar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 3

En este momento se continua con la etapa cuatro del CM (Figura 5.120), donde podemos observar una matematización debida al trabajo con las ecuaciones de las condiciones de equilibrio, las cuales permiten la construcción de modelos que permiten encontrar la solución a las incógnitas debidas a las reacciones externas de la estructura. Por ejemplo, y como se muestra arriba en el análisis de la solución de la estructura, se hace uso de la condición de equilibrio, sumatoria de momentos en B igual a cero, para así calcular el valor de la reacción vertical en el punto A , denominada A_y .

ETM extendido para el momento 3

Podemos notar que, el uso de las condiciones de equilibrio de la estática (inicio de uso de signos en el polo referencial teórico del plano epistemológico de la ingeniería) permite operacionalizar las ecuaciones para ser usadas como artefactos simbólicos que permiten la construcción de los modelos vía los cuales se determinan las reacciones incógnitas del problema. Por ello, se observa la activación de la génesis instrumental (Figura 5.121), a través de partir del polo de los artefactos en el plano epistemológico de la ingeniería y se llega al polo de los artefactos en el plano epistemológico de la matemática, esto cuando se construyen las ecuaciones $A_x = 0,5 p$ y la ecuación $R_b = 0,5p / \cos 45^\circ$, las cuales permitirán calcular los valores de A_x y R_b .

Así, el registro algebraico se representa a través de la instrumentalización de las ecuaciones de equilibrio. Se observa la activación de las génesis instrumental y discursiva. Así mismo, se identifica al plano instrumental-discursivo [Ins-Dis].

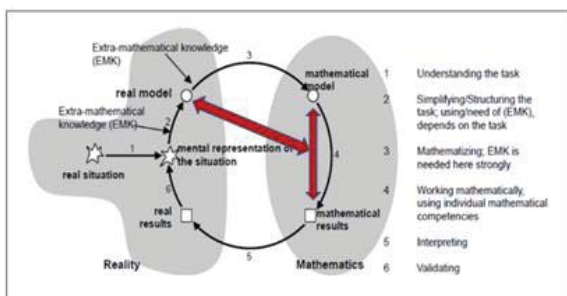


Figura 5.120 CM momento 3

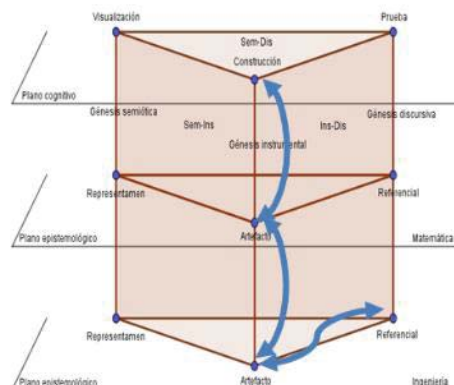


Figura 5.121 ETM extendido momento 3

Así, en la resolución del problema tratado por el profesor en su clase se identifica una circulación entre los planos [Sem-Dis] asociado al momento 2 y en el plano [Ins-Dis] asociado al momento 3.

5.2.4 Modelo estructural tipo armadura

A continuación, se presenta el siguiente problema resuelto por el profesor, el cual consta de una estructura tipo armadura. El problema corresponde a la unidad 2, reacciones externas y esfuerzos internos.

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Problema:

Resolver la estructura de nudos articulados que se muestra en la figura

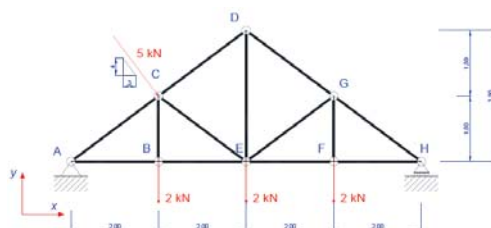


Figura 5.122 Armadura

El problema consiste en determinar, primero el valor de las reacciones externas, causadas por los apoyos, y después, determinar el valor de los esfuerzos de cada una de las barras que componen la armadura (Figura 5.122). Este tercer tipo de estructura a diferencia de las anteriores dos, es que es de tipo articulada, por lo que cada elemento (barra) está unida en sus extremos por articulaciones o rótulas que no admiten momentos, por lo

que para solucionar el problema se debe tomar en cuenta esta consideración. Por tanto las ecuaciones de la estática para resolver los esfuerzos en cada una de las barras serán sólo dos.

La estructura es de tipo estáticamente determinada. En este tipo de estructuras se deben verificar dos tipos de determinaciones: la determinación (o indeterminación) estática externa (mismo procedimiento que en los problemas anteriores; y la verificación de la determinación interna.

La determinación interna se verifica mediante la ecuación: (Grado de indeterminación estática interna) $GIEI = B - 2N + 3$ donde B es el número de barras y N es el número de nodos. La expresión anterior considera el equilibrio entre el número de barras y reacciones con respecto al número de ecuaciones de la estática (2 por nodo). Así, para estructuras estáticamente determinadas en lo interno, se cumple que $B + 3 = 2N$.

El cumplimiento de las condiciones de equilibrio estático, es una condición necesaria pero no suficiente. Además, se debe considerar la geometría de la estructura, dado que pueden existir modelos de estructuras que sean inestables, y por ende no construibles.

Por tanto, se tienen las siguientes tres posibilidades de determinación interna:

1. Si $GIEI = 0$ Estructura internamente isostática
2. Si $GIEI > 0$ Estructura internamente indeterminada
3. Si $GIEI < 0$ Estructura internamente inestable

Para esta armadura, se tienen 13 barras y 8 nodos. Por lo tanto el grado de indeterminación estática interno es $GIEI = 13 - 2(8) + 3 = 0$. Así, el grado de indeterminación estática interno se corresponde con el criterio 1 con $GIEI = 0$. De esta manera la armadura es estáticamente determinada de manera interna.

De manera externa, se tienen dos restricciones de movimiento para el nodo A (dado que el apoyo A restringe 2 movimientos, uno horizontal y uno vertical) y una restricción de movimiento para el nodo B (dado que el nodo B está apoyado sobre un apoyo tipo rodillo, el cual restringe sólo el movimiento vertical).

Por lo tanto, se tienen 3 movimientos restringidos de manera externa; es decir 3 incógnitas externas que pueden ser calculadas con las 3 ecuaciones de la estática. Así, la armadura es estáticamente determinada de manera externa. Al ser estáticamente determinada tanto de manera externa como de manera interna, la estructura es estáticamente determinada.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 1

Al igual que en los problemas (1 y 2) analizados anteriormente, este tercer problema también parte de la etapa tres del CM (Figura 5.123) (se presenta un modelo real), sólo que a diferencia de los modelos anteriores, ahora se presenta un modelo estructural tipo armadura. Aquí, a pesar de las idealizaciones ya consideradas, es importante el conocimiento extra matemático en el sentido de considerar que una estructura de este tipo cuando está siendo utilizada en el mundo real, no admite momentos en los nudos.

Así, cuando el profesor determina si es una estructura estáticamente determinada debe tomar en cuenta esa consideración en el número de ecuaciones de equilibrio que proporcionará la estática.

Además, debe tener presente que este tipo de estructuras no sólo debe determinar la determinación o indeterminación estática externa, como en las estructuras (viga y marco) estudiadas en los problemas anteriores, sino que también se debe de determinar el grado de indeterminación o determinación estática interna, esto debido a que nos encontramos con una estructura cerrada.

Dado que, a pesar de evidenciar un proceso de matematización, éste sólo ocurre en el mundo de la ingeniería, sin presencia de la matemática, por tanto, la matematización se dirige del modelo real al mundo de la ingeniería, de acuerdo al CM extendido (Figura 5.124).

ETM extendido para el momento 1

Se observa que, en cuanto al ETM extendido, en este momento de clase, se activa la génesis discursiva (Figura 5.125), debido a que, el profesor argumenta usando conocimientos relacionadas sólo con la ingeniería, pasando del referencial teórico del plano epistemológico (condiciones de equilibrio de la estática y tipo de cargas que admiten este tipo de estructuras en estado de trabajo real), al polo cognitivo, trabajando en todo momento en la génesis discursiva.

CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

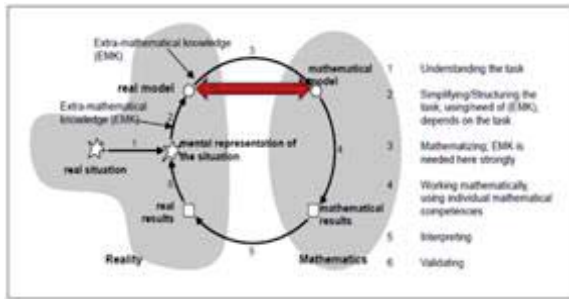


Figura 5.123 CM momento 1

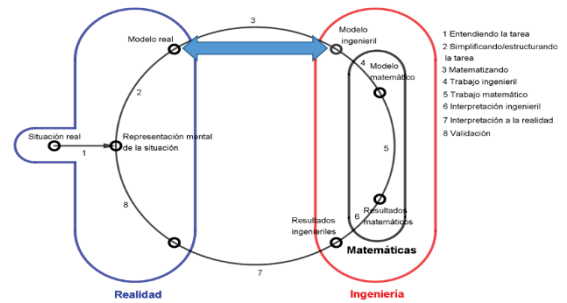


Figura 5.124 CM extendido momento 1

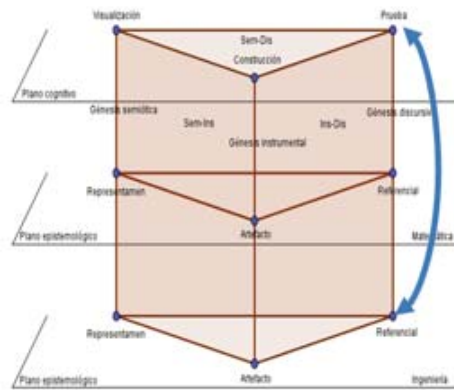


Figura 5.125 ETM extendido momento 1

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

Determinación de las reacciones externas:

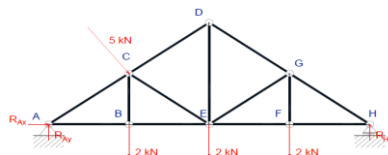


Figura 5.126 DCL para la armadura

Una vez que se ha determinado que la estructura es tanto externa como internamente determinada, se procede a determinar el valor de las reacciones externas. Para ello, se dibuja un DCL (Diagrama de Cuerpo Libre (Figura 5.126)), donde se aplican las reacciones y cargas idealizadas. En este

tipo de estructuras se considera que, de manera idealizada, las cargas sólo son aplicadas en los nodos y que las barras no admiten carga.

El profesor contrasta con la realidad, mencionando que en la vida real las armaduras si están sometidas a cargas en las barras por lo que si generan esfuerzos de corte y momento, pero que son tan pequeños que se puede hacer la suposición de que la estructura sólo estará sometida a esfuerzos axiales.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 2

En este momento el profesor aún se encuentra en la etapa tres del CM (Figura 5.127), debido a que, se sigue trabajando con entender el modelo real (modelo estructural tipo armadura) presentado en el problema. Por ejemplo, debe determinar el tipo de reacciones a las que está sujeta la estructura de acuerdo al tipo de apoyos utilizados. Para ello, se dibuja un diagrama de cuerpo libre, muy útil para bien comprender las incógnitas del problema, las cuales, cómo se observa en el D.C.L. son: el determinar el valor de las reacciones externas y el determinar el valor de las fuerzas a las cuales están sometidas cada una de las barras presentes en la armadura. Aquí, se debe tener presente que las fuerzas en las barras pueden resultar ser a tensión² o a compresión³.

ETM extendido para el momento 2

Primero, se observa activación de la génesis semiótica (Figura 5.128), dado que, del referencial teórico en el plano epistemológico de la ingeniería. El profesor toma las nociones de la estática para la determinación del tipo de incógnitas presentes en el problema y ocurre un pasaje a la génesis semiótica desde la ingeniería hasta la matemática, donde visualiza el tipo de ecuaciones que le permitirán calcular el grado de indeterminación o determinación estática.

Así, se tiene presencia del registro figural, en el sentido de la construcción del diagrama de cuerpo libre. Se observa la activación de la génesis semiótica y discursiva. Así mismo, se identifica al plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

² Tensión: ocurre cuando la barra es sometida a fuerzas en sus nodos que tenderán a estirla.

³ Compresión: ocurre cuando la barra es sometida a fuerzas en sus nodos que tenderán a comprimirla.

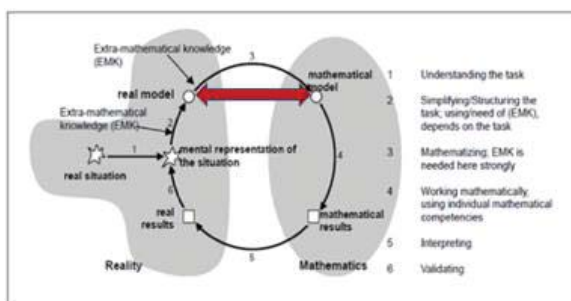


Figura 5.127 CM momento 2

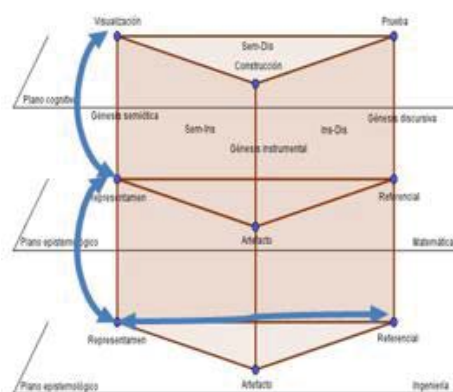


Figura 5.128 ETM extendido momento 2

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo (ingenieril) asociado a la situación.

Se puede notar que se han dibujado dos reacciones, un vector fuerza horizontal ⁴y uno vertical⁵ en A, debido a que A está sobre un apoyo fijo. Además, se ha colocado un vector fuerza vertical en H debido a que en ese punto está sometida a un apoyo simple. Nótese que, la única carga está aplicada sobre el nudo C, tal como se había considerado idealmente.

[Profesor]: Por equilibrio

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 & R_{Hy} \cdot 8 &= 2 \cdot (2 + 4 + 6) + 5 \cdot 2,5 \\ R_{Hy} &= 4,56 \text{ kN} \\ \sum F_y &= 0 & R_{Ay} + R_{Hy} &= 2 \cdot 3 + 5 \cdot \frac{4}{5} \\ R_{Ay} &= 5,44 \text{ kN} \end{aligned}$$

Figura 5.129 Reacción vertical en A

El profesor procede a calcular el valor de las reacciones externas, aplicando sumatoria de momentos⁶ en el nodo A para encontrar el valor de la reacción R_{Hy} . Se observa que, la suposición de la dirección es correcta debido a que

⁴ Vector fuerza horizontal: ocurre como representación a la reacción que se produce cuando la estructura se ve limitada a trasladarse horizontalmente. Esta limitación la produce el apoyo fijo al cual está sujeta.

⁵ Vector fuerza vertical: ocurre como representación a la reacción que se produce cuando la estructura se ve limitada a trasladarse verticalmente. Esta limitación la produce el apoyo fijo al cual está sujeta.

⁶ Momento: se origina por cargas que tienden a flexionar el cuerpo respecto de un eje que se encuentra dentro del plano del área.

arrojó un resultado positivo. A continuación realiza sumatoria de fuerzas en y para calcular el valor de la reacción R_{Ay} (Figura 5.129).

Por equilibrio:

[Profesor]: Conocidas las reacciones, se comienza a analizar nodo a nodo.

$$\sum F_x = 0 \quad R_{Ax} = -5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$R_{Ax} = -3kN \quad \leftarrow$$

Figura 5.130 Reacción horizontal en A

Y para terminar con el cálculo de reacciones externas, por último calcula el valor de la reacción R_{Ax} (Figura 5.130), realizando sumatoria de fuerzas en el eje X. Se nota que, el cálculo de esta reacción arroja un valor negativo, lo que indica que la dirección supuesta fue incorrecta (se supuso dirigida hacia la derecha) por lo que se debe corregir en el D.C.L. por tanto dirigida hacia la izquierda.

[Profesor]: Se puede realizar el análisis iniciando desde el nudo A o desde el nudo H. En este caso se selecciona el A (Figura 5.131).

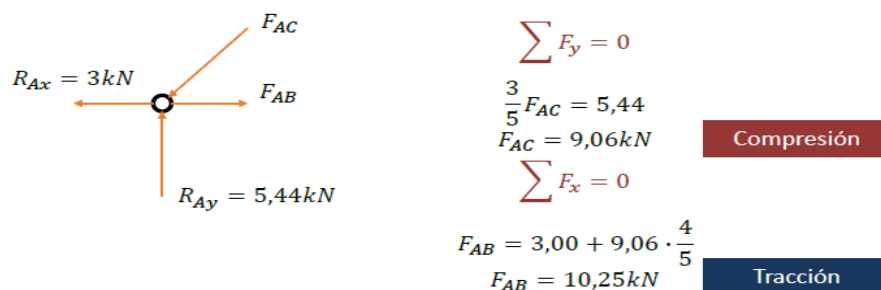


Figura 5.131 Fuerzas en el nudo A

A continuación, se determina el valor de cada uno de los esfuerzos axiales⁷ internos para cada una de las barras. Para ello, se utiliza la siguiente consideración, si la fuerza de la barra es supuesta dirigida hacia el nudo y en su cálculo arroja un valor positivo se dice que la barra está sometida a compresión, y, si la fuerza de la barra se supone dirigida saliendo del nudo y el cálculo arroja un valor positivo, se dice que la barra está sometida a tracción. En caso de arrojar valores negativos, tal como se hace con las reacciones externas, se debe cambiar el orden de la dirección supuesta.

[Profesor]: Se continúa hacia algún nudo en el que resten como máximo 2 incógnitas, como el nudo B (Figura 5.132).

⁷ Axial: actúa perpendicularmente al área y es originada por cargas que tienden a empujar o jalar sobre dos segmentos del cuerpo.

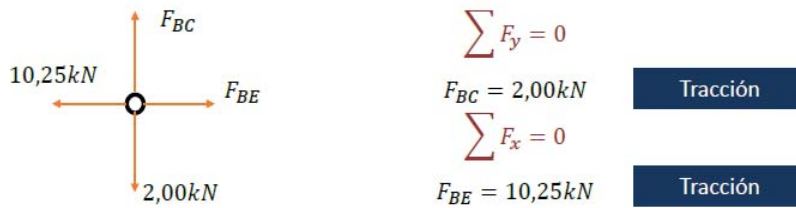


Figura 5.132 Fuerzas en el nudo B

Y así sucesivamente, se sigue calculando el valor del esfuerzo axial para cada una de las barras, cuidando la consideración de que, la unión de las barras por rotulas no admite momento por lo que para poder realizar el cálculo el nudo debe tener a lo más dos incógnitas ya que sólo puede realizarse $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 3

En este momento, el profesor trabaja en la etapa cuatro del CM (Figura 5.133), esto, al trabajar en los modelos matemáticos que permitirán la solución de las incógnitas del problema. Se sigue tomando en cuenta el conocimiento extra matemático de la etapa tres, debido a que, los resultados de los modelos utilizados cuando se calcula el valor de las fuerzas de las barras deben tomar en cuenta la naturaleza de la fuerza (de tensión o de compresión). Los tipos de modelos matemáticos presentes son resultado de las leyes de equilibrio de la estática y se utilizan en dos contextos, uno para la determinación de reacciones externas y otro para la determinación de los valores de las fuerzas en las barras de la armadura.

ETM extendido para el momento 3

Se activa la génesis semiótica (Figura 5.134) que pasa de la ingeniería a la matemática debido a que, considera los signos de la ingeniería a través de las leyes de equilibrio de la estática y las visualiza en forma de ecuaciones. Posteriormente, se activa la génesis instrumental, esto debido a que, las ecuaciones las utiliza como artefacto simbólico que le permitirá realizar los cálculos.

Un primer artefacto simbólico son las ecuaciones de equilibrio que permiten calcular el valor de las reacciones externas (en los apoyos de la estructura). Por ejemplo, cuando se realiza sumatoria de momentos en A igual a cero $\sum M_A = 0$ para encontrar el valor de la reacción vertical en el nudo H $R_{HY} = 4,56\text{ kN}$.

Un segundo artefacto simbólico detectado es el uso de las ecuaciones de equilibrio para el cálculo del valor de las fuerzas a las que está sometida

cada una de las barras de la armadura. Por ejemplo, cuando analiza el nudo A, dónde se tiene como dato el valor de las reacciones⁸ R_{AX} y R_{AY} , y se calcula el valor de la fuerza para las barras F_{AB} y F_{AC} . Se puede notar una influencia del referencial teórico de la ingeniería está presente justo en analizar el tipo de respuesta, pues debe de considerar si se encuentra a tensión o a compresión.

Así, el registro figural queda representado por los diagramas de fuerzas internas y el registro algebraico representado por las ecuaciones de equilibrio entre los nudos de la armadura. Se activan las génesis semiótica, instrumental y discursiva. Se observa una circulación entre los planos [Sem-Ins] e [Ins-Dis]. Así identificamos la activación de los planos semiótico-instrumental [Sem-Ins] e instrumental-discursivo [Ins-Dis].

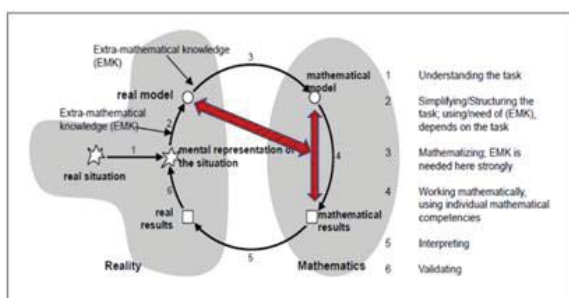


Figura 5.133 CM momento 3

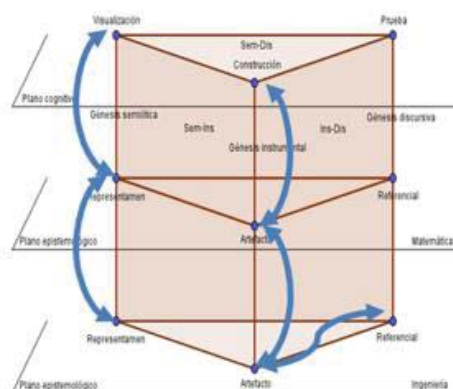


Figura 5.134 ETM extendido momento 3

Momento 4. Presentación de los resultados obtenidos y análisis de los mismos con la finalidad de corroborar los procesos realizados y validarlos.

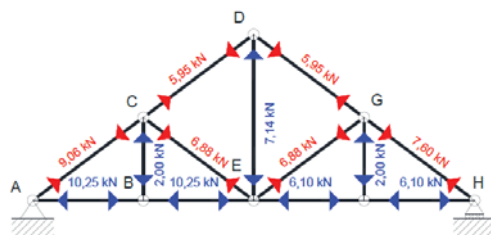


Figura 5.135 Diagrama de solución

⁸ Reacciones: se producen cuando la estructura entra en contacto con los apoyos a los cuales está sujeta. Se suele representar con una flecha llamada vector de reacción.

El proceso de ir calculando los valores de los esfuerzos, se repite nodo por nodo hasta llegar al nodo H , es de resaltar que, justo en este nodo, es posible que el estudiante valide sus procedimientos realizados en los nodos anteriores, debido a que, se debe corroborar el equilibrio; es decir, sumatoria de fuerzas en el eje X y en el eje Y debe ser cero, caso contrario, el estudiante debe regresar a verificar en que barra o barras pudo cometer error de cálculo.

Al final, tal como se muestra un diagrama de solución (Figura 5.135 Diagrama de solución) es importante que el analista estructural coloque barra a barra el valor de los esfuerzos y su dirección; es decir, indicar si el esfuerzo produce que la barra trabaje a tracción o compresión.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 4

En este momento (Figura 5.136) se observa que el profesor, si bien explica el proceso para validar los resultados, éstos, al ser resultado de una estructura ya idealizada (modelo real) , son más bien validados matemáticamente, pues no se puede comprobar la eficacia de los resultados obtenidos, al no tener presente un modelo físico. Sin embargo, es importante enfatizar que aun con una validación matemática, el conocimiento extra matemático siempre está presente. Por ejemplo, al considerar que, de la estática los resultados son válidos cuando hay equilibrio en los nudos o la estructura en general y también que los resultados indiquen el tipo de fuerza en la barra (de tensión o de compresión).

ETM extendido para el momento 4

El trabajo realizado en este momento es tomar los resultados obtenidos en el plano cognitivo, polo de la construcción, ocurriendo un pasaje a la génesis semiótica (Figura 5.137) tanto de la ingeniería como de la matemática para presentar el diagrama de soluciones.

Así, el registro figural queda representado por el diagrama de soluciones de la armadura, a través del dibujo de las fuerzas internas. Se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Así se identifica al plano semiótico – instrumental [Sem-Ins].

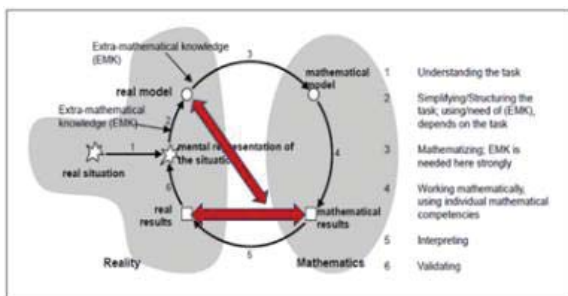


Figura 5.136 CM momento 4

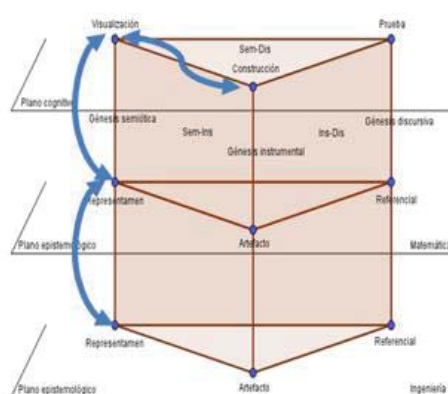


Figura 5.137 ETM extendido momento 4

Así, en la resolución del problema tratado por el profesor en su clase se identifica una circulación entre los planos [Sem-Dis] asociado al momento 2 y en el plano [Sem-Ins] asociado al momento 3. A continuación, hay circulación interna al momento 3, entre el plano [Sem-Ins] y en el plano [Ins-Dis]. Posteriormente, ocurre circulación entre el plano [Ins-Dis] asociado al momento 3 y en el plano [Sem-Ins] asociado al momento 4.

Del análisis de la solución del profesor, evidenciamos la conexión existente entre las nociones extra matemáticas (relacionadas con el análisis de una estructura tipo armadura) y con nociones matemáticas relacionadas con sistemas de ecuaciones.

Por un lado, solucionar la armadura significó calcular el valor de las fuerzas axiales para cada una de las barras que la componen, y por el otro, esas fuerzas axiales, resueltas por el método de los nudos, fueron resueltas al considerar artefactos simbólicos provenientes de las leyes de equilibrio de la estática, es decir, sumatoria de fuerzas en el eje x y sumatoria de fuerzas en el eje y , lo que a lo más puede originar, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

De esta manera, se evidencia una conexión indisoluble entre matemática e ingeniería, donde el trabajo matemático algebraico relacionado con los sistemas de ecuaciones es conectado con incógnitas asociadas a las fuerzas axiales en las barras de los elementos de la armadura. Todo lo anterior permitirá establecer las fuerzas externas e internas de la armadura para su posterior diseño estructural⁹.

⁹ Diseño estructural: es el proceso de dar dimensionamiento a los diversos elementos de la estructura, este dimensionamiento deberá estar sujeto a normas de construcción y toma los resultados del análisis estructural. El dimensionamiento se usa en el Diseño Estructural (viga, columna, losa...) Ridell & Hidalgo (2013)

Conclusión respecto de los problemas analizados para la unidad 2

Hasta aquí, podemos evidenciar que, de manera general, el profesor promueve lo conceptual del curso, ello con la finalidad de que en su futuro ejercicio profesional el estudiante tenga la capacidad de análisis. Con respecto a la competencia de modelización, promovida por el profesor, destacamos que la actividad en el CM, esta se presenta por etapas y no se observa un paso completo por el ciclo.

Respecto a la relación entre matemáticas e ingeniería, notamos que, los problemas analizados anteriormente, no permiten señalar que los modelos matemáticos presentes en su solución se relacionan con nociones de cálculo como las nociones de función, derivada e integral.

Los problemas tuvieron fuerte presencia de los registros figúrales y algebraicos. Cabe destacar que la riqueza en la identificación de dichos registros no es la sólo identificación aislada de los mismos, sino las conexiones que fueron posibles de identificar. Se observaron circulaciones completas entre todas las génesis del ETM extendido. Así mismo se observó la activación de todos los planos.

5.2.5 Deformación de un modelo estructural tipo viga

Se presenta la explicación de una tarea resuelta por el profesor y se realizan algunas conexiones entre la disciplina (análisis estructural) con la matemática. La tarea pertenece a un ejemplo resuelto por el profesor y es correspondiente a la unidad cuatro "Cálculo de Deformaciones".

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

Problema:

[Profesor]: Determinar el desplazamiento vertical de extremo libre de la viga de acero en voladizo. Con $E = 21E + 06 \text{ N/cm}^2$ e $I = 1450 \text{ cm}^4$ Donde E es el módulo de elasticidad del material e I es el momento de inercia.

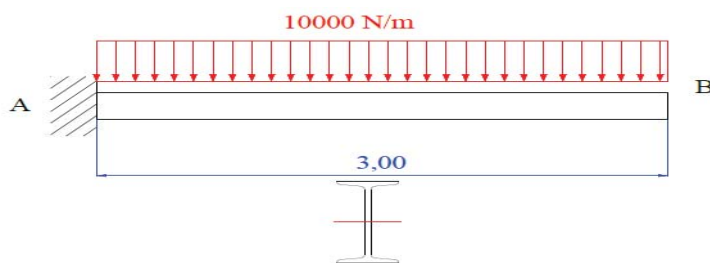


Figura 5.138 Esquema de la viga

El problema presentado consiste en determinar la deformación de la viga (Figura 5.138) en el punto solicitado. Las deformaciones son un aspecto importante en el análisis estructural, que aunado al cálculo de reacciones y esfuerzos trabajados en la unidad 2, son fundamentales para ser presentados al diseñador estructural.

Las deformaciones pueden ser tanto desplazamientos como rotaciones que ocurren en alguna parte de la estructura. Su valor depende de las cargas a las cuales esté sujeta la estructura, del material que la componga, de efectos del calor, dentro de otros. Para este ejercicio, se pide determinar la deformación vertical en el extremo libre de la barra considerando el efecto de la carga axial que se muestra en la estructura.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 1

Se presenta un modelo estructural tipo viga, donde el profesor proporciona la idealización de cargas (uniformemente distribuida lineal) sobre la estructura. Además, también proporciona algunos datos relacionados con propiedades geométricas de la estructura (el momento de inercia), así como propiedades físicas (el módulo de elasticidad, en este caso, para el acero). Por tanto, observamos trabajo en la etapa 3 del CM (Figura 5.139) (modelo real), a partir del cual se comienza a trabajar con una matematización horizontal.

El conocimiento extra matemático guarda relación con propiedades físicas, propiedades geométricas del material, estado de sujeción de la estructura, tipo de modelo a trabajar (modelo viga).

ETM extendido para el momento 1

El reconocimiento del tipo de modelo a trabajar, sus características, tal como el tipo de apoyo a las cuales está sujeta y el tipo de carga (lineal uniformemente distribuida), permiten la activación de la génesis semiótica (Figura 5.140), se parte del representamen de la ingeniería y se transita al representamen de la matemática.

Posteriormente, se activa la génesis discursiva, debido a que, desde ese plano, se observa un pasaje al plano epistemológico de la ingeniería de donde se toman las propiedades del material, lo que permite la génesis

discursiva es el uso de las propiedades de la ingeniería (equilibrio estático de acuerdo al tipo de apoyos).

Así, el registro figural queda representado por el modelo real. Se observa activación de las génesis semiótica y discursiva. Así identificamos al plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

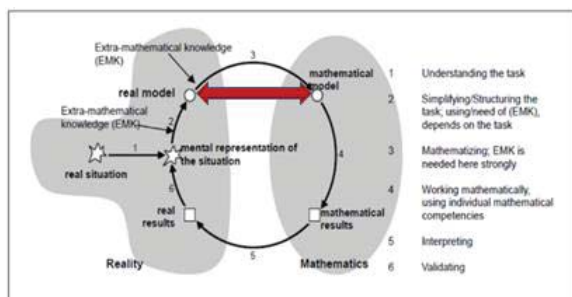


Figura 5.139 CM momento 1

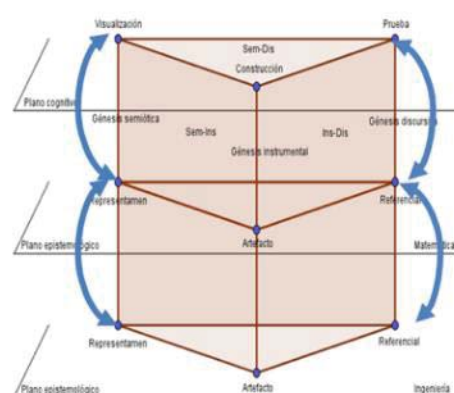


Figura 5.140 ETM extendido momento 1

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

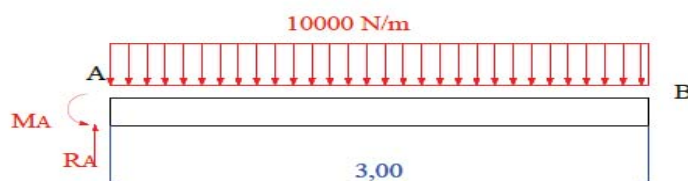


Figura 5.141 DCL para la viga

Primero, el profesor presenta el diagrama de cuerpo libre de la estructura (Figura 5.141). Para ello, considera que el apoyo en el punto A es de tipo empotrado, restringiendo a que en ese punto la estructura rote y se desplace tanto vertical como horizontalmente, por lo que las reacciones a que está sujeta en A son de un momento M_A , R_A . Debido a que, la estructura no está sometida a cargas axiales, no se considera la reacción por efecto de la restricción al movimiento horizontal.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 2

Se continúa trabajando con el modelo real (Figura 5.142), en un proceso de matematización horizontal, esto debido a que, para este momento, el

profesor elabora un diagrama de cuerpo libre. Para ello, toma en consideración conocimiento extra matemático, como es las reacciones externas que se generan debido al tipo de apoyo al cual está sujeta la estructura (apoyo empotrado), lo cual permite que genere las incógnitas debidas a dichas reacciones externas. En este momento 2, la matematización se dirige del modelo real al mundo de la ingeniería, pero no de la matemática, de acuerdo a CM extendido (Figura 5.143).

ETM extendido para el momento 2

En este momento, se activa la génesis discursiva de la ingeniería (Figura 5.144), debido a que, se puede construir un diagrama de cuerpo libre con base en el conocimiento de la estática del modelo presentado. Por lo que, ocurre un pasaje directamente del polo del representamen de la ingeniería en el plano epistemológico al polo de la prueba en el plano cognitivo, sin pasar por el polo de la prueba de la matemática.

Se utiliza el registro figural a través de justifica la pertinencia del modelo dentro del tipo de estructuras de la unidad.

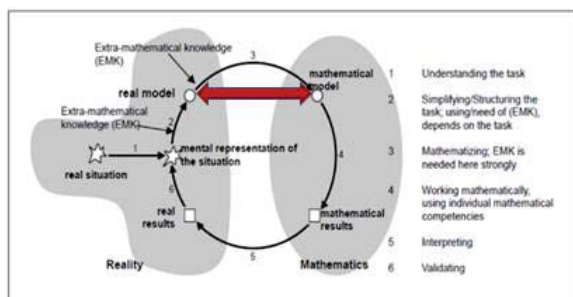


Figura 5.142 CM momento 2

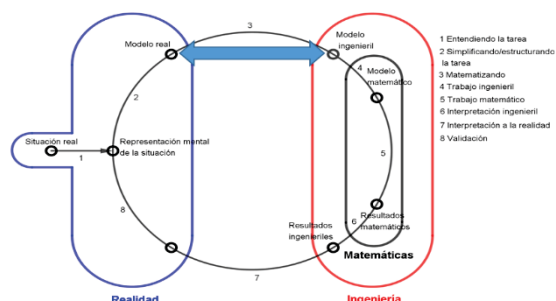


Figura 5.143 CM extendido momento 2

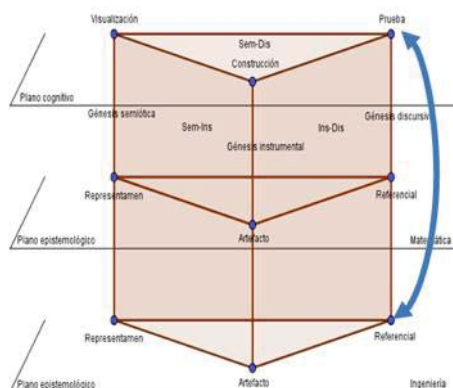


Figura 5.144 ETM extendido momento 2

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo (ingenieril) asociado a la situación.

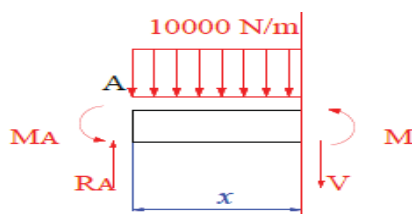
De la misma manera que se presentó en la unidad 2, se procede a calcular el valor de las reacciones considerando las ecuaciones de equilibrio que proporciona la estática. Para el cálculo de M_A se realiza sumatoria de momentos en A y para el valor de R_A , se realiza sumatoria de fuerzas verticales (Figura 5.145).

$$M_A = \frac{w L^2}{2} = 45000 Nm$$

$$R_A = wL = 30000 N$$

Figura 5.145 Reacción en A

[Profesor]: Seguidamente se efectúa una sección arbitraria que permita obtener la ley de momento flector.



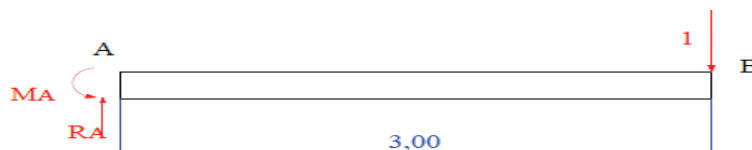
$$\sum M_P = 0$$

$$M + M_A - R_A x + w \frac{x^2}{2} = 0$$

$$M = -45000 + 30000x - 5000x^2$$

Figura 5.146 Suma de momentos en P

A continuación, se realiza una partición de la estructura para determinar la función de momento (ley de momento flector), que representa a la viga. Para ello, realiza sumatoria de momentos en el punto de la partición, donde x representa la distancia del origen al punto de corte. Es esta ocasión la función de momento resulta ser cuadrática (Figura 5.146).



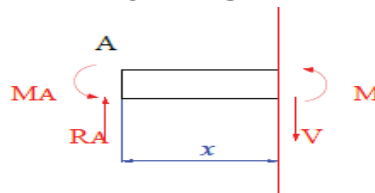
$$M_A = 1 \cdot 3 = 3 Nm$$

$$R_A = 1 N$$

Figura 5.147 Reacción en A

Para poder determinar el valor del desplazamiento, se utiliza el criterio de los trabajos virtuales, por lo que, en este caso, al solicitarse el desplazamiento vertical en B, entonces se aplica una fuerza vertical unitaria justo en el punto donde se solicita determinar la deformación (Figura 5.147).

Posteriormente, al igual que en la estructura original, se procede a determinar el valor de las reacciones M_A y R_A , pero en este caso en la estructura bajo carga virtual.



$$\sum M_P = 0$$

$$M + M_A - R_A x = 0$$

$$M = -3 + x$$

Figura 5.148 Función de momento para carga virtual

Siguiendo con el trabajo en la estructura virtual, se procede a determinar la función de momento flector (Figura 5.148) para la sección determinada por un corte en algún punto de la estructura, resultando en este caso una función de momento lineal.

$$1\Delta = \int_0^L m \frac{M}{EI} dx$$

Figura 5.149 Integral de desplazamiento

Una vez calculados los valores de las reacciones externas y las funciones de momento flector causadas por los esfuerzos internos en la estructura, se procede a calcular el valor del desplazamiento vertical en B, para ello, se utiliza la expresión anterior, para calcular la integral de 0 a L (Figura 5.149). Donde:

- 1Δ representa la fuerza virtual unitaria
- M es la función de momento flector producida por el sistema real
- m es la función del momento flector producida por el sistema virtual
- E, I son propiedades del material (Modulo de elasticidad y momento de inercia, respectivamente)

$$1\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-3 + x) \cdot (-45000 + 30000x - 5000x^2) dx$$

$$\Delta = \frac{1}{(3,05E + 10N^2cm^2)} (1,01250E + 11 N^2cm^3)$$

$$\Delta = 3,33 cm$$

Figura 5.150 Cálculo del desplazamiento

A continuación, el profesor utiliza la integral definida (Figura 5.149), para determinar el desplazamiento en el punto *B* (Figura 5.150). La flecha hacia abajo indica la dirección del desplazamiento vertical.

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 3

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

De acuerdo al CM (Figura 5.151), se observa trabajo en la etapa cuatro, donde se comienza el proceso de matematización vertical. Primero, se trabaja con el uso del conocimiento utilizado en los problemas analizados anteriormente (correspondientes a la unidad 2), donde el conocimiento de las ecuaciones de equilibrio de la estática permite el cálculo de reacciones externas y el cálculo de funciones que representan a los esfuerzos internos de la estructura (funciones de corte y de momento).

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar la integral

Continuando con la matematización vertical (Figura 5.153), ahora en esta parte del momento 3, se observa trabajo con modelos matemáticos donde se utiliza el objeto integral, mediante el cual es posible el cálculo del desplazamiento vertical en el extremo en voladizo. Notamos que, para la utilización del modelo, en este momento es importante el uso del conocimiento visto en la unidad 2 (problemas 1, 2 y 3 previamente analizados), debido a que, son parte del integrando del modelo utilizado.

ETM extendido para el momento 3

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

Observamos la activación de la génesis semiótica de la ingeniería (Figura 5.152), al considerar los signos asociados a las ecuaciones de la estática para el equilibrio y la génesis semiótica de la matemática al trabajar con la visualización de los signos presentes en los modelos construidos (ecuaciones para el equilibrio y funciones de cortante y momento). Posteriormente, ocurre un pasaje hacia la génesis instrumental, primero de la ingeniería al utilizar los artefactos representados por las ecuaciones de equilibrio y construir con ellas las funciones de cortante y de momento.

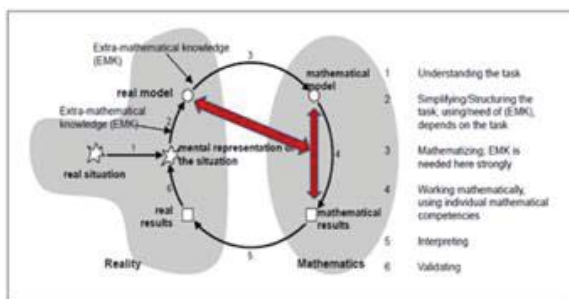


Figura 5.151 CM momento 3a

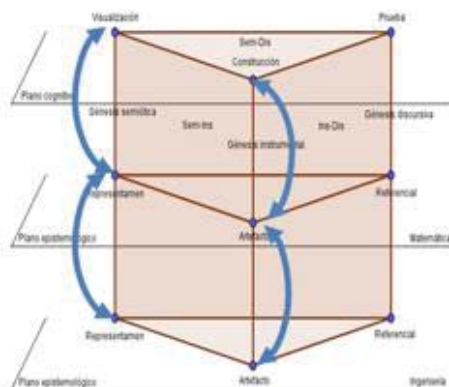


Figura 5.152 ETM extendido momento 3a

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar los esfuerzos internos

En esta segunda parte del momento tres, se continúa el trabajo con el plano semiótico instrumental (Figura 5.154), sólo que ahora los signos y artefactos del plano epistemológico, se corresponden con los modelos matemáticos donde interviene la integral. Observamos que aquí, las funciones de cortante y momento pasan a ser de un instrumento construido a un artefacto que permite el trabajo con este nuevo modelo (el modelo para el cálculo del desplazamiento).

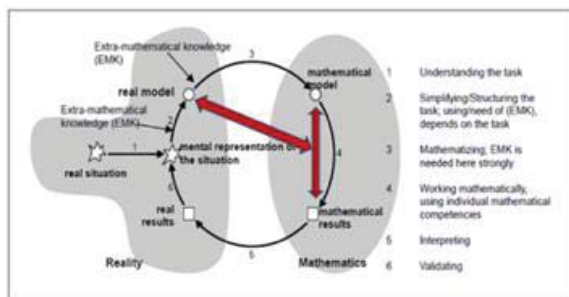


Figura 5.153 CM momento 3b

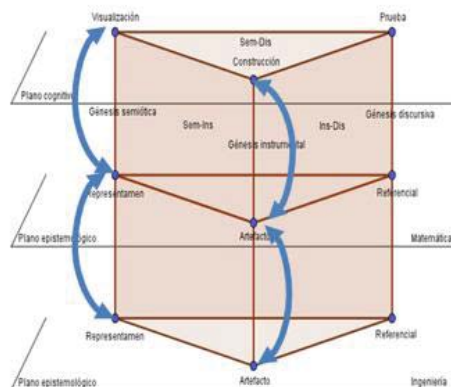


Figura 5.154 ETM extendido momento 3b

Así, el registro figural queda representado por los diagramas asociados a los cortes que se realizaron en la estructura. Se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Así, identificamos el plano semiótico-instrumental [Sem-Ins].

Así, en la resolución del problema tratado por el profesor en su clase se identifica circulación entre los planos [Sem-Dis] asociado al momento 2 y en el plano [Sem-Ins] asociado al momento 3.

5.2.6 Deformación de un modelo estructural tipo marco

Se presenta la explicación de una tarea resuelta por el profesor y se realizan algunas conexiones entre la disciplina (análisis estructural) con la matemática. La tarea pertenece a un ejemplo resuelto por el profesor y es correspondiente a la unidad cuatro "Cálculo de Deformaciones".

Momento 1. Presentación de un problema y entendimiento del problema a resolver.

[Profesor]: Determinar la rotación del nodo B de la estructura (Figura 5.155). Con $E = 2,45E + 06 \text{ N/cm}^2$.

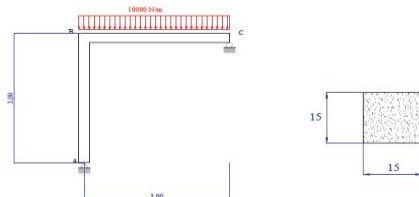


Figura 5.155 Esquema del problema

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 1

El problema trata sobre el cálculo de deformaciones. A diferencia del problema anterior, este es un modelo tipo marco, el cual es presentado por el profesor, por lo que en el CM (Figura 5.156), se parte del modelo real correspondiente a la etapa tres del ciclo. Para bien entender el problema presentado, el profesor explica el tipo de material con el que será construido el marco, en este caso un material con un módulo de elasticidad de $E = 2,45E + 06 \text{ N/cm}^2$. Sin embargo, dicha matematización ocurre en un proceso que va del modelo real al mundo de la ingeniería, no de la matemática, de acuerdo al CM extendido (Figura 5.157).

ETM extendido para el momento 1

Se activa la génesis discursiva (Figura 5.158), esto al encontrarse en referencial del plano epistemológico de la ingeniería, debido a que, en el entendimiento de la situación están presentes conceptos de la ingeniería, cómo es modelo estructural tipo marco, condiciones de elasticidad del material, tipo de apoyo de la estructura.

Posteriormente, se parte al polo de la prueba en el plano cognitivo, donde el profesor valida que el problema a estudiarse es propio del tipo de estructuras que se estudian en el curso, esto al relacionarlo con estructuras estáticamente determinadas, además, de que se identifica el tipo de apoyos a los cuales está sujeta la estructura. El registro figural está representado por el diagrama asociado al modelo real. Se observa activación de la génesis discursiva.

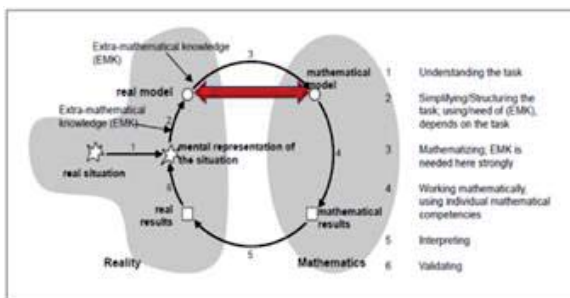


Figura 5.156 CM momento 1

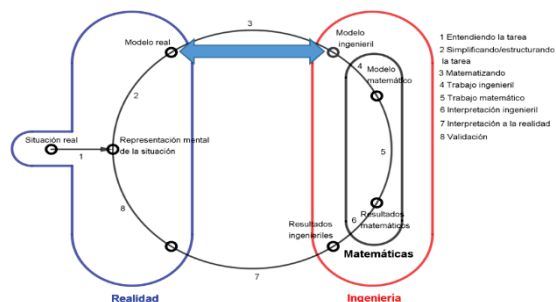


Figura 5.157 CM extendido momento 1

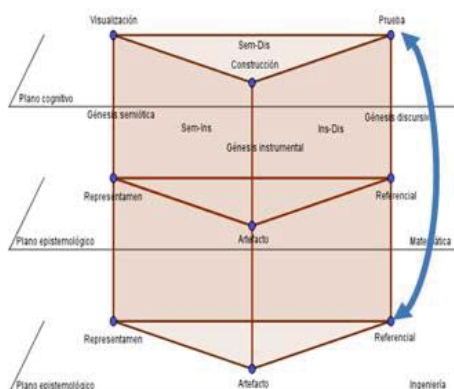


Figura 5.158 ETM extendido momento 1

Momento 2. Consideraciones tomadas desde el contexto extra matemático presentado, con la finalidad de estructurar y realizar simplificaciones de la situación.

En la estructura anterior también se pide determinar una deformación, pero ahora se solicita una deformación tipo rotación, para ello, también se utiliza el método de los trabajos virtuales. A diferencia de la estructura anterior, esta estructura es de tipo marco y las dimensiones del material por el que está compuesto se muestra la sección derecha de la figura.

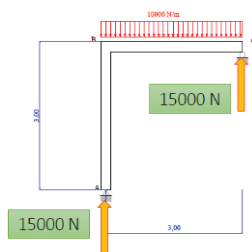


Figura 5.159 DCL de la estructura

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 2

Aquí se continúa en la etapa tres del CM (Figura 5.160), debido a que, se continúa trabajando con el modelo real presentado. Se trabaja con la elaboración del diagrama de cuerpo libre de la estructura (Figura 5.159). Además, se observa que, el conocimiento extra matemático de la situación influencia fuertemente el trabajo de este momento, al mostrar a través de él, el tipo de incógnitas externas originadas por los apoyos a los cuales está sujeta la estructura, además, el tipo de fuerza que se va a considerar debido a la distribución uniformemente lineal de la carga a la cual está sujeto el segundo elemento de la estructura (tramo $B - C$).

ETM extendido para el momento 2

En este momento se activa la génesis discursiva (Figura 5.161), dado que se parte del representamen desde el plano epistemológico de la ingeniería, esto al considerar los signos asociados a los apoyos, tipo de carga y elementos que componen el modelo tipo marco.

Posteriormente ocurre un pasaje al polo de la visualización en el plano cognitivo, al visualizar un diagrama de cuerpo libre construido desde el conocimiento extra matemático de la situación. Pasando así mismo por el plano del representamen de la matemática al representar los vectores fuerza que compondrán el diagrama de cuerpo libre y el tipo de fuerza equivalente a considerar por la carga uniformemente distribuida aplicada al tramo BC .

Así, se trabaja en el registro figural en conexión con el registro algebraico, esto en cuanto al cálculo de las reacciones externas asociadas a los vectores fuerza ocasionados por los apoyos de la estructura. Se observa la activación de las génesis semiótica y discursiva. Así, se identifica al plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

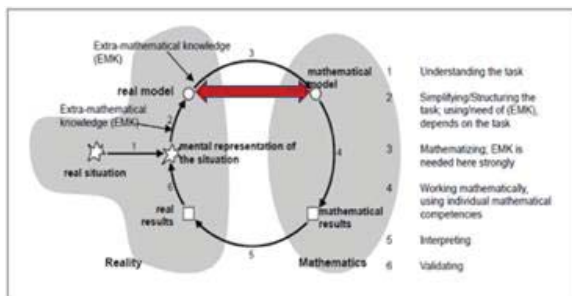


Figura 5.160 CM momento 2

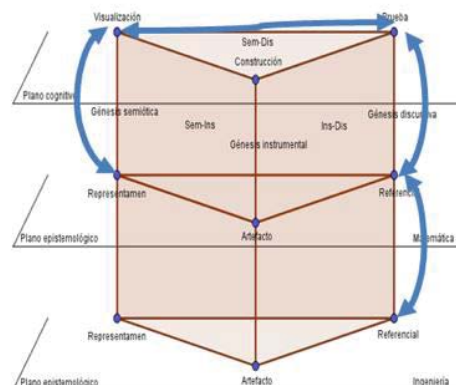
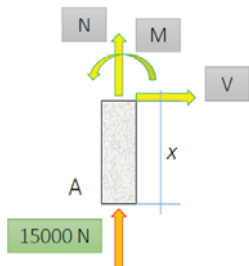


Figura 5.161 ETM extendido momento 2

Momento 3. Identificación de la presencia de un modelo (ingenieril) asociado a la situación.

A continuación, se determinan por estática las reacciones en los apoyos, es decir el valor de la reacción vertical en A y el valor de la reacción vertical en C , se puede proceder de varias formas, a través de realizar sumatorias de fuerzas en puntos de interés en la estructura.



$$0 \leq x < 3$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M = \mathbf{0}$$

Figura 5.162 Corte para el elemento vertical

A continuación, el profesor comienza con la determinación de las funciones de momento de los tramos de la estructura, en este caso con el tramo AB (Figura 5.162), el cual corresponde a los valores de x para el elemento vertical mayor o igual a cero y menores a tres.

En este caso, a diferencia de la viga, se puede notar que también deberá tomarse en cuenta la carga axial, ya que está afectará al elemento horizontal del marco. Se procede a calcular el momento en cualquier punto del elemento, siendo un valor de cero, debido a que el elemento está sometido solo a la carga axial de 15 000 Newton, los cuales no ejercen momento sobre el elemento.

Para el elemento anterior, las fuerzas internas en el nudo quedan de la siguiente manera:

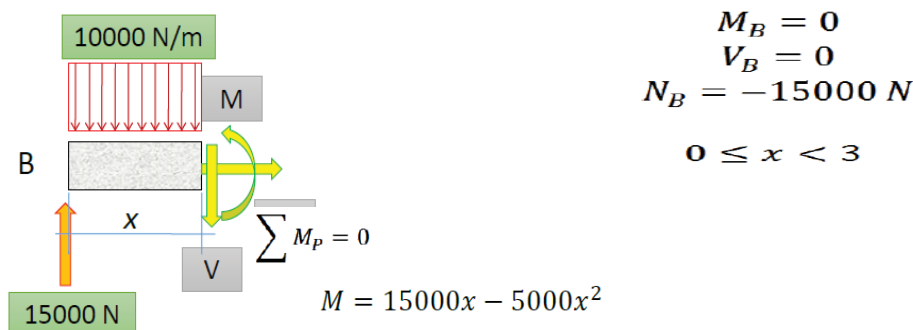


Figura 5.163 Corte para el tramo horizontal

Posteriormente, se calcula la función de momento para el tramo horizontal (Figura 5.163), como puede observarse, queda representado por una función cuadrada, debido a la carga a que está sujeto ese tramo, que es de tipo uniforme lineal.

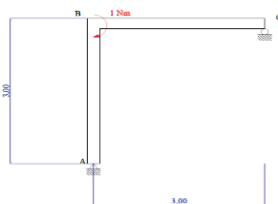


Figura 5.164 Asignación de momento virtual

A continuación, se procede a trabajar con el sistema virtual (Figura 5.164), para ello en la figura anterior se ha colocado un momento unitario virtual sobre el punto donde se desea calcular la rotación.

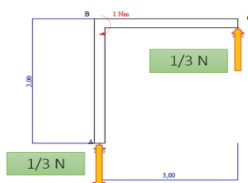


Figura 5.165 DCL

A partir del diagrama de cuerpo libre (Figura 5.165) se procede a determinar el valor de las reacciones en A y en C para el momento virtual aplicado en B.

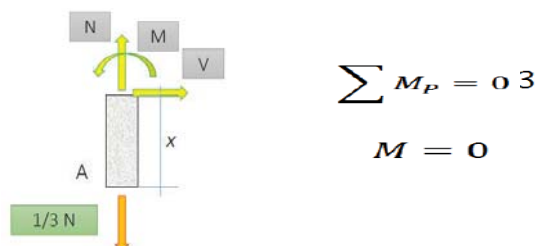


Figura 5.166 Corte tramo vertical

Para el tramo AB se calcula la ley de momento, que en este caso es de cero (Figura 5.166), debido a que solo contiene carga axial.

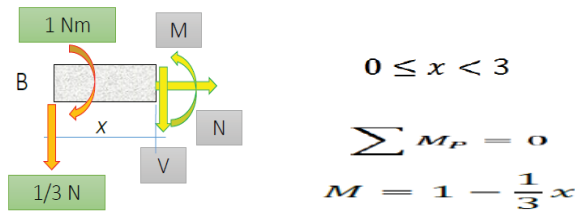


Figura 5.167 Corte tramo horizontal

Posteriormente, para el tramo BC se calcula la función momento (Figura 5.167).

$$1\theta = \int_0^L m \frac{M}{EI} dx$$

Para calcular el valor de la deformación se utiliza la integral anterior, donde θ representa el valor de la deformación por rotación.

$$1\theta = \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) (12000x - 2000x^2) dx$$

$$1\theta \text{ Nm} = \frac{1}{EI} 11250 \text{ N}^2 \text{ m}^3$$

$$\theta = \frac{11250}{EI} \text{ rad} = 0,01088 \text{ rad}$$

Figura 5.168 Cálculo del desplazamiento angular

Por último, se utiliza la integral, sustituyendo la función momento para el sistema real y virtual. Además, se determina el valor de la deformación por rotación en el punto B (Figura 5.168).

Trabajo realizado con respecto al CM para el momento 3

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

Se observa trabajo en la etapa cuatro del CM (Figura 5.169), al conectar, desde el modelo real y a través de la matematización horizontal, los modelos que servirán para la determinación de las incógnitas identificadas en el momento dos, las cuales corresponden a las fuerzas de reacción ubicadas en los apoyos de la estructura. Al momento de determinar su valor, a través de los modelos proporcionados por el equilibrio estático de la estructura. Determinando así los valores de las reacciones externas tanto en el punto A como en el punto C.

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar la integral

Al igual que en el inciso anterior, se trabaja en la etapa cuatro del CM (Figura 5.171), esto al realizar un pasaje del modelo real al mundo matemático a través de la construcción de modelos ingenieriles que permitirán encontrar la incógnita. En este caso, el valor de la rotación en el punto C de la estructura, donde el modelo trabajado involucra el cálculo de rotaciones mediante el uso de la integral.

ETM extendido para el momento 3

a) Trabajo con modelos que provienen de las condiciones de equilibrio para el cálculo de las reacciones externas

Se activa la génesis de la semiótica de la ingeniería (Figura 5.170), al considerar los signos asociados a los modelos que permitirán el cálculo de las reacciones externas. Posteriormente, se pasa a la génesis semiótica de la matemática donde se visualiza el tipo de modelo a trabajar.

A continuación, se activa la génesis instrumental, dado que las ecuaciones de la estática para el equilibrio son herramientas semióticas que desde el referencial de la ingeniería se convierten en artefactos que van desde la génesis de la ingeniería a la génesis instrumental de la matemática, esto al determinar los modelos y calcular el valor de las incógnitas debidas a las reacciones externas de la estructura.

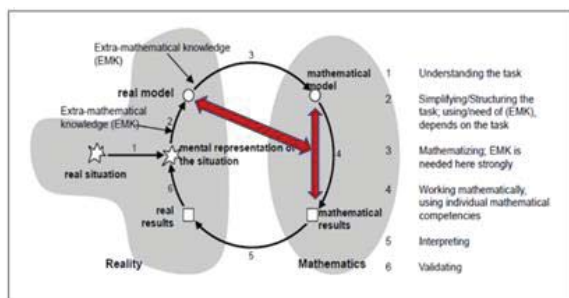


Figura 5.169 CM momento 3a

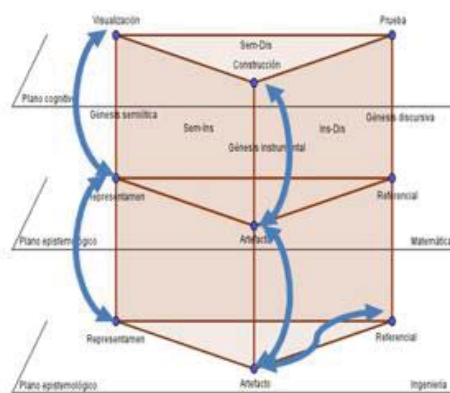


Figura 5.170 ETM extendido momento 3a

b) Trabajo con modelos que provienen de considerar la integral

Se activa la génesis semiótica de la ingeniería (Figura 5.172), al visualizar los signos presentes en los modelos que permitirán primero la determinación de las funciones de momento y segundo la determinación de la deformación por rotación en el punto B de la estructura. Posteriormente, ocurre un pasaje a la génesis semiótica de la matemática al considerar las ecuaciones que representan los modelos ingenieriles.

A continuación, se observa la activación de la génesis instrumental de la ingeniería, primero al considerar las ecuaciones de equilibrio como artefactos que permitirán construir los modelos (funciones de momento y funciones de cortante, así como modelo para la determinación de la deformación por rotación).

Luego, hay un pasaje a la génesis instrumental de la matemática (con origen en el referencial de la ingeniería dado que las condiciones de equilibrio son herramientas semióticas que se convierten en artefactos), esto al momento de construir las ecuaciones que representan los modelos y operar con ellas para así encontrar los valores, tanto de las funciones de momento y corte como el valor de la deformación por rotación.

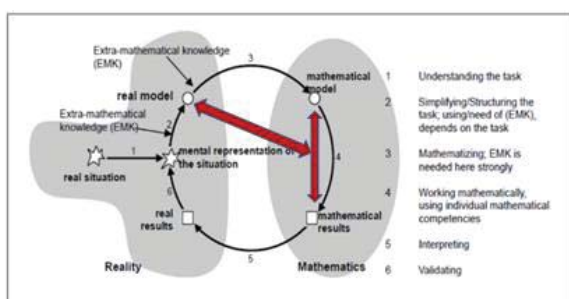


Figura 5.171 CM momento 3b

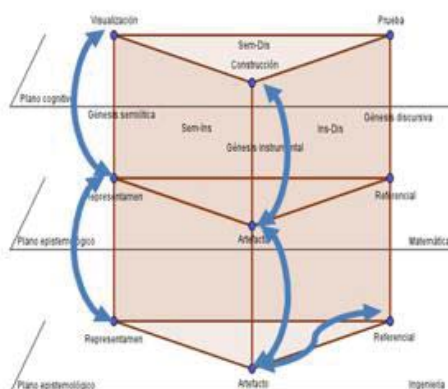


Figura 5.172 ETM extendido momento 3b

Los registros figural y algebraico se conectan para dar la solución al problema. Se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Así identificamos al plano semiótico-instrumental [Sem-Ins].

Así, en la resolución del problema tratado por el profesor en su clase se observa una circulación entre los planos [sem-Ins] asociado al momento 2 y en el plano [Sem-Ins] asociado al momento 3.

Conclusión del análisis de los problemas para la unidad cuatro

El análisis de los problemas 5 y 6 correspondientes al cálculo de deformación en estructuras estáticamente determinadas, nos permite

evidenciar que, el profesor, además, de seguir con el mismo esquema de explicación, es decir, justificación de los métodos, y explicación de ejemplos, presenta ahora el trabajo con modelos asociados a la deformación de una estructura.

Desde el ciclo de modelización, observamos que los problemas se corresponden al trabajo con determinadas etapas del ciclo y no un trabajo completo, por lo que la modelización se trabaja de manera parcial.

En cuanto al vínculo entre matemáticas e ingeniería, observamos que los problemas trabajados en esta sección se corresponden, al igual que en la sección anterior a nociones de cálculo relacionadas con la noción de función, derivada e integral.

El registro figural se asocia a los diagramas y los registros algebraicos asociados a las ecuaciones de equilibrio y a la integral para el cálculo de las deformaciones. Se observó una circulación completa entre las génesis. Así como una activación de todos los planos del ETM extendido.

5.3 Resultados en el ETM idóneo

A continuación, mostramos los resultados obtenidos en el ETM idóneo, relacionado con un profesor de ingeniería en el contexto de un curso de formación profesional para la carrera de ingeniería civil. Para ello presentamos los resultados relacionados con las situaciones académicas analizadas y mostramos los resultados en cuanto a la relación entre los objetos matemáticos, modelos matemáticos y modelos de ingeniería.

5.3.1 Resultados sobre las situaciones académicas abordadas en el curso

Las situaciones corresponden con el tratamiento de estructuras, a través del uso de modelos asociados a dichas estructuras tales como viga, marco y armadura. Además, se trataron dos tipos de problemas, aquellos relacionados con el manejo de estructuras estáticamente determinadas (también llamadas estructuras isostáticas) y estructuras estáticamente indeterminadas (también llamadas estructuras hiperestáticas). Los modelos teóricos utilizados aseguran la capacidad de resistir y de sufrir deformaciones apropiadas, esto es como un objetivo en los problemas que se modelan.

Observamos que la solución de los problemas a lo largo del curso, en lo general se basaron en dos hipótesis: la hipótesis de un comportamiento **lineal elástico de la estructura**, es decir, que la relación entre el esfuerzo aplicado y su deformación están en una relación lineal, donde la proporcionalidad se mide a través del módulo de elasticidad (E). La segunda

hipótesis que observamos, es la **linealidad geométrica**, es decir, que la estructura sólo puede soportar pequeñas deformaciones, de tal manera que éstas quedarían prácticamente invisibles a la simple percepción.

Por tanto, de la exploración de los problemas trabajados en el curso, procedimos al análisis riguroso de 6 situaciones académicas en el sentido de Niss & Hojgaard (2019), para su selección nos basamos en las temáticas antes mencionadas y en los objetos matemáticos presentes. Así, el modelo lineal (o linealidad) está presente en todo el desarrollo de este curso y los estudiantes aprenden a resolver y modelar estructuras bajo este principio matemático que tiene un significado en el eje Análisis de Estructura para Ingeniería. A continuación, señalamos las nociones matemáticas presentes en el curso, a través de las dos temáticas identificadas (estructuras estáticamente determinadas y estructuras estáticamente indeterminadas).

- Para la temática de estructuras estáticamente determinadas, los objetos matemáticos que emergieron fueron los asociados a nociones básicas de cálculo (función, derivada, integral). La noción de función emerge en el estudio de funciones asociadas momentos y esfuerzos internos de las estructuras. La noción de derivada surge en tres momentos: uno para establecer relaciones entre las funciones de carga, cortante y momento; otro para determinar los valores máximos /o mínimos de momento y cortante en un elemento estructural; y un tercer momento surge en la necesidad de comprender la curvatura de los diagramas de cortante y de momento. La noción de integral surge en dos momentos: un primer momento, para relacionar las funciones de carga, cortante y momento asociadas a los esfuerzos internos de la estructura, un segundo momento, para calcular las deformaciones de la estructura, es decir los desplazamientos y rotaciones.
- Para la temática de estructuras estáticamente indeterminadas, los objetos matemáticos asociados guardaron relación con nociones de álgebra lineal. Lo anterior, debido a que en esta temática, los modelos estructurales eran más complejos. Su complejidad radicó en la geometría de la estructura (vigas de varios vanos (tramos), marcos de varios niveles) y en su capacidad para trasladar y rotar.

A diferencia de las estructuras estáticamente determinadas, la solución de este tipo de estructuras necesita de la conformación de ecuaciones adicionales a las que proporciona la estática, y que estudiamos por equilibrio a través de sistemas ortogonales (sumatoria de fuerzas en x , sumatorias de fuerzas en y , y sumatoria de momentos).

De manera general, se formaron sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Su conformación se asoció, como lo señalamos a su complejidad, el número de ecuaciones y de incógnitas dependía de los

elementos estructurales presentes en los modelos y de su traslación y /o rotación.

En el curso se resolvieron principalmente dos métodos para esta temática: método de las flexibilidades (asociados a incógnitas debidas a fuerzas) y método de rigideces (asociado a incógnitas debidas a rotaciones y /o traslaciones).

En el curso se señaló la importancia de sistematizar ambos métodos a través de matrices cuya solución podía ser realizada por computadora o calculadora simbólica.

En el cierre del curso, se señaló la relevancia del uso de software para la solución de las estructuras, esto a través de métodos exactos (como es el método de rigidez) o de métodos aproximados (como es el método de los elementos finitos, como es el caso del software SAP 2000). Para ello, surgieron otras nociones de álgebra lineal, asociadas a la sistematización del método de las rigideces para su trabajo computacional.

En este caso, se precisó trabajar primero con cada uno de los elementos de la estructura (matriz elemental de rigidez) y posteriormente con la estructura en lo global (aquí se necesitó trabajar con la matriz global). En el pasaje entre ambos niveles (del local al global) surgieron nociones relacionadas con la matriz de transformación.

Respecto del ETM_{ingeniería}, observamos que la relación con los paradigmas del cálculo del ETM_{análisis}, los problemas se correspondieron en general con un paradigma 2 de tipo calculatorio (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016), donde las nociones de cálculo que emergieron en los modelos, funcionó como herramienta para la solución de los problemas.

Pudo observarse una circulación completa entre todos los componentes del ETM extendido (Montoya Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014), esto se evidenció en los análisis presentados en este capítulo con la activación tanto de las diversas génesis como de relaciones entre ellas a través del trabajo con todos los planos verticales.

5.3.2 Resultados sobre la relación objeto matemático – modelo matemático – modelo de ingeniería

De las seis situaciones de clase analizadas, de las cuales la primera corresponde a una explicación de tema y las siguientes 5 a la solución por parte del profesor de 5 problemas. Podemos establecer los siguientes hallazgos:

1. El profesor promueve un tratamiento conceptual de los contenidos y esto se corresponde con su interés en promover ese tipo de enseñanza de los conceptos con sus estudiantes en el curso. Esto también se

corroborar en la entrevista realizada al profesor, donde se le cuestiona con respecto al uso del software en el ámbito profesional del ingeniero, señalando que se promueve lo conceptual en el sentido de que el estudiante sea capaz de afrontar su vida profesional, donde otras herramientas, adicionales a las teóricas proporcionadas por el curso, pueden emerger, como es el uso de software y normas de construcción.

2. El proceso de modelización es entendido, como aquel proceso donde el profesor presenta problemas que resuelve y estos son asociados a modelos estructurales idealizados como modelos tipo viga, modelo tipo marco y modelo tipo armadura, como podemos observar en los problemas anteriormente descritos.

Nos parece interesante, que la visión de modelización es fuertemente trabajada a lo largo del curso (en correspondencia con lo solicitado por el programa de la asignatura y en lo general con el currículo de formación del ingeniero civil de la universidad). Además, evidenciamos que esta ocurre de manera atomística en el sentido de Blomhoj & Hojgaard Jensen (2003), quienes señalan que trabajar desde un enfoque atomístico dice relación con enfatizar un trabajo con los sub procesos de modelización relacionados con matematizar y trabajar matemáticamente con modelos.

Comparando las tareas de modelización del curso en su componente teórica, se tiene que del ciclo de modelización, las etapas de *construir un modelo real* no son trabajadas en la explicación del profesor sino que los problemas parten de un modelo estructural idealizado. Sin embargo, matematizar y trabajar con modelos matemáticos son sub procesos del CM altamente promovidas.

3. Observamos la emergencia de un proceso de modelización donde la prioridad, obviamente no es la modelización matemática sino la modelización de la estructura, por tanto emergen distintos modelos, modelos estructurales (vigas, armaduras y marcos), y de modelos matemáticos asociados a funciones polinomiales y a objetos como la derivada y la integral.
4. La relación entre los objetos matemáticos y los modelos matemáticos (ingenieriles) que encontramos se muestra en las siguientes tablas (Tabla 5.9 y Tabla 5.10). Cabe señalar que, la naturaleza de los objetos y su relación con los modelos puede ser muy sutil, en ese entendido,

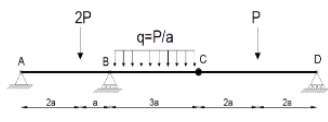
CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

existen objetos que de acuerdo al CM funcionan como técnicas para la solución de los modelos.

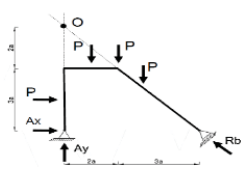
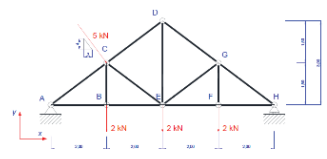
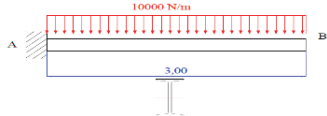
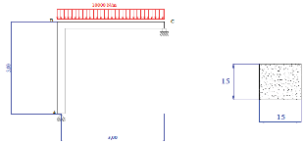
Tabla 5.9 Objetos matemáticos presentes en el proceso de solución de las situaciones

Problema	Tarea realizada en el curso	Objetos matemáticos
Análisis de la resistencia de una viga	Determinar los diagramas que representan la resistencia de la estructura. A saber: diagramas de cortante y de momento.	Proporcionalidad, función, primera y segunda derivada de una función, integral definida, solución de una ecuación.
Cálculo de reacciones en un marco	Determinar las reacciones externas de la estructura.	Función, solución de una ecuación.
Fuerzas internas en las barras de una armadura	Calcular el valor de las fuerzas internas en las barras que componen la armadura.	Ecuación / sistema de ecuaciones y solución de una ecuación
Deformación lineal en una viga	Determinar el valor de una deformación lineal.	Función, ecuación, integral
Deformación angular en un marco	Determinar el valor de una deformación angular.	Función, ecuación, integral

Tabla 5.10 Relación entre objetos y modelos

No.	Problema / Estructura proporcionada	Objetos matemáticos	Modelo matemático	Modelo estructural
1		Proporcionalidad, función, primera y segunda derivada de una función, integral definida, solución de una ecuación	Función, en sus representaciones gráfica y algebraica	Modelo viga

CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

2		Función, solución de una ecuación.	Función en su representación algebraica	Modelo marco
3		Ecuación / sistema de ecuaciones y solución de una ecuación	Función en su representación algebraica	Modelo armadura
4		Función, ecuación, integral	Función en su representación algebraica e integral como área	Modelo viga
5		Función, ecuación, integral	Función en su representación algebraica e integral como área.	Modelo armadura

5. De la tabla anterior, en el lenguaje del análisis estructural y de la matemática, se tiene (Tabla 5.11)

Tabla 5.11 Lenguaje del análisis y lenguaje matemático

En el lenguaje del análisis estructural	En el lenguaje matemático
Linealidad del material acorde a la relación entre los esfuerzos y las deformaciones (Ley de Hooke)	Proporcionalidad
Variación del momento flector con respecto a X	Primera derivada de una función
Variación de la fuerza cortante con respecto a X	Primera derivada de una función
La función de carga sobre la estructura vista como la variación de la variación del momento flector con respecto a X	Segunda derivada de una función

CAPÍTULO 5. ETM EXTENDIDO IDÓNEO: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Cambio acumulado de la carga sobre la estructura	Integral definida
Cambio acumulado de la función que representa la fuerza cortante Deformación de una estructura	Integral definida
Condiciones de la estática para determinar si una estructura es estáticamente determinada	Solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones lineales

Por tanto, se identifica una dialéctica permanente en el proceso de modelización entre los modelos intervinientes, es decir, entre el modelo estructural y el modelo matemático que emerge en la solución de los problemas que desarrolla el profesor durante el desarrollo del curso analizado.

Capítulo 6

ETM extendido personal: Análisis y resultados

Capítulo 6. ETM extendido personal

De las áreas del eje de formación profesional en Ingeniería Civil (Estructuras, Hidráulica, Suelos y administración de proyectos de construcción) se ha elegido para la recolección de datos el área de Ingeniería Estructural. Con base a la metodología de recolección de datos expuesta en el capítulo 3, recordamos el esquema con la finalidad de ubicar, en el contexto de los datos, el capítulo que se trabaja a continuación (Figura 6.173).



Figura 6.173 La recolección de datos

El presente capítulo muestra elementos que nos permiten estudiar el ETM extendido personal del estudiante de ingeniería y su relación con la modelización, en el contexto del salón de clase, cuando el estudiante resuelve problemas de ingeniería en escenarios de evaluación (perteneciente a la componente teórica del curso) y la elaboración de un proyecto (perteneciente a la componente práctica del curso). Para ello, trabajamos con los siguientes escenarios:

1. Resolución de problemas de evaluaciones
2. Estudiantes trabajando en un proyecto de modelización estructural
3. Entrevista con estudiante tesista

6.1 Estudiante resolviendo problemas de evaluaciones

Se nos proporcionaron cuatro pruebas parciales con sus respectivas respuestas entregadas por un estudiante (de ahora en adelante E0), realizadas durante el semestre académico (2 de 2017). De las cuales 3 son controles y una es interrogación. Las evaluaciones en general constaban de entre 1 a cuatro preguntas, y en algunos casos existía una pregunta de tipo conceptual.

Cabe mencionar, que el estudiante obtuvo un buen desempeño académico y con base en ese criterio el profesor nos entregó la producción de E0. Se seleccionó el control número 1 correspondiente al tema reacciones externas y esfuerzos internos. Dicha selección se realizó considerando que contiene

nociones basales para los siguientes contenidos: cálculo de funciones de cortante y de momento. Además, el problema nos pareció muy completo en el contenido, dado que manejaba descomposiciones de fuerzas sobre elementos con inclinación distinta a lo generalmente trabajada en clase y nos pareció relevante ver cómo el estudiante abordaba el problema. Además, que nos permitiría observar cómo era la relación del problema con el ciclo de modelización y con las génesis y planos del ETM extendido.

El control contenía sólo el problema que se presenta y corresponde a la unidad II, determinación de reacciones externas y esfuerzos internos. A continuación, se presenta la producción escrita de E0 correspondiente a la evaluación.

Problema

Calcular las fuerzas que resiste una estructura cuando es sometida a dos pesos

Los datos son entregados mediante un esquema (las indicaciones las hemos transcrito abajo, de los incisos a al d) (Figura 6.174) en el cual se observa que la primera carga es de 10 Ton distribuida de manera uniformemente lineal y una carga puntual de 15 Ton. Para resolver el problema el estudiante debe responder:

- a) Calcular las reacciones externas
- b) Determinar las leyes de esfuerzos axiales, cortantes y momentos
- c) Trazar los diagramas de esfuerzos resultantes, indicando los puntos en los que se producen los valores máximos
- d) Indicar cuál es el criterio que emplea para determinar la ubicación de los máximos valores de momentos.

1. Se tiene la siguiente estructura, consistente en dos cuerpos vinculados mediante una articulación intermedia en el nudo C. Se pide:
Calcular las reacciones externas [1 punto]
Determinar las leyes de esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores [2,5 puntos]
Trazar los diagramas de esfuerzos resultantes, indicando los puntos en los que se producen los valores máximos [1,5 puntos]
Indique cuál es el criterio que se emplea para determinar la ubicación de los máximos valores de momentos [1 punto]

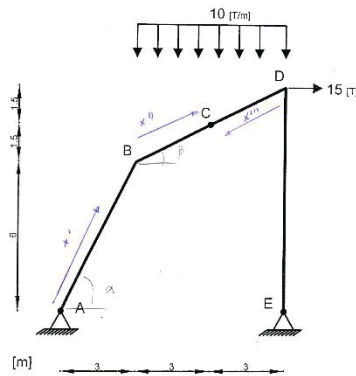


Figura 6.174 Problema de evaluación

6.1.1 Descripción de la tarea y procedimientos esperados

Se trabajó con un ingeniero junior con experticia en el área, quien nos proporcionó la solución del problema con la finalidad de tener una respuesta experta a la evaluación. Con base en ello, presentamos la descripción y procedimientos esperados que realice el estudiante.

Descripción del problema

El problema consiste en un modelo estructural tipo marco, el cual puede ser resultado de idealizar un espacio de volumen en una región delimitada por la forma geométrica del marco en dos dimensiones. La estructura está compuesta por dos cuerpos separados por una rótula en el nudo C. Cada cuerpo consta de dos elementos, si observamos el marco de izquierda a derecha:

Para el primer cuerpo se tiene: El elemento 1 (del nudo A al nudo B) parte de un apoyo fijo en A, dicho apoyo restringe el movimiento horizontal y vertical del nudo en ese punto, observamos que está rotado un determinado ángulo de inclinación respecto de los ejes coordenados de referencia globales XY y termina en el nudo B, así mismo se observa que el elemento 1 no está sometido a cargas.

El elemento 2 del cuerpo izquierdo comienza en el punto B y también se presenta rotado un ángulo determinado con respecto a los ejes XY de referencia globales, y culmina en el nudo C, el cual es llamado rótula, la rótula permite seccionar el marco en dos cuerpos e incluso ser analizados por separado, al no generar restricción con respecto a rotación, el nudo C (rótula) es un pivote que permite el cálculo de sumatoria de momentos en ese punto (por la izquierda o por la derecha), se observa que el elemento 2 está sometido a una carga de variación constante uniformemente

distribuida, pero que no está distribuida con respecto a los ejes del elemento.

A continuación, se tiene el segundo cuerpo, compuesto por el elemento 3, que va del nudo *C* al nudo *D*, el cual presenta el mismo ángulo de inclinación respecto de los ejes de referencia del elemento 2. El elemento 3 está sometido a una carga de variación constante uniformemente distribuida, pero que no está distribuida con respecto a los ejes del elemento; finalmente, se tiene el elemento 4, el cual parte del nudo *D* sometido a una carga puntual de 15 Ton y culmina en el nudo *E*, el cual está sometido a un apoyo fijo, que restringe los movimientos horizontales y verticales, por lo que genera reacción en ambos sentidos. Así mismo, se observa que este elemento se corresponde de manera paralela con los ejes de referencia globales *XY*.

Se solicita que el estudiante responda las siguientes cuatro preguntas

a) Calcular las reacciones externas

En esta sección, el estudiante debe primero comprender que la estructura es del tipo estáticamente determinada, para ello determinará el número de incógnitas debidas a las fuerzas de reacción externas (causadas por el tipo de apoyo al cual está sometida la estructura) y contrastar ese número con las ecuaciones de la estática que puede obtener al realizar la sumatoria de fuerzas en los ejes *X* y *Y* y la sumatoria de momentos.

Posteriormente, se procederá a determinar dichas sumatorias (Figura 6.175), las cuales permitirán construir las ecuaciones que contendrán las incógnitas de reacción externas. Una estrategia para calcular el total de valores puede ser que realice sumatoria de momentos ya sea a la izquierda de la rótula en *C*. Esto debido a que la rótula permite seccionar la estructura sin generar momentos (no restringe la rotación del nudo *C*). Otra estrategia es que realice el mismo procedimiento pero con respecto a la derecha del nudo *C*. Lo anterior permite el cálculo de las reacciones *A_x* y *A_y*.

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + E_x + 15 = 0 \quad (1) \\
 & \bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + E_y - 60 = 0 \quad (2) \\
 & \bullet \sum M_A = 0 \Rightarrow -60T(6m) - 15T(9m) + E_y(9m) = 0 \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow -360T.m - 135T.m + 9E_yT.m = 0 \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow -495 + 9E_y = 0 \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow E_y = \frac{495}{9} \quad \Leftrightarrow E_y = 55 [T] \\
 & \Rightarrow A_y + 55 - 60 = 0 \quad \Leftrightarrow A_y = 5 [T]
 \end{aligned}$$

Figura 6.175 Respuesta experta. Sumatoria de fuerzas externas a la estructura

En la sumatoria de fuerzas y momentos, el estudiante deberá comprender el efecto de la carga el área de la región presentada sobre el elemento BC y CD , a través de dibujar un Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) (Figura 6.176). Para ello se va a representar como una carga puntual colocada al centroide de la región y que dicha carga puntual es el área de la región, rectangular, en este caso, por lo tanto será el resultado de multiplicar la dimensión de la base por la dimensión de la altura (representada por el valor de la carga distribuida de manera constante por unidad lineal).

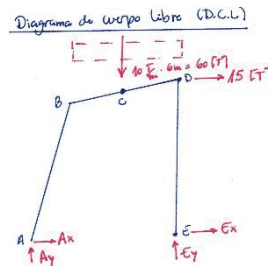


Figura 6.176 Respuesta experta.
Diagrama de Cuerpo Libre

Para el cálculo del resto de las reacciones externas A_x y E_x , (Figura 6.176), se pueden calcular sumatorias de momento justo en la rótula presente en el nudo C (Figura 6.177). Considerando que una rótula no produce momento, se procede a realizar la sumatoria de momentos, si se calcula la suma de momento por la izquierda de C , se tiene, que para la suma de momentos en C se multiplican fuerzas por su distancia perpendicular (brazo de palanca) al punto C . A saber: la reacción A_y por su distancia perpendicular al punto donde se encuentra la rótula, la cual es de magnitud 6 que causa un momento negativo al girar a favor de las manecillas del reloj.

Luego la reacción A_x multiplicado por su distancia perpendicular al punto donde se encuentra la rótula, de distancia 7,5 que causa un momento positivo al girar contrario a las manecillas del reloj y por último el momento que causa la fuerza distribuida uniforme, área de la región (10 Ton/m de la carga puntual por 3 m de distancia) multiplicada por su brazo de palanca¹ de 1.5 m (al centroide de la región, esto es a la mitad de la región representada por un rectángulo)

Para hallar A_x , tomamos el momento en la rótula C :

$$\begin{aligned} \sum M_C^{Izq} &= 0 \Rightarrow -A_y(6) + A_x(7.5) + (10 \cdot 3)(1.5) = 0 \\ &(\Rightarrow) -30 \text{ T} \cdot \text{m} + 7.5 A_x \text{ T} \cdot \text{m} + 45 \text{ T} \cdot \text{m} = 0 \\ &(\Rightarrow) A_x = \frac{-15}{7.5} \quad (\Rightarrow) \underline{A_x = -2 \text{ [T]}} \\ (1) \quad &\Rightarrow -2 + E_x + 15 \quad (\Rightarrow) \underline{E_x = -13 \text{ [T]}} \end{aligned}$$

Figura 6.177 Respuesta experta. Sumatoria de momentos a la izquierda de la rótula

Finalmente, el D.C.L. de la estructura con el valor de sus reacciones externas y cargas externas se representa en la (Figura 6.178)

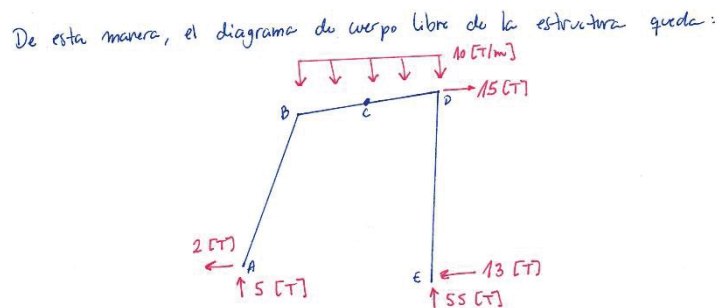


Figura 6.178 Respuesta experta. D.C.L.

b) Determinar las leyes de esfuerzos axiales¹⁰, cortantes¹¹ y momentos¹² flectores.

En esta sección, se pide determinar los esfuerzos a los que está sometida la estructura de manera interna, debido a que se debe trabajar en lo interno, cada elemento de la estructura se deberá someter a cortes¹³, cada corte se asociará a una ley o función de esfuerzos¹⁴, el estudiante deberá conocer el criterio para corte de los elementos, los cortes se deben realizar conforme a la existencia de apoyos, carga puntual y/o distribuida y/o momentos puntuales.

En el caso de la estructura que se está analizando, el estudiante trabajará de las siguientes posibles formas: 1) Comenzar con trabajar con la estructura de izquierda a derecha, cortando los elementos de la siguiente manera: elemento 1 (nudo A y B) no es necesario particionarlo debido a que no está sometido a cargas de soporte puntuales, ni cargas asociadas a momentos ni cargas distribuidas.

Por tanto, el corte se realiza a cualquier distancia "x" del nudo A, (Figura 6.178), como causa de dicho corte, por criterio de equilibrio, se origina una fuerza en x, una fuerza en y y un momento. Debido a que las fuerzas de reacción no coinciden con los ejes locales del elemento, se deberá calcular el ángulo de inclinación del elemento, para ser utilizado en la

¹⁰ Axial: Actúa perpendicularmente al área y es originada por cargas que tienden a empujar o jalar sobre dos segmentos del cuerpo.

¹¹ Corte: Reside en el plano del área y se origina por cargas que tienden a ocasionar que dos segmentos de un cuerpo resbalen uno sobre de otro.

¹² Momento: Se origina por cargas que tienden a flexionar el cuerpo respecto a un eje que se encuentra dentro del plano del área.

¹³ Cortes: Acción realizada en el cuerpo de la estructura con la finalidad de determinar en el los esfuerzos y momentos internos.

¹⁴ Función de esfuerzos: determina la ley que rige el comportamiento a axial o cortante en el interior de la estructura.

descomposición de las fuerzas de reacción ¹⁵A_x y A_y, como se observa a continuación:

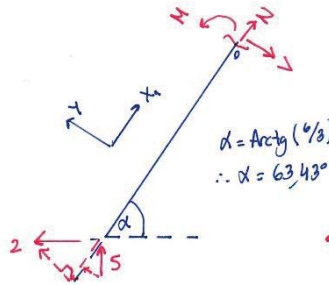


Figura 6.179 Descomposición de fuerzas

Al elemento 1 (Figura 6.179) con su respectivo corte se le aplican las condiciones de equilibrio de la estática, al mismo modo de lo trabajado en la sección *a* (donde se calcularon las reacciones externas), cada subelemento debe ser sometido a equilibrio, lo que permitirá construir las leyes o funciones de esfuerzos axiales (Figura 6.180), considerando los valores de los vectores fuerza descompuestos, es decir, las fuerzas que son paralelas al eje *x* local del elemento.

$$\begin{aligned} \bullet \sum F_x = 0 &\Rightarrow -2 \cos(63,43) + 5 \sin(63,43) + N = 0 \\ \therefore N(x_1) &= -3,58 \text{ [T]} \end{aligned}$$

Figura 6.180 Respuesta experta. Cálculo de la fuerza axial

Enseguida, se calcula la función de corte para el elemento 1 (Figura 6.181), considerando los vectores fuerza descompuestos (utilizando la razón trigonométrica seno o coseno, de acuerdo a la disposición del vector fuerza, para de esta manera asegurar el paralelismo entre el vector fuerza y el eje sobre el cual se calcula la sumatoria de fuerzas); es decir, se realiza la sumatoria de fuerzas en el eje *y*, para esto se consideran las fuerzas paralelas al eje *y* local del elemento.

$$\begin{aligned} \bullet \sum F_y = 0 &\Rightarrow 2 \sin(63,43) + 5 \cos(63,43) - V = 0 \\ \therefore V(x_1) &= 4,03 \text{ [T]} \end{aligned}$$

Figura 6.181 Respuesta experta. Cálculo de la fuerza cortante

¹⁵ Fuerza de reacción: se refiere a la fuerza que guarda relación con la reacción del punto de apoyo de la estructura. Este apoyo puede ser fijo, rodillo o empotrado.

Para finalizar, con la última sumatoria sobre el corte del elemento 1, se realiza la sumatoria de momentos (Figura 6.182), considerando como en las sumatorias de fuerzas anteriores, los valores de los vectores fuerza descompuestos en sus componentes paralelas al eje y solamente, debido a que los vectores fuerza paralelos al eje x no causan momento flector.

$$\begin{aligned} \bullet \sum M_0 = 0 &\Rightarrow 2 \text{Sen}(63,43) \cdot x + 5 \text{Sen}(26,57) \cdot x + M = 0 \\ \therefore M(x_1) &= 4,03 \cdot x_1 \text{ [T.m]} \\ \hookrightarrow \text{Si } x_1 = 0 &\Rightarrow M(0) = 0 \text{ [T.m]} \\ \hookrightarrow \text{Si } x_1 = 6,7 &\Rightarrow M(6,7) = 27 \text{ [T.m]} \end{aligned}$$

Figura 6.182 Respuesta experta. Función de momento para el elemento 1

Posteriormente, se procede al elemento 2 (nudos B a C) y (nudos C y D), el cual el estudiante puede trabajarlo ya sea realizando un solo corte desde B hasta D , considerándolo como un solo elemento, otra opción es que realice un corte en el elemento BC y otro corte en el elemento CD , considerándolos por separado y para cada corte ocurren las fuerzas y momentos que se originan al realizar corte como ocurrió en el corte del elemento 1.

En la (Figura 6.183) se puede observar que se realiza de nuevo el cálculo del ángulo de inclinación del elemento 2, debido a que contendrá fuerzas que no se corresponden con los ejes locales del elemento.

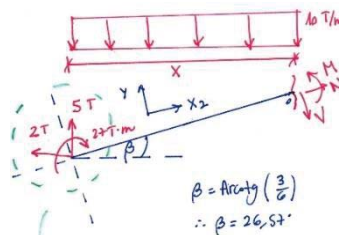


Figura 6.183 Respuesta experta. Ángulo inclinación elemento 2

Posteriormente, realizar la descomposición de los vectores fuerza a través del uso de las razones trigonométricas seno y coseno, como se muestra en la (Figura 6.184)

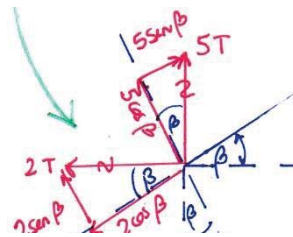


Figura 6.184 Respuesta experta. Descomposición vectores fuerza

A continuación, se deberá realizar la descomposición del vector de fuerza equivalente de la carga rectangular uniformemente distribuida a la que está sometida el elemento 2, utilizando las razones seno y coseno, y, debido a que la distribución de la carga lineal no se distribuye conforme a los ejes locales del elemento, se deberá establecer una relación entre la distancia "x" sobre la cual se distribuye la fuerza lineal y la distancia "x₂" que corresponde a la dimensión del corte sobre el elemento 2, como se muestra en la (Figura 6.185).

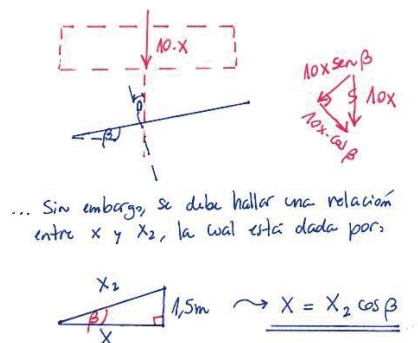


Figura 6.185 Respuesta experta. Descomposición del vector de fuerza equivalente

Al elemento con su respectivo corte se le aplican las condiciones de equilibrio de la estática, al mismo modo de lo trabajado en la sección a, dónde cada sub-elemento debe ser sometido a equilibrio, lo que permitirá construir las leyes o funciones de esfuerzos axiales (Figura 6.186), considerando los valores de los vectores fuerza descompuestos, es decir, las fuerzas que son paralelas al eje y local del elemento.

$$\begin{aligned} \bullet \sum F_x = 0 &\Rightarrow -2 \cos(26,57^\circ) + 5 \sin(26,57^\circ) - 10x \sin(26,57^\circ) + N = 0 \\ &\Rightarrow 0,45 - 10 \cos(26,57^\circ) \sin(26,57^\circ) + N = 0 \\ \therefore N(x_2) &= 4x_2 - 0,45 \text{ [T]} \\ \begin{cases} \text{Si } x_2 = 0 \Rightarrow N(0) = -0,45 \text{ [T]} \\ \text{Si } x_2 = 6,7 \Rightarrow N(6,7) = 26,35 \text{ [T]} \\ \text{Si } N(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,11 \text{ [m]} \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 6.186 Respuesta experta. Función de esfuerzo axial para el elemento 2

Enseguida, se calcula la función de corte para el elemento 2 (Figura 6.187), considerando los vectores fuerza descompuestos, es decir, se realiza la sumatoria de fuerzas en x, para esto se consideran las fuerzas paralelas al eje x local del elemento.

$$\begin{aligned}
 \bullet \sum F_y = 0 &\Rightarrow 2 \operatorname{sen}(26,57^\circ) + 5 \cos(26,57^\circ) - 10x \cos(26,57^\circ) - V = 0 \\
 &\Rightarrow 5,37 - 10x_2 \cos^2(26,57^\circ) = V \\
 \therefore V(x_2) &= -0,8x_2 + 5,37 \text{ [T]}
 \end{aligned}$$

$\swarrow$ Si $x_2 = 0 \Rightarrow V(0) = 5,37 \text{ [T]}$
 $\swarrow$ Si $x_2 = 6,7 \Rightarrow V(6,7) = 48,23 \text{ [T]}$
 $\swarrow$ Si $V(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 6,7 \text{ [m]}$

Figura 6.187 Respuesta experta. Función de cortante para el elemento 2

Para finalizar con la última sumatoria sobre el corte del elemento 2, se realiza la sumatoria de momentos (Figura 6.188), considerando como en las sumatorias de fuerzas anteriores, los valores de los vectores fuerza descompuestos en sus componentes paralelas al eje y solamente, debido a que los vectores fuerza paralelos al eje x no causan momento flector.

$$\begin{aligned}
 \bullet \sum M_0 = 0 &\Rightarrow -27 - 2 \operatorname{sen}(26,57^\circ) \cdot x_2 - 5 \cos(26,57^\circ) \cdot x_2 + 10x \cdot \cos(26,57^\circ) \cdot \frac{x_2}{2} + M = 0 \\
 &\Rightarrow -27 - 5,37x_2 + 5x_2 \cos^2(26,57^\circ) \cdot x_2 + M = 0 \\
 \therefore M(x_2) &= -4x_2^2 + 5,37x_2 + 27 \text{ [T} \cdot \text{m]} \\
 \hookrightarrow \text{Si } x_2 = 0,67 &\Rightarrow M(0,67) = M_{\max} = 28,8 \text{ [T} \cdot \text{m]}
 \end{aligned}$$

Figura 6.188 Respuesta experta. Función de momento

Una manera de validar la función de momento calculada (Figura 6.189), es determinar cuando la función momento toma un valor nulo, y este valor debe coincidir con la posición de la rótula (la cual tiene momento nulo), para ello y debido a que la función momento es cuadrática (lo cuadrático resulta cuando en el cálculo anterior, se hace necesario multiplicar la distancia involucrada en la fuerza por la distancia al punto de cálculo del momento. Dicha distancia representada por la letra x) con coeficientes con cifras decimales, se puede utilizar la fórmula general para corroborar el punto donde se ubica la rótula.

Ahora verificamos cuándo la función momento toma el valor nulo:

$$M(x_2) = 0 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-5,37 \pm \sqrt{5,37^2 + (4)(4)(27)}}{-2(4)} = \frac{-5,37 \pm 21,47}{-8}$$

... Nos quedamos con el valor positivo, por lo cual: $x_2 = 3,35 \text{ [m]}$ ✓

Dicho resultado es congruente con la estructura, pues en ese punto se ubica la rótula y, en consecuencia, el momento debe ser nulo.

Figura 6.189 Respuesta experta. Momento nulo coincidente en la rótula

A continuación, en el elemento 3, se realiza un solo corte (Figura 6.190), originando justo en el corte las fuerzas y momento ya mencionados. En este caso, no es necesario realizar la descomposición rectangular de vectores

debido a que las fuerzas presentes coinciden con los ejes XY locales del elemento. Además, tampoco es necesario calcular ángulo de inclinación del elemento 3, debido a que coincide con los ejes globales XY. La forma dos es un procedimiento similar en cuanto a número de cortes por elemento, sólo que comenzando a trabajar de derecha a izquierda.

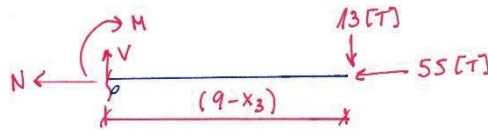


Figura 6.190 Respuesta experta. Corte en el elemento 3

Al elemento con su respectivo corte se le aplican las condiciones de equilibrio de la estática, al mismo modo de lo trabajado en la sección a, dónde cada sub-elemento debe ser sometido a equilibrio, lo que permitirá construir las leyes o funciones de esfuerzos axiales (Figura 6.191), considerando los valores de los vectores fuerza que son paralelas al eje y local del elemento.

$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow -N - 55 = 0 \Leftrightarrow \underline{N(x_3) = -55 [T]}$$

Figura 6.191 Respuesta experta. Función de esfuerzo axial para elemento 3

Enseguida, se calcula la función de corte para el elemento 3 (Figura 6.192), considerando los vectores fuerza, se realiza la sumatoria de fuerzas en x, para esto se consideran las fuerzas paralelas al eje x local del elemento.

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow V - 13 = 0 \Leftrightarrow \underline{V(x_3) = 13 [T]}$$

Figura 6.192 Respuesta experta. Función de esfuerzo cortante para elemento 3

Para finalizar, con la última sumatoria sobre el corte del elemento 2, se realiza la sumatoria de momentos (Figura 6.193), considerando como en las sumatorias de fuerzas anteriores, los valores de los vectores fuerza paralelas al eje x solamente, debido a que los vectores fuerza paralelos al eje y no causan momento flector.

$$\begin{aligned} \bullet \sum M_o = 0 &\Rightarrow -M - 13(9 - x_3) = 0 \\ \Leftrightarrow M(x_3) &= -13(9 - x_3) \\ \therefore M(x_3) &= 13x_3 - 117 [T \cdot m] \\ \text{Si } x_3 = 0 &\Rightarrow M(0) = -117 [T \cdot m] \\ \text{Si } x_3 = 9 &\Rightarrow M(9) = 0 [T \cdot m] \end{aligned}$$

Figura 6.193 Respuesta experta. Función de esfuerzo cortante para el elemento 3

c) Trazar los diagramas de esfuerzos resultantes. Indicando los puntos en que se producen los valores máximos.

En esta sección, el estudiante deberá construir los diagramas de esfuerzo axial (Figura 6.194), esfuerzo cortante (Figura 6.195) y de momento flector (Figura 6.196) para cada elemento de la estructura. Aquí son importantes las nociones de comportamiento gráfico de funciones constantes, funciones lineales y funciones cuadráticas, que son las funciones que emergen al construir las leyes de esfuerzos.

A partir de ello procederá al trazo de las curvas, puede considerar las condiciones iniciales y finales para su trazo. Posterior a ello debe considerar los puntos de corte del diagrama de cortante sobre el elemento, debido a que se corresponderá con momentos máximos en el diagrama de momentos (criterio de la primera derivada) y ello permitirá determinar su magnitud y su posición. A continuación se muestran los diagramas de esfuerzos.

c1) Diagrama de esfuerzo axial

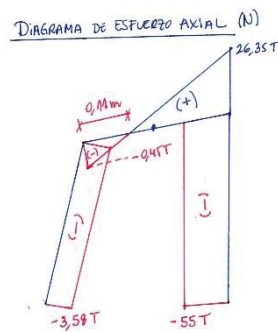


Figura 6.194 Respuesta experta. Diagrama de esfuerzo axial

c2) Diagrama de esfuerzo cortante

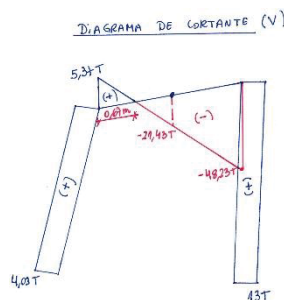


Figura 6.195 Respuesta experta. Diagrama de cortante

c3) Diagrama de momento

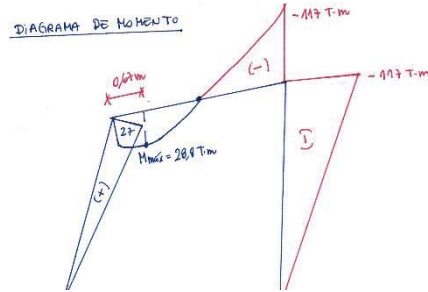


Figura 6.196 Respuesta experta. Diagrama de momento

d) Indique cuál es el criterio que se emplea para determinar la ubicación de los máximos valores de momentos.

En esta sección se espera que el estudiante justifique la forma en la que identifique la posición y magnitud de los valores máximos de los momentos, para ello deberá establecer las relaciones diferenciales entre el esfuerzo cortante y el momento, es decir $V(x) = dM(x)/dx$. Ello se fundamenta en el criterio de la primera derivada (Figura 6.197), donde al igualar a cero la función de cortante u observar por donde el diagrama de cortante hace intersección con el eje x . Es importante resaltar que siempre se considera que el valor crítico encontrado a partir de cualquiera de las dos formas descritas, arroja un momento máximo/mínimo, esto debido a la naturaleza del fenómeno de estudio, que son funciones que se relacionan con elementos cargados.

> El criterio que se emplea para determinar la ubicación de los máximos valores de momentos viene dado por la relación matemática que existe entre las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores, en donde se cumple que:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Por lo tanto, cuando el cortante se hace nulo en un determinado punto, entonces en dicho punto se produce el máximo (o mínimo) valor de momento, pues en dicho punto la derivada momento se hace cero.

Figura 6.197 Respuesta experta. Justificación momento máximo

El análisis a priori realizado anteriormente será útil para analizar la producción del estudiante, la cual es mostrada a continuación.

6.1.2 Análisis de la producción del estudiante

A continuación, se realiza un análisis de la producción del estudiante.

Entendiendo la situación real

El problema no parte desde esta fase, dado que se proporciona un esquema de la estructura. Dicho esquema está representado por un modelo gráfico, el cual contiene cargas, geometría y apoyos previamente establecidos por el profesor en la elaboración del problema a presentar.

1. Simplificación /estructuración de la tarea: uso del conocimiento extra matemático.

Como se mencionó en la etapa anterior el problema se presenta a través de un esquema estructurado y simplificado (Figura 6.174). Sin embargo, el estudiante debe construir un modelo gráfico denominado Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L) y para ello debe comprender el efecto de las cargas a las cuales esta solicitada la estructura (modelo marco) y el tipo de apoyos a los cuales está sujeta. Podemos observar que el estudiante en esta etapa dibuja el D.C.L. colocando vectores fuerza según corresponde a cada tipo de apoyo.

Para el apoyo en A, dibuja un vector horizontal con dirección hacia la derecha A_x y un vector fuerza vertical con dirección hacia arriba A_y . Lo mismo para el apoyo fijo en E, colocando un vector fuerza vertical con dirección hacia arriba E_y y un vector fuerza con dirección hacia la derecha E_x .

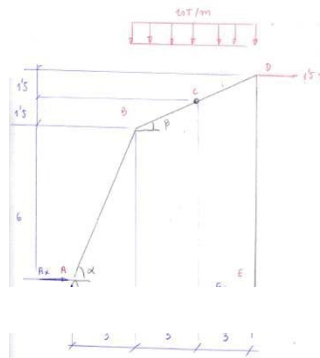


Figura 6.198 D.C.L.

A continuación, se observa la simplificación de la carga a la cual está sometido el elemento BD del marco (Figura 6.199), para esto aprovecha la presencia de una rótula. Una rótula es un dispositivo que permite seccionar la estructura para de esta manera convertirla en una estructura estáticamente determinada.

Podemos observar que su condición de reacciones externas sin rótula originaría una estructura estáticamente indeterminada debido a que las cuatro incógnitas de reacción externa (A_x, A_y, E_x, E_y) originan cuatro ecuaciones de equilibrio contra tres ecuaciones posibles de la estática para

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

modelos coplanares (1. Suma de fuerzas en dirección x , 2. Suma de fuerzas en dirección y y 3. Suma de momentos).

Por tanto, podemos observar como el estudiante secciona el marco en dos partes, resultando de esta manera en una estructura estáticamente determinada. El estudiante si bien no explicita la razón por la que lo hace, si lo evidencia en los calculo. Resultando así la mitad del efecto de la carga uniforme linealmente distribuida de 10 Ton/m sobre el elemento BC y CD .

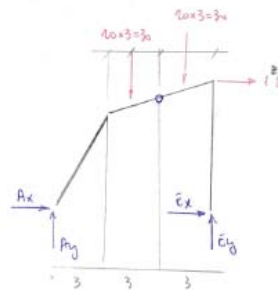


Figura 6.199 Seccionamiento del marco

Con respecto al trabajo en el ETM extendido

Es estudiante parte del nivel epistemológico de la ingeniería, debido a que utiliza el conocimiento extra matemático requerido para configurar el Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.) (Figura 6.200), debido a que, de manera implícita considera que la estructura es estáticamente determinada (aunque no lo evidencia así en su producción), se destaca que, a pesar de no encontrarse, estrictamente hablando, en la fase de matematización horizontal, el estudiante comienza a trabajar en el ETM extendido, al concentrar la fuerza debida a la carga uniformemente lineal sobre el elemento BD .

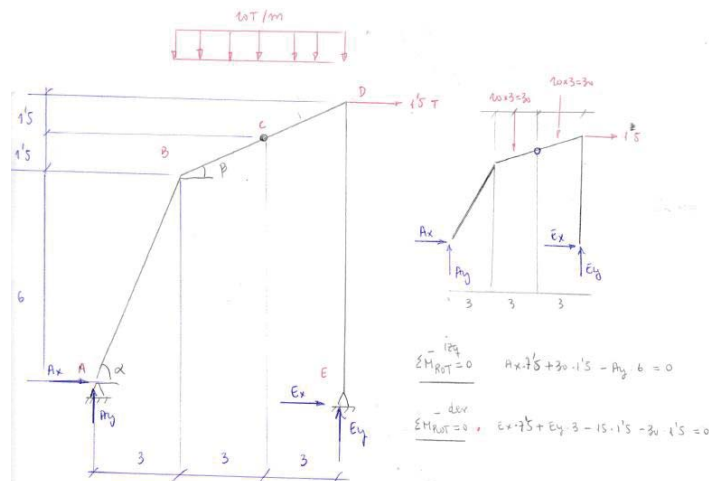


Figura 6.200 Diagrama de Cuerpo Libre

2. Matematizando

Cuando el estudiante ha construido el D.C.L. considerando el trabajo que hemos descrito en la sección anterior, se observa el paso a la matematización que le permitirá la construcción de los modelos matemáticos para resolver el problema. Si bien observamos que está utilizando nociones de equilibrio estático y de comportamiento de una estructura para su estado interno, cuando nos referimos a que en este momento de matematización el estudiante construye modelos, dado que es necesario que construya funciones asociadas al comportamiento interno de la estructura y no es sólo la aplicación de una determinada fórmula, por lo tanto, construye modelos. Podemos notar dos momentos donde el estudiante construye modelos matemáticos (asociados a las reacciones externas y las funciones de corte, axial y momento).

a) Cuando calcula las reacciones externas

Aquí utiliza las condiciones de equilibrio que proporciona la estática de cuerpos coplanares (en dos dimensiones), sumatoria de fuerzas igual a cero y sumatoria de momentos igual a cero. Como se observa en la (Figura 6.201)

$$\begin{aligned}
 \sum M_{ROT} &= 0 \quad \overset{-12y}{\text{}} \quad A \times 7.5 + 30 \cdot 1.5 - A_y \cdot 6 = 0 \\
 \sum M_{ROT} &= 0 \quad \overset{-40y}{\text{}} \quad E \times 7.5 + E_y \cdot 3 - 15 \cdot 1.5 - 30 \cdot 1.5 = 0 \\
 \sum F_x &= 0 \quad A_x + E_x = -15 \\
 \sum F_y &= 0 \quad A_y + E_y - 30 - 30 = 0 \\
 \sum H_A &= 0 \quad E_y \cdot 4 - 15 \cdot 4 - 30 \cdot 1.5 - 30 \cdot 1.5 = 0
 \end{aligned}$$

$E_y = 55 \text{ T}$

✓

$A_y = 5 \text{ T}$

✓

$A_x = -2 \text{ T}$

✓

$E_x = -13 \text{ T}$

✓

1.0

Figura 6.201 Cálculo de reacciones externas

b) Cuando determina las leyes (funciones) de cortante, momentos flectores y esfuerzos axiales.

Para la determinación de las funciones que rigen los esfuerzos internos, observamos que el estudiante necesita la descomposición de los vectores fuerza, para que de esta manera cada fuerza inclinada sea descompuesta

en dos componentes, un componente horizontal (paralelo al eje x) y un componente de fuerza vertical (paralelo al eje y), utilizando las razones trigonométricas *seno* y *coseno* para tal descomposición, como se observa en la (Figura 6.202).

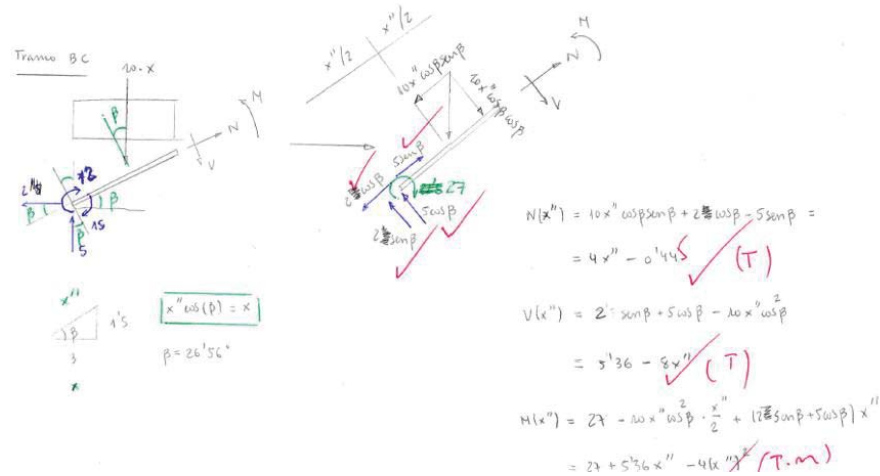


Figura 6.202 Descomposición de fuerzas y determinación de funciones N , V y M

Con respecto al ETM extendido personal

a) Cuando calcula las reacciones externas

Con respecto al ETM extendido, se observa la activación de la génesis discursiva, dado que el estudiante parte del referencial del nivel epistemológico de la ingeniería, esto debido a que asume que la estructura está en equilibrio, y que por leyes de la estática es posible resolverla de manera externa.

Posteriormente, se activa la génesis semiótica tanto para la ingeniería como para la matemática, al pasar al representamen del nivel epistemológico de la ingeniería al utilizar las condiciones de equilibrio (sumatorias de fuerzas y momentos) que al igualarlas a cero construye ecuaciones que pasan al representamen de la matemática y a través de la visualización representa dichas ecuaciones y las manipula para calcular el valor de las incógnitas asociadas a las reacciones externas para cada vector fuerza de los apoyos A y E . Hay una conexión entre los registros figural y algebraico.

Así, se observa activación de las génesis semiótica y discursiva. Se identifica al plano Discursivo-Semiótico [Dis-Sem].

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

$$\begin{aligned}
 \sum \overset{-12\text{T}}{M_{ROT}} &= 0 & A_x \cdot 7,5 + 30 \cdot 1,5 - A_y \cdot 6 &= 0 \\
 \sum \overset{-40\text{T}}{M_{ROT}} &= 0 & E_x \cdot 7,5 + E_y \cdot 3 - 15 \cdot 1,5 - 30 \cdot 1,5 &= 0 \\
 \sum F_x &= 0 & A_x + E_x &= -15 \\
 \sum F_y &= 0 & A_y + E_y - 30 - 30 &= 0 \\
 \sum M_A &= 0 & E_y \cdot 9 - 15 \cdot 9 - 30 \cdot 1,5 - 30 \cdot 1,5 &= 0
 \end{aligned}$$

$E_y = 55 \text{ T}$
$A_y = 5 \text{ T}$
$A_x = -2 \text{ T}$
$E_x = -13 \text{ T}$

1.0

Figura 6.203 Cálculo de reacciones externas

De (Figura 6.203) se observa que las sumatorias de fuerzas y momentos son utilizadas para el cálculo de las reacciones externas, por ejemplo para la sumatoria de momentos hacia la izquierda de la rótula notamos que la reacción A_x la multiplica por 7,5 (distancia perpendicular de la reacción A_x hacia la rótula) luego lo suma a la multiplicación de 30 (valor de la carga equivalente de 10 toneladas por 3 metros de distancia) por 1.5 (distancia perpendicular de la fuerza equivalente a la rótula) luego le resta la multiplicación de la reacción A_y multiplicada por la distancia perpendicular de dicha reacción hacia la rótula que equivale a 6, la suma de estas tres componentes la iguala a cero y es como tiene esa ecuación de equilibrio.

Posteriormente procede al cálculo de las demás ecuaciones de equilibrio, cuidando que para los momentos se proceda de manera similar a lo explicado anteriormente y de que para las ecuaciones de equilibrio para las fuerzas, que estas cumplan con ser paralelas al eje donde se están calculando. Es decir, para el caso de no ser paralelas, las fuerzas deben descomponerse en sus componente de fuerza paralelas al eje x y componente de fuerza paralela al eje y.

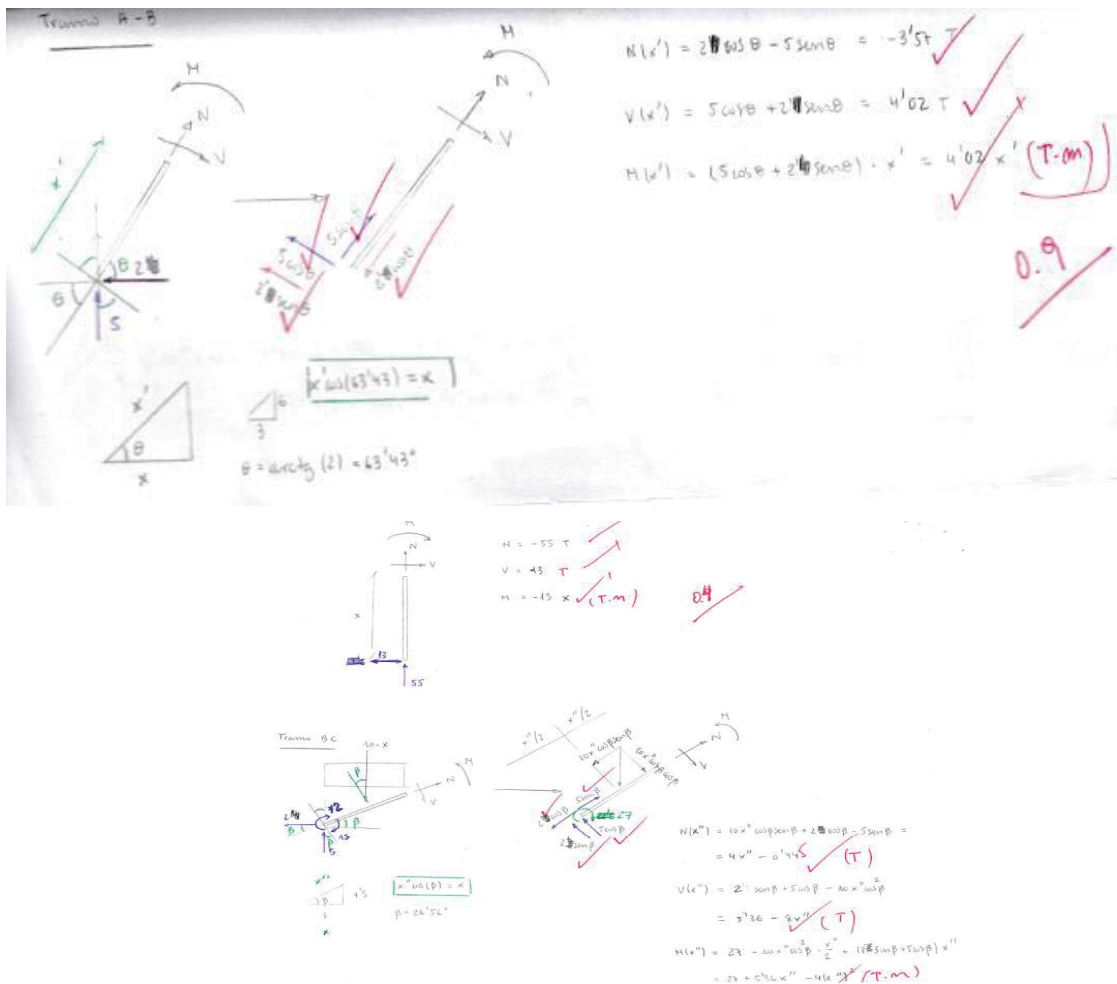
b) Cuando determina las leyes (funciones) de cortante, momentos flectores y esfuerzos axiales.

Se observa que el estudiante utiliza las ecuaciones de equilibrio de la estática (sumatoria de momentos y fuerzas) como artefactos simbólicos que le permiten construir las funciones de corte, momento y axial. Activándose la génesis semiótica (pasaje del representamen de la ingeniería al utilizar la sumatoria de fuerzas causadas por las condiciones de la estática para el

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

equilibrio) al representamen de la matemática al igualar a cero las sumatorias y poder representarlas a través de funciones que dependen de las condiciones iniciales ala derecha de la estructura para cada una de las particiones del marco (Figura 6.204).

Así, se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Se identifica al plano Semiótico - Instrumental [Sem-Ins].



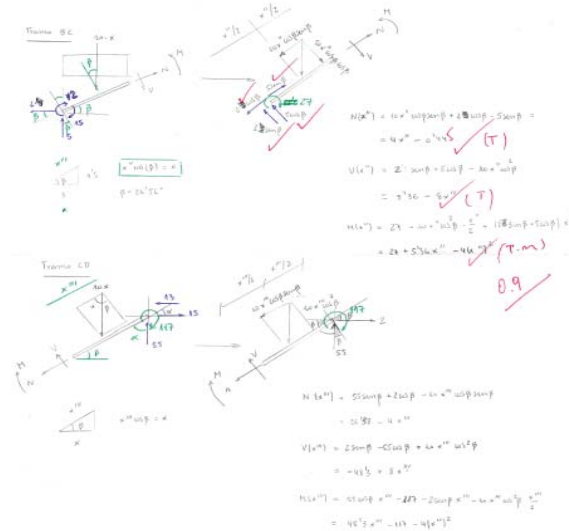


Figura 6.204 Determinación de las funciones de N, V y M para cada elemento de la estructura

3. Trabajando con el modelo matemático

Los modelos algebraicos construidos en la etapa anterior (de reacción y de esfuerzo), son traducidos en la construcción de modelos gráficos, donde representa diagramas de momento, cortante y axial (Figura 6.205), para cada uno de los elementos, según corresponda. Es importante resaltar que el profesor le solicita que indique los puntos donde se identifiquen los valores máximos. Podemos notar que el estudiante olvida colocar las unidades, las cuales son muy importantes, debido a que interfieren en la magnitud que tiene que tomar posteriormente como referencia para el diseño del elemento estructural y eso se relaciona con el conocimiento extra matemático.

Con respecto al ETM extendido

Cuando el estudiante trabaja con los modelos, se activa la génesis semiótica dado el trabajo figural con los diagramas y posteriormente se activa la génesis instrumental, dado que, parte del artefacto de la ingeniería al utilizar las funciones de cortante, momento y axial como artefactos que instrumentaliza para construir los diagramas (Figura 6.205) que le son solicitados en la solución del problema. Pasando por el artefacto de la matemática al trabajar con las funciones y graficarlas. Es decir, planteamos que el diagrama como registro figural es operacionalizado para determinar los diagramas de axial, cortante y momento.

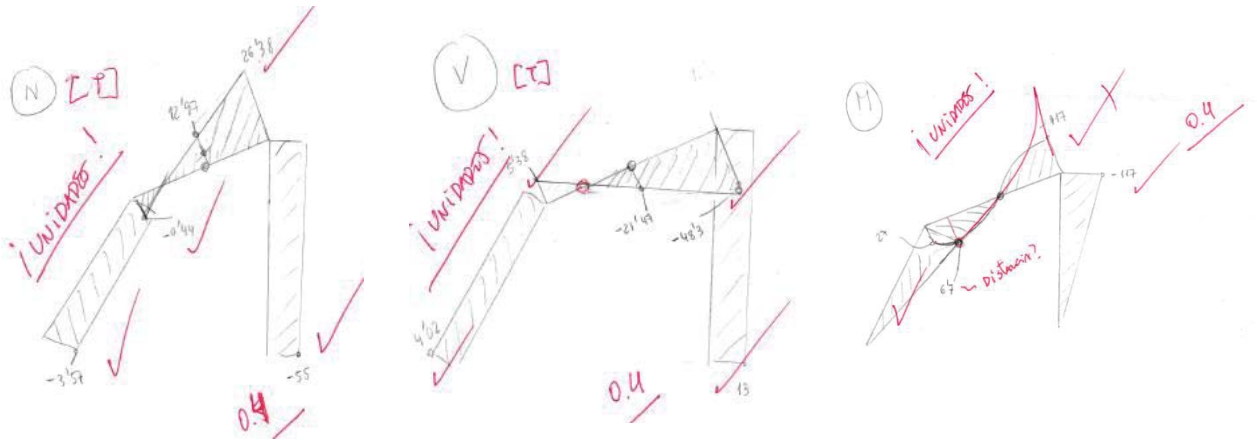


Figura 6.205 Diagramas solución

Así, el registro privilegiado es el figural y estos se instrumentalizan a través de la representación de los diagramas de axial, cortante y momento. El registro figural es fundamental. Se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Se identifica al plano semiótico – instrumental [Sem-Ins].

4. Interpretando/Validando

En esta etapa el profesor solicita que el estudiante indique cual es el criterio a utilizar para la determinación de máximos valores de momentos, podemos notar que esta tarea permite interpretar los resultados y al mismo tiempo justificarlos, podemos observar que efectivamente el estudiante identifica esos valores máximos e indica que las relaciones diferenciales de cortante para la carga (dv/dx) y de momento para el cortante (dM/dx), le permiten calcular dichos valores críticos, a través del criterio de la primera derivada e igualando a cero (Figura 6.206).

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{dV}{dx} \\ V &= \frac{dM}{dx} \end{aligned}$$

Por tanto, si tenemos una viga donde $\exists$ carga
y el esfuerzo cortante es nulo, en dicho
punto el momento será máximo o mínimo
marcado en rojo.

[Transcripción Por tanto, si tenemos una viga donde la carga y el esfuerzo cortante es nulo, en dicho punto el momento será máximo o mínimo marcado en rojo.]

Figura 6.206 Justificación momento máximo

Con respecto al ETM extendido

De la génesis instrumental donde el estudiante elaboró los diagramas, observamos un pasaje a la activación de la génesis discursiva, dado que, cuando el estudiante muestra la manera de justificar el cálculo de máximos valores (Figura 6.207), se encuentra en el referencial de la ingeniería y pasa al referencial de la matemática (donde se utilizan conceptos del cálculo, como criterio de la primera derivada, máximos, mínimos) al establecer las relaciones diferenciales que le permitirán obtener dichos valores llegando a la prueba en el plano cognitivo. Así, se activan las génesis instrumental y discursiva. Se identifica al plano [Ins-Dis].

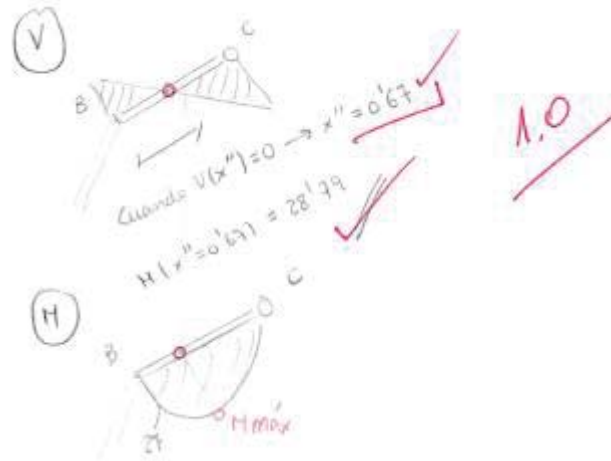


Figura 6.207 Criterio de la primera derivada para valores máximos y/o mínimos

En lo que se refiere a esta pregunta de la evaluación del estudiante observamos nociones del referencial teórico que guardan relación con el cálculo pero que el estudiante responde desde su referencial del análisis estructural. Podemos notar que toma de su referencial teórico las nociones de cortante nulo (primera derivada igual a cero) para determinar el momento máximo (valor crítico) y su posición.

Conclusiones respecto de la evaluación

Comparando el trabajo realizado por el estudiante en evaluación y por el análisis a priori, podemos notar que son similares, pues el estudiante en evaluación, obtuvo una nota buena. Sin embargo, existen algunas diferencias en la forma en que seccionan la estructura a través de elementos y en la forma de justificar la solución del problema, por su parte el estudiante en evaluación realiza una discretización de la estructura en cuatro elementos y en el análisis a priori se utilizan tres elementos, siendo así que justifica mediante la comprobación de equilibrio sus resultados.

Además, tanto en el análisis a priori como en la producción del estudiante se condicen con elementos de justificación de sus soluciones (mostrar el procedimiento para la obtención de funciones solicitadas, justificar los valores críticos), las cuales fueron solicitadas en la prueba. Sin embargo, y como era de esperarse, la parte discursiva tanto de la solicitud de la justificación como de la respuesta, está en el lenguaje de la ingeniería. Para el caso de la determinación de los momentos máximos, en ambas producciones son obtenidas por igualar a cero la función de cortante, sin necesidad de hacer alusión al lenguaje matemático, bajo el criterio de la primera derivada.

El problema estudiado evidencia la emergencia de varias de las fases del ciclo de modelización (simplificación/estructuración de la tarea, matematización, trabajo con un modelo matemático, interpretación/validación). Con respecto al ETM extendido, señalamos la utilidad del mismo para analizar la producción del estudiante en todo el proceso de modelización y no solamente en el proceso de matematización y trabajo con el modelo matemático.

Si bien, se ha realizado un análisis profundo de un problema de las evaluaciones realizadas a un estudiante. A continuación, se muestra de manera condensada (Tabla 6.12) lo observado en general con respecto las evaluaciones del profesor y que pertenecen al mismo estudiante, relacionadas con las estructuras analizadas en el capítulo 5 de la tesis (ETM idóneo). En general, se observa similitud con respecto a los problemas explicados por el profesor en el curso respecto de las pruebas que resolvió el estudiante. En la siguiente tabla se muestra lo solicitado por el profesor en las evaluaciones que corresponden a las estructuras estáticamente determinadas.

Tabla 6.12 Problemas en evaluación para las unidades 2 y 4

Temática	Tipo de modelo	Acción esperada por el profesor	Acción lograda por el estudiante	Observación
Unidad 2. Resistencia de una estructura. Control 1	Marco	Calcular reacciones externas y esfuerzos internos, justificar y realizar diagramas.	El estudiante logra realizar el cálculo de las reacciones externas y esfuerzos internos de la estructura. Salvo problemas con unidades de medida.	Se evidencia relación entre la clase observada y lo solicitado por el profesor: modelo real presentado, manejo conceptual al solicitar justificación de procedimiento.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Unidad 4. Deformación Control 2	Viga	Calcular la deflexión vertical en un extremo de la viga. Que el estudiante presente el procedimiento para la solución. Especificando al estudiante el método a utilizar.	Esta pregunta es de tipo conceptual. El estudiante responde lo solicitado al relacionar e procedimiento para calcular la deformación de la viga, tanto para la obtención de las funciones de momento asociadas a momentos reales como virtuales.	El profesor presenta un modelo real simplificado, en concordancia con el curso. Además, Enfatiza en el manejo del cálculo de funciones asociadas al trabajo interno con la estructura.
Unidad 4. Deformación Control 2	Marco	Calcular la rotación en un punto central del elemento superior del marco. Especificando al estudiante el método a utilizar.	El estudiante logra el cálculo tanto de las funciones de momento reales como virtuales. Además de calcular la rotación en el punto solicitado.	De nuevo se presenta un modelo simplificado. Además, de que se especifica el método a utilizar para la solución.
Unidad 2. Resistencia Interrogación 1	Viga	Calcular las reacciones externas y los esfuerzos internos de la viga.	Logra calcular las reacciones externas y los esfuerzos internos.	Modelo real presentado.
Unidad 2. Resistencia Interrogación 1	Marco	Calcular una reacción externa y un momento interno al marco.	En este caso se solicitó determinar la resistencia por trabajo virtual. Sin embargo el estudiante falla en su solución.	Modelo real presentado
Unidad 2 Resistencia Interrogación 1	Armadura	Calcular el máximo esfuerzo de compresión y de tracción para una barra de la armadura.	El estudiante responde adecuadamente lo solicitado. Se observa que utiliza el método de las secciones para su solución.	Modelo real presentado

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Unidad 2 Resistencia Interrogación 1	Conceptual	Se le solicita responder preguntas conceptuales relacionadas con el método de los trabajos virtuales y con la relación entre la fuerza y la deformación de una estructura.	El estudiante responde adecuadamente la pregunta sobre la hipótesis de linealidad de una estructura y como esta es asociada a la ley constitutiva de la estructura. Sin embargo, no responde correctamente la pregunta 2, relacionada con los trabajos virtuales para el equilibrio.	Una vez más, se observa la finalidad del profesor en cuanto al manejo conceptual, por ejemplo aquí pregunta sobre la hipótesis de la relación lineal entre el esfuerzo y deformación de una estructura.

Del ETM personal, observamos que el estudiante responde la evaluación conforme a lo esperado por el profesor, debido a que se evidencia que el estudiante hace un manejo conceptual, y desarrolla los procedimientos que justifican la solución del problema analizado. Respecto del manejo con los objetos y modelos, también guardan relación a lo tratado en el curso, dado que el profesor presenta, al igual que en sus clases, problemas que parten de un modelo real simplificado y posterior a ello, el estudiante utiliza modelos adecuados para resolver el problema.

Existe un privilegiado uso del registro figural y algebraico, muchos diagramas (macroregistro figural) son facilitadores para describir procesos y hacer cálculos, por lo que en algunos casos los hemos posicionado como herramientas (semióticas) en la génesis instrumental, y con esto, activándose el plano [Sem-Ins]. También, pudimos analizar que estos diagramas permitían la matematización horizontal y dar respuesta o que emergieran algunas propiedades (y modelos) que permitieron la activación del plano [Sem-Dis] y en otras, el plano [Ins-Dis].

En términos del ETM personal del estudiante es complejo poder inferir lo que sucedió en términos generales para todos los estudiantes del curso, esto es una parte de interés para saber cómo ellos responden, a las exigencias que se enfrentan y también, a la relación con el ETM idóneo estudiado en el capítulo anterior. Al respecto, se en el ETM idóneo se pudo evidenciar el uso de los distintos modelos teóricos del análisis estructural y cómo estos llevan a la construcción de modelos que permiten la solución del problema, es decir, que la estructura sea resistente y que no se deforme más allá de los límites establecidos por las normas de construcción.

Por otro lado, solo tuvimos acceso a las evaluaciones de un solo estudiante, cuyo perfil se consideró como la de un buen alumno. (Producción facilitada por el docente del curso), de la cual, dado lo extenso y complejo del problema analizado, hemos presentado un análisis a priori, descripción y análisis de la producción del estudiante para una evaluación. Sin embargo, también hemos presentado una mirada general (Tabla 6.12) al resto de las evaluaciones del estudiante, donde se observa una exigencia procedimental pero también un espacio a las justificaciones y la evidencia de conceptualización en torno a la teoría de estructuras. Por ejemplo, el estudiante mostraba explícitamente las hipótesis de trabajo para modelar la estructura, como el caso de la hipótesis de linealidad del material asociada al comportamiento esfuerzo-deformación. A pesar de ello, y del único caso estudiado, pudimos observar un ETM completo en término de diversas tareas (evaluaciones) que permitieron la activación de los planos verticales.

Observar un ETM completo, es decir la activación de todos los planos se mostró en el análisis de la producción del estudiante. Esto es, el plano [Sem-Dis] fue activado cuando el estudiante mostró conocimiento de nociones teóricas de las estructuras (equilibrio de la estructura asociado a fuerzas internas de una estructura y equilibrio de la estructura asociado a las cargas externas, entre otros) permitía entender el tipo de estructura que se estaba modelando. Además, operar con los signos del representamen de la ingeniería asociados a los modelos permitió el uso de registros figúrales y algebraicos (Diagrama de cuerpo libre, ecuaciones de equilibrio, funciones de momento y otros). Con respecto al plano [Sem-Ins], se observó que los signos asociados a las leyes de equilibrio permitieron operacionalizar estas como artefactos que sirvieron de base para la construcción de las leyes de comportamiento interno de la estructura (funciones de corte, axial y de momento). En el plano [Ins-Dis], se observó que se movilizaron diagramas (diagramas de axial, diagramas de cortante y diagramas de momento) que por un lado fueron artefactos que permitieron comprender la solución del problema pero por otro lado sirvieron como elementos para justificar resultados.

A continuación se muestra un diagrama que esquematiza las génesis y/o planos activados en la solución del problema por parte del estudiante.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

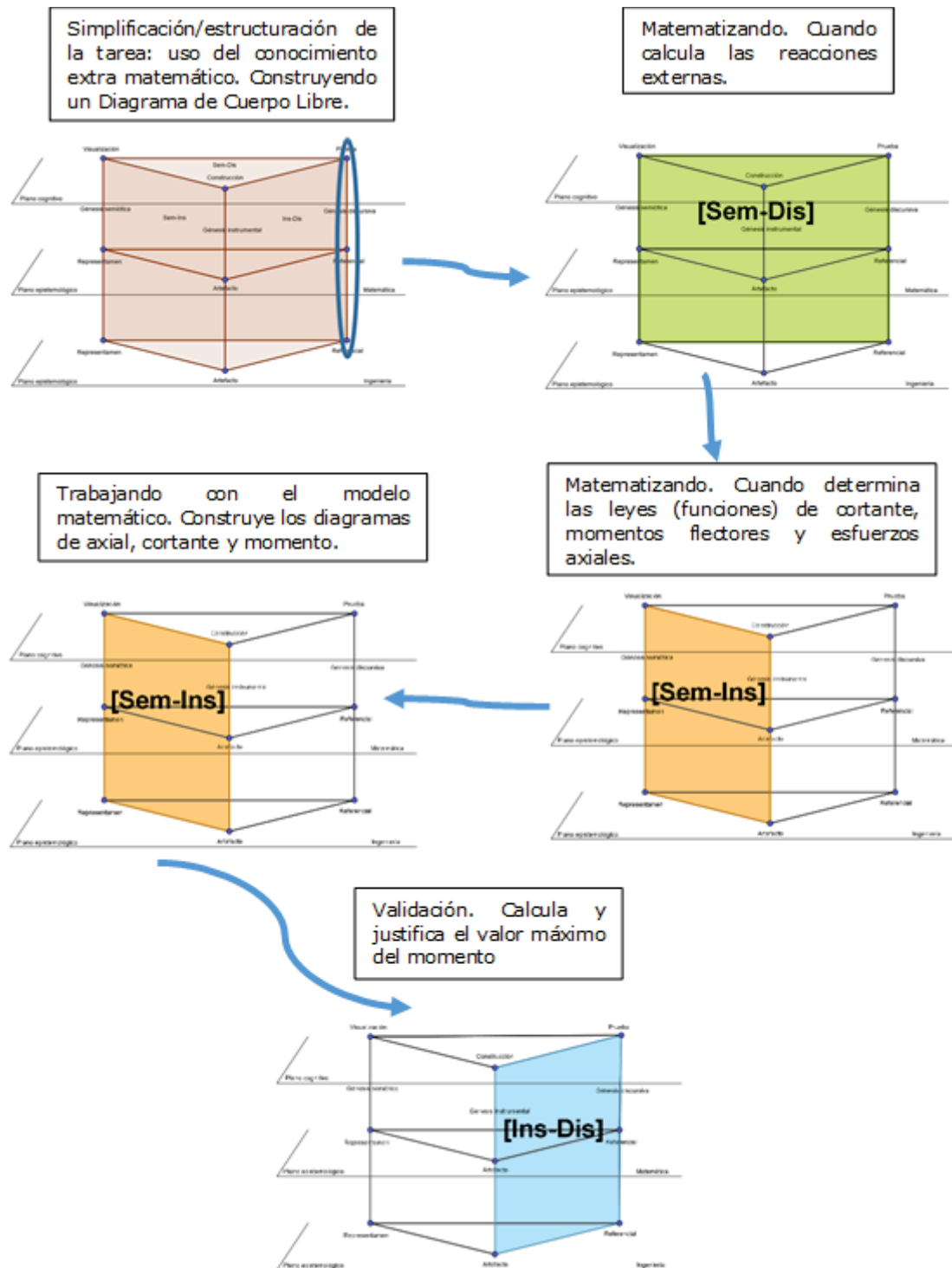


Figura 6.208 Génesis y planos verticales en el proceso de modelización para la evaluación

En la (Figura 6.208) hemos resumido el trabajo del estudiante, podemos evidenciar las génesis y planos activados en el ETM extendido para las etapas de modelización del ciclo que según corresponden. Podemos evidenciar una circulación completa, esto al observar trabajo en todos los

planos verticales y génesis. En cuanto a los registros, observamos presencia del registro algebraico, esto en las diversas ecuaciones que formuló el estudiante; además del registro figural, el cual tuvo un papel principal pues sirvió tanto para la representación de esquemas así como para la representación de diagramas de solución al problema.

Por tanto, el análisis del problema seleccionado y la exploración de las evaluaciones realizada en la tabla anterior, nos permitieron establecer las siguientes conexiones:

1. Los problemas partían de un esquema que representaba el modelo real, y esto se corresponde con el ETM idóneo.
2. El proceso de solución que se promovió en el estudiante fue similar a lo trabajado en clase, dado que se trataba básicamente de relaciones entre modelos estructurales (vigas, marcos, armaduras) y modelos teóricos del análisis de estructuras para la solución de los problemas.
3. El registro gráfico también es un componente que permite dar respuesta a los problemas, desde la construcción de diagramas de cuerpo libre hasta diagramas de solución de una estructura.
4. Y, como era de esperarse, existe un acercamiento al proceso de modelización, de manera atomística, en el sentido de Blomhoj & Jensen (2003), ya que al igual que en clase el estudiante trabaja principalmente con los procesos de matematización y trabajo con los modelos, y algunas veces con interpretaciones de la solución.
5. Desde la evaluación, podemos establecer que se promueve la competencia de modelar, pero como lo señalamos en el punto anterior, ocurre de manera parcelada.

6.2 Estudiantes trabajando en un proyecto de modelización estructural real

A continuación, reportamos un proyecto que formó parte del taller de la asignatura del curso de análisis estructural (curso que realizamos observación y que fueron parte de los datos utilizados en el ETM extendido idóneo). El taller, llamado ayudantía, se desarrolla en dos sesiones de clase por semana durante el semestre académico en donde los estudiantes son acompañados por dos estudiantes de curso superior para ejercitar problemas. Como producto final de la ayudantía se les solicita a los estudiantes la entrega de un trabajo llamado proyecto.

Primero, presentamos definiciones de terminología técnica utilizada para el análisis del proyecto (las cuales han sido expuestas en el marco conceptual).

SAP 2000: Es un programa de elementos finitos, con interfaz gráfico 3D orientado a objetos, preparado para realizar, de forma totalmente

integrada, la modelización, análisis y dimensionamiento de los más amplio conjunto de problemas de ingeniería de estructuras. La versatilidad en modelar estructuras, permite su utilización en el dimensionamiento de puentes, edificios, estadios, presas, estructuras marítimas y todo tipo de infraestructura que necesite ser analizada y dimensionada. (<https://www.csiespana.com/software/2/sap2000#>)

Luego, se tienen los siguientes comandos principales, que son utilizados en el SAP 2000

Frame: Son objetos de líneas rectas que conectan dos nodos. Se utilizan para modelar vigas, columnas, tirantes y elementos de armaduras. (<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Frame>)

Shell: Son objetos de área de tres o cuatro nodos utilizados para modelar el comportamiento a flexión de un placa o membrana. Los objetos Shell son útiles para simular sistemas de pisos, paredes y plataformas de puentes. (<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Shell>)

Mesh: Es una red de elementos de línea y nodos de interconexión utilizados para modelar un sistema estructural y resolver numéricamente su comportamiento simulado bajo carga aplicada. (<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Meshing>)

Discretización: Se refiere al proceso de traducir el dominio material de un modelo basado en objetos a un modelo analítico adecuado para el análisis. (<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Discretization>)

Además, con base en Oñate (2009), se define el método de elementos finitos y los modelos son parte de un proyecto de Análisis Estructural.

Método de Elementos Finitos: Es un procedimiento para la solución numérica de las ecuaciones que rigen los problemas encontrados en la naturaleza. Por lo general, el comportamiento de la naturaleza puede describirse mediante ecuaciones expresadas en forma diferencial o integral. Por esta razón, el FEM (Finite Element Method) se entiende en círculos matemáticos como una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales o integrales. En general, el FEM permite a los usuarios obtener la evolución en el espacio y/o el tiempo de una o más variables que representan el comportamiento de un sistema físico. El FEM transforma un conjunto de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas, formando así un sistema de ecuaciones algebraicas resuelto por la computadora. (p. 1)

Elemento Finito: Un elemento finito puede ser visualizado como una pequeña porción de un continuo (para nuestro caso el continuo queda representado por una estructura). La palabra "finito" distingue tal porción de los elementos "infinitesimales" del cálculo diferencial. Se considera que la geometría del continuo está formada por el ensamblaje de una colección de dominios no superpuestos con una geometría simple denominada elementos

finitos. Los triángulos y cuadriláteros en dos dimensiones (2D) o tetraedros y hexaedros en tres dimensiones (3D) generalmente se eligen para representar los “**elementos**”. Por lo general se dice que una “**mall (mesh)**” de elementos finitos “**discretiza**” el continuo. La variación espacial de los parámetros del problema (es decir, los desplazamientos de una estructura) se expresa dentro de cada elemento por medio de una expansión polinómica. Dado que la variación analítica de tales parámetros es más compleja y generalmente desconocida, el FEM solamente proporciona una aproximación a la solución exacta. (p.3).

Modelo conceptual: Los métodos computacionales, como el FEM, se aplican a los modelos conceptuales de un problema real, y no al problema en sí. Incluso los métodos experimentales en laboratorios de estructuras hacen uso de reproducciones a escala del modelo conceptual elegido (también llamado modelos físicos) a menos que la estructura real se pruebe en tamaño real, lo que rara vez ocurre. Se puede desarrollar un modelo conceptual una vez que se comprende la naturaleza física del problema. En la derivación de un modelo conceptual, debemos tratar de excluir detalles superfluos e incluir todas las características relevantes del problema en consideración para que el modelo pueda describir la realidad con suficiente precisión. (pp. 4-5.)

Un modelo conceptual para el estudio de una estructura debe incluir todos los datos necesarios para su representación y análisis. Claramente, diferentes personas tendrán diferentes percepciones de la realidad y, en consecuencia, el modelo conceptual para la misma estructura puede tomar una variedad de formas. (p.5)

Modelo estructural (analítico): Un modelo estructural debe incluir tres aspectos fundamentales. La descripción geométrica de la estructura por medio de sus componentes geométricos (puntos, líneas, superficies, volúmenes), la expresión matemática de las leyes físicas básicas que rigen el comportamiento de la estructura (es decir, las ecuaciones de equilibrio - fuerza y las condiciones de contorno) generalmente escritas en términos de ecuaciones diferenciales y / o integrales y la especificación de las propiedades de los materiales y de las cargas que actúan sobre la estructura. Debemos tener en cuenta que una solución encontrada a partir de un modelo conceptual o estructural incorrecto será una solución incorrecta, lejos de los valores físicos correctos, incluso si se obtiene con el método numérico más preciso. (p. 5)

Modelo computacional: La aplicación del FEM requiere invariablemente su implementación en un código de computadora. El análisis de una estructura con el FEM implica alimentar el código con información cuantitativa sobre las propiedades mecánicas de los materiales, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas (los parámetros físicos), así como las características de la discretización elegida (es decir, tipo de elemento, tamaño de malla, etc.). El resultado de este proceso es lo que llamamos modelo computacional para el análisis de una estructura (p.5).

A continuación, se muestra la producción de cuatro equipos de tres integrantes cada uno, en cuanto al trabajo con un proyecto de análisis estructural de un edificio, ello con la finalidad de evidenciar rasgos de modelización en el desarrollo de su proyecto. Adicionalmente, se busca conectar la relación del curso (teórico) de análisis estructural con el uso de software en la elaboración de un proyecto.

6.2.1 Descripción del proyecto

El trabajo consistió en un proyecto relacionado con la modelización estructural de un edificio de cuatro niveles utilizando el software de análisis estructural SAP 2000 V. 19. Para ello, se formaron 4 equipos de tres integrantes cada uno. A los estudiantes se les proporcionó un plano sobre el edificio en versión del programa AutoCAD y un modelo arquitectónico de la fachada del mismo en versión del programa Revit.

La entrega del proyecto se dividió en cuatro entregas y son las que utilizamos para realizar el análisis de la producción de los estudiantes. Al proceso seguido para la elaboración del proyecto se le llamó “modelización estructural del edificio”.

En lo que sigue, se presenta el proyecto donde se especifica el software a utilizar para el análisis estructural y una descripción general de la estructuración del edificio. Posteriormente, se asigna la funcionalidad para la cual va a ser utilizado el edificio (Vivienda social, Oficinas, Biblioteca, Hotel). Finalmente, se establece la forma en la que va a ser entregado el proyecto.

El software será utilizado como medio para modelar y simular computacionalmente la estructura donde se prescinde de un modelo físico. Por tanto, el modelo computacional será analizado por el software a través del método de los elementos finitos. Entonces, el software será útil a los estudiantes tanto en la fase de configurar el modelo, pasando del modelo estructural geométrico, luego al modelo estructural analítico para finalmente construir el modelo estructural computacional. Además, de los resultados del análisis el software arrojará resultados en forma numérica y gráfica que los estudiantes deben interpretar.

6.2.2 Análisis de la producción de los estudiantes

La finalidad de mostrar la producción de los estudiantes en cuanto a la elaboración del proyecto, se realiza con base en identificar el rol de los modelos y la modelización estructural del edificio, en el ETM extendido y en el CM con tecnología. Lo anterior nos permitirá, además, establecer posibles dialécticas entre la modelización del edificio y la modelización en la

componente teórica del curso. Para ello se trabaja en las siguientes direcciones:

1. Evidenciar la relación de la parte teórica del curso de Análisis Estructural con la componente práctica.
2. Uso del ciclo de modelización con tecnología para analizar las fases de trabajo.
3. Uso de ETM extendido para estudiar el trabajo con el software

Por tanto, para cada fase del proyecto se analiza la producción de los estudiantes por equipo, a través de categorías de análisis que provienen tanto del ciclo de modelización con uso de software como del ETM extendido (sus génesis, polos y relaciones entre ellos). En la sección de metodología (capítulo 3) se describen a detalle las categorías utilizadas.

6.2.2.1 Análisis de la entrega 1. Modelado geométrico del edificio en el software de análisis estructural SAP 2000

Los análisis se presentaran con base en las entregas solicitadas por el proyecto. Cada entrega será analizada para cada uno de los equipos. Se utilizarán las categorías presentadas en la sección de metodología en cuanto al análisis del proyecto. Primero se identifican, de manera general, la actividad en el CM con tecnología extendido y en el ETM extendido. Posteriormente, se particulariza para cada equipo dificultades y errores, ya sea identificada en nuestros análisis, expresadas por los integrantes de los equipos o identificadas por los ayudantes del curso. Al final de cada análisis para cada una de las cuatro entregas, se presenta una reflexión a manera de conclusión del trabajo de los equipos para la entrega que corresponda.

Meister/Borromeo Ferri (2018) citado en Borromeo Ferri (2018) presentan el siguiente CM con tecnología, el cual está descrito en el capítulo 2 del Marco Conceptual:

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

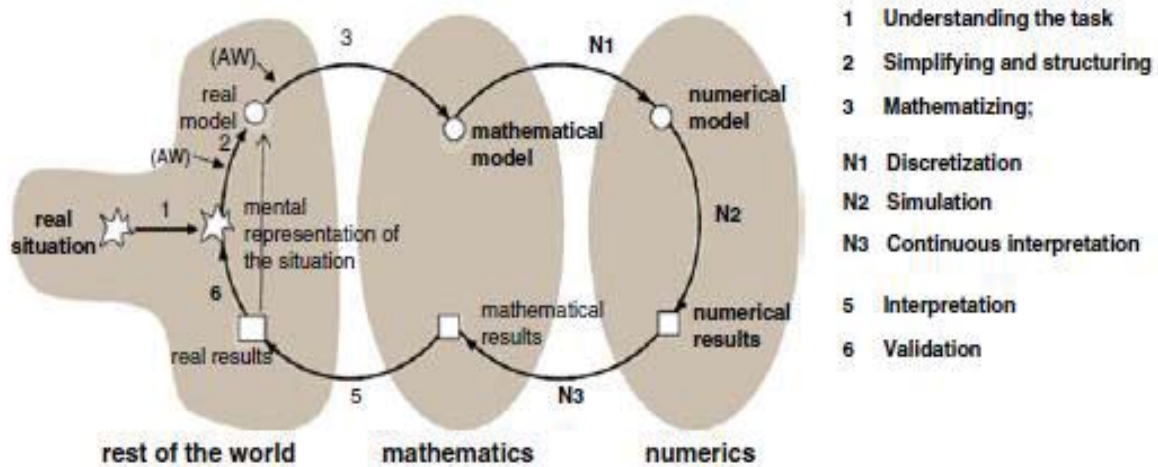


Figura 6.209 Ciclo de modelización con tecnología (Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018, p. 101)

Considerando el CM con tecnología (Meister/Borromeo Ferri) dado que el proyecto de ingeniería contiene modelos estructurales y en el CM de Meister/Borromeo Ferri (Figura 6.209) no nos era posible incorporarlos, ya que en el CM se hace alusión a un modelo matemático y en el proyecto son modelos estructurales. Entonces, se tuvo la necesidad de incorporar un *Mundo de la Ingeniería* en conexión con el *Mundo de la Matemática*. Así, con el CM extendido con tecnología que proponemos nos será posible estudiar problemas de ingeniería con uso de software. Con este nuevo CM se cambia de *modelo matemático* a *modelo matemático-ingenieril* y de *resultados matemáticos* a *resultado matemático-ingenieril*. Por tanto, el CM extendido con tecnología queda representado por la siguiente figura.

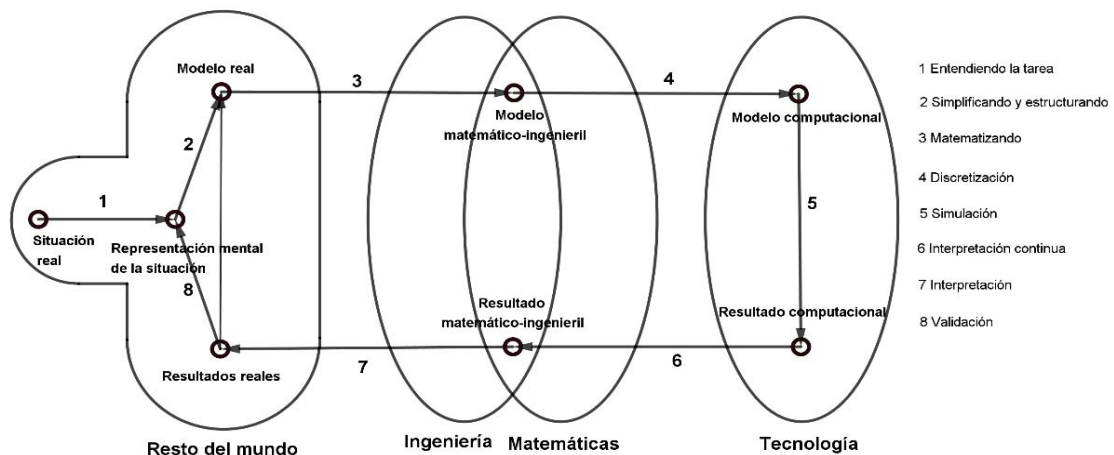


Figura 6.210 CM extendido con tecnología. Elaboración propia. (Adaptado de Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018)

Entrega 1: Se solicitó el modelo geométrico de la estructura utilizando el software SAP 2000. A continuación se muestra la actividad que se debe realizar en esta etapa.

Dibujar en SAP2000 la estructura, utilizando elementos tipo "frame" para vigas, muros y columnas. Debe considerar que, al momento de modelar mediante "frame", éstos se deben dibujar en el eje de cada elemento, para luego añadir la sección correspondiente. Con esta finalidad, se recomienda añadir ejes de grilla adicionales, que pasen por el centroide de los muros. Utilizar elementos tipo "área" o "Shell" para las losas. El proceso de mallado de las losas será explicado posterior a la entrega. No es necesario para esta entrega correr ningún análisis. Generar un reporte de no más de 2 páginas con:

- 1) Imágenes de las grillas definidas (comentarios de por qué las seleccionaron).
- 2) Imágenes del modelo realizado.
- 3) Comentarios de complicaciones que tuvieron al modelar.

De forma general, los equipos presentaron la siguiente actividad con respecto al CM con tecnología y al ETM extendido.

Trabajo en el ciclo de modelización

El equipo trabaja con planos destinados a ser un edificio (cada uno con sus distintas funcionalidades) por lo que a partir de los planos proporcionados, deberán construir un modelo real, llamado modelo geométrico. Por tanto, se observa la comprensión de una situación real de acuerdo en el ciclo de modelización, lo que los llevará a la construcción de un modelo real. Los estudiantes trabajan en la etapa 1 (comprensión de la tarea y en la etapa 2 (simplificación y estructuración). Observándose por tanto el pasaje de la situación real al modelo real.

Trabajo en el ETM extendido

Se observa la activación de la génesis instrumental, esto debido a que el software es un artefacto que al ser manipulado por los integrantes del equipo pasa por los procesos de instrumentalización al entender la funcionalidad de los comandos de software y de ahí les permite la instrumentación al construir el modelo. Sin embargo, podemos observar que el inicio parte del representamen (ingeniería) de la génesis semiótica, cuando los estudiantes observan los signos asociados a los planos y a partir de ahí tomar las medidas para pasar al artefacto tecnológico (software).

El registro figural, queda representado a través de planos del edificio y en un segundo momento, a través del modelo geométrico construido por los estudiantes. Se observa la activación de la génesis semiótica e instrumental. Así, se identifica al plano semiótico - instrumental [Sem-Ins].

Como parte del reporte de esta fase los instructores solicitaron que los estudiantes declararen las dificultades que tuvieron al modelar la estructura cuando esta fue representada en el software de análisis estructural SAP 2000. A continuación, se realiza una transcripción de las dificultades reportadas por los estudiantes.

Reporte del equipo	Dificultades reportadas
1. Edificio asignado: vivienda social	

Dificultades reportadas por el equipo con respecto al modelado del edificio en SAP2000 (Figura 6.211)

1. *Dentro de la visualización del modelo en AutoCAD, nos percatamos de variadas discordancias en las medidas de elementos entre elevaciones, por ejemplo las medidas de las pequeñas ventanas que se encuentran en la elevación de los ejes 2 y 6. Con respecto a esto se consideraron como correctas las medidas de planta.*
2. *Al observar las vigas ubicadas por arriba del tercer piso de la estructura, se decidió modelarlas como muros ya que sus dimensiones eran bastante exageradas.*
3. *Como no se tienen especificaciones sobre las cimentaciones o la loza del primer piso, se dejó en blanco, solo con los "Frames" de referencia como continuación del piso 1, no se colocó además, ninguna restricción en la base como compensación debido a la falta de especificación.*

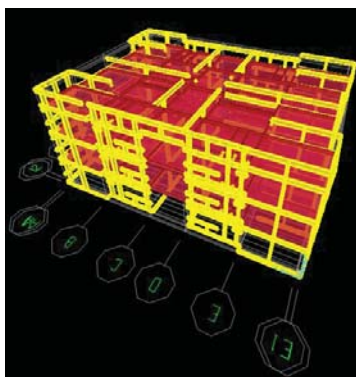


Figura 6.211 Modelo realizado por equipo 1

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Con base en las dificultades reportadas por el equipo 1, se observa que estas están relacionadas con la comprensión de la situación real desde los planos proporcionados porque presentaron inconvenientes relacionadas con medidas proporcionadas en los planos y cómo éstas iban ser utilizadas en el modelo en el software. Por ejemplo, señalan que las vigas las modelaron como un elemento "area" en lugar de elemento "frame". No se reportan

dificultades con el manejo del software. Respecto del ETM extendido, observamos que la activación de la génesis instrumental no se ve afectada, pues logran resolver problemas asociados con su representamen cuando reportan dificultades con las medidas, pero que pudieron resolver.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

Faltó asignar los apoyos, es decir, la estructura está completamente en el aire. Para hacerlo, primero asuman que la estructura está completamente fija al suelo en el piso más bajo, por lo cual le asignan empotramiento a todos los joints que se encuentran a nivel del suelo.

Esta observación, se condice con la importancia de los aspectos teóricos del curso, dado que una parte crucial trabajada en los problemas fue la utilización de los apoyos sobre los cuales se iba a colocar la estructura siendo las causantes de las reacciones externas al momento de analizar la estructura.

Reporte del equipo 2. Edificio asignado: Oficinas	Dificultades reportadas

Dificultades reportadas por el equipo con respecto ha modelado del edificio en SAP2000 (Figura 6.212)

- 1. El hecho de que no todos tuviéramos la misma versión del programa SAP2000 fue un pequeño inconveniente debido a los cambios existentes entre las distintas versiones.*
- 2. El programa SAP2000 no es compatible con todos los sistemas operativos, por lo que un compañero se vio en la necesidad de descargar un emulador de Windows para poder correr el programa.*
- 3. Se debe tener especial cuidado con las unidades en las cuales se modela la estructura, ya que por lo general al cerrar y abrir nuevamente el programa, las unidades cambian a las default automáticamente, por lo que se debe tener presente cambiarlas nuevamente antes de seguir trabajando.*
- 4. A la hora de modelar la estructura, resulta confuso en algunas vistas el hecho de que algunas “frames” de otras vistas se superponían, lo que dificultaba al trabajar.*

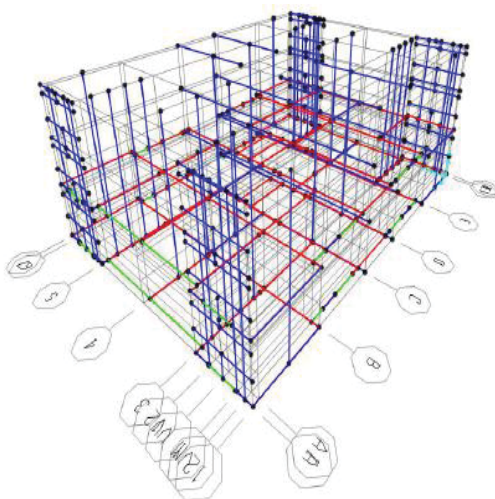


Figura 6.212 Modelo realizado por el equipo 2

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Los estudiantes reportan dificultades relacionadas con las medidas de los planos y como llevarlas al software para la construcción el modelo. Además, este equipo a diferencia del equipo 1 reporta facultades relacionadas con el uso del software más que con dificultades relacionadas con los planos proporcionados. Con respecto al ETM extendido, se observan problemas de instrumentalización, dado que reportan dificultades al modelar, señalando que las unidades sufrían cambios al manipular el software.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

No reportan los apoyos y las losas quedaron definidas una en el nivel 0 y una en el nivel 1, en lugar de una en el nivel 1 y la otra en el nivel 2.

De la observación a la evaluación anterior, cabe señalar que este error en el proceso de instrumentalización, se debe a que es la primera experiencia de los estudiantes con un proceso de modelado real de una estructura. Es probable que malinterpretaron la asignación de losas, asociando éstas a la construcción de pisos o cimentaciones.

Reporte del equipo 3. Edificio asignado: Biblioteca	Dificultades reportadas

Trabajo realizado por el equipo con respecto a modelado del edificio en SAP2000

1. Problemas en la ubicación espacial entre la planta (Figura 6.213) (grilla X-Y) y los cortes de perfil (grilla X-Z) ya que es poco cómoda la manera de visualizar en qué parte (muro o viga) se está trabajando.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

2. Problemas en el espesor del muro (Figura 6.214), por problemas de dibujo quedó una diferencia de 7,5 cm, pero esta diferencia se consideró no incidente en el diseño y en el próximo cálculo de la estructura, por lo que no se modificó. No obstante esta diferencia será considerada en el análisis posterior más no en el momento del cálculo.
3. Problemas en los MINDPOINTS, dificultad en el dibujo al trazar los FRAMES donde se debía realizar desde el punto medio del largo del muro, existió una dificultad técnica ya que la cercanía de este punto con la intersección de la grilla con el muro era aproximadamente imperceptible a simple vista, lo cual induce al error y como consecuencia demoramos un poco más en el dibujo de la estructura.

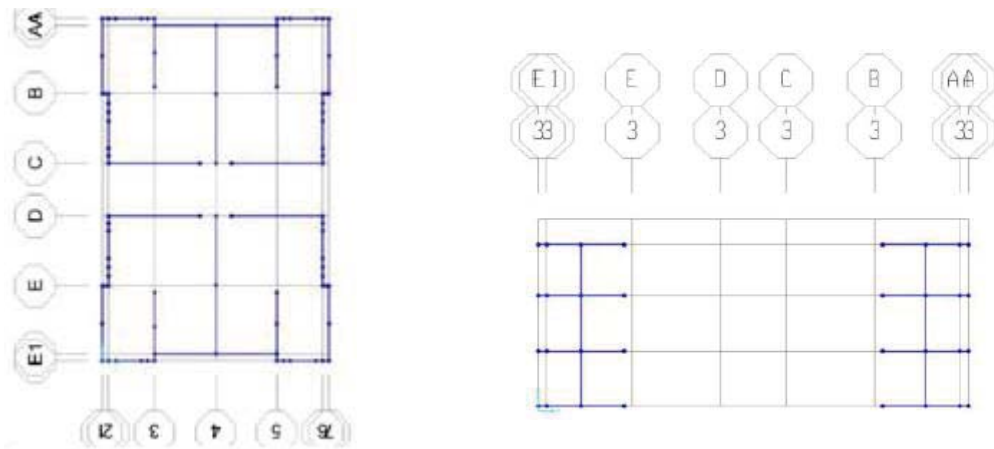


Figura 6.213 Dibujos dificultad 1 Equipo 3

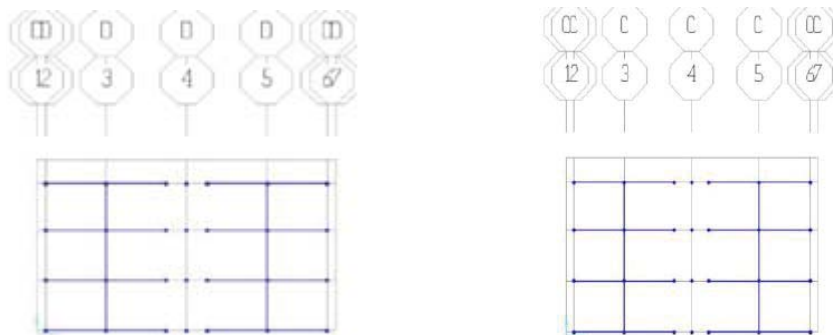


Figura 6.214 Dibujos dificultad 2 Equipo 3

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

A diferencia de los dos equipos anteriores, el equipo 3 reporta dificultades en la construcción de este modelo al reportar complicaciones desde la construcción de las grillas (dimensionamiento bidimensional en planta de la edificación) lo que trajo como consecuencia una demora en la construcción del modelo geométrico. Con respecto al ETM extendido, se observa un pobre proceso de instrumentación debido a que evidencian dificultades en la configuración de los modelos geométrico de la estructura. Esto puede asociarse a los problemas técnicos que reportan en la modelización de

muros como “frames” dado que así fue solicitado por los instructores, señalando que ello facilitaría la interpretación de resultados. Cabe mencionar que lo natural sería modelar los muros como área, es decir utilizando en el SAP el comando tipo Shell que también es utilizado para modelar losas que se simplifican como elementos de área, en este caso quizá dicha dificultad técnica se hubiera evitado.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

Faltó definir las losas

En esta observación, se señala ausencia de definición de las losas, pero en los indicadores de la evaluación también se observa la ausencia de la colocación de apoyos. Estas dificultades asociadas a modelar probablemente son naturales, dado que es la primera vez que modelan una estructura en SAP2000.

Reporte del equipo	Dificultades reportadas
4. Edificio asignado: Hotel	

Dificultades reportadas por el equipo con respecto al modelado del edificio en SAP2000 (Figura 6.215)

Lo más difícil a la hora de modelar fue interpretar el plano en AutoCAD, el cual estaba subdividido en secciones de distintas longitudes y que había que tener especial cuidado en las medidas para luego transcribir en el SAP2000, además, el hecho de trabajar por primera vez con un plano a tal escala resultaba abrumador a la vista. Sin embargo, prestando atención a los detalles pudimos sobreponernos a este problema. También el hecho de trabajar con distintos niveles de estructura podía confundir al momento de llevar todos los datos al programa, teniendo también en cuenta que la metodología para el uso de este si bien no es de extrema complejidad, es totalmente nueva para nosotros tener un proyecto de tal envergadura como alumnos de ingeniería civil. Se debe tener en consideración que, si bien en este caso se trata de una primera entrega, esta es la base para las siguientes y el resultado final del proyecto depende íntegramente que los cimientos del dibujo en SAP2000 tengan una correcta disposición y estén bien conectados entre sí.

El mayor problema que se consideró fue la correcta colocación y formulación de las grillas y luego la disposición de los “frames” sobre estas, tenía que ser especialmente minucioso para no llevar a un error de arrastre en la estructura, para así lograr el encaje preciso de las paredes, además, de la orientación que se le daba a los frames, también destacar la dificultad de fabricar las paredes que contenían ventana, ya que sobre un mismo espacio, existían muchas subdivisiones.

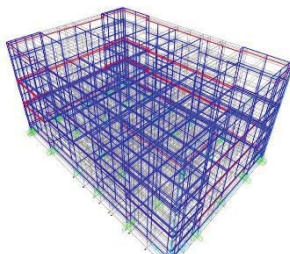


Figura 6.215 Modelo realizado por el equipo 4

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

El equipo reporta dificultades en la interpretación del plano debido a que reconocen que es la primera vez que trabajan con un proyecto de tal envergadura. Esto puede deberse a que en la clase de análisis estructural el trabajo con la modelización por lo general partía de modelos estructurales ya proporcionados, entonces ellos debían iniciar el proceso de análisis a partir de la elección del método que mejor se acomodara a lo solicitado.

Con respecto al ETM extendido, reporta dificultades relacionados con los signos del representamen de la ingeniería, dado que señalan dificultades para la interpretación del plano en AutoCAD, lo que a su vez pudo traer problemas con la instrumentalización asociadas al uso de los comandos de medida. Al respecto, señalaron que se les dificultó el paso de medidas del plano al SAP2000.

Aunque el equipo señala complicaciones relacionadas con los niveles de la estructura, suponemos que a esta dificultad se le añade el trabajo en tres dimensiones, lo que en el curso teórico no ocurrió, pues sólo se trabajó en dos dimensiones. Además, reporta dificultades en la construcción de diversos elementos estructurales, como es la fabricación de paredes que contenían ventanas o la colocación de *frames* sobre las grillas.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

¡Importante!, siempre revisar las unidades. El modelo está en unidades de Kip (algo así como kilo libras fuerza) e in (pulgadas). El modelo presenta excesivos elementos que no son necesarios. Hay que comprender que los muros se dibujan sólo en el plano de la cara del muro, no en el plano en el que se ve sólo su espesor. También los muros sólo los modelamos con 3 frames: 1 vertical al medio del muro, y 2 horizontales, uno encima y otro por debajo del muro (formando una I).

La observación anterior se puede asociar a dificultades para modelar esperadas, pues son muchos los elementos que pertenecen al edificio y que de ahí debieron construir vía el software. Además, el obstáculo natural se presentó al modelar un muro como elemento frame (marco), ya que un muro se asocia a un área (y no un marco).

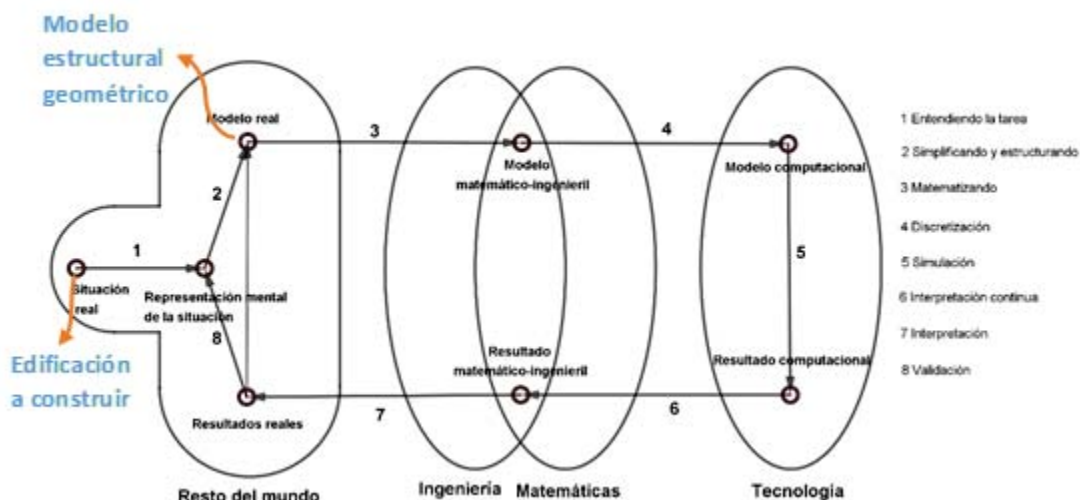


Figura 6.216 CM extendido con tecnología para entrega 1

Por tanto de la actividad de los equipos, a pesar de las dificultades señaladas, en la figura anterior se identifica el trabajo asociado al CM con tecnología, con la principal actividad generada para las etapas 1 y 2 (Figura 6.216). De la etapa 1 se observa la actividad “Edificación a construir”, en ella los estudiantes debieron iniciar el proceso de interpretación de los planos que les fueron proporcionados en AutoCAD y que debieron construir con la ayuda del software SAP 2000.

Posteriormente, de manera implícita (esto es de su entendimiento de lo que iban a entender como modelar el edificio con el objetivo de analizar la estructura) se considera que los estudiantes debieron trabajar en la actividad “crear un modelo conceptual”, dado que trabajaron en el entendimiento de la tarea relacionada con interpretación de los planos y cómo estos debían ser traducidos (unidades de medida, dimensiones) para pasar a la etapa 2 del CM con tecnología, correspondiente a la actividad 3 “construcción de un modelo estructural geométrico” en este caso el modelo se asocia a un modelo geométrico, dado que su construcción con el software sólo contiene datos relacionados con las medidas espaciales del edificio. Aquí una vez más se utiliza el software, en el proceso de modelización del edificio.

Por tanto, observamos que en la etapa 2 el CM, los estudiantes trabajan ya en el mundo tecnológico.

6.2.2.2 Análisis de la entrega 2. Construcción del modelo estructural analítico.

Entrega 2: Designación del material de construcción.

Crear y asignar las secciones y materiales correspondientes a cada elemento según corresponda. Además, generar la malla de elementos finitos para las losas. Asignar casos y combinaciones de cargas, y añadir cargas vivas y muertas al modelo (valores según correspondan). Generar un reporte de no más de 4 páginas con:

- 1) Vista de la malla de elementos finitos de la estructura (más comentarios).*
- 2) Vista del Modo 1 del caso modelo de deformación. (Simula sismo)*
- 3) Resumen de cargas vivas y muertas usadas (más comentarios).*

De forma general, los equipos presentaron la siguiente actividad, que hemos identificado con base en el CM con tecnología y al ETM extendido.

Trabajo en el ciclo de modelización

Para esta entrega 2, se observa que el trabajo de los estudiantes se corresponde con la etapa 3 del ciclo, debido a que siguieron con el proceso de estructuración, donde debían dar las dimensiones de los diversos elementos estructurales que componen el edificio, como son las dimensiones de vigas y columnas. Sin embargo, este trabajo, a diferencia de la entrega 1, ahora estuvo enfocado en la construcción de un modelo estructural analítico. Aquí los estudiantes debieron considerar las combinaciones de carga que considera la norma chilena de construcción (NCH433).

Las combinaciones de carga les serían de utilidad para cargar el edificio para su posterior análisis estructural. Las cargas a saber fueron: cargas muertas (asociadas al peso de la estructura), cargas vivas (asociadas a muebles, personas, etc.) y cargas de sismo.

Posteriormente, se realiza la matematización vía el uso del software, por lo que se observa trabajo en la etapa 4 (discretización) de la estructura. Como lo describimos en el marco conceptual, adaptamos el CM con tecnología a la etapa N1 del CM, donde el proceso de discretización (por mallado de elementos finitos) es realizado por el software bajo la instrucción por parte del estudiante a través del uso del comando "mesh". Para ello, utilizan SAP 2000 y a través de hacer "mesh" proceden a la realización del mallado de la estructura, para este proceso el software utiliza el método de elementos finitos. Al realizar la discretización de la estructura, los estudiantes tienen la construcción de un modelo estructural computacional.

Trabajo en el ETM extendido

Se activa la génesis semiótica, esto al visualizar los sinos asociados a los modelos estructurales contruidos. Posteriormente se activa la génesis instrumental de la ingeniería, al iniciar en el polo del artefacto de la ingeniería, en esta etapa del proyecto el software SAP 2000 tuvo como finalidad principal realizar la discretización de la estructura, permitiendo entonces el paso de la construcción de un modelo estructural analítico a un modelo estructural computacional. Siendo en este proceso que se pasa por el polo de la matemática, donde en esta ocasión el software permite el trabajo matemático vía el uso del método de elementos finitos. Es de destacar que el trabajo con elementos finitos, es un método numérico que trabaja el software para resolver el modelo estructural analítico discretizado.

Así, el registro figural queda representado por el trabajo de los estudiantes en la construcción del modelo estructural analítico. Se observa la activación de las génesis semiótica e instrumental. Se identifica al plano semiótico e instrumental [Sem-Ins].

A continuación, se presenta un análisis particular para cada equipo, esto de acuerdo al edificio asignado, que como hemos visto en la entrega anterior, fue uno diferente para cada equipo. La asignación depende de su funcionalidad.

Reporte del equipo 1. Edificio asignado: vivienda social	Tipo de edificio asignado Vivienda social

Trabajo realizado con respecto a la asignación de material

Peso propio de la estructura (carga muerta): El material del cual está hecho aporta una carga dentro de la estructura que durante este análisis fue considerada. Esta carga estaba determinada por el tipo de hormigón a utilizar, el cual para este grupo correspondió a uno de grado 25 (G-25), el cual nos determinaba un $f'c = 250 \text{ kgf/cm}^2$.

Carga viva. Acá se consideró que el edificio sería utilizado como vivienda social, por lo que las cargas, en comparación a las demás serían menores. Se determinaron dos cargas para el análisis, una de 200 kgf/cm^2 para las áreas privadas y una de 250 kgf/cm^2 en pasillos.

Para el análisis, además, se utilizaron las siguientes combinaciones de carga:

- $1,4 D$
- $1,4 D + 1,6 L$
- $1,2 D \pm 1,4 E + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E$

L: Carga viva; D: Carga muerta; E: Carga de terremoto

Esas combinaciones de carga son utilizadas por los estudiantes para indicar al SAP 2000 la forma en que estará cargado el edificio. Podemos observar, que para cada funcionalidad, el edificio tendrá cargas distintas. En este caso, vivienda social, las cargas deberán ajustarse a la resistencia especificada para el concreto y demás cargas declaradas.

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Dado que este equipo trabajo con un edificio destinado a vivienda social, la resistencia del concreto debió ser de 250 kgf/cm^2 y para el caso de la carga viva debieron reportar el uso del uso de cargas 200 kgf/cm^2 para áreas privadas y 250 kgf/cm^2 para pasillos.

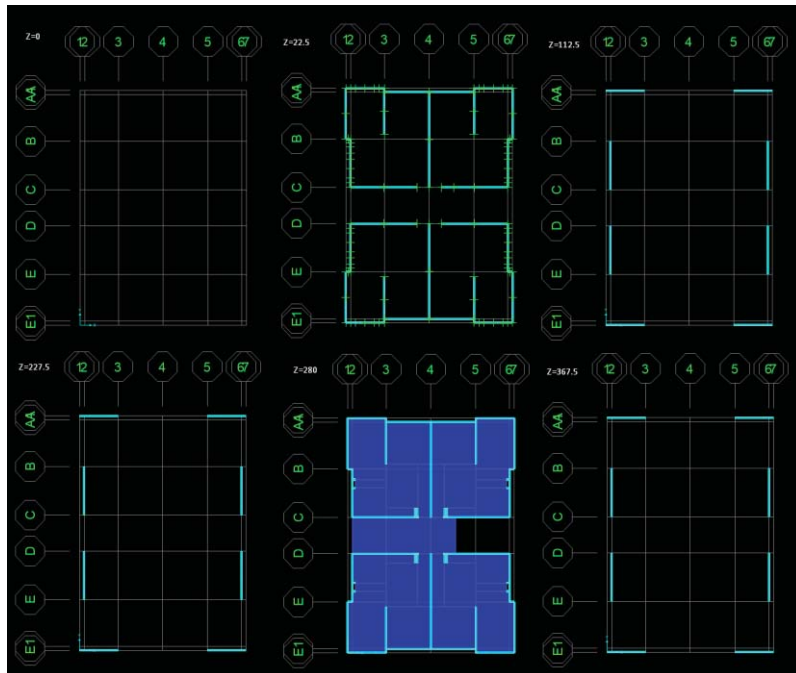


Figura 6.217 Elementos finitos, malla en el plano XY, según Z

De (Figura 6.217) se puede observar que, si bien el equipo 1 presenta el modelo estructural analítico y computacional, éste no reporta comentarios al respecto. Por tanto, el proceso de instrumentación es pobre, al no observarse reflexiones declaradas con respecto a la construcción de los modelos. Sin embargo el proceso de instrumentalización es claro y conciso, dado que demuestran capacidad para el manejo de comandos y procesos asociados al software, y reportan de esta manera diagramas de deformación y de mallado por elementos finitos. En cuanto al proceso de instrumentación asociado al trabajo matemático, éste es realizado por el software.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Hubo errores importantes como la no asignación del material a cada sección, es decir, si bien se generó el material de hormigón, tanto los muros como losas y vigas son de 4200 Psi (fíjense al ingresar a alguna sección). En el reporte faltó más comentarios con respecto de los elementos finitos y las cargas: ¿por qué creen que se hace esto? ¿Es mejor más o menos mesheo en las losas? ¿Qué opinan respecto a los valores de las cargas vivas? ¿Por qué es mayor la carga en el pasillo que en la misma vivienda?

De las observaciones anteriores, podemos evidenciar dos aspectos relacionados con la modelización por parte del equipo 2 para la etapa 2. La primera se relaciona con errores asociados a la construcción el modelo estructural analítico, dado que cometieron errores en asociar resistencia a los elementos estructurales. Esto es razonable, dado que aún no han cursado la asignatura de Diseño de estructuras y del curso de Análisis estructural, no habían realizado cálculos donde ellos asignaran resistencias a los elementos, sino que estás era asignada previamente.

La segunda está relacionada con la construcción de modelo computacional, en el que se les hacen cuestionamientos sobre el proceso de discretización. Llama la atención que los revisores cuestionan sobre realizar un mallado con más o menos mesheo (asociado al número de particiones del elemento estructural para ser analizado por elementos finitos), esto, a pesar de que no es competencia del curso que el estudiante domine teóricamente el método de los elementos finitos, lo consideramos relevante, en el sentido de promover una reflexión sobre el trabajo matemático que realiza el software.

Reporte del equipo 2 : oficinas	Tipo de edificio asignado Oficinas

Trabajo realizado por el equipo con respecto a la asignación de material

Las cargas que utilizamos fueron de dos tipos principalmente, las cuales fueron cargas de peso propio (100 kgf/cm^2) y sobrecarga (250 kgf/cm^2 en oficina y 500 kgf/cm^2 en pasillo). Se diferencia en que las primeras hacen alusión al peso que puede existir por parte de los tabiques hacia la losa, quincallería entre otros elementos no estructurales, y la segunda el peso que se ejercerá por el uso diario que en nuestro caso correspondería a la de oficinistas.

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Este equipo 2 presenta para la etapa dos del CM buena claridad, esto al explicitar en su reporte la naturaleza de las cargas que fueron asociadas a la estructura. Además de presentar un claro modelo computacional, donde se evidencia la discretización vía el mallado de las losas, originado por el comando mesh. Como se aprecia en (Figura 6.218).

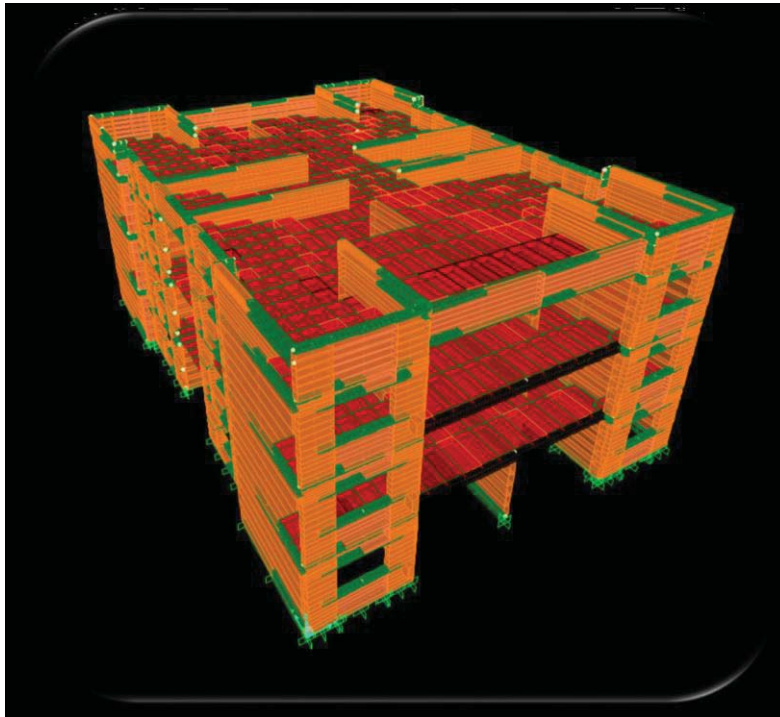


Figura 6.218 Vista de malla de elementos finitos por equipo 2

Además, respecto del ETM extendido, se observa claro el buen uso del software pero también de la construcción e identificación de los elementos estructurales, ya que se puede ver tal como reportan en la estructura anterior, la identificación y construcción de las losas, apoyos, muros, etc.).

Algo que nos parece relevante es la complejidad asociada a modelar distintas combinaciones de carga, en esta actividad, el equipo dos comentó lo siguiente:

También debimos modelar patrones de carga que simularan situaciones a las que se podría ver sometida la estructura. Estas fueron ya un poco más complicadas de modelar en comparación al caso anterior, ya que aquí no se asignaba directamente un valor a la losa; si no que se debían crear las combinaciones en las cuales se encontraban involucrado el peso propio, sobrecarga (live), dead, sismo x y sismos y, las últimas dos con valor positivo y negativo, con lo que al diseñar todo lo requerido se obtuvieron 10 patrones de carga y nos equivocamos varias veces debido a que para cada combinación se debían implementar distintos multiplicadores, en el caso que estuvieran involucrados los sismos ir cambiando los signos de estos.

De la reflexión de los estudiantes del equipo 2 para la etapa 2 del proyecto, se evidencian dos aspectos: uno relacionado con una nueva experiencia en cuanto al manejo de cargas asociadas a una estructura como es la de sismo, pero el más destacable, es la forma natural de referirse a “modelar” a etapas del proceso de análisis adicionales a solo “dibujar” una estructura en el software.

Reporte del equipo 3: Biblioteca	Tipo de edificio asignado Biblioteca

Trabajo realizado por el equipo con respecto a la asignación de material

1. Como ya sabemos en la primera entrega se habían trazado los distintos elementos que constituyen la estructura, ahora bien, en esta segunda parte del trabajo se crean y asignan las secciones y materiales con las propiedades indicadas para dichos elementos (losas, muros, vigas). Además se definió y generó el mallado de elementos finitos para las losas y así obtener un mejor análisis de estas mismas al correr el programa, por último se cargó la estructura con distintas combinaciones de carga como según lo solicitado.
2. En cuanto a las cargas asignadas a nuestro grupo (300 kgf/cm^2) en zonas de lectura y pasillo, (400 kgf/cm^2) en zonas de libros, nos parece que es correcto ya que por norma al área de lectura se le asigna menos carga.

Por otra parte se asignaron cargas de distinto tipo (vivas y muertas) y en diferentes combinaciones a la estructura, estas son:

- $1,4 D$
- $1,4 D + 1,6 L$
- $1,2 D \pm 1,4 E_X + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E_X$
- $1,2 D \pm 1,4 E_Y + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E_Y$

3. Consideramos que las combinaciones en el trabajo son adecuadas a una aproximación de la vida real, ya que los edificios y otras estructuras deben ser diseñados tomando en cuenta este tipo de combinaciones, las que deben ser utilizadas para dimensionar los elementos de tal manera que resistan las solicitaciones futuras. Al principio tuvimos complicaciones debido a las diversas combinaciones que se podían lograr, pero una vez que entendimos, no presentó mayores complicaciones.

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Para este equipo 3, al ser un edificio destinado a Biblioteca, para el caso de la carga viva reportan el uso del uso de cargas 300 kgf/cm^2 para zonas de lectura y pasillo y 450 kgf/cm^2 para pasillos. Se observa que el equipo infiere en este requisito de carga mencionando que son números lógicos de acuerdo a su uso destinado.

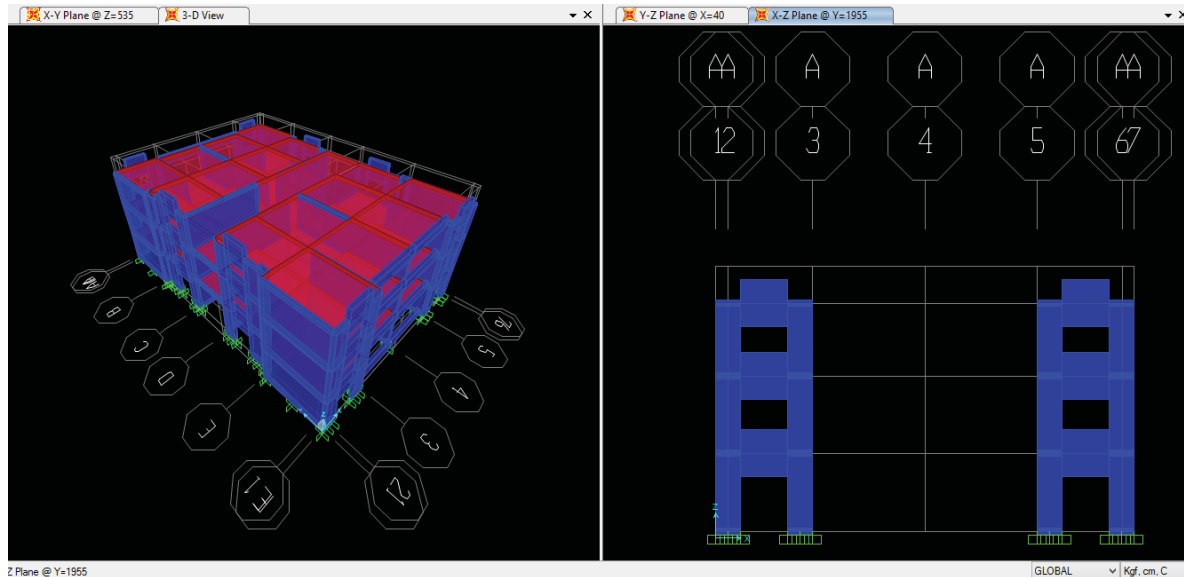


Figura 6.219 Discretización de la estructura Equipo 3

Destacamos la reflexión que hace este equipo respecto de las combinaciones de carga, relacionándolas con un comportamiento de un edificio en la vida real. En este comentario, pareciera que les es más natural este tipo de edificaciones que las estructuras tipo (viga, marco, armadura), dado que estás son modelos más abstractos de la realidad. Respecto de la etapa 4 (discretización) (Figura 6.219), se observa que el equipo no tuvo mayores complicaciones, presentando el modelo computacional (Figura 6.219).

Reporte del equipo 4: Hotel	Tipo de edificio asignado Hotel

Trabajo realizado por el equipo con respecto a la asignación de material

Las cargas utilizadas durante el trabajo fueron de tres tipos, cargas muertas, las cuales se designan como el peso propio de los distintos materiales en la construcción. Cargas vivas, divididas en dos secciones para cada parte del edificio en este caso de 500 kgf/cm^2 y 200 kgf/cm^2 , por último una carga de terremoto la cual esta entregada por defecto en SAP2000.

Donde se nos pedía realizar una serie de combinaciones con las cargas asignadas estas son:

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

- $1,4 D$
- $1,4 D + 1,6 L$
- $1,2 D \pm 1,4 E + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E$

Las cuales en el caso tres y cuatro debían considerarse los sismos en ambos ejes coordenados, entregando una combinación total de 10 combinaciones posibles.

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Este equipo utiliza cargas asociadas a un edificio destinado a ser Hotel, con cargas vivas de 500 y 200. Respecto del proceso de discretización llama la atención de que es el primer equipo en colocar una pequeña reflexión al respecto, señalando que para el mesh utilizaron para cada discretización, cuatro secciones horizontales y cuatro verticales (Figura 6.220), asociando esa subdivisión a la economía del tiempo de análisis del software.

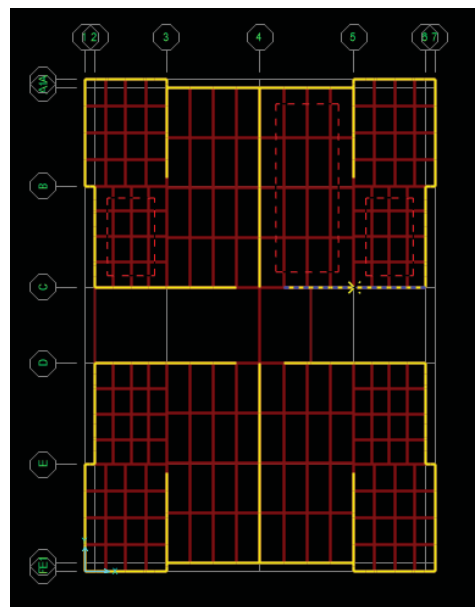


Figura 6.220 Malla elementos finitos Equipo 4

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

El material de hormigón armado no se le asignó el correcto peso (2.5 tonf/m^3), y el módulo de elasticidad no fue bien calculado, pues se confundieron con las unidades. La idea era ingresar $15100\sqrt{250}$ en kgf/cm^2 , de tal manera obtener $238751.96 \text{ kgf/cm}^2$.

La observación anterior, a pesar de parecer menor, es crucial, pues de la resistencia asignada al material depende los análisis del software, en este

caso puede asociarse a una debilidad instrumental. Algo relevante, es que el software, a pesar de invisibilizar la matemática utilizada para resolver el modelo matemático, no es del todo una caja negra, pues hay ciertos procesos que hace visibles y que se relacionan con procedimientos sencillos como los aritméticos en este caso. Pero también como veremos en la entrega 3 del proyecto, también hace visibles resultados en representaciones tanto numéricas como a través de diagramas.

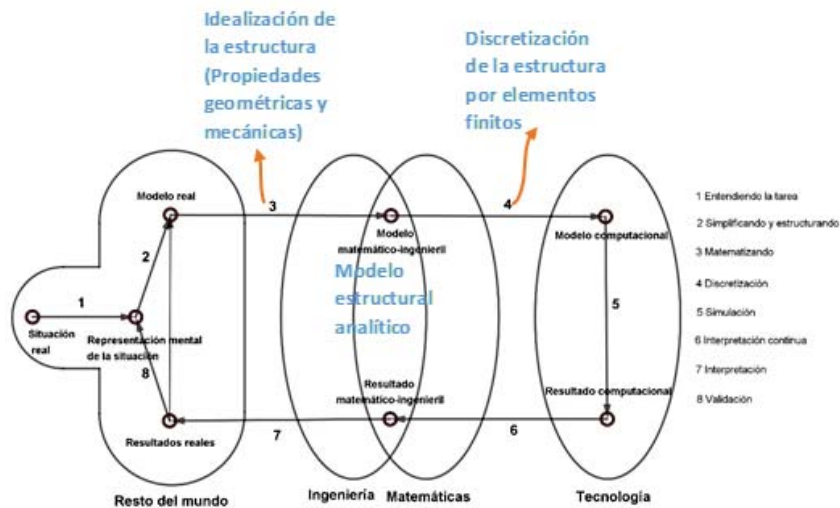


Figura 6.221 CM extendido con tecnología para entrega 2

De las diversas actividades realizadas por los equipo, podemos sintetizar en dos los procesos realizados de acuerdo al CM con tecnología (Figura 6.221):

1. El proceso de matematización que tuvo como consecuencia un modelo estructural analítico, asociado a la idealización de las propiedades de los elementos estructurales del edificio, es decir, de la traducción de los datos al software de las propiedades geométricas y mecánicas de dichos elementos. Aquí ubicamos el modelo estructural analítico en el mundo matemático e ingenieril dado que hacemos el supuesto que en este mundo van modelos que contienen nociones de la especialidad, en este caso de estructuras.
2. Un proceso de discretización, es decir, el uso del comando mesh de software para generar la malla de elementos finitos (técnica de métodos numéricos utilizada por el software para resolver el modelo matemático asociado al modelo estructural).

6.2.2.3 Análisis de la entrega 3 del proyecto. Designación sobre las cargas actuantes en el edificio y el “Run Analysis” del software

Entrega 3: Se solicitó

Generar el caso de análisis sísmico de acuerdo a lo visto en ayudantía. Asignar masa sísmica según corresponda a su edificio. Analizar la estructura completa. Generar un reporte con:

- 1) Esfuerzos máximos (Momento, Corte y Normal) en todos los muros del primer piso. Comentar cuál es el muro que más corte se lleva, y explicar por qué.
- 2) Diagrama de momentos de 2 vigas a elección, para una combinación de cargas a elección. Comentar si el resultado es lógico o no.

De forma general, los equipos presentaron la siguiente actividad con respecto al CM con tecnología y al ETM extendido.

Trabajo en el ciclo de modelización

En esta entrega se observa que los estudiantes trabajan en la etapa 5 (simulación) y 6 (interpretación de resultados del software). Respecto de la etapa de simulación, podemos observar que los estudiantes corrieron el software a través del comando Run Analysis, debido a que presentan los resultados de la simulación. Así mismo, se observa interpretación de resultados, debido a que como parte de la entrega, se les solicitó que interpretaran los resultados del análisis para dos vigas, este resultado fue interpretado con base en los diagramas de momentos de dos vigas a elección.

No observamos una validación con respecto a la situación original, esto debido a que los procesos de validación son formalmente llevados a cabo en una etapa del trabajo con la estructura llamada "Diseño estructural" donde los resultados se validan conforme a normas de construcción.

Trabajo en el ETM extendido

Se activa la génesis instrumental de la ingeniería, esto al utilizar artefactos asociados al software, tanto para analizar la edificación como para visualizarla. Además en su proceso de entendimiento de los resultados ocurre instrumentación, dado que es posible evidenciar la construcción de reflexiones asociadas al uso del software.

Posteriormente, se observa una débil activación de la génesis discursiva, esto debido a que se tiene un pasaje del polo cognitivo de la construcción al polo cognitivo de la prueba, se observa que los estudiantes prueban lo lógico de los resultados (lo lógico es una expresión utilizada por los instructores al solicitar la interpretación), pero esta prueba ocurre vía software. Sin embargo, puede existir un débil pasaje del polo cognitivo del representamen de la ingeniería al polo cognitivo de la prueba, esto en el sentido de que se

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

presume utilizan nociones teóricas del análisis estructural para interpretar los resultados de la simulación de la estructura vía software, esto es: nociones relacionadas con el comportamiento cuantitativo y cualitativo de las curvas de momento y de cortante; por lo que la interpretación de resultados, en este caso se asocia a valores máximos y /o mínimos de dichas curvas.

Así, el registro figural queda representado por los diagramas solución que son arrojados por el software al momento de correr el programa. Así mismo, hay presencia del registro tabular, esto también es producto de la solución del análisis arrojado por el software. Se observa la activación de las génesis instrumental y discursiva. Se identifica al plano instrumental-discursivo [Ins-Dis].

Reporte del equipo 1: Vivienda social	Comentarios de los estudiantes

Trabajo realizado por el equipo con respecto al “run Analysis”

Respecto de la solicitud de mostrar los resultados numéricos relacionados con los esfuerzos máximos, cabe mostrar las siguientes dos tablas numéricas mostradas por el equipo.

Tabla 6.13 Valores máximos. Ejes 4-7 y A-C

Análisis 4-7 y A-C		Max	
Esfuerzo axial máximo (Kgf)	Muro 617	84881,2	ESPECX
Esfuerzo de corte en X (Kgf)	Muro 1208	335647,85	COMB2
Esfuerzo de corte en Y (Kgf)	Muro 1257	11354849,77	COMB2
Torsión (Kgf-cm)	Muro 1208	1079667,68	COMB2
Momento (Kgf-cm) X	Muro 1267	5670676735	COMB2
Momento (Kgf-cm) Y	Muro 592	64516249,62	ESPECX

Tabla 6.14 Valores mínimos. Ejes 4-7 y D-F.

Análisis 4-7 y D-F		Min	
Esfuerzo axial máximo (Kgf)	Muro 1271	-276536499	COMB2
Esfuerzo de corte en X (Kgf)	Muro 414	-7295931,86	COMB2

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Esfuerzo de corte en Y (Kgf)	Muro 1248	- 11354849,7	COMB2
Torsión (Kgf-cm)	Muro 1161	- 1511464,84	COMB2
Momento (Kgf-cm) X	Muro 1271	- 5670676738	COMB2
Momento (Kgf-cm) Y	Muro 414	- 5873535163	COMB2

Respecto de las tablas los estudiantes comentan:

Se puede apreciar que en las tablas (Tabla 6.13) y (Tabla 6.14) se encuentran dos valores destacados, estos corresponden al corte más grande del primer piso en dichos muros. Nosotros creemos que esto se debe por la posición en la que se emplazan en el edificio, pues se aprecia una gran carga acumulada hacia el centro del edificio y como estas barras están desde la parte más alejada y se dirigen al centro del edificio se ven mayormente afectados por ese peso, generando una deformación de hundimiento hacia el centro del edificio provocado por la combinación mencionada en las tablas.

Respecto de los resultados por diagramas:

Se presentan los diagramas de momentos para dos vigas superiores correspondientes a la de los plano E1 (Figura 6.222) y 6 (Figura 6.223), sometidas a la combinación de cargas COMB4A para nuestro proyecto, la cual representa la combinación $0.9D + 1.4ESPECX$. Estos diagramas son los representados en los cachos rígidos que comprenden nuestra viga.

En la ilustración 1 (Figura 6.222) notamos que el momento mantiene un desarrollo lógico al esperado, demostrando un momento negativo producto de la carga suministrada por el peso propio, junto a la carga sísmica aplicada. En cambio, para la segunda ilustración se observa un momento en ambas direcciones, este producto de ambas cargas aplicadas.

Se puede determinar que los momentos presentan una distribución desigual entre ambas ilustraciones (momento solo abajo y momento solo arriba y abajo) producto de la dirección en las que se encuentran cada viga, una orientada en X y otra orientada en Y, pudiendo determinar que el comportamiento cumple con lo esperado.

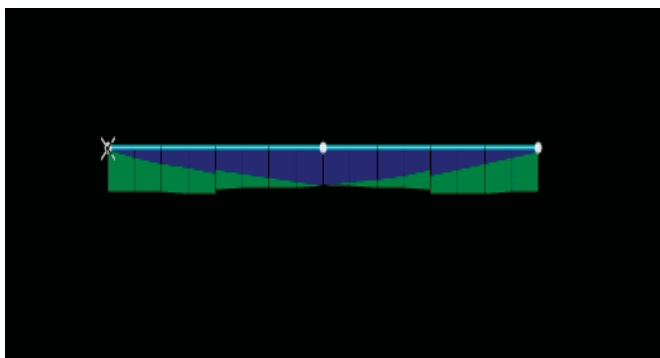


Figura 6.222 Diagrama de momentos 1, viga plano E1 Equipo 1

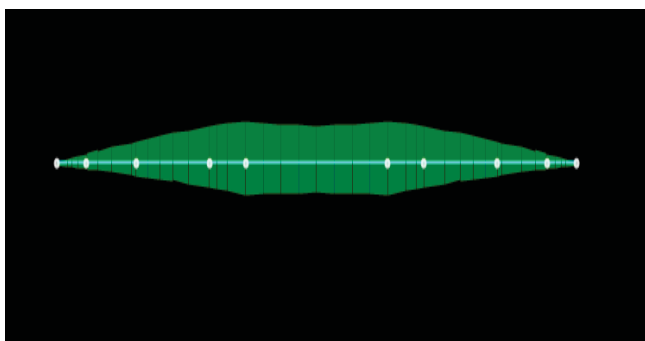


Figura 6.223 Diagrama de momentos 2, viga plano 6 Equipo 1

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

En su interpretación, los estudiantes comentan que el comportamiento de los diagramas es lógico, en el caso de que los diagramas fueron negativos, lo vinculan con la forma de carga del elemento y el peso propio de la viga, Además, señalan que, a diferencia de los diagramas trabajados en la asignatura de análisis estructural, estos diagramas presentan una forma irregular debido a la componente de la fuerza sísmica.

Cabe recordar que en análisis estructural (componente teórico) los diagramas presentaron curvaturas asociadas a polinomios de grado 1, 2 o 3), esto debido a la regularidad de las cargas sobre la estructura. Es por eso que los estudiantes hacen hincapié que en los resultados del software observan irregularidad asociada a otros tipos de cargas sobre los elementos estructurales (como el efecto de sismo).

Otro punto importante es la interpretación que dan a los resultados numéricos, señalando que “creen” que esos valores destacados son los mayores, dado el comportamiento de la carga, la cual se acumula hacia el centro del edificio. Con respecto al ETM extendido, dicha irregularidad en los diagramas tiene efecto en un trabajo débil en la génesis discursiva, al no probar con algún método analítico tal comportamiento. Quizá ello se asocie a un conocimiento más avanzado relacionado con el comportamiento de diagramas de momento y cortante para estructuras sometidas a cargas de sismos.

Reporte del equipo 2: Oficinas	Comentarios de los estudiantes

Comentarios realizados por el equipo con respecto al “run Analysis”

La estructura en SAP no nos arrojó diagramas de momento acordes a lo que uno podría suponer para este edificio, ya que los arrojados fueron solo en ciertas secciones de la estructura (Figura 6.224); esto quizás fue por culpa de nuestro grupo a la hora de manipular la estructura entregada.

Creemos que se producirán mayores momentos en los muros que se encuentran con menor superficie continua, como por ejemplo los que presentan una ventana, ya que estos presentan menor rigidez, lo que los hace más propensos a cualquier tipo de esfuerzos y en el caso de sismo a esfuerzos de corte. Los muros estructurales recibirán todos los esfuerzos que se producen de manera perpendicular al suelo y estos al estar empotrados en sus extremos transmitirán dichos esfuerzos a las losas y zapatas las cuales si no se encuentran conectadas de manera correcta, producirán la falla de la estructura.

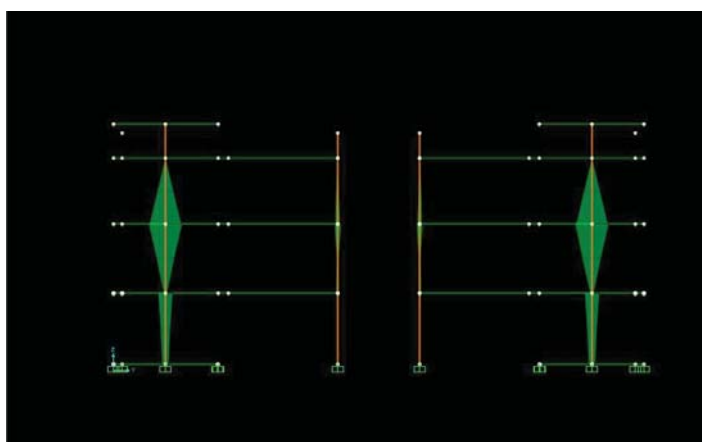


Figura 6.224 Diagramas de momento Equipo 2

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Los estudiantes evidencian dificultades con los resultados, comentando que no les parecen lógicos a lo que se podría suponer (sin especificar qué se suponía), sólo adjudicándolo a posibles errores al momento de trabajar con el modelo computacional. Por tanto la etapa 6 (interpretación), se presenta débil. Respecto del ETM extendido, observamos que la activación de la génesis discursiva ocurre de manera débil, dado que los estudiantes muestran una interpretación de sus resultados, asociándola a suposiciones desde referentes teóricos de rigidez y esfuerzos, sin especificaciones mayores, ello quizá por la complejidad asociada a la incorporación de

fuerzas de sismo lo que complicó la interpretación pues en su referente teórico no se tenía ese conocimiento al no haberlo estudiado en el curso.

Consideramos que si las fuerzas asociadas al edificio hubiesen sido las vistas en la componente teórica del curso, el equipo hubiese argumentado de una mejor manera su interpretación. Por ejemplo, cómo sería la relación entre los diagramas de cortante y de momento, calculadas ahora con el software pero que en clase fueron calculadas de manera manual, ya sea para estructuras estáticamente determinadas o indeterminadas.

Reporte del equipo 3: Biblioteca	Comentarios de los estudiantes

El equipo 3 según observamos en las pautas de evaluación cumplió con la entrega de esta etapa. Sin embargo, no tuvimos acceso a esta entrega del equipo.

Reporte del equipo 4: Hotel	Comentarios de los estudiantes

Trabajo realizado por el equipo con respecto al “run Analysis”

El resultado es lógico, dado que la combinación de carga afecta en concordancia a las direcciones de los planos dados y no presentan solo pequeños momentos en las direcciones donde el factor amplificado fue reducido, es decir planos YZ.



Figura 6.225 Diagrama de momentos M2-2

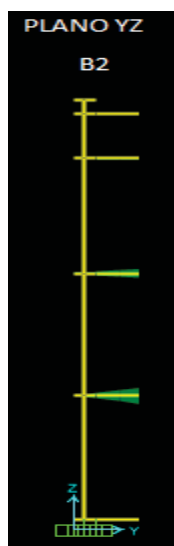


Figura 6.227 Diagrama de momentos plano YZ

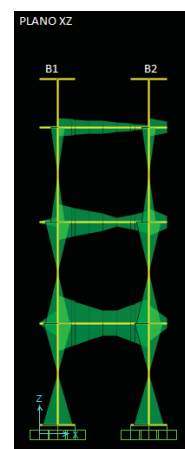


Figura 6.226 Diagramas para carga 1,3 Sismo X + 1,9 Sismo Y

Como evidencia de resultados, en este reporte muestran tres diagramas de momento (Figura 6.225, Figura 6.227, Figura 6.226). Sin embargo, el trabajo con la etapa (interpretación de los resultados del software), se observa débil.

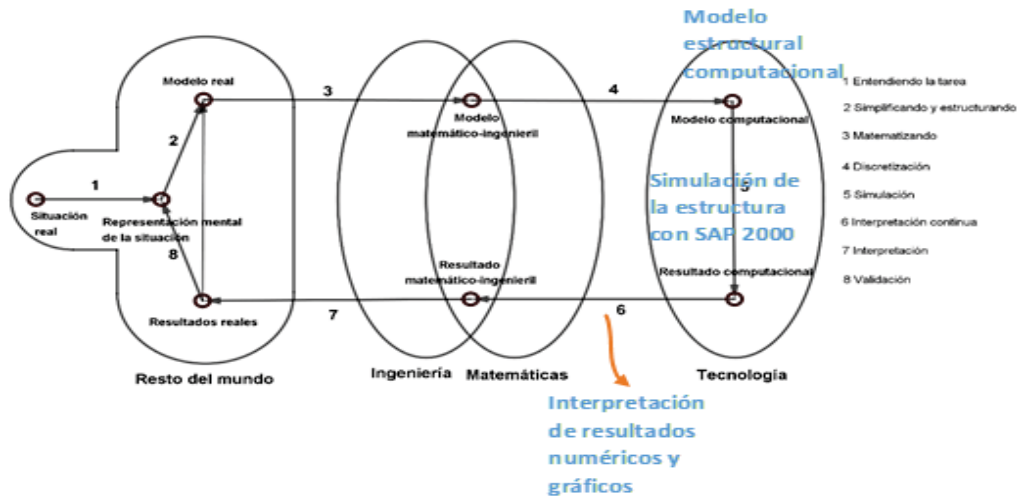


Figura 6.228 CM extendido con tecnología para la entrega 3

Cabe señalar, que la etapa del CM de interpretación, la hemos asociado a la interpretación de resultados directamente de ingeniería. Ya que para el caso del CM de Meister/Borromeo Ferri, N3 (interpretación) significa interpretar los resultados en el lenguaje matemático.

Del trabajo de los equipos respecto de la entrega 3 del proyecto, relacionada con la simulación (utilizar el comando Run Analysis para correr el análisis) y la interpretación de resultados, podemos sintetizar en (Figura 6.228) las actividades evidenciadas: Afinación del modelo estructural computacional, a través de cargar los efectos del sismo (en la etapa dos ya se había construido dicho modelo pero sin los efectos del sismo) y la simulación de la estructura a través de correr el análisis y por último se observó la interpretación de resultados tanto numéricos como gráficos.

6.2.2.4 Análisis de la entrega 4. Modelado de la cercha (armadura) del edificio con el software SAP 2000

Entrega 4: Se solicitó

Dibujar la cercha de techo del edificio, con las secciones y materiales que se indican por planos del proyecto. Añadir una carga en el centro, con un valor de 10 toneladas, en dirección vertical hacia abajo. Generar un reporte con:

- 1) *Consideraciones para el modelo de la cercha (uniones, perfiles, orientación, etc.)*
- 2) *Deformaciones máximas de la cercha, comentar si son esperables.*

De forma general, los equipos presentaron la siguiente actividad con respecto al CM con tecnología y al ETM extendido.

Trabajo en el ciclo de modelización

En esta cuarta entrega, los estudiantes trabajaron en modelar y analizar la estructura que soporta la techumbre del último nivel. Podemos observar que en esta fase se pasa por todas las etapas del ciclo, debido a que los estudiantes deben desde comprender la tarea (modelar la armadura), hasta realizar la simulación de la misma en el software SAP2000 e interpretar sus resultados.

De manera general, observamos el siguiente trabajo en las fases del ciclo: Situación Real: la estructura tipo armadura que deberá soportar la techumbre. Modelo Real: modelo estructural geométrico y analítico de la armadura con base a los materiales y las condiciones de carga de acuerdo a normas. Modelo estructural Computacional: Simulación del modelo analítico (modelo geométrico cargado en SAP2000). Resultados (interpretación): con base en los resultados de la simulación (contrastando con la forma en la que la estructura fue cargada).

Trabajo en el ETM extendido

Respecto del ETM extendido se observa la activación de la génesis semiótica, a través del trabajo con el representamen de la ingeniería, donde se trabaja con signos asociados a los signos representados en los planos de la armadura.

Posteriormente, se activa la génesis instrumental, esto al utilizar el software para construir el modelo geométrico, así como el modelo analítico y computacional. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en las etapas anteriores, es decir: para el modelo geométrico se construyen las grillas bidimensionales con base en las dimensiones tomadas de los planos; para el modelo analítico, se definen las propiedades geométricas y mecánicas de los elementos de la armadura; y finalmente para el modelo computacional se realiza la discretización de los elementos. Pasando así al polo cognitivo de la construcción.

Finalmente se activa la génesis discursiva, esto al pasar al plano epistemológico de la ingeniería, vía la utilización de nociones teóricas que los estudiantes trabajaron en análisis estructural, tal es el caso de la forma en que trabajan los modelos tipo armadura, donde la carga debe ser de tipo axial, es decir sólo se puede cargar los elementos en las uniones o nodos,

facilitando así el paso al plano cognitivo de la prueba cuando justifican sus resultados con base en los diagramas obtenidos vía la simulación con SAP 2000.

Así, el registro figural queda representado en tres formas. El registro figural asociado al plano del edificio, el registro figural asociado a los modelos construidos por los estudiantes (geométrico, analítico y computacional), el registro figural asociado a los diagramas solución. En esta cuarta entrega se observa la activación de las génesis: semiótica, instrumental y discursiva. Se activan los planos: [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

Reporte del equipo 1: Vivienda social	Comentarios de los estudiantes

Con respecto a la geometría de la cercha:

Como se define en el archivo CAD, la cercha escogida corresponde a la cercha tipo C2 donde sus componentes según dimensiones se distribuyen a como se muestra en la figura (Figura 6.229). Donde la estructura se encuentra con apoyos articulados en cada extremo, donde se une con el resto de la estructura.

Con respecto al material utilizado:

Las secciones están compuestas según su material y su forma seccional, correspondientes al del "Metalcom" con una forma seccional tipo "C" para todos sus componentes (Figura 6.230). En esta cercha se tienen dos formas para las secciones (Figura 6.231), definidas como 90CA085 y 150CA10. Donde las cuerdas superior e inferior están definidas por el tipo de sección 150CA10 y los elementos intermedios como columnas y diagonales corresponden a la sección 90CA085.

Con respecto a las cargas aplicadas:

Para definir las cargas que soporta cada cercha, se consideró que la carga muerta en el techo es de aproximadamente de 40 (kgf/m²) y una carga viva de 30 (kgf/m²). Como cada cercha se encuentra distanciada en 60 cm como máximo, este corresponderá al ancho tributario que resultará en el máximo estado de cargas que soportará cada cercha, teniendo así que cada cercha tendrá aplicada sobre si una carga distribuida constante de 24 (kgf/m²) como carga muerta (Figura 6.232) y 18 (kgf/m²) de carga viva (Figura 6.233). Ahora, se debe tributar esta fuerza distribuida a fuerzas puntuales que se ejercen sobre cada nodo en la cuerda superior, esto se hace multiplicando la fuerza distribuida por la distancia entre cada uno de los nodos y la fuerza resultante se divide en 2, colocando dos fuerzas iguales a cada nodo y así sucesivamente.

Con respecto a los esfuerzos máximos:

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Basándose en los diagramas obtenidos, se puede observar que los máximos valores de esfuerzo axial (Figura 6.234) se los lleva la cuerda superior, los máximos de corte (Figura 6.235) se los llevan la cuerda superior e inferior en los elementos que unen la cercha del resto de la estructura, debido a los valores de fuerza en los apoyos y además, estos elementos también son los que se llevan la mayor parte de los momentos flectores (Figura 6.236).

Modelo en SAP2000 de la cercha

a) Geometría de la armadura

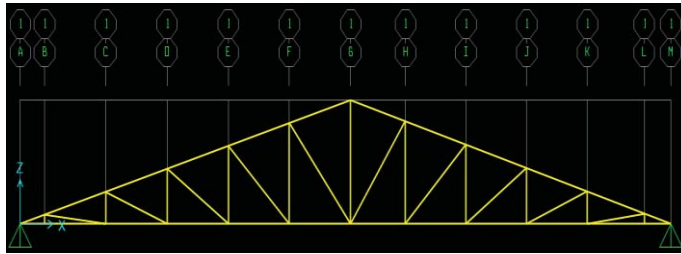


Figura 6.229 Geometría de la armadura

b) Material utilizado

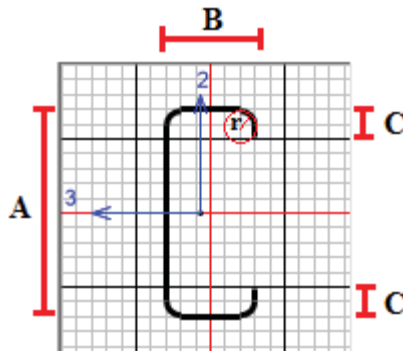


Figura 6.230 Perfil metálico utilizado

A: Alto de la viga (cm)

B: Ancho de la viga (cm)

C: Longitud de los aleros (cm)

e: Espesor de los aleros (cm)

R: Radio (cm)

	90CA085	150CA10
A	9	15

B	3.8	4
C	1.2	1.2
e	0.085	0.1
r	0	0

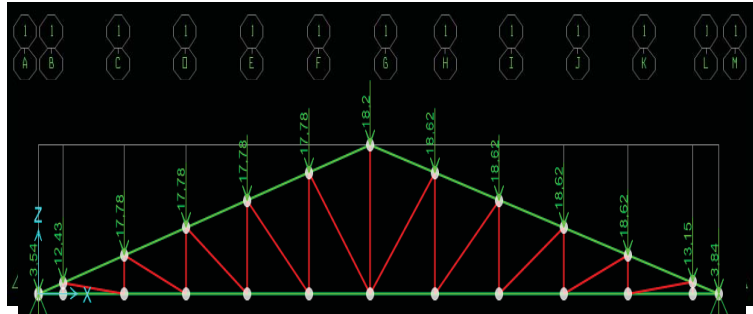


Figura 6.231 Secciones de acero utilizadas

Figura 6.232 Aplicación carga muerta

b) Cargas aplicadas

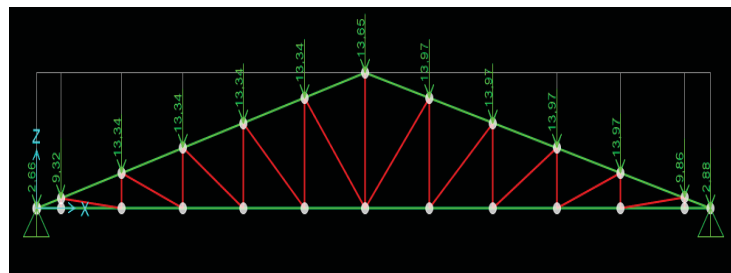


Figura 6.233 Aplicación carga viva

c) Diagramas de esfuerzos

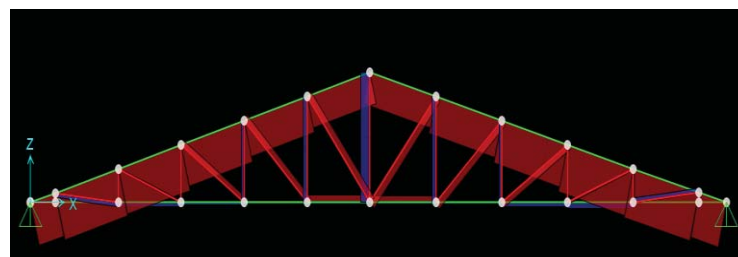


Figura 6.234 Diagrama de esfuerzos axiales

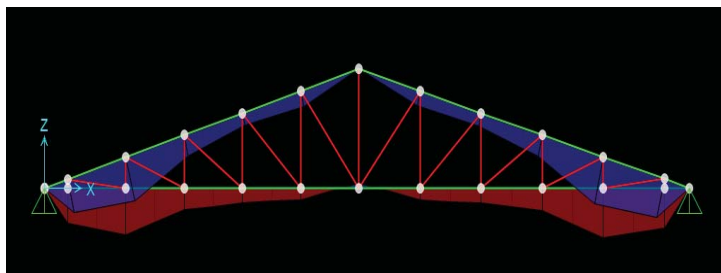


Figura 6.236 Diagrama para momentos flectores en el plano ZX

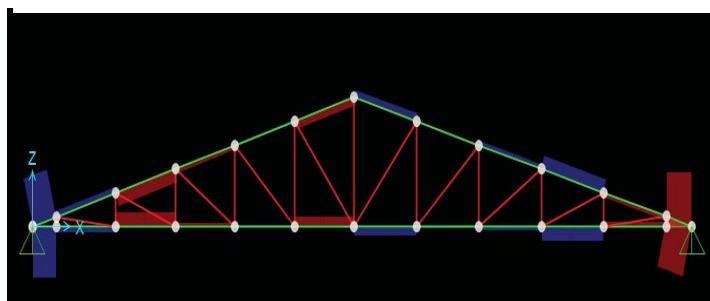


Figura 6.235 Diagrama de esfuerzos de corte en el plano ZX

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Adicional a que el equipo tiene la actividad esperada que hemos establecido en el inicio de esta entrega, en su reporte de modelización de la cercha, cabe señalar que son muy claros en la aplicación de las cargas, señalando el procedimiento utilizado para considerar las cargas distribuidas en las barras superiores de la armadura como solamente aplicadas en los nodos de las mismas.

Aquí se identifica la idealización del modelo estructural, pero también el uso de nociones teóricas estudiadas en el curso. Dichas nociones son las que consideran que una armadura sólo debe trabajar bajo esfuerzos axiales (de tensión y/o compresión). Además, se destaca que los estudiantes reflexionan sobre dicha condición cuando trabajan con el software, señalando que solo se deberían presentar esfuerzos axiales dado que se han cargado solo los nodos de las barras.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

El modelo entregado no tiene los apoyos asignados (al igual que la primera entrega), ojo con esto pues la comunicación y el orden dentro de un grupo es sumamente importante.

La observación anterior dice relación con un aspecto teórico estudiado en el curso, y a pesar de parecer una cuestión menor, la asignación de apoyos es crucial para la determinación e reacciones externas en la estructura.

Reporte del equipo 4: Hotel	Comentarios de los estudiantes

1. Cargas de la armadura

Se debe cargar la cercha con una mezcla de cargas vivas y muertas para posteriormente analizar las deformaciones en cada una de los “frames” que conforman dicha estructura.

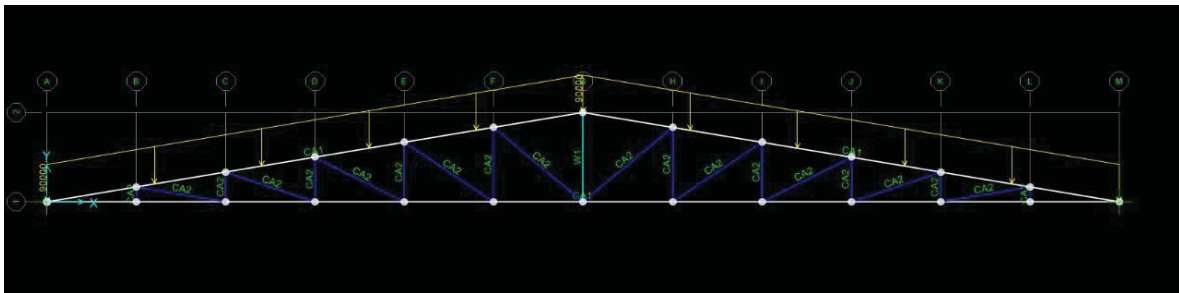


Figura 6.237 Modelo de la armadura

En la imagen adjunta (Figura 6.237) podemos apreciar las cargas dispuestas sobre la estructura, con lo cual debemos tener especial énfasis en el cuidado de las uniones puesto que cualquier falla podría causar una falla en la estructura errada a lo que realmente es causada por las cargas establecidas. Además, de la correcta asignación del material utilizado para la cercha, ya que cada material posee distintas características y resistencias.

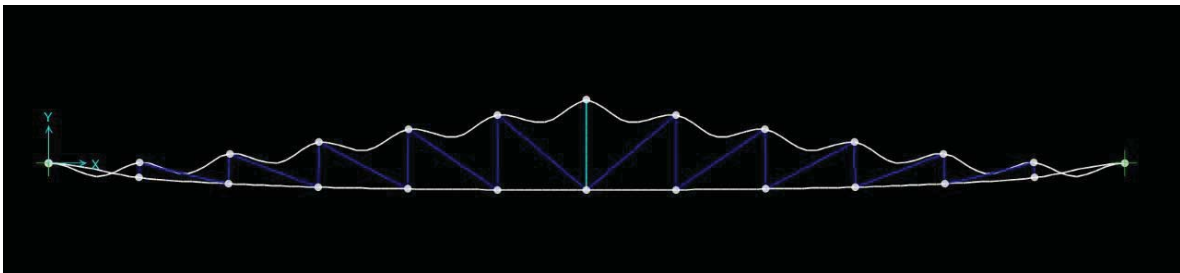


Figura 6.238 Deformada de la armadura

Aquí podemos observar como es la deformada de la viga (Figura 6.238) con una incorrecta utilización de los materiales, los cuales claramente no serían aptos para una estructura de edificación segura para ser habitada con lo cual se

comprende el interés en ocupar materiales debidos para las características de cargas y utilidad que se necesitan para cada tipo de estructura.

2. Análisis de la estructura

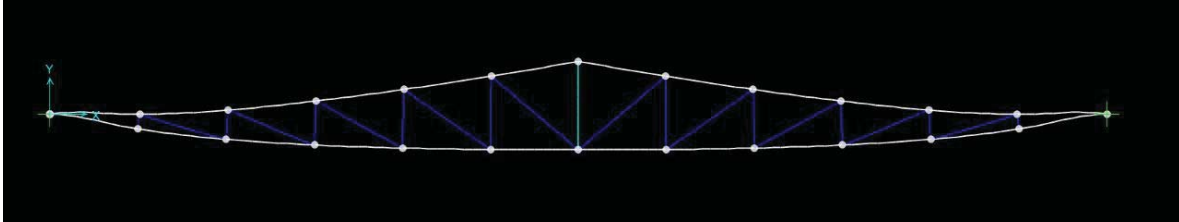


Figura 6.239 Deformada de la armadura

La deformada de la estructura se puede observar en (Figura 6.239), se puede tener una clara idea de lo que sucede sobre la estructura al ser cargada con las solicitaciones antes mencionadas, dichas deformaciones están dentro de un rango aceptable para la estructura como lo podemos observar.

No llegan a apreciarse fallas claras debido a las cargas utilizadas por lo que se puede concluir que la cercha es apta para los requerimientos de seguridad que se necesitan. Además, del material utilizado es el correcto para la necesidad que se requiere.

3. Dificultades de la entrega

La principal dificultad para el correcto análisis de la estructura consiste en la disposición de las fuerzas distribuidas y que la unión entre cada "frames" este indicada en el lugar que se requiere. Además, de la dificultad que se tenga en las medidas de cada sección de la cercha.

Por tanto, de la producción de este equipo se tiene:

Podemos observar que trabaja en la etapa 6 (interpretación), debido a que hace inferencias sobre la correcta disposición del modelo vía el resultado gráfico de la deformada. Aludiendo que el modelo estuvo correctamente cargado y configurado. Respecto del ETM extendido, destacamos la activación de la génesis discursiva, vía la utilización de nociones del análisis estructural, esto es trabajo en el polo del referencial teórico de la ingeniería, esto se evidencia cuando los estudiantes interpretan el diagrama de deformaciones, donde desde su referencial, la deformación es la que permite que la estructura sea funcional.

Respecto de las observaciones de la evaluación realizada por los instructores, cabe resaltar lo que les fue señalado como punto débil:

¡Modelaron la estructura en el plano XY! Error grave, pues el peso de los elementos apunta en dirección $-Z$, es decir, se modeló la cercha como si estuviese "acostada en el suelo" no tan así, pues sólo está apoyada en los

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

extremos. Mucho ojo con esto la próxima vez. Se debe modelar pensando en que la gravedad apunta a $-Z$ (Z hacia abajo). Las cargas no fueron distribuidas en los nodos, sólo se aplicaron directamente a los frames.

De las observaciones anteriores se rescatan dos aspectos: uno relacionado con la dificultad que presentaron al trabajar con un modelo en un sistema tridimensional de coordenadas, comparado con el curso teórico donde en todo momento las estructuras de la clase se trabajaron en un sistema bidimensional. Otro aspecto es relacionado con la noción de que una armadura sólo se debe diseñar bajo cargas en los nodos y el equipo aplicó las cargas en todo el elemento, además de que esa dificultad fue explícitamente reportada por el equipo en su reporte.

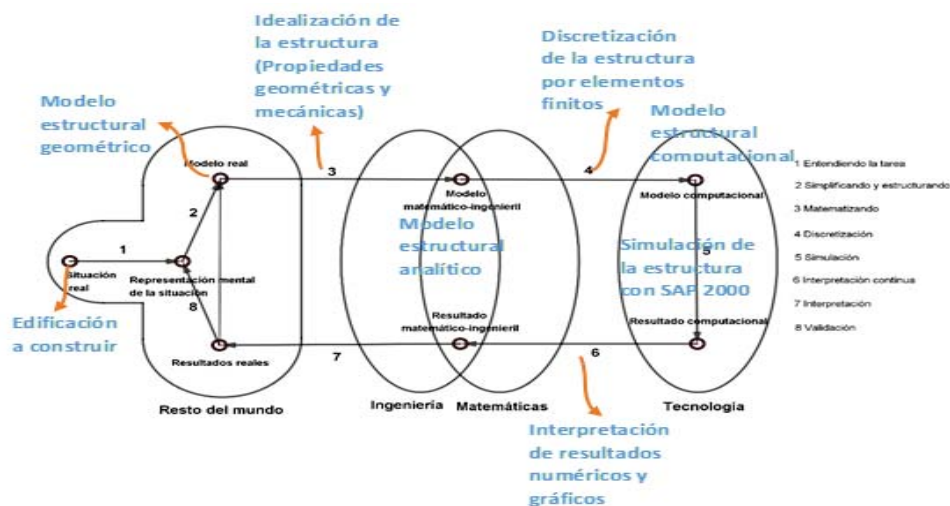


Figura 6.240 CM extendido con tecnología para la entrega 4

Al igual que la consideración tomada para la etapa de 6 interpretación en la entrega 3 del proyecto. Aquí también se consideró que la etapa de 6 de interpretación del CM se correspondería con interpretaciones desde el mundo de la ingeniería.

Como puede observarse en el CM anterior (Figura 6.240), en esta entrega los equipos (salvo sus particularidades señaladas en el análisis) evidenciaron actividad en el ciclo completo, pasando de la construcción de los modelos para la armadura explicados al inicio del análisis de esta etapa (estructural, computacional). Además, de la simulación e interpretación de resultados.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

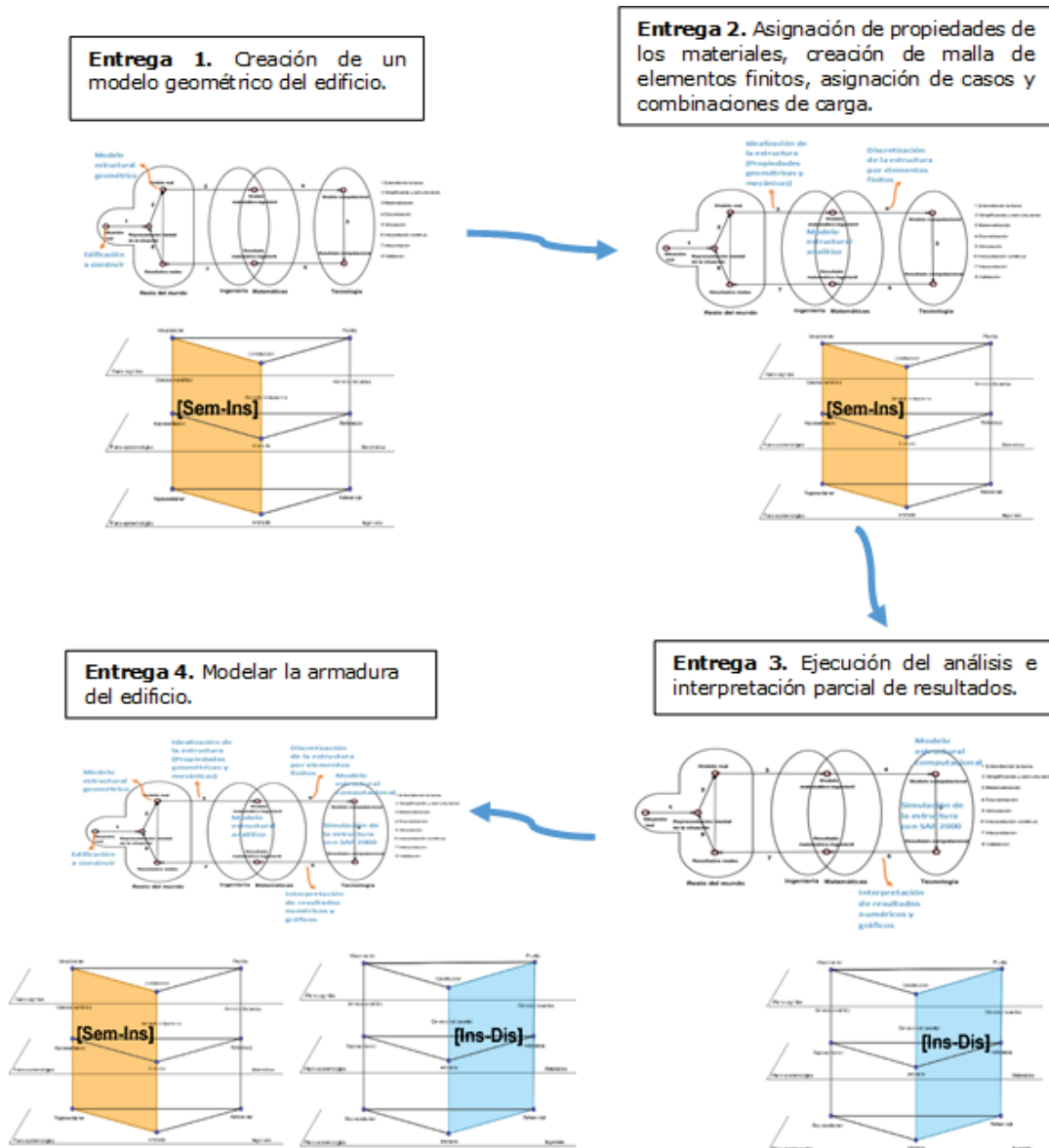


Figura 6.241 Planos verticales activados y CM extendido durante el trabajo con el proyecto

De la figura anterior, podemos representar el trabajo con el proyecto asociado a la activación de los planos verticales correspondiente a cada una de las entregas. Se observa circulación del plano [Sem-Ins] asociado a la entrega 1 y en el plano [Sem-Ins] asociado a la entrega 2. A continuación, hay circulación del plano [Sem-Ins] asociado a la entrega 2 y en el plano [Ins-Dis] asociado a la entrega 3. Para que finalmente en la entrega 4 se generó una circulación entre los planos: [Sem-Ins] e [Ins-Dis].

6.3 Resultados en el ETM extendido personal

A continuación, mostramos los resultados del ETM personal, relacionados con el análisis de un proyecto elaborado por los estudiantes del curso. Posteriormente, mostramos los resultados relacionados con el rol de los modelos que emergieron en el trabajo de los estudiantes con el proyecto.

6.3.1 Resultados relacionados con el trabajo con el proyecto de los estudiantes

El trabajo con el proyecto, el cual fue realizado por los estudiantes del curso de Análisis Estructural, nos da evidencia de un proceso de modelización de una estructura, que a pesar de ser parte de la asignatura, éste se desarrolla de una forma muy particular, el cual es altamente influenciado por el uso de software profesional.

Recordamos que la estructura a analizar por los estudiantes fue un edificio de cuatro niveles y para ellos se conformaron cuatro equipos de cuatro integrantes, todos los equipos tuvieron que ejecutar un trabajo distinto debido que cada equipo se le asignó un funcionamiento de la edificación distinto, a saber: un edificio de oficinas, un hotel, una biblioteca y un edificio habitacional. Ello normó el análisis de la estructura, en cuanto a las cargas que debían resistir el edificio (cargas asociadas a su peso propio, al mobiliario, a las personas, al sismo) así como la contemplación de las normas de construcción que fueron tomadas en cuanto para la resistencia del edificio.

Para la elaboración del proyecto los equipos entregaron un reporte parcializado en 4 entregas. A continuación se muestra lo que se encontró en las entregas.

Para la primera entrega se solicitó el modelo geométrico de la estructura a través del uso del software SAP 2000 (software utilizado en ingeniería para el análisis y diseño de obras civiles como puentes, presas, edificios)

Podemos observar que en esta entrega los estudiantes trabajan con la construcción de un modelo geométrico en el software SAP2000, para ello consideran las dimensiones del edificio, mediante planos estructurales que les fueron proporcionados, se resalta que los planos corresponden a una estructura real la cual fue trabajada en una oficina de Diseño Estructural en la ciudad de Santiago de Chile.

En esta entrega los estudiantes se enfrentan a una situación real, por lo que podemos decir que de acuerdo al ciclo de CM, se realiza la configuración de un modelo real que se conforma desde los planos (arquitectónico y estructural) otorgados del edificio, por lo que identificamos que los estudiantes trabajan en la etapa 1 (comprensión de la tarea) y en la etapa 2 (simplificación y estructuración), observándose por tanto un pasaje de la

situación real al modelo real, a través de la construcción de un modelo geométrico.

A diferencia del curso de Análisis estructural observado en el ETM idóneo, en este proyecto los estudiantes, al verse en la necesidad de configurar ellos el modelo estructural (que de manera general les era presentado a forma de esquema en los problemas trabajados en el curso) presentan una serie de dificultades relacionadas con procesos de instrumentalización, que van desde el entendimiento del software a utilizar hasta complejidades técnicas. Por ejemplo, el equipo 4 menciona dificultades técnicas con el uso del software, al ser esta la primera vez que trabaja con la realización de un análisis estructural para un edificio real:

[Equipo 4]: Lo más difícil a la hora de modelar fue interpretar el plano en AutoCAD, el cual estaba subdividido en secciones de distintas longitudes y que había que tener especial cuidado en las medidas para luego transcribir en el SAP2000. Además, el hecho de trabajar por primera vez con un plano a tal escala resultaba abrumador a la vista. Sin embargo, prestando atención a los detalles pudimos sobreponernos a este problema.

El estudiante entrevistado nos corrobora nuestra idea de que en esta entrega el término “modelar” tiene que ver más con aspectos geométricos, como es la conexión de los elementos de la estructura, y que como todo proceso de modelado, es independiente de que en la realidad esa conexión sea exactamente como se ha llevado a cabo para la modelización en el software. A continuación, se muestra un extracto de la entrevista (semi estructurada) en que se le pregunta sobre el modelado geométrico de la estructura.

[Entrevistador]: ¿Veo como un trabajo con geometría?

[Estudiante]: Claro, cuando uno modela básicamente lo que hace es conectar los elementos, a ver cómo le explico... en el fondo es levantar la estructura en este programa computacional de análisis estructural, entonces se modelan, cuando decimos modelar, básicamente lo que estamos haciendo es dibujar una columna por ejemplo, en el programa estructural.

[Entrevistador]: Porque por ejemplo, yo me refería a lo geométrico, cuando les recomiendan añadir ejes de grilla adicionales que pasen por el centroide de los muros. Se cuidaba que fuera exacto por el centroide.

[Estudiante]: Si, es justamente porque queremos que todo quede bien conectado, a lo que te comentaba denantes, cuando uno hace un modelo estructural, entendiendo como, poniendo la geometría poniendo los elementos en el programa, a veces uno ve los planos y tal vez el eje que está en el plano no pasa por el centroide del muro, porque constructivamente no lo van a colocar así, pero para efectos de hacer el modelo estructural nosotros lo dibujamos en el eje, porque ahí se pueden dibujar los elementos y porque ahí va estar conectado tal vez con otro elemento. Yo diría que es

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

más por simplicidad porque cuando se genere la malla de elementos finitos se pueden producir errores si es que el elemento no está bien insertado.

Para la entrega dos, se solicitó crear y asignar las secciones y materiales correspondientes a cada elemento del edificio según corresponda. Además, generar la malla de elementos finitos para las losas. Asignar casos y combinaciones de cargas, y añadir cargas vivas y muertas al modelado.

Se observa que los estudiantes debían dar dimensiones (dimensiones a las secciones transversales de los elementos estructurales o características geométricas), los cuales corresponden a vigas, muros y losas, además de cargar los elementos con base en el tipo de edificio asignado. Por lo que se observa que se continúa en el trabajo con la etapa 2 del ciclo de modelización (simplificación y estructuración), donde a diferencia de la entrega 1, ahora la simplificación y estructuración corresponde a construir un modelo analítico, el cual será utilizado por el software para simular el análisis estructural.

Ante esto se cargó el edificio de acuerdo a las combinaciones de carga especificadas por la norma de construcción chilena (norma diseño sísmico edificio nch433, diseño estructural: cargas de uso y permanentes y una tercera muestra combinaciones); a saber: cargas muertas, vivas y de sismo, así como sus combinaciones. Además, se realiza la discretización de la estructura a través del mallado por elementos finitos, lo que es necesario para que el software posteriormente realice la simulación. Por lo que aquí observamos trabajo con la etapa 3 de matematización vía software, lo que da origen al trabajo de discretización de acuerdo al ciclo de modelización con tecnología.

Con respecto a la discretización de la estructura, el equipo 3, que trabajo con una estructura destinada a ser Biblioteca, declara:

[Equipo 3]: Como ya sabemos en la primera entrega se habían trazado los distintos elementos que constituyen la estructura, ahora bien, en esta segunda parte del trabajo se crean y asignan las secciones y materiales con las propiedades indicadas para dichos elementos (losas, muros, vigas). Además, se definió y generó el mallado de elementos finitos para las losas y así obtener un mejor análisis de estas mismas al correr el programa, por último se cargó la estructura con distintas combinaciones de carga como según lo solicitado.

Y con respecto a la alimentación al software relacionada con los materiales de construcción, el tipo de edificio y las combinaciones de carga de acuerdo al tipo de edificio, declara lo siguiente:

[Equipo 3]: En cuanto a las cargas asignadas a nuestro grupo (300 kgf/cm^2) en zonas de lectura y pasillo, (400 kgf/cm^2) en zonas de libros, nos parece que es correcto ya que por norma al área de lectura se le asigna menos carga.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

Por otra parte se asignaron cargas de distinto tipo (vivas y muertas) y en diferentes combinaciones a la estructura, estas son:

- $1,4 D$
- $1,4 D + 1,6 L$
- $1,2 D \pm 1,4 E_X + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E_X$
- $1,2 D \pm 1,4 E_Y + L$
- $0,9 D \pm 1,4 E_Y$

Cabe resaltar lo explicado por el equipo 3, donde explica la naturaleza de las cargas aplicadas a su edificio, en este caso destinado a ser un Hotel:

[Equipo 4]: Las cargas utilizadas durante el trabajo fueron de tres tipos, cargas muertas, las cuales se designan como el peso propio de los distintos materiales en la construcción. Cargas vivas, divididas en dos secciones para cada parte del edificio en este caso de 500 kgf/cm^2 y 200 kgf/cm^2 , por último una carga de terremoto la cual esta entregada por defecto en SAP2000.

En esta etapa, la entrevista con el estudiante tesista se enfatiza que las normas de construcción son un aspecto relevante del proceso de modelización, pues las cargas y sus combinaciones provienen de dichas normas.

[Entrevistador]: Pero también veo que ¿afectó en la carga viva? , ya que observo diferentes valores, según el tipo de edificación.

[Estudiante]: Si, pero eso está en la otra norma, lo anterior que comenté lo define la norma que está asociada al análisis sísmico del edificio y lo otro a la norma que está asociado a las cargas que se ocupan. Pero también es un tema de que si es un edificio público puede que tenga más gente, entonces va a tener más carga a diferencia de un edificio habitacional, en ese sentido van enfocadas las cargas que se ocupan. Y en cuanto a $f'c$ tiene que ver con la resistencia del hormigón, esa nomenclatura es la que se usa en la normativa y la diferencia entre el f_c y él $f'c$ es la forma en cómo se ensaya el elemento de hormigón.

Para la entrega tres se solicitó generar el análisis de la estructura completa, y asignar masa sísmica al edificio. Cabe señalar, que el trabajo de asignación de cargas fue relacionado con las proporcionadas por el proyecto, esto debido a que para que los estudiantes puedan realizar las cargas deben cursar asignaturas consecuentes como es diseño estructural y diseño sísmico de edificios.

En esta entrega se observa trabajo con respecto de la simulación de acuerdo al ciclo de modelización. Primero se carga por sismo el edificio, pero debido a que el análisis por sismo esta fuera del alcance de la asignatura de análisis estructural, sólo trabajan con un espectro sísmico proporcionado como dato y se trabaja con la captura de ese dato al software SAP2000. Con respecto

a la simulación, los estudiantes realizan el Run Analysis del software, para de ahí obtener los valores de fuerza axial, fuerza de corte, y momento flector, para cada uno de los elementos estructurales del edificio.

Cabe señalar, que en esta entrega se les solicitó que proporcionaran dos elementos seleccionados por ellos mismos y que comentaran, esto con la finalidad de observar la relación entre la componente teórica del curso con la componente práctica trabajada en el proyecto. "Por tanto de acuerdo al ciclo de modelización, se observa: Paso del modelo real al trabajo con el modelo computacional (a través de correr una simulación del modelo analítico) y paso del modelo computacional a la interpretación de resultados, a través de analizar (de acuerdo a lo solicitado en esta etapa) elementos para cortante máximo y momentos.

Para esta entrega 3, consideramos que un aspecto importante es cómo validar los resultados del análisis, en entrevista con el estudiante tesista, pudimos dialogar al respecto, y se asoció la validación a diversos factores, por ejemplo, el estudiante hacía alusión a realizar una corroboración a mano, lo cual podría resultar prácticamente imposible en cuanto al tiempo de resolución.

Otro aspecto relevante fue que en una etapa de diseño de la estructura (etapa subsecuente a la etapa del análisis de la estructura), el proceso de validación podría tomar mayor relevancia, esto debido a que los valores de esfuerzos de cortante, momento y demás valores de resistencia podría no estar acordes a las normas de su construcción, evidenciándose ello en un sobredimensionamiento de la estructura o en su defecto infra dimensionamiento, lo que como hace ver el entrevistado es crucial en el diseño de una estructura toda vez que por un lado se debe cuidar la seguridad de las personas que habitaran el edificio y por el otro lado está el factor económico (nadie quiere gastar más de lo debido).

[Entrevistador]: Quizá cuando se realiza el diseño de la estructura, ¿un error en el análisis podría tener que ver con el sobre reforzamiento de la estructura por causa de utilizar demasiado acero producto de la demanda del análisis?

[Estudiante]: (32:40) Claro, y si se hace de hecho, puede ser que se haya estimado mal la carga o el modelo contiene un error, pero si, tiene razón, en la fase de diseño uno puede decir si eso me está dando mucho acero o no me resiste.

[Entrevistador]: Entonces hay varias maneras como de decir, si es legítimo o no, o es lógico ese resultado. Porque me imagino que la seguridad en los resultados del análisis se debe revisar si o si, porque por un lado es riesgoso diseñar mal una estructura que no vaya a resistir las cargas y por el otro puede resultar demasiado costos realizar un diseño producto de un análisis por sobre reforzamiento o sobre dimensionamiento. Por lo que a fuerza se debe hacer esa como validación de los resultados del análisis estructural.

CAPÍTULO 6. ETM EXTENDIDO PERSONAL: ANÁLISIS Y RESULTADOS

[Estudiante]: Si, ilas dos! Lo primero es la seguridad estructural, queremos que la estructura sea segura para que no tengan consecuencias negativas las personas o incluso para que no se pierda la inversión.

Para la entrega cuatro, se solicitó dibujar la cercha (armadura) del edificio, con las secciones y materiales que se indican en los planos del proyecto. Añadir una carga en el centro, con un valor de 10 toneladas, en dirección vertical hacia abajo.

En esta entrega se puede observar que los estudiantes tuvieron que realizar prácticamente el mismo procedimiento realizado en las etapas anteriores, es decir, primero tuvieron que realizar el modelo geométrico de la estructura, posteriormente realizaron la asignación de cargas para finalmente correr el análisis en el software.

Si bien la cuarta entrega constó en un proceso donde prácticamente se realizó el mismo procedimiento que las tres etapas anteriores, en la entrevista con el estudiante tesista pudimos evidenciar la importancia de que se haya promovido lo conceptual en la componente teórica del curso.

En este caso, al modelar la armadura los estudiantes tenían que ser conscientes de la forma en la que la estructura debía de ser cargada, esto porque las armaduras se diseñan para resistir sólo esfuerzos axiales producto de la carga únicamente de los nodos.

[Entrevistador]: Una cuarta y última entrega fue modelar una cercha en SAP, aquí el cuestionamiento que te quiero hacer es sobre las consideraciones que utilizaron para modelar la cercha, sobre todo las conexiones o el tipo de carga que se le iba a considerar a la cercha para luego meter el modelo a SAP.

[Estudiante]: (35:19) En este caso particular como es una cercha, los elementos que componen la cercha trabajan principalmente fuerzas axiales, entonces como estos elementos solamente trabajan ese tipo de cargas, cuando yo hago el modelo estructural, que es la representación digamos, tengo que tener las precauciones de que al momento de hacer el análisis estoy seguro de que ese elemento va a trabajar a fuerzas axiales entonces ahí cobra importancia el tipo de unión o la forma en que yo estoy uniendo este elemento en el programa, entonces si esto solamente está trabajando a carga axial *tengo que preocuparme de que los apoyos no generen momento y esos tipos de apoyos por lo general están asociados a apoyos simplemente apoyados.*

6.3.2 Resultados relacionados con el trabajo con modelos

De los trabajos de los estudiantes en la elaboración del proyecto, podemos establecer los siguientes hallazgos:

1. La modelización es observada, y a diferencia de la componente teórica del curso se observa un trabajo más holístico, esto debido a que en

general los estudiantes tuvieron la oportunidad de transitar por las diversas partes del ciclo de modelización. En el sentido de Blomhoj & Hojgaard Jensen (2003), un trabajo holístico con modelización, se corresponde con promover el trabajo con todas las etapas de ciclo de modelización. Sin embargo, ocurre un proceso de matematización vertical a través del uso de software, SAP 2000, por tanto el trabajo con el modelo matemático queda subordinado al software.

Los desarrolladores de SAP2000 señalan que es un software que utiliza el Método de los Elementos Finitos (FEM). Oñate (2009) define FEM:

Es un procedimiento para la solución numérica de las ecuaciones que rigen los problemas encontrados en la naturaleza. Por lo general, el comportamiento de la naturaleza puede describirse mediante ecuaciones expresadas en forma diferencial o integral. Por esta razón, el FEM se entiende en círculos matemáticos como una técnica numérica para resolver ecuaciones diferenciales parciales o integrales. En general, el FEM permite a los usuarios obtener la evolución en el espacio y/o el tiempo de una o más variables que representan el comportamiento de un sistema físico. (p. 1)

2. Podemos identificar la presencia de una diversidad mucho más amplia de modelos intervinientes en el proceso de modelización. En este sentido, coincidimos con la literatura de la especialidad en el análisis de estructuras, al respecto Oñate (2009) señala una diversidad de modelos que guardan relación con los modelos evidenciados en el trabajo con el proyecto de los estudiantes. En la componente teórica del curso, a través de los problemas explicados por el profesor, observamos básicamente dos tipos de modelos, un modelo estructural, el cual era presentado directamente en el problema (no se construía a través de idealizaciones o simplificaciones) y un modelo teórico asociado a nociones matemática, físicas (mecánica de materiales) e ingenieriles. En cambio en el proyecto podemos evidenciar distintos roles de los modelos:

Un modelo geométrico, que básicamente consistió en utilizar el software para crear un modelo sujeto a dimensiones de la estructura, para ello se tomaron mediciones en los planos (estructural y arquitectónico proporcionados). Un modelo estructural/analítico, que básicamente consistió en construir en el software un modelo que representará las dimensiones y asignación de las propiedades físicas y mecánicas de los materiales. Y por último un modelo computacional, esto a través de asignar el mallado por elementos finitos para la estructura.

Por último evidenciamos los modelos arrojados como producto de correr el análisis del software, esto es modelos gráficos y numéricos

de respuesta. En ellos los estudiantes pudieron evidenciar los valores críticos, los cuales son los datos que producto del análisis estructural deben ser proporcionados al diseñador de la estructura.

3. Se observó que los registros figúrales tuvieron preponderancia, esto a través de los registros asociados a los planos y los modelos construidos por los estudiantes vía software (modelos estructurales geométricos, analíticos y computacionales) y registros figúrales asociados a los diagramas solución arrojados por el software producto de la simulación. Se tiene una circulación entre los planos planos del ETM extendido [Sem-Ins] y [Ins-Sem].
4. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de tener una experiencia más cercana a lo profesional, esto al ocupar un software profesional utilizado en oficinas de análisis y diseño de edificios, lo que proporciona más legitimidad al proceso de modelización de una estructura en el curso curricular. En este sentido, corroboramos lo establecido por el profesor en la entrevista, donde nos señala su preocupación por formar estudiantes competentes para el mundo laboral y en donde el uso de software es un componente indispensable en dicha formación académica.

[Entrevistador]: Y por ejemplo, en el ejercicio profesional, como ya me comentó, también se utiliza el software, no sé si pudiera comentar buenas experiencias o desventajas del uso del programa.

[Profesor]: si, el software se utiliza bastante, en cuanto al uso de este programa específico hay que señalar que en Chile, la gran mayoría de los empleadores prácticamente cuando publican algún tipo de llamado a estudiantes en práctica o profesionales Juniors, siempre les exigen el manejo de este programa. Esto genera siempre una presión en el estudiante porque siente que de alguna forma debe recibir esta formación, aparte de la formación conceptual que nosotros les brindamos en clase. La manera que hemos encontrado nosotros para solventar este problema ha sido mediante las ayudantías, donde se les brinda la oportunidad a los estudiantes de formarse con los ayudantes en el uso del programa.

A continuación, mostramos una tabla (Tabla 6.15) que sintetiza los diferentes tipos de modelos trabajados en el proyecto realizado por los estudiantes, así como sus acciones:

Tabla 6.15 Modelos construidos por los estudiantes en el proyecto

Etapas	Acción realizada	Modelo
1	Considerar las dimensiones del edificio proporcionadas a través de los planos estructurales	Modelo estructural geométrico

2	Crear y asignar secciones a cada elemento del edificio según corresponda (Hotel, oficinas, vivienda o biblioteca)	Modelo estructural analítico
2	Asignar casos y combinaciones de carga. Además, añadir cargas vivas y muertas al modelado.	Modelo estructural computacional
3 y 4	Realizar el "Run analysis" del modelo computacional	Modelo gráfico/numérico

5. Se evidencia una multitud de representaciones, las cuales son de gran riqueza para comprender la modelización de una estructura, desde representaciones asociadas a los modelos teóricos presentados por el profesor en el curso (representaciones con modelos gráficos, algebraicos) hasta las representaciones asociadas a los modelos que emergieron en el trabajo de los estudiantes en el proyecto.

Lo anterior nos permite sostener que la modelización en ingeniería es rica tanto en la situación real a modelar como en las representaciones asociadas. Por lo que podría ser considerada en la transposición de la modelización en la clase de matemáticas en la que se consideren situaciones más cercanas a la realidad.

Esto lo evidenciamos en el uso de nociones matemáticas presentes en los modelos y en la riqueza de los registros figúrales con o sin uso de tecnología. Por tanto el uso de matemáticas en ingeniería vía la modelización, permite entender conexiones entre ambas disciplinas. A modo de ejemplo, la noción de función que adquiere sentidos y significados de la ingeniería cuando éstos representan los comportamientos internos o externos de una estructura. Con respecto al uso de tecnología, podemos evidenciar que la relación entre matemáticas e ingeniería se puede enriquecer, no sólo en cuanto al uso de software para la comprensión de nociones de manera aislada sino de manera integrada. Al potenciar el uso de representaciones cuyo dinamismo adquiere sentido en ambas direcciones, en matemática y en ingeniería.

Capítulo 7

Conclusiones

Capítulo 7. Conclusiones

Se presentan las conclusiones de la investigación, la cual estuvo enmarcada en el estudio de la modelización matemática en la formación de estudiantes de Ingeniería Civil. Para ello se trabajó en un estudio de caso, en el programa de formación de Ingeniería Civil, específicamente en estructuras de una universidad chilena. Las conclusiones tratan sobre cómo son los problemas de modelización que son enseñados en un contexto de ingeniería y sus vínculos entre las áreas de formación profesional (análisis estructural) y ciencias básicas (cálculo). Además, de la articulación de los enfoques teóricos utilizados en la investigación, el ETM y el ciclo de modelización. En este estudio se realizó vía el ETM extendido a la ingeniería y la caracterización de la modelización de Borromeo Ferri.

A continuación, se muestran las conclusiones de los resultados de esta tesis, además, se describen las principales limitaciones de este trabajo y las perspectivas de investigación.

7.1 Conclusiones a partir de los objetivos

A continuación, presentamos las conclusiones con respecto al objetivo específico uno

O.E. 1 Analizar problemas de modelización que son enseñados en un contexto de ingeniería.

Los problemas de modelización juegan un importante rol en la formación matemática de los estudiantes de ingeniería, debido a que ellos permiten confrontar y dialogar entre la matemática escolar y la realidad atingente a las diversas ramas de la ingeniería. En este estudio, fueron problemas del análisis de estructuras para la edificación. Ello permite establecer implicancias para la formación de ingenieros desde una perspectiva de un currículo integrado, donde la realidad del estudiante de ingeniería asociada a los problemas que enfrentará como estudiante pero también como futuro profesional, permita enriquecer la formación de un ingeniero con la conexión entre matemática e ingeniería, desde la modelización.

Esta investigación nos ha permitido evidenciar, por un lado, como se legitima la matemática escolar cuando esta es utilizada en la solución de los problemas en un área de especialidad, y por otro lado, en caracterizar dichos problemas. Se pudo observar que la relación matemática escolar versus contextos de ingeniería se caracteriza por el hecho de que los modelos matemáticos presentes en los problemas resueltos están impregnados de significado de la mecánica estructural, y una separación entre estos no es posible, puesto que son indisolubles.

Esta idea de indisolubilidad expuesta anteriormente, se observa cuando uno identifica las hipótesis bajo las cuales se trabaja en la modelización de estructuras; una de ellas, es que la estructura trabaja bajo un comportamiento lineal elástico y en tal suposición la representación gráfica de dicho comportamiento no tiene sólo como finalidad dar cuenta de una función lineal asociada al comportamiento lineal de la curva (bajo la región elástica), sino, dar cuenta que la pendiente del tramo bajo comportamiento lineal representa la elasticidad del material.

La modelización en ingeniería relacionada con la modelización de estructuras para la edificación, considera de manera implícita y explícita a la modelización matemática. Esto se evidenció cuando al resolver los problemas emergieron o se utilizaron modelos matemáticos (muchas veces geométricos-vectoriales), pero siempre en asociación con nociones de ingeniería, es por ello que hablamos de una modelización matemático-ingenieril.

El estudio nos permitió observar una indisolubilidad entre matemática e ingeniería, por lo que damos elementos para legitimar la inclusión de la modelización en la clase de matemática en contextos de una formación de ingenieros. En este sentido, coincidimos con Gainsburg (2006), quien estudió a una comunidad de ingenieros estructurales en su lugar de trabajo y concluye que matemática por sí sola no le permite al ingeniero dar una solución al problema, sino que es un conjunto de normas, juicios y decisiones, donde la matemática está implícita. Por tanto, no hablamos de una modelización matemática, sino de una modelización matemático - ingenieril.

Cuando nos referimos a que la modelización matemática debe estar presente en el eje de Ciencias Básicas, nuestros análisis nos permiten afirmar que es necesario hacer una transposición de la modelización en términos de la disciplina de la ingeniería, lo que permitiría aportar hacia una enseñanza con un enfoque que considere la interacción entre ingeniería y matemáticas. Tratar en la sala de clase la modelización de manera mono disciplinar, esto es, para las asignaturas de matemáticas el objeto de estudio es la matemática misma y para las asignaturas de ingeniería, el objeto de estudio es propio de alguna área de la ingeniería, podría ser un obstáculo (didáctico) para el desarrollo de la modelización en la formación de un ingeniero. Este obstáculo se refiere al tratamiento o enseñanza de la modelización en forma monodisciplinar, que no permitiría al estudiante un trabajo con modelización desde una visión integrada de ingeniería y matemáticas.

De los análisis realizados, podemos afirmar que los problemas presentados son ricos en la producción de modelos de la ingeniería que contienen nociones matemáticas impregnadas de significados propios de la ingeniería.

En este sentido, emergieron modelos relacionados con la noción de función y modelos contruidos para analizar la variación y áreas – asociados al trabajo con funciones– como la derivación e integración de funciones, tales como: funciones de momento, funciones de cortante y funciones de axial.

Nos parece oportuno destacar que las nociones de derivada e integral son saberes disponibles en las Ciencias de la Ingeniería. Lo anterior puede parecer evidente, pero caracterizar problemas de modelización donde estas nociones están presentes nos permite evidenciar el rol que dichas nociones tienen en esta área de la Ingeniería y cómo su uso puede verse de una forma más integrada para el estudiante de ingeniería en sus diversos ejes de formación. Esto se evidenció en el estudio de los distintos tipos de ETM.

La noción de derivada se relaciona con otros modelos, tales como aquellos que justifican las relaciones entre los diagramas de momento y cortante trazados para analizar los esfuerzos en una estructura. Otra relación entre las funciones mencionadas es su utilización en el cálculo de deformaciones verticales y horizontales de la estructura a través de modelos representados por una integral (como la idea de acumular).

Durante el trabajo con el proyecto que se reportó en el capítulo 6 pudimos evidenciar que el software (SAP 2000) juega un rol fundamental en la formación de un ingeniero en lo general pero en específico en la modelización matemática. Pudimos observar que si bien el software invisibiliza la matemática presente, esto no significa que esté ausente sino al contrario, para la solución del problema es fundamental la interpretación de los datos que debe ingresar (provenientes de representaciones, planos, tablas de propiedades de los materiales y de regulaciones asociadas a normas de construcción), la lectura de los resultados que arroja el software y establecer las relaciones con los fundamentos teóricos del análisis de las estructuras que a su vez requiere del uso de nociones matemáticas.

Nos parece de alta relevancia el trabajo de los estudiantes con la simulación computacional. Lo que permite que el estudiante se enfrente a la realidad, comprender datos, interpretar gráficas y diagramas que arroja el programa e interpretarlos en relación a los modelos estudiados en el curso con sus propios conocimientos para dar respuesta al problema. Cabe señalar, que la construcción geométrica que arroja el software es lo que los estudiantes reconocen como *modelar*, esto significa, estructuración y simplificación de los datos proporcionados en un plano arquitectónico y estructural relacionados con datos específicos de los materiales que se usan para satisfacer la exigencia de la estructura cuando está en funcionamiento y de acuerdo a las regulaciones de los entes estatales.

Los modelos identificados en la modelización de la estructura fueron: Modelo estructural geométrico: son conformados aspectos relacionados con la geometría de la estructura. Modelo estructural analítico: que considera

propiedades mecánicas, condiciones de carga, tipos de apoyo a los cuales se somete la estructura. Modelo computacional, a través del mallado del modelo estructural por la técnica de elementos finitos.

Durante el trabajo de los estudiantes con el proyecto realizan el proceso de matematización vertical vía el uso de software; tanto el profesor como el estudiante tesista nos hicieron hincapié en la importancia de promover un aprendizaje conceptual de las nociones tanto del análisis estructural como las nociones matemáticas involucradas, esto con la finalidad de realizar un uso reflexivo y responsable del software. Por tanto, nos parece fundamental que así mismo, en la clase de matemáticas y en un proceso de modelización el software sea utilizado. Reconocemos que los fines pragmáticos y epistémicos serían distintos, pero con un mismo fin para ambas áreas de formación, es decir, su uso adecuado en la modelización.

El trabajo con modelos realizado tanto en la componente teórica como en la componente práctica del curso, nos permite evidenciar una amplia diversidad de emergencia de modelos cuando estos son parte de la formación de un ingeniero. Por un lado, en la componente teórica, están los modelos estructurales (vigas, marcos, armaduras) y su relación con modelos teóricos asociados a los métodos de solución de la estructura (equilibrio, funciones asociadas a esfuerzos externos, deformación). Por otro lado, en la componente práctica del curso, se observaron modelos estructurales más complejos en cuanto a que se correspondieron a una estructura completa (un edificio) y su relación con su solución vía la simulación con software.

O.E. 2 Indagar posibles vínculos entre los ejes de Formación Profesional (Análisis Estructural) con las Ciencias Básicas (Cálculo) en ingeniería en un contexto institucional.

Cuando nos propusimos indagar en los vínculos entre la disciplina del análisis estructural y la matemática, pudimos identificar objetos matemáticos presentes en ambas disciplinas y el uso que se le daba a estos en el contexto de la disciplina de ingeniería; particularmente en la clase de análisis estructural y su relación con nociones de cálculo diferencial e integral. A continuación, se presenta las conclusiones con respecto a este objetivo en dos direcciones, una relacionada con los objetos matemáticos asociados a los modelos presentes en la solución de los problemas y otra relacionada con la importancia del uso de contextos extra matemáticos utilizados en la clase de ingeniería y que pueden relacionarse con la clase de matemáticas.

Objetos y/o nociones matemáticas

Desde una cuestión metodológica, se decidió analizar los problemas donde emergieron objetos del Cálculo Diferencial e Integral, como son el uso de las nociones de función, derivada e integral. Dichas nociones aparecieron en el trabajo con problemas pertenecientes a modelos relacionados con la resistencia y deformación de una estructura.

Cabe señalar, que además de esas nociones surgieron otras nociones provenientes del Algebra Lineal, como matrices para la solución de problemas correspondientes a modelos que relacionan vectores fuerza con vectores de desplazamiento, generadas debido al alto número de ecuaciones que se corresponden con el tipo de estructuras estáticamente indeterminadas. Esto se produce cuando las ecuaciones de equilibrio que corresponden a la estática ya no son suficientes, por lo que hay necesidad de establecer para su solución otro tipo de ecuaciones, relacionadas con traslaciones o rotaciones de la estructura.

Se identificó que la derivada y la integral tuvieron los siguientes usos:

Para la derivada se identificaron situaciones correspondientes a tres usos:

1) A partir de la función de momento ($w(x)$) la derivada permite calcular la función de cortante y la función de carga. En este primer uso notamos una conexión entre, la primera y segunda derivada de una función, esto cuando se relacionan las funciones de momento con las funciones de cortante y a su vez con las funciones de carga respectivamente. Entonces, la primera derivada de la función de momento determina la función de cortante, y la segunda derivada de la función de momento determina la función de carga. 2) Para comprender la curvatura de los diagramas de momento (M), cortante (V) y carga (q), a través de la variación de la pendiente de los diagramas en los puntos pertenecientes a su dominio, utilizando la interpretación geométrica de la derivada. 3) Para calcular posibles valores máximos y/o mínimos de momento o de corte, aplicando el criterio de la primera derivada.

Para la integral (como acumulación de área) se identificaron tres usos: 1)

Para la determinación de la carga puntual equivalente asociada a cargas distribuidas variables. 2) Para el cálculo de las deformaciones en la estructura (viga o marco) se tiene: a) El cálculo de deformaciones verticales

$\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$ emerge un modelo de función como parte del integrando, el que está compuesto por la relación entre momento real (M), el momento causado por una fuerza virtual¹ unitaria aplicado en el punto donde se desea calcular la deformación (m) y la rigidez a la flexión de la estructura (EI). b)

Deformaciones angulares $\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$, donde emerge un modelo de función como parte del integrando, compuesto por la relación entre momento real (M) asociado a la estructura real (la que se proporciona en el problema), momento causado por un momento virtual unitario el cual se asocia con la asignación de un momento de valor uno (o valor unitario),

aplicado en el punto donde se desea calcular la deformación (m) y la rigidez a la flexión de la estructura (EI).¹⁶

Con base en los modelos matemáticos-ingenieriles evidenciados se resaltan diferentes estatus que tiene el modelo matemático asociado a una función, 1) Por una parte la función (algebraica en este caso) representa las funciones de corte $V_{(x)}$, momento $M_{(x)}$ y axial $N_{(x)}$ de un elemento estructural, 2) La función de momento² y cortante³ como información útil para la justificación analítica de las relaciones diferenciales entre los diagramas de momento, cortante y carga sobre la estructura. 3) Las funciones de momento real y virtual, útiles en la determinación de las deformaciones verticales $\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$ y deformaciones angulares $\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$ en un modelo de viga o de marco y 4) La función como el resultado de solución por doble integración de la ecuación diferencial $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$, donde la función $v = f(x)$ proporciona la forma exacta de la curva elástica de un elemento que se deforma, donde a su vez podemos notar de nuevo el uso de la función de momento interno M .

Destacamos la posibilidad de trabajar en contextos extra matemáticos (e interdisciplinarios) en la clase de matemáticas, esto al evidenciar los modelos matemático-ingenieriles que emergieron asociados a modelos con funciones y modelos asociados con la derivada e integral.

En los problemas seleccionados (explicados por el profesor) identificamos modelos que pueden contribuir a la formación matemática en cursos de Cálculo para la formación de ingenieros. Tales como los modelos de funciones de momento y funciones de cortante en el trabajo con estructuras tipo viga o con el modelo donde la integral entra en juego para el cálculo de deformaciones en estructuras. Además, se tiene que para conectar los diagramas de momento y cortante se hace uso de relaciones diferenciales entre las funciones de momento y de cortante. También, en el caso de la identificación de valores máximos de momento y de cortante aparece el uso de la derivada.

Uso de contextos de la disciplina de ingeniería para la clase de matemáticas

El análisis de los problemas vistos en la clase de análisis estructural nos permitió, por una parte entender vínculos entre matemáticas e ingeniería y

¹ Hibbeler (2012) señala que lo virtual (en este caso fuerza y momento virtual) se asocia con imaginario porque no es parte de la carga o momento real. Entonces, se asocia momento virtual a momento valor uno y fuerza virtual como fuerza valor uno. Ambas son aplicadas en el punto donde se desee determinar la deformación angular o vertical, respectivamente.

² Corte: reside en el plano del área y es causado por cargas que tienden a hacer que dos segmentos de un cuerpo se deslicen entre sí. ³ Momento: es causado por cargas que tienden a flexionar el cuerpo con respecto a un eje que está dentro del plano del área. (Hibbeler, 1998, p. 7)

por otra parte nos da directrices para establecer implicancias amplias con la educación matemática.

Cuando hablamos de contexto nos referimos a los problemas relacionados con modelar estructuras con la finalidad de que estas fueran seguras, lo cual desde la mecánica de materiales se refiere a nociones de resistencia y deformación. Respecto de la modelización matemática se trata de contextos extra matemáticos cuyo problema es que la edificación sea segura y resistente.

Como se evidenció, en la modelización el conocimiento extra matemático juega un rol fundamental, en la medida que permitió comprender el modelo real, llevar a cabo el proceso de matematización horizontal, que permitió la construcción del modelo matemático-ingenieril y trabajar con el mismo para obtener los resultados del trabajo con el modelo para finalmente dar una respuesta al problema.

Por tanto, cuando hablamos de que la modelización matemática debe estar presente en el eje de Ciencias Básicas, nuestros análisis nos muestran que ello es posible, considerando una transposición de la modelización de situaciones en contextos afines a la ingeniería a la modelización matemática en la clase de matemáticas. Esto, permitiría afrontar el (posible) obstáculo que se presenta cuando se trabaja de manera mono disciplinar, donde, para las asignaturas de matemáticas, el objeto de estudio es la matemática misma y para las asignaturas de ingeniería, el objeto de estudio es propio de alguna área de la ingeniería, en este caso, el análisis de estructuras. Así, se haría un aporte hacia una enseñanza con un enfoque que considere la interacción entre ambas disciplinas (o interdisciplinar).

En este sentido, coincidimos con Fred & Bergsten (2016), quienes estudiaron a modeladores profesionales y establecieron la importancia de la transposición de la modelización para la formación matemática escolar. Reconocen la importancia del apoyo computacional y la comunicación entre constructores (modelador), otros expertos y el cliente, este último a quien se hace el trabajo. La transposición de la modelización matemática debiera contener los principios de la disciplina pero también con los problemas "reales" y no artificiales que se presentan en el aula en los cursos de matemáticas.

En la clase de matemáticas es necesario que se promueva la modelización, simplificar variables relevantes para el fenómeno, aprovechando los multiregistros que se pueden conectar con significados pertenecientes a un mundo extra matemático y con especial énfasis en contextos disciplinares de las ciencias de la ingeniería; cuestión que consideramos clave para que la modelización se trabaje de manera transversal en los diversos ejes de formación en el currículo de ingeniería. Observamos, que una enseñanza

interdisciplinar es posible de abordar y la modelización matemática juega un rol clave.

OE3. Articular la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático y el ciclo de modelización para el estudio de problemas de modelización.

Con respecto al curso analizado, los problemas a modelar, a pesar de ser del mundo real, perteneciente al campo de los ingenieros, en su gran mayoría fueron presentados con una simplificación del problema con variables claras o limpias. En los problemas no se cuestionaba la causa de la carga y se presentó el modelo real ya idealizado, dicho en términos teóricos, estos surgen desde la fase 2 (*simplificación de la tarea*) del ciclo de modelización.

Por otro lado, los diagramas (macro-registro) juegan un rol protagónico para la modelización, pues permitieron una matematización horizontal y con esto un diálogo entre el dominio de la matemática y el dominio de la ingeniería. Los problemas analizados en el curso (clases, ayudantías y evaluaciones) se presentan con estos diagramas. En términos teóricos desde el ETM, estos diagramas (registro figural) pasan a ser artefactos e instrumentalizan ambos dominios: la matemática y la ingeniería.

Cabe señalar, que en esta investigación hemos podido validar el modelo teórico ETM extendido propuesto por Trunkenwald y Laval (2019) y Moutet (2017) con datos empíricos. Evidenciamos que las situaciones de modelización pueden ser entendidas eficientemente por esa adaptación a la teoría del ETM en otra disciplina. Con respecto a las génesis se tiene lo siguiente:

La génesis semiótica nos permitió comprender y analizar el trabajo con los signos propios de la ingeniería y cómo estos se operacionalizaron en procesos de visualización a través de su paso por signos de la matemática, como es el caso de la visualización de funciones que permitió coordinar las representaciones analíticas de las funciones de cortante y funciones de momento con los diagramas respectivos.

La génesis instrumental, permitió observar la emergencia de artefactos tanto simbólicos como digitales que desde la ingeniería y conexión con la matemática, permitieron la instrumentalización de dichos artefactos y construir funciones asociadas a reacciones externas para el caso de artefactos simbólicos o modelar geométrica y analíticamente estructuras para el caso del uso de artefactos digitales.

Fundamental nos pareció el rol del software, los diagramas y figuras emergentes de la simulación computacional que permitió la génesis instrumental, con la instrumentación realizada por los estudiantes, enfrentando al estudiante con sus conocimientos (ingenieriles y de la

matemática) para dar respuesta en construir una edificación segura para que sea habitable, produciéndose la instrumentalización del software ocupado.

Con respecto a la génesis discursiva, se trabajó con la prueba en un sentido ingenieril, es decir, se justificaron procedimientos que emergían desde la teoría de la ingeniería de estructuras y que en algunas ocasiones pasaron hasta la matemática para que emergiera la prueba. Así, la justificación de los valores máximos de momento flector en un elemento estructural, visualizado a través de diagramas fue justificado desde nociones de cálculo, como criterio de la primera derivada para la determinación de valores críticos para determinar valores máximos (o mínimos).

En esta investigación nos vimos en la necesidad de extender el CM pasando del mundo real al mundo ingenieril. Pare ello, nos basamos en el CM (Borromeo Ferri, 2006) dado que los problemas a modelar no siempre se matematizaba en forma vertical sino que emergían tratamientos y definiciones propias del *Mundo de la Ingeniería*. Nos parece que este es un aporte teórico para futuras investigaciones donde la interdisciplina esté presente. Así mismo, hemos propuesto un CM extendido con tecnología basado en el CM (Meister/Borromeo Ferri, 2018, citado en Borromeo Ferri, 2018).

La interacción y diálogo teórico entre el ETM extendido y el CM nos permite aportar con una herramienta teórica-metodológica para estudiar problemas de modelización en la formación de ingenieros, lo cual es de vital importancia por lo comentado anteriormente, donde la modelización matemática es un articulador de los ejes de formación y dicha interacción requiere de nuevos estudios basados en la investigación.

7.2 Conclusiones generales

Observamos que en la componente teórica del curso, el proceso de construir un modelo real (etapas 1 y 2 de CM), en general no se trabaja debido a que los problemas a modelar se presentan con simplificaciones y estructuraciones previamente realizadas. A diferencia de la componente práctica del curso (ayudantía), donde estás etapas si son trabajadas, pero en esta ocasión, la etapa de trabajar matemáticamente con un modelo queda subordinada al uso de software (SAP2000).

El software invisibiliza el proceso de matematización al funcionar como caja negra en el sentido de las operaciones matemáticas que realiza para el análisis del modelo estructural. En este hallazgo discrepamos con Gainsburg (2013), quien encontró que la instrucción para los cursos de ingeniería la modelización no era promovida explícitamente, por el contrario, en nuestros hallazgos evidenciamos una enseñanza explícita de la modelización, aunque

como hemos mencionado, de manera parcelada; esto al observar un trabajo de modelización más atomístico en la componente teórica del curso y un trabajo más holístico en la componente práctica del curso.

En términos teóricos, los resultados de la investigación nos permitieron establecer relaciones entre los enfoques teóricos ETM y el CM; esto al estudiar problemas en un contexto institucional (y con un enfoque cognitivo). Pudimos evidenciar que las relaciones entre el trabajo matemático y el trabajo en ingeniería pueden ser caracterizados considerando ambos enfoques. Sin embargo, así como hemos utilizado un ETM extendido, también propusimos una extensión al CM, dado que el proceso de matematización horizontal no siempre lleva a una transición entre el modelo real (mundo real) y el modelo matemático (*Mundo Matemático*), algunas ocasiones es necesaria una transición entre el modelo real y el *Mundo de la Ingeniería*.

La necesidad de proponer un CM extendido surgió porque los problemas analizados son problemas cuya finalidad es la enseñanza de la modelización en ingeniería, a diferencia del CM que fue diseñado y utilizado para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

En el ETM personal al establecer relaciones entre las etapas del proyecto realizado por los estudiantes hubo necesidad de usar el CM con tecnología a las situaciones de ingeniería, el cual también fue adaptado.

Por lo que, los CM ya sea los utilizados en esta investigación u otros, cuya finalidad sea la enseñanza y aprendizaje de la matemática, deben ser readaptados, cuando sean utilizados para analizar situaciones de modelización en un contexto de especialidad ajena a la matemática (situaciones de ingeniería, economía, administración, entre otras). El uso del CM con tecnología con un software profesional de la disciplina requiere de la discretización, simulación e interpretación sean entendidas desde la especialidad y es un desafío en las futuras investigaciones con un enfoque interdisciplinar.

Es importante señalar que la extensión al ETM nos permitió estudiar relaciones no sólo entre el mundo de la matemática sino también, nos permitió estudiar otras etapas pertenecientes al mundo extra matemático. Por tanto, el ETM extendido a la ingeniería muestra coherencia, al permitir la interacción con el ciclo de modelización en el mundo extra matemático y el matemático. Además, metodológicamente hablando, esto potencia un futuro diseño de tareas de modelización usando (por ejemplo) una Ingeniería Didáctica.

En cuanto al ETM extendido idóneo, pudimos observar la fuerte presencia del registro figural a través de diagramas asociados a los modelos reales y como eran presentados los problemas. Además, de los registros figúrales asociados a los diagramas construidos en el proceso de solución del

problema, esto es, diagramas de corte de las secciones de la estructura y diagramas de cuerpo libre y diagramas de solución. Se observó una circulación completa entre todos los planos que lo componen.

Con respecto al ETM extendido personal del estudiante; en la evaluación se observó una correspondencia de los registros mencionados en el idóneo así como de la circulación y planos activados; por lo que se puede establecer coherencia con el ETM idóneo. En cuanto al trabajo con el proyecto, los registros figúrales emergieron en tres formas: registros figúrales asociados a los planos del edificio, registros figúrales asociados a los modelos (modelos estructurales geométricos, analíticos y computacionales), y registros figúrales asociados a los diagramas proporcionados por el software producto del análisis. Además, se tuvo presencia del registro tabular, también producto del análisis del software. Se observó una circulación entre los planos [Sem-Ins] y [Ins-Dis] del ETM extendido. Sin embargo, en el trabajo con el software, se observa una preponderancia de la génesis instrumental, la cual es el hilo conductor (o génesis que coordina) del trabajo con el proyecto vía el uso del software.

Cabe señalar, con respecto de la complementariedad de los procesos de modelización evidenciados es coherente la posibilidad de trabajar con situaciones académicas, en el sentido de Niss & Hojgaard Jensen (2019), quienes señalan la importancia de la modelización en contextos institucionales a través de situaciones académicas. Dichas situaciones posibilitaron observar la modelización en las siguientes dos direcciones, en el sentido de Blomhoj & Hojgaard Jensen (2003).

1. De manera atomística (trabajo con algunas etapas del ciclo, principalmente con la matematización y el trabajo matemático con modelos) como fue el caso de las situaciones analizadas en la componente teórica del curso.
2. De manera holística, como fue el caso del trabajo de los estudiantes durante la componente práctica del curso, donde se observó la modelización de una estructura en un aspecto más global. Sin embargo, no es suficiente con las investigaciones que se han realizado establecer la eficacia de uno u otro enfoque.

Nos parece oportuno y una interesante oportunidad para la formación del ingeniero que la modelización atomística y holística sea promovida y cohabiten en un curriculum. A pesar, que Kaiser & Brand (2015), señalan que aún faltan más investigaciones experimentales que corroboren la eficacia de la complementariedad o uso por separado de los enfoques atomístico u holístico.

Pudimos evidenciar que la modelización matemática cumple dos roles fundamentales: el académico, que se corresponde a los conocimientos propios de la malla curricular, y el profesional en que la modelización

(considerada explícita o implícitamente) es importante en el área laboral de un ingeniero.

Por tanto, proponemos a la modelización matemática y a la modelización matemática-ingenieril como un articulador de las diversas áreas de formación del ingeniero, al permitir la conexión entre las áreas de Ciencias Básicas, Ciencias de la Ingeniería y Formación Profesional. De esta manera la modelización no debe ser considerada de manera trivial, pues para que se considere como un articulador, se precisa un profundo trabajo interdisciplinar entre las diversas áreas de formación y no mono disciplinar.

Como hemos señalado, en el presente trabajo de tesis nuestra preocupación se centró en una formación de ingenieros que contribuya tanto a su rol como estudiante, pero también como futuro profesional. Es por ello, que la investigación se desarrolló en torno a la modelización, debido a que esta permite fomentar el uso y dar un sentido de la matemática en la formación de un profesional

De acuerdo a nuestros análisis podemos hablar de dialécticas entre los modelos, esto es: en la componente teórica de la asignatura, se observó una dialéctica entre modelos estructurales y modelos teóricos correspondientes a los métodos de solución de los problemas. En la componente práctica del curso, fueron diferentes las dialécticas de modelos estructurales y pasaron desde ser geométricos, analíticos y computacionales, pues en esta ocasión al usar un software profesional surgieron modelos que evolucionaron en el proceso de modelización de la estructura.

Lo anterior, nos da elementos para sostener que no es trivial la transposición del enfoque de modelización en la formación en Ciencias Básicas y que dicha trasposición debe atender seriamente la naturaleza de las situaciones que se modelizan en ingeniería. De esta manera podemos promover de una mejor manera y desde un punto de vista transversal, la modelización para la formación matemática de ingenieros.

Destacamos el rol que cumplieron las gráficas en los modelos que se trabajaron, toda vez que las representaciones gráficas fueron macro registros que se utilizaron para la presentación e interpretación de resultados.

Esta investigación aporta al sistema educativo que guarda relación con la formación en ingeniería, y con base en la evidencia sobre el rol *articulador* de la modelización matemática como una oportunidad para el dialogo y el diseño curricular con una perspectiva interdisciplinaria. Desde un punto de vista institucional nos parece fundamental que la clase de matemática y la clase de ingeniería dialoguen con el objetivo de mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la ingeniería.

7.3 Limitaciones de la investigación

La investigación se realizó en el área de formación profesional (parte de las tres áreas fundamentales en la formación en ingeniería), específicamente en el contexto de un curso. El estudio no abordó la componente de práctica profesional. Sin embargo, se obtuvo información relacionada con el rol de la modelización para dicha componente, a partir de entrevistas.

Si bien, en concordancia con la teoría ETM las fuentes de información de datos consistieron en información relacionada con el ETM idóneo (profesor en un escenario de clases), personal (trabajo con proyecto en estudiantes) y de referencia (libros de ingeniería y de cálculo para el área de matemáticas). Cabe señalar que con respecto al ETM idóneo, los datos y posterior análisis, se realizaron considerando un fuerte énfasis al rol del profesor en la sala de clase.

Del trabajo con el tesista, se dejó fuera lo relacionado con el análisis sísmico de un edificio de hormigón armado. En su tesis utilizó software profesional y trabajó con un edificio real ubicado en la ciudad de Quilpué, V Región Valparaíso, Chile. Con ello el tesista considera una ampliación a los modelos estructurales trabajados en la asignatura de Análisis Estructural, a modelos que consideran los efectos de un sismo, vistos en la asignatura de Ingeniería Sísmica. Es decir, pasó de considerar modelos que se rigen por un comportamiento estático a trabajar con modelos que se rigen por un comportamiento dinámico (fuerzas de sismo).

Además, si bien buscamos una relación entre los diversos ejes de formación en ingeniería, por cuestiones metodológicas (relacionadas con seleccionar un área específica de la fuente de datos para el caso sobre el cual se decidió investigar) sólo se trabajó en el área de formación profesional, y no en las otras (formación en Ciencias Básicas y formación en Ciencias de la Ingeniería. Sin embargo, desde el ETM de referencia se estudiaron contenidos pertenecientes a la formación en Ciencias Básicas (Cálculo) y Ciencias de la Ingeniería (Mecánica de materiales).

El estudio del ETM de referencia en ingeniería se limitó a la presentación de nociones claves relacionadas con el análisis de estructuras, esto en tres direcciones: nociones de matemáticas, nociones de mecánica de los materiales y nociones propias de análisis de estructura; y visto así, puede ser entendido como una aproximación al ETM de referencia. Respecto del ETM idóneo, una debilidad fue que éste estuvo enfocado exclusivamente en la explicación de un profesor en una sala de clase de ingeniería y no se consideraron las interacciones del profesor con los estudiantes.

Este trabajo se centró en las complejidades asociadas a la comprensión y operacionalización del ETM extendido, además, de las complejidades asociadas a la interacción entre el ETM extendido y el Ciclo de Modelización. El cual en un principio no sólo estuvo asociado a diversas nociones

matemáticas sino también con diversas nociones de la ingeniería. Dado ello, en este trabajo no se identificaron los paradigmas. Sin embargo, se considera que como continuación se puede trabajar en la construcción de paradigmas para ingeniería en el marco del ETM extendido.

7.4 Perspectivas de la investigación

Estudiar y analizar contextos de modelización en estructuras para la edificación, través del estudio de estructuras estáticamente indeterminadas (hiperestáticas) modelos que involucren nociones de álgebra lineal: solución de un sistema de ecuaciones por matrices, vectores, valores propios y vectores propios, en el diseño sismo resistente de las estructuras.

El trabajo realizado se puede replicar en otras áreas de formación adicionales a la estudiada en este trabajo (hidráulica, cimentaciones, carreteras, resistencia de suelos y rocas) e incluso otras ingenierías, con la finalidad de estudiar la emergencia de otros tipos de modelos que pudieran, eventualmente, ampliar la visión sobre los vínculos entre matemáticas e ingeniería.

En términos teóricos, validar el ETM extendido con datos empíricos ya sea de otros sub dominios de la ingeniería o bien con otra disciplina. Con respecto a la interacción entre el ETM extendido y el CM, realizar más investigación tanto teórica como experimental. Además, con la finalidad de fortalecer la interacción teórica, se hace necesario que se realicen extensiones al CM, a través de afinar etapas que pertenezcan a situaciones de la ingeniería donde la conexión entre ambos mundos (el extra matemático y de la matemática) no sea evidente; esto es, que el proceso de matematización horizontal, en algunas ocasiones puede no establecer un vínculo entre el contexto extra matemático y la matemática, sino entre el mundo real y la disciplina en estudio (ingeniería en nuestro caso).

Considerar las relaciones que se puedan establecer entre el rol de la modelización en el ejercicio profesional versus la modelización estudiada en esta investigación (modelización escolar-institucional). Esto con la finalidad de reforzar las implicancias educacionales establecidas en la investigación.

A través de esta investigación, se cuenta con mucha información y datos desde la especialidad que nos permiten diseñar propuestas de intervención en dos direcciones: 1. Construir un espacio de trabajo matemático idóneo potencial, con foco en la modelización, para ser trabajado en la clase de matemática (Cálculo diferencial e integral y del Álgebra Lineal) en consideración a los resultados de la presente investigación. 2. Estudiar el espacio de trabajo en modelización cuando los estudiantes resuelven los problemas diseñados en el espacio de trabajo idóneo, nos parece un desafío posible que amerita continuar.

Bibliografía

Bibliografía

- Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.
- Alpers, B. (2017). The Mathematical Modelling Competencies Required for Solving Engineering Assignments. In G.A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 189-199). Cham: Springer.
- Alpers, B. (2016). Summary of the discussion on "Mathematical Competence", at the 18th SEFI Mathematics Working Group Seminar, Gothenburg, Sweden.
- Alpers, B.A., Demlova, M., Fant, C.H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L., Olsson, B., Robinson, C., & Velichova, D. (Eds.) (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education. A report of the mathematics working group*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).
- Alpers, B. (2010). Summary of the discussion on "Which mathematical modelling competencies are important for engineers and how should they be taught?" at the 18th SEFI Mathematics Working Group Seminar. Wismar, Germany.
- Arrieta J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral, CINVESTAV-IPN, México.
- Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48.
- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 13-33.
- Artigue, M. (1991). Chapter 11: Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 167-198. Dordrecht: Kluwer academic Publishers. 10.1007/0-306-47203-1
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 135-149.
- Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (32), 13-15.
- Biembengut, M. (2016). Modelaje matemático en la educación brasileña: Historia de las ideas e ideas de las historias. En Arrieta y Díaz (Ed.),

- Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa.* (pp.89-108). México: Editorial Gedisa.
- Bissell, C. & Dillon, C. (2000). Telling tales: Models, Stories and Meanings. *For the Learning of Mathematics*, 20(3), 3-11.
- Bliss, K., Fowler, K. & Galluzzo, B. (2014). *Math modeling: Getting started & getting solutions*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM): Philadelphia, USA.
- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topic Studio Group 21* (pp. 1-19). Monterrey, México.
- Blomhoj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications* 22(3), 123-139.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12 th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling. Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. & Leib, D. (2005). "Filling up"-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. *In proceeding for the CERME4, WG3 Modeling and Applications* (pp. 1623-1633).
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners Modeling Behavior. *Journal für Mathematikdidaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College*, 4, 18-24.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Suiza: Springer International Publishing AG. [10.1007/978-3-319-68072-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9)

- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico, *Educación Matemática*, 18(2), 37-74, Distrito Federal, México: Grupo Santillana México.
- CACEI. (2014). *Marco de Referencia para la Formación de los Programas de Ingenierías*. Cd. de México, México.
- CACEI. (2018). *Marco de Referencia del CACEI en el Contexto Internacional (Ingenierías)*. Cd. De México, México.
- Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11, 55-101.
- CNA (2016). *Criterios de evaluación para carreras de ingeniería*. Santiago-Chile. Recuperado de: <http://www.cnachile.cl>
- Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: El eslabón de la matemática y el cotidiano. En Arrieta y Díaz (Ed.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 139-162). Cd. de México, México: Editorial Gedisa.
- Cosmes, S. (2012). *Modelación de fenómenos mediante funciones lineales*. Tesis de maestría. Universidad de Sonora, México.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267. <https://doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0>
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Escobar, J. (2007). *Elaboración de notas de la clase de la asignatura de análisis de estructuras II*. Tesis de licenciatura. Universidad Industrial Santander. Bucaramanga, Colombia.
- Flores, R., Valencia, M., Dávila, G., García, M. (2008). *Fundamentos del Cálculo*. Hermosillo, Sonora, México: Editorial Garabatos.
- Frejd, P. & Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 11-35. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9654-7>

- Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures, *Mathematics Education Library*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 133-150. <https://doi.org/10.1007/BF00305618>
- Fonseca C., Casas J.M., Bosch M., Gascón J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González M. J., González M.T., Murillo J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.
- Gainsburg, J. (2013). Learning to Model in Engineering. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 15, 259-290. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.830947>
- Gainsburg, J. (2006). The Mathematical Modelling of Structural Engineers. *Mathematical Thinking and Learning*, 8, 3-36. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0801_2
- García F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis Doctoral, Universidad de Jaén, España.
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 105-123. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>
- Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries. In G. Kaiser (Ed.), *The Proceedings of the 13 Th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-49). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1
- Godwin, H. & Ikwuchukwu, A. (2013). Engineering Mathematics Issues In University Education: A review. *International Journal of Engineering Research and Technology*, 2(6), 522-551.
- Hellblom, O., Wedelin, D., Adawi, T. (2016). On three alternative approaches to teaching mathematics. In B. Alpers, U. Dinger, T. Gustafsson, D. Velichová (Eds.), *Proceedings of 18th SEFI Math Working Group Seminar*, Gothenburg, Sweden.
- Hibbeler, R. (2012). *Análisis Estructural* [Structural Analysis]. México DF, México: Pearson Educación. 8va edición.
- Hibbeler, R. (1998). *Mecánica de Materiales* [Mechanics of Materials]. Edo. De México, México: Prentice-Hall. 3ra edición.

- Hitt F. y Cortés J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete).
- Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of CERME 6*, Lyon.
- Kaiser, G. & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. In G.A. Stillman, W. Blum y M.S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129-149). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kassimali, A. (2001). *Análisis Estructural*, México DF, México: Thomson Editores. 2da edición.
- Kleiner, I. (1987). Evolution of the function concept. *The College Mathematics Journal*, 13(4), 282-300.
- Kuhn, T. (1965). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: F.C.E., 1975.
- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical Work Spaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 29-39. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Space in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- L'Hôpital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, París.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- McCormac, J. (2012). *Análisis de estructuras. Métodos Clásico y Matricial*. Cuarta edición, Alfaomega Grupo Editor, México. ISBN: 978-607-7854-56-2
- Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. Tesis doctoral, CINVESTAV-IPN, México.

- Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 269-280. <https://doi.org/10.1007/BF02652810>
- Minh, T. & Lagrange, J. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education*, 48, 793-807. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Montoya Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-1, 181-197. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1749>
- Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 739-754. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>
- Montoya Delgadillo, E., Viola, F. & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. En Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME10*. Dublin, Ireland.
- Moutet, L. (2016). *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte: Une ingénierie didactique* [Diagrams and theory of special relativity: A didactic engineering]. Université Paris 7, Francia.
- Moutet, L. (2019). Le cadre théorique de l'ETM étendu: potentialités en physique et en chimie. En Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P.R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds.). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático. ETM6*. Valparaíso, Chile.
- Nemirovsky, R. & Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative*. Cambridge: TERC.
- Niss, M., & Hojgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Niss, M., & Jensen, Hojgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematical teaching and learning in Denmark*. Roskilde University: IMFUFA. English translation of Danish original (2002).
- Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *EMS Newsletter*, pp. 49-52.

- Niss, M., & Jensen, Hojgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematical teaching and learning in Denmark*. English Edition.
- OCDE (2012). *Mathematics, Reading, Science, Problem solving and Financial Literacy: A Framework for PISA 2012*, OECD Publishing.
- OECD (2013). *Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing, París.
- OECD (2017). *OECD Skills Outlook 2017: Skills and Global Value Chains*, OECD Publishing, París.
- Oñate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics*. Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4020-8733-2
- Ozdemir, E. y Uzel, D. (2013). A case study on teacher instructional practices in mathematical modeling. *The Online Journal of New Horizons in Education. Volume 3 Issue 1*. Januery 2013. ISSN: 2146-7374. Editor Bírol Cem. Turkey.
- Penrose, R. (2006). What Is Realiy? *New Scientist*, 18-24.
- Pollak, H. (2012). What is Mathematical Modelling? In Heather, G., Diane, M., y Andrew, S. (Eds.), *Mathematical Modelling Handbook* (Introduction, viii). Washington, D.C., Estados Unidos: COMAP.
- Ponte, J. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, 3(2), 3-8.
- Proyecto Tuning Latinoamérica (2013). *Educación Superior en América Latina: Reflexiones y perspectivas en Ingeniería Civil*. En A. Guerrero (Ed.), Bilbao: Universidad de Deusto.
- Ridell, R. & Hidalgo, P. (2013). *Diseño Estructural*. Santiago, Chile. Textos universitarios. Pontificia Universidad Católica de Chile. 5ta edición.
- Reyes, C. (2019). Paradigmas del Espacio de Trabajo en cinemática: Análisis de una actividad de modelización. En Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P.R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds.). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático. ETM6*. Valparaíso, Chile.
- Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de la modelación desde y para la formación de ingenieros. [Teaching and learning of Modelling from and for engineering education]. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa* (pp. 163-193). México: Editorial Gedisa.
- Rodríguez, R. (2018). Building bridges between the math education and the engineering education communities: a dialogue through modelling and simulation. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, &

- B. Xu (Eds.), *Invited lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME 13 Monographs* (pp. 501-519). Cham: Springer.
- Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. [Mathematical Modelling in Engineering Education] *Educación Matemática, Edición especial 25 años*, 314-338. <https://doi.org/10.24844/EM>
- Roth, W. (2014). Rules of bending, bending the rules: the geometry of electrical conduit bending in college and workplace. *Educational Studies in Mathematics*, 86(2), 177-192. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9376-4>
- Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, Julio., Garza, José. (2012), *Cálculo aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo II*, Cd. México, México: Cengage Learning Editores.
- Serrano, L. (2013). *La modelación matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. Tesis doctoral, Universitat Ramon Llull, España.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol, 25, pp. 25-58). USA.
- Spivak, M. (2009). *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Editorial Reverte, España. Reverte. 2da edición.
- Stake, R. (1995). *Investigación con estudio de casos* [Case Study Research]. Madrid, España: Editorial Morata.
- Tall, D. (1997). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2012). A sensible approach to the calculus. *El cálculo y su enseñanza (Handbook on Calculus and its Teaching)*. 3, 43-70.
- Tosmur-Bayazit, N. & Behiye, U. (2013). Practicing engineer` perspective on mathematics and mathematics education in college. *Journal of Science, Technology, Engineering and Mathematics Education*, 14(3), 34-40.
- Treffers, A. (1987). Three dimensions: a model of goal and theory descriptions in mathematics instruction-*the Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9>
- Trejo, E., Camarena, P., & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: la matemática en contexto como una propuesta

- metodológica. REDU. *Revista de Docencia Universitaria*, 11 (extra.), 397-424.
- Triantafyllou, C. & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, 74(3), 275-294. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9237-6>
- Trunkenwald, J. & Laval, D. (2019). Algorithms as a discovery process in frequentist approach to prediction interval. In Jankvist, U., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Netherland. New submission.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>
- Van der Wal, N.J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2017). Which Techno-Mathematical Literacies are Essential for Future Engineers? *International Journal of Science and Mathematics Education*. 15(1), 87-104. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9810-x>
- Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 23, 1087-1096. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Wake, G. (2016). Mathematics, modelling and students in transition. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, 35(3), 172-186. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrw015>
- Wake, G. (2015). Preparing for workplace numeracy: a modelling perspective. *ZDM Mathematics Education*, 47 (4), 679-689. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0704-5>
- Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, 86(2), 271-290. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9540-8>
- Williams, J. & Wake, G. (2007). Black boxes in workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 317-343. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9039-z>
- Zill, D. & Dewar, J. (2012). *Precálculo con avances de cálculo*. Quinta Edición. McGraw Hill. México. ISBN: 978-607-15-0715-0

Anexos

Anexos

Anexo 1. Glosario de términos del Análisis Estructural (McCormac, 2010)

Análisis estructural: Cálculo de las fuerzas y las deformaciones de estructuras sujetas a deformaciones.

Área tributaria: El área cargada de una estructura que contribuye directamente a la carga aplicada a un elemento en particular.

Armadura: Estructura formada por un grupo de elementos usualmente dispuestos en forma de uno o varios triángulos.

Desplazamiento virtual: Desplazamiento ficticio impuesto sobre una estructura.

Estructura estáticamente determinadas: Estructuras en las que las ecuaciones de equilibrio son suficientes para calcular todas las reacciones externas y todas las fuerzas internas.

Estructuras estáticamente indeterminadas: Estructuras en las que las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para calcular las reacciones externas y las fuerzas internas.

Fuerza cortante: La suma algebraica de las fuerzas externas en un elemento a uno de los dos lados de una sección específica y que son perpendiculares al eje del elemento.

Ley de Hooke: Un enunciado de la relación lineal que existe entre la fuerza y la deformación en elementos elásticos.

Ley de conservación de la energía: Cuando un conjunto de cargas externas se aplica a una estructura, el trabajo efectuado por esas cargas es igual al trabajo efectuado en los elementos de la estructura por las fuerzas internas.

Marco plano: Marco que para fines de análisis y de diseño se supone contenido en un solo plano (o bidimensional).

Momento flexionante: Suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas externas a un lado de una sección específica de un elemento. Los momentos se toman respecto a un eje por el centroide de la sección.

Puntuales: Elementos estructurales sometidos sólo a fuerzas axiales de compresión.

Punto de inflexión: Punto de momento cero. Se llama también punto de contraflexión.

Teorema de Castligiano: Métodos de energía para calcular deformaciones y para analizar estructuras estáticamente indeterminadas.

Trabajo virtual: El trabajo efectuado por un conjunto de fuerzas reales durante un desplazamiento virtual.

Viga: Elemento que soporta cargas que actúan transversalmente al eje del elemento.

Anexo 2. Entrevista al profesor de la asignatura

Se presenta una entrevista realizada al profesor de la asignatura, la cual fue realizada con la finalidad de reforzar nuestras apreciaciones sobre las concepciones sobre modelización en un profesor de Ingeniería Civil

Formación académica: Ingeniero Civil, Magíster en Ingeniería Estructural, Doctorado en Ingeniería Sísmica y Dinámica Estructural

Asignatura: Análisis Estructural

1. [Entrevistador]: ¿Cómo son evaluados los problemas de modelización en su curso? Con respecto a lo que se ha observado en clase. Los problemas pudieran ser muy extensos, esto de acuerdo al tipo de estructura, entonces, por ejemplo en una prueba, el factor tiempo, la extensión del problema

[Profesor]: Bueno, *yo dividiría la materia en dos partes, la primera parte* es una parte de análisis básico, que tiene que ver con estática, y los problemas se pueden plantear de forma simple y directa, no dejan de ser largos y hay que tener mucho cuidado, en el grado de complejidad de no introducir variables adicionales que incidan en el tiempo de ejecución, porque puede que tengamos **problemas que aparentemente son muy sencillos** y que el estudiante lo pueda desarrollar en un tiempo prudencial, **pero otros problemas de la misma índole que al introducirle otra variable un poco diferente puede hacer que el problema innecesariamente se prolongue demasiado** y es bien importante tomar eso en consideración, porque inicialmente como profesores al parecer los problemas son sencillos de resolver pero hay que ver como el estudiante lo ataca a la hora de encontrar una solución y allí nos podemos encontrar con una sorpresa desagradable donde el estudiante argumenta de que le faltó tiempo para poder realizar ese tipo de problemas. Eso en cuanto a la primera parte, en cuanto a la **segunda parte**, que tiene que ver con las estructuras indeterminadas, indudablemente el tema de las estructuras indeterminadas pasa a otra dimensión, allí nos encontramos con problemas que son realmente bastante largos, especialmente cuando tratamos el tema de los marcos de múltiples grados de libertad, en los cuales un problema tranquilamente puede consumir cuatro o cinco horas de duración para resolverlo, y no solamente es el tiempo de duración, es el trabajo, el volumen de información que el estudiante tiene que manejar en ese momento, lo cual entonces lo puede conducir a cometer

muchos errores, incluso si lo maneja con una calculadora programable, en ese sentido, entonces yo he preferido siempre realizar la evaluación de este tema por la vía de ejercicios a desarrollar de forma grupal en casa con tiempo suficiente para que el estudiante los revise a conciencia y en los exámenes lo que le hago es esencialmente evaluaciones acerca del contenido de esos proyectos o de esos ejercicios, sobre la base sobre todo del pre proceso de los datos que es fundamental, y por qué sobre el pre proceso, porque el pre proceso tiene una relación directa con la calidad de los datos que el estudiante va a ingresar al computador o va a ingresar a su problema específico, de esta forma entonces de que el estudiante vaya también formándose un criterio, acerca de cuál es la calidad de los datos que está ingresando, esto digamos en cuanto a esa primera pregunta.

2. **[Entrevistador]:** De acuerdo a mi observación, usted estuvo haciendo énfasis en que era muy importante que el estudiante entendiera la parte conceptual, para que pudiera interpretar apropiadamente los resultados en el caso de cuando utiliza por ejemplo un software, en su análisis estructural, como es SAP 2000, ¿no sé si es correcta mi interpretación?

[Profesor]: Si, bueno en realidad, en Chile el programa que más se utiliza es SAP 2000, como en gran parte de Latinoamérica, el problema de casarse con un solo programa es que los programas son a veces muy específicos y tienen sus procedimientos también muy específicos, lo cual de alguna forma, incide en la formación del estudiante, a mi no me gusta que el estudiante se forma con un solo programa por este problema que se puede generar, también otra de las amenazas que notamos cuando se trabaja con programas es que el estudiante se vuelve como una especie de **ingresador de datos** sin tener mayor criterio ingenieril, eso trae como consecuencia de que muchos estudiantes incluso buscan formación en el uso del programa **sin tener la formación académica**, eso es peligroso porque muchos de ellos se creen que con el solo uso del programa ya son ingenieros estructurales, entonces les falta un avance conceptual verdaderamente importante, la cual entonces puede causar serios problemas en el sentido de que el programa está preparado con unas opciones por defecto que en muchos casos **no reflejan el verdadero desempeño de una estructura**, sobre todo cuando estamos hablando de estructuras que van a estar sometidas a extremos como los que ocurren durante la acción de un terremoto, entonces en ese sentido es muy importante que el estudiante, a la par de que se vaya formando en la parte conceptual interactúe directamente con el programa y vaya incorporando al programa estas bases conceptuales y que no sea al revés, que una vez que conozca al programa le incorpore algunos conocimientos de estructuras, porque, entonces allí estaría haciendo su proceso de datos desde el punto de vista del programa pero

no desde el punto de vista de la ingeniería estructural, esa es una de las amenazas, claro, en la ingeniería estructural actual, es impensable realizar el trabajo sin el uso de programas, **en realidad**, ninguna oficina de análisis estructural, de cálculo estructural, va realizar su trabajo de forma manual como la realizamos en clase, y eso yo se los insisto a los estudiantes. Yo les digo siempre, esto no se ejecuta de esta manera, pero esta es la base, este es el corazón, esta es la **caja negra** que contienen todos esos programas, **conociendo esta caja negra** sabemos qué es lo que le estamos ingresando al programa, y que es lo que debemos esperar como resultado de ese programa, **para saber luego, si estos resultados, reflejan lo que nosotros esperamos realmente**, como ingenieros estructurales al obtener el análisis.

3. **[Entrevistador]:** Y por ejemplo, en el ejercicio profesional, como ya me comentó, también se utiliza el software, no sé si pudiera comentar buenas experiencias o desventajas del uso del programa.

[Profesor]: si, el software se utiliza bastante, en cuanto al uso de este programa específico hay que señalar que en Chile, la gran mayoría de los empleadores prácticamente cuando publican algún tipo de llamado a estudiantes en práctica o profesionales juniors, siempre les exigen el manejo de este programa. Esto genera siempre una presión en el estudiante porque siente que de alguna forma debe recibir esta formación, **aparte de la formación conceptual que nosotros les brindamos en clase**. La manera que hemos encontrado nosotros para solventar este problema ha sido mediante las ayudantías, donde se les brinda la oportunidad a los estudiantes de formarse con los ayudantes en el uso del programa.

4. **[Entrevistador]:** ¿Ha usted utilizado en algún proyecto profesional algún software?

[Profesor]: Si, utilicé SAP pero hace muchísimos años, el SAP 90, pero no estaba en un ambiente no muy agradable, posteriormente evoluciona a SAP 2000, en ese caso, me puse en contacto con la empresa porque a nivel profesional, quería adquirir un programa de análisis que fuera competente, y contacté a la empresa CSA, y ellos me enviaron una versión demo, la cual probé y me gustó bastante, sin embargo, al revisar en internet, me enteré de la existencia de otro programa de origen europeo, de una empresa francesa denominada Robo Bat, y promocionaban el software Robot Milenium, el cual ofrecía dentro de sus capacidades, que era multinormas, o sea tenía incorporado a su análisis la consideración de diferentes normas internacionales, y ofrecía unas prestaciones adicionales, tales como la digitalización de la salida, la cual consistía en tener de archivos electrónicos los resultados obtenidos del análisis, **no solamente como el análisis estructural en sí mismo**,

que eran esfuerzos, reacciones, desplazamientos, las vistas del modelo, etcétera, sino que ofrecía algo que para aquel entonces era hasta digámoslo así revolucionario, era novedoso, como era la posibilidad de exportar la salida los documentos de los planos, eso me pareció genial, lo cual hizo que finalmente adquiriera mejor ese programa en lugar de SAP, empezando así a trabajar con Robot, la experiencia ha sido muy positiva, hasta tal punto de que Robot evolucionó de la mano de la empresa que lo adquirió, y la empresa francesa Robo Bat lo vendió a la empresa americana Autodesk, los desarrolladores de Autocad, y ellos al adquirirlo lo hicieron con una visión a futuro de integrarlo con un programa de modelaje pero a nivel multidisciplinar como es el Rebit, Rebit ahora es ampliamente conocido en el mundo profesional, porque es la plataforma o el programa que permite el trabajo de acuerdo a la filosofía Bim, que hoy día está bastante en boga aquí en Chile porque a través de Corfo se está ahora imponiendo este plan Bim de cara a que en el año 2020, todos los proyectos que se vayan a contratar con el estado tienen que estar en esta plataforma. Y adicionalmente de cara al año 2025, en Chile, todos los proyectos privados tendrán que estar también en esta plataforma. Por tanto la experiencia positiva que te relato, se abre a que el **modelo** que antes era solamente **modelo estructural**, se pueda compartir, por ejemplo, con el arquitecto, con el ingeniero electricista, con el ingeniero mecánico y se haga dentro de un sólo programa, un modelo que permita el análisis estructural, el análisis mecánico, del electricista; entonces es un reto que tenemos hoy día de poder integrar todas las disciplinas, y ese es ahora nuestro siguiente paso, **no solamente poder enseñar a los estudiantes como se realiza el modelo, como una disciplina aislada**, como el ingeniero estructural que posiblemente ellos lleguen a ser, sino, cómo va a ser su **interacción** o su **integración** dentro de una organización profesional que va tener que trabajar en equipo.

5. **[Entrevistador]:** Con respecto a la formación de los estudiantes de ingeniería, hay diversos organismos, ya sea que son organismos que se dedican a la evaluación de programas universitarios o que se dedican a la investigación para la formación de ingenieros, en nuestro interés ponemos foco en lo que establecen los organismos en cuanto a la matemática en ingeniería, por ejemplo en SEFI, unas de las ocho competencias, dicen que es importante en la formación del ingeniero, la modelización matemática, referida tanto al uso de modelos como la adquisición de la competencia de modelización, con respecto a los estudiantes, que me pudiera comentar, en cuanto a que ellos usan modelos matemáticos preestablecidos para la solución de un problema y/o adquieren la competencia de una modelización completa.

[Profesor]: Si tenemos que ser precisos, dentro de nuestro proceso de formación como ingenieros civiles, porque ese es el título que finalmente se otorga, no solamente hay que mencionar la iniciativa de trabajar con modelos en ingeniería estructural, yo creo que la ingeniería estructural ha sido pionera en esta generación de modelos y en esta generación de formas de trabajar con modelos, pero hay que también que mencionar que por ejemplo otras disciplinas como la hidrología, la hidráulica, la ingeniería vial, la ingeniería de construcción, también **utilizan modelos matemáticos para la simulación de situaciones** que de otro lado sería muy complejo poder entonces replicar por ejemplo en laboratorio, de otra forma sería muy costoso, muy largo y a veces innecesario, porque ya se ha demostrado que muchos de estos resultados obtenidos con modelos son bastante ajustados a la realidad, o algunas veces no existen laboratorios para poder replicar ciertos ensayos de cierto fenómeno.

6. **[Entrevistador]:** Entonces usted considera que la competencia de que el estudiante modelice, ¿la trabaja?

[Profesor]: Si, se trabaja intensamente

7. **[Entrevistador]:** En nuestro caso le ponemos el apellido matemático y decimos modelización matemática, pero por ejemplo en estructuras sería **modelización de la estructura**. Debido a que consideramos que queda implícita la **modelización matemática** dentro de la modelización de la estructura.

[Profesor]: Claro, de hecho en estructuras hay algo muy curioso porque siempre que nosotros hacemos una representación gráfica de todos los contenidos de un determinado modelo, siempre lo denominamos modelo matemático. Considerando la gráfica con todos los contenidos que lleva esa estructura, claro la gráfica asociada a una fórmula. Adicionando los datos mecánicos y geométricos en general, de los componentes que lleva, digamos el modelo.

8. **[Entrevistador]:** Y en lo profesional, ¿cómo ve usted la modelización de estructuras donde tenemos implícita a la modelización matemática?

[Profesor]: En lo profesional sí que hay que ser un poquito reflexivos en el sentido de que muchas veces los casos que se analizan, son casos repetitivos, y muy parecidos entre sí, muy rutinarios, por ejemplo, una oficina de cálculo exitosa lo usual es que se dedique esencialmente a por ejemplo, calcular edificios, los edificios prácticamente tienen, con sus variantes arquitectónicas obviamente, **tienen prácticamente modelos matemáticos bastante similares**, esto trae como consecuencia que los mismos profesionales junior que están trabajando en la oficina se habitúen a este tipo de casos **y no salgan tanto de esa rutina** y esa parte digamos de desarrollo de nuevos casos o el estudio de variantes no se termine de desarrollar lo suficientemente bien. Yo pienso que allí la

misma práctica como que va influyendo en ese poco desarrollo de ese aspecto que es importante, porque por ejemplo nos encontramos que en determinadas oficinas determinados profesionales estructurales se encargaron de calcular exclusivamente edificios (debido a la alta demanda de proyectos de edificación), pero cuando a esa oficina les contratan por ejemplo para el análisis y diseño de un puente, entonces no hay los suficientes profesionales capacitados para enfocarse en ese tipo de estructuras distintas. Incluso **a veces se presentan problemas por ejemplo de optimización** que ya son problemas que se están atacando últimamente, por ejemplo el proceso de dimensionado de edificaciones que tiendan más bien a obtener un resultado óptimo desde el punto de vista de materiales, es un tema que se está abordando con bastante fuerza últimamente. Y allí digamos que los profesionales tienen que hacer el esfuerzo de adaptarse a esos nuevos requerimientos porque eso los vuelve más competitivos a nivel de mercado, que es un aspecto que no debemos descuidar, yo siempre les comento a mis estudiantes que dentro del proceso de la ingeniería estructural tenemos un compromiso con la sociedad en cuanto a la seguridad, no podemos negociar el nivel de seguridad que tienen nuestros proyectos, pero también tenemos que ser muy realistas, tenemos un contratante que nos indica a nosotros que el proyecto tiene que salir dentro de ciertos márgenes o está acotado en determinados valores monetarios y eso no lo podemos controlar.

9. **[Entrevistador]:** Y en esas situaciones que menciona que pudieran salir nuevas, en donde las rutinas ya no aplican, si volvemos a lo básico, obviamente que el software no va a ser la solución inmediata directa, me imagino y allí es donde se tiene que hacer uso de una mayor especialidad donde la modelización matemática sería parte de esa especialización fundamental.

[Profesor]: Si, de hecho desde hace unos veinte años dentro de la ingeniería estructural hay algo que se denomina ingeniería conceptual, es el trabajar con modelos muy sencillos, esto es por ejemplo un extracto normativo (muestra un manual americano de normas de diseño de estructuras) de cómo se debe estructurar una edificación con la finalidad de que la respuesta sísmica de esta edificación se encuentre dentro de unos parámetros de aceptabilidad, **esto que se denomina ingeniería conceptual o diseño conceptual de edificios no tiene cabida dentro de software, es algo que el estudiante tiene que internalizar, es algo que el estudiante tiene que digerir y tiene que manejar previo a la utilización del programa** porque si yo por ejemplo, este edificio que es bastante irregular lo meto en el software el programa me va a proporcionar los resultados, no va a tener ningún inconveniente en realizarme el análisis, me va proporcionar unos

resultados que sin embargo, para mí van a ser unos resultados desde el punto de vista estructural, pésimos, desastrosos, por qué, porque hice un mal manejo de la ingeniería conceptual al modelar mi edificio de esta manera. Entonces hay recomendaciones que yo digo que tienen que ver más con arte que con ciencia, más enfocadas al ingenio del analista estructural, del ingeniero estructural, de cómo realiza la estructuración para que esta estructuración le produzca una respuesta más adecuada, más segura y obviamente también mucho más económica. En esto estamos también investigando últimamente, en lo que se conoce por ejemplo ingeniería conceptual aplicada al análisis de **estructuras irregulares**.

Anexo 3. Entrevista a estudiante tesista respecto del proyecto

A continuación se muestran fragmentos de la entrevista al tesista, relacionada con su punto de vista ante un proyecto de análisis estructural a nivel escolar.

[Entrevistador]: En el marco de la ayudantía del curso de análisis estructural se encargó trabajar en un proyecto, se les proporcionó a los estudiantes un resumen de lo que trataba el proyecto y las entregas (4) en las que se iba a dividir los reportes para los equipos de trabajo. El desarrollo del proyecto se realizó con SAP 200 v. 19, qué opinas sobre que en el curso se mencionaba entre la solución exacta proporcionada por métodos de cálculo a lápiz y papel y por otra parte de una solución aproximada cuando se utilizaba software.

[Estudiante]: Claro son aproximados pero con elementos puntuales si uno hace los cálculos a mano y en computador va a dar el mismo resultado. Para elementos súper puntuales si uno hace los cálculos a mano no se va a notar tanto. Cuando cursamos mecánica estática, resolvimos marcos simples y comparamos los resultados manuales y después lo hicimos con el software y obteníamos los mismos resultados. Tal vez se complejiza un poco cuando son estructuras muy grandes porque a mano imposible no se puede, entonces, ahí puede que, si es que uno pudiese hacer el análisis a mano, pueden haber diferencias.

[Entrevistador]: Independientemente de que pudieran usarse métodos a lápiz y papel (exactos) o utilizando software (aproximado), aun así los resultados no van a ser reales, ¿cierto?

[Estudiante]: Exacto. Si analizamos aquí en Chile, las cargas por lo general están normadas como los mínimos que se pueden usar, pero las cargas sobre un edificio son estimaciones, por ejemplo un edificio habitacional, donde está lleno de departamentos, puede ser súper

improbable que todos los pisos de todo el edificio estén cargados para la máxima carga para la que fue diseñado.

[Entrevistador]: 13:08 En la primera entrega se les solicitó que hicieran el dibujo en SAP de la estructura utilizando la información de los planos. Se les solicitó que utilizaran dos tipos de elementos ("Frame" y "Shell"). Aquí quisiera me explicarás por qué utilizan un "frame" para muros cuando los muros son un elemento "área", entiendo mejor que sea utilizado el "frame" para viga y columna. Y en el caso de "Shell" para losa.

[Estudiante]: Claro los muros pueden ser modelados como elementos "frame" pero siempre y cuando se mantengan sus propiedades de rigidez. Hay que pensar que si estamos analizando un muro, el muro es un elemento estructural que está metido en un sistema estructural, entonces si estamos analizando una estructura, tenemos que buscar que los resultados sean consecuentes a lo que nosotros estamos modelando, entonces si colocamos muros como un elemento frame pero no le damos las propiedades ni las rigideces que tiene el muro obviamente no se van a tener los resultados acorde a lo que nosotros queremos modelar. Pero modelar un muro como un elemento frame es más una simplificación, para los temas de análisis. Porque claro, el programa analiza de manera diferente si es un frame o un Shell.

[Entrevistador]: En esta misma entrega, en la entrega uno, le llaman modelar, solicitan presentar imágenes del modelo realizado, comentarios de complicaciones que tuvieron al modelar. *Qué piensas tú con respecto al término modelar, porque veo que en esta entrega fue más una cuestión de ver la geometría del dibujo.*

[Estudiante]: Modelar en esta fase, yo lo entiendo como pasar la información que tenemos, (la de los planos), para esa información de los planos a un modelo que sea analítico, que nos permita obtener resultados de análisis estructural, entonces modelar, sería pasar toda esta información al modelo computacional, pero básicamente es dibujar los elementos.

[Entrevistador]: ¿Veo como un trabajo con geometría?

[Estudiante]: Claro, cuando uno modela básicamente lo que hace es conectar los elementos, a ver cómo le explico... en el fondo es levantar la estructura en este programa computacional de análisis estructural, entonces se modelan, cuando decimos modelar, básicamente lo que estamos haciendo es dibujar una columna por ejemplo, en el programa estructural.

[Entrevistador]: Porque por ejemplo, yo me refería a lo geométrico, cuando les recomiendan añadir ejes de grilla adicionales que pasen

por el centroide de los muros. Se cuidaba que fuera exacto por el centroide.

[Estudiante]: Si, es justamente porque queremos que todo quede bien conectado, a lo que te comentaba denantes, cuando uno hace un modelo estructural, entendiendo como, poniendo la geometría poniendo los elementos en el programa, a veces uno ve los planos y tal vez el eje que está en el plano no pasa por el centroide del muro, porque constructivamente no lo van a colocar así, pero para efectos de hacer el modelo estructural nosotros lo dibujamos en el eje, porque ahí se pueden dibujar los elementos y porque ahí va estar conectado tal vez con otro elemento. Yo diría que es más por simplicidad porque cuando se genere la malla de elementos finitos se pueden producir errores si es que el elemento no está bien insertado.

[Entrevistador]: Bueno, una vez que hicieron este modelo analítico, le asignaron las cargas, aquí lo que estaba viendo es que les presentaron estás combinaciones de carga (se le muestran al estudiante entrevistado) y tenían que ver con respecto a si era edificio de vivienda social, de oficina, biblioteca u hotel. Entonces observé este tipo de conexión entre tipos de combinaciones para carga muerta, viva y de terremoto, el tipo de edificación y la norma.

[Estudiante]: Las combinaciones no están conectadas con el tipo de edificación, las combinaciones tiene que ver con un tema probabilístico, son combinaciones de carga porque al final después de que uno hace estas combinaciones de carga se queda con la mayor. Uno tiene los resultados para todas estas combinaciones pero al final el que va a mandar posteriormente en el diseño va a ser la combinación que genere la mayor carga. Entonces, específicamente, estas son combinaciones que están en la normativa nacional chilena. Pero es por un tema probabilístico, recogen la incertidumbre en los tipos de carga.

[Entrevistador]: ¿Por qué de las variaciones de los coeficientes?

[Estudiante]: Porque, mira, analicemos la segunda ... $1,4D + 1,6L$, las cargas muertas por lo general son más fáciles de predecir porque están asociadas al peso de los elementos o a cosas que van a estar permanentemente en la estructura, entonces esas tienen una mayor incertidumbre cuando se construye la estructura real. Las cargas vivas tienen más incertidumbre porque pueden ser personas, pueden ser incluso cargas ambientales, pero que no se sabe si van a estar o no van a estar, entonces se aumentan las cargas por el tema de incertidumbre. Ahora porque cambian entre uno y otro, es más porque también un tema probabilístico, que justo esté el sismo, este el viento, o la lluvia y que además, este todo cargado completamente todo el

edificio, probablemente no se dé. Entonces si se aumentan mucho todos los factores tendríamos un modelo con unas cargas muy conservadoras que probablemente no van a ser así.

[Entrevistador]: Claro, pero cuando ustedes trabajan con estos modelos de carga, trabajan en lo determinístico porque ya tienen los valores exactos de los coeficientes, aunque saben que se originaron por un tema probabilístico debido a la incertidumbre de las cargas.

[Estudiante]: Claro, exactamente. Pero cuando me refiero a la incertidumbre me refiero a las combinaciones. Los coeficientes son determinados por un método de ingeniería llamado factores de mayoración de la carga y minoración de la resistencia. Se trata de aprovechar de mejor forma los materiales, es más un tema de resistencia de los elementos estructurales y aprovechar de mayor forma los materiales y así se asegura que el elemento realmente va a resistir la fuerza. Por tanto unos son los factores de amplificación y otras son las combinaciones de carga.

[Entrevistador]: y en cuanto al tipo de edificación, hubo una de tipo vivienda, oficina, biblioteca y hotel. Ello en qué afecta, ¿en las cargas?

[Estudiante]: Si, eso tiene que ver con la categoría de la edificación. Esto afecta cuando se define el espectro de aceleraciones. Entonces, en función de cual sea el tipo de edificación, va a tener asociados unos factores que están en la norma, y estos factores posteriormente van a alterar este espectro de pseudoaceleraciones que posteriormente va a definir la carga sísmica.

[Entrevistador]: Pero también veo que ¿afectó en la carga viva? , ya que observo diferentes valores, según el tipo de edificación.

[Estudiante]: Si, pero eso está en la otra norma, lo anterior que comenté lo define la norma que está asociada al análisis sísmico del edificio y lo otro a la norma que está asociado a las cargas que se ocupan. Pero también es un tema de que si es un edificio público puede que tenga más gente, entonces va a tener más carga a diferencia de un edificio habitacional, en ese sentido van enfocadas las cargas que se ocupan. Y en cuanto a $f'c$ tiene que ver con la resistencia del hormigón, esa nomenclatura es la que se usa en la normativa y la diferencia entre el f_c y él $f'c$ es la forma en cómo se ensaya el elemento de hormigón. H y G son una denominación de la calidad o del grado del hormigón, antiguamente se llamaba $h30$ y ahora cambio a $g25$ y esta justamente asociado a cada probeta que se ensaya.

[Entrevistador]: Luego en la entrega tres, fue relacionado con lo que comenzaste a decir sobre el análisis sísmico. Les dieron una

información y como no competía para el curso el profundizar en cómo hacer un análisis sísmico, entonces les proporcionaron una información que era del espectro de diseño y les dijeron que por norma, ese era.

[Estudiante]: Si. No eso no compete al curso porque primero hay que ver unas temáticas que se ven en un curso posterior llamado ingeniería sísmica, que primero hay que entender lo que son los modos fundamentales de vibración de la estructura y son conceptos que no competen al ramo de análisis estructural. Pero es bueno que por lo menos lo hayan visto de manera genérica.

[Entrevistador]: En esta misma entrega 3, para la sección 2, se solicitó realizar un diagrama de momentos de dos vigas a elección para una combinación de cargas a elección. Y se solicitó que se comentara si el resultado era lógico o no. Mi apreciación en este punto dos es que quisieron hacer una conexión con el curso de análisis estructural, ¿o no? ¿O era para validar el modelo? ¿Qué objetivo crees tú haya sido la solicitud de esa punto 2?

[Estudiante]: Relee para el mismo "(para una combinación de cargas a elección)", no me queda claro si el objetivo era comparar las dos vigas o de realizar un análisis para cada una de las vigas de manera independiente. De todas formas si piden el diagrama de momentos es justamente para conectarlo con el curso de análisis estructural. Ahora tal vez el usar las cargas distintas para una combinación de carga a elección, eso puede que cambie tal vez los resultados porque justamente está relacionado con lo que estábamos conversando antes, que alguna meta más carga a la viga que otra combinación.

[Entrevistador]: Y cuando se les solicita indicar si el resultado es lógico, es que tienen alguna manera de decir "corrí el análisis pero los resultados no me son lógicos"

[Estudiante]: No, eso es un análisis personal, como ingeniero digamos. Interpreto que, si preguntan si es lógico o no, está asociado a los órdenes de magnitud que se obtienen como resultado. Porque claro, cuando uno está realizando ejercicios a mano uno ya va entendiendo los órdenes de magnitud en los que se mueven los resultados, entonces si uno ve que siempre los resultados arrojan 2 ó 5 pero después el programa nos arroja 100, obviamente carece un poco de sentido el orden de magnitud del resultado.

[Entrevistador]: Entonces, ustedes se pueden dar cuenta como para decir, quizá hice mal algo y el resultado es ilógico

[Estudiante]: Claro, ahí entonces uno dice, ah! Puede que haya un error en el modelo estructural del computador.

[Entrevistador]: Entonces si hay forma como de validar el resultado del análisis.

[Estudiante]: Claro, pero de todas formas sería una pega que hay que hacer manual y uno por uno.

[Entrevistador]: ¿Conoces si se hace eso? Cuando ya hacen el análisis y tienen ciertos datos, que yo veía que les arrojaba muchos números, bastantes, ¿los tomarán así por default o utilizarán algún criterio para decir si estará realmente bien lo que les arrojó el software producto del análisis?

[Estudiante]: Claro, no se comparan todos los resultados, como tú viste arroja muchos valores y esos no se analizan uno por uno. Ese tipo de fiscalización se hace ya cuando uno está obteniendo resultados posteriores, por ejemplo, cuando obtiene lo que se llama el corte basal que es algo que se ve en antisísmica o cuando obtiene los drift, que es una relación entre la altura y el desplazamiento tal vez en eso se ven reflejados los errores y ahí uno ve la coherencia de los resultados y ahí uno se devuelve recién hacia atrás a revisar el modelo, porque eso es consecuencia de las cargas, entonces uno tal vez no analiza las cargas pero si analiza las consecuencias mismas y si uno ve que esos resultados finales no son coherentes, es porque hay algún error en una fase previa que puede ser en la definición de las cargas o porque el elemento o porque el modelo tiene algún error o porque el programa está haciendo algo que tal vez yo no sé y le cambié una configuración por ejemplo.

[Entrevistador]: Y en la fase de diseño de la estructura, ¿también se podrá ver esa coherencia?

[Estudiante]: Si, estaba entre obtener los resultados y en la de diseño, porque en la fase de diseño también uno ve si tal vez tiene que devolverse hacia atrás.

[Entrevistador]: Quizá cuando se realiza el diseño de la estructura, ¿un error en el análisis podría tener que ver con el sobre reforzamiento de la estructura por causa de utilizar demasiado acero producto de la demanda del análisis?

[Estudiante]: Claro, y si se hace de hecho, puede ser que se haya estimado mal la carga o el modelo contiene un error, pero si, tiene razón, en la fase de diseño uno puede decir si eso me está dando mucho acero o no me resiste.

[Entrevistador]: Entonces hay varia maneras como de decir, si es legítimo o no, o es lógico ese resultado. Porque me imagino que la seguridad en los resultados del análisis se debe revisar si o si, porque por un lado es riesgoso diseñar mal una estructura que no vaya a

resistir las cargas y por el otro puede resultar demasiado costos realizar un diseño producto de un análisis por sobre reforzamiento o sobre dimensionamiento. Por lo que a fuerza se debe hacer esa como validación de los resultados del análisis estructural.

[Estudiante]: Si, ilas dos! Lo primero es la seguridad estructural, queremos que la estructura sea segura para que no tengan consecuencias negativas las personas o incluso para que no se pierda la inversión.

[Entrevistador]: Una cuarta y última entrega fue modelar una cercha en SAP, aquí el cuestionamiento que te quiero hacer es sobre las consideraciones que utilizaron para modelar la cercha, sobre todo las conexiones o el tipo de carga que se le iba a considerar a la cercha para luego meter el modelo a SAP.

[Estudiante]: En este caso particular como es una cercha, los elementos que componen la cercha trabajan principalmente fuerzas axiales, entonces como estos elementos solamente trabajan ese tipo de cargas, cuando yo hago el modelo estructural, que es la representación digamos, tengo que tener las precauciones de que al momento de hacer el análisis estoy seguro de que ese elemento va a trabajar a fuerzas axiales entonces ahí cobra importancia el tipo de unión o la forma en que yo estoy uniendo este elemento en el programa, entonces si esto solamente está trabajando a carga axial *tengo que preocuparme de que los apoyos no generen momento y esos tipos de apoyos por lo general están asociados a apoyos simplemente apoyados*. Ahora el programa los dibuja con apoyo empotrado porque es la opción por defecto pero uno tiene que hacer ese cambio y restringirle que no provoque momento en los extremos. El programa igual lo va a calcular si no hacemos esa restricción pero no sería consecuente a lo que nosotros estamos, digamos modelando y lo que nosotros posteriormente vamos a diseñar y construir, entonces esas precauciones uno las debe tener como usuario del programa y siempre pensar que lo que uno está haciendo en el programa sea consecuente a lo que se va hacer y lo que se está analizando.

[Entrevistador]: Bueno, y entonces ¿qué sería para ti modelar una estructura?

[Estudiante]: Primero hay que asumir de que nunca nos han dicho qué es modelar, como definición como tal, tal vez en física se nos dice vamos a hacer un modelo físico, yo creo eso es lo primero y tal vez la única definición de modelo que tenemos. Para mi hacer modelo estructural, es hacer un modelo, ¡Caigo en lo mismo! Es hacer la

representación de elementos en el programa estructural, no sé cómo definirla más y me cuesta definirla.

[Entrevistador]: Eso sería como el modelo estructural lo que dices.

[Estudiante]: Claro, si

[Entrevistador]: ¿Y una modelación estructural?

[Estudiante]: Modelación estructural, la entiendo como **el acto de hacer el modelo** estructural, porque cuando dicen "hazte la modelación" uno lo que hace es hacer el modelo, que es lo que se dibuja en SAP y que en el caso de un proyecto estructural, este modelo tiene que ser obviamente consecuente con la información que me entregan, si tiene dos pisos, el modelo obviamente tiene que rescatar esos dos piso para que sea la misma cosa que estamos analizando.

[Entrevistador]: Igual el modelo no es trivial, porque tienes que estimar cargas, ver el elemento que estás trabajando.

[Estudiante]: Claro, de hecho cuando aprendemos a hacer esto, el primero siempre lo tenemos mal, justamente porque hay un montón de consideraciones que hay que tener y que uno desconoce, hay muchas simplificaciones que tienen que hacerse porque si no hace más tedioso el trabajo y que justamente por eso este modelo no es exactamente igual a lo que tenemos en la realidad, es una aproximación, es la mejor aproximación que podemos hacer, la que nos permiten también los software. Pero eso, es la representación digamos física y analítica del problema que estamos analizando para el propósito.

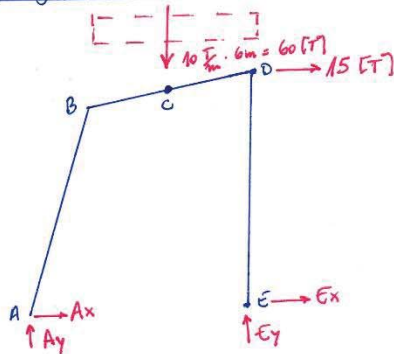
[Entrevistador]: ¿Y validar el resultado del análisis, crees que también podría ser parte de la modelación estructural?

[Estudiante]: yo creo que sí, porque justamente estamos validando cosas del modelo, estamos analizando los resultados que nos arrojó el modelo y eso hay que ver si es consecuente o no con la realidad y con los órdenes de magnitud que manejamos, entonces yo creo que si se considera.

Anexo 4. Solución del problema de evaluación, por experto

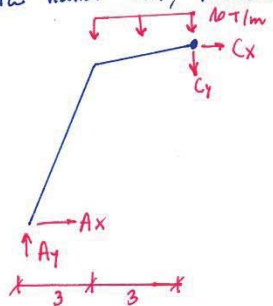
I) CÁLCULO DE REACCIONES EXTERNAS

Diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)



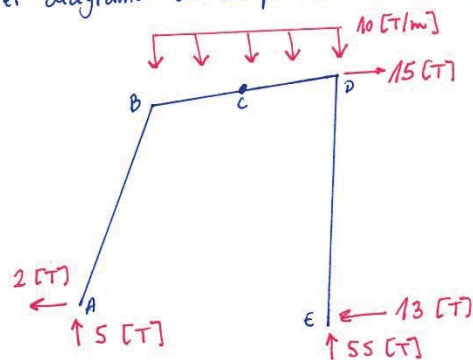
$$\begin{aligned}
 \bullet \sum F_x = 0 &\Rightarrow Ax + Ex + 15 = 0 \quad (1) \\
 \bullet \sum F_y = 0 &\Rightarrow Ay + Ey - 60 = 0 \quad (2) \\
 \bullet \sum M_A = 0 &\Rightarrow -60(6) - 15(9) + Ey(9) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -360 \text{ T}\cdot\text{m} - 135 \text{ T}\cdot\text{m} + 9Ey \text{ T}\cdot\text{m} = 0 \\
 &\Leftrightarrow -495 + 9Ey = 0 \\
 &\Leftrightarrow Ey = \frac{495}{9} \Leftrightarrow Ey = 55 \text{ [T]} \\
 (2) &\Rightarrow Ay + 55 - 60 = 0 \Leftrightarrow Ay = 5 \text{ [T]}
 \end{aligned}$$

Para hallar A_x , tomamos el momento en la rótula C:

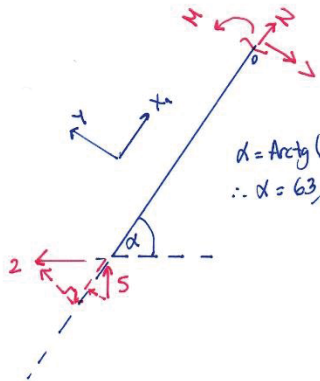


$$\begin{aligned}
 \bullet \sum M_C^{Iza} = 0 &\Rightarrow -Ay(6) + Ax(7,5) + (10 \cdot 3)(1,5) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -30 \text{ T}\cdot\text{m} + 7,5Ax \text{ T}\cdot\text{m} + 45 \text{ T}\cdot\text{m} = 0 \\
 &\Leftrightarrow Ax = -\frac{15}{7,5} \Leftrightarrow Ax = -2 \text{ [T]} \\
 (1) &\Rightarrow -2 + Ex + 15 \Leftrightarrow Ex = -13 \text{ [T]}
 \end{aligned}$$

De esta manera, el diagrama de cuerpo libre de la estructura queda:



II) DETERMINACIÓN DE LAS LEYES DE ESFUERZO.

Tramo A-B: $0 \leq x_1 \leq 6,7 \text{ [m]}$ 

$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow -2 \cos(63,43) + 5 \sin(63,43) + N = 0$$

$$\therefore N(x_1) = -3,58 \text{ [T]}$$

$$\alpha = \text{Arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore \alpha = 63,43^\circ$$

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow 2 \sin(63,43) + 5 \cos(63,43) - V = 0$$

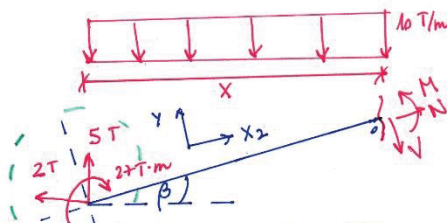
$$\therefore V(x_1) = 4,03 \text{ [T]}$$

$$\bullet \sum M_0 = 0 \Rightarrow 2 \sin(63,43) \cdot x + 5 \cos(26,57) \cdot x + M = 0$$

$$\therefore M(x_1) = 4,03 \cdot x_1 \text{ [T} \cdot \text{m]}$$

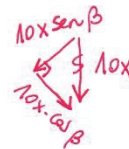
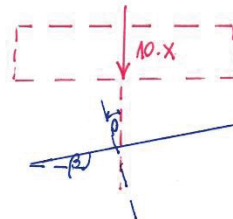
$$\rightarrow \text{Si } x_1 = 0 \Rightarrow M(0) = 0 \text{ [T} \cdot \text{m]}$$

$$\rightarrow \text{Si } x_1 = 6,7 \Rightarrow M(6,7) = 27 \text{ [T} \cdot \text{m]}$$

Tramo B-D: $0 \leq x_2 \leq 6,70 \text{ [m]}$ 

$$\beta = \text{Arctg}\left(\frac{3}{6}\right)$$

$$\therefore \beta = 26,57^\circ$$



... Sin embargo, se debe hallar una relación entre x y x_2 , la cual está dada por:



De esta manera, se tendrá que:

$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow -2 \cos(26,57) + 5 \sin(26,57) - 10x \sin(26,57) + N = 0$$

$$\Rightarrow 0,45 - 10 \cos(26,57) \sin(26,57) + N = 0$$

$$\therefore N(x_2) = 4x_2 - 0,45 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } x_2 = 0 \Rightarrow N(0) = -0,45 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } x_2 = 6,7 \Rightarrow N(6,7) = 26,35 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } N(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,11 \text{ [m]}$$

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow 2 \sin(26,57) + 5 \cos(26,57) - 10x \cos(26,57) - V = 0$$

$$\Rightarrow 5,37 - 10x_2 \cos^2(26,57) = V$$

$$\therefore V(x_2) = -8x_2 + 5,37 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } x_2 = 0 \Rightarrow V(0) = 5,37 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } x_2 = 6,7 \Rightarrow V(6,7) = 48,23 \text{ [T]}$$

$$\rightarrow \text{Si } V(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,67 \text{ [m]}$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum M_0 = 0 &\Rightarrow -27 - 2\sin(26,5^\circ) \cdot x_2 - 5\cos(26,5^\circ) \cdot x_2 + 10x \cdot \cos(26,5^\circ) \cdot \frac{x_2}{2} + M = 0 \\ &\Rightarrow -27 - 5,37x_2 + 5x_2 \cos^2(26,5^\circ) \cdot x_2 + M = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore M(x_2) = -4x_2^2 + 5,37x_2 + 27 \text{ [T}\cdot\text{m]} //$$

$$\hookrightarrow \text{Si } x = 0,67 \Rightarrow M(0,67) = M_{\max} = 28,8 \text{ [T}\cdot\text{m]}$$

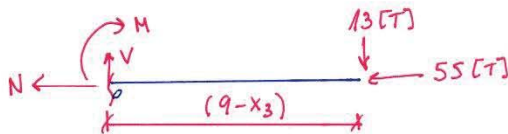
Ahora verificamos cuándo la función momento toma el valor nulo:

$$M(x_2) = 0 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-5,37 \pm \sqrt{5,37^2 + (4)(4)(27)}}{-2(4)} = \frac{-5,37 \pm 21,47}{-8}$$

.. Nos quedamos con el valor positivo, por lo cual: $x_2 = 3,35 \text{ [m]} //$

Dicho resultado es congruente con la estructura, pues en ese punto se ubica la rótula y, en consecuencia, el momento debe ser nulo.

Tramo D-E: $0 \leq x_3 \leq 9 \text{ [m]}$



$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow -N - 55 = 0 \Leftrightarrow N(x_3) = -55 \text{ [T]} //$$

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow V - 13 = 0 \Leftrightarrow V(x_3) = 13 \text{ [T]} //$$

$$\begin{aligned} \bullet \sum M_0 = 0 &\Rightarrow -M - 13(9 - x_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow M(x_3) = -13(9 - x_3) \end{aligned}$$

$$\therefore M(x_3) = 13x_3 - 117 \text{ [T}\cdot\text{m]} //$$

$$\hookrightarrow \text{Si } x_3 = 0 \Rightarrow M(0) = -117 \text{ [T}\cdot\text{m]}$$

$$\hookrightarrow \text{Si } x_3 = 9 \Rightarrow M(9) = 0 \text{ [T}\cdot\text{m]}$$

DIAGRAMA DE ESFUERZO AXIAL (N)

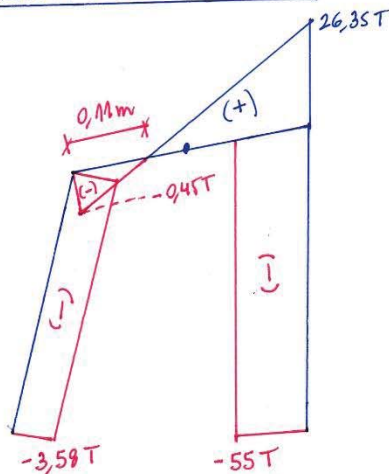
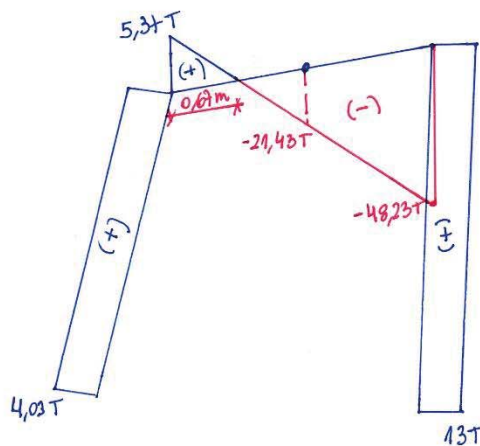
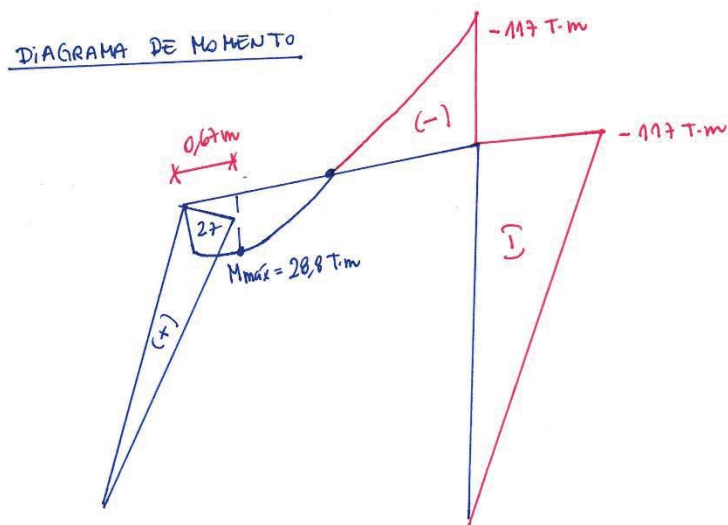


DIAGRAMA DE CORTANTE (V)



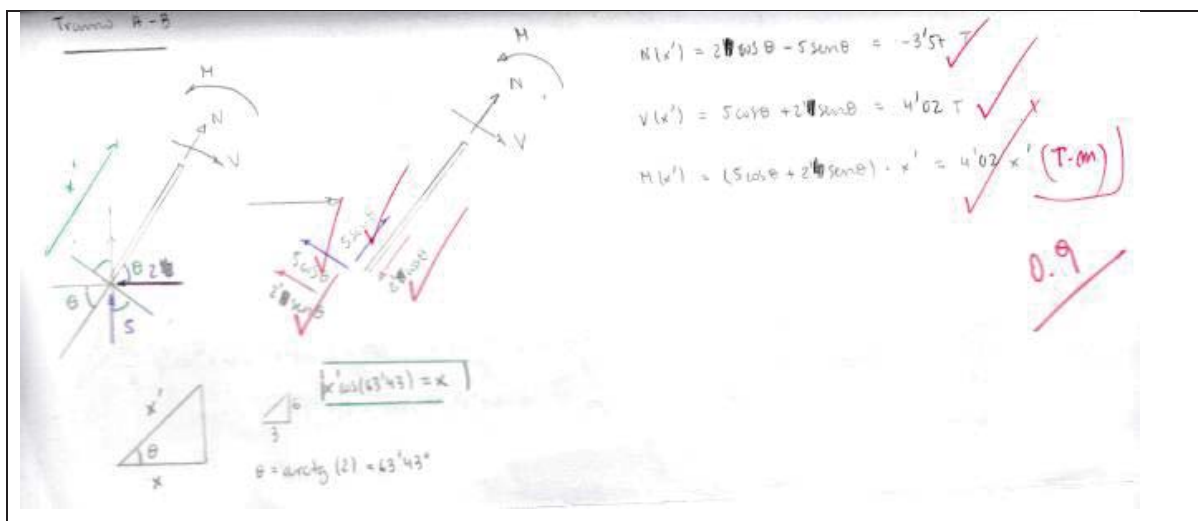
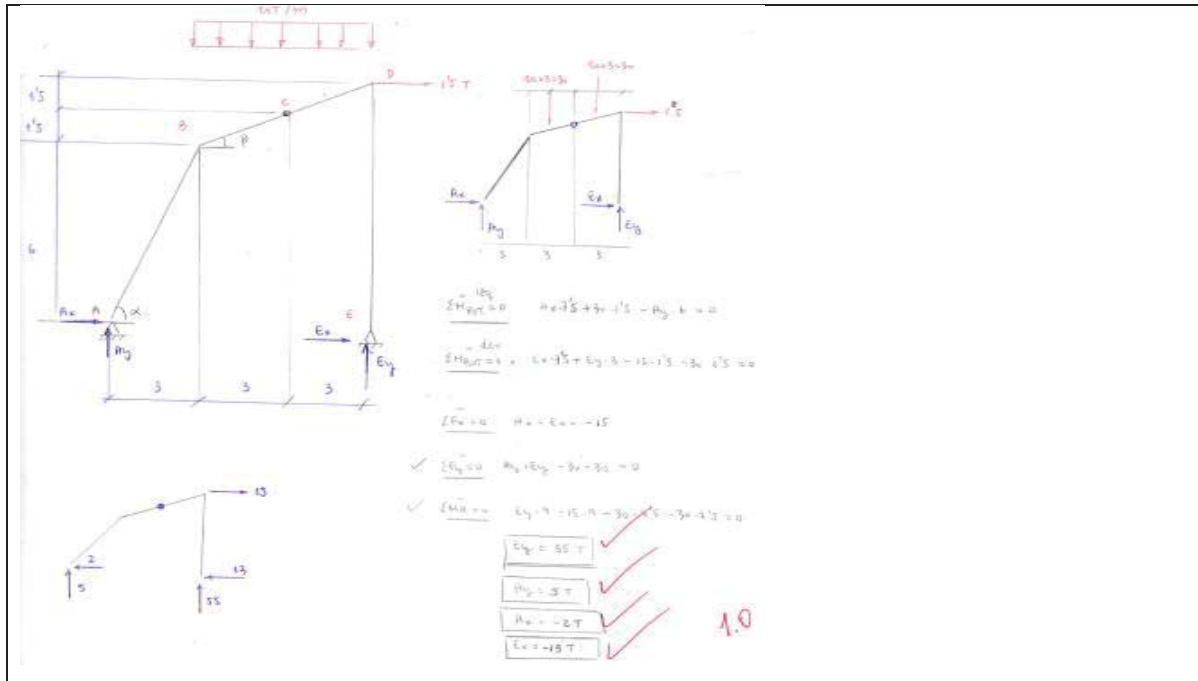


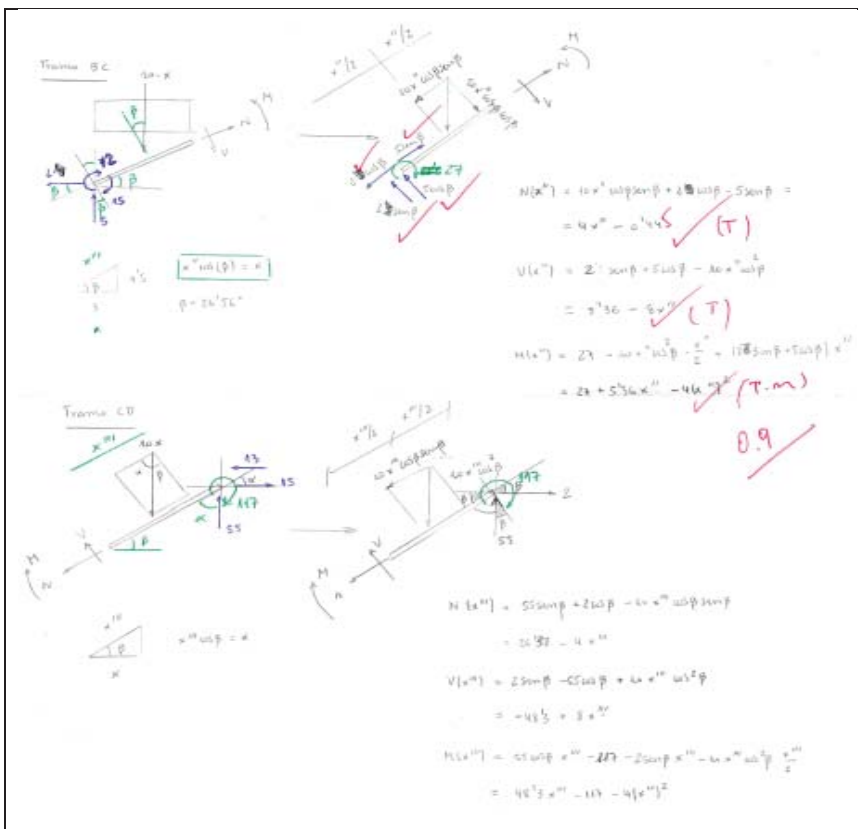
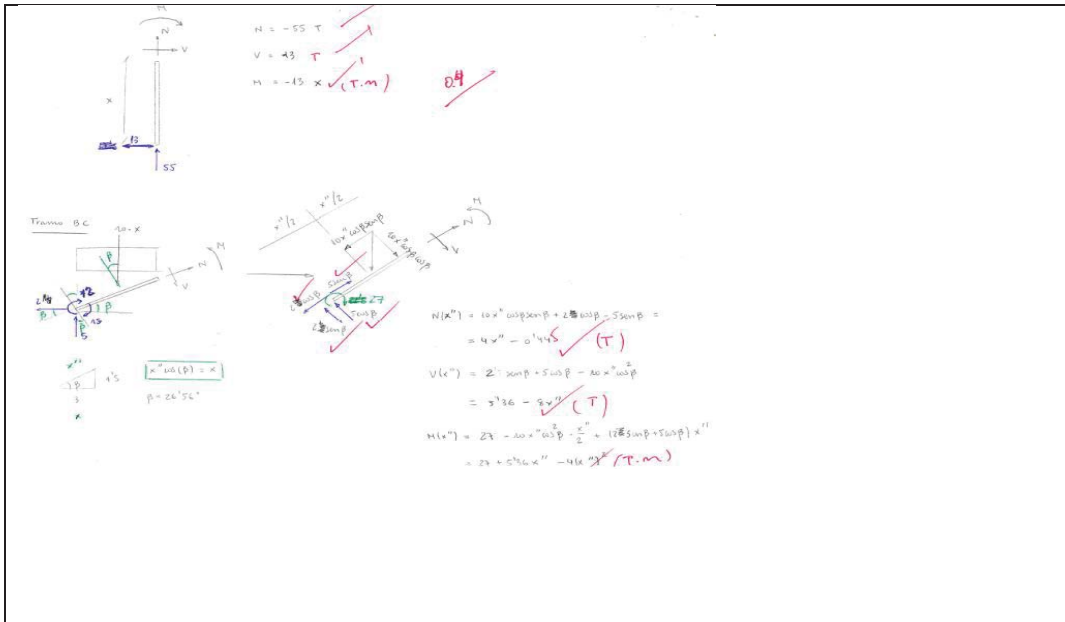
> El criterio que se emplea para determinar la ubicación de los máximos valores de momentos viene dado por la relación matemática que existe entre las leyes de esfuerzos cortantes y momentos flectores, en donde se cumple que:

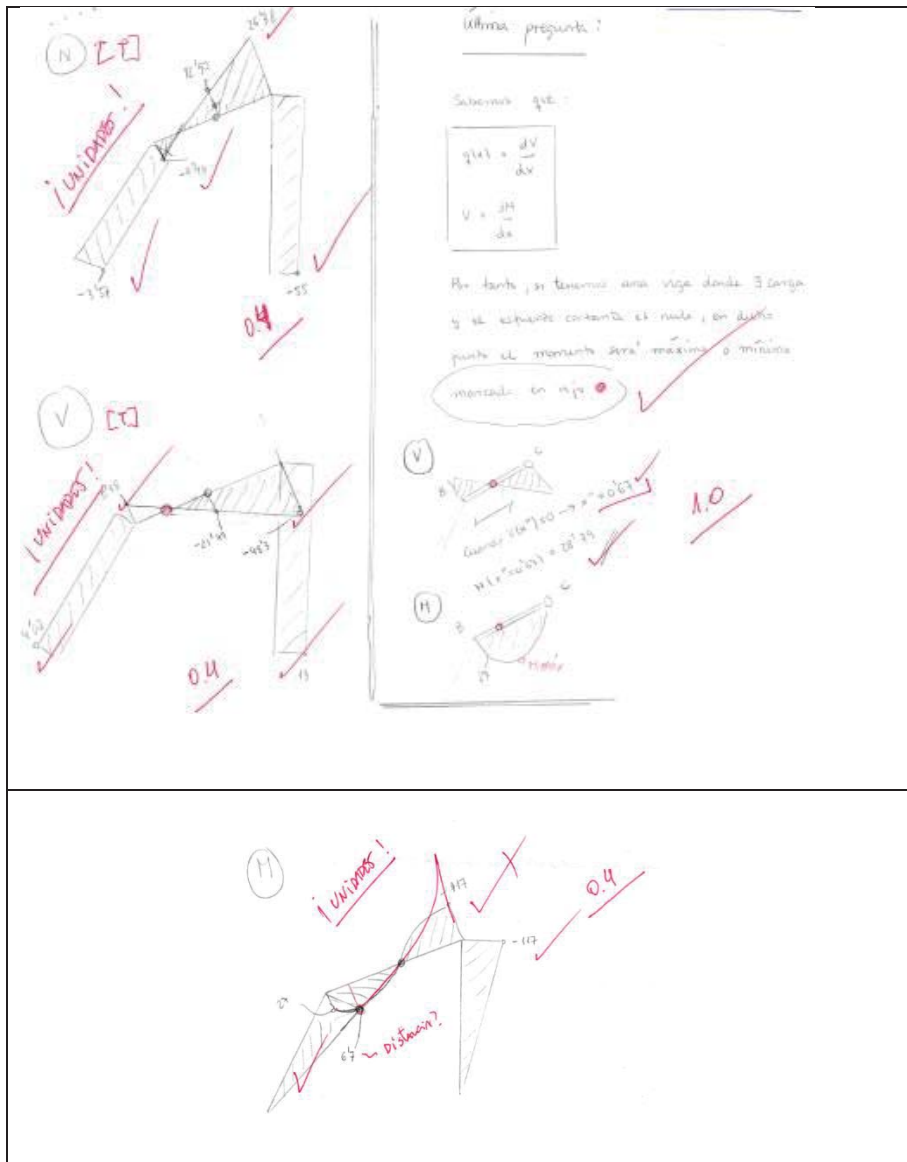
$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Por lo tanto, cuando el cortante se hace nulo en un determinado punto, entonces en dicho punto se produce el máximo (o mínimo) valor de momento, pues la pendiente de la función momento se hace cero.

Anexo 5. Solución del problema por estudiante del curso







Anexo 6. Transcripción del proyecto

A continuación se transcribe el proyecto que fue encargado por el profesor y los ayudantes del curso.

1. Introducción al proyecto

Para el diseño de una estructura de tres niveles, se le solicita realizar el análisis estructural mediante el programa de elementos finitos SAP2000. El edificio está estructurado en su totalidad por muros, vigas y losas de hormigón armado (H.A.). (Las secciones de los elementos estructurales se encuentran detallados en los planos).

Dadas las condiciones del proyecto, los casos y combinaciones de cargas deberá considerar en su análisis son:

Casos de carga (Load cases):

- D: Carga Muerta
- L: Carga Viva
- E: Carga de Terremoto

Combinaciones de carga (Combination cases):

- $1,4D$
- $1,4D + 1,6L$
- $1,2D \pm 1,4E + L$
- $0,9D \pm 1,4E$

La carga muerta (D) proviene del peso propio de los elementos estructurales, y, además, del peso de elementos no estructurales presentes en la estructura. La carga de elementos no estructurales, comúnmente es considerada como 100. La carga muerta de los elementos estructurales debe ser calculada a partir del volumen y peso unitario de los materiales usados.

La carga viva, o sobrecarga, es aquella que proviene del uso del edificio (principalmente tránsito de personas y elementos móviles), y se estima a partir de tablas, dependiendo del tipo de edificio.

La carga de terremoto se determina como un caso de "Análisis Espectral". Esto será explicado en la ayudantía oportunamente.

La estructura está dibujada en planos CAD, los cuales le serán suministrados por el aula virtual en la pestaña "Proyecto". Además, el arquitecto ha proporcionado un archivo REVIT, para su visualización.

2. Información para grupos de trabajo

El curso se dividirá en 4 grupos de entre 2 y 3 personas. Cada grupo deberá ser registrado con el ayudante y se le asignará un tipo de edificación de acuerdo con la siguiente tabla.

Grupo	Espesor Muros primer piso	Grado hormigón	Edificación	Carga viva
1	Según planos	G-25	Vivienda social	200 $\left[\frac{kgf}{m^2}\right]$ en áreas privadas 250 $\left[\frac{kgf}{m^2}\right]$ en pasillos
2	20 cm	G-30	Oficinas	250 $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$ en oficinas 500 $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$ en pasillos
3	25 cm	G-30	Biblioteca	300 $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$ en zonas de lectura y pasillos 400 $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$ en zonas de libros
4	30 cm	G-25	Hotel	200 $\left[\frac{kgf}{m^2}\right]$ en habitaciones 500 $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$ en zona común y pasillos

Grados de hormigón más comunes con su respectiva resistencia			
Grado		Resistencia específica $f_c \left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$	f'_c equivalente $\left[\frac{kgf}{cm^2}\right]$
H-15	G-12	150	120
H-20	G-16	200	160
H-25	G-20	250	200
H-30	G-25	300	250
H-35	G-30	350	300

Los pasillos se definen de forma clara en los planos del proyecto. El resto se dividirán como:

- 1) Para la vivienda social, las áreas privadas son todo lo que no corresponde a pasillo.
- 2) Para el edificio de oficinas, las oficinas son todo lo que no corresponde a pasillo.
- 3) Para el edificio de biblioteca, las zonas de lectura son la mitad de cada piso no correspondiente a pasillo, y la otra mitad son zonas de libro.
- 4) Para el hotel, la zona común es la mitad del segundo piso no correspondiente a pasillo. El resto es zona de habitaciones.

En ningún caso se debe cargar el techo.

3. Información sobre la entrega de avances

3.1 Entrega 1

Dibujar el SAP2000 la estructura, utilizando elementos tipo "frame" para vigas, muros y columnas. Debe considerar que, al momento de modelar mediante "frame", éstos se deben dibujar en el eje de cada elemento, para luego añadir la sección correspondiente. Con esta finalidad, se recomienda añadir ejes de grilla adicionales, que pasen por el centroide de los muros. Utilizar elementos tipo "área" o "Shell" para las losas. El proceso de mallado de las losas será explicado posterior a la entrega. No es necesario para esta entrega correr ningún análisis. Generar un reporte de no más de 2 páginas con:

- 1) Imágenes de las grillas definidas (comentarios de por qué las seleccionaron).
- 2) Imágenes del modelo realizado.
- 3) Comentarios de complicaciones que tuvieron al modelar.

3.2 Entrega 2

Crear y asignar las secciones y materiales correspondientes a cada elemento según corresponda. Además, generar la malla de elementos finitos para las losas. Asignar casos y combinaciones de cargas, y añadir cargas vivas y muertas al modelo (valores según correspondan). Generar un reporte de no más de 4 páginas con:

- 1) Vista de la malla de elementos finitos de la estructura (más comentarios).
- 2) Vista del Modo 1 del caso modela de deformación.

- 3) Resumen de cargas vivas y muertas usadas (más comentarios).
- 4) Reporte anterior corregido.

3.3 Entrega 3

Generar el caso de análisis sísmico de acuerdo a lo visto en ayudantía. Asignar masa sísmica según corresponda a su edificio. Analizar la estructura completa. Generar un reporte con:

- 1) Esfuerzos máximos (Momento, Corte y Normal) en todos los muros del primer piso. Comentar cuál es el muro que más corte se lleva, y explicar por qué.
- 2) Diagrama de momentos de 2 vigas a elección, para una combinación de cargas a elección. Comentar si el resultado es lógico o no.
- 3) Reportes anteriores corregido.

3.4 Entrega 4

Dibujar la cercha de techo del edificio, con las secciones y materiales que se indican por planos del proyecto. Añadir una carga en el centro, con un valor de 10 toneladas, en dirección vertical hacia abajo. Generar un reporte con:

- 1) Consideraciones para el modelo de la cercha (uniones, perfiles, orientación, etc.)
- 2) Deformaciones máximas de la cercha, comentar si son esperables.
- 3) Reportes anteriores corregidos.

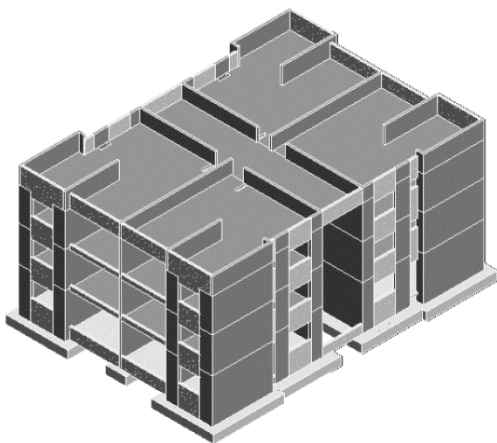


Figura. a Plano Arquitectónico

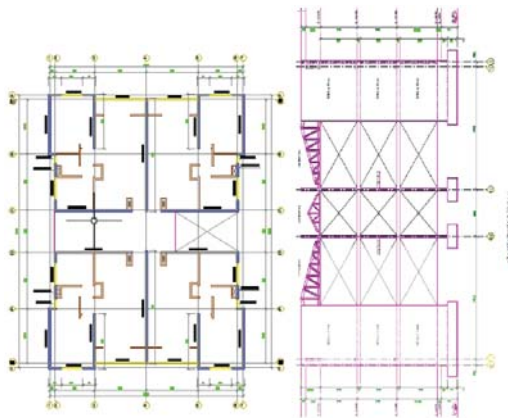


Figura. b Plano estructural