Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Conocimiento del profesor para enseñar proporcionalidad: del diagnóstico a la superación entre pares.

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática

Lino Fernando Cubillos Silva

Tesis dirigida por
Dr. Raimundo Olfos Ayarza.
Dr. Jorge Soto Andrade.

Valparaíso – CHILE
2017

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR PROPORCIONALIDAD: DEL DIAGNÓSTICO A LA SUPERACIÓN ENTRE PARES.

De

LINO FERNANDO CUBILLOS SILVA

TESIS DOCTORAL
presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO
Defendida públicamente el día 28 de agosto del año 2017 ante la Comisión de Tesis integrada por:

- Dra. Yuriko Y. Baldin, Universidade Federal de São Carlos, Brasil. Profesora externa
- Dr. Raimundo Olfos Ayarza, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Director de tesis
- Dr. Jorge Antonio Soto Andrade, Universidad de Chile, Chile. Profesor interno.
- Dra. Soledad Estrella, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesora interna.

Año 2017

CHILE

AGRADECIMIENTOS

Agradezco muy sinceramente el apoyo del Centro de Estudios Avanzados en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile y al Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso por el apoyo brindado en estos años de trabajo y estudio.

También a todos y cada uno de los académicos del programa de Doctorado en Didáctica de la matemática y, de modo especial, a los Doctores Raimundo Olfos Ayarza y Jorge Soto Andrade por su paciente e invaluable acompañamiento en el estudio y descubrimiento de la didáctica de la matemática así como también por la amistad prodigada sin reservas.

También agradezco a la Facultad de Filosofía y Humanidades por darme las facilidades para poder desarrollar este posgrado y a tantos colegas y amigos del Departamento de Estudios Pedagógicos que supieron brindarme su apoyo en los momentos precisos.

A mi familia, esposa e hijos que supieron, con su cariño siempre abundante e incondicional, alentarme y apoyarme en cada momento en este caminar académico que a veces se tornó árido y abrumador.

A mis padres, que ya ancianos, vi partir mientras desarrollaba este estudio doctoral. De seguro estarían o estarán orgullosos por la meta alcanzada gracias a su impulso inicial.

Tabla de Contenidos

CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN Y PROBLEMATICA

1.1 Introducción

En Chile, la enseñanza de la proporcionalidad está curricularmente ubicada, de modo explícito, según consta en las bases curriculares 2012, a partir de sexto grado de educación básica de acuerdo con las bases curriculares oficiales del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012) aun cuando la noción de proporcionalidad está implicada de modo indirecto en los niveles escolares precedentes (operatoria y representación de fracciones en quinto grado, conversión de unidades de medida en cuarto y tercero, representación de fracciones comunes, conversión de unidades de peso en tercero) pudiéndose rastrear su presencia hasta segundo básico en que aparece, como objetivo de aprendizaje, la determinación de la mitad y el doble de una cantidad dada (MINEDUC, 2012).

Esta circunstancia no dista mucho de la ubicación que en otros países suele otorgársele a la proporcionalidad en el currículo (Adjiage et al., 2007) pues es una idea extendida la conveniencia pedagógica de establecer una sincronía entre los temas matemáticos y el desarrollo psicológico de los niños y niñas en edad escolar. De acuerdo con estos antecedentes cabría esperar que, al finalizar la educación básica, los estudiantes comprendan, con profundidad y precisión, los conceptos de razón y proporción y sean además hábiles en el uso y aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas tanto en contextos cotidianos diversos, como en contextos matemáticos más abstractos.

El dominio de los conceptos involucrados en la proporcionalidad es relevante no solo por las muchas aplicaciones instrumentales de la proporcionalidad sino también por la estrecha relación existente entre el dominio de la proporcionalidad como objeto y herramienta matemática (Douady,1999) y el desarrollo del pensamiento proporcional como una expresión específica del pensamiento matemático. Para muchos autores (Lamón;1983; Godino; 1998; Ben Chaim; Yaffa; Bath-Sheva; 2007) el estudio de la proporcionalidad es un tema crucial de la educación básica pues opera como un momento curricular de tránsito desde formas de pensamiento aditivo (absoluto) a formas de pensamiento multiplicativo (relativo). También opera como un momento curricular de articulación e integración de los saberes estudiados y dominados en el primer ciclo básico (sistema de numeración, operatoria, medidas) con los tópicos matemáticos que requieren un cierto desarrollo del pensamiento relativo (semejanzas, homotecias, funciones, variaciones de escala) (NCTM, 2000).

En Chile los indicadores nacionales de rendimiento escolar en matemática no resultan satisfactorios pues dan cuenta de un bajo dominio de los objetivos de aprendizaje propuestos. En forma paralela y también de modo consistente con la percepción interna, los estudios comparados del rendimiento matemático escolar en los que Chile ha participado en matemática, (TIMSS, 2015), muestran que el desempeño de los estudiantes evaluados está significativamente por debajo del promedio de los países participantes (500 puntos), con un desempeño promedio de 459 en cuarto grado y 427 puntos en 8° grado. El mismo estudio señala que aproximadamente uno de cada tres niños (37%) que cursa octavo año está por debajo de los 400 puntos en esta prueba y que en cuarto básico el panorama es un poco mejor pues solo un 22% de los estudiantes está por debajo del nivel más bajo de 400 puntos. (TIMSS, 2015)

En este mismo sentido la prueba PISA, versión 2012, indica que el 52% de los estudiantes chilenos está bajo el nivel 2 que significa, en términos cualitativos, que no logra el nivel requerido [en matemática] para participar completamente en una sociedad moderna. El promedio de Chile en matemática es de 423 puntos, lo cual sitúa a nuestro país 71 puntos por debajo del promedio general obtenido por los 65 países participantes y ubicándose con ello entre el lugar 50-52 (PISA, 2012).

Es del caso mencionar que esta prueba tiene como propósito evaluar el grado de desarrollo de la:

> “Capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar la Matemática en una variedad de contextos. Incluye la capacidad para razonar matemáticamente y de utilizar conceptos matemáticos, así como procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos” (PISA, 2012)

Estos resultados solo han mejorado levemente en una década tal como se deduce de lo señalado por Felmer y Varas (2003) comentando los resultados que obtuviera Chile en la prueba PISA 2006: "Más de la mitad de ellos (un 28,2% de los jóvenes) no alcanza el puntaje límite inferior de esta categoría (357.8 puntos), lo que significa que se encuentran completamente excluidos de los conocimientos matemáticos mínimos que esta prueba permite caracterizar".

En este contexto no resulta extraño que a la mayoría de los niños, e incluso a muchos adultos, les resulte complicado responder preguntas del tipo:

> "¿Cuál es la razón entre la cantidad de mujeres y varones si en un curso hay 24 mujeres y 16 varones?

O que, enfrentados a un problema del tipo

> "¿Cuántos botones se requieren para fabricar 5 camisas si en la fabricación de una camisa se ocupan 7 botones". Resulta sorprendente constatar lo alta que resulta la tasa de errores en las respuestas[1].

1 Documento de trabajo no publicado.

1.2 Antecedentes preliminares

En una prueba realizada con alumnos de un curso de matemática en el nivel de bachillerato[2] se solicitó a los estudiantes que observaran los siguientes gráficos cartesianos: De los siguientes gráficos[3] ¿cuáles representan relaciones proporcionales y cuáles no?

Luego se solicitó a los estudiantes que indicaran cuáles de estos gráficos representaban relaciones de proporcionalidad y cuáles no y que, en el caso de ser proporcionales, manifestasen si se trataba de proporcionalidad directa o inversa.

2 Bachillerato es la denominación de un programa académico alternativo de ingreso a la universidad que originalmente implementaron en 1993 las universidades de Chile, Pontificia Universidad Católica de Chile y Pontificia Universidad católica de Valparaíso. Dura aproximadamente de cuatro semestres y opera como propedéutico de las demás carreras de la institución universitaria.

3 Tomado de "Proportional Reasoning". Rhode Island Departament of Education, Office of Instruction, June 2007 pp.9

Los resultados obtenidos de esta actividad se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1

Respuestas a pregunta sobre gráficos. Bachillerato U Chile 2015

Gráfico	Tipo de Relación	Respuestas correctas	Respuestas Incorrectas	% Logro	Orden
A	Proporcional Directa	29	1	96,7%	1
B	No Proporcional	16	14	53,3%	3
C	No proporcional	22	8	73,3%	2
D	No Proporcional	13	17	43,3%	4
E	Proporcional Inversa	10	20	33,3%	5
F	No proporcional	1	29	3,3%	6

FUENTE Datos recabados por el autor en actividad regular de clase mayo 2015

Tal como muestran estos datos, los estudiantes evaluados evidencian dificultades para reconocer que una relación de proporcionalidad directa se representa mediante una recta de pendiente positiva que intersecta al origen del sistema. Pero casi la mitad de ellos (47%) pareciera confundir la disposición colineal de los puntos que representan una relación entre variables por si sola como el único requisito necesario y suficiente para calificar como proporción directa y evidencian dificultades para precisar con seguridad si la variables que son proporcionales se representan mediante una función lineal o una afín.

Un alto porcentaje de los estudiantes evaluados en este curso de bachillerato (73%) también señala que una curva de crecimiento cuadrático, $y=x^2$ por ejemplo, no representa una relación de tipo lineal. Sin embargo este mismo argumento de la no linealidad aparece como fundamento para señalar que la relación representada por la curva E, de tipo asintótica, explica que dos de cada tres estudiantes, el 66% de la muestra, no reconozca la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.

Finalmente llama la atención que una gran mayoría, el 97,7% de los estudiantes consultados, piense que una recta de pendiente negativa que pasa por el origen es la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.

Los resultados preliminares anteriormente descritos dan cuenta de una comprensión superficial de la proporcionalidad aritmética, al menos respecto de las formas visuales con las que dicha proporcionalidad suele representarse. En este caso, de acuerdo con Duval, con el registro geométrico de representación de la proporcionalidad (Duval, 1999).

Estas deficiencias formativas se mantienen una vez culminada la vida escolar y se reflejan en la vida adulta tal como lo señala el Segundo Estudio de Competencias Básicas de la Población Adulta 2013 y Comparación Chile 1998-2013, (Microdatos, 2013, p.19), cuando afirma, en sus conclusiones, que el 51% de la población adulta considerada en el estudio se encuentra en una estado de "analfabetismo funcional" en el ámbito cuantitativo" vale decir, no poseen "las habilidades y competencias básicas necesarias para aplicar operaciones aritméticas incorporadas en materiales impresos, tales como los cálculos requeridos para llenar formularios de depósitos, estimar tiempos a partir de horarios, etc.".

En el mismo sentido algunos estudios como TEDS-M 2009 señalan que un 63,7% de los estudiantes de pedagogía participantes en el estudio era capaz de resolver problemas que involucran el concepto de razón y algo de razonamiento proporcional básico pero que tal desempeño era considerablemente inferior (40,4%) si se trataba de "...problemas verbales que incluyen razones de números naturales" del tipo:

> *"Pedro, Jaime y David tienen, entre los tres, 198 bolitas. ¿Cuántas bolitas tiene cada niño si se sabe que Pedro tiene seis veces más bolitas que David mientras que Jaime solo tiene dos veces más bolitas que David?* (Ávalos y Matus, 2010)

En suma, existen diversas manifestaciones de que en general la población, tanto escolar como adulta no evidencia dominio suficiente ni comprensión cabal de la proporcionalidad como contenido matemático lo cual muy probablemente se relacione también con el escaso desarrollo del pensamiento proporcional como habilidad de pensamiento necesaria para comprender y resolver situaciones cotidianas que involucren diversas magnitudes covariantes.

Más preocupante aun es que los docentes, vinculados directamente a su enseñanza, parecieran no estar ajenos a esta carencia en virtud de la cual podrían, sin quererlo por cierto, estar contribuyendo a reproducir esta falencia. En la medida que los conceptos asociados al estudio de la proporcionalidad no son abordados con la profundidad y exhaustividad requerida tanto en el sistema escolar como en los programas de formación docente también resulta muy improbable que los escolares puedan, con motivo del estudio de estos contenidos, desarrollar habilidades de pensamiento proporcional propuestas.

Se trata entonces de un tópico matemático particularmente difícil de enseñar o de aprender Cabe entonces preguntarse qué aspectos específicos de la proporcionalidad presentan mayores dificultades para su aprendizaje lo cual significaría que, tácitamente, estamos situando la dificultad en el contenido mismo en circunstancias de que bien podría tratarse de dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad. El propósito de esta tesis es conocer en qué aspectos específicos de la proporcionalidad se presentan mayores dificultades o falta de dominio tanto en estudiantes de pedagogía básica como en profesores de educación básica en ejercicio. Ello implica determinar, de manera previa, qué aspectos de la proporcionalidad matemática serán el foco de atención de dicho proceso evaluativo y bajo qué criterios se organizará el instrumento evaluativo.

Como parte del proceso de diseño del test evaluativo se ha consultado tanto los estándares para la formación de profesores de educación básica como los programas de estudio de 5° a 8° nivel de este mismo nivel escolar, en la idea de establecer y delimitar un primer campo de contenidos a indagar.

Una vez definido el ámbito temático del test se considera una primera etapa de testeo, revisión y ajuste del instrumento y luego, la aplicación a la muestra previamente considerada. Tras la aplicación y posterior tabulación de los datos se diseñará un taller de trabajo colaborativo-reflexivo entre pares destinado a la superación de los desempeños más deficitarios detectados con el test. Una vez realizado el taller se considera el desarrollo de una guía de actividades, apoyada con una hoja de cálculo, que permitirá determinar en qué grado se superaron las dificultades. Se cierra esta fase experimental con la realización y análisis de un set de seis entrevistas realizadas a un pequeño grupo de profesores que han vivido el ciclo completo (test diagnóstico – taller –guía) y que durante su participación evidenciaron menor dominio de los temas implicados.

En suma la investigación se orienta a diagnosticar y caracterizar aquellos aspectos conceptuales y estructurales de la proporcionalidad menos dominados, al menos por los sujetos participantes en el estudio, y además explorar y validar un modelo de trabajo y superación de las dificultades basado en el estudio colaborativo entre pares y el uso de una hoja de cálculo como dispositivo tecnológico de apoyo a la indagación.

En virtud a lo anteriormente expuesto se formulan las siguientes interrogantes de investigación:

1.4 Preguntas de Investigación

1. ¿Qué aspectos conceptuales de la razón, los porcentajes y las proporciones dificultan el desarrollo del pensamiento proporcional docente?
2. ¿Qué efectos tiene una experiencia de estudio colaborativo entre pares, con apoyo de una hoja de cálculo, en el dominio de los conceptos descendidos de la proporcionalidad?

1.5 Objetivos

Objetivo general

Explorar una estrategia de desarrollo del conocimiento del profesor de educación general básica acerca de la proporcionalidad sobre la base de un diagnóstico.

Objetivos Específicos

1. Caracterizar el conocimiento del profesor acerca del tópico proporcionalidad.
2. Explorar el funcionamiento de una estrategia didáctica para desarrollar el conocimiento del profesor acerca del tópico proporcionalidad.
3. Caracterizar las estrategias de análisis que utilizan los profesores con conocimiento deficitario del tópico proporcionalidad.

1.6 Paradigma Investigativo

En esta investigación se consideran procedimientos tanto cuantitativos como cualitativos. El propósito conjunto de ambos tipos de procedimientos es la obtención de evidencias que permitan comprender qué aspectos de la proporcionalidad presentan las mayores dificultades y afectan el dominio de la proporcionalidad en docentes de educación básica y en estudiantes de pedagogía básica. Se trata entonces de un modelo mixto, no correlacional, de carácter hermenéutico interpretativo que tiene su foco en el estudio de lo que los profesores en ejercicio y en formación comprenden de la proporcionalidad y cómo el estudio colaborativo entre pares posibilita la comprensión y el dominio de los aspectos menos entendidos de dicho tópico en la perspectiva de mejorar la calidad de su enseñanza en esta área. Con este fin se considera el diseño y aplicación de un test diagnóstico de respuesta cerrada cuyos resultados serán tabulados y luego, a partir de dichos resultados, el diseño y realización de un taller de estudio colaborativo para luego finalizar con un proceso de entrevistas a un subconjunto pequeño de la muestra destinado a conocer con mayor profundidad las formas de representación y las argumentaciones que construyen los profesores participantes en el estudio para discernir y fundamentar cuándo una relación entre variables covariantes configura o no una relación proporcional.

1.7 Metodología

Etapas de trabajo

- Construcción del marco conceptual que fundamente las diferentes categorías de desempeño relacionadas con el pensamiento proporcional. Esta etapa implica precisar conceptualmente los diferentes aspectos matemáticos y didácticos implicados en el dominio de la proporcionalidad matemática y su relación con el pensamiento proporcional, considerando que tanto la proporcionalidad como su enseñanza han sido entendidas y divulgadas de diferente modo a lo largo de la historia y de una cultura a otra en un proceso evolutivo que prosigue hasta nuestros días.

- Precisar cómo se enseña la proporcionalidad y cómo se desarrolla el pensamiento proporcional en Chile a la luz de los antecedentes históricos, didácticos y epistemológicos de acuerdo a las investigaciones más recientes teniendo como fuentes primarias las bases curriculares, los programas de matemática y los textos escolares. En esta etapa también se considera la adaptación y aplicación preliminar y exploratoria de test tomados de la literatura revisada. Esta aplicación se hace a pequeños grupo tanto de docentes participantes en cursos de desarrollo profesional desarrollados por ATEUCHILE[4] y por el Programa de Educación Continua (PEC)[5] entre los años 2012 y 2016 incluidos. Dichos cursos se dictaron bajo la forma de cursos de 30 a 100 horas como parte de convenios de asistencia técnica a diversas comunas del país[6]. en educación básica de primero, segundo y tercer año de la carrera con el propósito de confirmar ratificar y/o ajustar la conjetura inicial de que en general el pensamiento proporcional no está suficientemente desarrollado al menos al nivel requerido por quienes han de asumir su enseñanza a la población.

4 ATEUCHILE: Programa de asistencia técnica educativa de la Universidad de Chile que desarrolla programas de actividades de capacitación docente y directiva.

5 PEC: Programa de la Universidad de Chile que imparten formación continua a docentes en ejercido y presta asesorías educativas a establecimientos del sistema escolar.

6 Por ATEUCHILE en las comunas de San Ramón, Quinta Normal, Recoleta, El Monte, Quilicura, Chillán y Punta Arenas. Por el Programa de Educación Continua (PEC) en Santiago y Copiapó. Por la fundación Allende-Conaly-UChile en Talca, Frutillar, Parral y Lolol.

- Construcción de un Test diagnóstico que permita evaluar la habilidad práctica para resolver problemas que involucren la proporcionalidad y el ejercicio de habilidades de pensamiento proporcional. Al respecto existen algunos ítems y tests (Bart; Post; Bahr; Lesh; 1994; Ben-Chaim; 1998; Allain; 2000; Bright; Wright; Joyner; Wallis; 2003; Lim; 2012; Van Doreen; De Bock; Hessels;Janssens;Verschaffel;2005; Block;2007; Gómez; 2007) que han sido desarrollados a partir de la caracterización y clasificación de los problemas más frecuentes en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad. Se considera la elaboración de este Test diagnóstico a partir de la revisión de las distintas conceptualizaciones y propuestas revisadas, en la perspectiva de poder dimensionar tanto en estudiantes de pedagogía como en docentes en ejercicio el dominio de contenidos básicos de proporcionalidad implicados en el desarrollo del pensamiento proporcional y los tipos de estrategia empleados para resolver las distintas situaciones planteadas.
- Revisión de la documentación curricular oficial disponible relacionada con la enseñanza de la proporcionalidad. Ello implica analizar las bases curriculares, los programas de estudio y los textos escolares en relación a cómo entienden este tópico (razones, proporciones y pensamiento proporcional). Se requiere precisar a qué "enfoque" suscriben estos materiales de manera implícita o explícita y que demanda de dominio temático curricular se genera para los docentes en ejercicio y para los futuros profesores.
- La construcción del Test Diagnóstico descrito se realizará a través de una adaptación e integración de ítems de elaboración propia e ítems preexistentes tomados y adaptados de instrumentos similares que hayan sido testeados en pruebas pilotos realizadas por el autor.
- Se aplicará el test diagnóstico a una muestra de 100 estudiantes de pedagogía y 70 profesores de educación básica en ejercicio. Se aplicará una taller de trabajo de estudio colaborativo entre pares a 15 equipos de profesores, organizados en duplas o tríos, y se entrevistará a seis docentes que hayan participado en el diagnóstico y en los talleres.

- La entrevista será del tipo semiestructurada y se orientará a indagar en las argumentaciones y creencias de los evaluados tras desarrollar el Test Diagnóstico y desarrollar el Taller de estudio colaborativo. Estas entrevistas serán grabadas y transcritas para su posterior análisis discursivo. Todo el proceso anterior ciertamente implica el previo consentimiento informado de los participantes. Tanto los profesores como los estudiantes de pedagogía corresponden a voluntarios elegidos al zar de entre los participantes de un programa de pos título y de los tres cursos de formación inicial docente de la Universidad de Chile.
- Tras el procesamiento y sistematización de los datos se procederá al análisis e interpretación de los resultados en la perspectiva de construir una respuesta a las preguntas de investigación desde la perspectiva del marco teórico adoptado.
- Con ello se espera tener una imagen global de los dominios específicos y sobre todo de las brechas existentes en relación a los requerimientos que el propio curriculum demanda y a las necesidades formativas de los escolares que cursan los niveles en que estos temas se tratan.
- Elaboración de recomendaciones para la formación inicial y continúa en proporcionalidad. A partir de los datos obtenidos y en directa relación con la bibliografía revisada se desarrollará un conjunto de reflexiones y recomendaciones orientadas principalmente a la formación inicial docente y a la formación continua. Idealmente esta sección correspondería a un inventario de temas críticos relacionados con la proporcionalidad y su relación con el pensamiento proporcional acompañado de sugerencias didácticas y metodológicas para su superación.

Cronograma General de trabajo

CRONOGRAMA		2015				2106				2017			
Tema o actividad	**CAP**	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**
Antecedentes generales de la investigación	1	x	x	x									
Marco conceptual, revisión bibliográfica	2		x	x									
Proporcionalidad y pensamiento proporcional	3			x	x								
Enfoques de evaluación de la proporcionalidad	4				x	x							
Enseñanza de la proporcionalidad en Chile	4				x	x							
Estudio cuantitativo de la proporcionalidad	5					x	x						
Estudio cualitativo de la proporcionalidad	6						x	x	x				
Procesamiento y análisis de resultados	6							x	x	x			
Conclusiones y reflexiones	6								x	x	x		
Edición Final	-											x	x

Síntesis del capítulo

Esta tesis se plantea como un proyecto de investigación cualicuantitativa, de carácter descriptivo explicativo que procura identificar y caracterizar, comprensivamente, en qué aspectos de la proporcionalidad se tiene menor dominio y como una estrategia de estudio entre pares, apoyada en el uso de la hoja de cálculo, podría revertir de manera significativa dicha dificultad. El propósito central de la tesis es la comprensión del fenómeno descrito y su posterior descripción sin embargo no pude abstraerse del todo, del sentido de urgencia que tiene la exploración de estrategias remediales que permitan subsanar o al menos mitigar en el aula escolar la ocurrencia diaria de un tratamiento precario de un tema tan relevante como la proporcionalidad. Por ello se asume, adicionalmente la realización de una experiencia de aprendizaje colaborativo entre pares con apoyo de TIC que apunta al mejoramiento, en amplitud y profundidad, del dominio significativo de la proporcionalidad dada su incidencia en el desarrollo del pensamiento proporcional de los docentes mediante la discusión y reflexión de la propia práctica de enseñanza de este tema entre pares. La hipótesis de trabajo es que el pensamiento proporcional, en cuanto forma de pensamiento matemático, presupone el dominio de las múltiples sutilezas conceptuales de la proporcionalidad así como las diferentes formas de entender, histórica y culturalmente su naturaleza.

CAPITULO 2: MARCO CONCEPTUAL

2.1 Teorías sobre el conocimiento del profesor

En esta sección se describen principales constructos teóricos que constituyen el marco referencial desde el cual se diseña este proyecto investigativo y desde el cual también se analizan e interpretan sus resultados. Este marco también permite acotar o circunscribir el significado de algunos términos y conceptos que se emplean en la discusión y formulación de las ideas y argumentaciones desarrolladas en este estudio.

Un concepto particularmente relevante en este estudio es el que guarda relación con el conocimiento de los profesores o, mejor dicho, con los tipos de conocimiento que tienen, o debieran tener, los profesores.

Desde hace ya más de cuarenta años se vienen desarrollando estudios acerca de los distintos saberes y conocimientos que están involucrados en el ejercicio de la acción docente. Este interés por precisar la naturaleza de cada uno de los conocimientos que conforman el saber profesional docente surge del anhelo por comprender, en toda su complejidad, la profesión docente con miras al mejoramiento de la formación inicial.

Todo ello en un escenario que se caracteriza por el incremento de una demanda social y política de mayor calidad educativa en las escuelas y el advenimiento sostenido de sistemas de evaluación normalizada tanto del desempeño de los establecimientos educacionales como de los estudiantes y profesores. Por ello resulta del todo pertinente y necesario preguntarse qué habilidades y conocimientos es pertinente evaluar. ¿Qué tipos de conocimientos caracterizan y definen de modo más preciso la idoneidad del docente y sus saberes. Relacionado con estas preguntas también aparece un nuevo desafío: ¿cómo evaluar dichos conocimientos?, ¿Cuáles son las fuentes más adecuadas y los procedimientos más pertinentes para evaluar y poner en evidencia los conocimientos claves de los profesores?

Para las instituciones formadoras de profesores estas interrogantes y reflexiones también son muy necesarias y relevantes pues aportan evidencias y orientaciones respecto a cuáles son los tipos de conocimiento que se debe asegurar en la formación mediante el diseño coherente de rutas formativas y la definición de actividades curriculares idóneas para el desarrollo de cada tipo de conocimiento.

1. La investigación desarrollada en las últimas décadas acerca del conocimiento del profesor ha permitido comprender que si bien es cierto el conocimiento disciplinar es fundamental este no basta por sí mismo para formar un profesor idóneo tal como señala Bertliner (2000) refutando la idea común de que

   "*cualquier persona razonablemente inteligente puede enseñar; Todo lo que tiene que hacer es seguir los libros de texto. Todo está diseñado tan bien en estos días. Esa es la razón por la cual tantos padres pueden efectivamente educar a sus hijos en casa. De hecho, hay un montón de personas decentes que enseñan en los Scouts, o para sus grupos de la iglesia y lo hacen bastante, bien sin haber tomado nunca cualquier curso en la educación."* (Bertliner, 2000, p.358).

   La explicación de estos juicios, que exaltan y sobredimensionan la importancia del conocimiento disciplinar en el ejercicio docente, no se sostiene ni encuentra apoyo en la evidencia investigativa sobre el tema. Lo que la investigación señala es que, asociado al conocimiento disciplinar se requiere el desarrollo de otros tipos de conocimiento (Shulman; 1986; Wilson; 1989; Grossman; 1990; Ball;2000). La investigación también ha evidenciado que para efectos de enseñar matemática se requiere un conocimiento matemático especifico (Ma, 2010), que cumpla ciertos requisitos de profundidad y pertinencia. Ello, sin embargo, no significa que se pueda enseñar "sin dominar la materia", es decir, sin saber matemática. De modo análogo tampoco se podría esperar que alguien pudiese construir conocimiento didáctico de la matemática sin saber matemática. Lo que la investigación señala es que el conocimiento disciplinar, por ejemplo el saber matemático es un conocimiento necesario, en realidad imprescindible, pero no suficiente para la formación de un profesor de matemática idóneo.

Esta tesis sin embargo no se centra en el conocimiento pedagógico del contenido sino más bien en el conocimiento disciplinar del mismo, en este caso de la proporcionalidad en cuanto contenido matemático relevante de la educación escolar básica. A partir de los antecedentes e indagaciones preliminares se presume que la falta de una comprensión cabal del contenido obstaculiza e impide el desarrollo de los otros tipos de conocimiento, en particular del conocimiento didáctico o pedagógico del contenido, como suele denominarse a este conocimiento según las distintas tradiciones investigativas.

El "conocimiento de la *materia* que se ha de enseñar" es solo uno de los varios tipos de conocimiento implicados en la enseñanza y que, por sí solo, no basta para la formación de un profesor idóneo. Muy por el contrario, el trabajo de enseñar y lograr aprendizajes significativos en otros moviliza y articula no solo el conocimiento del contenido que se enseña sino, además, un conjunto de otros saberes y habilidades de similar relevancia como, por ejemplo, el conocimiento de cómo actúan y aprenden los estudiantes, de cómo opera la cognición humana, como se logra el aprendizaje en contextos de diversidad cognitiva y cultural, cómo se organiza y contextualiza el saber en los diferentes escenarios socioculturales y cómo se gestiona en cada clase los principios de inclusión y respeto a la individualidad.

La indagación respecto del saber de los profesores cobra relevancia en las últimas décadas asociada tanto al interés público por una educación de mejor calidad como a la preocupación, también pública, por comprender de modo fundado qué y cómo formar a los profesores para tener así docentes mejor preparados y escuelas más efectivas.

¿Cómo formar profesores que aparte de su compromiso con la profesión sean capaces de desarrollar en todos sus estudiantes habilidades de pensamiento matemático? Esas son las preguntas que interesan a la profesión docente y a las cuales la investigación en esta línea podría contribuir a responder.

Fortalecer la formación de los profesores de matemática es una clave si se quiere que en la escuela las clases de matemática promuevan el desarrollo de habilidades cognitivas de mayor nivel y que, de paso, también permitan robustecer y ensanchar la base matemática conceptual de sus estudiantes (Hill, 2005).

El estudio sistemático de la acción docente ha logrado poner en evidencia que los profesores desarrollan y requieren diferentes tipos de conocimiento para ejercer su labor de mejor manera. A continuación una breve descripción de los principales constructos teóricos acerca del conocimiento del profesor desarrollados en las últimas décadas y que sirven de marco y sustento teórico al desarrollo de esta tesis.

2.1.1 Conocimiento Pedagógico del Contenido.

Un hito relevante en el proceso de indagación acerca de las bases del conocimiento docente es el modelo de Shulman (1987), que logra reconocer al menos siete tipos de conocimiento en los profesores; algunos de estos conocimientos se relacionan más con el su acción en el aula mientras que otros se vinculan más medio escolar, como sistema, tal como se puede apreciar en la siguiente descripción:

1. **conocimiento de la materia impartida**;
2. conocimiento pedagógico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
3. conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente;
4. **conocimiento pedagógico de la materia:** esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
5. conocimiento de los educandos y de sus características;
6. conocimiento de los contextos educacionales, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, o la gestión y el financia miento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
7. conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

De este listado, y para el caso de la educación matemática, hay dos de estas categorías, la primera y la cuarta, que resultan particularmente relevantes pues a partir de esta enunciación se han desarrollado otros modelos que mantienen esta distinción entre lo disciplinar y lo pedagógico pero que han avanzado escudriñando al interior de cada categoría para levantar subcategorías y describir con mayor precisión la naturaleza y componentes de cada tipo de conocimiento. Esta distinción entre lo disciplinar y lo pedagógico también ha significado un antes y un después, tanto para el ejercicio docente como para los procesos de formación inicial y continua del profesorado. El esfuerzo investigativo a partir de estos trabajos ha logrado visibilizar tales conocimientos y situarlos como conocimiento esencial y distintivo de la profesión docente: uno es el conocimiento del contenido y el otro el conocimiento pedagógico del contenido con todas sus subcategoría y variantes según los distintos modelo.

Para Shulman el conocimiento del contenido es fundamental. No se puede enseñar lo que no se sabe o no se comprende y dominar el contenido es, ciertamente, un conocimiento muy relevante pero, en palabras del propio Shulman, el conocimiento del contenido (CK) es un conocimiento que forma parte un saber un poco más amplio.

Refiriéndose al conocimiento del contenido, Shulman sostiene que "El profesor no sólo debe "comprender a fondo la materia específica que enseña, sino además debe poseer una amplia formación humanista, la que debe servir como un marco para el aprendizaje adquirido anteriormente y como un mecanismo que facilita la adquisición de una nueva comprensión." (Shulman, 1987, p.176)

Para Shulman el profesor "tiene una especial responsabilidad respecto al conocimiento de los contenidos de la asignatura, el cual opera como fuente principal de la comprensión de la materia por parte del alumno" (Shulman, 1987). Pero, como sabemos, el profesor desarrolla su labor con grupos de varios estudiantes a la vez lo cual impone una exigencia adicional a la manera en que "esa comprensión [de la materia] se comunica a los estudiantes y como la diversidad del alumnado impone al profesor una "comprensión flexible y polifacética, adecuada para entregar explicaciones alternativas de los mismos conceptos o principios" (Shulman, 1987, p. 176)

Respecto del conocimiento pedagógico del contenido este es definido en el modelo de Shulman como "... la capacidad de un profesor para transformar el conocimiento del contenido que él o ella posee en formas que resulten pedagógicamente poderosas y, sin embargo, adaptables a las variaciones en la capacidad y los antecedentes presentados por los estudiantes. "(Shulman, 1987, p.15). En esta afirmación resulta clara la relación entre ambos tipos de conocimiento: el conocimiento del contenido es una condición para el surgimiento del conocimiento pedagógico. El conocimiento pedagógico del contenido se "juega" en la transformación que el profesor pueda hacer del conocimiento disciplinar con el propósito de ser enseñado a otros lo cual, conceptualmente, es muy próximo la noción de transposición didáctica (Chevallard, 1998)

2.1.2 Conocimiento matemático para la enseñanza.

El modelo de conocimiento matemático para la enseñanza, MKT, por su sigla en inglés, desarrollado a continuación (Ball, Hill& Bass; 2005; Ball, Thames&Phelps; 2008) constituye un relevante esfuerzo por caracterizar analíticamente la naturaleza tanto del conocimiento del contenido matemático (CK) como del conocimiento pedagógico del contenido (CPK) procurando distinguir en cada una de estas dos formas de conocimiento algunos dominios o subcategorías más específicos.

Así por ejemplo, en el caso del **conocimiento del contenido (CK)** o saber disciplinar Ball (2005) distingue los siguientes tipos de conocimiento específico:

a) **Conocimiento común del contenido (CCK)**. Se refiere a aquel conocimiento matemático que todo ciudadano instruido, profesional o técnico, domina y utiliza de manera cotidiana en el ámbito de su quehacer.
b) **Conocimiento en el horizonte matemático (HCK).** Es el conocimiento matemático que el profesor no tiene el deber de enseñar pero que forma parte de su acervo matemático personal y que es de carácter general. Este conocimiento le permite comprender, de un modo más holístico tanto el origen como el sentido y las conexiones de aquellos contenidos matemáticos que enseña con otros tópicos tanto de la matemática como de campos de conocimiento.
c) **Conocimiento especializado del contenido (SCK)** que corresponde a aquel tipo de conocimiento matemático que está directamente relacionado a los co-

nocimientos y habilidades matemáticas que el profesor requiere para enseñar adecuadamente a sus estudiantes. Este tipo de conocimiento presupone saber cómo plantear, resolver y estudiar problemas matemáticos con los estudiantes pero, sus atributo más distintivo, radica en el conocimiento de los argumentos y propiedades matemáticas que validan y fundamentan los procedimientos empleados tanto por la matemática como por los métodos no convencionales que a veces sus propios estudiantes pudieran producir ya sea en forma correcta, parcialmente correcta o errónea. Para este modelo, el conocimiento especializado de la matemática, es de interés específico para quien enseña matemática y es un tipo de conocimiento que emerge y se profundiza precisamente de la interacción del profesor con sus estudiantes y/o con sus pares que comparten la labor de enseñar matemática.

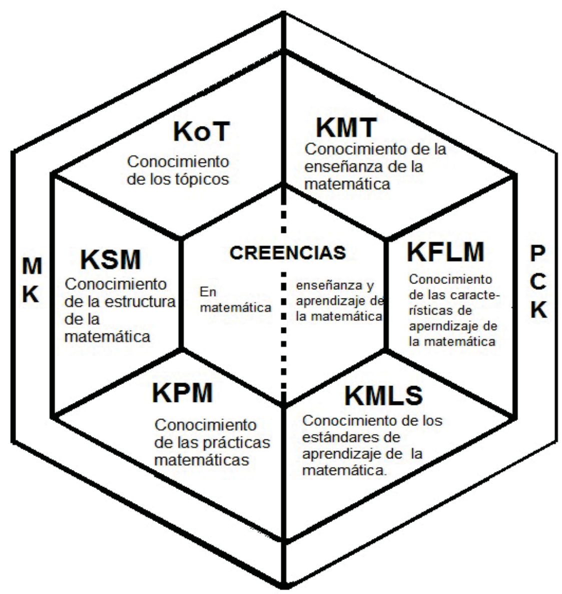
De igual modo el **conocimiento pedagógico del contenido (CPK)** comprende también tres dominios específicos cuyo contenido se explicita del siguiente modo:

a) **Conocimiento del contenido y los estudiantes** (KCS), consiste en lo que los estudiantes hacen y piensan cuándo aprenden matemática, lo que les resulta difícil o fácil, los errores frecuentes, las concepciones erróneas, sus ideas previas, los temores, expectativas e intereses respecto de la matemática y sus aplicaciones.
b) **Conocimiento de la enseñanza** (KCT) consiste en planear y organizar las clases de matemática así como el diseño, uso e interpretación de dispositivos evaluativos tanto formativos como sumativos en el desarrollo de la docencia.
c) **Conocimiento del contenido curricular** (KCC) consiste en el conocimiento del curriculum matemático escolar y los distintos instrumentos a través de los cuales se articula y operacionaliza dicho curriculum (bases conceptuales y políticas, programas y planes de estudio, textos y materiales escolares convencionales o digitales).

2.2 Conocimiento especializado del profesor de matemática.

Más recientemente un grupo de investigadores (Carrillo; Climent; Contreras; Muñoz; 2013; Escudero; Carrillo; Flores; Climent; Contreras; Montes; 2015) de la Universidad de Huelva ha avanzado en la idea de diferenciar y refinar, con mayor nitidez, la descripción de cada uno de los tipos de conocimiento que componen los dos ámbitos fundamentales propuestos por Shulman. Es así como este grupo construye y propone el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) o Conocimiento especializado del profesor de matemática, como un modelo analítico basado en la descripción de los diferentes tipo conocimientos que el profesor pone en juego en su quehacer profesional.

Básicamente el modelo MTSK se puede representar mediante un hexágono dividido en dos partes, en forma vertical, por uno de sus ejes de simetría. Una mitad representa el conocimiento de la matemática (MK) y la otra el conocimiento pedagógico de la matemática (PCK).



Cada mitad se divide a su vez en tres partes idénticas que representan subcategorías de cada tipo de conocimiento.

Por la relevancia que este modelo representa para el estudio acerca del conocimiento de la proporcionalidad en profesores y en estudiantes de pedagogía resulta del todo necesario realizar una descripción más exhaustiva de cada una de estas subcategorías que, para mayor claridad, podrían estructurarse del siguiente modo.

Conocimiento de la matemática (MK)

- **KoT**: Corresponde al conocimiento de los temas (Topics Knowledge) y de acuerdo a lo planteado por Carillo y equipo, se refiere al “conocimiento profundo de los temas matemáticos”. El conocimiento profundo de la matemática escolar significa para este modelo lo siguiente:
    - Comprender las propiedades y significados de manera fundamentada,
    - Conocer los procedimientos estándar y alternativos que se llevan a cabo al abordar un cierto contenido y
    - Conocer las distintas formas de representación matemática o registros de representación asociados a dicho contenido.
- **KSM:** Corresponde al conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics) a las diferentes relaciones que existen entre los conceptos e ideas matemáticas ya sea dentro de un mismo tema o bien de otros temas del mismo o distinto nivel escolar. Esta interconexión puede ser temática o bien temporal si es que se trata de relaciones entre saberes que se enseñan en diferentes momentos de una misma secuencia.
- **KPM:** se refiere al conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of mathematics) es decir, con el conocimiento de las formas que emplea la matemática para conocer y para crear o producir ideas, conceptos o procedimientos nuevos, desde un punto de vista estrictamente matemático.

Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)

- **KMT**: Este tipo de conocimiento se refiere al conocimiento de la enseñanza de la matemática (Knowledge of Mathematics Teaching), vale decir, respecto de distintos modelos, estrategias o teorías de enseñanza de la matemática.
- **KFLM:** Este tipo de conocimiento se refiere al conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (Knowledge for learning mathematics, vale decir cómo es que los estudiantes aprenden matemática, cuáles son los procesos cog-

nitivos que se activan cuando una persona aprende matemática de acuerdo a diferentes teorías o enfoques de aprendizaje.

- **KMLS:** Es el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (Knowledge of math learning standards). Se trata de conocer qué es lo que la sociedad o el sistema educacional esperan que los estudiantes aprendan de la matemática de cada eje temático según el nivel escolar en que los estudiantes se encuentren. y nivel escolar.

Para esta tesis el modelo MTSK, (Carrillo et al; 2015), constituye el marco referencial fundamental sobre todo en lo relacionado con el conocimiento del contenido o conocimiento de los tópicos (KoT).

En el caso de la proporcionalidad, como contenido disciplinar, se dedica el tercer capítulo para exponer y discutir su génesis, significado y evolución histórico-cultural como objeto matemático.

2.3 Representación de conceptos matemáticos

De manera complementaria y para aspectos específicos de la representación de relaciones entre variables, proporcionales o no proporcionales, se recurre en este estudio a conceptos tales como: registros de representación, tratamiento y conversión de registros. Todos estos conceptos son utilizados en el sentido en que son definidos y comprendidos por la teoría de registros semióticos (Duval, 1999). En el caso de la proporcionalidad se hace referencia a esta teoría en cuanto ella permite incorporar, de manera deliberada y sistemática, una diversidad de registros de representación tanto en la evaluación como en la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en la perspectiva de desarrollar el pensamiento proporcional en los docentes.

Desde esta perspectiva la teoría aporta un punto de vista especialmente valioso, que permite relevar, en el ámbito del conocimiento del contenido matemático, el rol que juega la representación de las ideas y los conceptos matemáticos (semiosis) en la construcción y desarrollo de sentido y significado. Para Duval, refiriéndose a los cambio de registro, "…la conversión de las representaciones es, para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de formación o de tratamiento. Esto, porque solo la conversión puede favorecer la coordinación de los registros de representaciones." (Duval, 1999, p.49)

El tránsito entre distintos registros de representación permite detectar en contextos de evaluación, el grado de comprensión de las sutilezas involucradas en el estudio de la proporcionalidad, es decir, permite hacer evidentes las preconcepciones erróneas así como las inexactitudes conceptuales.

De otra parte, el oportuno y sistemático uso de conversiones (cambios de registro), cuidadosamente coordinadas opera como un factor didáctico que facilita y enriquece la comprensión de conceptos y procesos matemáticos. Así por ejemplo, la representación gráfica de los valores que adoptan dos variables, constituye un cambio de registro que, analizado detenidamente con los estudiantes, permite ampliar el repertorio de criterios para discernir cuándo una relación entre variables es o no proporcional.

Para esta teoría "Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica*, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas* visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación." (Duval, 1999).

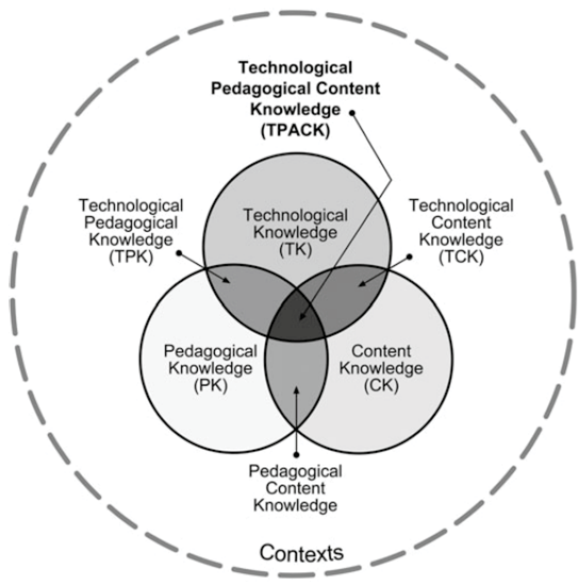
Las ideas y conceptos matemáticos se comunican y se comparten a través de una lenguaje específico, distinto del lenguaje natural, que adopta diversos "registros semióticos" de representación: registro figural, algebraico, geométrico, tabular, etc. Un mismo concepto (noesis), en virtud de la transformabilidad de las representaciones puede, de hecho, ser representado en diferentes registros semióticos.

Una razón, un porcentaje o una proporción son habitualmente representados en diferentes registros pero esta circunstancia no es aprovechada de manera sistemática en la enseñanza de la proporcionalidad ni tampoco, en general, es objeto de estudio en la formación docente ni en la enseñanza escolar lo cual constituye una grave omisión pues ella afecta, muy directamente una de las dimensiones específicas del conocimiento del contenido (KoT): su representación.

2.4 Integración de TIC en educación matemática.

En esta tesis se hace referencia al uso de la hoja de cálculo como medio tecnológico digital de apoyo al estudio de la proporcionalidad. Ello amerita explicitar tanto los propósitos y modalidades de dicha incorporación así como también sus fundamentos e implicancias didácticas.

La incorporación de un recurso tecnológico como la hoja de cálculo se comprende y fundamenta en una variante reciente del modelo PCK, denominada TPACK[7], por el acrónimo en inglés. Este modelo permite comprender el rol de las tecnologías de la información y comunicaciones en su relación con los otros saberes del profesor y fue desarrollado recientemente por Mishra y Koehler (Koehler et al, 2014).



De acuerdo con este modelo existiría un nuevo tipo de conocimiento que el profesor debiera desarrollar denominado "conocimiento tecnológico del contenido" y que junto a los otros dos tipos de conocimiento conforman el conocimiento que ha de tener un profesor para integrar adecuadamente los recursos tecnológicos, entre ellos los recursos informáticos, a la labor docente.

El modelo, de acuerdo con su representación gráfica, tiene cuatro intersecciones de las cuales tres son más conocidas y entendidas por los profesores:

7 Technological, Pedagogical And Content Knowledge

a. El Conocimiento Pedagógico de los contenidos, es el conocimiento de cómo enseñar un contenido concreto.
b. El Conocimiento Tecnológico del Contenido, que es la capacidad de elegir o seleccionar las herramientas o recursos tecnológicos pertinentes para un contenido en particular.
c. El Conocimiento Tecnológico Pedagógico, que es saber cómo enseñar bien con las nuevas tecnologías.

Pero el modelo plantea una cuarta intersección donde los tres principales conocimientos y los tres derivados de una intersección se integran, para generar el Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido, es decir el conocimiento necesario para integrar las tecnologías de forma efectiva en el aprendizaje de los estudiantes basado en el Currículum, que se vuelve aún más complejo si se toma en cuenta el contexto o los diferentes contextos en los que ocurre lo anterior, como la diversidad cultural o del lenguaje, el tiempo y la tecnología disponible o sus niveles socioeconómicos por ejemplo.

Un aspecto relevante de este modelo es que reconoce y describe la especificidad de cada tipo de conocimiento pero, a la vez, establece y reconoce la integración entre ellos con toda la complejidad que ello pueda involucrar. El modelo aspira a evitar la disociación que comúnmente se aprecia en aquellas clases en que se ocupan recursos tecnológicos digitales (tablets, software, calculadoras computadores, internet). Para este modelo la tecnología camina detrás de los objetivos y prioridades didácticas y de las ideas matemáticas que el profesor estudiará con sus discípulos. Evocando el comentario de J. Harris, “no se diseña una casa para que ella armonice bien con la grifería del lavamanos, sino exactamente al revés”, es decir, se busca la grifería para que ella armonice con la casa y su estilo. (Harris, 2005). En esta metáfora la grifería corresponde a la tecnología y la casa a la estrategia didáctica de la clase de matemática. Sin embargo esta metáfora es, como suele ocurrir con las metáforas, solo parcialmente cierta pues, en el caso de la tecnología informática el “recurso” abre o posibilita otras formas de clase menos centrada en el profesor como fuente de información y más centrada en el desarrollo de habilidades de los estudiantes.

Los recursos digitales, de acuerdo con esta metáfora, han de seleccionarse para que ellos sean funcionales y coherentes con las definiciones y estrategias didácticas a emplear en el aula y no al revés. Tales estrategias articulan un profundo conocimiento del contenido matemático y favorecen el desarrollo y puesta en obra del enfoque didáctico. Sin embargo es necesario advertir que las nuevas tecnologías solo posibilitan mejores escenarios didácticos pero no los garantizan. El factor profesor sigue siendo determinante. Por ello el docente ha de conocer cabalmente tanto las posibilidades como las limitaciones que estos medios digitales implican. Este conocimiento de la tecnología es fundamental para que el docente pueda, efectivamente, emplear dicho recursos como un "puente" entre la matemática abstracta y la matemática concreta. (Baldin, 2003).

En el contexto de esta investigación el recurso tecnológico empleado es una hoja de cálculo[8]. El nombre comercial de la hoja que se utilice no es realmente relevante pues el uso que se hace de ella es bastante básico y cualquier hoja o planilla electrónica que se tenga a mano servirá para realizar eficazmente acciones tales como construir una tabla de valores para cada variable, diseñar una gráfica de dispersión o gráfica del tipo XY a partir de los pares ordenados de la tabla, calcular productos o cocientes con los datos de cada fila y/o columna en la perspectiva de obtener evidencias que permitan discernir el tipo de relación que existe entre ambas variables, ampliar las imágenes, interpolar o extrapolar datos en una gráfica, etc.

El uso de la hoja de cálculo en este trabajo tiene como propósito hacer más expedita la representación de una relación dada en distintos registros semióticos: tabular, geométrico o algebraico de modo tal que sea el software, la hoja de cálculo, quien automatice aquellas operaciones rutinarias del trabajo matemático (dividir, multiplicar, graficar, aumentar o disminuir el tamaño de una imagen, calcular más puntos, etc.).

El tiempo liberado con esta automatización de tareas rutinarias permite al usuario centrarse en aquellas tareas más analíticas y creativas tales como comparar

8 En este caso se utilizó MSExcel versión 10 de 32 bits para Windows 7

cocientes, identificar formas gráficas y tendencias, reconocer e interpretar patrones, discernir nuevas pruebas o constataciones numéricas. Interpolar puntos, etc. En suma, la hoja de cálculo automatiza las tareas rutinarias, genera evidencias visuales y cuantitativas y abre al usuario un espacio y un tiempo para interpretar y discernir cualitativamente la evidencia generada.

CAPITULO 3: PROPORCIÓN Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

3.1 Breve estado del arte.

En este capítulo se hará una descripción general de las principales áreas y temáticas de investigación en relación a la proporcionalidad y a su enseñanza en la últimas cinco décadas. Este propósito supone el establecimiento de algunos criterios que permitan organizar y categorizar los distintos trabajos e investigaciones consideradas así como también circunscribir temáticamente dicha revisión a aquellos trabajos que más directa relación tienen con el contenido de esta investigación. Ello se explica en parte a la gran cantidad de artículos escritos y a las investigaciones llevadas a cabo sobre el tema de las razones, la proporción, la proporcionalidad y el pensamiento proporcional, tanto en Europa como en América y Asia.

Una primera categorización, de carácter más bien amplia es la de tomar los distintos trabajos y agruparlos por áreas temáticas tal como se detalla a continuación.

a) **La proporción como objeto matemático**: Estudios acerca de la naturaleza matemática de la proporcionalidad. En estos trabajos se investiga y profundiza epistémicamente los conceptos de magnitud, razón y proporción a partir de las fuentes más antiguas de dichos conceptos tales como el Papiro de Rin, la teoría de la proporción de Eudoxo y su posterior reelaboración contenida en los Elementos de Euclides: También comentarios relativos al libro de los "nueve capítulos" comentado por Liu Hui, los escritos de Omar Khayyam (Oller, 2103) así como también otras fuentes más recientes relacionadas con la "algebrización" de la proporción y, más recientemente, con el proceso de re-conceptualización de la proporcionalidad desde la perspectiva de la función lineal. En esta línea encontramos el capítulo 6 de la Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas de Hans Freudenthal (Freudenthal, 1983), el Análisis fenomenológico de los conceptos de razón y proporción expuestos por Lajusticia y Puig (Lajusticia et al., 2002). También cabe mencionar los trabajos de Susan Lamon por conectar el los conceptos de razón y proporcionalidad con el pensamiento proporcional (Lamón, 1993) y la "Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales" (Guacaneme, 2012), la tesis de Eugene Comin Proportionnalité et function linnêaire. Caractères, causes et effets didactiques des evolutions et de rêformes dans la escolarité obligatoire, (Comin, 2000), La teoría de la proporción Pitagórica de Guillermo Correa Pabón (Correa, 2006) y por cierto el estudio de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1991). De la lectura de estos trabajos se desprende que los conceptos (y también los procedimientos) asociados al concepto de razón y proporcionalidad, han sido entendidos de modo diverso según época y cultura y que su entendimiento presenta complejidades derivadas de su propia estructura conceptual. Por ello, la enseñanza de la proporcionalidad constituye un "hueso duro de roer" (Perry et al., 2003) al referirse al trabajo y los esfuerzos necesarios para mejorar la calidad de su enseñanza en la escuela.

b) **Enseñanza de la proporcionalidad**. Otro campo de estudio de la proporcionalidad se refiere a su enseñanza en los distintos niveles del sistema escolar. Resultan relevantes los estudios y propuestas de enseñanza realizados en 5°, 6° y 7° grados de educación primaria, (Van den Brink, 1979), (Karplus et al, 1983) (Arsac, 1992), (Ben-Chaim et al., 1998), (Singh, 2000) (Hironaka, 2006), (Peng Yee, 2014). En ellos se estudian estrategias de enseñanza de la proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento proporcional ya sea mediante datos (razones) presentados como tablas numéricas de doble entrada (Schilley, 2008), o bien creando "cartas de colores" o "pantones" mediante el uso de razones que definen la proporción de cada color básico mezclado para obtener un determinado matiz cromático con niños de 5° a 8° grado (Beswick, 2011). También se reportan experiencias de enseñanza basadas en la manipulación de objetos virtuales en un computador utilizado bajo el enfoque de aprendizaje mediante interacción corporeizada (embodied interaction) (Abrahamson et al., 2011) y estudios que correlacionan la edad de los estudiantes de educación primaria con la tasa de errores en la discriminación de relaciones proporcionales y no proporcionales en problemas basados en situaciones de la vida cotidiana (Van Dooren, 2010).

c) **Evaluación de la proporcionalidad**. En esta categoría se ubican aquellos estudios acerca de la evaluación del pensamiento proporcional. En los artículos y tesis revisados también aparece la evaluación como tema de interés investigativo, tanto del conocimiento acerca de las razones y las proporciones como del estado de desarrollo del pensamiento proporcional. Este último se entiende como el tipo de pensamiento que se pone en juego cuándo las personas enfrentan y resuelven, razonando matemáticamente, problemas en los cuales hay implicadas magnitudes covariantes, comparaciones múltiples y procesamiento de información diversa" (Behr et al, 1988). Por supuesto que el diseño de dispositivos evaluativos involucra siempre un esfuerzo teórico para definir con profundidad el tipo de saber o habilidad que se quiere evaluar y, de manera inevitable, la identificación y formulación de aquellos atributos o características relevantes que describen los que se quiere evaluar. A esta línea investigativa se adscriben trabajos como el de Ashley (Ashley, 2000) quien se vale de un set de nueve problemas para determinar si los estudiantes pueden comparar correctamente un par de razones, calcular las medidas de un objeto ampliado o reducido, interpretar un gráfico de velocidad variable en el tiempo, calcular mezclas según razón dada o comparar variaciones relativas en contextos cotidianos. Otro importante aporte a la construcción de instrumentos evaluativos de la proporcionalidad es el modelo de análisis de ítems de una prueba basado en el concepto de semidensidad como criterio de calidad de un ítem (Bart et al, 1994). De acuerdo con este modelo un ítem es semidenso si dicho ítem permite al evaluador interpretar exactamente los tipos de errores que los estudiantes cometen cuando responden el ítem.

En términos más formales un ítem será semidenso, según Bart y equipo, si cumple con los siguientes atributos:

- las respuestas que los estudiantes generan para resolver el ítem permiten, de manera clara y evidente, construir una interpretación plausible,
- si las respuestas dadas por los estudiantes son discriminables, es decir, si es posible agrupar las respuestas según el tipo de error en categorías "disjuntas".

- si es factible reconocer la regla cognitiva usada, vale decir, si se puede identificar y describir nítidamente el tipo de error matemático específico que ha de cometerse para responder de cada manera posible.
- si todas las reglas cognitivas están identificadas, vale decir, si todos los tipos de errores están identificados. Dicho de otro modo, que no existen respuestas erróneas cuya lógica o fundamento se desconozca. (Respondieron incorrectamente pero no sabemos por qué)

  El modelo también define los conceptos de “microteoría cognitiva” y “regla cognitiva” entiendo que el primer concepto, microteoría, está asociado al ítem y corresponde a todas las respuestas posibles que un estudiante pudiera dar al ítem y que se encuentran asociadas, de manera biunívoca a un tipo de error específico. El segundo concepto en cambio, la regla cognitiva, corresponde al tipo de error específico que el estudiante comete cuando marca una alternativa incorrecta. (Bart et al., 1994).

  Este modelo sostiene que un ítem no sirve de mucho si no es posible asociarlo a una microteoría cognitiva que a partir de cada una de sus reglas específicas permita identificar, de manera precisa, el tipo de error matemático que un estudiante está cometiendo al responder de una determinada manera el ítem. Se exige a cada ítem que informe con claridad y precisión qué es lo que realmente el estudiante necesita corregir, comprender o profundizar.

Otros autores (Obando et al, 2014) agrupan la producción investigativa acerca de las razones, la proporcionalidad y el pensamiento proporcional en tres grandes momentos, según su foco o dedicación investigativa: Procesos cognitivos, Estructura matemática y Aspectos antropológicos y semióticos.

El primer momento, proceso cognitivos, se refiere a todo el trabajo investigativos que se desarrolla en el ámbito de la cognición humana y que por cierto considera los estudios de Piaget e Inhelder (1958) que asocian el estudio de la proporcionalidad desde la perspectiva del desarrollo de una forma de pensamiento específica, el pensamiento abstracto de tipo proporcional, como expresión de una etapa o estadio del desarrollo del pensamiento humano. Si bien es cierto en este ámbito investigativo la atención estuvo centrada inicialmente en los procesos cognitivos en los años posteriores derivó hacia un tipo de investigación que se preocupó, según Obando y su equipo, en las condiciones de enseñanza (Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Noelting, 1980; Pulos & Tourniaire, 1985; Tourniaire,1986) en un intento por detectar aquellos factores de la enseñanza (estrategias, secuencias, materiales y actividades) que afectan y favorecen el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Un segundo momento, estructura matemática, corresponde básicamente a la profundización respecto de la naturaleza matemática de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en términos análogos a lo descrito en el primer punto de la categorización anterior (Obando et al, 2014, p. 25). Obando reconoce en este momento varias subcategorías temáticas entre las cuales se puede mencionar el estudio de procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales, las fracciones y su relación con las magnitudes, la relación entre al aprendizaje de los números racionales y el desarrollo del razonamiento proporcional, la medida de magnitudes y el aprendizaje de los números racionales, los campos de investigación y las trayectorias de aprendizaje, las fracciones como acomodación de esquemas de conteo, razonamiento por analogías, conciencia metacognitiva de la linealidad, etc.

Finalmente Obando señala que un tercer momento investigativo es el que se ha centrado en lo antropológico y semiótico que tiene que ver con el desarrollo de investigaciones acerca de la proporcionalidad desde la perspectiva de la teoría antropológica de lo didáctico, TAD, de Bosch (1994) y García (2005), así como también en el estudio de las distintas formas de representación de las razones y las proporciones (Adjiage et al., 2007). Un aspecto interesante en esta “organización” de la investigación es el reconocimiento de una tendencia de la enseñanza de la proporcionalidad a transitar desde una perspectiva aritmética, basada en razones y proporciones, hacia una perspectiva más algebraica del tema basada en las funciones lineales. (Hersant, 2001)

3.2 Proporcionalidad y razonamiento proporcional

En este trabajo se alude frecuentemente a la proporcionalidad y al razonamiento proporcional, dos conceptos íntimamente relacionados e interdependientes, pero de ninguna manera equivalentes. Para algunos autores (Karplus, et al., 1983, p.219) el razonamiento proporcional es un término que sirve para designar el tipo de razonamiento que se emplea en un “sistema de dos variables entre las cuales existe una relación funcional lineal”

Esta definición circunscribe el razonamiento proporcional solo al tipo de razonamiento que se pone en juego en el estudio de relaciones que puedan ser modeladas como una función lineal, sin embargo, lamentablemente no considera que este tipo de razonamiento también está presente cuando se trata de proporcionalidad inversa y se pone en juego cuando se requiere discernir si una situación cotidiana dada es modelable mediante una función lineal o una afín. Claramente el tipo de razonamiento proporcional no se agota ni se circunscribe a un objeto matemático específico como la función lineal aun cuando ella sea, desde el punto de vista matemático, la expresión más clara de la proporcionalidad directa.

Otros investigadores han definido el razonamiento proporcional como aquel tipo de razonamiento que “consiste en ser capaz de construir y resolver algebraicamente las proporciones" (Lamón, 1993, p.41). Ciertamente se trata de una definición más amplia que la anterior pues vincula este tipo de razonamiento al trabajo con proporciones, en diferentes tipos de contextos, matemáticos y no matemáticos. Un rasgo distintivo de esta definición es la de situar el razonamiento proporcional como un tipo específico de razonamiento algebraico. Pensar algebraicamente la proporcionalidad equivale a identificar su estructura conceptual, sus propiedades y relaciones pero, sobre todo, reconocer implícitamente que ella constituye un objeto matemático específico, diferente de otros a los cuales suele reducirse. Un objeto matemático dotado de identidad, con una historia propia y con múltiples expresiones según la cultura que la ha estudiado No se trata por ende de un caso particular de función de primer grado ni es tampoco una simple igualdad de dos cocientes o, finalmente, de una familia de problemas aritméticos solucionables con alguna algoritmia común.

Otra definición tan interesante como las anteriores es aquella que sitúa al razonamiento proporcional como una forma específica de razonamiento matemático Se trata de la definición de Behr, Lesh y Post que define al razonamiento proporcional como "una forma de razonamiento matemático que implica un sentido de covarianza y de comparaciones múltiples, y la capacidad de almacenar y procesar información diversa" (Behr et al., 1988.pp.92). Ciertamente esta definición es menos restrictiva pues, en su formulación, contiene expresiones que aluden no solo a la naturaleza de los conceptos matemáticos en juego (covarianza, variables, comparaciones) sino también a los procesos intelectuales involucrados en su estudio y manipulación (memorizar procesar información diversa). El razonamiento proporcional en este caso es entendido como un cierto tipo de actividad intelectual, matemática, que se activa y pone en acción con motivo de estudiar cantidades variables que se interrelacionan y que, en su evolución, pueden o no configurar patrones de variación típicos del repertorio conceptual de la proporcionalidad. Lo novedoso de esta definición es la referencia a la capacidad cognitiva de almacenar y procesar información diversa. Esta manera de entender el razonamiento proporcional pone más en la atención a los procesos intelectuales de quien trabaja con proporciones que a la naturaleza misma de la proporción como objeto matemático.

3.3 La proporcionalidad como objeto matemático que evoluciona

Como ocurre con muchos términos y objetos relevantes de la matemática el concepto de proporcionalidad así como también el objeto específico que la compone, la razón, constituyen constructos teóricos cuyo desarrollo y contenidos puede ser rastreado longitudinalmente a través de la historia mostrando de este modo como ellos no siempre han sido entendidos del mismo modo o con el mismo énfasis. Es común el error de pensar que la matemática y sus verdades han sido formuladas “correctamente” de una sola vez y para siempre.

Ello ciertamente no es así pues cuanto más distante, temporal o culturalmente, hablando sea la fuente consultada, más riesgo hay de que los vocablos y sus significados sean diferentes de los conceptos y significados que tales vocablos o sus traducciones tienen en la actualidad.

La primera evidencia documentada que se tiene del estudio de las razones y la proporcionalidad la encontramos en los Elementos de Euclides, específicamente en los volúmenes V y VII. En ellos se recoge en gran medida la teoría de las proporciones desarrollada por Eudoxo de Cnido[9], discípulo de Platón. Es así como en el Volumen V, definición 3, (citado en Oller y Gairín, 2013) el concepto razón es definido en los siguientes términos:

“una razón es una determinada relación con respecto a su tamaño, entre dos magnitudes homogéneas”

Ciertamente esta definición hace referencia al campo semántico de las magnitudes pero no de los números. Para nuestra mirada actual, esta definición resulta ambigua y abre un espacio de incertidumbre: ¿A qué se refiere con “determinadas relaciones”?, ¿Qué tipo de magnitudes están involucradas? ¿Cuándo dos magnitudes son “homogéneas”?.

En el enunciado de esta definición aparecen las palabras tamaño y magnitud refiriéndose a conceptos o nociones diferentes. Aun teniendo en cuenta que ambos términos corresponden a traducciones del texto original escrito en griego antiguo. Es pertinente en este punto la precisión hecha por Guacaneme (2012) al señalar que “este carácter no constituye una falencia de la teoría” sino una opción deliberada que no considera necesario ni pertinente mayor precisión. En este mismo sentido se desarrolla la idea de que, para Euclides, la razón es una relación que se constituye entre dos magnitudes relacionadas con los atributos de los cuerpos geométricos pero no esencialmente como una relación entre los números que pudieran usarse para cuantificar dichos atributos. Es decir, el énfasis está puesto en la relación entre las superficies de dos cuerpos pero no entre las áreas de dichos cuerpos. En otras palabras la razón es, conceptualmente, una relación entre atributos de figuras geométricas y no entre los números que se usan para medirlas.

9 Filósofo, médico, astrónomo y matemático griego que vivió entre los años 390 a 337 A.C. en Cnido (actual Turquía).

“Respecto del tamaño de una magnitud se puede señalar que es una característica intrínseca del objeto geométrico, de orden cuantitativo, no numérico, y no de este en relación con otro” (Guacaneme, 2012)

3.3.1 El concepto de razón en Euclides

El concepto de razón aparece en la obra de Euclides como parte del estudio de la conmensurabilidad, es decir, de la propiedad de dos trazos, AB y CD, de contener a un tercer trazo EF o al menor de uno de ellos un número exacto (entero) de veces. Desde este punto de vista las magnitudes se refieren al largo de los segmentos o trazos con los cuales se realizan las construcciones que permiten argumentar las propiedades y las relaciones. La búsqueda del trazo más largo (EF) que sirviera de medida entera de dos trazos AB y CD mayores llevó a los matemáticos griegos pre-euclidianos a desarrollar el método de antifairesis como un algoritmo que, dadas dos magnitudes a y b, permitiese encontrar el máximo común divisor (MCD) de ellas.

La antifairesis, conocida luego como el algoritmo de Euclides, es un procedimiento que permite encontrar la mayor medida común posible entre las medidas de dos segmentos dados, que no sean primos entre sí, mediante la realización de sustracciones sucesivas. Así por ejemplo, la mayor medida que permite medir exactamente a los segmentos AB y CD de 12 cm y 9 cm, respectivamente, es el segmento EF de 3 cm tal como se puede verificar realizando el algoritmo de antifairesis siguiente a partir del par 12 y 9 y recordando que se debe restar la segunda componente de la primera, siempre y cuando la primera sea mayor o igual a la segunda. Cuando ello no sea posible se deben invertir las componentes, tantas veces como se necesario. El proceso termina cuando se obtiene cero en la primera componente.

$$(12, 9) \rightarrow \mathbf{(3,9)} \rightarrow (9\text{-}3) \rightarrow \mathbf{(6,3)} \rightarrow \mathbf{(3,3)} \rightarrow \mathbf{(0,3)}$$

De acuerdo con la expresión anterior solo se pudo realizar una sustracción teniendo a 9 como sustraendo. Luego se debió invertir el par (3,9) para obtener el par (9,3). Se continua de este modo restando pero esta vez el 3 actúa como sustraendo. Se obtienen así tres nuevos pares: (9, 3), (6, 3) y (3, 3) antes de obtener el valor final (0,3).

Esto permite construir la serie {1, 3} en la que cada término representa la cantidad de sustracciones realizadas:

$$\{1, 3\} = 1 + \frac{1}{3}$$

Que finalmente equivale a $\frac{4}{3}$ que no es otra cosa que $\frac{12}{9}$ simplificado por 3 que resulta ser precisamente el MCD de 12 y 9. Cabe hacer notar que no siempre la serie está formada por tres componentes, tal como ocurre en el caso de los segmentos de medidas 15 y 9.

En este caso la antifairesis es:

$(15,9) \rightarrow (6,9) \rightarrow (9,6) \rightarrow (3,6) \rightarrow (6,3) \rightarrow (3,3) \rightarrow (0,3)$

Por lo tanto la serie será {1, 1, 2}. Cada número de la serie representa la cantidad de sustracciones realizadas entre cada inversión de los términos:

"…Una sustracción, una inversión, una sustracción, una inversión, dos sustracciones...y su desarrollo fraccionario será entonces:

Que finalmente equivale a $\frac{5}{3}$ que corresponde a $\frac{15}{9}$ el cual simplificado por **3** resulta ser el MCD de 15 y 9.

Para Euclides la razón era una relación entre *magnitudes homogéneas*, es decir de magnitudes de la misma naturaleza. En este caso tales magnitudes corresponden a las medidas de segmentos geométricos conmensurables. Sin embargo no todas las relaciones entre magnitudes son conmensurables, aun tratándose de longitudes de segmentos rectos. El caso más elocuente es la relación entre la longitud del lado de un cuadrado y su correspondiente diagonal. Así por ejemplo la razón entre el lado de un cuadrado de lado 1 y su diagonal es, por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lo mismo ocurre con la relación entre el perímetro de una circunferencia (P) y su respectivo diámetro (D) pues aun cuando una de las medidas, P o D, sea exacta o entera el cociente entre ambas, perímetro y diámetro, corresponde al irracional π, que no es sino la expresión de que ambas medidas son inconmensurables

Es importante subrayar la idea de que para los griegos la razón es un concepto de naturaleza geométrica y no una propiedad inherente a los números los cuales son considerados solo en cuanto expresan la magnitud o medida de algún atributo (longitud, área, etc.) de los objetos geométricos. Es por ello que tampoco tendría mucho sentido definir operaciones aritméticas entre magnitudes o entre razones. En la obra de Euclides no se enuncia una definición explícita respecto de qué tipo de números forman una razón ni tampoco una explicitación de cómo se suman, restan, multiplican o dividen razones. A lo más se describe la amplificación y la simplificación de razones con ocasión del estudio de la composición de proporciones o el análisis de la relación entre los términos de una proporción como propiedades de la proporcionalidad. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la proposición 19, del libro VII de Euclides en la cual se afirma que "si cuatro números son proporcionales entonces el producto del primero y el cuarto será igual al producto del segundo con el tercero",

es decir: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=cb$

3.3.2 Razones y proporciones en Oriente

En China el estudio del concepto razón y proporción se desarrolló bajo un enfoque diferente, más centrado en sus propiedades funcionales que en la conformación de una estructura lógico formal. Es así como en el antiguo y anónimo libro chino de los "Nueve Capítulos sobre el arte matemático", el tratamiento de las ideas matemáticas se expone y despliega bajo la forma de un repertorio de situaciones problemáticas entre las cuales se puede reconocer algunas familias de problemas que involucran la noción de proporcionalidad, sus propiedades y sus eventuales aplicaciones enfatizando más la dimensión numérica de tales problemas o bien la explicitación algorítmica necesaria para la solución de tales problemas. Es el caso del tercer capítulo (Cuifen) que trata de la distribución proporcional, de la repartición de bienes y de dinero de acuerdo con el principio de proporcionalidad. También el capítulo sexto, Junshu, dedica su atención al estudio del cálculo de impuestos equitables y al tratamiento de problemas avanzados de proporcionalidad.

Gracias a los comentarios del matemático chino Liu Hui realizada en el siglo III DC al Libro de los nueve capítulos, se puede saber algo más de las nociones y conceptos matemáticos teóricos implícitos en el abordaje chino del concepto de razón y proporción. De acuerdo con Singh y Gairín, (Oller et al, 2013) el concepto clave en el tratamiento de la proporcionalidad es el concepto de “lü”, que dependiendo de la traducción podría homologarse al concepto de *rate* (proporción) o de *proportional value* (valor proporcional). De acuerdo con esta visión una *lü* es un subconjunto de valores tomados de una colección previa de magnitudes proporcionales. Si se toma un par de dichas magnitudes, que pueden o no ser homogéneas, ellas constituyen un lü si es que una de ellas adopta el valor unitario.

Este enfoque se aviene bien con un modo más funcional de entender la matemática dado que sus conceptualizaciones son más directamente aplicables a la resolución de problemas prácticos y cotidianos. Lo más relevante de esta mirada china de la razón es que ella está constituida esencialmente por dos cantidades de diferente naturaleza (habitantes por kilómetro cuadrado por ejemplo o raciones de alimento por familia) lo cual, de acuerdo a la nomenclatura enunciada por Hans Freudenthal, correspondería a una *razón externa*. (Freudenthal, 1983)

Estas dos visiones de la proporcionalidad, la griega y la china, subsisten y perduran por caminos separados sin grandes cambios hasta inicios de la edad media en que a partir de la difusión de los textos euclidianos a las distintas lenguas del mundo europeo dan pie al reestudio de tales conceptos y a nuevas formulaciones. Es el caso del análisis y posicionamiento realizado por el matemático y poeta árabe Omar Al-Khayyam (siglo XII) en oriente medio y por el matemático y astrónomo italiano Campano de Novara en el siglo XIII.

Para Al-Khayyam las razones son relaciones entre magnitudes heterogéneas conmensurables pero, a diferencia de Euclides, el proceso de antifairesis no se limita a la operación con magnitudes enteras sino también fraccionarias dando lugar a iteraciones que se podrían extender hasta el infinito. Para Al-Khayyam existirían dos tipos de igualdad entre razones. De una parte estaría la igualdad *usual como se* *refiere a la igualdad definida por Euclides y por otra, la que Al Khayyam denomina la* "*igualdad verdadera*"[10] que es aquella que permite establecer que dos razones son iguales si es que la antifairesis de cada una de ellas da origen a la misma sucesión de enteros.

Así, por ejemplo, las razones 5:3 y 7.5 : 4.5[11] serán iguales pues la antifairesis de cada una de ellas da origen a la misma sucesión de enteros {1, 1, 2}.

La antifairesis de 5:3 es

$$(5, 3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0,1)$$

Luego la sucesión es {1,1, 2}

La antifairesis de 7,5 : 4,5 será

$$(7.5, 4.5) \rightarrow (3, 4.5) \rightarrow (4.5,3) \rightarrow (1.5,3) \rightarrow (3,1.5) \rightarrow (1.5,1.5) \rightarrow (0,1.5)$$

Cuya sucesión es también es {1, 1, 2}

En consecuencia ambas razones, 5:3 y 7.5:4.5, son iguales. Es del caso hacer notar que la sucesión {1, 1, 2} se puede expresar como:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}=1,666..$$

Que es precisamente la expresión decimal de ambas razones.

En Europa también el concepto de razón y de proporción era objeto de estudio y re significación. Así por ejemplo Giovanni de Campano introduce el concepto de denominación de una razón que podría ser entendido en la actualidad como un primer intento por entender la razón como un simple cociente. En el texto de Rommevaux (Oller et al, 2003)se señala que una razón se puede denominar por el número de veces enteras que la parte menor está contenida en la parte mayor seguida del resto, si lo hubiere, expresado como fracción.

10 La denomina así para diferenciarla de la *igualdad usual* refiriéndose a la igualdad de razones que expone Euclides en los Elementos.

11 No se debe olvidar que para Al-Khayyam la razón puede estar formada por números fraccionarios.

Así por ejemplo la razón 11:4 se debiera denominar como “dos y tres cuartas partes” dado que “cuatro cabe dos veces en once y sobran un resto que equivale a tres cuartos”

En notación actual lo anterior se podría expresar simplemente como que la razón 11:4 se pude “denominar” como la fracción $2\frac{3}{4}$ cuyo valor decimal es 2,75.

Se trata pues de un primer paso, la denominación, en la dirección de identificar la razón con un cociente, tal como ocurre más tarde con el texto de Anzola (2009) que señala explícitamente que “una razón entre dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$ ”

También Freudenthal concibe a la razón como una función de un par ordenado de números muy similar a la adición, la sustracción, la multiplicación o la división en cuanto cada una de ellas posee un algoritmo que permite, si se conocen las componentes del par ordenado (operandos) y el operador (+, -, * o :), determinar su imagen o resultado (Freudenthal, 1983). Sin embargo el mismo Freudenthal señala que no tiene mucho sentido sustituir la razón por su correspondiente resultado (cociente) pues lo verdaderamente importante de una razón es expresar, de manera explícita, la relación entre dos magnitudes posibilitando así, con claridad, que dicha relación sea replicada por otro par ordenado de magnitudes, no necesariamente referida a magnitudes de la misma naturaleza.

3.3.3 Perspectiva funcional de la proporción

En las últimas décadas se puede apreciar un cambio en la manera de concebir y plantear curricularmente la proporcionalidad. Progresivamente el enfoque aritmético-algebraico tradicional que entiende la proporcionalidad como una relación entre magnitudes numéricas, ha sido sustituido por un enfoque de tipo funcional, que entiende a la proporción como una función lineal (Comín, 2000). Sin embargo este cambio en la forma de presentarla a los estudiantes de educación primaria presenta algunas complejidades didácticas originadas en una insuficiente articulación entre la función lineal, como modelo matemático y la proporcionalidad como modelo aplicado a la representación de fenómenos y problemas de otras ciencias.

Desde la perspectiva funcional la proporcionalidad corresponde a una función lineal, es decir a un caso particular de función afín en la cual el término independiente es nulo. Desde esta perspectiva no tiene mucho sentido la presentación algebraica de la proporcionalidad como un campo conceptual específico aparte. Para este enfoque la proporcionalidad y los problemas relacionados a ella pueden ser perfectamente comprendidos, conceptualizados y resueltos mediante funciones lineales y todo el repertorio conceptual y operatorio desarrollado a partir de sus propiedades y aplicaciones. Desde ese punto de vista se puede entender y representar los problemas de proporcionalidad como problemas de covariación de dos o más variables que poseen un cierto tipo de interdependencia que se puede caracterizar o definir a partir de una cierta regularidad tal como la mantención constante de un cociente o de un producto. Así la relación entre ambas variables puede ser definida comprensivamente mediante una igualdad algebraica del tipo $y=mx$ (caso de la proporcionalidad directa) o bien $yx=m$ (caso de la proporcionalidad inversa) a partir de la cual se pueden generar infinitos pares ordenados similares que cumplen dicha condición de origen.

En el caso de las funciones afines tales pares (x, y) solo deben cumplir con la condición de pertenecer a la función $f(x)=m*x + c$ en donde "m" corresponde a la pendiente y "c" al término independiente que para el caso específico de las funciones proporcionales ha de ser nulo ($c=0$).

El concepto de proporción puede entonces ser definido en los siguientes términos: "Si dos cantidades x e y están relacionadas por una ecuación del tipo $y=kx$, en donde k es una constante entonces se dice que y es directamente proporcional a x lo cual se escribe como "y es proporcional a x. La constante k se denomina constante de proporcionalidad". (Clapham&Nicholson, 2009)

En el mismo sentido el Diccionario Collins de matemática define la proporción directa como una "relación lineal entre dos variables cuantitativas, o sus inversas; los elementos correspondientes de ambos juegos de números que están en proporción están en una misma razón” (Borowski&Borwein, 1989, p.474).

Sin embargo a pesar de esta aparente simplicidad es del caso hacer notar que este tránsito, que va de la teoría de las proporciones (Eudoxo, Euclides, Pitágoras…) hacia las funciones lineales, conlleva algunas complejidades socioculturales y didácticas relevantes (Comín, 2000). Para este mismo autor el proceso curricular que se ha vivido en Francia desde los años 60 en adelante ha consistido, justamente, en el abandono de la tradicional enseñanza de razones y proporciones y la adopción en el curriculum matemático escolar del enfoque de funciones. Este proceso ha ocasionado una indeseada brecha entre la tradición cultural, aun presente en el mundo del trabajo, las profesiones y el mundo escolar respecto de la institución académica y la noósfera. Un efecto de esta mudanza es la falta de claridad que muchos profesores experimentan al enseñar acerca de la proporcionalidad pues no siempre está claro el sentido con el cual abordar dicha enseñanza. También se podría agregar que persiste una cierta ambigüedad respecto de este tema y que es posible encontrar en los programas de estudio y en los textos escolares ciertas “mixturas” que dan cuentan de una transición aun no completada entre los distintos enfoques.

En Chile la introducción de un tratamiento funcional de la proporcionalidad enfrenta la dificultad de una escaso y poco generalizado dominio de las funciones, tanto desde el punto de vista conceptual como procedimental y representacional. Los profesores en términos generales recuerdan y dominan el contenido proporciones que el contenido funciones. Entender las proporciones como funciones lineales requiere por ende un dominio funcional previo cuyo contenido involucra las diferentes dimensiones del llamado Conocimiento especializado de los tópicos (KoT por sus siglas en inglés) En otras palabras, para entender la proporción como una función lineal se requiere, de manera previa, familiaridad y comprensión profunda de las funciones, tanto desde el punto de vista conceptual como operativo. Lamentablemente ello no es frecuente. De hecho los docentes primarios están más familiarizados con la proporcionalidad que deben enseñarla por estar en el currículum básico que con las funciones que no era, hasta hace poco, tema del cual debiera hacerse cargo.

Para algunos docentes la proporcionalidad es, simplemente, un problema aritmético que se resuelve aplicando la receta "universal" del término desconocido. Este modelo sería aplicable a cuanto problema sea, o parezca ser, una proporción.

Resulta ilustrativo comparar las bases curriculares de matemática (7° y 8° grados) de 2012 y 2013. En las bases del año 2012, que incluyen los grados 6, 7 y 8, no aparece ninguna referencia a la "función lineal" o a la "función afín". Sin embargo en las bases del año 2013 ya se plantea, en 7° grado lo siguiente:

"Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma:

- $ax = b$;
- $x/a = b$ a, b y c $\in$ Z; $a \neq 0$
- $ax < b$;
- $ax > b$ $x/a < b$;
- $x/a > b$ a, b y c $\in$ N; $a \neq 0$"

(MINEDUC, 2013; p. 108)

En 8° grado, se hace aún más explícito el cambio de enfoque al plantear que los estudiantes serán capaces de:

"Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal:

- Utilizando tablas
- Usando metáforas de máquinas
- Estableciendo reglas entre x e y
- Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo"

(MINEDUC, 2013; p. 124)

Es del caso recordar que la función lineal, de la forma $y=kx$ con $k\neq0$ corresponde, gráficamente, a un recta cuyo intercepto con el eje de las ordenadas (Y) es el punto (0,0), es decir, pasa por el origen del plano cartesiano. Como las variables x e y pueden adoptar cualquier valor real esta función pude modelar no solo situaciones en que las variables son discretas (mesas y sillas, bandejas y huevos, etc.) sino también variables continuas como tiempo y distancia recorrida o bien tiempo y agua acumulada en un recipiente.

Sin embargo cabe hacer notar que la constante k, en el caso de las funciones lineales, podría ser negativa (k<0), en cuyo caso la recta originada sería una recta en la cual no se cumple la condición de una función creciente (si $x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$ sino, por el contrario, que $x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$.

Esta circunstancia crea una situación didáctica de naturaleza "contraintuitiva" pues ambas variables, X e Y por ejemplo, varían en sentido opuesto y no en el mismo sentido, condición necesaria, aunque no suficiente, para ser consideradas una proporción directa.

La siguiente tabla de valores muestra el comportamiento de una función de este tipo. Es fácil constatar que su pendiente es -1 y que es una función lineal y no afín. También esta tabla expresa, de manera inequívoca, que ambas variables crecen en sentidos opuestos:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Entonces, ¿Cómo explicar a un estudiante que estas variables son directamente proporcionales si, en términos intuitivos, tales variables evolucionan varían en sentidos opuestos, tal como lo hacen dos variables inversamente proporcionales?

Una alternativa sería indicarle al estudiante que no preste atención a su intuición y que, por el contrario, solo se limite a verificar, maquinalmente, si la definición de proporcionalidad se cumple o no. Es decir, si $y = kx \quad \forall x \neq 0$. En este caso por cierto esta condición se cumplirá dado que el cociente de las variaciones de una variable respecto de las variaciones de la otra variable permanecerá constante (-1).

Otra alternativa sería convencerle de que ambas variables son directamente proporcionales mostrándole un ejemplo idóneo en el cual la disminución de la segunda variable se exprese como un "aumento negativo" Podría, con este fin, usarse cualquiera de las siguientes situaciones:

- Un avión que arriba a su destino y que a medida que avanza desciende hasta tocar la pista.
- Una persona que desciende caminando por un plano inclinado, o una escala, de pendiente negativa.
- Una vela cuya altura disminuye conforme aumenta el tiempo transcurrido desde que fuera encendida.

Sin embargo cada situación descrita puede ser reinterpretada: conforme el avión avanza (componente horizontal) también avanza en dirección al suelo (componente vertical). Si por cada 1000 metros que avanza horizontalmente desciende 20 metros o, lo que es equivalente, avanza 20 metros en dirección al suelo (componente vertical). En este caso ambas variables: avance horizontal y avance a la pista, evolucionan crecientemente y además la razón entre ambas variaciones permanece constante (20%). En este caso el signo solo indica en qué dirección vertical se produce el aumento.

En las otras dos situaciones también se podría realizar el mismo ejercicio: la persona caminando avanza hacia adelante pero también avanza hacia abajo más que decir disminuye su altura. O, en el caso de la vela encendida, decir que a medida que transcurre o aumenta el tiempo de encendido de la vela aumenta la longitud de vela consumida en vez de decir que disminuye la altura de la vela.

Estas situaciones y su modelación funcional requieren un análisis más detenido y abierto, que deje espacio a la controversia y a la argumentación matemática que permita, finalmente, una adaptación significativa y coherente entre la realidad, la intuición y la abstracción matemática (función lineal). No contribuye mucho al desarrollo de habilidades de pensamiento matemático en los estudiantes reducir o zanjar esta situación contra intuitiva mediante un simple “aplique la fórmula y punto”.

3.3.4 La proporcionalidad como estructura multiplicativa

Para investigadores como Vergnaud la proporcionalidad es esencialmente una estructura de tipo multiplicativo que no solo implica a la multiplicación sino también a la división. El tipo de razonamiento involucrado en la resolución de problemas que consideran productos o cocientes es conocido como pensamiento multiplicativo o también como pensamiento relativo toda vez que se establecen relaciones de covarianza, de naturaleza multiplicativa, es decir, cantidades que varían de manera más o menos solidaria entre si y que son susceptibles de interrelacionarse mediante factores o cocientes estables. En virtud de esta consideración es pertinente la revisión del análisis que Vergnaud (1991) hace de este tipo de relaciones que él denomina estructura multiplicativa.

Para Vergnaud la multiplicación es una estructura de tipo cuaternario, vale decir, es un tipo de estructura matemática que relaciona cuatro magnitudes y no tres como suele pensarse cuando se presenta o describe la multiplicación como: a x b = c.

En esta expresión suele considerarse que solo las magnitudes a, b y c forman parte de la expresión multiplicativa: dos factores que se multiplican (a y b) y un resultado o producto c que se obtiene de la operación entre a y b.

Para Vergnaud en cambio la estructura pose cuatro términos: a, b, c y d, relacionados mediante la siguiente expresión.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{con b y d} \neq 0.$$

Esta expresión cuaternaria bien podría estar constituida por dos filas, no necesariamente consecutivas, de una tabla bidimensional (dos columnas y n filas) que representa cómo varían y se relacionan entre si los valores (discretos o continuos) de dos conjuntos de números de igual o distinta naturaleza.

Así por ejemplo si se sabe que en una mesa cuadrada caben cómodamente 4 personas se podría construir una tabla que represente la relación entre la cantidad de mesas y la cantidad de personas que caben en dichas mesas teniendo claro que las mesas no se juntan por sus costados una con otra sino que se ubican de manera independiente en el espacio disponible. Con esta información se construyó la tabla Mesas vs personas, de la cual se pudieran considerar, arbitrariamente, dos filas cualquiera, no necesariamente consecutivas, como en este ejemplo en que se ha elegido la 2ª y 5ª filas, es decir la dupla 5 y 20 y la dupla 8 y 32.

Mesas	personas
4	16
5	20
6	24
7	28
8	**32**
9	36

El sentido global de esta tabla es expresar el tipo de relación que poseen los términos de la primera columna (mesas) con los de la segunda columna (personas). Sin embargo la tabla también contiene y representa la forma en que las cantidades de cada columna se relacionan entre sí, vale decir, cómo varían los valores de cada columna. El análisis de las variaciones, verticales u horizontales, pone evidencia que se trata de variaciones de diferente naturaleza.

Mesas	personas
4	16
5	20
6	24
7	28
8	**32**
9	36

En el caso de las variaciones verticales, es decir por columnas, los valores seleccionados de la primera columna (5 y 8) expresan una relación entre cantidades de la misma naturaleza (ambas representan mesas). Lo mismo ocurre con los valores de la segunda columna (20 y 32) que representan también una relación entre cantidades de la misma naturaleza (en este caso personas). De ello se deduce que esta variación, entre valores de una misma columna, puede ser expresada mediante un factor de tipo escalar. En este caso el escalar, como un factor sin dimensión, sería 1,6 pues 5 x 1,6 = 8.

Un estudiante también podría suponer que las variaciones en el primera columna corresponden a una simple secuencia de valores enteros consecutivos en la cual el siguiente término se obtiene, simplemente, agregando 1 al valor anterior pero, en este caso, no se trataría de una estructura multiplicativa sino aditiva.

Mesas	personas
4	16
5	20
6	24
7	28
8	**32**
9	36

Sin embargo estos cuatro valores también podrían ser analizados por filas y de este modo se tendría que, en la segunda fila de la tabla, se encuentra el par 5 y 20 que representan magnitudes de distinta naturaleza: el cinco representa mesas en tanto que 20 representa personas. Lo mismo acontece en la 5ª fila en la cual 8 representa mesas y 32 representa personas.

En este último caso también es posible encontrar un factor de tipo multiplicativo[12] que permita obtener 20 a partir de 5. Dicho factor es 4 pues 5 x 4 =20. El 4 es también factor para obtener 32 a partir de 4, en la 5ª fila: 8 x 4 =32. De acuerdo con

12 Un factor multiplicativo involucra tanto a la multiplicación como a la división.

Vergnaud este factor común que permite obtener en cada fila el valor de la segunda columna si se conoce el valor de la primera columna entraña una relación diferente puesto que opera con cantidades de distinta naturaleza. El factor 4 no es un escalar sino un número que representa “personas por mesa” y cuando se opera con 5 la expresión matemática, desde el punto de vista del análisis dimensional, equivale a la expresión:

$$\frac{5\,mesas}{\square}\,x\,\frac{4\ personas}{mesa}=\frac{20\,persona\,x\,mesa}{mesa}=20\ personas$$

De acuerdo con Vergnaud esta relación horizontal es propiamente una función, en el sentido matemático del término, puesto que asigna a cada elemento de la primera columna un correspondiente elemento en la segunda columna. De este modo, cada columna representa un conjunto de elementos no necesariamente de la misma naturaleza que se relacionan mediante una función f que asigna a cada componente x su correspondiente imagen f(x) de acuerdo una función f de naturaleza multiplicativa (multiplicación o división).

Desde esta perspectiva una proporción corresponde a una estructura multiplicativa cuaternaria en la cual sus componentes, discretos o continuos, se relacionan a través de factores escalares - si las cantidades son de igual naturaleza- o funcionales si las cantidades son de distinta naturaleza.

Esta estructura interna de relaciones con distinto grado de complejidad explica, en parte, las dificultades tanto epistémicas como didácticas que los problemas que involucran tales estructuras plantean a estudiantes y docentes tal como se ilustra a través de los siguientes problemas secuenciados en orden creciente de dificultad:

Grados de dificultad según tipo de problema

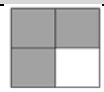
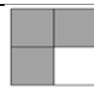
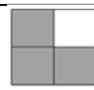
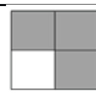
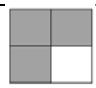
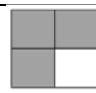
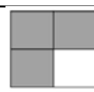
N	TIPO DE PROBLEMA	CUATERNA	COMENTARIOS	DIFICULTAD
1	Si en una mesa caben cuatro personas ¿Cuántas personas cabrán en 3 mesas?		Solo intervienen números enteros. Se conoce la razón unitaria. Se resuelve multiplicando 4 por 3	BAJA
2	Si un litro de aceite pesa 857,5 gramos entonces ¿cuánto pesarán 1,25 litros del mismo aceite?		Intervienen enteros y decimales Se conoce razón unitaria Se resuelve multiplicando 1,25 por 857,5	MEDIANA
3	Si por cuatro completos se pagó $ 1800 ¿Cuánto cuesta cada completo?		Solo intervienen números enteros. Se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 1800 por 4	BAJA
4	Por tres completos se pagó $1650 ¿Cuántos completos se puede comprar con $2750?		Solo intervienen números enteros. No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 1650 por 3. El cociente se usa para dividir 2750.	MEDIANA
5	En recorrer 80 km un automóvil consume 4,75 litros de gasolina. ¿Cuánta gasolina consumirá si desea recorrer 190 km?		Intervienen números enteros y decimales No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 80 por 4,75. El cociente obtenido se usa para dividir 190.	ALTA
6	Se sabe que 23 botones idénticos pesan 36,8 gr. ¿Cuánto debieran pesar 37 botones del mismo tipo?		Intervienen números enteros y decimales No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 36,8 por 23. El cociente obtenido se multiplica por 37.	ALTA
7	Si 3 sandías cuestan $ 7.000. ¿Cuánto debiera pagarse por 8 sandías?		Intervienen enteros y decimales infinitos No se conoce razón unitaria Se resuelve dividiendo 7000 por 3. El cociente se multiplica por 8.	ALTA

Tabla construida por el autor basado en la descripción de problemas multiplicativos. (Vergnaud, 1991, p.216)

La imagen cuadriculada, con celdas negras y blancas, representa los cuatro términos de la estructura multiplicativa subyacente en cada problema. La complejidad de cada problema es afectada tanto por el tipo de números intervinientes (enteros, enteros y decimales, decimales infinitos, etc.) sino también por la presencia o ausencia explícita de la razón unitaria y por la cantidad y naturaleza de las operaciones necesarias para calcular la solución: solo multiplicación, solo división o bien, una combinación de ambas.

.

CAPITULO 4: POPORCIONALIDAD, ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN

4.1 Importancia curricular del pensamiento proporcional

Razones y proporciones constituyen un tópico habitual y relevante en la mayor parte de los programas de matemática escolar. Normalmente se puede encontrar estos tópicos entre 5° y 8° grados y una manera de aproximarse a cómo es entendida su enseñanza y su evaluación es a partir de los textos escolares. En Chile los textos escolares son provistos por el estado a todos los estudiantes del sector público municipal y del sector particular subvencionado. El proceso se lleva a cabo mediante licitaciones públicas a las cuales convoca el Ministerio de Educación y que cuentan con la participación de editoriales privadas que elaboran propuestas de textos basados en el marco curricular vigente para cada nivel y sector escolar.

La evaluación de las propuestas presentadas por las editoriales es también licitada por el Ministerio de Educación entre organismos universitarios y académicos quienes desarrollan su labor a través de rúbricas y criterios estipulados en por el Ministerio de Educación en los términos de referencia.

Los textos que satisfacen cada uno de los requisitos técnicos y editoriales del Ministerio de Educación son entonces impresos y distribuidos a todas las unidades educativas del país de acuerdo a las preferencias previamente formuladas por las unidades educativas.

En esta sección se revisará y comentará la forma en que son tratados los temas de razón, proporción y proporcionalidad en dos textos escolares y un texto de apoyo para docentes.

4.2 Algunas experiencias de enseñanza de la proporcionalidad

En este capítulo se revisan y comentan algunas propuestas de estudio de la proporcionalidad contenidas en textos escolares de educación primaria o básica. En particular se comenta un texto de estudio japonés que constituye una ilustrativa propuesta de cómo el tratamiento de la proporcionalidad es secuenciado y adaptado didácticamente para que los estudiantes comprendan, de modo sencillo e intuitivo, los conceptos sutiles y profundos implicados en este tópico.

4.2.1 Proporcionalidad en texto de 6°grado japonés.

En las siguientes líneas se describe y comenta cómo se presenta el estudio de la proporcionalidad a los estudiantes nipones en un texto matemático escolar japonés[13] de sexto grado de educación primaria. (Hironaka, 2006).

La unidad temática revisada corresponde al capítulo denominado "Relaciones de Proporcionalidad". Este capítulo se inicia presentando cinco situaciones cotidianas en las cuales, de manera común, intervienen dos variables que cambian aumentando o disminuyendo "solidariamente", algunas en forma proporcional y otras no, tal como se aprecia en el siguiente recuadro:

En las siguientes situaciones cuando una cantidad cambia la otra también cambia. ¿Cómo se relacionan las siguientes cantidades?

A. cm^3 de agua en un recipiente respecto de la profundidad del agua en cm.

B. Largo de un rectángulo en relación a su ancho manteniendo constante el área.

C. Longitud de un resorte respecto del peso que cuelga de dicho resorte.

D. Edad de un niño respecto a la edad de su hermana menor si ambos tienen la misma fecha de cumpleaños pero no nacieron el mismo año.

E. Tiempo que una vela permanece encendida respecto de la altura de dicha vela.

Que luego continúa del siguiente modo:

13 Heisuke Hironaka,Yoshishige Sugiyama. (2006). Mathematics 6B for Elementary School. Editado por Tokyo Sosheki Co. Ltda. ISBN4-487-46621-0

Estudie y establezca, experimentalmente, como varía en cada caso una cantidad respecto de la otra.

A) ¿En cuál de las situaciones (A, B, C, D y E) la segunda cantidad aumenta cuando la primera aumenta?

B) ¿En cuál de las situaciones (A, B, C, D y E) la segunda cantidad disminuye cuando la primera aumenta?

Fuente: Heisuke Hironaka,Yoshishige Sugiyama. (2006). Mathematics 6B for Elementary School. Editado por Tokyo Sosheki Co. Ltda. ISBN4-487-46621-0

Se solicita a los estudiantes que analicen las variaciones de cada pareja de magnitudes, de manera experimental, exponiéndolos a variaciones tanto proporcionales como no proporcionales. Aspecto relevante si se quiere que ellos aprendan muy prematuramente que no todas las variaciones directas o inversas son proporcionales y que cada tipo de variación se manifiesta cuantitativamente con un perfil o comportamiento característico. Es decir, descubrir qué atributos de dichas variaciones son distintivos de las relaciones proporcionales y que para efectos de posteriores situaciones pudieran servir como “marcadores” de la proporcionalidad.

Tanto de manera intuitiva como también de modo experiencial los estudiantes pueden suponer que el nivel de agua en un vaso aumentará (o disminuirá) si el volumen de agua contenido en dicho vaso aumenta (o disminuye). También podrían suponer que si la edad de una niña incrementa en un año también incrementará el mismo tiempo la edad de su hermano o hermana nacida en distinto año pero en igual fecha.

Es interesante destacar que, en los cinco casos presentados, algunas variables cambian en un mismo sentido (largo del resorte y peso de un objeto suspendido de dicho resorte) mientras que en otros las variaciones ocurren en sentidos opuestos (largo del rectángulo versus ancho de dicho rectángulo manteniendo el área constante, o bien, la altura de la vela y el tiempo que lleva ardiendo). Analizar la coincidencia o la oposición de estas variaciones constituye un primer test al que se somete la relación entre las variaciones de ambas variables. Está claro que lo que se busca determinar es el cumplimiento de una de las condiciones necesarias (pero no suficientes) que debe cumplir una proporción ya sea directa o inversa. Pudiera ser que ambas variables tuviesen un comportamiento completamente irregular, es decir, que en algunos casos al aumento de una variable le siga un aumento de la otra variables pero para otros valores ocurra lo contrario, es decir que disminuya o que incluso se igualen ambas. En este caso se podría afirmar que ambas variables no son proporcionales.

En caso de estar claro el sentido de las variaciones (coincidentes u opuestas) se tendría por cumplida la condición necesaria. Faltaría por analizar si se cumple, además, la condición de suficiencia que se obtiene analizando la relación matemática entre las cuantías de dichas variaciones. No solo importa la coincidencia o la aposición de los sentidos de variación sino también los tamaños relativos de tales variaciones en términos cuantitativos.

Para abordar este aspecto de la variación el texto recurre al estudio experimental de tales variaciones, centrando su atención en cómo varia el nivel de agua en un recipiente (profundidad) respecto de su volumen expresado en dm cúbicos. Si el área superficial del agua se mantiene siempre constante e igual al área basal del recipiente se puede suponer entonces que la variación de volumen y la altura (o profundidad) del agua variarán proporcionalmente, tal como se describe en la tabla A. En cambio si el recipiente tuviese la forma de un tronco cónico (forma de vaso, balde…etc.) la superficie del agua en dicho recipiente no se mantendrá constante ni idéntica al área de la base (fondo) sino que, por el contrario, aumentará conforme suba el nivel de agua tal como se expresa en la tabla B.

Pero, ¿cómo lograr que los estudiante de 6° grado arriben a esa conclusión por si mismos? El texto comentado opta por brindar a los estudiantes una definición de proporcionalidad que posee una estructura muy similar a la formulada por Euclides en el libro V de su célebre obra Los Elementos.

> *Si la cantidad x se incrementa por los factores 2, 3, 4… etc. y la cantidad Y se incrementa, respectivamente por el factor 2, 3, 4… etc. entonces diremos que "X es proporcional a Y". (Hironaka, 2006)*

En este caso, X representa la cantidad de agua expresada en dm^3 mientras que Y representa la profundidad o nivel del agua en el recipiente expresada en cm.

Esta definición de proporcionalidad brinda un criterio operatorio práctico y fácil de entender que permite testear, a partir de los datos presentados tabularmente, si dos variables cumplen, cabalmente, las condiciones impuestas por la definición. Es importante señalar que el uso de la palabra “factores” en esta definición excluye la posibilidad de que las variaciones sean de tipo aditivo toda vez que solo a los operandos de una multiplicación se les denomina con dicho término

En el caso del agua y la profundidad del agua ¿Cuál de las siguientes tablas, A o B, expresa mejor la forma en que ambas cantidades varían?

Tabla A

Agua (dm^3)	Nivel (cm)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24

Tabla B

Agua ($dm^{3)}$	Nivel (cm)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19

Suponga que denominamos **X** a la cantidad de agua y como **Y** a la profundidad del agua en el recipiente entonces:

¿Es también proporcional la relación entre x e y en la segunda tabla?

Para el caso de la tabla A es sencillo constatar que cada par ordenado (x, y) de la tabla, es un equimúltiplo del par inicial; el segundo par se obtiene duplicando el primer par. El tercero se obtiene triplicando el primer par, y así sucesivamente para el cuarto, el quinto, etc. En virtud de lo anterior el estudiante puede verificar que la tabla A representa una relación de proporcionalidad pues los pares de la tabla cumplen con la definición dada. Es decir, respecto de la primera tabla se puede afirmar que si x disminuye a la mitad, a la tercera parte o a la cuarta parte y la variable Y también disminuye a la mitad, a la tercera o a la cuarta parte, entonces x e y están en relación proporcional.

No ocurre lo mismo con la tabla B pues cada componente del par inicial se multiplica por un factor diferente. Así por ejemplo, si comparamos el primer par - (1,4) - con el segundo (2,10) queda en claro que cada componente aumentó en un factor diferente: la primera componente se duplicó (era 1 y luego se convirtió en 2), en tanto que la segunda componente se multiplicó por 2,5 (era 4 se convirtió en 10), es decir la segunda componente no se duplicó pues si así hubiera sido sería 8 y no 10 tal como se puede apreciar en la tabla.

Lo mismo acontece con el resto de las duplas de la tabla B pudiéndose concluir entonces que sus pares ordenados no cumplen con la definición de proporcionalidad y por ende la Tabla B no representa una relación de proporcionalidad.

De este abordaje de la proporcionalidad cabe valorar positivamente los siguientes aspectos:

1) El estudio precoz e integrado de las diferentes formas de covariación cuantitativa, discreta o continua, asociadas a magnitudes características de algunos fenómenos naturales familiares.
2) El abordaje indagativo - experimental que aprovecha la percepción sensorial y la intuición proporcional innata haciendo “tangibles” conceptos y relaciones matemáticas abstractas y sutiles.
3) La formulación simplificada de un criterio de proporcionalidad basado en la existencia de equimúltiplos de cantidades no homogéneas formulado en sintonía con cierto saber institucionalizado de naturaleza Euclidiana.

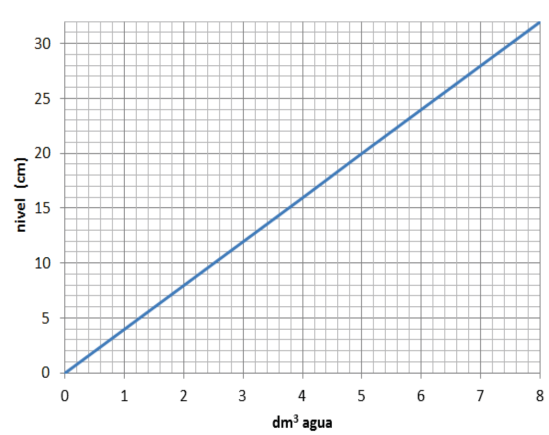
Luego el capítulo propone a los estudiantes analizar otras situaciones similares en la perspectiva de poner a prueba los criterios de discernimiento de la proporcionalidad en nuevas situaciones, más complejas, tales como las siguientes:

- Considere la situación del rectángulo y la relación entre al largo x de un lado y su ancho y, sabiendo que el área ha de permanecer constante. ¿En esta situación las variables x, y están en una relación proporcional?
- Estudie también que ocurre con la relación entre el largo (x) de un rectángulo y su ancho (y) respecto de su perímetro fijo?
- Analice la siguiente tabla que representa el consumo de combustible (x) y los kilómetros recorridos (y) estableciendo si las variables representadas son o no proporcionales.

Litros de gasolina	3	6	9	12	15
Kilómetros recorridos	37,5	75	112,5	150	187,5

Cabe destacar que las situaciones de indagación propuestos a los estudiantes pertenecen tanto a contextos netamente matemáticos tales como lados y área del rectángulo, lados-perímetro del rectángulo como también a contextos físico-tecnológicos como ocurre en la tercera situación que relaciona el combustible consumido por un automóvil y su relación con la distancia recorrida.

El texto, tras esta etapa de experimentación e interpretación de datos desde la perspectiva de la proporcionalidad, avanza en la tarea de representar estas nociones y conceptos en forma algebraica y geométrica.



Para ello recurre a la gráfica de dispersión que representa el nivel de agua en un recipiente, expresada en cm, y su relación con la cantidad de agua acumulada en dicho recipiente expresada en dm^3.

Para generar esta gráfica es necesario haber utilizado antes la tabla que contiene ambas series numéricas. Se pide a los estudiantes que en dicha tabla calculen el cociente y/x con el propósito de que ellos descubran finalmente que cada par ordenado de esta relación cumple con la condición de que y/x=m, siendo m un valor constante denominado “constante de proporcionalidad”. Con un mínimo tratamiento algebraico es fácil comprender que y=mx. El texto entonces formaliza lo anterior mediante el siguiente enunciado:

Si la relación entre **x** e **y** es proporcional entonces el cociente **y/x** tendrá siempre el mismo valor.

Si **x** e **y** son proporcionales será cierto entonces que **y = m*x**, siendo **m** una constante.

A continuación se proponen nuevas actividades para aplicar este hallazgo y definición:

Estas ecuaciones nos permitirían encontrar el valor de y conociendo el valor de x o viceversa, conocer el valor de y si sabemos el valor de x.

a) Encuentre, por ejemplo, el valor de y si se sabe que x=0,9 cc
b) Encuentre, por ejemplo, el valor de y si se sabe que x=15 cc
c) Determine si la relación entre el lado de un hexágono regular y su perímetro es una relación de proporcionalidad y determine la constante si fuera el caso.
d) Determine si el peso de un rollo de alambre es proporcional a la longitud de dicho alambre y determine, si corresponde, la constante de proporcionalidad.
e) En ambos casos escriba una ecuación que represente la relación entre ambas variables.
f) Construya un gráfico de dispersión (XY) que represente la relación de proporcionalidad entre la cantidad de agua y su nivel de profundidad.
g) ¿Qué figura se forma al representar esta relación de proporcionalidad?
h) ¿Qué valor adopta “y” cuando la variable “x” vale 0?

Finalmente cierra este trabajo enunciando un criterio que permitirá a los estudiantes reconocer, visualmente, una relación de proporcionalidad representada bajo la forma de un registro geométrico de representación (Duval, 1999).

Un gráfico que representa dos cantidades que son proporcionales entre sí es una línea recta que pasa por el punto en el que ambas cantidades son 0.

Cabría mencionar respecto de esta afirmación que ella encierra el riesgo de que los estudiantes pudieran pensar que la relación entre dos magnitudes es una recta, “con todos sus puntos”, es decir, una recta continua y por lo tanto no discreta pero ello no siempre es así cuando se trata de graficar unos pocos puntos que representan una relación que se da entre magnitudes discretas, como por ejemplo, mesas y sillas o bien manzanas y precio pagado por ellas. En estos casos la gráfica realmente será una sucesión de puntos sueltos pero alineados que “apuntarían” al origen del sistema.

Otro riesgo sería que los estudiantes pudieran creer que entre los puntos de la relación debe estar el origen del sistema , el punto (0,0), situación que tampoco está asegurada si el sentido del contexto no lo justifica: “con cero pesos compraré cero manzanas” o bien para “para cero mesas necesito cero sillas”.

Sería preferible para evitar esta situación afirmar, más bien, que “los puntos que representan la relación entre variables discretas están en proporción directa si dichos puntos pertenecen a una misma recta que pasa por el origen del sistema” o bien que “dichos puntos aislados determinan una recta” que contiene al origen del sistema.

Lo que viene a continuación en el texto japonés, son actividades de aplicación de lo estudiado introduciendo de paso la idea de que no solo se trabaja con valores enteros sino con decimales y que las variables implicadas, por ende pueden ser continuas y no solo discretas.

Para ello se proponen diversos problemas mayoritariamente en contextos matemáticos tales como:

1. **Determine si las variables x e y son proporcionales o no en cada tabla.**

Tabla A

X (l)	2	4	6	8
Y(kg)	4,4	6,4	8,4	10,4

Tabla B

X(m)	0,4	0,6	0,8	1
Y (m)	1	1,5	2	2,5

2. **Determine el área de un círculo si su radio es 0,5 m, 1,5 m y 2,5 m.**
   a) ¿Es proporcional la relación entre el radio del círculo y su área?
   b) Escriba una ecuación que represente la relación entre el radio (x) del círculo y su respectiva área (y)
3. **Calcular el área de un triángulo isósceles cuya base permanece constante y su altura es variable.**
   a) ¿Es proporcional la altura del triángulo respecto de su área?
   b) Escriba una ecuación que represente la relación entre la altura del triángulo (x) y su correspondiente área (y)
   c) Dibuje un gráfico que represente la relación entre la altura y el área del triángulo isósceles.

En síntesis la estrategia didáctica implícita en la presentación de la proporcionalidad en este texto escolar

- Considera la articulación entre el trabajo experimental, el registro tabular de los datos generados de dicha experimentación, el análisis de las relaciones matemáticas existentes entre dichos datos y la conversión de registros de representación al graficar la relación en el plano cartesiano.
- Considera en el trabajo de aula el estudio de situaciones tanto proporcionales como no proporcionales. Este es un aspecto relevante en términos didácticos pues al enseñar que existen relaciones proporcionales y se omite el estudio de relaciones que no lo son es muy natural que los estudiantes terminen por suponer o creer que todas las relaciones directas o inversas son proporcionales incurriendo con mucha facilidad en la "sobre generalización" (Lim K,1999), es decir, en asumir a priori que todas las propiedades y algoritmia que se derivan de una relación de proporcionalidad es universalmente aplicable a cualquier relación entre variables que cavarían.
- Adecuada integración de las diferentes formas de entender una proporción. Se ha utilizado el enunciado euclidiano de la proporcionalidad en la búsqueda de equimúltiplos para determinar nuevos pares pero también se ha recurrido, de manera muy ecléctica, a su condición de función lineal y a las distintas formas o registros semióticos en

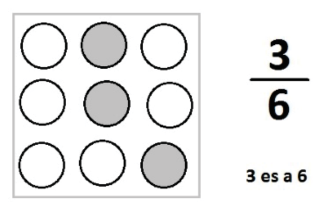
que tal función puede ser representada: como tabla, como gráfica en el plano cartesiano y como expresión algebraica.

4.2.2 Enseñanza de razones y proporciones en Chile

En el **currículo escolar chileno** la enseñanza de estos conceptos claves, razón y proporción, se inicia explícitamente en sexto grado de educación básica. Es así como en Programa de Matemática de **sexto básico** se puede leer el siguiente enunciado "Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo" que corresponde al tercer objetivo de aprendizaje (OA3) de la Unidad de Números y Operaciones ((MINEDUC, 2013. pp.43).

Este objetivo estipula con claridad la naturaleza del aprendizaje a desarrollar en relación al concepto de *razón* así como el tipo de desempeño que los estudiantes han de exhibir como expresión de la comprensión lograda. Lo anterior implica, preferentemente, centrar la atención formativa en la construcción comprensiva del concepto de razón mediante múltiples formas de representación que van desde lo muy concreto y tangible como sería, por ejemplo, que los estudiantes pusieran en el interior de una caja bolitas de colores de acuerdo a una razón dada o bien, por el contrario, determinado dicha razón a partir del conteo de las bolitas según color en una cajita dada.

Así por ejemplo se podría solicitar a los estudiantes que indiquen en qué razón se encuentran las bolitas claras respecto de las oscuras partiendo del conteo para determinar la razón (3 es a 6) o bien, por el contrario, conociendo la razón determinar cuántas bolitas de cada tipo colocar en la caja.



Sería también absolutamente coherente con este objetivo la expresión de una razón entre dos o más cantidades mediante representaciones gráficas tales como pictogramas, gráficos de columnas o simplemente tablas de datos. El trabajo didáctico implicado en este objetivo de aprendizaje presupone, por cierto, que el propio docente conozca en profundidad y de manera exhaustiva las distintas maneras de entender y formular una razón.

Luego, en **séptimo grado**, se establece que los estudiantes debieran estar preparados para "*Reconocer una proporción como una igualdad entre dos razones*" y que además debieran estar en condiciones de "*Resolver problemas que impliquen plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en el ámbito de los números enteros y fracciones o decimales positivos, y <u>problemas que involucran proporcionalidad</u>*" Ambos propósitos educativos corresponden a los aprendizajes esperados AE1.5 y AE1.8, respectivamente, de la unidad de Números y Algebra de acuerdo a lo establecido en el Programa de matemática de séptimo grado. (MINEDUC, 2013)

Como se puede apreciar el concepto de razón es vital para comprender en profundidad la proporcionalidad pues el riesgo de confundir la igualdad de dos razones con la igualdad de dos fracciones o, de dos cocientes, es muy alto si no se ha estudiado con detención y rigurosidad en qué son similares y en qué son diferentes las razones de las fracciones.

El segundo aprendizaje esperado que trata de la resolución de problemas mediante ecuaciones que involucren diferentes ámbitos numéricos y también a la proporcionalidad abre un espacio para el estudio de situaciones que pongan a prueba

Mención aparte merece el Aprendizaje esperado AE 3.11 del mismo nivel escolar pero de la unidad 3, Geometría, que establece que los estudiantes han de ser formados de modo tal que ellos estén en condiciones de "Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, relativas a cambios en el volumen de prismas rectos y pirámides al variar uno o más de sus elementos lineales". Se abre con esta formulación curricular un interesante espacio de trabajo indagativo que centra su interés en la exploración de las relaciones que podrían existir entre las medidas lineales de los cuerpos mencionados y el volumen de ellos. Explícitamente se solicita a los docentes que promuevan entre sus estudiantes, la formulación de conjeturas y la validación de estas a través de la experimentación y la discusión de las evidencias generadas por los propios estudiantes.

Esta orientación del programa de matemática explícitamente se contrapone a las formas en que habitualmente se desarrollan las clases de esta asignatura caracterizadas por la centralidad que en ellas tiene el contenido o “materia” a enseñar, el rol profesor como su principal relator y a los estudiantes como los sujetos pasivos de tal forma de enseñanza. En su reemplazo propone una clase en la cual los estudiantes enfrenten situaciones problemáticas que impliquen saberes matemáticos, propongan soluciones, las discutan, las sometan prueba y evalúen formas de verificación y validación para luego, sistematizar los hallazgos o producciones matemáticas de los estudiantes para finalmente, en forma participativa y colaborativa articularlo con el saber matemático relacionado directa e indirectamente.

4.2.3 Razón y proporcionalidad en un texto escolar chileno.

Imagina que estás estudiando los pumas. En la siguiente tabla se muestran los datos que se obtuvieron sobre varios de ellos. Compara la rapidez que alcanzó cada uno para cubrir una distancia determinada. Usa esta fórmula

$$R = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

Rapidez del puma

$$R = \frac{d}{t}$$

Ejemplar	Distancia recorrida (metros)	Tiempo (segundos)
Hembra grande	137	5
Hembra pequeña 1	160	6
Hembra pequeña 2	228	9
Macho grande	182	4

En la edición 2014 de este texto escolar[14] que el MINEDUC distribuye gratuitamente entre las escuelas básicas municipales y particulares subvencionadas del país se aborda el estudio del concepto razón junto con porcentajes en el sexto capítulo. El capítulo comienza mencionando que los pumas son capaces de desplazarse con diferente rapidez de acuerdo a su talla y género. Los datos se suministran en una tabla que da cuenta de cuatro diferentes combinaciones de distancia y tiempo empleado. Se pide a los estudiantes que comparen la rapidez alcanzada por cada ejemplar de puma.

porcentaje Número o cantidad que representa la proporcionalidad de una parte respecto a un total que se considera dividido por cien unidades.

razón Una razón entre dos números a,b es el resultado de la división o cociente entre ambos. Una razón nos permite comparar cantidades.

El problema queda enunciado a modo de estímulo o desafío inicial. Luego de una breve sección de ejercitación destinada a comprobar el dominio de

14 **Libro de texto de Galileo** Texto del Estudiante, Matemática 6° Básico. Editoras: Yuvica Espinoza Lagunas, Silvia Alfaro Salas, Sara Cano Fernández Copyright © 2009 by Harcourt, Inc. © 2014 de esta edición Galileo Libros Ltda.

aprendizajes aritméticos previos necesarios para el aprovechamiento de este nuevo tema se procede a definir, en calidad de vocabulario, los conceptos centrales de esta unidad: porcentaje y razón.

El porcentaje se define como “el número o cantidad que representa la proporcionalidad de una parte respecto a un total que se considera dividido en cien unidades”

Respecto de la razón se indica que “una razón entre dos números a, b es el resultado de la división o cociente entre ambos”. Luego se indica que una razón permite comparar cantidades.

Es del caso hacer notar que esta definición presupone la existencia de dos operandos que representan magnitudes homogéneas y que lo esencial de la razón es su valor numérico, es decir, la razón es entendida como un operando y no como una relación de tipo funcional entre dos magnitudes no necesariamente homogéneas.

Problema: Valiéndose del grado de miniaturización de los microchips electrónicos, comúnmente expresado mediante una razón, se ilustra como tal relación de tamaños puede escribirse y leerse tanto como como texto natural “1 es a 60”, como la expresión matemática horizontal “1:60” o como la “fracción” “un sesenta-avo”

Este texto pone en evidencia como la notación, en sí misma, configura una primera dificultad de índole didáctica toda vez que para el estudiante de este grado una misma expresión, “1:60”, pueda leerse como “1 es a 60”, “1 dividido por 60” o “un sesenta-avo de la unidad”.

Como un párrafo de cierre de este problema el texto señala que “Las razones comparan cantidades: una parte con otra parte, una parte con el todo, el todo con una parte.” Esta precisión es tremendamente relevante pues alude a una propiedad diferenciadora de los conceptos razón y fracción. La fracción es siempre una relación entre la parte (numerador) el todo (denominador) lo cual asegura, de manera implícita, que ambas cantidades implicadas sean homogéneas, es decir, de la misma naturaleza.

El ejemplo que se desarrolla a continuación que relaciona el número de letras y números presentes en un teclado de computador ilustra esta circunstancia mediante la razón existente entre letras y números (parte con parte), letras respecto de todas las teclas (parte respecto del todo) y las teclas respecto de los números (Todo respecto de la parte). Lamentablemente este ejemplo y el que le sigue, de las fichas rojas y amarillas, siguen siendo situaciones parciales toda vez que operan con cantidades homogéneas (teclas con teclas, fichas con fichas) omitiendo así la manifestación de otro atributo distintivo de las razones: comparar o relacionar cantidades no homogéneas cuya división o cociente aritmético es conceptualmente improcedente (Freudenthal, 1983).

Completar tabla con serie proporcional. Se pide a los estudiantes completar en una tabla que relaciona el tiempo de trote de una atleta, que avanza con rapidez constante, con la distancia recorrida. a velocidad constante. dos series numéricas (¿se presupone que las series deben ser proporcionales o que todas las series son proporcionales?)

Encontrar razones equivalentes a fracciones dadas. El implícito en esta actividad es que las razones y las fracciones son lo mismo. Al respecto es interesante mencionar de acuerdo con algunos autores (Hoffer; 1988, Godino et al., 2002) que las fracciones y las razones tienen algunas similitudes pera al mismo tiempo grandes diferencias:

En términos conceptuales, las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida (Godino et al; 2002, p.420). Ello quiere decir, en términos prácticos, y de acuerdo con el mismo autor que "las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes". Por ejemplo, 3 CD por $12.900.

Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 CD / $12900 no corresponde a una fracción. Por las misma razones anteriores se pueden derivar otras consecuencias tales como que no todas las fracciones se pueden representar como fracciones (Ejemplo 10 Km por litro), o que, a diferencia de las fracciones, las razones no requieren el uso de la notación fraccionaria para ser expresadas (por ejemplo $6 \rightarrow 8$) que se lee “6 es a 8”. También es posible que en una razón la segunda componente, el consecuente, pueda ser nulo dado que en el caso de la razón el propósito es la comparación de magnitudes y no su operación. También es del caso señalar que las razones no siempre corresponden a números racionales como es el caso, por ejemplo, de la razón existente entre la longitud del lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal, que corresponde a $\sqrt{2}$ situación que no podría acontecer con una fracción dado que siempre se trata de una par de números enteros**.**

4.2.4 La proporcionalidad en un texto de apoyo docente.

El año 2014, en el marco del proyecto FONDEF D091-1023 se edita el texto: “Números: texto para la formación de profesores (ReFIP)” destinado a apoyar la formación en matemática de los profesores de educación general básica. En el capítulo 9 de dicho texto se aborda el estudio de la proporcionalidad y los porcentajes a través de un enfoque que resulta pertinente e interesante comentar a la luz de los conceptos y premisas teóricas de esta investigación.

El capítulo IX de este texto denominado “Razones, proporciones y porcentajes” comienza estudiando el concepto de razón para luego, mediante ejemplos y ejercicios expresados mediante tablas de datos y enunciados de situaciones relacionadas con la vida cotidiana aplicar y poner a prueba el concepto de razón. Es interesante en este punto la definición que se hace de razón y sus propiedades.

Al inicio de la página 399 se indica que una razón es una “comparación entre dos cantidades que se miden en las mismas unidades” que equivale a lo que Freudenthal denomina “razón interna” o razones “formadas en un mismo sistema”. Luego señala que una razón, por ejemplo “a:b” (“a” es a “b”) no corresponde, conceptualmente, a un número no obstante lo cual igual le asigna un número, en este caso, la fracción “a/b” . Mediante esta asignación lo que se ha hecho es homologar una razón con una fracción. De ahí en adelante se la trata como si fuera una fracción: está formada por dos números enteros, estos dos números enteros se pueden dividir entre si y de dicha división se podría obtener un cociente, finito o infinito, nunca irracional. Desde este punto de vista algunas célebres razones como π, φ o $\sqrt{2}$, no serían consideradas razones. En suma la razón es tratada como si fuese lo mismo que una fracción lo cual es a lo menos contradictorio respecto de lo planteado por varios autores (Freudenthal;1983;Hoffer;1988;Godino et al., 2002)

> *"La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. También lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, pero éstos lo son en sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido —en efecto, ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3 : 4 con ¾.?*

La razón también puede obtenerse: transformándola en un cociente, esto es, leyendo *"3 es a 4" como si dijera "3 dividido por 4", pero esto es la violación de la razón. Si se hace, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón. (Freudenthal, 1983)*

Luego se presenta la proporcionalidad inversa, también a través de una tabla de datos, que presenta como la duración del alimento, expresada en días, disminuye conforme se incremente la cantidad de perros a alimentar con dicho alimento. Acto seguido y tal como ocurrió con la proporcionalidad directa se enuncian algunas situaciones cotidianas que corresponden a relaciones de proporcionalidad inversa. No se muestran situaciones en que las variables evolucionen en sentidos opuestos pero que no sean proporcionales.

Llegado a este punto del capítulo se presenta una pequeña guía compuesta de ocho tipos diferentes de ejercicios que consideran tanto la proporcionalidad directa como la proporcionalidad inversa.

Luego en la segunda sección del capítulo se aborda el tratamiento de los porcentajes presentados como un caso particular de fracción cuyo denominador es 100. Llama la atención que siendo los porcentajes una sección de un capítulo dedicado al estudio de las proporciones no se aluda a él como una proporción en la que uno de sus términos es una fracción (en realidad una razón parte-todo) cuyo denominador es 100. El resto de la sección muestra ejemplos de problemas y muestra la algoritmia para su resolución.

El capítulo termina describiendo las principales dificultades y errores en el trabajo con las razones, los porcentajes y las fracciones. Dicha lista considera los siguientes casos:

a) Sobre generalización de la algoritmia de las proporciones directa o inversa a cualquier relación, sea o no proporcional.
b) Confusión de la verdadera situación matemática a partir de los enunciados verbales y de los contextos a los cuales estos aluden.
c) Operar razones como si fueran operandos.
d) Tratar los porcentajes como si fueran cantidades absolutas.

4.3 Hallazgos y reflexiones

En este capítulo se ha descrito la forma en que algunos textos orientados a la enseñanza de la proporcionalidad en contextos escolares plantean y desarrollan el tópico. El propósito de esta revisión es la detección de semejanzas y diferencias entre los énfasis y perspectivas adoptadas y que pudieran servir como indicadores del tipo de conocimiento especializado puesto en juego. No se trata por cierto de una revisión extensa y exhaustiva de los textos disponibles a nivel nacional o internacional pues tal propósito excede a los tiempos y recursos de este trabajo.

La pregunta subyacente a esta revisión de textos es la siguiente: ¿Qué tipo de conocimiento especializado de la proporcionalidad debe poseer un profesor para conducir la enseñanza de este tópico en los términos que el texto escolar requiere?

Desde la perspectiva de esta tesis, el texto japonés comentado es una clara expresión, decantada y breve, de una visión didáctica profunda y bien articulada, tanto de las estrategias de enseñanza como de las principales complejidades epistémicas de la proporcionalidad. Dicho texto presupone que el docente domine la proporcionalidad de manera profunda (Ma, 2010) lo cual implica no solo conocer una definición de razón o de proporción sino en realidad, estar al tanto de las distintas definiciones y maneras de entender la razón o la proporción, es decir, conocer los argumentos que justifican cada uno de los enfoques y sus correspondientes propiedades y procedimientos.

El texto japonés aprovecha la intuición y la experimentación con fenómenos físicos, accesibles a los estudiantes, lo cual requiere, en términos del profesor no solo el dominio conceptual de la proporcionalidad sino también la valoración y comprensión de cómo los matemáticos trabajan cuando quieren verificar una conjetura o validar un tipo de procedimiento. Conducir este proceso de indagación de los estudiantes requiere evitar cuanto sea posible la validación de una conjetura por juicio de autoridad y privilegiar (también acompañar), en cambio, la validación por la fuerza lógica de las argumentaciones de tipo matemático.

Se integra la interacción con el mundo sensible con la abstracción y se pone en juego diversas habilidades matemáticas tales como medir, registrar, analizar, cambiar formas de representación, descubrir regularidades, conjeturar, generalizar, verificar, probar.

Se previene, desde el diseño didáctico, los principales errores que naturalmente se cometen al estudiar este tema: suponer que cualquier cuarteto de números es una proporción, suponer que una razón es lo mismo que una fracción, suponer que una razón no es más que un cociente.

Se privilegia el desarrollo de nociones fundamentales a partir de situaciones empíricas antes de dar definiciones formales.

Se construyen criterios de discriminación de la proporcionalidad a partir de casos estudiados y discutidos con detención dejando para un momento posterior la aplicación y ejercitación necesarias.

El texto de apoyo opera como una guía que promueve el descubrimiento de los estudiantes y no un repertorio de definiciones y verdades ya hechas. Es la diferencia entre explicar un contenido y redescubrirlo. El texto japonés exige al docente un grado de conocimiento profundo de la proporcionalidad pues se orienta al proceso de construcción conceptual a partir de la praxis más que a la enunciación docta de definiciones y propiedades matemáticas.

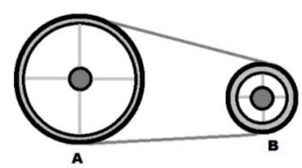
CAPITULO 5 –ESTUDIO CUALI - CUANTITATIVO

5.1 Estudio preliminar de proporcionalidad

En esta sección se describen algunas experiencias preliminares de evaluación del conocimiento básico en relación a las razones y la proporcionalidad. Los sujetos de este estudio son 37 estudiantes de pedagogía en educación básica que cursaban su primer año de carrera. Los ítems que se presentan y comentan a continuación forman parte de una prueba más amplia que contiene otros temas que no son de interés para esta investigación. En cada caso se presenta el ítem, luego los resultados obtenidos y finalmente un comentario interpretativo de dichos resultados.

Primer Problema

La polea A mueve a la polea B mediante una correa. Cuando la polea A gira 12 veces la polea B realiza 18 giros. Con estos datos responde y fundamenta:



a) *¿En qué razón están los giros de la polea A respecto de los giros de la polea B?*

b) *¿Cuántos giros debiera dar la polea A para que la polea B gire 90 veces?*

c) *¿Son directamente proporcionales los giros de ambas poleas?*

Desempeño por objetivo de Evaluación

ITEM 1	OBJETIVO DE EVALUACIÓN	Respuestas Correctas	Parcialmente Correctas	Incorrectas	No responden
1A	Determinar que la razón de giro es 2:3	32	1	0	4
1B	Usar razón de giro para calcular vueltas de una de las poleas	31	0	2	4
1C	Determinar si existe relación de proporcionalidad	9	15	6	7

FUENTE: datos del autor tomados de pruebas en primer curso de educación básica 2015

COMENTARIOS

La mayoría de los estudiantes (86,5%) logra identificar la razón 2:3 en la situación descrita. Solo un estudiante (2,7%) la identifica pero la expresa como 12:18. Cuatro estudiantes no responden esta pregunta.

En esta segunda pregunta se pide utilizar la razón conocida para encontrar la cantidad de vueltas de una polea conocida la cantidad de vueltas de la otra (calcular término desconocido de una proporción). La mayoría de los estudiantes respondió correctamente (83,8%), dos estudiantes se equivocaron y cuatro, los mismos que se abstuvieron en la pregunta 1a) se abstuvieron de responder.

Estos datos evidencian que los estudiantes consultados reconocen una razón en un contexto real dado y la emplean eficazmente para determinar una respuesta relacionada pero que no tienen, mayoritariamente claridad de porqué hacen lo que hacen, es decir, por qué razones una relación entre variables debiera o no ser considerada una relación proporcional.

<u>Segundo problema</u>

Se sabe que en un mes hubo 24 días de trabajo y 6 días libres, entre feriados y fines de semana. De acuerdo con estos antecedentes responda:

A. ¿Qué porcentaje del mes se trabajó?
B. ¿Cuál es la razón entre días libres y días trabajados?
C. ¿Qué fracción del mes no se trabajó?
D. ¿Cuántos días de trabajo hubo por cada día libre?

Desempeño por objetivo de Evaluación

ITEM 2	OBJETIVO DE EVALUACIÓN	Respuestas Correctas	Parcialmente Correctas	Incorrectas	No responden
2A	Expresar una razón como porcentaje.	33	0	1	3
2B	Identificar una razón en una situación dada.	29	1	1	6
2C	Expresar una razón (parte-parte) como fracción.	31	0	2	4
2D	Reducir razón a la unidad.	33	0	0	4

FUENTE: datos del autor tomados de pruebas en primer curso de educación básica 2015

COMENTARIOS

El propósito de estas preguntas es detectar si los estudiantes comprenden las similitudes y diferencias entre los conceptos de razón, fracción y porcentaje. Para ello se presenta una situación cotidiana de fácil comprensión y se les solicita que expresen la relación entre días trabajados y feriados de un mes en forma de fracción, razón y porcentaje.

Las cuatro preguntas (2a, 2b, 2c y 2d) son respondidas adecuadamente por la mayoría de los estudiantes (89,2%, 78,4%, 83,8% y 89,2%) y complementariamente son muy pocos son los que se equivocan (menos del 6%). No obstante lo anterior llama la atención la presencia de un grupo de entre cuatro y siete estudiantes (12% aproximadamente) que no sabe cómo abordar esta pregunta y no responde o responde equivocadamente.

Tercer problema

Observe cada tabla y responda, con fundamento, las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tabla(s) representa(n) una relación de proporcionalidad directa?

b) ¿Qué tabla(s) representa(n) una relación de proporcionalidad inversa?

A		B		C		D		E	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
4	5	1	1	3	6	1	24	1	4
6	7	2	4	6	12	2	12	2	3
8	9	3	9	9	18	3	8	3	2
10	11	4	16	12	24	4	6	4	1

Desempeño por objetivo de Evaluación

ITEM 3	OBJETIVO DE EVALUACIÓN	Respuestas Correctas	Parcialmente Correctas	Incorrectas	No responden
3A	Proporcionalidad Directa con datos tabulados	9	1	4	23
3B	Proporcionalidad indirecta con datos tabulados	7	3	2	25

FUENTE: datos del autor tomados de pruebas en primer curso de educación básica 2015

COMENTARIOS

En ambos ítems la mayoría de los estudiantes de pedagogía no responden. De los 37 estudiantes involucrados en el test, solo nueve de ellos (24,3%) logran discriminar que la tabla C corresponde a una relación de proporcionalidad y argumentan adecuadamente su opción. La mayoría indica que el cociente X/Y permanece constante en cada uno de los pares de la Tabla C y que, en las otras tablas, dicho cociente no permanece constante. Un décimo estudiante también elige esta opción pero los argumentos que da para su elección son insuficientes: él señala que existe proporcionalidad directa entre X e Y solo porque si una variable aumenta (X) también aumenta la otra variable (Y), sin tomar en cuenta las magnitudes relativas de dichas variaciones.

De los otros 23 estudiantes (62,2%) no logra formular una respuesta lo cual evidencia que no tienen como discernir, de manera clara, cuál de las cuatro tablas representa una relación de probabilidad y cuáles no. Los cuatro estudiantes restantes (10,8%) eligen una de la tres tablas no proporcionales A, B o D confundidos por la existencia en cada distractor de algún tipo de regularidad premeditadamente utilizada en su confección. Así por ejemplo, la tabla A, se construyó manteniendo constante un incremento aditivo de 2 unidades en cada variable. En el caso de la tabla B la variable Y se obtiene elevando al cuadrado el valor de la variable X. En la tabla D las variables x e y no generan un cociente constante pero si un producto estable (24) y, finalmente en la tabla F la columna X contiene los mismos valores que la columna Y pero secuenciados en orden inverso. Este último distractor será preferido por aquellos estudiantes que, considerando que ambas variables evolucionan en sentidos opuestos, piensen que esa única circunstancia baste para establecer que la relación es inversamente proporcional sin darse el trabajo de verificar la existencia de un producto constante que, en este caso, no existe.

En el ítem 3b, se solicita identificar la tabla que representa una relación de proporcionalidad inversa. En este caso, las respuestas de los estudiantes evidencian un patrón de comportamiento similar al ítem verificado en el ítem 3-a. La mayoría de los estudiantes no responde el ítem (67,6%) y solo una pequeño grupo de 7 de ellos (18,9%) identifica la tabla que representa una relación de proporcionalidad inversa. Este mismo grupo minoritario argumenta adecuadamente el porqué de su opción. La mayoría de ellos consideró que ambas variables además de variar en sentidos opuestos poseen un producto que es constante y que constituye, precisamente, la constante de proporcionalidad de ambas variables.

El error cometido por tres estudiantes consistió en considerar la tabla F como representativa de la proporcionalidad inversa sin reparar en la circunstancia de que en dicha tabla los productos entre variables (x*y) debían ser constantes.

5.2 ¿Qué evaluar de la proporcionalidad?

El año 2011 el Ministerio de Educación chileno publicó el texto "Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en educación Básica. Estándares pedagógicos y disciplinarios". Esta publicación fue desarrollada con la conducción técnica del propio centro del Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE) de la Universidad de Chile y el Centro de Estudios de Políticas y Prácticas en Educación (CEPPE) perteneciente a la Pontificia Universidad Católica de Chile.

En dicho texto se explicitan los "conocimientos, habilidades y competencias" que las instituciones formadoras de profesores de este nivel "deben ser capaces de enseñar a sus estudiantes durante el transcurso de la carrera". Es por lo tanto una definición de lo que los futuros profesores debieran aprender y desarrollar en relación a las asignaturas que enseñarán y a las estrategias didácticas y pedagógicas que emplearán para enseñarlas.

En sus primeras páginas el propio texto define el rol de estos estándares como una herramienta de referencia y orientación que no pretende interferir en la libertad académica de las instituciones formadoras pero que puede constituirse en un referente no tan solo para las instituciones formadoras sino también para los futuros profesores que pueden tomar en sus propias manos el seguimiento de sus propios procesos de aprendizaje.

Dadas estas circunstancias resulta muy relevante y pertinente al propósito de este trabajo revisar qué es lo que prescriben los estándares en relación a la proporcionalidad en profesores de educación básica.

El texto inicialmente describe las características básicas deseables en un educador del siglo XXI y luego brinda una visión general de los estándares para entrar de lleno en la definición de los estándares pedagógicos. A continuación, en la sección tres, explicita los estándares disciplinarios de cuatro áreas curriculares: Lenguaje y comunicación, Matemática, Ciencias naturales e Historia, geografía y ciencias sociales.

Revisando las competencias del área matemática se encuentra el estándar N° 5 dedicado a la proporcionalidad en los siguientes términos: “El futuro profesor o profesora está preparado para conducir el aprendizaje de porcentajes, razones y proporciones” (MINEDUC, 2011) que ciertamente es una expresión bastante general pero que puede explicitarse aún más revisando los trece indicadores de esta competencia:

1. Resuelve problemas que involucran cálculo de porcentajes.
2. **Resuelve problemas que involucran razones y proporciones directas e inversas en diversos contextos y situaciones tales como mezclas o dibujos a escala.**
3. Resuelve problemas que involucran el cálculo de interés compuesto en situaciones de la vida cotidiana.
4. **Reconoce proporcionalidad directa e inversa en diversas situaciones y contextos.**
5. **Comprende la relación entre los conceptos de razón, proporcionalidad (directa e inversa) y porcentaje**.
6. Conoce la secuencia curricular de primero a sexto básico referente a razones, proporciones y porcentajes, así como los contenidos relacionados en niveles posteriores.
7. Planifica actividades y clases con el propósito que los alumnos y alumnas comprendan los conceptos básicos de porcentajes, las formas de calcularlo y su utilidad para comunicar información.
8. Reconoce errores frecuentes en el cálculo de porcentajes y propone estrategias para que los estudiantes los superen.
9. Propone actividades que motiven la introducción de los conceptos de razón y porcentaje.
10. Diseña actividades que permitan relacionar las nociones de razón y porcentaje con contenidos de los otros ejes de matemática.
11. Utiliza la resolución de problemas como estrategia para generar aprendizajes de razones y porcentajes.

12. Usa material didáctico apropiado para generar aprendizajes de razones y porcentajes.
13. Diseña instrumentos de evaluación para medir los logros de aprendizaje en el tema de porcentajes.

Algunos de estos indicadores hacen referencia a un dominio personal del saber matemático relacionado con la proporcionalidad, las razones y los porcentajes como es el caso de los indicadores 1, 2, 3 4, 5 que enfatizan desempeños matemáticos que el futuro profesor debe evidenciar, con prescindencia de su actuación como docente. En la lista anterior se ha destacado en negrita aquellos indicadores que más directamente se refieren a los conceptos de razón y proporcionalidad.

Los indicadores siguientes, del 6 al 13, aluden con mayor claridad a desempeños relacionados con la actuación docente (conocer el currículo, planificación curricular, diseño de actividades, aplicación de estrategias didácticas, diseño de material didáctico y de instrumentos evaluativos), sin dejar de considerar los desempeños matemáticos.

Adicionalmente, con el propósito de focalizar temáticamente los contenidos involucrados en el Test diagnóstico se han revisado los programas de estudio de educación básica para precisar qué tópicos de proporcionalidad persisten aun en tales instrumentos normativos. Es del caso precisar que los programas de estudio de matemática de la educación básica definen tanto las habilidades de pensamiento como las actitudes y contenidos de la educación matemática. En relación a los contenidos o temas estos están organizados en cinco ejes temáticos longitudinales, que se extienden de primer a octavo año. A su vez cada eje temático se desagrega en objetivos de aprendizaje (OA) que definen de manera más específica qué aprenderán los niños en cada eje temático según el nivel escolar.

Se entiende que los objetivos de aprendizaje mencionados estipulan los propósitos de enseñanza establecidos por los programas de estudio y que, en consecuencia, corresponden a contenidos matemáticos que los profesores comprenden y enseñan, o enseñarán en el caso de los futuros profesores, a sus estudiantes en la escuela.

Estos contenidos corresponden a lo que, de acuerdo con el marco teórico de referencia, hemos definido como conocimiento de los tópicos (KoT) (Carrillo et al., 2015).

Los objetivos de aprendizaje del curriculum que se relacionan directa y explícitamente con la proporcionalidad son tres, dos en séptimo grado y uno en octavo grado de acuerdo al siguiente detalle:

En la siguiente tabla se muestran los objetivos de aprendizaje a evaluar señalando su ubicación en los programas de estudio (MINEDUC, 2012) y los tipos de conocimiento implicados en cada objetivo, de acuerdo a la tipificación del modelo MTSK (Matehmatics Teacher's Specialized Knowledge). Par ello se ha recurrido al uso del color señalando en azul el conocimiento de los conceptos y propiedades de los contenidos matemáticos, en verde los conocimientos de tipo procedimental y en violeta (morado) el conocimiento de tipo representacional.

Es del caso recordar que estos son objetivos de aprendizaje que el currículo escolar propone para estudiantes de 7° y 8° grados de educación básica lo cual torna innecesaria la argumentación de por qué los profesores debieran dominar este contenido. Por igual razón tampoco se incorporan argumentaciones adicionales para fundamentar la validez de contenido del instrumento evaluativo.

UBICACIÓN CURRICULAR	OBJETIVO DE APRENDIZAJE	KoT: Tipo de conocimiento
7° grado. Eje: Números OA-03	**Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo.**	• **Propiedades** • **Procedimientos** • **Representación**
7° grado. Eje: Números OA-04	**Mostrar que comprenden el concepto de porcentaje: representándolo de manera pictórica, calculando de varias maneras, aplicándolo a situaciones sencillas.**	• **Propiedades** • **Procedimientos** • **Representación**
8° grado. Eje: Números OA-08	**Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, Graficando los valores de la tabla, Explicando las características de la gráfica y Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.**	• **Propiedades** • **Procedimientos** • **Representación**

5.3 ESTUDIO CUANTITATIVO: test diagnóstico

Con el propósito de evaluar el nivel de desempeño de los profesores en ejercicio y de los estudiantes de pedagogía en los temas descritos en la sección anterior (Objetivos de aprendizaje de 7° y 8° grado) se elaboró el test que a continuación se describe.

El Test Diagnostico diseñado corresponde a una prueba compuesta de 24 ítems de selección múltiple, cada uno provisto de cuatro opciones identificadas por las letras mayúsculas A, B C y D. Una de las cuatro opciones es la alternativa correcta y las otras tres corresponden a distractores elaborados de modo tal que cada uno corresponda a un error plausible o bien a una concepción errónea respecto del contenido evaluado.

El instrumento se ha elaborado con el fin de determinar qué y cuánto dominan los evaluados, profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía, de la proporcionalidad. Como ya se ha señalado el ámbito temático del test corresponde al cubierto por tres objetivos de aprendizaje relacionados con la proporcionalidad presente en los programas de estudio vigentes en educación básica.

Estos objetivos de aprendizaje son los únicos objetivos del programa de educación básica que hacen referencia, de manera explícita, al uso de razones y proporciones. También se consideró el objetivo 3 de séptimo básico que trata de porcentajes por su estrecha relación con el tema investigado.

<u>Objetivos de evaluación considerados</u>

Cada objetivo de aprendizaje (OA) enunciado corresponde a un propósito formativo que los profesores en Chile deben considerar en su planeación de clases destinado a su consecución las clases que sean necesarias. Para efectos de dosificación y secuenciación del trabajo se pueden descomponer en objetivos más específicos y operacionalizar en actividades y tareas. También para efectos evaluativos se pueden descomponer en objetivos más específicos denominados objetivos evaluativos (OE).

Para cada objetivo de aprendizaje se han elaborado dos a tres objetivos de evaluación que permiten explicitar con mayor precisión qué aspectos específicos del objetivo de aprendizaje evaluará cada ítem del instrumento. Cabe destacar que el objetivo de evaluación constituye finalmente el fundamento y la referencia que orienta el diseño del ítem.

En la siguiente tabla se despliega el listado de objetivos de evaluación (OE) asociados a cada uno de los Objetivos de Aprendizaje (OA) considerados en este estudio señalando, mediante el uso de los mismos colores de la tabla anterior, el tipo de conocimiento del tópico (KoT) implicado en el Objetivo de Evaluación.

OBJETIVOS DE EVALUACIÓN POR OBJETIVO DE APRENDIZAJE

NIV	OA	OBJETIVO DE APRENDIZAJE	OE	OBJETIVO DE EVALUACIÓN
7	3	Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo.	**1**	Comprender el concepto de razón de manera pictórica
			2	Comprender el concepto de razón de manera simbólica
7	4	Mostrar que comprenden el concepto de porcentaje: representándolo de manera pictórica, calculando de varias maneras, aplicándolo a situaciones sencillas	**3**	Comprender el concepto porcentaje representándolo de manera pictórica
			4	Comprenden el concepto de porcentaje calculando de varias maneras en situaciones sencillas
8	**8**	Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: Realizando tablas de valores para relaciones proporcionales, Graficando los valores de la tabla, Explicando las características de la gráfica y Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas	**5**	Comprenden las proporciones directas e inversas representadas gráficamente.
			6	Comprenden las proporciones directas e inversas representadas tabularmente.
			7	Comprenden las proporciones directas e inversas resolviendo problemas en contextos diversos.
			8	Comprenden las proporciones directa e inversa aplicando criterios adecuados para su reconocimiento.
			9	Aplican criterios de razonamiento multiplicativo en la resolución de problemas de proporcionalidad

Tipo de conocimiento Propiedades – Procedimientos – Representación

Basado en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2015)

Diseño del test diagnóstico

La tabla anterior constituye entonces una primera matriz de especificaciones del test. Para cada objetivo de evaluación se desarrollaron dos a tres preguntas con el propósito de cubrir las distintas dimensiones que contiene cada objetivo de evaluación. La siguiente tabla muestra qué ítems se realizaron para cada objetivo de evaluación así como también su ubicación relativa dentro del Test pues ellos han sido ordenados de modo tal de colocar los más difíciles en el “centro del test”, cuando ya se ha logrado un nivel de concentración mayor y antes de que se produzca algún grado de fatiga por el trabajo.

ITEM POR OBJETIVO DE EVALUACIÓN

O E	OBJETIVOS DE EVALUACIÓN	OR-DEN ITEM	DESCRIPCIÓN BREVE DEL ÍTEM
1	Comprender el concepto de razón de manera pictórica	1	Confección de limonada
		2	Bandeja con huevos
		8	Lanzamientos penales
2	Comprender el concepto de razón de manera simbólica	3	Albañil prepara mortero
		9	Niños y niñas de un curso
		13	Padre hija caminando
3	Comprender el concepto porcentaje representándolo de manera pictórica	4	Tablero de damas
		10	Termómetro y temperaturas
4	Comprenden el concepto de porcentaje calculando de varias maneras en situaciones sencillas	5	Audífonos con descuento
		15	Raqueta de tenis
5	Comprenden las proporciones directas e inversas representadas gráficamente.	19	Gráfico de relación no proporcional
		20	Gráfico de proporcionalidad directa
		21	Gráfico de proporcionalidad inversa
6	Comprenden las proporciones directas e inversas representadas tabularmente.	22	Tabla de proporcionalidad directa
		23	Tabla de relación no proporcional.
		24	Tabla de proporcionalidad Inversa
7	Comprenden las proporciones directas e inversas resolviendo problemas en contextos diversos.	11	Ampliación de una fotografía
		16	Mesa a Ampliación escala
8	Comprenden las proporciones directa e inversa aplicando criterios adecuados para su reconocimiento.	12	Edad de juanita
		17	Criterios de proporcionalidad directa
		18	Criterios de proporcionalidad Inversa
9		6	Bancos Alfa y Beta

	7	Granulin y Cuadracina
	14	Ciclistas entrenando

La descripción que aparece del ítem en la cuarta columna es solo de carácter nemotécnico, para referenciar rápidamente el ítem completo. La pregunta completa, con el enunciado y el estímulo (imagen, gráfico o tabla) de apoyo así como con sus distractores y clave se encuentra en los Anexos con el nombre: Test Diagnóstico v10.

Respecto al comportamiento estadístico del instrumento se ha analizado su confiabilidad mediante el cálculo del coeficiente Alfa de Cronbach, arrojando un resultado de 0,71 que, de acuerdo al criterio propuesto por George y Mallery es considerado como ACEPTABLE. (George y Mallery, 2003 p. 231).

5.3.2 Sujetos participantes en el estudio cuantitativo

El test se aplicó durante el primer semestre de 2017, entre abril y mayo, a un grupo total de 209 personas, 77 profesores en ejercicio y 131 estudiantes de pedagogía en educación básica de acuerdo al siguiente detalle:

EVALUADOS POR GÉNERO	MUJE-RES	HOM-BRES	**TOTAL**
ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA	106	25	**131**
PROFESORES EN EJERCICIO	64	13	**77**
TOTAL	**170**	**38**	**208**

Los estudiantes de pedagogía en educación básica pertenecen a dos Universidades: Universidad de Chile (89) y Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (42) y pertenecen a tres cohortes diferentes según año de ingreso según se puede apreciar en la siguiente tabla:

COHORTE DE INGRESO	MUJERES	HOMBRES	TOTAL	%
2015	35	7	42	32,1%
2016	35	12	47	35,9%
2017	36	6	42	32,1%
TOTAL	**106**	**25**	**131**	
	80,9%	19,1%		

Su distribución de género nos indica que se trata de un estudiantado mayoritariamente femenino pues por cada cuatro mujeres hay un varón, situación que más o menos se asemeja a la situación de los profesores en ejercicio.

Respecto de los docentes (77) estos proceden principalmente de tres programas de postítulo, dos de la universidad de Chile y uno de la Universidad Diego Portales de Santiago y algunos profesores de una escuela municipal de Ñuñoa tal como se aprecia en la siguiente tabla:

Profesores en ejercicio por Institución

INSTITUCIÓN	Mujeres	Hom-	TOTAL
Postítulo UChile - 2016	15	4	**19**
Postítulo UChile - 2017	18	2	**20**
UDP - 2016	28	5	**33**
Colegio Ñuñoa	3	2	**5**
TOTAL	**64**	**13**	**77**
	83,1%	16,9%	

A los profesores que participaron en la evaluación se les consultó también respecto de su experiencia en aula la cual se resume en la siguiente tabla:

EXPERIENCIA DOCENTE	DOCEN-TES	%
1 a 4	9	11,7 %
5 a 9	22	28,6 %
10 a 14	21	27,3 %
15 a 19	13	16,9 %
20 a 24	6	7,8%
25 a 29	4	5,2%
30 a 35	1	1,3%
35 o más	1	1,3%
TOTAL	**77**	**100 %**

Como puede observarse, la mayor parte de los docentes, casi el 70% de ellos, tiene menos de 25 años de docencia y considerados en su conjunto, sin distinción de género, poseen una experiencia docente promedio cercana a los nueve años (8,84 años). Vale decir, se trata de profesores que ya no están en la condición de novatos y que poseen una comprensión más profunda de la institución escolar, de los espacios de aula, de los niños con quienes trabajan y, en general, de las complejidades y desafíos de la profesión, tanto en aspectos disciplinares como en aspectos pedagógicos y didácticos. Un rasgo común que no se evidencia en los recuentos estadísticos es que la mayoría de ellos, si no todos, posee la inquietud y el compromiso de desarrollarse profesionalmente y por ello invierten buena parte de su tiempo libre en participar en los cursos de postítulo que dictan algunas universidades chilenas. Otro rasgo en común que comparten los docentes participantes en este estudio es que todos ellos han escogido especializarse en educación matemática aun cuando varios de ellos evidencian una precaria formación previa en el área. Es lícito pensar entonces que, no obstante su debilidad formativa inicial, ellos no han perdido el aprecio por la matemática y su enseñanza y han decidido en los hechos hacerle frente y superar esta deficiencia.

La contraparte complicada de esta situación es que estos profesores están en pleno ejercicio de su actividad profesional, atienden en la actualidad a varias decenas de estudiantes por año y tienen aún por delante entre 20 y 30 años de ejercicio docente. Estos simples y rústicos datos imponen, desde una perspectiva no solo didáctica sino también ética, un sentido de urgencia al trabajo de desarrollo profesional docente. Ello se traduce en revisar con ellos, desde la perspectiva matemática y didáctica, qué y cómo estamos enseñando matemática en el aula (en este caso la proporcionalidad y sus temas asociados), que no estamos haciendo bien y como superamos lo que no estamos haciendo bien.

A continuación se presentan los principales resultados obtenidos de la aplicación del test diagnóstico.

Primero muestran resultados globales, profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía juntos para luego presentar y discutir los resultados de grupos específicos organizados por ala aplicación de diversos criterios de análisis (género, experiencia docente, años en la carrera, etc.)

5.3.3 Resultados del estudio cuantitativo

La siguiente tabla muestra de manera muy simplificada el nivel de logro en cada uno de los objetivos de evaluación considerados en el test de diagnóstico por el total de individuos que resolvieron el test, es decir, están considerados los estudiantes de pedagogía y los profesores en ejercicio recién caracterizados en las hojas previas.

Resultados por Objetivo de evaluación generales y específicos.

OBJETIVO DE EVALUACIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ESTUDIANTES Y PROFESORES	71,2%	63,6%	54,3%	51,4%	23,6%	49,7%	63,9%	31,3%	71,8%
SOLO PROFESORES	65,8%	63,6%	53,9%	53,9%	22,9%	41,6%	55,8%	21,2%	64,5%
SOLO ESTUDIANTES	74,3%	63,6%	54,6%	50,0%	23,9%	54,5%	68,7%	37,2%	76,1%

Como aparece destacado en la tabla, los objetivos de evaluación en los cuales hubo mejor desempeño, sobre el 60% en este caso, fueron los objetivos 1, 2, 7 y 9 cuyos enunciados son los siguientes:

- OE1: Comprender el concepto de razón de manera pictórica
- OE-2: Comprender el concepto de razón de manera simbólica
- OE-7 Comprenden las proporciones directas e inversas resolviendo problemas en contextos diversos.
- OE-9 Aplican criterios de razonamiento multiplicativo en la resolución de problemas de proporcionalidad

Para efectos de este estudio no se desarrollará un análisis más exhaustivo y profundo respecto de estos objetivos mejor logrados dada la urgencia de focalizar la atención en aquellos objetivos de evaluación más gravemente deficitarios.

Luego hay tres objetivos de evaluación que presentan niveles de desempeño intermedio (entre 40% y 60%) que no siendo buenos resultados se ven para un trabajo posterior de revisión entendiendo que estos resultados no son satisfactorios porque evidencian ideas y conceptos débilmente comprendidos, poca profundización temática e inseguridad. Es el caso de los Objetivos 3, 4 y 6, a saber:

- OE-3: Comprender el concepto porcentaje representándolo de manera pictórica
- OE-4: Comprenden el concepto de porcentaje calculando de varias maneras en situaciones sencillas y
- OE-6: Comprenden las proporciones directas e inversas representadas tabularmente.

Finalmente tenemos un grupo de dos objetivos de evaluación que están bajo el 40% de dominio y que representan los temas menos comprendidos y dominados y por ende los temas que más urgentemente requieren ser abordados y estudiados. Sobre ellos se hará un análisis más detallado en la perspectiva de obtener pistas tanto de la naturaleza de su origen como de las acciones remediales a emprender. Se trata de los objetivos 5 y 8 cuyos enunciados se citan a continuación:

- OE-5: Comprenden las proporciones directas e inversas representadas gráficamente.
- OE-8: Comprenden las proporciones directa e inversa aplicando criterios adecuados para su reconocimiento.

Estos dos objetivos de evaluación son los que aparecen notoriamente más disminuidos en la muestra y los resultados presentados en la tabla muestran que el escaso dominio es común a los dos grupos evaluados, es decir, que tanto profesores en ejercicio como estudiantes de pedagogía posen escaso dominio de las habilidades y conceptos necesarios para responder satisfactoriamente las preguntas asociadas a este objetivo de evaluación.

Sin embargo también se podría pensar muy legítimamente en que los ítems o preguntas asociados a estos objetivos adolecen de problemas técnicos en su construcción o que, simplemente, miden otro contenido diferente del propuesto. Dilucidar esta disyuntiva es relevante porque no resulta fácil aceptar que, de cada cien evaluados solo 24, en promedio, respondan bien (casi la cuarta parte de los individuos evaluados). También es un dato relevante la poco significativa diferencia que existe en el desempeño de ambos grupos en relación a estos dos objetivos de evaluación.

Si se revisa con mayor detalle las preguntas asociadas a cada objetivo de evaluación se podrá tal vez comprender mejor el tipo de dificultad que explica tan bajo dominio:

Análisis del Objetivo de Evaluación N° 5

Consideremos la situación del objetivo de evaluación N° 5. Para este objetivo hay tres preguntas asociadas, las preguntas 19, 20 y 21 en las cuales la muestra obtuvo el más bajo desempeño y en donde además se registran las más altas tasas de omisión. En otras palabras: un 23,6% no sabe qué responder y prefiere abstenerse. De los que responden el siguiente desempeño:

OBJETIVO DE EVALUACIÓN N° 5	ÍTEM 19	ÍTEM 20	ÍTEM 21
EVALUADOS	208	208	208
ESPUESTAS ACERTADAS	40	58	49
RESPUESTAS ERRÓNEAS	130	116	122
RESPUESTAS OMITIDAS	38	34	37
% DE DOMINIO	19,2%	27,9%	23,6%
% de OMISIÓN	18,3%	16,3%	17,8%

Es del caso señalar que estas tres preguntas en el test de diagnóstico aplicado están asociadas a un mismo estímulo, es decir, a una misma imagen que contiene seis gráficos.

Lo que se espera con estas preguntas es que los evaluados demuestren que “Comprenden las proporciones directas e inversas representadas gráficamente” según señala el objetivo de evaluación N° 5. Las preguntas requieren que el evaluado/a reconozca, sin más evidencia que los gráficos, si lo que tiene a la vista es una relación directamente proporcional, inversamente proporcional o simplemente una relación no proporcional independientemente de si las variables varían en el mismo sentido o en sentidos opuestos.

La representación geométrica de la proporcionalidad contiene en su estructura visual diferentes claves que en su conjunto conforman una suerte de “sintaxis” de este tipo de registro. Así como una radiografía contiene información codificada visualmente que debe ser interpretada a partir de una sintaxis gráfica común especializada de igual modo el registro de representación geométrico tiene sus propias claves y códigos. La interpretación puede ser errónea porque no se conoce lo códigos de un registro determinado o porque aun conociéndoles no comprende bien el concepto representados mediante dichos códigos.

En general los evaluados no han experimentado o al menos no recuerdan haber estudiado la proporcionalidad en este registro semiótico. Saben que se puede graficar pero evidencian gran confusión e incertidumbre para reconocer si cada gráfica representa o no una relación proporcional.

Las alternativas de cada ítem están construidas con el propósito de detectar el tipo de confusión e inseguridad y se fundamentan a partir de una cierta “microteoría” que permite explicar el origen y la naturaleza de tales errores.

La imagen que sirve de contexto a las preguntas 19, 20 y 21 presenta los siguientes tipos de gráficos:

- G1: recta creciente (m>0) que pasa por el origen del sistema
- G2: recta creciente (m>0) que pasa por (0,1)
- G3: arco de parábola que parte de (-5, 0) pasa por (0,1) y crece cuadrática-mente
- G4: recta decreciente (m<0) con intercepto en (0,5) y (2,0)
- G5: Hipérbola que se ubica en el primer cuadrante del plano cartesiano
- G6. Recta decreciente (m<0) que pasa por el origen del sistema.

La pregunta 19 (pregunta a los evaluados sobre aquellas gráficas que NO corresponden a relaciones proporcionales. Esta pregunta es compleja pues normalmente en los espacios escolares, cuando se trata la proporcionalidad, no se deja ningún tiempo para estudiar la no proporcionalidad. El mundo de este tipo de relaciones pareciera quedar divido sólo en dos particiones: las relaciones directas e inversamente proporcionales. Todas las relaciones parecen ser proporcionales y solo basta saber si son directas o inversas.

En esta tesis se adhiere a la idea de que en el estudio de la proporcionalidad hay a lo menos cuatro categorías diferentes de relaciones entre dos variables: relaciones directamente proporcionales, relaciones directas no proporcionales, relaciones inversas proporcionales y relaciones inversas no proporcionales.

Los distractores de la pregunta 19 poseen la siguiente fundamentación:

- **Alternativa A**: G2, G3,G4 y G5. El evaluado piensa que si la proporcionalidad directa es una recta creciente que pasa por el origen entonces la proporcionalidad inversa también es una recta que pasa por el origen pero que es decreciente (cuando x aumenta y disminuye).
- **Alternativa B**: es la respuesta correcta
- **Alternativa C**: Sabe que las funciones lineales o las afines se relacionan con la proporcionalidad pero no tiene claro cuál de ellas es proporcional.
- **Alternativa D**: No está familiarizado con la hipérbola y piensa que la proporcionalidad normalmente se representa mediante rectas o curvas cuadráticas.

La pregunta 20 está asociada a la misma imagen de las seis gráficas pero interroga al evaluado respecto de qué gráficas representan una relación de proporcionalidad directa.

Los fundamentos de cada alternativa son los siguientes:

- **Alternativa A**: G1, G2 y G3. El evaluado piensa que la proporcionalidad directa es una gráfica creciente, sin importar si es recta o curva. En estas tres gráficas se cumple que "si x aumenta también aumenta y"
- **Alternativa B**: G1 y G2. El evaluado piensa que la proporcionalidad solo se representa mediante rectas crecientes. Descarta G3 porque es una curva. Y descarta G4 porque a pesar de ser recta no es creciente. No sabe, o no entiende, qué tiene que ver que la recta pase o no pase por el origen con la proporcionalidad.
- **Alternativa C**: solo G1. Es la alternativa correcta. Aun cuando la recta G6 interseca al origen y cumple con la condición de mantener constante el cociente entre las coordenadas de todos sus pares no cumple, sin embargo, la condición de que ambas variables evolucionen en un mismo sentido. Es cierto que

esta última condición no es suficiente pero sigue siendo una condición necesaria, al, menos para que el modelo funcional de proporción mantenga la coherencia y sentido de la proporcionalidad aritmética tradicional o cotidiana.

- **Alternativa D**: Solo G3. Considera que es una figura creciente mucho más “universal” que una recta. Podría haber cuadráticas más curvadas o más “rectas” lo cual coincide con su idea de que solo basta de que las variables crezcan o disminuyan en el mismo sentido y listo…son proporcionales.

Finalmente la pregunta 21, asociada a este mismo objetivo de evaluación, interroga a los evaluados respecto de la proporcionalidad inversa. El fundamento para cada alternativa es el siguiente.

- **Alternativa A**: G4, G5 Y G6. El evaluado sabe que en la proporcionalidad inversa si una variable la otra disminuye y viceversa. Busca por lo tanto gráficas decrecientes. No sabe o no tiene claro si es relevante que la gráfica sea recta o curva.
- **Alternativa B**: G4 y G6. Sabe que la proporcionalidad directa se representa mediante una recta creciente. Le parece razonable pensar que la proporcionalidad inversa corresponda también a rectas pero decrecientes.
- **Alternativa C**: solo G6. Por analogía, si la proporcionalidad directa se representa mediante una recta creciente que pasa por el origen entonces, la proporcionalidad inversa se representa del mismo modo pero por un recta decreciente.
- **Alternativa D**: Solo G5. Es la alternativa correcta.

Análisis del Objetivo de evaluación N° 8.

Este objetivo de evaluación se orienta a indagar si los evaluados “Comprenden las proporciones directa e inversa aplicando criterios adecuados para su reconocimiento” y para ello se vale de las preguntas 12, 17 y 18.

El desempeño de la muestra en cada una de estas preguntas se resume en la siguiente tabla:

OBJETIVO DE EVALUACIÓN N°8	ÍTEM 12	ÍTEM 17	ÍTEM 18
EVALUADOS	208	208	208
ESPUESTAS ACERTADAS	95	49	51
RESPUESTAS ERRÓNEAS	85	144	142
RESPUESTAS OMITIDAS	28	15	15
% DOMINIO	45,7%	23,6%	24,5%
% OMISIÓN	13,5%	7,2%	7,2%

Es del caso señalar que el porcentaje de dominio promedio de las tres preguntas es de un 31,3% y que la tasa de omisión promedio corresponde a un 9,3% que comparativamente resulta mejor que le objetivo de evaluación N° 5 revisado pero aún está por debajo del 40% más bajo y afecta sin grandes diferencias tanto a los estudiantes de pedagogía evaluados como a los profesores en ejercicio.

Las preguntas 12, 17 y 18 se proponen detectar qué criterios aplican los evaluados para discernir cómo se relacionan las variaciones de dos variables, tanto en sentido como magnitud.

La pregunta 12 presenta cuatro situaciones, tanto en contextos matemáticos como no matemáticos, con el fin de que él o la evaluado/a determinen cuál de ellas corresponde a una situación de proporcionalidad directa. La fundamentación que hay detrás de cada alternativa es la siguiente:

- **Alternativa A**: lado de un cuadrado y su perímetro. Es la alternativa correcta.

- **Alternativa B**: La edad de juanita y su hermana menor. Este distractor recoge las opciones de aquellos evaluados/as que piensan que ambas variables, las edades de cada hermana, son directamente proporcionales porque ambas aumentan en el mismo sentido y tales aumentos son constantes sin reparar en el hecho de que tales aumentos son variaciones aditivas y no multiplicativas. En términos aditivos ambas hermana envejecen un año a la vez pero, en términos relativos o proporcionales, la razón entre las edades de ambas hermana no se mantiene constante. Juanita duplicaba la edad de su hermanito a los 4 años (razón 2:1) pero cuando Juanita cumplió 6 y su hermano 4 la razón 3:2. En esta pregunta marcar esta alternativa evidencia un razonamiento de tipo absoluto o aditivo.
- **Alternativa C**: Radio de un círculo y su área. Esta alternativa la podría elegir quien piense que ambas variables son directamente proporcionales porque ambas crecen solidariamente, situación que es muy común entre estudiantes y también, según las evidencias levantadas en este estudio, entre los profesores.
- **Alternativa D**: Peso de un bus con pasajeros y la cantidad de pasajeros. Esta alternativa es un distractor construido sobre la sutil diferencia entre una función lineal y una afín. En este caso el peso del bus con pasajeros está formado por dos magnitudes: el peso neto del bus (tara) y el peso de su carga, en este caso el peso de los pasajeros que efectivamente varía según la cantidad de pasajeros. La representación gráfica de esta situación corresponde a una función afín con una función del tipo "peso bus con pasajeros = peso por pasajero x cantidad de pasajeros + peso del bus vacío"

La pregunta 17 presenta cuatro criterios que servirían, por si mismos, para determinar si una relación entre dos variables es directamente proporcional. Cada alternativa corresponde a algún tipo de criterio usado habitualmente para discernir este tipo de situaciones.

- **Alternativa A**: los valores de cada variable se multiplican por el mismo factor. Corresponde a la alternativa correcta y está inspirado en la definición que Euclides acerca de la proporcionalidad usando el concepto de equimúltiplos

- **Alternativa B**: al aumentar el valor de una variable aumenta también el valor de la otra. Corresponde al criterio erróneo habitual que tan persistentemente utilizan nuestros estudiantes
- **Alternativa C**: "El producto entre los valores de ambas variables es siempre el mismo". Esta opción la podrían marcar aquellos que saben que no basta que ambas variables varíen en un mismo sentido y que hay que determinar una constante de proporcionalidad pero no tienen claro si es multiplicando o dividiendo los valores correspondientes de cada variable. Es el típico caso de quien dirime la proporcionalidad mediante un algoritmo cuyo sentido y fundamento no conoce y que por ende, al olvidarlo, no lo puede reconstruir.
- **Alternativa D**: los valores de ambas variables aumentan o disminuyen en la misma cantidad fija. Este distractor corresponde a la típica respuesta que se daría desde el razonamiento aditivo o absoluto que entiende que la proporcionalidad es una igualdad entre una razón a:b y otra razón derivada aditivamente de ella. Es decir a:b = (a+x) : (b+x).

La pregunta 18 está estructurada de modo análogo a la pregunta 17 pero se formula respecto de la proporcionalidad inversa. De hecho posee las mismas alternativas y similar fundamento.

- **Alternativa A**: al aumentar el valor de una variable disminuye el valor de la otra. Corresponde al criterio erróneo habitual que tan persistentemente utilizan nuestros estudiantes y que solo da cuenta del sentido en que ambas variables varían pero no considera la magnitud de tales variaciones ni la razón implicada entre ambas.
- **Alternativa B**: "El producto entre los valores de ambas variables es siempre el mismo". Esta es la alternativa correcta.
- **Alternativa C**: los valores de cada variable se multiplican por el mismo factor. Corresponde a uno de los criterios ciertos para una proporcionalidad directa pero que, en el caso de la proporcionalidad inversa resulta falso.
- **Alternativa D**: los valores de ambas variables aumentan o disminuyen en la misma cantidad fija. Este distractor, como ya se dijo en el caso del ítem ante-

rior, corresponde a la respuesta que suele darse desde el razonamiento aditivo o absoluto.

Desempeño en el test de proporcionalidad y Género

A nivel de profesores en ejercicio no se encontraron diferencias significativas entre el desempeño de hombres y mujeres. Se debe tener presente en ambos grupos evaluados, estudiantes de pedagogía y profesores en ejercicio, la cantidad de varones es muy pequeña en comparación con las mujeres. Así por ejemplo, de un total de 77 profesores solo 13 de ellos, el 16,9%, eran hombres y el resto, correspondía a 64 profesoras lo cual representa un 83,1% del estamento.

Con el propósito de comparar el rendimiento específico de cada grupo y dada la asimetría en el tamaño de unos y otras, se optó por determinar el rendimiento promedio de cada grupo en el test diagnóstico y comprara sus resultados para determinar si había alguna diferencia. E así como se estableció que la diferencia es de apenas 0,02, (dos centésimas) lo que en términos de correlación estadísticos significa que ambas variable no guardan ninguna relación entre ellas.

GÉNERO	Promedio Puntaje Test Diagnóstico
Profesoras	11,72
Profesores	11,75
General	**11,66**

Desempeño en el test según años de experiencia.

Tal como se indicara antes, al caracterizar la muestra de profesores, el promedio de años de experiencia en aula es de 8, 84 años (algo así como 8 años y 10 meses). Una presunción posible era que el desempeño en este instrumento presentará diferencias relacionadas con la experiencia docente. Para establecer o descartar esta vinculación se realizaron dos pruebas a los datos.

En la primera de ellas se ordenó la tabla de profesores de manera descendente según años de experiencia docente. La tabla así ordenada se dividió en siete grupos de igual tamaño, de once docentes cada uno, y luego se calculó el promedio del puntaje de desempeño de cada tramo. Los resultados obtenidos señalan que no existe ninguna correlación entre ambas variables tal como se puede corroborar en la siguiente tabla:

Tramos	PROM T
1ro	11,7
2do	12,5
3ro	11,1
4to	11,1
5to	12,2
6to	10,7
7mo	12,6

Para confirmar esta observación se calculó el coeficiente de correlación entre ambas variables determinado el cociente de covarianza de ambas variables con el productos de sus medias aritméticas disponible en la hoja de cálculo mediante la función matricial "=coef.de.correl([matriz uno];[matriz dos])" disponible en la hoja de cálculo usada. En este caso dicho coeficiente vale 0,03740 que, en términos estadísticos, significa que las variables estudiadas no guardan ningún tipo de relación y que, por lo tanto, varían de manera independiente una respecto de la otra.

5.5 ESTUDIO CUALITATIVO: taller en equipos

La aplicación del test diagnóstico logra circunscribir con bastante claridad qué aspectos de la proporcionalidad son menos dominados por los sujetos evaluados. No obstante lo anterior surgen nuevas inquietudes y se generan nuevas interrogantes respecto a cómo desarrollar en los docentes en ejercicio y en los estudiantes de pedagogía el dominio de aquellos aspectos más débiles.

La modalidad adoptada es la de llevar a cabo un taller con los profesores en el cual ellos, organizados en equipos de dos a tres profesores, analizaran críticamente el diseño de actividades para escolares de educación básica entre 6° y 8°. La idea es que como profesores discutan si el diseño propuesto para sus estudiantes es o no pertinente y para ello los profesores deben primero revisar cuáles son las opciones correctas poniendo a prueba sus propios conocimientos sobre el tema. Se espera que las opiniones de los profesores se dividan y se generan discusiones, tanto didácticas como matemáticas, que ayuden a profundizar la comprensión del tema y que permitan, como producto de esta interacción, corregir y depurar las ideas previas sobre el tema.

Con el fin de comprender de modo más claro la estrategia didáctica a emplear se sugiere revisar en los anexos el texto denominado "Taller 2 para profesores". En dicho texto se pide a los profesores organizarse en duplas o tríos de trabajo y revisar la Guía de actividades para un hipotético curso de educación básica. La actividad propuesta a los estudiantes consiste en confeccionar una tabla de datos y luego, a partir de dicha tabla, construir una gráfica. Este procedimiento se hace dos veces: una vez para cada situación.

En la primera situación se dispone de mesas rectangulares independientes, con capacidad para seis personas cada una: dos en cada costado largo y una en cada cabecera. La tabla se completa indicando cuántas sillas se necesitan si se tiene una mesa, dos mesas, tres mesas, etc. de modo tal de aprovechar todos los puestos posibles sin exceder la capacidad máxima de la mesa que es 6. En el caso de las mesas independientes la cantidad de sillas variará de acuerdo a la cantidad de mesas siguiendo la siguiente secuencia: 6, 12, 18, 24, etc... Según si se trate de 1, 2, 3 o 4 mesas.

La segunda situación es similar a la anterior sólo que en este caso las mesas van unidas una a continuación de la otra por sus cabeceras. Por cierto en la primera mesa se requieren seis sillas pero, a partir de la segunda mesa

PREGUNTA FINAL

¿Qué tabla representa una relación de proporcionalidad directa?

A. Ninguna de las dos tablas
B. Ambas tablas
C. Solo tabla con mesas separadas
D. Solo tabla con mesas unidas

adosada, solo se va necesitando cuatro sillas adicionales por cada mesa que se agrega pues las cabeceras se pierden. La cantidad de sillas que se van necesitando entonces por cada mesa que se agrega, adosada a las anteriores por su cabecera, será entonces 6, 10, 14, 18…según se tenga 1, 2, 3 o 4 mesas unidas por su lado más corto formando una hilera.

La tabla es fácil de completar por los niños y también lo es la construcción de su respectiva gráfica: una serie de puntos alineados dispuestos crecientemente sobre el primer cuadrante del plano cartesiano.

Luego, al final de la guía, se hacen algunas preguntas fundamentales:

¿Qué responderán los niños? ¿Cuál de esas respuestas será correcta? ¿Por qué es correcta o incorrecta cada tipo de respuesta? ¿Qué requisitos debe cumplir una relación entre variables para ser considerada directamente proporcional? ¿Cómo la respondería Ud. como profesor?

Probablemente algunos de los docentes opten por el silencio si no tienen clara cuál es la "respuesta correcta". Otros en cambio expresarán su juicio en la medida que los juicios de unos y otros no concuerden se iniciarán diálogos y discusiones, confrontación de ideas opuestas o al menos divergentes. Cada cuál argumentará su y promoverá su propia visión. El resultado de su discusión debiera registrase en la hoja de actividades y luego, unos 20 minutos antes del término del taller, se comenzaría la revisión colectiva, en modalidad plenaria, de las diferentes respuestas dadas por ellos mismos, promoviendo la discusión sobre la base de argumentaciones válidas. Tras la discusión debiera establecerse, sobre la base del análisis de cada respuesta alternativa y su coherencia con los supuestos, condiciones y restricciones inherentes al problema.

Esta guía de actividades consiste básicamente en el análisis grupal, de un diseño de actividades pensadas para estudiantes de los últimos años de educación básica.

La labor de los profesores será revisar la guía de actividades, desde el punto de vista matemático y didáctico, para establecer si la actividad propuesta para los escolares es pertinente y de este modo si tal guía ellos la pueden resolver con seguridad y si dominan el tema lo suficiente como para saber si sus alumnos se equivocan o no.

La idea es generar entre los profesores una discusión didáctica matemática, al estilo del estudio de clases japonés (Lesson Study) en cuanto enfoque orientado al desarrollo profesional docente conducido por y para los propios docentes. Este enfoque de desarrollo profesional docente considera esta forma de trabajo como una poderosa vía para llevar los objetivos educacionales y estándares a la sala de clases y de paso construir colectivamente lo que también se ha dado en llamar el "saber pedagógico".

Evaluación, resultados y análisis del taller

El taller se llevó a cabo con 28 profesores pertenecientes a los dos grupos de postítulo de la Universidad de Chile. Para ello se destinaron 120 minutos al desarrollo del taller. Se comenzó la actividad a grandes rasgos y luego en otra sala, la de Biología de explicó la modalidad de trabajo, se constituyeron las duplas y tríos de trabajo y se repartió la hoja con el taller.

Cada grupo de trabajo recibió dos hojas: la primera contiene la guía de actividades del estudiante que a ellos, como docentes, les corresponde revisar. La otra hoja contiene las preguntas para la reflexión tanto individual como con el resto del equipo.

Resultados

Una vez desarrollado el taller y revisados los textos entregados por los participantes se obtienen los siguientes resultados:

A la pregunta ¿Cuál es la alternativa correcta? La respuesta mayoritaria (75%) es la alternativa C, solo tabla con mesas separadas.

Al responder individualmente la pregunta 21 respuestas fueron correctas y 7 resultaron erróneas, lo cual equivale a un 75% de acierto y, correspondientemente un 25% de error.

Al responder esta pregunta como equipo estos resultados sufren un cambio interesante pues, de las siete personas que respondieron erróneamente, tan solo dos persisten en el error y al revisar la composición del grupo que mantiene al responder como grupo se constata que ambas trabajan juntas. Es decir al trabajar en equipo se registran 26 respuestas correctas (93%) y solo dos incorrectas (7%).

Respecto de las razones esgrimidas la más recurrente, 15 de 28, son del tipo: "es la C porque:

- "…en el caso de las mesas juntas se nota que aun cuando ambas variables aumentan en el mismo sentido no lo hacen en la misma cantidad"
- "… al dividir los datos de una columna por la otra resulta el mismo número"
- "…porque en la tabla C se encuentra una constante proporcionalidad dividiendo"

En cambio los argumentos de quienes se equivocan y optan por algún distractor son expresados en los siguientes términos:

- "Las dos variable aumentan los datos en la misma cantidad. En el caso de las mesas separadas las SILLAS aumentan de 6 en 6 y en el caso de las mesas unidas las SILLAS aumentan de 4 en 4."
- "Ninguna es proporcional porque no hoy cero sillas y cero mesas en la tabla"
- "Ambas son proporcionales porque en ambas tablas si una aumenta la otra también y si una disminuye la otra también"

En general, de las personas que individualmente se equivocaron eligiendo un distractor, casi ninguna vuelve a equivocarse en la respuesta correcta y responden, con su compañero/a de trabajo correctamente la misma pregunta, es decir, la alternativa correcta (C).

Llama la atención que solo en el caso de una dupla compuesta por dos personas que se habían equivocado individualmente pareciera haberse potenciado la convicción de que esa era la respuesta adecuada. En los otros casos, de error individual, este no fue unánime sino que hubo al menos uno de los integrantes de la dupla que marcó la opción correcta y logró persuadir, finalmente, a su compañero/a.

Análisis de resultados del taller

A la luz de estos antecedentes es razonable atribuir un efecto positivo al factor "interacción entre pares" sobre el desempeño de los profesores en cada una de las preguntas planteadas. Los docentes finalmente reconocen que en un caso, el de las mesas separadas, la relación entre mesas y sillas representa una relación de proporcionalidad directa mientras que en el caso de las mesas unidas por sus extremos esta relación no es proporcional.

La revisión de las argumentaciones que sirven de fundamento a estas respuestas, sin embargo, sigue siendo una tanto precaria, en términos de la articulación de razones matemáticamente valederas para explicar su opción y falta aún bastante desarrollo de la precisión en empleo del lenguaje. Así, por ejemplo, se encuentran argumentaciones como las siguientes:

- "Por la variable aumentan ambas en forma proporcional"
- "Ambas variables aumentan, ya que ambos criterios aumentan en la misma cantidad lo que indica que ambas variables son directamente proporcionales."
- "Que una relación de proporcionalidad directa debe partir del origen de las co-ordenadas, es decir, desde el cero"

Como se aprecia el uso de términos tales como variables, criterios, aumentos (multiplicativos o aditivos) es poco preciso o ambiguo lo cual hace que las afirmaciones no resulten consistentes y a veces sean incluso contradictorias.

De los trabajos generados en el taller con profesores en ejercicio se concluye además:

1. Que persiste el problema del cabal reconocimiento visual y tabular de una relación de proporcionalidad no obstante disponer de una tabla de datos, correctamente calculada, y de una gráfica de puntos bien asignados en el plano a partir de dicha tabla.
2. Que aun cuando se tabulen y grafiquen los datos de dos relaciones diferentes, una proporcional y la otra no, no resulta suficientemente notoria y clara la diferencia entre ambas. La recta que une todos los puntos alineados, en el caso de la relación "Mesas y Sillas unidos" pasa a pocos milímetros del origen del sistema y muchos de los pro-

fesores debieron usar una regla para precisar “si realmente pasaba o no por el origen “

3. Que si bien tiene sentido desde el punto de vista matemático preguntarse si el origen del sistema, el punto (0,0) pertenece a una función del tipo y=ax, con x≠0 tal pregunta y consideración no tiene mucho sentido en el mundo cotidiano: ¿Cuántas sillas necesito disponer alrededor de una mesa si es que tengo cero mesas?. Para los docentes no resulta natural incluir en la tabla de mesas y sillas el par (0,0), en ninguno de los dos casos (mesas independientes y mesas unidas). Luego, las gráficas que ellos hicieron a partir de las tabulaciones no siempre contenían el punto de coordenadas (0,0) y por ello algunos pensaron que ninguna de las dos gráficas contenía al (0,0) y por lo tanto no eran proporcionales. La gráfica, además, no era una recta, sino una sucesión de puntos “aislados” pues ambas variables, mesas y sillas, son de naturaleza discreta. Por ello resultaba mejor hablar de “la recta que pasa por los puntos graficados” y como esta no tiene límites en un sentido u otro si se hacía posible determinar (con el auxilio de una regla sobre la pantalla) su trayectoria más allá de los puntos trazados y en las cercanías del origen del plano cartesiano.
4. Que los docentes enfrentados a la pregunta ¿Qué opción cree Ud. que escogerán sus estudiantes en la guía? se inclinan mayoritariamente por la opción B (que ambas tablas representan una relación de proporcionalidad). Dos tercios de los docentes consultados estiman que su estudiantes se equivocaran en esta pregunta pues toman conciencia de que el criterio “si ambas variables cambian en el mismo sentido son proporcionales” es el más difundido y el más sencillo de recordar pues de hecho algunos de ellos también lo entendían así hasta realizar esta actividad. Ellos, los profesores, consideran que este distractor contiene el error más frecuente y por ende más plausible en este tema. Confundir una “condición necesaria” con una “condición suficiente”. Un error más sutil en esta discusión es suponer que una condición que no es suficiente es por ello innecesaria.

5.6 ESTUDIO CUALITATIVO: entrevista con apoyo de fichas-problema.

Con el propósito de ahondar de manera más flexible en las argumentaciones y en la organización conceptual de aquellos profesores que no tuvieron un buen desempeño en este taller, sea porque se equivocaron y luego corrigieron o incluso porque no habiéndose equivocada en las respuestas breves si evidenciaron una argumentación ambigua y poco convincente en términos matemáticos.

Con este fin se llevó a cabo un estudio de carácter cualitativo a partir de un conjunto de cuatro entrevistas, de 12 a 15 minutos cada una, realizadas a profesores que realizaron el diagnóstico y el taller.

Estrategia del estudio con fichas-problema.

La entrevista es del tipo semiestructurada y consiste en un diálogo que se realiza con el entrevistado a partir de la presentación a este último de dos fichas (hojas tamaño carta) que contienen, cada una, un situación fácil de entender e la cual están involucradas dos variables.

Las situaciones consideradas son las siguientes:

- Situación 1: Arista de un cubo y su volumen
- Situación 2: Edad padre e hija
- Situación 3: Tubo cortado en trozos

En cada caso se presenta también una tabla de datos, de dos columnas y 10 filas con datos de ambas variables involucradas en cada situación. También la lámina contiene la gráfica de todos y cada uno de los pares ordenados de la tabla. En la sección ANEXOS se puede encontrar el protocolo completo de la entrevista, con las láminas usadas y las transcripciones de las entrevistas realizadas.

Se pide al docente entrevistado que se identifique con su primer nombre y que luego comente que observa en la primera lámina y cómo, de acuerdo a lo que observa, puede establecer si la situación representa o no una relación de proporcionalidad. Se le consulta cómo pudo establecer la proporcionalidad o la no proporcionalidad de la situación representada en la lámina. También se pregunta al entrevistado ¿Cuál o cuáles elementos de la lámina le han brindado mejores "pistas" para establecer la proporcionalidad?. Si responde que la tabla entonces se pregunta ¿qué de la tabla le entrega más información? Como observa la tabla, en qué se fija de la tabla? ¿Qué cuentas saca, que operaciones aritméticas realiza? ¿Qué resultados espera obtener? ¿Cómo interpreta los resultados que obtuvo u obtendrá?

Las entrevistas se realizaron el día sábado 10 de junio entre las 12:00 y las 15:00 en dependencias de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile y las transcripciones de dichos diálogos se encuentran al final de esta tesis, en la sección anexos, con la identidad de las personas debidamente oculta en virtud del compromiso de anonimato previamente suscrito con el entrevistado.

Metodología de Análisis

Una vez realizada la transcripción se procedió a una primera revisión de los textos con el fin de identificar posibles categorías discursivas. Realizado este análisis se concluye que hay por lo menos siete categorías relevantes en el texto, dada la intencionalidad y foco de las preguntas. Estas categorías se señalan a continuación mediante preguntas:

a) **¿Gráfico o tabla?** Una primera dimensión que interesa indagar era si los entrevistados estaban más familiarizados y comprendía mejor una tabla o una gráfica. Se pregunta deliberadamente por la comodidad con ambos registros, tablas o gráficas en la entrevista y las respuestas dadas a esta pregunta son del siguiente tenor:
   - Más en lo visual que en lo que está en los datos mismos que señala.
   - Si, o sea los gráficos siempre han estado pero lo que es numérico en sí es lo que me da la proporcionalidad
   - Prefiero más como tabla y expresión aritmética
   - Yo le saco más información a la tabla. El gráfico…

- Me hubiera demorado un poco más pero igual habría dicho que no es proporcional

- **¿Qué debe permanecer constante en una proporción directa?** Al revisar los textos concernientes a una situación en la cual dos variables parecieran relacionarse proporcionalmente Los entrevistados fijan su atención en cocientes, variables o diferencias que debieran cambiar o que debieran permanecer constantes como claves que indican si dos variables están en relación de proporcionalidad y de qué tipo de proporcionalidad se trata. En los textos revisados se encuentran referencias reiteradas del tipo mostrado a continuación.
  - "yo les explicaba que siempre se tiene que ir manteniendo algo constante pero era el cociente o era el producto y como acá, en la edad del padre con el hijo si yo iba restando se mantenía algo constante eso también me podrían haber dicho que era suficiente" (K)
  - "En la directa no…el cociente. El cociente debería mantenerse constante" (K)
  - "que sí, que uno aumenta la arista obviamente que va a aumentar el volumen. Pero lo que sí que no considero que no aumentan en la misma proporción." (R)
  - "Hay una parte que no aumenta como debiera en el caso de una curva" (R)
  - "El producto es para la inversa". (K)
  - "No. Este caso se parece, porque si el papá tiene 27 y el hijo tiene 1, entonces cuando tenga 28 el hijo tendrá que tener 2. Eso sí se parece, sí, sí hay una proporción" (R).

- **¿Por qué es directamente proporcional?** Esta pregunta es central en esta investigación pues alude tanto al conocimiento conceptual de la proporción como a los procedimientos y sus fundamentación. ¿Qué argumentos, qué propiedades matemáticas justifican y fundamentan, ya sea usando la tabla o una gráfica, que los procedimientos aritméticos o los indicadores visuales evidencian precisamente si tal relación es o no de proporcionalidad directa. He aquí algunas de las respuestas pesquisadas en las transcripciones:

- “Multiplicar cruzado es una fórmula, es un mecanismo”
- “el volumen del cubo también tendría que duplicarse cuando su arista se duplica”
- “Yo diría que no son proporcionales”.
- “Media complicada, porque ahora que le estoy explicando a usted, la verdad es que yo no tengo claro cuándo algo es proporcional (ríe) o cuándo no es proporcional”.
- “Estoy dudando. Por qué estoy dudando, una, que cruzado no me da. Pero si yo lo veo en proporción que aumenta, esta aumenta un año y el hijo también aumenta un año, entonces en ese sentido ambos aumentan en la misma proporción de…”

- **¿Es una función lineal?** Esta dimensión sólo apareció en una entrevista pero se ha incluido como categoría por la clara explicación que la entrevistada evidencia tratando de explicar porque debiera ser una función lineal la imagen de una relación de proporcionalidad. Es interesante notar que en su argumentación la entrevistada utiliza la expresión “función lineal” y lo identifica con la pendiente pero no comprende del todo la razón matemática de que y el sentido que tiene, para efectos de la proporcionalidad el que la recta “pase por (0,0).
    - “porque en el fondo, la pendiente de la recta que es la constante de proporcionalidad multiplica a un número y si ese número me da cero como que… por fórmula, me tendría que dar…tendría que pasar por el otro cero digamos. Pero así como que ¿por qué es ese gráfico y porqué tiene que pasar por (0,0) no sabría explicar por qué.” (K)

- **¿Cómo se ve la gráfica de proporción directa?** Aparece a continuación una selección de textos que dan cuenta de las explicaciones o respuestas que los entrevistados enuncian a la hora de explicar cómo es que ellos leen o ven representada la proporcionalidad directa en una gráfica y en qué se fijan para saber si ella es o o es una relación de proporcionalidad.

- "Entonces de acuerdo a eso, el gráfico, por ejemplo en la coordenada de la arista señala que está en…parte en cero, y también el volumen está en cero, pero luego va…aumenta uno, y ese uno eh…el otro también es uno, por lo tanto se mantiene la curva. Después avanza de 2 y el otro está en 8. De 2 en 8, dos y en ocho, el volumen. Y el volumen es 8. Igual se ve como una pequeña tendencia, o sea, no se ve como muy claro" (R)
- "Entonces de acuerdo a eso, el gráfico, por ejemplo en la coordenada de la arista señala que está en…parte en cero, y también el volumen está en cero, pero luego va…aumenta uno, y ese uno eh…el otro también es uno, por lo tanto se mantiene la curva. Después avanza de 2 y el otro está en 8. De 2 en 8, dos y en ocho, el volumen. Y el volumen es 8. Igual se ve como una pequeña tendencia, o sea, no se ve como muy claro". (R)
- "El yo sé que es usado… por lo menos como que uno sabe que la proporcionalidad directa se gráfica como línea por la escala de ejes pero no lo muestra muy bien pero si tiene un crecimiento muy elevado." (K)
- "Más que nada porque no…o sea si…eh…yo entiendo que cuando uno gráfica algo proporcional va a dar una línea… pero… no entendería exactamente por qué." (K)

- **¿Qué tienen que ver las razones con las proporciones?** Cuando la matemática se ha convertido en un "mecanismo" que se usa sin saber cómo ni por qué funciona no resulta muy claro determinar cuál podría ser el sentido de su enseñanza y presencia en la escuela. La comprensión de la proporcionalidad se apoya, conceptualmente en el concepto de razón. Una proporción es una igualdad entre razones. Por supuesto, de una razón entendida como comparación y no como un simple cociente. De las entrevistas se ha seleccionado dos citas que hacen referencia explícita a las razones. De la primera se puede comentar que, aun tratándose de cantidades enteras, 1 y 2, es muy incomprensible que la razón 1 a 2 se pudiera convertir en el cociente 1:2 que tiene como resultado 0,5. Este cociente corresponde el valor decimal de la fracción ½ que por supuesto no es el sentido de la receta de arroz original…"de cada tres tazas, una es de arroz y dos son de agua". Es decir, si quisiéramos expresar fraccionariamente la receta de la popular preparación culinaria debiéramos señalar que, expresada en unidades de volumen, la cantidad de arroz representa un tercio del volumen total de la mezcla agua-arroz mientras que los dos tercios restantes corresponden al agua.

- La segunda cita refuerza la idea de que las razones se enseñan aparte de la división, como una categoría distinta, con una identidad propia que se origina a partir del uso cotidiano en contextos reales.
    - "La cantidad una taza de arroz con dos tazas de agua. La razón es 1a 2" (R)
    - "Yo lo encuentro complejo porque en sexto uno parte viendo razones y uno las razones las ve como comparaciones entre dos cosas, entre dos variables" (K)

Resultados obtenidos de las entrevistas

El estudio cualitativo llevado a cabo mediante entrevistas ha permitido poner en evidencia la existencia dominante, al menos en los sujetos estudiados, de un conocimiento precario de la proporcionalidad, que no habilita para comprender en toda su sutileza y complejidad este objeto matemático. El primero es que la proporcionalidad es un objeto matemático que se enseña y trata como un tema trivial pero que, analizado de cerca, se muestra provisto de una serie de sutilezas y complejidades. Se trata básicamente de a lo menos dos variables covariantes que pueden ser representadas en diversos registros y que en su interacción y dinamismo cambiante hacen variar ciertas relaciones numéricas pero mantienen otras como invariantes.

El estudio de un objeto matemático así, cuya uso habitual es la de representación o caracterización de relaciones cuantitativas entre variables que no están en reposo sino que “se mueven” y en su variación exigen a quien quiera comprender su dinamismo la capacidad de comparar en términos relativos y de expresar las relaciones cambiantes en términos multiplicativos.

Las entrevistas ponen en evidencia que lo que sabemos de la proporcionalidad y sus representaciones es muy simplista y rústico y que, en la idea de romper la dinámica de auto reproducción de esta carencia, resulta necesario destinar un tiempo mayor al estudio de exhaustivo de la proporcionalidad para evitar que:

a. Se apliquen criterios o algoritmos en forma mecánica sin estudiar su génesis y pertinencia y evitar así, en el caso del profesor, la enseñanza de procedimientos y pruebas mecanizadas que se hacen sin saber por qué se hacen.

b. Se precisen e identifiquen con claridad las variables involucradas en una relación de proporcionalidad, se estudie la naturaleza de sus variaciones y de sus relaciones con la finalidad de detectar la existencia de relaciones cuantitativas constantes, ya sea de tipo aditivo o multiplicativo y por supuesto cuál es el significado de dichas variaciones. ¿Cómo, por ejemplo, dichas variaciones se reflejan en cada uno de los registros de representación? En el caso de las edades del padre y la hija es muy fácil equivocarse y suponer que dicha relación es una relación proporcional porque a la pregunta ¿Varían ambas cantidades en el mismo sentido y magnitud? Ambos aumentan un año por vez y aumentan lo mismo…un año cada 12 meses…pero tal aumento igualitario es solo aparente, o mejor dicho, es solo aditivo. En términos porcentuales el mismo año transcurrido representa, para un niño de 10 años, el 10% de su edad en tanto que, para alguien de 20 años, el mismo año transcurrido representa solo el 5% de su edad.

c. Mención aparte merece el estudio de las distintas representaciones de la proporcionalidad. Los profesores entrevistados conocen la proporcionalidad primordialmente como una expresión aritmética, de tipo multiplicativo, compuesta de cuatro términos en la que puede desconocerse alguno de ellos. En general se recuerda poco o nada cómo se ve, gráficamente, una relación de proporcionalidad directa, una de proporcionalidad inversa o una relación no proporcional. En general la proporcionalidad no es estudiada gráficamente. Rara vez se plantean problemas de proporcionalidad en que los términos del mismo se presenten a través de gráficas. En el estudio realizado pocos participantes en el estudio interpretaron correctamente el significado de los elementos constitutivos de la gráfica (pendiente, colinealidad, sentido de crecimiento, relación respecto al origen, interceptos con los ejes, etc.). Al observar los elementos gráficos (puntos, rectas, curvas) en el plano cartesiano la mayoría de los participantes en el estudio no evidenció que comprendieran el significado de tales signos. Se requiere estudiar cuándo una función crece, decrece o permanece constante. De qué naturaleza son los cambios de ambas variables. ¿Cómo comparar tales variaciones y sobre todo como interpretar sus magnitudes y cocientes relativos?

CAPITULO 6. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

6.1 Introducción

El propósito global de este estudio es diagnosticar, desde la perspectiva del modelo MTSK, Mathematic Teacher's Especialized Knowledge, (Carrillo et al, 2015) en qué aspectos de la proporcionalidad los profesores en ejercicio y los estudiantes de pedagogía en educación general básica participantes en el estudio presentan menor dominio y comprensión.

Identificar y caracterizar dichos aspectos matemáticos de la proporcionalidad que presentan mayores dificultades resulta relevante toda vez que ellos ya están enseñando estos tópicos en la escuela o en un plazo muy breve, les corresponderá asumir su enseñanza y es del todo urgente que ellos se "sientan cómodos" y seguros conduciendo la enseñanza de las razones, los porcentajes y la proporcionalidad.

No siendo el conocimiento del contenido (CK) el único conocimiento que debe desarrollar el profesor para el ejercicio de su profesión, resulta fundamental comprender que dicho conocimiento es requisito y condición para el desarrollo de los otros tipos de conocimiento, en particular el conocimiento especializado de los tópicos a enseñar. Si el profesor no posee las nociones básicas de la proporcionalidad, no tiene clara sus propiedades ni los procedimientos que permiten su identificación y aplicación o si no logra reconocerla ni interpretarla cuando se la representa mediante tablas, gráficas o en contextos verbales difícilmente podrá re significarla y adaptarla a los diferentes contextos escolares. Tampoco estará en condiciones de desplegar múltiples abordajes didácticos o de ofrecer a sus estudiantes oportunidades diferenciadas según sus particulares formas de aprender.

Es necesario entonces que los profesores adquieran y desarrollen un "conocimiento profundo", en el sentido que Liping Ma define este concepto (Ma, 2010), de cada uno de los tópicos matemáticos que les corresponde enseñar.

Según expresa dicha autora el profesor ha de poseer un conocimiento o comprensión profunda de la matemática que enseña y entiende la comprensión profunda como “una comprensión del terreno de las matemáticas fundamentales que es profunda, amplia y acabada. Aunque el término profundo se considera, a menudo, que significa profundidad intelectual, sus tres connotaciones: profundo, vasto y acabado, están interconectadas”

6.2 Acerca del saber de los docentes y estudiantes

En la perspectiva de desarrollar un conocimiento y una comprensión profunda de la proporcionalidad en los docentes y en los futuros docentes resulta relevante identificar el “estado de situación” de los profesores en esta materia. El instrumento evaluativo desarrollado, aplicado y comentado en el capítulo 4 permitió establecer, en términos generales, que:

1. Los profesores y estudiantes de pedagogía estudiados presentan bajo nivel de dominio de los objetivos de evaluación estudiados.
2. Los profesores en ejercicio y los estudiantes de pedagogía no presentan diferencias significativas en el dominio de cada uno de los objetivos de evaluación considerados. El escaso dominio de los temas asociados a la proporcionalidad es un problema socialmente generalizado, que afecta a gran parte de la población y que por cierto también afecta a profesores y estudiantes de pedagogía. Esta situación generalizada se auto replica toda vez que los docentes no dominan el tema y por ende no lo pueden enseñar apropiadamente lo cual se traduce en estudiantes que llegan a la vida adulta sin haber desarrollado conocimiento profundo sobre el tema y transitan por el programa de formación, en el caso de los profesores y presumiblemente del resto de la población, sin que esto sea detectado ni corregido

OBJ EVAL	OBJETIVO DE EVALUACIÓN	% LOGRO
9	Aplicar criterios de razonamiento multiplicativo en la resolución de problemas de proporcionalidad	72%
1	Comprender el concepto de razón de manera pictórica	71%

2	Comprender el concepto de razón de manera simbólica	64%
7	Comprender las proporciones directas e inversas resolviendo problemas en contextos diversos.	64%
3	Comprender el concepto porcentaje representándolo de manera pictórica	54%
4	Comprender el concepto de porcentaje calculando de varias maneras en situaciones sencillas	51%
6	Comprender las proporciones directas e inversas representadas tabularmente.	50%
8	Comprender las proporciones directa e inversa aplicando criterios adecuados para su reconocimiento.	31%
5	Comprender las proporciones directas e inversas representadas gráficamente.	24%

6.3 En ninguno de los nueve objetivos de evaluación considerados se logra un nivel de desempeño aceptable. En ningún objetivo evaluado se obtiene un dominio igual o superior al 75%, tanto entre profesores en ejercicio como en estudiantes de pedagogía. Es así como en los dos objetivos de evaluación mejor puntuados, OE 9 y 1, se obtiene un 72% y un 71% de logro, lo cual significa que al menos 1 de cada cuatro evaluados no logra aplicar criterios de razonamiento multiplicativo en la resolución de problemas de proporcionalidad y no comprende el concepto de razón cuando ella es representada de manera pictórica. Cabe recordar que el razonamiento de tipo multiplicativo es condición indispensable para el desarrollo del pensamiento proporcional implicado no solo en el estudio de la proporcionalidad sino de otros temas igualmente relevante del curriculum escolar (funciones, semejanza, homotecias, escalas).

3. En cuanto a los otros objetivos, se puede afirmar en concordancia con los resultados obtenidos que uno de cada tres evaluados (33% aproximadamente) no comprende el concepto de razón presentado de manera simbólica y/o no

comprende el concepto de proporción cuando ella está implicada en contextos matemáticos y no matemáticos. Vale decir, tiene dificultades para resolver problemas de ampliación o reducción a escala y no logra interpretar correctamente el significado concreto de una razón cuando ella aparece en una situación problemática cotidiana.

4. En una situación aún más deficitaria se presentan los objetivos de evaluación 3, 4 y 6, que exhiben niveles de dominio situados entre el 50% y 54% lo cual, bien pudiera interpretarse en términos gruesos en los siguientes términos: uno de cada dos evaluados no comprende el concepto de porcentaje ya sea que este esté representado de manera pictórica o bien que el problema implique hacer cálculos de tipo porcentual en situaciones sencillas. También ocurre que uno de cada dos evaluados evidencia problemas a la hora de identificar la proporcionalidad directa e inversa representada a través de tablas.
5. Finalmente, con el nivel más bajo de dominio, se encuentran los objetivos de evaluación 8 y 5, con un 31% y un 24% de logro respectivamente. El significado de estos niveles es altamente preocupante pues según dichos guarismos dos de cada tres evaluados, en el caso del objetivo de evaluación N°8, aproximadamente, no aplica criterios idóneos para discernir cuando una relación entre dos variables es o no proporcional, ya sea directa o inversa. También significa, en el caso del objetivo de evaluación N° 5, que 3 de cada cuatro profesores no reconoce una relación proporcional, directa o inversa, cuando ella aparece representada mediante una gráfica de dispersión.
6. La evidencia recabada es consistente con los estudios previos reportados en el capítulo 1 así como también con la opinión generalizada de diversos estudios en relación a la dificultad que estos temas (razón, porcentaje y proporcionalidad) presentan a los profesores. Los datos obtenidos describen, con distintos tonos de gris, en qué aspectos hay mejor o peor desempeño y señalan con bastante claridad que en estos temas hay una tarea pendiente. Quienes ingresan a estudiar pedagogía no exhiben un dominio aceptable en la mayoría de los objetivos evaluados y los docentes en ejercicio tampoco. Ninguno de los

niveles de logro supera el 75%, es decir, al menos uno de cada cuatro profesores no aplica correctamente criterios de razonamiento multiplicativo domina aquellos objetivos de evaluación mejor logrados (por la muestra estudiada

7. Los profesores y estudiantes de pedagogía no presentan diferencias significativas según género en su desempeño en cada uno de los objetivos de evaluación considerados. Tampoco, en el caso de los profesores, aparece como relevante la experiencia docente, pues no existe correlación significativa entre los años de servicio y el desempeño en el test diagnóstico.
8. Los patrones de desempeño de cada grupo considerado en este estudio, profesores y estudiantes, son muy similares los cual podría estar significando que la institución escolar, tanto básica como secundaria, no logra desarrollar en sus estudiantes una comprensión profunda de la proporcionalidad y sus temas asociados. Ello explicaría los resultados en los estudiantes de pedagogía que no obstante haber rendido una prueba de ingreso como la PSU, evidencian dificultades específicas en el dominio de la proporcionalidad. Los programas de formación de profesores tampoco logran revertir esta carencia inicial de sus estudiantes (o peor aún no la detectan) egresando luego a profesores que en este tema, no están cabalmente preparados cerrando, de este modo, un ciclo pernicioso de carencia auto replicada.

¿En qué consiste esta carencia? Por las entrevistas y gracias a las interacciones personales sostenidas con los profesores participantes en el taller el origen de esta carencia pareciera estar radicado en un tratamiento muy ligero de este tema, en las distintas instancias escolares y académicas responsables de su tratamiento. En general los docentes señalan, de manera explícita, no haber visto o estudiado este tema con anterioridad o, si lo han visto ya no lo recuerdan. De estas expresiones así como del trabajo acumulado en las distintas etapas de este estudio se pudiera caracterizar que en general los profesores, así como también los estudiantes han tratado estos temas de acuerdo a un modelo formativo que en este tema que exhibe las siguientes características:

- No dedica el tiempo suficiente a la construcción de criterios matemáticos que permitan al estudiante discernir cuando una relación entre variables, expresada en diferentes registros de representación, es o no proporcional. En general lo que más queda en el recuerdo de los estudiantes y profesores es que basta con que dos magnitudes varíen en el mismo sentido o en sentidos opuestos para considerarlas proporcionalmente directas o inversas respectivamente. Tampoco se dedica el tiempo necesario al estudio de relaciones no proporcionales lo que en buena medida explica el fenómeno de la sobre generalización (Lim, 1999), es decir, tratar a relaciones no proporcionales como si fueran proporcionales aplicando, erróneamente y sin mayor análisis las propiedades de la proporcionalidad.
- Se privilegia el **tratamiento de la proporcionalidad en un solo registro de representación**, de carácter algebraico. La proporcionalidad es vista como un campo de estudio eminentemente numérico, de tipo operatorio.
    - No se dedica la atención suficiente al estudio de la proporcionalidad representada tabularmente, analizando cada una de las relaciones cuantitativas que es posible establecer entre los componentes de sus filas y columnas, construyendo a partir de ellas, los criterios de proporcionalidad pertinentes basados en las propiedades de la cuaterna de carácter multiplicativa (Vergnaud, 1991).
    - Tampoco se dedica el tiempo necesario para estudiar las diferentes representaciones gráficas de la proporcionalidad, tanto directa como inversa. Para muchos estudiantes y profesores, "el retrato de la proporcionalidad" era del todo desconocido. Hay un campo de estudio muy interesante en la articulación de estos tres registros. En la representación tabular es fácil y clara la determinación de la constante de proporcionalidad, sin embargo está poco estudiada y didácticamente poco aprovechada, la representación gráfica de dicha constante. Ello se ilustra en cuando la profesora entrevistada declara que *"…yo entiendo que cuando uno grafica "algo proporcional" va a dar una línea… pero… no entendería exactamente por*

qué...” (Profesora KA). Quien también expresa, al analizar una gráfica presentada durante la entrevista, un argumento bastante elocuente de cómo se aplican criterios que no han sido suficientemente profundizados y respecto de los cuales no se tiene una fundamento matemático aun cuando la profesora, de manera espontánea intenta dar una explicación matemática del criterio gráfico empleado: “*No sabría explicar porque (la recta) tiene que pasar por el origen. O sea si…me imagino que es porque…es por lo que yo creo…es por….es porque en el fondo, la pendiente de la recta que es la constante de proporcionalidad multiplica a un número y si ese número me da cero como que… por fórmula, me tendría que dar…tendría que pasar por el otro cero digamos. Pero así como que ¿por qué es ese gráfico y porqué tiene que pasar por (0,0) no sabría explicar por qué.”*

- Enfatiza **aplicación mecánica de la algoritmia** a problemas de proporcionalidad enunciados verbalmente como problemas que se resuelven mediante la universal “regla de tres” (de cuatro términos se conocen tres y se desconoce uno) sin que se destine mucho tiempo a profundizar matemáticamente el fundamento de dicha algoritmia.

- No se detiene en el **estudio de la razón como concepto clave para la comprensión de la proporcionalidad** y opta, reductivamente, por definirlo como un simple cociente. No se aborda en general un estudio más profundo de la razón y su relación con las fracciones: ¿qué tienen en común razones y fracciones?, ¿En qué se diferencian?, ¿Cómo se transita de una a la otra?

  Sobre este particular no se discute mucho matemáticamente en nuestro medio y se opta, a la hora de formar profesores, por evitar la complejidad de una discusión más profunda sobre la génesis y el devenir del concepto razón, como constructo socio histórico, declarándolo, simplemente ,como un cociente entre dos números enteros. Esta discusión no solo es interesante sino además necesaria para la formación inicial docente pues contribuye poderosamente a la comprensión profunda de la matemática escolar y habilita al profesor para discernir cuál o cuáles serán las mejores estrategias didácticas para su tratamiento en aula.

De acuerdo con los antecedentes expuestos en el capítulo 2 el concepto razón ha sido entendido de múltiples maneras, según sea la época histórica o la matriz cultural en que la razón matemática ha sido estudiada. Para un profesor hace gran diferencia tratar con sus estudiantes el concepto de razón conociendo y comprendiendo lo que Eudoxo y Euclides escribieron sobre el tema, lo que indios y chinos desarrollaron sobre la razón y la proporción y lo que en nuestros días aportan los trabajos de Freudenthal y Vergnaud. No beneficia a la formación inicial docente en matemática sustituir una rica discusión conceptual sobre la naturaleza y el uso del concepto razón por una definición que la reduce a simple número resultante de una división.

La enseñanza de las razones y las proporciones en Francia, de acuerdo con Eugene Comin, ha estado fuertemente influida por la teoría de razones y proporciones escrita por D'Alambert y se la ha enseñado de manera continuada hasta la década de los setenta, en que se ha comenzado, progresivamente, a ser retirado el tópico de razones y proporciones del currículo para poner en su lugar un abordaje desde la óptica de las funciones lineales (Comin, 2000). Un fenómeno similar, al parecer, acontece en nuestro país sin embargo cabe advertir que el tema de las razones y las proporciones no atañe solo a la matemática sino que dicho tópico está fuertemente vinculado al uso que de ella se hace desde las distintas profesiones y prácticas sociales (economía, ingeniería, comercio, arte, etc.) y que por lo tanto su reemplazo es mucho más complejo que una simple permutación de un objeto matemático por otro toda vez que involucra prácticas sociales, pedagógicas y culturales.

Para el propósito de este estudio, centrado más en la formación de los profesores de educación primaria, el tránsito curricular desde un enfoque tradicional, de razones y proporciones, hacia un enfoque de tipo funcional constituye un factor de riesgo adicional en la formación inicial docente pues si el dominio de las razones y proporciones ya era precario el dominio de las funciones, que se apoya en el desarrollo del pensamiento proporcional, es aún más incierto.

6.3 Estrategia de estudio entre pares

Otro de los propósitos de esta investigación era el estudio de una estrategia de trabajo colaborativo que permitiese a los docentes incrementar juntos su dominio de aquellos conceptos y procedimientos deficitarios relativos a razones, porcentajes y proporcionalidad. Tal como se describiera en el capítulo 4, se realizó una sesión de trabajo en modalidad taller destinada a provocar, principalmente, la discusión entre pares acerca de un instrumento didáctico habitual entre docentes como lo es una guía de actividades para escolares. Esta Guía, disponible en los anexos, era el tema de estudio para los profesores. Los profesores debían analizar esta guía y emitir un informe. Como en dicha guía había temas de razones y proporciones relacionados con sus propias debilidades, previamente detectadas con el test diagnóstico, se esperaba que ellos, entre sí, conversaran y discutieran los conceptos y procedimientos que no dominan o que dominan parcialmente.

El foco de esta parte del estudio era establecer cuan efectivo puede ser el propio autoestudio de los profesores, trabajando en equipo, para identificar sus debilidades tanto en el dominio disciplinar como en el didáctico y luego, mediante la discusión y el estudio, depurar sus concepciones previas. Es del caso mencionar que se estudió esta estrategia de “autoayuda en equipo” pues la idea que hay detrás es que, dada la magnitud del problema de insuficiente dominio de la proporcionalidad (en extensión y profundidad), y la urgencia de su pronta superación, se podría desarrollar un programa masivo de auto perfeccionamiento basado en el uso de materiales (lecturas y actividades), tanto escritos como digitales, destinado a la superación puntual de los problemas de comprensión de la proporcionalidad y desarrollo del pensamiento proporcional en docentes. Ciertamente lo realizado en el marco de este estudio es una experiencia embrionaria, realizada a muy pequeña escala. No obstante lo anterior dicha experiencia ha permite obtener algunas enseñanzas que se resumen a continuación:

- Los profesores participante en el estudio manifiestan, mayoritariamente, genuino interés por dilucidar sus dudas y corregir su ideas previas imprecisas sobre el tema una vez que toman conciencia de que otros colegas tienen respuestas diferentes a preguntas sobre el tema y que, a la hora de defender sus propias respuestas o creencias no tienen argumentaciones que se apoyen en ideas matemáticas compartidas.
- Las argumentaciones que tienen más sentido para los docentes cuando se enfrenta una controversia (determinar si una relación es o no proporcional por ejemplo) es aquella que se basa en números concretos. La demostración algebraica en general no resulta convincente porque en general el razonamiento algebraico no está muy desarrollado.
- El uso de la hoja de cálculo como herramienta para "auditar" con agilidad una relación entre variables o para generar una gráfica de dicha relación es un recurso poderoso y atractivo que permite centrar la atención de los docentes en los aspectos cualitativos y conceptuales de la proporcionalidad (y de la no proporcionalidad también) y no entramparse en la operatoria aritmética. Asimismo familiariza rápidamente a los docentes con los distintos aspectos que pueden presentar dos variables que se vinculan proporcionalmente o no. El tiempo que se destina en adquirir un manejo básico de la hoja de cálculo por parte de los profesores se compensa con creces cuando, a través de este medio, estudia una relación entre variables y logra generar gráficos y tablas y sobre todo cuando luego descubre e interpreta estos registros con seguridad y certeza. Dada la naturaleza del recurso digital, que opera en tiempo real y es sensible a los cambios que el usuario haga en los datos, este espacio se presta mucho a la exploración de nuevos escenarios. Así, por ejemplo, surge de manera espontánea acciones tales como: "si yo varió este dato el punto asociado a esta razón se alinearía con los demás", o bien "si la recta que representa la relación se subiera dos unidades" se convertiría en una función lineal y por ende en una relación de proporcionalidad"

- La modalidad de trabajar entre pares con una guía bien focalizada en la dificultad a superar mostró ser eficaz en la pequeña muestra de docentes considerada. Sin embargo, a la luz de lo realizado debiera incluirse al final de dicha guía un set de relaciones entre variables que sirviera para “poner a prueba” lo aprendido. Tras la realización del taller se realizó una actividad de este tipo, no reportada en este estudio, consistente en el análisis de diez situaciones cotidianas y matemáticas (ver en anexos como ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS) que tienen en común la presencia de dos variables. En cada caso el docente debía tabular, graficar y analizar la situación para establecer si era o no proporcional y, si lo era, establecer si era directa o inversamente proporcional.

6.4 Conclusiones por Objetivo

<u>**Objetivo 1**</u>

Caracterizar el conocimiento del profesor acerca del tópico proporcionalidad.

1.1 En ninguno de los nueve objetivos de evaluación considerados se logra un nivel de desempeño aceptable (75% o más). Esto es preocupante considerando que los objetivos evaluados corresponden a objetivos de aprendizaje formulados para estudiantes de 7° y 8° básico y no para estudiantes de pedagogía o profesores de educación básica en ejercicio.

1.2 Los profesores y estudiantes de pedagogía estudiados evidencian un dominio deficiente en las distintas dimensiones del conocimiento especializado de la proporcionalidad. Esto significa que:

1.2.1 En **lo conceptual** no se evidencia claridad respecto del significado y propiedades de la razón y su relación con fracción, y decimal. Para muchos una razón es lo mismo que fracción y por ende cada uno puede ser sustituido perfectamente por un cociente. Tampoco el concepto de proporción está suficientemente claro pues suele entendérsela como una simple expresión algebraica de tipo cuaternaria. En general se tiene una intuición vaga y contradictoria de estos conceptos y sobre todo de sus propiedades. El texto de apoyo revisado, dirigido a los docentes, no ayuda mucho en este sentido pues, en vez de abrir una discusión documentada sobre la complejidad de estos conceptos y sus implicancias didácticas cierra la discusión prescribiendo algo así como la "definición oficial" a ser enseñada, tal como si se tratara de conceptos atemporales, sin historia ni variaciones. Si se entiende el acto de educar y el acto de aprender como un acto de re-creación del saber matemático entonces resulta claro que el profesor debiera estar habilitado para conducir dicho proceso didáctico. Ello presupone haber debatido y estar familiarizado, por ejemplo, con los argumentos a favor y en contra de la tesis que afirma que una razón equivale a un cociente o estar familiarizado con las distintas semejanzas y diferencias existentes entre los conceptos de fracción y razón.

1.2.2 En **lo procedimental**, la evidencia analizada (test diagnóstico, taller y entrevista), señalan que solo un 65% de los estudiantes de pedagogía y profesores comprende cabalmente el concepto de razón presentado ya sea de manera concreta o simbólica y sabe efectuar las operaciones necesarias para su recíproca conversión. También evidencian falencias en la resolución de problemas que impliquen cálculo de porcentajes: entre un 48% y 52% de ellos respondió acertadamente los ítems que evaluaban el cálculo de porcentajes. También el desempeño es bajo (44%) en la resolución de problemas que impliquen la comprensión y comparación de razones en problemas de contexto no matemático.

En general se conocen los procedimientos matemáticos y operatorios pero no se tiene clara la ocasión en que ellos se aplican o los criterios para interpretar su significado. Tampoco se tiene claridad de cuáles son los fundamentos matemáticos de tales procedimientos ni cuáles son las condiciones bajo las cuales tales procedimientos son válidos ya sea de manera total o parcial. Predomina la aplicación mecánica y poco razonada de un algoritmo estándar a todo aquel problema o situación que se parezca al "problema tipo" estudiado a través de extensas guías orientadas solo al incremento de la destreza operativa. Así, por ejemplo, pueden calcular el término faltante en una proporción, transformar una razón en fracción o chequear si los valores de dos variables tabuladas mantienen un cociente o un producto constante pero ello se realiza como un proceso mecánico, del cual no se conoce, realmente, el fundamento matemático.

1.2.3 En el ámbito de la **representación** de las ideas y conceptos matemáticos en diferentes registros se obtienen los niveles de desempeño más bajos: solo un 38% de los evaluados reconoce relaciones de proporcionalidad cuando ellas son presentadas tabularmente y el desempeño es aún menor, 23%, cuando tales relaciones son presentadas gráficamente. ¿A qué se debe este magro y preocupante resultado? El taller y sobre todo las entrevistas dan algunas pistas sobre esta falencia. En general los docentes y los estudiantes no estudiaron el tema de la proporcionalidad en estos registros de representación, ni en su paso por el sistema escolar ni en el pregrado. Se abre allí una tarea relevante a asumir, con la mayor celeridad, tanto en la formación inicial como en la formación continua de profesores.

1.3 Los profesores en ejercicio y los estudiantes de pedagogía no presentan diferencias significativas en el dominio de cada uno de los objetivos de evaluación considerados. Este es un aspecto preocupante pues en el caso de los estudiantes de pedagogía no se ve, de año en año, un incremento en el desempeño en los ítems de cada área evaluada lo cual podría indicar que la formación matemática no está considerando el desarrollo en este ámbito temático. Ello también podría estar explicando que profesores en ejercicio egresen y ejerzan la docencia sin tener conciencia de que este tópico no lo dominan. En este sentido resulta en extremo pertinente la evaluación oportuna de este y otros núcleos temáticos fundamentales de la enseñanza básica con el propósito de profundizar el conocimiento matemático y superar las falencias formativas.

Objetivo 2: Explorar el funcionamiento de una estrategia didáctica para desarrollar el conocimiento del profesor acerca del tópico proporcionalidad.

2.1 Es destacable y muy esperanzador constatar el genuino interés de los docentes y estudiantes en dilucidar sus dudas y corregir sus ideas previas acerca de razones y proporciones. Ello normalmente ocurre cuando, enfrentados a un problema que ponga en juego la claridad conceptual de estos términos, se produce la discusión entre pares y toman conciencia de que allí hay un conflicto conceptual matemático que dificulta el discernimiento de cual argumento o respuesta es "correcta". Esta actitud de apertura y curiosidad es un factor muy valioso que debiera administrase con prudencia y respeto. Los docentes en esta disposición no buscan un "juez" externo que en virtud de su autoridad declare lo que es correcto o incorrecto (matemática prescriptiva). Las conjeturas matemáticas se prueban y validan mediante la argumentación y eso es lo que cabría promover entre pares. También se puede complementar esta controversia con el estudio de algunos textos y/o papers bien elegidos para robustecer las argumentaciones y poner más profundidad conceptual en la discusión. Esta visión es consistente del trabajo entre pares es consistente con una de las dimensiones del modelo conceptual adoptado en esta tesis y corresponde al conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM [15]por sus siglas en inglés), es decir, a la "identificación [y adopción] de prácticas propias del trabajo matemático, ligadas a un tema específico o a la matemática en general." (Escudero et al; 105, p.58). Se trata entonces de proceder como procederían los matemáticos para resolver un problema y para re-producir o reinventar conocimiento matemático.

2.2 Las argumentaciones que tienen más sentido para los docentes enfrentados una controversia entre pares es aquella de tipo aritmético, con números concretos, pues no comprenden ni se sienten cómodos con argumentos de tipo general o algebraico. Esta es una limitación que impone dos estrategias para el trabajo con docentes en formación y en ejercicio. La primera consiste en promover con sentido estratégico el desarrollo de habilidades algebraicas, tanto para hacerse cargo del curriculum nacional vigente que la considera como un eje temático relevante en la educación básica, como también para apoyar el tránsito a argumentaciones más abstractas y generales, que se basen más en las propiedades de los objetos matemáticos y sus relaciones más que en los valores numéricos concretos.

2.3 El uso de la hoja de cálculo como herramienta para "auditar" con agilidad una relación entre variables o para generar una gráfica de dicha relación es un recurso poderoso y atractivo, que es bien valorado por los docentes una vez superada la etapa de adaptación. La incorporación de TIC en la clase de matemática y en la vida profesional del profesor de esta área está ampliamente fundada y documentada tanto desde la política pública (MINEDUC, 2012, p.88) como desde la experiencia internacional docente. que señala, por ejemplo, que "La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los estudiantes." (NCTM, 2005). En el caso de estudiantes de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio el uso de la hoja de cálculo cumple un doble rol: aprender matemática con dicho recurso para luego poder enseñar con el mismo. En esta estudio la hoja de cálculo ha jugado el rol de un espacio de experimentación y visualización de

15 KPM: Knowledge Practice Mathematics

ideas y relaciones matemáticas así como un dinámico dispositivo que permite transitar entre distintos registros de representación..

2.4 El recurso digital utilizado, la hoja de cálculo, brinda un entorno de trabajo matemático flexible y con muchas posibilidades de uso didáctico. La posibilidad de construir tablas de datos a partir de una función lineal, calculando en la segunda columna la imagen de cada uno de los elementos del dominio de la función da la oportunidad, con un mínimo entrenamiento, de realizar diversos análisis con gran rapidez y exactitud. Así por ejemplo se puede parametrizar el incremento de la variable x para que se incremente de 1 en 1 o bien de 0,5 en 0,5 tanto en sentido positivo como negativo. Si además se asocia un gráfico de dispersión a esta tabla de valores se tiene un modelo lineal simulado o sostenido en un medio digital. La inmediatez de los efectos sobre la tabla y el gráfico de cualquier cambio que el usuario realice a la fórmula que define la función permite, en muy breve tiempo, establecer las relaciones entre los elementos de la expresión algebraica que representa la función y su representación tanto tabular como geométrica. Ciertamente la hoja de cálculo "influye positivamente en la matemática que se enseña y refuerza el aprendizaje, tanto en claridad como en significación y persistencia. Otro aspecto relevante a consignar es que dicho entorno de trabajo brinda la posibilidad de explorar diversos escenarios y de plantearse preguntas que son muy matemáticas como: ¿y qué pasa con la recta del gráfico si hago que la pendiente sea negativa en vez de positiva? ¿Qué ocurre si la pendiente es nula? o bien ¿a qué punto de la recta corresponde el punto cuya ordenada es cero?. Estas preguntas y sus supuestas respuestas pueden ser probadas o simuladas en la hoja de cálculo: el computador se convierte así en una herramienta con la cual el estudiante puede pensar y no una máquina que piensa por el estudiante.

<u>Objetivo 3</u>: Caracterizar las estrategias de análisis que utilizan los profesores con conocimiento deficitario del tópico proporcionalidad.

3.1. Dificultades para discernir si una relación entre variables es o no proporcional evidencia que para los docentes estas relaciones solo pueden ser directas o inversas. Las entrevistas dejan en evidencia que no se comprende en profundidad qué es la proporcionalidad y cuáles son sus propiedades. Existe una tanto en los estudiantes de pedagogía como en los profesores en ejercicio una arraigada y persistente convicción de que solo basta considerar el sentido de las variaciones (directas u opuestas) de dos variables para determinar si ellas son directa o inversamente proporcionales. Es decir solo se considera un atributo, el de los sentidos de variación, que es tan solo una condición necesaria pero no suficiente para establecer la proporcionalidad entre dos variables. Este aspecto es el más urgente a corregir pues suele enseñarse de este modo. Es necesario dedicarle tiempo a revisar y estudiar exhaustiva y pacientemente todas estas sutilezas con quienes han de enseñar estos temas pues ellos, más que nadie, han de tenerlo claro pues muchos otros aprenderán de ellos.

3.2. Falta de criterios matemáticos que permitan al estudiante discernir cuando una relación entre variables, expresada en diferentes registros de representación, es o no proporcional. No sirve de mucho desde la perspectiva de este estudio y de su autor, reducir la formación matemática del profesor o del futuro profesor, a una colección de definiciones y propiedades de naturaleza prescriptiva. Es necesario, en la formación inicial y continua, experimentar, modelar, simular y sobre todo argumentar, matemáticamente de tal modo que sea la fuerza lógica de la argumentación la que haga sentido y persuada al profesor de cuáles son las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos estudiados y no el simple juicio de autoridad que no siempre se expresa a través de la figura del académico o de los pares más talentosos en matemática.

3.3. Percepción de la proporcionalidad solo como un problema de tipo aritmético que se resuelve mediante algoritmos fijos cuyo fundamento se desconoce. En la práctica habitual docente este tema, el de la proporcionalidad, se trata muy reductiva y superficialmente. En dicho contexto no es de extrañar que en su estudio no se dedique tiempo a comprender y practicar conversiones de registro de representación y tratamiento de cada registro. Este proceso de cambiar para un mismo concepto los registros de representación no solo constituyen una buena estrategia de aprendizaje sino también una buena estrategia de enseñanza. El tratamiento de la proporcionalidad desde la perspectiva de las funciones lineales obliga, en mayor medida, a incorporar sistemáticamente los cambios de registros como parte relevante e inherente al trabajo de formación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrahamson, D., Gutiérrez, J.F., Lee, R.G., Reinholz, D.,&Trninic,d.(2011). From tacit sensoriomotor coupling to articulated mathematical reasoning in an embodied design for proportional reasoning. In R. Goldman (Chair), H. Kwah & D.Abrahamson (Organizers), & R.P. Hall (Discussant), Diverse perspectives on embodied learning: what's so hard to grasp?. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Reasearch Association (SIG Advanced Technologies for Learning. New Orleans. LA, April 8-12, 2011. Http:// edrl.berkeley.edu/sites/default/files/Abrahamson-etal.AERA2011-EmbLearnSymp.pdf

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. Educational Studies in Mathematics, 65(2), 149-175. doi: 10.1007/s10649-006-9049-x

Allain, A. (2000). Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students. . Thesis for the degree of master of science. North Caroline State University. Recuperado de https://repository.lib.ncsu.edu/handle/1840.16/805

Arsac Gilbert et al. (1992). Inititation au Raisonnement deductif au collegue. Prensa Universitaria de Lyons.

Ávalos, B. y C. Matus, (2010) «La formación inicial docente en Chile desde una perspectiva internacional: Informe Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS M». Santiago, Disponible en: http://issuu.com/kimun/docs/libro_for-mación_inicial_docente_iea-teds_m_beat.

Baldin, Yuriko Y. (2003). Analyzing the Limitation of Technology in Teacher Preparation Courses. International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, v10 n1 p35-53 2003

Ball, D. (2000). Bridging Practices:Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach. Journal o/Teacher Education (Vol. 51, No. 3, May/June 2000), pp. 241-247, (02000 by the American Association of Colleges for Teacher Education. Reprinted by Permission of Sage Publications Inc.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 5(59), 389-407

Bart,W., Post, T., Behr, M., Lesh, R. (1994). A diagnostic analysis of a proportional reasoning test item: An introduction to the properties of a semi-dense item. Focus on Learning Problems in Mathematics, 16(3), 1-11.

Behr, M., Lesh, R. & Post, T.: 1988, Proportional reasoning, In M. Behr and J. Hiebert (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades, Lawrence Erlbaum Associates, Reston, VA.

Ben-Chaim D, Yaffa Keret, Bat-Sheva Ilany (2007) .Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. Journal of Mathematics Teacher Education. Journal of Mathematics Teacher Education December 2007, Volume 10, Issue 4-6, pp 333-340

Ben-Chaim, David; Fey James, Fitzgerald William, Benedetto Catherine y Miller Jane. (1998). El razonamiento proporcional en alumnos de 7º grado con diferentes experiencias curriculares. Educational Studies in Mathematics V36, pp. 247-273.

Bertliner,D. (2000). A personal response to those who bash teacher education. Journal of Teacher Education, Vol. 51, No. 5, November/December 2000 358-371 © 2000 by the American Association of Colleges for Teacher Education

Beswick, Kim. (2011). Make are your own paint chart: A realistic context for developing proportional reasoning with ratios. The Australian Mathematics Teacher. Vol 67 N° 1, 6-11

Block, D. (2007). Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria (1 ed.). Serie Tesis Maestría DIE (Tesis presentada el 11 de diciembre de 1988). México: Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav, 246p. ISBN: 978-968-9020-05-9

Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. (Tesis de Doctorado no publicada). Univesitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.

Bright, G. W., Joyner, J. M., & Wallis, C. (2003). Assessing proportional thinking. Mathematics Teaching in the Middle School, 9(3), 166-172.

Buforn, A. & Fernández, C. (2014) .Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestros de primaria en relación al razonamiento proporcional.. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante. BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática, 28(8), 21-41.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. D. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In Proceedings of the CERME (Vol. 8, pp. 2985-2994).

Chevallard, I. (1998). La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado. AIQUE grupo editor. Documento en línea.

Comin, Eugène (2000). Proportionnalité et fonction linnéaire Caractères causes et effets didactiques des evolutions et de réformes dans la escolarité obligatoire. History and Overview. Université Sciences at Technologies – Bourdeaux I – 2000. French. <tel-00827905>

Correa, G. (2006). Teoría de la proporción Pitagórica. Revista ESCRITOS (ISSN: 0120-1263 ISSN-e: 2390-0032). Universidad Pontificia Bolivariana. Volumen 14, N°33, Julio-diciembre 2006. Pp 600-617

Douady, Regine. (1999). Juegos de Marcos y Dialéctica Herramienta- Objeto en Recherche en Didactique de la Mathématiques- Grenoble, Le Pensé Sauvage; Vol. 7, Nº 2, Pág. 5- 31.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y conocimiento humano. Universidad del valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación matemática.

Ediciones SM. (2015). Matemática 7° básico - Texto del estudiante Departamento de Estudios pedagógicos de Ediciones SM, Chile. ©2015 – Ediciones SM Chile S.A.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en laresolución del problema de las cuerdas. PNA, 10(1), 53-77.

Extremiana J. Ignacio. (2003). Conferencia “Divina Proporción”. Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas Universidad de la Rioja.

Felmer, P., Varas, M.L.(2003). ¿Por qué fallamos los chilenos en matemáticas?. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication

Freudenthal, Hans. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001, Capítulos 5 y 6.

George, D., & Mallery, P. (2003). SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference 11.0 update (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon

Godino, J., Batanero, C. (1998). Clairifyng the meaning of mathematical objects as a priority área of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Educations as a research domain: A search for identity (pp.177-195) Dordrecht: Kluwer, A.P.

Godino, J., Batanero,C. (2002) Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452

Gómez B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En Encarna Castro y José Luis Lupiañez (eds.). Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano. Capítulo X, pp. 237-257. Editorial universitaria de Granada

Grossman, P. L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. Teachers College Press

Guacaneme, E. (2012). Teoría Euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿Un asunto útil para un profesor? Revista Tecné, Episteme y Didaxis. N°31. Primer semestre de 2012, pp. 113-131.

Harris, Judi (2005), "Our agenda for technology integration: It's time to choose. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education" [Publicación on line], 5 (2). Disponible en: http://www.citejournal.org/ vol5/iss2/ editorial/article1.cfm. (última consulta: junio de 2012).

Hersant, M. (2001). Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège (Thèse de Doctorat inédite). Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, France.

Hill, H.C., Rowan, B., Ball, D.L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement American Educational Research Journal; Summer 2005; N°42, Vol 2; ABI/INFORM Global. pg. 371-406

Hironaka, Heisuke, Sugiyama, Yoshishige. (2006). Mathematics 6B for Elementary School. Editado por Tokyo Sosheki Co. Ltda. ISBN4-487-46621-0

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods (pp. 285-313). Boston: Allyn & Bacon.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 219-233.4.

Koehler, M., Mishra, P., Kereluik, K. Seob,T., Graham, C. (2014) The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework. In Handbook of Research on Educational Communications and Technology, 4ta Edition. Edited by J. Michael Spector et al. (Eds). Cap 9 (pp 101-110).

Lajusticia, A., Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. La Gaceta de la RSME. Vol. 5.2 (2002), págs... 397-416

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 24(1), 41-61.

Lamon, S. (2 (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Edited by Frank K, Lester Jr.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 24(1), 41–61

Lim, K. (2012). The Hammer-and-Nail Phenomenon in mathematics Education. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED573304.pdf

Lim, KH., Morera, O. (1999). Addressing Impulsive Disposition: Using Non-proportional Problems to Overcome Overgeneralization of Proportionality. University of Texas at El Paso University of Texas at El Paso. Proceedings of the 13th Annual Conference Research in Undergraduate Mathematics Education

Ma, Liping. (2010). Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU. Edición 2010. Editado por patricio Felmer de la Academia Chilena de Ciencias.

MICRODATOS. (2013). Segundo Estudio de Competencias Básicas de la Población Adulta 2013 y Comparación Chile 1998-2013

MINEDUC. (2011). Mapas de progreso del Aprendizaje Sector matemática para los ejes temáticos: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría y Datos y Azar y Ministerio de Educación. Chile.

MINEDUC. (2013). Bases curriculares 7° Básico a 2° Medio. Ministerio de Educación. Chile.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2005). Los nuevos principios y Estándares del NTSC en castellano. Revista SUMA, N°48. Febrero 2005, pp.105-208. Traducción de Manuel Fernández. SAEM Thales Sevilla 2003ISBN 84-933040-3-4.

New Hampshire, Rhode Island, and Vermont Department of Education. (2004). Draft Tri-State New England (TSNE) Mathematics Test Specifications. New Hampshire, Rhode Island, and Vermont Department of Education.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I - differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11(2), 217-253. doi: 10.1007/BF00304357

Obando, G., Vasco, C., Arboleda, L. (2014). Enseñanza y Aprendizaje de la Razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), Volumen 17(1), marzo 2014. Pp 59-81.

OCDE. (2006). Marco de la Evaluación PISA. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.

Olfos, Raimundo (2010)"El saber del profesor y el desarrollo del pensamiento multiplicativo en el alumno“. Semana de la Matemática, Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Trabajo realizado en el marco del Proyecto FONIDE 10980/2009

Oller M., Gairin J.M. (2013) La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa (RELIME). N°16 volumen 3. Págs. 317-338.

Oller, M.(2012). Propuesta aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Peng Yee, Lee (2014). La Enseñanza de la Matemática en Educación Básica. Un libro de recursos. Editado por la Academia de Ciencias de Chile. Capítulo 10, La enseñanza de Razones págs. 197-214. ISBN: 978-956-8304-12-6

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence. (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

PISA (2012). Resultados PISA 2012 Chile. Programme for International Student Assessment. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Informe_Nacional_Resultados_Chile_PISA_2012.pdf

Pulos, S., & Tourniaire, F. (1985). Proportional Reasoning: A review of the literature. Educational Studies in Mathematics, 16(2), 181-204. doi: 10.1007/BF02400937

Rhode Island, and Vermont Department of Education. (2004). Proportional Reasoning: A Research Based Unit of Study for Middle School Teachers New Hampshire, Draft Tri-State New England (TSNE) Mathematics Test Specifications. New Hampshire, Rhode Island, and Vermont Department of Education.

Rufinelli, Andrea (2013). La calidad de la formación inicial docente en Chile: la perspectiva de los profesores principiantes. Calidad en la educación. (39), 117-154.

Shulman, L. (1986) Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching Educational Researcher, Vol. 15, No. 2 (Feb., 1986), pp. 4-14. Published by: American Educational Research Association Stable. URL: http://www.jstor.org/stable/1175860.

Shulman, L. (1987) Conocimiento y Enseñanza. Estudios Públicos N° 83 (Invierno 2001), páginas 163-195. Traducción autorizada de Alberto Ide basada en la version Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform Harvard Educational Review 57(1): 1- 22

Singh, Parmjit (2000) .Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. Educational Studies in Mathematics. 11-2000, Volume 43, Issue 3, pp 271-292

TIMSS, (2015). Resultados TIMSS Chile. Estudio Internacional de tendencias en matemáticas y Ciencias. Agencia de calidad para la Educación – IEA. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presen-tacion_BAJA.pdf

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. Educational Studies in Mathematics, 17, 401-412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. Educational Studies in Mathematics, 16, 181–204.

Van den Brink, F. J. and Streefland, L.: 1979, 'Young Children (6-8) - Ratio and Proportion'

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., Verschaffel, L. (2005) .Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. Cognition and Instruction, 23 (1), pp. 57-86.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Trillas Editorial. ISBN: 9789682442414.

Wilson, S.M.; Shulman, L.S. y Richert, A.E. (1987). “150 different ways” of knowking: Representations of knowledge in teaching, en J. Calderhead (ed.): Exploring teachers’ thinking. Casell, London, 104-124

ANEXOS

Dominios del Conocimiento Matemático del Contenido (CMC/MCK) según TEDS-M (Tatto et al., 2008)

- **Dominio Contenido**: Números y operaciones, Geometría y medición, Algebra y funciones, Datos y probabilidades
- **Dominio Cognitivo**: conocimiento, aplicación y razonamiento
- **Dominio Curricular**: novicio, intermedio y avanzado

Cuadro 3.1 (en español)

Conocimiento matemático del contenido: Subdominios y áreas de contenido.

Subdominio	Áreas de contenido	Primaria	Secundaria inferior
Números y Operaciones	• Números enteros • Fracciones y decimales • Expresiones numéricas • Patrones y regularidades • Enteros • Razones, proporciones y porcentajes • Números Irracionales • Teoría de números	X X X X X X X X	X X X X X X X X
Geometría y Medición	• Figuras geométricas • Medidas geométricas • Lugares geométricos y movimientos	X X X	X X X
Álgebra y Funciones	• Patrones • Expresiones algebràicas • Ecuaciones/Fórmulas y funciones • Tópicos avanzados (límite, continuidad y matrices)	X X X -	X X X X
Datos y azar	• Organizacion y representación de datos • Lectura e interpretación de datos. • Azar	X X X	X X X

Fuente: TEDS-M

DOMINIOS DE DESEMPEÑO CURRICULAR SEGÚN TEDS-M

Nivel curricular	DESCRIPCIÓN
Principiante	Contenido matemático que se imparte generalmente en los grados escolares en los cuales el futuro profesor se prepara para enseñar.
Intermedio	Contenido matemático que se imparte generalmente uno o dos grados escolares más altos que los grados en los cuales el futuro profesor se prepara para enseñar.
Avanzado	Contenido matemático que se imparte generalmente tres o más años escolares más altos que los grados en los cuales el futuro profesor se prepara para enseñar.

TEST DIAGNÓSTICO PROPORCIONALIDAD

INSTITUCIÓN EDUCATIVA ____Fecha:____/____/2017.

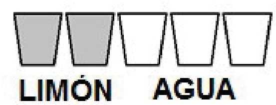
TITULO PROFESIONAL____ Mención matemática: SI - NO

NOMBRE ____ Experiencia docente _____años.

En cada caso encierre en un círculo la letra de la alternativa que considere correcta

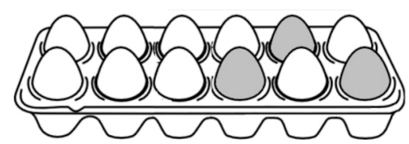
1. **Se prepara una limonada mezclando agua y jugo de limón en las cantidades indicadas en la imagen. Según estos datos ¿Qué porcentaje de jugo de limón contiene la limonada?**

   A. 66%
   B. 40%
   C. 30%
   D. 20%



2. **En la imagen se muestra una bandeja con huevos blancos y de color. El profesor solicita a sus estudiantes que establezcan una relación entre ambos tipos de huevos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe correctamente la relación entre ambos tipo de huevos?**

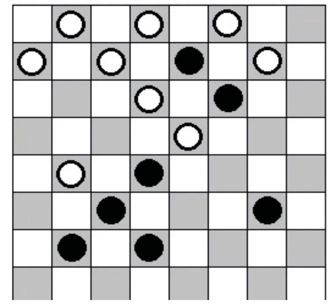
   A. De cada cuatro huevos uno es de color
   B. Por cada huevo de color hay cuatro huevos blancos.
   C. De cada nueve huevos tres son de color
   D. Uno de cada tres huevos es de color



3. **Para reparar un muro un maestro albañil prepara una mezcla con arena y cemento en razón 3:2. Esto significa que la mezcla resultante contiene…**

   A. 66% de arena.
   B. 60% de arena
   C. 30% de arena
   D. 20% de arena

4. **En la imagen se muestra una partida de DAMAS. Observe con atención las fichas negras y blancas y luego determine ¿Qué porcentaje del total de casillas del tablero está desocupado, sin ninguna ficha del juego?....**



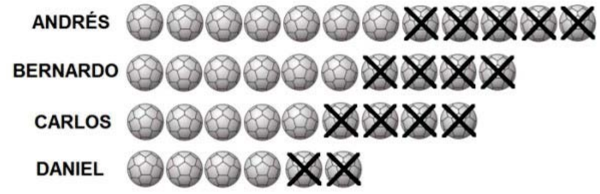
   A. 9%
   B. 16%
   C. 25%
   D. 75%

5. **Camila compró unos audífonos con un 20% de descuento. Ello significa entonces que pagó solo**
   A. 1/5 del precio original
   B. 5/4 del precio original
   C. 4/5 del precio original
   D. 2/10 del precio original

6. **En el banco ALFA un depósito de \$ 500.000 al cabo de un año se convierte en \$525.000 mientras que en el banco BETA, en el mismo tiempo, un depósito de \$475.000 se convierte en \$500.000. ¿En qué banco invertiría Ud. si ambos bancos mantienen las condiciones descritas?**
   A. Banco ALFA
   B. Banco BETA
   C. Banco ALFA o BETA da lo mismo.
   D. No hay suficientes datos para saberlo.

7. **Para el tratamiento de una misma enfermedad se prueban dos medicamentos diferentes: Granulin, que consumido por 1600 enfermos logró curar a 1200 de ellos, y Cuadracina, que mejoró a 1200 de los 2000 enfermos a quienes se les aplicó. ¿Qué medicamento preferiría tomar Ud. en caso de contraer esta enfermedad?**
   A. Cuadracina
   B. Cualquiera de los dos
   C. Granulín
   D. Ninguno es confiable.

8. **La imagen muestra los lanzamientos penales, exitosos y fallidos, ejecutados por cuatro jugadores de un mismo equipo de fútbol en los últimos partidos. Si el campeonato se definiera mediante un solo tiro penal ¿A quién elegiría para ejecutarlo?**



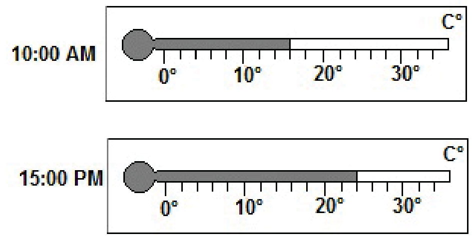
   A. Andrés
   B. Bernardo
   C. Carlos
   D. Daniel

9. **Si “m” es la cantidad de niños y “n” la de niñas entonces… ¿Qué fracción del curso son niñas?**

A. $\frac{m}{n}$ C. $\frac{n}{(m+n)}$

B. $\frac{n}{m}$ D. $\frac{m}{(m+n)}$

10. **Se ha tomado la temperatura ambiente en el mismo lugar a distintas horas del mismo día tal como muestra la imagen. ¿En qué porcentaje ha aumentado la temperatura?**



   A. 66,7%
   B. 50%
   C. 33,3%
   D. 8%

11. **De una fotografía original que medía 9 x 12 cm. se hicieron varias ampliaciones. Por desperfectos en la maquina ampliadora solo una copia quedó bien ampliada, es decir, resulta semejante a la foto original pero más grande. ¿Cuál de las siguientes copias está bien ampliada?**

   A. 15 x 18
   B. 18 x 21
   C. 20 x 23
   D. 27 x 36

12. **¿Cuál de las siguientes relaciones corresponde a una relación de proporcionalidad directa?**
   A. Lado de un cuadrado y su perímetro
   B. La edad de Juanita y la edad de su hermano dos años menor que ella.
   C. Radio de un círculo y su área.
   D. Peso de un microbús con pasajeros y la cantidad de pasajeros que viajan en él.

13. **Un hombre y su hija caminan juntos. Cada 12 pasos que da el padre su hija camina 15 pasos. ¿Qué relación hay entre el largo del paso del hombre y su hija?**
   A. El paso del hombre es un tercio mayor que el de su hija
   B. El paso de la hija es un cuarto menor que el de su padre

C. El paso de la hija es un quinto menor que el de su padre

D. El paso del hombre es un quinto mayor que el de su hija

14. Juan y María practican ciclismo en una pista circular. Ambos se desplazan siempre a la misma velocidad. Juan llegó tarde a la práctica y comenzó a entrenar cuando María ya había completado 5 vueltas. ¿Cuántas vueltas completará María cuando Juan complete 12 vueltas a la pista?

A. 13 vueltas

B. 17 vueltas

C. 60 vueltas

D. 72 vueltas

15. Un tenista pagó $18.000 por una raqueta de tenis incluyendo el 20% de impuesto. ¿Cuánto habría pagado si la raqueta se comprase libre de impuesto?

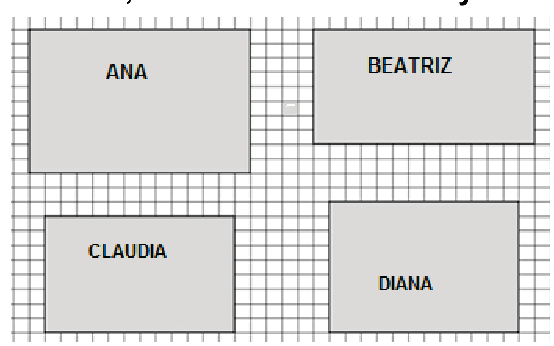
A. $ 14.400

B. $ 15.000

C. $ 16.000

D. $ 21.600

16. Varias niñas dibujan la misma mesa de comedor, mirada desde arriba y a escala. La mesa real mide 1,2 m por 1,6 m. ¿Cuál de las niñas dibujó correctamente la mesa del comedor?



A. ANA

B. BEATRIZ

C. CLAUDIA

D. DIANA

17. **Para que dos variables establezcan una relación de <u>proporcionalidad directa</u> es suficiente que:**…

A. …los valores de cada variable se multipliquen por el mismo factor

B. …al aumentar el valor de una variable aumente también el valor de la otra.

C. …el producto entre los valores de las ambas variables sea siempre el mismo.

D. …los valores de ambas variables aumenten o disminuyan en la misma cantidad fija

18. **Para que dos variables establezcan una relación de <u>proporcionalidad inversa</u> es suficiente que:**

   A. … al aumentar el valor de una variable disminuya el valor de la otra.

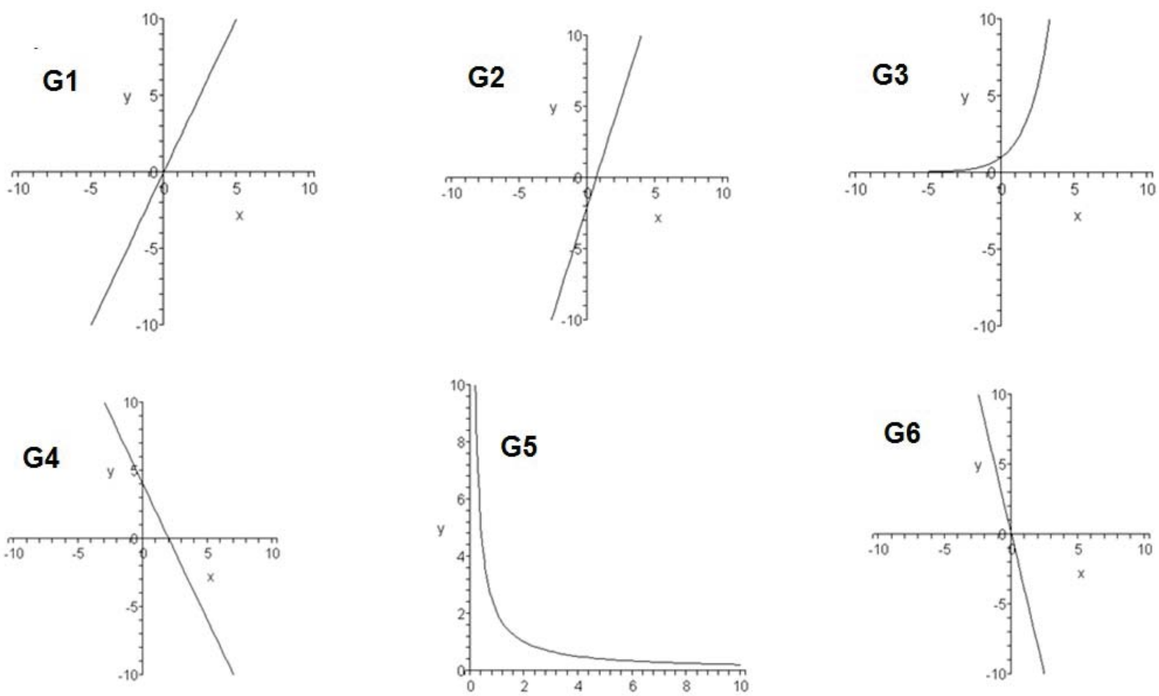
   B. …el producto entre los valores de ambas variables sea siempre el mismo.

   C. …los valores de ambas variables su multipliquen por el mismo factor

   D. …ambas variables aumenten o disminuyan en la misma cantidad

OBSERVE ATENTAMENTE LOS GRÁFICOS Y LUEGO RESPONDA LAS PREGUNTAS 19, 20 Y 21

(Recuerde que una relación proporcional puede ser directa o inversa)



19. **¿Qué gráficos representan relaciones que NO SON PROPORCIONALES?**
   A. Gráficos G2, G3, G4 y G6
   B. Gráficos G3 y G5
   C. Gráficos G1 y G6
   D. Solo gráfico G5

20. **¿Qué gráficos representan relaciones de PROPORCIONALIDAD DIRECTA?**

A. Gráficos G1, G2 y G3
B. Gráficos G1 y G2
C. Sólo G1
D. Solo G3

21. **¿Qué gráficos representan relaciones de PROPORCIONALIDAD INVERSA?**

A. Gráficos G4, G5 y G6
B. Gráficos G4 y G6
C. Solo G6
D. Solo G5

OBSERVE ATENTAMENTE LAS TABLAS Y LUEGO RESPONDA LAS PREGUNTAS 22, 23 y 24.

(Recuerde que una relación proporcional puede ser directa o inversa)

22.

TABLA 1

x	y
4	5
6	7
8	9
10	11

TABLA 2

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

TABLA 3

x	y
3	6
6	12
9	18
12	24

TABLA 4

x	y
1	24
2	12
3	8
4	6

TABLA 5

x	y
1	4
2	3
3	2
4	1

¿Qué tabla(s) representa(n) una relación DIRECTAMENTE PROPORCIONAL?

A. Tablas 1, 2 y 3

B. Tablas 2 y 3

C. Tabla 2

D. Tabla 3

23. **¿Qué tabla(s) representa(n) una relación NO PROPORCIONAL?**

A. Tablas 1, 2 y 5

B. Tablas 2 y 3

C. Tablas 4 y 5

D. Tablas 1, 2 y 3

24. **¿Qué tabla(s) representa(n) una relación INVERSAMENTE PROPORCIONAL?**

A. Tablas 1, 2 y 3

B. Tablas 4 y 5

C. Tabla 5

D. Tabla 4

TALLER PARA DOCENTES

TALLER 1 – CRITERIOS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

OBJETIVO DEL TALLER

Analizar y argumentar los criterios matemáticos que permitan distinguir variaciones proporcionales y no proporcionales a partir de una actividad de aula diseñada para estudiantes de 7° a 8° básico.

A. En la hoja 3 Ud. encontrará una actividad propuesta para estudiantes que finalizan la educación básica (7°-8°). Revise de manera individual dicha actividad y luego responda las siguientes preguntas:

En la PREGUNTA FINAL ¿Cuál es la alternativa correcta?__________

En qué argumentos matemáticos basa su elección personal.

____
____
____
____

B. En equipo, con uno o dos colegas, contrasten sus respuestas individuales y analicen, desde el punto de vista matemático cuál es la opción correcta.

C. ¿Qué opción consideran correcta como equipo?_________

D. Como equipo fundamenten matemáticamente la opción elegida.

____
____
____
____

E. Como equipo hagan una estimación de cómo creen que se distribuirían porcentualmente las preferencias de los estudiantes entre las opciones A, B, C y D al responder la pregunta final.

A	B	C	D

F. Como equipo hagan una **estimación porcentual** respecto al porcentaje de estudiantes que responderían acertadamente la pregunta final: ______%.

G. Como equipo ¿Qué errores creen Uds. que cometerán aquellos estudiantes que no respondan acertadamente la pregunta final?

____
____
____
____

H. ¿Cómo explicar a los estudiantes que no responden acertadamente cuál es el criterio matemático que permite saber si dos variables representadas en una tabla son directamente proporcionales o no?

I. ¿Cómo explicar a los estudiantes que no responden acertadamente cuál es el criterio matemático que permite saber si dos variables representadas en un gráfico son directamente proporcionales o no?

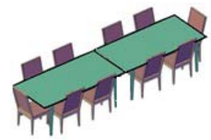
ACTIVIDAD PARA EL ESTUDIANTE

EL PROBLEMA DE LAS MESAS

Un casino posee 10 mesas rectangulares similares entre sí con las cuales atender a sus clientes. En cada mesa caben cómodamente seis personas: dos en cada costado largo y una en cada cabecera. Las mesas se pueden ubicar en el casino de dos maneras:

Mesas independientes

Mesas unidas



Con estos antecedentes complete los datos que faltan en las siguientes tablas sabiendo que ellas representan la cantidad de sillas requeridas (S) según la cantidad de mesas utilizadas (M).

TABLA **A**
Mesas independientes

Mesas	Sillas
1	6
2	12
3	

TABLA **B**
Mesas unidas

Mesas	Sillas
1	6
2	10
3	

1. **Usando los datos de cada tabla construya un gráfico de dispersión para cada tipo de configuración de las mesas.**

2. **Analice las características de cada gráfico** prestando especial atención a la alineación de los puntos y a la trayectoria de la recta imaginaria que pasa por tales puntos respecto al origen del sistema coordenado. Finalmente responda la siguiente pregunta:

PREGUNTA FINAL

¿Qué tabla representa una relación de proporcionalidad directa?

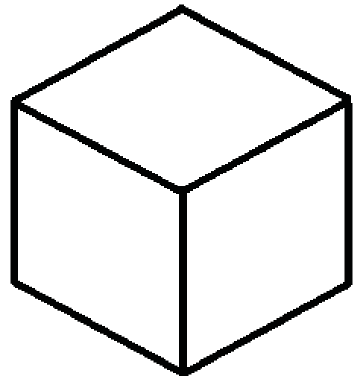
A. Ninguna de las dos tablas
B. Ambas tablas
C. Solo tabla con mesas separadas
D. Solo tabla con mesas unidas

PROTOCOLO DE ENTREVISTA

1) **PROPÓSITO DE LA ENTREVISTA**: Conocer los criterios reales (válidos o erróneos) que los profesores/as utilizan para distinguir una relación de proporcionalidad, directa o inversa.
2) **DURACIÓN ESTIMADA**: 15 minutos máximo
3) **LUGAR**: oficina profesor
4) **FECHA/HORA DE LA ENTREVISTA**: Sábado 10 de junio, de 9:00 a 12:00.
5) **ENTREVISTADOS**: profesores que tras la realización del taller mantuvieron respuesta errónea.
6) **ESTRUCTURA DE LA ENTREVISTA**
    a. Identificación del entrevistado o entrevistada. Primer nombre, escuela de origen.
    b. Presentación de situación. Se presenta al entrevistado una hoja que contiene:
        i. La descripción de un situación que involucra dos variables (Ejemplo: arista de un cubo y su volumen),
        ii. La tabla de datos de la misma situación y
        iii. El gráfico de dispersión (XY) de ambas variables.
    c. Se solicita al entrevistado que:
        i. declare si ambas variables presentadas son o no proporcionales
        ii. Explique los criterios o fundamentos de su respuesta anterior, es decir, (en qué parte de la información se fija para establecer su respuesta (tabla, gráfico, etc.)
    d. Se repiten los pasos b y c pero con otro par de variables distintas.
    e. En total se usaran tres estímulos: una proporción directa, una proporción inversa y un caso de no proporcionalidad. Se agradece y cierra la entrevista.

ENTREVISTA-FICHA 1
ARISTA Y VOLUMEN DEL CUBO

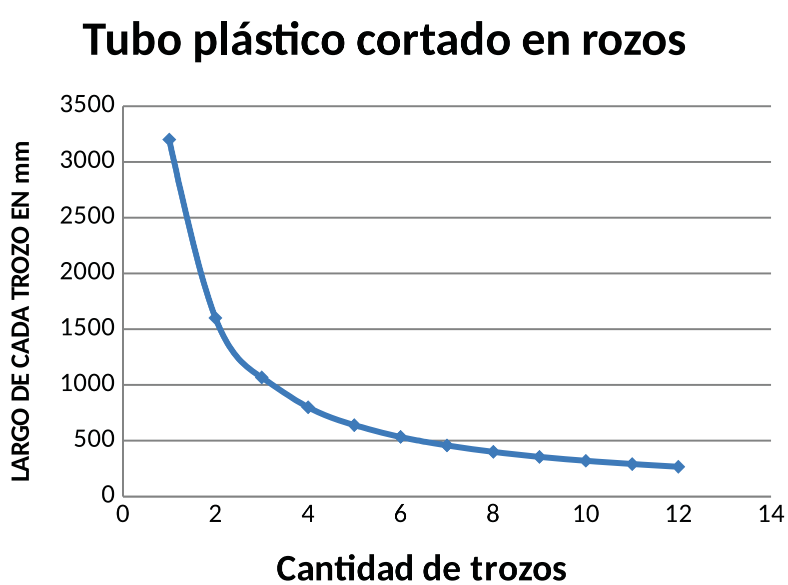
arista del cubo	Volumen del cubo
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000



ENTREVISTA - FICHA 2
TUBO CORTADO EN TROZOS

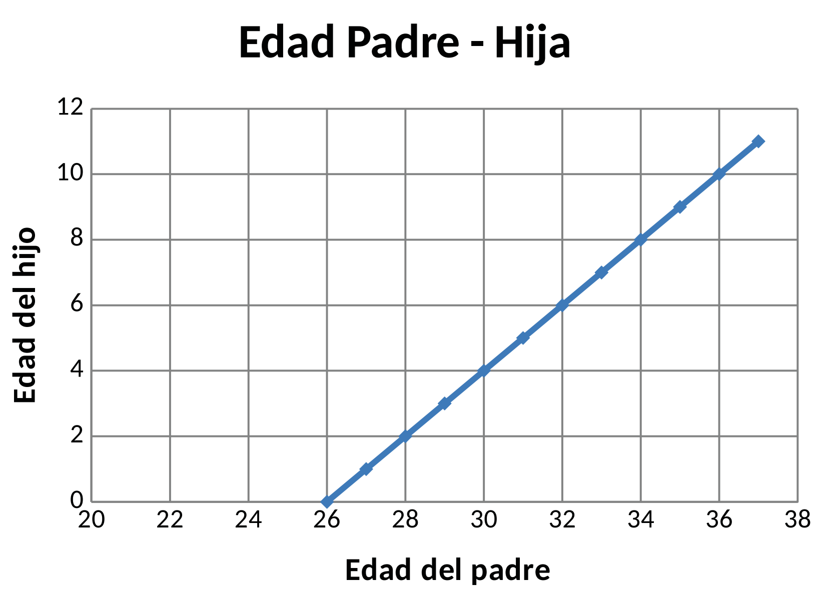
Se desea cortar un tubo de plástico de 6 m (6000 mm) en varios trozos iguales.

cantidad de Trozos	largo de cada trozo mm
1	6000
2	3000
3	2000
4	1500
5	1200
6	1000
7	857
8	750
9	667
10	600
11	545
12	500



ENTREVISTA - FICHA 3
EDAD PADRE E HIJA

Edad del Padre	edad del hijo
26	0
27	1
28	2
29	3
30	4
31	5
32	6
33	7
34	8
35	9
36	10
37	11



TRANSCRIPCIONES DE ENTREVISTA

Profesor(a): CAT

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA Sábado 10 de junio de 2017 – 12:05 hrs

- CAT: Mi nombre es KA yo soy profesora generalista básica con mención en matemática. Tengo un año y medio de experiencia. Trabajo con niños de tercero básico hasta segundo medio.

- L: ¿En qué escuela trabaja?

- CAT: Trabajo en el Colegio “Emprender” de Larapinta, de Lampa.

- L: Bien, lo primero es darle las gracias por su generosa colaboración. Indicarle por supuesto que lo que está grabado va a quedar anónimo. Váyase tranquila. Básicamente de lo que trata la entrevista es de comentar, analizar juntos algunas situaciones en que hay implicadas cantidades que podrían ser o no ser proporcionales. Le voy a pasar la primera hojita que muestra justamente la arista de un cubo y el volumen del cubo y aparece la tabla con datos para distintos valores de arista y su correspondiente valor de volumen y una gráfica que también muestra la expresión gráfica o visual de la tabla que está arriba. Respecto de esta tabla por ejemplo… ¿Qué comentarios le podría hacer Ud. o análisis?...

- CAT: Las variables tienen una relación directa en el sentido de que si la arista del cubo aumenta el volumen también aumentaría, el volumen del cubo… pero…no podrían ser proporcionales.

- L: ¿Por qué?

- CAT: Porque la arista del cubo por ejemplo, acá, cuando mide 2, si yo la multiplico por 2 me daría 4, ¿cierto?, pero si yo el volumen del cubo también tendría que duplicarse cuando l arista se duplica y acá no ocurre eso sino que se multiplica por 8.

- L: Ya… ¿y eso es indicativo de qué?... ¿De qué no es proporcional?...

- CAT: Claro. No sería proporcional. Tendrían otra relación, porque en el fondo acá como que se elevó al cuadrado…como para dar el 4.

- L: Ya…¿y eso pasa con otras “parejitas” de números?

- CAT: Si…porque por ejemplo el 3 o el 13 para llegar al 13 se dividió por dos …(yah)… entonces el 216 que es el volumen tendría que dividirse por 2 para llegar a la del tres. Y la mitad de 216 no es 27…es ciento…es ciento ocho.

- L: Correcto. Ahora yo me fijé que lo primero que Ud. observó de la hoja fue la tabla más que la gráfica

- CAT: si

- L: ¿Qué le da más información a Ud. o con qué siente más cómoda?

- CAT: Eh…con el valor numérico. El gráfico igual muestra…o sea…podría mostrar la parte de que las variables son directas, o sea tienen una relación directa pero no son proporcionales.

- L: Ya…

- CAT: por que pasa por el (0,0), por el punto (0,0), porque…bueno, si la arista mide cero el volumen no existe., pero igual la gráfica no es una línea…una recta lineal…

- L: ¿Y por qué debería ser una recta?

- CAT: Porque eso indicaría proporcionalidad directa

- L: ya…

- CAT: Eh…, yo sé que es usado… por lo menos como que uno sabe que la proporcionalidad directa se gráfica como línea

- L: : Ya

- CAT: para que muestren como que se van ascendiendo. Pero….esta gráfica es curva, entonces hay un crecimiento pero no se ve de manera proporcional porque no se ve una relación entre las distancias y el eje…eh…no sé cómo explicarlo pero como que el eje de acá está en dos en dos pero el eje de aquí está en 8 pero ya pasando al 6 pasa a doscientos entonces tiene un crecimiento muy elevado. La gráfica no lo muestra muy bien pero digamos por el…como se podrá decir… ¿por la escala?...

- L: Si…por la escala…por la escala de los ejes…

- CAT: Si, por la escala de ejes pero no lo muestra muy bien pero si tiene un crecimiento muy elevado.

- L: bueno…ahora… ¿Le ha tocado enseñar este tema?

- CAT: Si.

- L: Y lo ha planteado más como tabla…lo ha planteado más como gráfica…o lo ha trabajado más como relación aritmética…más como de expresiones aritméticas?

- CAT: …más como tabla y expresión aritmética.

- L: ¿Y gráficamente?

- CAT: eh… (ríe) no…no he tocado mucho el tema.

- L: ya

- CAT: Más que nada porque no…o sea si…eh…yo entiendo que cuando uno gráfica algo proporcional va a dar una línea… pero… no entendería exactamente por qué..

- L: ah…ya. Es algo que no lo ha trabajado o no lo ha profundizado tanto…como si lo ha hecho con la tabla. Ahora ¿hay alguna otra cosa que Ud. haga cuando tiene los datos presentados en forma de tabla que le permita concluir si es o no proporcional?

- CAT: Eh…hago el producto…o divido. En este caso tendría que dividir el volumen del cubo dividido en la arista. Bueno, en la primera no se puede hacer porque es 0 dividido en 0, pero en la siguiente da 1, en la siguiente da 4 y este da 9 bueno, y así sucesivamente…la división.

- L: Y qué esperaría si fuese proporcional?

- CAT: Que se mantuviera constante.

- L: Ya…y demás dijo que multiplicaría…¿Qué multiplicaría?

- CAT: también multiplicaría la arista…con el volumen, para ver si el producto se mantiene constante. En este caso tampoco se mantiene constante…n esta caso tampoco se mantendría constante porque bueno…acá daría 1, acá daría 16, 81, 216 creo, ehh…no 256,

- L: Y en una relación de proporcionalidad directa el producto debería mantenerse constante?

- CAT: en directa no…el cociente. El cociente debería mantenerse constante..

- L: ¿y el producto?

- CAT: El producto es para la inversa.

- L: ah. Ya. Perfecto.. y, en esta otra hojita, la otra situación que hay es la relación entre la edad del papá y de una hija o hijo. Ahí aparece una hija. Mire un poquito la tabla, mire la gráfica y dígame que le parecen.

- CAT: Mmmh… tampoco serían proporcionales…

- L: ¿y cuál sería la razón? ¿que ocurre o no ocurre..?

- CAT: Eh…es que…el producto bueno…el producto de e la división no se mantiene constante en la tabla y por ejemplo el 26, que es la edad del padre, el 26 no lo puedo dividir por la edad del hijo porque es 0.

- L: ya

- CAT: pero, si sigo con la siguiente edad que es 27 años, el hijo tendría 1, hago la división y es 27. Pero después acá 28 dividido en 2 me da 14. Entonces ya se que el cociente no se mantiene constante.

- L: Mmh… ya.

- CAT: Y…eh….el gráfico también muestra que es un gráfico… muestra una línea pero…pero no… pero no parte del (0,0)… o sea no hay un… yo no…sino que parte de 25…no del 26 con 0. Y yo sé que eso no es una característica del gráfico de proporcionalidad directa. Lo que si se ve es que a medida que la edad del padre aumenta la edad del hijo aumenta también y…y mantienen la diferencia. La diferencia es constante. Si yo divido…perdón, si yo resto la edad del padre con la del hijo va a dar siempre 26.

- L: Mmm. Ya. En este caso que le da más información ¿La tabla o la gráfica?

- CAT: Igual la tabla…

- L: ¿En ambos casos?

- CAT: Si

- L: ¿Entonces Ud. se siente más cómoda con la tabla? ¿Ve más información en la tabla?

- CAT: (Ríe)…Yo le saco más información a la tabla. El gráfico…

- L: Si no hubiera contado con la tabla pero si con la gráfica y hubiera tenido que dar juicio pero solamente con la ~~tabla~~ (gráfica).

- CAT: Me hubiera demorado un poco más pero igual habría dicho que no es proporcional.

L. Ya. Ahora, ¿por qué debe pasar por el origen dice Ud.? o también lo tiene como paso antes: “tiene que ser una recta pero no tengo claro por qué”

- CAT: Si. Pasa un poco eso. No sabría explicar porque tiene que pasar por el origen. O sea si…me imagino que es porque…es por lo que yo creo…es por….es porque en el fondo, la pendiente de la recta que es la constante de proporcionalidad multiplica a un número y si ese número me da cero como que… por fórmula, me tendría que dar…tendría que pasar por el otro cero digamos. Pero así como que ¿por qué es <u>ese</u> gráfico y porqué <u>tiene</u> que pasar por (0,0) no sabría explicar por qué.

- L: Ya, ¿y en caso de la tabla?, volviendo al tema de la tabla Ud ve ahí proporción o puede no ver proporción. ¿El concepto de razón lo ve aquí (en la tabla)? ¿Ve razones?

- CAT: Si se quiere hacer comparaciones entre ambas variables pero…yo no veo una proporción ni una razón tampoco. Porque ya, se puede hacer una comparación entre la edad del padre y del hijo. Pero, si por ejemplo, el padre duplica su edad tendría 52 años el hijo no podría duplicar su edad, entonces…solo tendría 26 años menos. Bueno en ese caso tendría 26. Bueno, … en ese caso si… pero

- L: es que si pensamos que el hijo tiene 2 años el padre tendría….2 años…2 años…tendría 28. Y si el hijo duplica la edad tendría 4 años pero n o quiere decir que el padre la duplique…y tenga…56, porque el año pasó para ambos.

- CAT: claro.

- L: Ahora Ud. parece que este tema lo ha enseñado. ¿Qué es lo que más les cuesta a los chiquillos?

- CAT: el entender que por ejemplo si…lo que acabo de decir…que si la edad del padre se duplica la edad del hijo también se tiene que duplicar. Como que les cuesta harto. El hecho de que se multiplique por los mismos números o se divida por los mismos números en las tablas eso, como que les cuesta. No les cuesta verlo pero les cuesta entender porque tiene que pasar eso. Como para que sea proporcional. Porque ellos a lo mejor me dicen que… eh…esto si es proporcional porque se va manteniendo una constante, algo constante… eso si yo les explicaba que siempre se tiene que ir manteniendo algo constante pero era el cociente o era el producto y como acá, en la edad del padre con el hijo si yo iba restando se mantenía algo constante eso también me podrían haber dicho que era suficiente

- L: Claro, y aquí lo que se mantienen constante es la diferencia. Entonces pareciera ser que lo que se mantiene constante es algo más de carácter multiplicativo que aditivo.

- CAT: Si, para ser de proporcionalidad.

- L: Ahora, su constatación empírica de haber enseñado muchas veces este tema ¿este es un tema que tiene complejidades?

- CAT: Si. Yo lo encuentro complejo porque en sexto uno parte viendo razones y uno las razones las ve como comparaciones entre dos cosas, entre dos variables. Después, ya en séptimo, uno tiene que hacer comparaciones entre los tres tipos…la variable directa, la inversa y la mixta. Y después no se toca, así como directamente…es como que ahí a los chiquillos les tiene que haber quedado super claro, en esos dos años, todos los conceptos. Es lo que yo pienso…entonces es complejo porque la directa a lo mejor lo ven como cálculo y generalmente se ve en el cálculo de porcentajes pero el inverso no se toca tanto…pero la mixta, que es la triple igualdad de proporciones ya es “para matarlos”.

- L: Bueno Catherine. Eso ha sido la entrevista. Agradezco mucho su colaboración. Hemos concluido.

PROFESOR(A) R

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA Sábado 10 de junio de 2017 – 12:05 hrs

R: Buenas tardes mi nombre es RC y soy profesora básica, hace ocho años que ejerzo la profesión. Trabajo en el colegio Sargento Candelaria de la comuna de Cerro Navia.

L: ¿Qué cursos ha atendido ahí en ese colegio, profesora?

R: de 5to a 8vo. Segundo ciclo.

L: Bueno lo primero agradecerle su colaboración.

R: ya

L: Bueno lo que voy a hacer ahora a continuación es pasarle una hojita en la que aparece descrita una situación para que la comentemos ¿ya? Si usted puede describir lo que tiene a la vista...

R: A ver tengo…dice una tabla que señala aristas en un cubo y su volumen, en la cual la arista del cubo empieza desde cero y volumen cero. Y esto va aumentando la arista eh...de forma constante de uno a diez, y el volumen del cubo eh…se va…aumenta también pero eh… aumenta, a ver el cubo aumenta igual que la arista, pero no en la misma forma que lo hace la arista, el volumen.

L: ¿Qué más tiene en la hoja?

R: También aquí hay un gráfico en donde se ve una…un gráfico cuyos puntos pasan por el cero y no se ve un… un gráfico lineal.

L: Ya ¿a qué se refiere con eso?

R: Que no va eh…en aume- aquí se ve un gráfico que va en aumento pero no en forma constante, porque hay…hay un momento que a de cero a, podríamos decir, a 2,5 donde se va como manteniendo y después se produce el aumento, asciende.

L: Ya. Ahora, mirando estos dos antecedentes ¿qué diría usted que representa esta situación? A ver ¿son dos magnitudes proporcionales o no son proporcionales?

R: Yo diría que no son proporcionales.

L: Y ¿en qué se fija para decir eso?

R: En la curva.

L: ¿Más en la gráfica que en la tabla?

R: Más en lo visual que en lo que está en los datos mismos que señala.

L: ya ¿cómo lo hace? Un poco si puede explicar en qué…en qué aspecto

R: Sé que en el gráfico hay unas coordenadas, que una me señala lo que es la arista y lo que es el volumen. Entonces de acuerdo a eso, el gráfico, por ejemplo en la coordenada de la arista señala que está en…parte en cero, y también el volumen está en cero, pero luego va…aumenta uno, y ese uno eh…el otro también es uno, por lo tanto se mantiene la curva. Después avanza de 2 y el otro está en 8. De 2 en 8, dos y en ocho, el volumen. Y el volumen es 8. Igual se ve como una pequeña tendencia, o sea, no se ve como muy claro.

L: ¿Pero usted puede ver bien? ¿Está segura cuando dice que no era proporcional?

R: Si, porque en el sentido de que no aumentan de la misma manera.

L: Ya.

R: No no…Hay una parte que no aumenta como debiera. Si me refiero yo a que proporcional… a lo mejor en…sí es proporcional si aumentan en ambas, eso sería proporcional, porque en las dos aumenta. Bueno, van aumentando, bueno salvo acá que se…cero en cero, después aumenta una y una, después a 2 y se aumentó a 8, a 3 y a 27. Ahí vemos que, en el gráfico se ve que las dos, ambas aumentan.

L: Ya.

R: Si ambas aumentan, en ese sentido se podría decir que es…que haya un aumento, pero proporcional. Uno tiende a entender que es proporcional cuando las dos aumentan en la misma constante, en la misma forma. Y aquí se ve que no lo hace.

L: Ya. Si tuviera que elegir entre la tabla o la gráfica ¿con cuál preferiría contar para hacer ese análisis?

R: Es que yo…con el gráfico.

L: A usted le da más luce, más claridad el gráfico.

R: Sí, más que la tabla.

L: Y según el gráfico ¿usted tiene una conclusión más definida?

R: Es que eso es lo complicado porque la tabla es más claro, pero yo voy viendo siempre señalando la arista y éste el volumen, por lo tanto si era la arista señalaba cero, cero, no había ningún problema. Después subió a uno, el otro también uno entonces se mantiene aquí en este nivel. Lo que sí que los números, por ejemplo del gráfico, no están como tan eh…están demasiado espaciados. Entonces no me puede mostrar la parte, en este gráfico por lo menos, el volumen que yo por ejemplo en 8 ¿Dónde está el aquí para decir que hacia acá vamos a estar en 2 y después vamos a estar en 8? Entonces, no me permite el gráfico en todo caso, este gráfico, ver ese detalle.

L: ¿Pero que espera? Si la relación fuera proporcional ¿qué esperaría ver usted como imagen visual?

R: Algo que…algo directo que aumente, que no se provoque esta como aplanamiento, ¿eso?

L: Ya.

R: Y que aumente y que vaya como en el mismo…aumentando de la misma… los mismos espaciados los puntos.

L: Según ese gráfico ¿usted qué diría? Si tuviera que jugársela.

R: Este gráfico es…lo único que yo le puedo asegurar mirando este gráfico es que aumenta. Que las variables aumentan, que ambas aumentan.

L: ¿En el mismo sentido o en el sentido contrario?

R: No, en el mismo sentido.

L: ¿Y eso no basta para que sean consideradas proporcionales?

R: Es que la proporción es…generalmente yo la veo desde el punto de vista de que ambas aumenten en la misma proporción.

L: Ya y eso visualmente ¿cómo se ve? Cuando eso ocurre, cuando aumenta en la misma proporción

R: Me va a dar un gráfico lineal.

L: Cuando se refiere a lineal, en término de forma ¿qué significa?

R: en término de forma eh…una línea recta…

L: Ah una línea recta

R: Sí, no una curva

L: ¿Cualquier línea recta? ¿O alguna línea recta en particular?

R: No, una línea recta que…particular que pase por el cero.

L: ¿Es requisito que pase por el cero?

R: ¿Para que sea proporcional?

L: Sí

R: Sí, yo diría que sí.

L: Esta pasa por el cero

R: Si, pero es que ese es uno de los requisitos. Pero no tiene todos.

L: Ah ya ¿Cuáles le faltaría a esta figura?

R: La parte lineal.

L: ¿Y la tabla? Si miramos la tabla ahora ¿En qué se fija para saber si las columnas con numeritos están dando cuenta de una relación proporcional o no?

R: Porque por ejemplo a mí, lo que yo tengo entendido de proporcionalidad es que si yo comparo, por ejemplo…hago la proporción cruzada.

L: Ah ¿Cómo así?

R: Dos por uno dos, y ocho por uno ocho. Dos por uno y ocho por uno, se supone que en las proporciones me tiene que dar igual valor. Y esa no me da igual valor.

L: Pero eso… ¿Eso lo tengo que hacer con las primeras o puede ser cualquier par de líneas?

R: Cualquiera.

L: A ver veamos por ejemplo esta que dice dos ¿y qué dice ahí? ocho

R: Ocho

L: Y eh… incluso podría ser saltado ¿o no?

R: No

L: ¿Tienen que ser dos consecutivas?

R: Sí

L: Ya, veamos por ejemplo ésta dos y ocho, y tres y veintisiete

R: Once por tres veinticuatro y veintisiete por dos ya no me da

L: Da cincuenta y cuatro. Entonces ¿Qué concluye usted con eso?

R: Que no son proporcionales. Que hay un aumento pero no son proporcionales. No aumentan en la misma proporción ambas.

L: Entonces, toda esta situación de la arista del cubo y su volumen sería una situación de no proporcionalidad ¿sí?

R: Arista del cubo y su volumen

L: Si, la arista, si es lo que está aquí, esta situación son proporcionales según su...

R: No, o sea hay una relación en el sentido que…que sí, que uno aumenta la arista obviamente que va a aumentar el volumen. Pero lo que sí que no considero que no aumentan en la misma proporción.

L: Pero si usted tuviera que elegir respecto si es proporcional o no es proporcional ¿Qué elegiría? O si un estudiante suyo dijera “yo considero que esta es una relación proporcional” ¿usted diría que el alumno se equivocó?

R: Sí

L: Y si él dice…otro niño dice “no es proporcional” ¿Con quién estaría más de acuerdo usted?

R: Con el que dice que no es proporcional.

L: Ya. Veamos la segunda situación. Esta es la situación de un padre y un hijo o una hija, da lo mismo el género. ¿Qué ve usted en la hojita?

R: Aquí, bueno esta es la recta que esperaría yo que hubiera salido en la anterior, pero esta recta no pasa por el cero.

L: Ya.

R: Lo que sí es que yo veo que hay una proporción entre los puntos, y es lineal.

L: ¿Entonces diría que esta es una relación de proporcionalidad?

R: Por la recta sí, pero me quedaría la duda que no pasa por el cero.

L: Ahora la pregunta es si tiene que cumplir ambos requisitos o sólo basta que cumpla uno

R: Para proporcional tiene, puede cumplir un requisito. Porque está proporcionalidad directa o proporcionalidad inversa. Entonces podría decirse que esta es una…que no es proporcional.

L: ¿Diría que no es proporcional? ¿Por qué?

R: Porque ya miré la tabla, y siguiendo con mi punto de vista anterior me da lo mismo, me pasa lo mismo que la otra, lo otro sentido de la tabla

L: Se refiere usted aquí al tema de los cocientes

R: Sí, yo creo que a lo mejor me fijo demasiado en eso y no estoy mirando otro detalle

L: ¿O sea a usted la tabla le confirma más? ¿Le da más seguridad?

R: Sí, en ese sentido sí

L: Y cuando mita la gráfica como que intuye pero le falta certeza parece

R: Sí, es que es como en la tabla están como los datos y acá [gráfica] está como lo que, que es lo que me representan los datos. Entonces claro yo miro, de repente miro más lo- miro más la imagen, pero si me voy a mirar los datos ahí me doy cuenta si es como más proporcional o no es proporcional.

L: Ahora usted cuando aprendió este tema ¿cómo lo vio más? ¿lo vio más visualmente, lo vio más así gráficamente, lo vio más en tabla o lo vio más como productos cruzados como una cosa más aritmética?

R: Como más aritmética.

L: Ya

R: Siempre la proporcionalidad la he visto como más aritmética. Más que ver gráficos, más que ver sí

L: ¿O sea tiene más familiaridad con lo numérico que con lo gráfico?

R: Si, o sea los gráficos siempre han estado pero lo que es numérico en sí es lo que me da la proporcionalidad.

L: Ya. En el caso de esta situación ¿usted diría que es proporcional o no proporcional?

R: La edad del padre aumenta un año y la edad del hijo aumenta un año, ahí sería proporcional

L: Ya. Pero no fue lo que me dijo al principio

R: No, es que me estoy (ríe) ahora me estoy yendo…

L: (ríe) Está dudando, Está dudando.

R: Estoy dudando. Por qué estoy dudando, una, que cruzado no me da. Pero si yo lo veo en proporción que aumenta, esta aumenta un año y el hijo también aumenta un año, entonces en ese sentido ambos aumentan en la misma proporción de…

L: ¿En la misma proporción o en la misma cantidad?

R: En la misma cantidad. El padre aumenta un año entonces el hijo también un año

L: ¿Hay alguna relación numérica que usted conozca que le dé certeza de que es una relación directamente proporcional?

R: Es la cruzada. Es siempre la que me he fijado, que digo si…a ver, no, hay una cosa, aquí estamos hablando de diferentes cosas porque cuando es cruzada uno habla de lo mismo, y esta es la edad del padre y la edad del hijo.

L: Ya

R: Entonces cuando yo por ejemplo, yo estuviera hablando del padre, por ejemplo si el padre tuviera 26 ¿qué edad tendrá a los…tiene 26 en 1980 ¿qué edad tendrá en 1990?

L: ¿diez años después?

R: Diez años después, eso sí que es cruzada y es proporcional porque ahí yo estoy hablando de él mismo, de la misma persona que está siendo…en cambio acá no porque allá el hijo, el padre y el hijo, yo no puedo decir que el padre a la edad que tenga 27, el hijo va a tener uno, si el padre cuando tenga 28, el hijo va a tener 2.

L: Ya. Cuando el hijo tenga veinti…

R: O sea el padre tenga, por ejemplo que tiene 27. A los 27 años el hijo tiene un año. Cuando el padre tenga 29, va a tener 3 años. Eso me da que es proporcional. O sea proporcional en el sentido de que aumenta. Van aumentando un año el padre y aumenta un año el hijo.

L: ¿Pero ahí se produce el producto cruzado del que usted me habla?

R: No, porque en el producto cruzado, las variables tienen que ser, tiene que haber una relación en…hm igual aquí poh.., veintiséis uno, veintisiete… Porque como el ejemplo que le di anteriormente, si el padre tiene 27 en 1980, yo eso lo hago cruzado, o con las notas. ¿Ya? 36 preguntas un 7 ¿Cuántas preguntas serán…respuestas buenas? 26 respuestas buenas, ahí voy con la proporcionalidad directa.

L: Ya. ¿Y este caso no se parecería a ese?

R: No. Este caso se parece, porque si el papa tiene 27 y el hijo tiene 1, entonces cuando tenga

28 el hijo tendrá que tener 2. Eso sí se parece, sí, sí hay una proporción

L: Me ha ido dando respuestas (risas)

R: Si. Es en serio.

L: ¿Este tema usted lo considera difícil de enseñar? ¿Le ha tocado enseñarlo?

R: No. No mucho.

L: ¿Usted trabaja más con cursos de primer ciclo?

R: Si, y trabajé mucho con primer ciclo.

L: Y cuando le tocó estudiar el tema ¿desde cuándo recuerda haberlo estudiado? ¿Desde la básica, cuando fue estudiante de escuela o en la universidad?

R: Del liceo, de media podría ser. Pero eso, mucho tiempo.

L: ¿Y le costó aprenderlo eso o?

R: No porque yo soy bien mecánica, ese es mi problema, que yo me aprendo las cosas como mecánicamente, entonces como que me cuesta entender como porqué esto se da por este motivo. Pero por lo mismo que le decía, proporcionalidad yo lo veía cruzado y decía “ah ya estos aumentan proporcionalmente”

L: Y si le tocara enseñar este tema ¿Cómo se sentiría, complicada?

R: Media complicada, porque ahora que le estoy explicando a usted, la verdad es que yo no tengo claro cuándo algo es proporcional (ríe) o cuándo no es proporcional.

L: Ya, y ahora el concepto de razón ¿lo ve relacionado con esto que estamos conversando? Razón, proporción

R: Ah sí bueno, las razones son cuando uno habla de dos cosas iguales o de dos magnitudes

L: ¿Por ejemplo?

R: Por ejemplo una razón podría ser la cantidad de lápices en la razón de dos magnitudes, cuánta cantidad de lápices hay con respecto a la cantidad de gomas.

L: Ya. Creo que lo normal sería, sería que fuera ¿cuánto?... En una receta por ejemplo…

R: Ah en eso por ejemplo: el arroz. La cantidad una taza de arroz con dos tazas de agua

L: Y ahí ¿cuál sería la razón?

R: 1 es a 2

L: 1 es a 2. Ahora ¿usted ve que ese concepto de razón esté presente en este tema?

R: La edad del padre si es 27… Hm No, no.

L: Ya, esto que usted hace cuando multiplica cruzado ¿por alguna razón en especial?

R: Es una formula, un mecanismo

L: Que no supo de dónde salió digamos

R: No, o sea el mecanismo que sé que, por ejemplo las notas. Yo sé que la nota el máximo es un 7. Con tanto puntaje va a tener un 7, si no lo tiene vamos a la escala y vamos bajando.

L: Ya, y ahí tiene que guardarse una cierta proporcionalidad dice usted.

R: Eso guarda la proporcionalidad para el que sacó menos puntaje, para el que saco entonces ahí, ahí claro. Ahí va a tener la proporcionalidad, es de acuerdo a la proporcionalidad, para darle la nota al estudiante.

L: Ya, eso sería estimada R.

R: Ya, muchas gracias

L: Gracias a usted pues (risas)

PROFESOR(A): C

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA Sábado 10 de junio de 2017 – 13:05 hrs

- **C**: Bueno, mi nombre es C, soy profesora de educación general básica. Trabajo en el colegio Santa Juliana en Avenida Recoleta. Salí de la Universidad el año 2009 por lo tanto tengo más de cinco años de experiencia en educación.

- **E**: Bueno…muchas gracias Claudia por su colaboración y tal como le contaba, en esta entrevista lo que vamos a hacer básicamente es revisar dos situaciones en las que hay cantidades relacionadas. Lo que le voy a pedir es que las vea y describa que es lo que está viendo, lo que tiene a la vista y después determine si eso corresponde o o a una situación de proporcionalidad directa. Le paso la primera hojita.

- C: Acá yo veo una tabla con los datos de la arista del cubo, el volumen del cubo y el gráfico. Mmh. A simple vista los datos… yo veo que en los datos hay una relación en que los datos aumentan, la variable de la arista del cubo con el volumen del cubo van aumentando y si veo el gráfico veo que…claro, hay un aumento en los datos…podría decir que hay una relación directa pero no podría decir que es proporcional por el tema de que al ver el cociente entre las dos magnitudes no veo algo que sea constante.

L: ¿Cuando habla de cociente a qué cociente se refiere?

C: Me refiero a la división entre el dato de la arista del cubo y el volumen del cubo.

L: Ya. Por ejemplo que cociente asía mentalmente ha hecho..?

C: por ejemplo eh… de 3 en 27 no veo que sea el mismo resultado de 2 dividido en 8. Eh… y si veo el gráfico claro, veo que hay una curva, hay un aumento, pero no veo que sea lineal.

L: ¿A qué se refiere con lineal?

C: Que los puntos que van el gráfico, que se aprecian, vayan en forma recta.

L: Ah. Ya. Yo me fije que Ud. empezó a mirar la tabla antes que al gráfico.

C: Claro

L: ¿Encuentra más información o más evidencias, en la tabla o en el gráfico? Si le dieran a escoger, le van a mostrar una relación que Ud. no conoce mucho y le dicen qué prefiere: ¿le pasamos la tabla con los datos o le pasamos la gráfica…?

C: Yo prefiero la tabla con los datos porque a partir de la tabla puedo empezar a inferir, a hacer un cálculo o empezar a representarlo de alguna forma para ver si hay alguna relación o qué tipo de relación tienen.

L: ¿La tabla le dice mucho más a Ud. que un gráfico?

C: Si, me dice mucho más.

L: Ya, en este caso Ud. empezó a hacer los cocientes

C: Claro, empecé por ver, por ejemplo los datos de la arista, el volumen y el cociente entre los dos datos para poder ver si,… claro la relación entre ellos es constante. Si se repite… a lo largo de todos los datos…

L: ¿Y en este caso?

C: En este caso yo veo que hay una relación directa, que ambos van aumentando los datos, la arista va aumentando, el volumen va aumentando pero no veo que sea constante. El aumento entre el primero y el segundo se repita…el tercero se repita…

L: Ya. Pero ¿Ud. qué esperaba encontrar cuando hizo estos de las divisiones, de los cocientes?

C: Que en el fondo me diera un mismo número.

L: Ah…ya. ¿Y ahora, en este caso?

C: no, no da un mismo número. Yo podría…yo veo una relación directa pero no proporcional.

L: Aja.. Ahora en la gráfica, si no dispusiéramos de la tabla pero dispusiéramos de la gráfica..

C: Si solo dispusiéramos de la gráfica podría decir que, claro, los datos van creciendo pero no sabría decir si lo que van creciendo es constante.

L: ¿Entonces con la gráfica no habría podido concluir que no era proporcional?

C: Claro, no habría podido concluirlo.

L: Ya. ¿Y cómo ser vería una relación proporcional en la gráfica si lo fuera?

C: Si fuera una relación proporcional yo la vería en aumento pero ee…como igual…Como que se repetirían los mismos pero siempre hacia arriba.

L: y ¿Visualmente eso…?

C: eso visualmente lo veo curvo…

L: pero si no fuera curvo…

C: mm…

L: ¿El que sea curva le hace pensar a Ud. que eso no es proporcional?

C: A simple vista no…claro.

L: ¿Y si fuera recto?

C: me es más fácil pensar que… sea proporcional, que sea más recto.

L: ¿Pero no le da más seguridad?

C: No me da seguridad claro.

L: O sea ¿tiene más clara la situación en la tabla que en la gráfica?.

C: Claro, que en la gráfica.

L: O sea si hubiéramos dispuesto sólo de la gráfica no se habría atrevido a afirmar lo que afirmó cuando vio la tabla. Cuando vio la tabla dijo es directa y no es proporcional.

C: Claro, no me atrevería a indicar una relación directa proporcional con solamente el gráfico. No, no me atrevería. Porque en los gráficos…gráficos hay el resultado de algo y esa información viene, se supone viene de los datos de la tabla.

L: Ahora, ¿Ud. sabría, con los datos de la tabla, construir el gráfico?

C: Si.

L: ¿Cómo lo haría

C: (permanece pensativa en silencio)

L: ¿Cómo se hizo la gráfica a partir de esos datos?

C: los datos…

L: ¿Para qué me sirvieron los números de la tabla? ¿Cómo es el mecanismo para trasladar esos números a la gráfica?

C: Porque uno corresponde al eje X y el otro corresponde al eje Y y de acuerdo a eso se puede ordenar.

L: por ejemplo es par de ahí, el 2 y el 8. ¿Lo ve Ud. ahí en la tabla?

C: Si veo las aristas, el 2, y veo...

L: ¿A qué elemento de la gráfica correspondería ese (2, 8)?

C: Correspondería…eh…dos… más o menos por acá…

L: Voy a preguntarle otro más claro, por ejemplo, el seis…

C: El seis…claro, la arista 6 y el volumen es 216…más arriba del 200…un poquito más arriba…

L: ¿Entonces que sería eso?

C: Sería como la coordenada

L: ¿Las coordenadas de qué?

C: Serían las coordenadas de la arista que es 6 y del volumen que es 216…Justo estaría marcado el punto allí…

L: Ah…ya, sería ese punto que aparece allí en el cruce de doscientos y tanto y el 6… Entonces cada una de esta parejas…

C: …están representadas por los puntos…las diez parejas están representadas por diez puntos. Se logran ubicar los mismos datos de la tabla en un mismo gráfico en realidad

L: ya… solo que aca en la tabla puede hacer como los cocientes pero en la gráfica…

C: en la gráfica no puedo hacer los…no plasmo en la gráfica los cocientes… los cálculos…los datos de la tabla. Los datos de la tabla los plasmo, por decirlo de alguna forma, en el gráfico.

L: Ya. Esa es como la principal dificultad que Ud. ve en el tránsito de la tabla al gráfico…

C: Claro, porque para mí…yo estoy representando en el gráfico las datos de la tabla pero no estoy haciendo un análisis más profundo de ver si hay alguna relación…

L: Ya. Ahora ¿esto es para Ud. un tema difícil de enseñar?

C: Si, para mí es un tema complicado porque yo tengo… porque yo tengo una formación de básica, de enseñanza media, de la universidad con un concepto que es super erróneo…

L: Ya…

C: Que habla de… de las proporciones, las razones…habla más bien como la razón como la división o el cociente entre dos razones pero no te explica más allá. Entonces uno ahora… ahora he aprendido en forma…empezar a relacionar, a leer un poco la información, a ver qué significa que tenga relación…que no tenga relación, pero recién ahora, con lo que estamos aprendiendo en la Universidad…

L: ya..

C: …pero no. Por lo menos a mí me enseñaron muy mecánicamente la división… el resultado de la división entre esto y esto otro….

L: ya. Y en el caso de la razón, ¿Para Ud el concepto de razón cuál es?...o ¿Cuál era?

C: Era…como más bien parecido a fracción

L: Ya…

C: La razón es una fracción, y nunca haciendo una distinción entre una cosa y otra. Porque a lo mejor lo que he aprendido ahora es que son parecidas pero no significan lo mismo.

L: Ya. Ahora voy a pasarle otra hoja. Tiene ahí como título "Edad padre e hija". Si pudiera Ud. describir lo que está viendo.

C: Eh…Hay una tabla que muestra la edad del padre y que va de uno en uno…26, 27, 28, 29, 30…hasta 37, y la edad del hijo que va de 0 hasta los 11 años. Y después aparece el gráfico que muestra la edad del padre y la hija.

L: ¿Qué podría decir Ud. de esa situación? ¿Hay proporcionalidad o no hay proporcionalidad?

C: A mí juicio esta relación me parece que…a simple vista yo podría decir que la edad del padre es independiente de la edad del hijo. Entonces establecer una relación es complicado porque estoy hablando de cosas distintas, cosas que no dependen una de otra. Entonces yo podría decir que la edad del padre aumenta, claro, la del hijo aumenta, podría decir que hay una relación directa, en el sentido en que van aumentando eh… cada dato va aumentando, pero no podría decir que hay una relación proporcional porque uno no depende del otro ni viceversa, son cosas independientes

L: Ya.

C: O sea, a juicio de razonar, si me hablan de la edad del papá o de la edad del hijo, son cosas independientes. Entonces esto no podría establecer una relación…por ejemplo proporcional.

L: Ya. Ahora ¿Qué diría usted mirando la tabla, en este caso? Analizando los datos numéricos

C: Claro que hay una relación directa pero pero no proporcional porque <ininteligible (12:22)> Por lo tanto como son variables independientes no hay una…una constante que se repita a lo largo.

L: Cuando me habla de constante se refiere aquí a lo…

C: Al…Al cociente entre la edad del padre, uno de los datos de la edad del padre y uno de los datos de la edad del hijo.

L: A ya ¿Por ejemplo?

C: Por ejemplo 26 la edad del padre y la edad del hijo 0 eh…

L: Pero esa división no se puede hacer

C: Eh…claro, pero si yo miro más abajo por ejemplo, la edad del padre 30, la edad del hijo 4 eh…

L: ¿Y el cociente ahí cuál sería?

C: Eh…ahí sería eh…

L: 30 dividido por…

L y C: por 4

C: 7 coma y algo

L: ¿7,5?

C: Hm…si, mas menos. Lo mismo pasa más abajo, 32 dividido en 6 tampoco me daría lo mismo

L: Ya, o sea los cocientes…

C: Me da 5 coma algo

L: Ya, entonces los cocientes usted diría que no son los mismos

C: No, no son los mismos, para mí que son…

L: ¿Y eso qué significa?

C: Que…que son eh…datos independientes y que por lo tanto yo no veo una relación proporcional.

L: Ya ¿y la gráfica?

C: Y con la gráfica…claro, yo veo una un los datos que son lineales, que amb- los datos van aumentando, yo ahí podría justificar y decir que hay una relación directa que ah…los datos en sí, ambos datos van aumentando, pero…eh…no proporcional po, porque no aumentan en…en rangos <ininteligible (14:15)>, por ejemplo la edad del padre 27 y la edad del hijo 1, no aumenta los mismo abajo que la edad del padre 28 y la edad del hijo 2, no hay un aumento que se repita… varias veces.

L: Ya, pero… usted me decía antes que el que fuera una curva, los puntos estuvieran puestos como curva, le hacía pensar que no era proporcional. Ahora, los puntos están todos alineaditos sobre una recta…

C: Sí, si eso estaba viendo que son datos que se ven…

L: eh… ¿Sería proporcional?

C: Yo, podría decir que puede ser directo, porque los datos van aum- van subiendo, van subiendo.

L: Ya.

C: Pero… decir que sea proporcional, no podría decir a simple vista que sean proporcional

L: Ya ¿En qué se fija en la…en el dibujo para saber si es o no proporcional?

C: Eh… Si es proporcional, me fijaría en que los datos fueran eh…como lineales y que pasaran por…por la coordenada (0,0)

L: ¿Y en este caso?

C: No pasan por la coordenada (0,0), se ve que va, el gráfico, del dato de la edad del padre y la edad del hijo, que primero es 0 y es 26.

L: Ya. En conclusión cómo…si usted pudiera decir de que hay un veredicto digamos, respecto a ésta situación ¿cómo la clasificaría?

C: Eh…Yo creo que éste es un es un…un súper buen ejemplo para hacer reflexionar en…en concepto de razón y proporción, para ver si…qué se entiende por razón, qué se entiende por proporción, el tema de directo proporcional o no directo proporcional, porque…a lo mejor, claro, el padre, hijo, familia, pero…pero son independientes pero uno tiende a confundir y decir que pueden tener una relación, no lo piensa más allá. Entonces…es un ejemplo que que…que te hace cuestionar y que te hace pensar, y que…como uno, ahora ha aprendido a cuestionar antes de decir que es directo o no es directo, podría decir que, claro, es directo porque aumentan ambos datos, pero no es proporcional porque no aumentan lo mismo.

L: Ya, perfecto eh…eso sería C, le agradezco su su colaboración y su paciencia.

C: No, de nada.

PROFESOR Z

TRANSCRIPCIÓN ENTREVISTA Sábado 10 de junio de 2017

Z:Mi nombre es Z, soy profesor básico. Y tengo más de 25 años de servicio aproximadamente. He trabajado en la educación básica, primer y segundo nivel, y también compartiendo pre básica, y enseñanza nocturna también. Esa ha sido mi experiencia como maestro. Como docente.

L: Ya profesor, un poco lo que le quería plantear en esta entrevista, aparte de agradecerle la paciencia, revisar algunas actividades, algunas situaciones donde esté implicada la proporcionalidad. Para conocer cómo usted, digamos, discrimina o distingue cuando algo es proporcional o no. Entonces le voy a pasar una primera hojita en la que aparece un cubo, y se relaciona ahí el largo de la arista del cubo con el volumen del cubo. Entonces le paso la hojita para que usted la mire ahí, y dígame más o menos qué ¿qué le dice esta situación?

Z: Bueno aquí hay una tabla ¿no es cierto? Con dos columnas y obviamente al ver la tabla uno como que concluye rápidamente que hay una relación directa entre la arista del cubo y el volumen del cubo. En la medida que va aumentando la arista también aumenta el volumen del cubo, por lo tanto podríamos decir que hay una relación directa... y al observar también el gráfico hay una relación directa, no sabría explicarme [eso] si… si es una relación proporcional, porque por la gráfica misma me mu- muestra el gráfico…

L: ¿Qué ves en la gráfica, por ejemplo qué…?

Z: Quizás porque…

L: Porque una se va desfilando

Z: Se va desfilando una especie de semicírculo que va subiendo, que va ascendiendo. Obviamente que a mayor cantidad de aristas que tenga el cubo, también va subiendo, va aumentando la cantidad de su volumen. Pero como no veo una línea recta por eso quizás me causa una sensación de inseguridad de señalar que es una relación directa y proporcional.

L: Ya y si fuera una recta ¿pensaría que es proporcional? O sea…

Z: Sí, me daría esa sensación de que es absolutamente proporcional la cantidad de, como va aumentando de a 2 la cantidad de aristas, dice 2, 4, 6, 8 en esa misma…y después va subiendo 200, 400, 600. Eso me atrevería a señalar que es directa y proporcional.

L: Ya, entonces por ejemplo usted me dice que la… ¿Ve alguna relación por ejemplo entre estos valores que aparecen acá en la tabla y algún elemento aquí del gráfico?

Z: Sí bueno, yo los veo totalmente relacionados, o sea, veo que hay una cantidad de- se tomaron algunas cifras, veo algunas cantidades para hablar de las aristas y también del volumen, aunque si bien es cierto no está expresada la unidad, pero me imagino que estos son centímetros y estos pueden ser litros…

L: O cen-

C y L: Centímetros cúbicos

L: Claro, ahora ¿usted tiene más o menos claridad de cómo se construyó esta gráfica a partir de esos datos?

Z: eh…sí, o sea uno puede suponer un poco por la experiencia, va viendo desde cantidades, va viendo en la medida que va aumentando la cantidad despendiendo de la arista, va aumentando también el volumen del cubo.

L: Ya. ¿Qué otro, qué dato le faltaría para saber si, si esa gráfica o esa tabla habla de una relación proporcional?

Z: Eh bueno, un poco por lo que hemos estado aprendiendo o lo que he estado aprendiendo yo diría que faltaría mejor obtener el cociente que se puede obtener, y a partir de ese cociente podría observarse si es que hay una relación…una relación continua o permanente de lo que va aumentando en la medida que va aumentando la cantidad de aristas, si es que también esa ese guarismo que se entrega podría ser continuo o podría sacarse una conclusión también con respecto a eso mismo.

L: Cuando me habla de cociente ¿de qué cociente sería, qué…?

Z: Cociente entre las dos, entre las dos cifras, entre las dos columnas, entre la arista y el volumen, un cociente que pueda resultar de ellos

L: Ya, por ejemplo ahí mismo en la tabla ¿qué cociente cree usted que podría calcular para…?

Z: Bueno aquí probablemente sería 0, después sería 1, después podría ser eh…

L: ¿Pero el cociente entre qué número sería, así como…?

Z: A ver es que entre 0 y 0, 0 obviamente, entre 1 y 1, 1, entre 2 y 8 eh…si estuviera invertido sería 4 obviamente

L: Claro

Z: Entre 8 sería 9, eh…8 eh…entre cient- sería 25, y así sucesivamente pero no hay…

L: ¿Ir haciendo los cocientes por cada fila?

Z: Ir…claro

L: ¿Y qué esperaría encontrar usted si hiciera eso?

Z: Si se fueran…Si la cantidad que surgiera, si el cociente que surgiera fuera el mismo permanentemente podríamos decir que hay una proporcionalidad. Ahora si fuera aumentando también en la misma cantidad podríamos decir que es una proporcionalidad ascendente, o si fuera descendiendo también en la misma cantidad podríamos decir que…

L: Ya. Pero usted ahora que me fue explicando esto de los cocientes y me fue dando ejemplos, fue obteniendo cocientes.

Z: Fui obteniendo cocientes, sí.

L: Ya y esos cocientes eran… ¿eran el mismo?

Z: No pues, no, yo creo que no había relación entre uno y otro, no.

L: Ya y eso ¿serviría para concluir algo respecto de la proporcionalidad o no?

Z: Al menos con lo que yo manejo solamente podría decir que es una proporcionalidad directa, pero no…

L: ¿no aseguraría que es…?

Z: No, no podría asegurar…

L: ¿O no lo sabría?

Z: No, no lo sabría

L: ¿Con certeza no?

Z: Con certeza, con certeza no podría asegurarlo por lo, por el desconocimiento que tengo frente al…

L: Pero usted mismo decía que si tuviera los cocientes, y si los… me decía que usted esperaría que si los cocientes son…

Z: Si es el mismo, el mismo cociente que se obtiene ya me daría una luz en el sentido de que va aumentando en la misma cantidad, y eso me podría decir que es una proporcionalidad directa y proporcional.

L: Ya.

Z: Ahora si la cantidad que surgiera también va aumentando proporcionalmente entre una y otra, también yo podría decir que es una proporcionalidad directa y ascendente.

L: Ya. Ahora en este caso ¿los cocientes son los mismos o no? ¿Da el mismo cociente?

Z: No, no, no da el mismo.

L: Son distintos

Z: Son distintos, son diferentes, claro.

L: Y eso no ¿no basta para saber si eso no es proporcional?

Z: No, al menos por lo que yo observo no la…por la cifra que me…no me daría como una cantidad…porque si tengo 1 después tendría…si fuera 4, después sería 9, después sería 8, no, no me da una relación certeza, certera, al menos a mí para decir que es directamente proporcional.

L: Ya, o sea sería directa

Z: Directa, sí.

L: ¿Y con eso se refiere a qué…?

Z: En la medida que aumenta uno, una de los…una de las cifras que estamos comparando, también aumenta la otra.

L: Ya

Z: Y de manera ascendente, y positiva.

L: Ahora ¿qué le da más información a usted la tabla o el gráfico? ¿Con qué está más familiarizado?

Z: Yo me atrevería a decir que la tabla, he estado más familiarizado con la tabla pero también en la medida que uno ha ido aprendiendo más sobre la materia, también uno se da cuenta que al observar los gráficos, también los gráficos le van diciendo, le van entregando harta información.

L: Ya.

Z: Le van diciendo cosas que son quizás más concretas, más gráficas.

L: Ya, ahora si no tuviéramos la información de la tabla y tuviéramos sólo la información de la gráfica ¿usted llegaría más o menos a la misma conclusión de que es una relación…?

Z: Sí, sí, sí, por supuesto.

L: ¿directa?

Z: Sí, es una relación directa, claro, porque entre las dos, entre las dos variables que son ascendentes ambas, son positivas ambas. Se va observando que en la medida que hay mayor cantidad de aristas hay mayor cantidad de volumen eso está observable.

L: Y aquí también ¿qué esperaría ver usted ahí gráficamente para saber, algo que le diera pistas respecto de la proporcionalidad de la relación?

Z: Yo creo que si yo hubiese visto inmediatamente una línea que es recta y que atraviesa en el vértice me habría dado como una…

L: ¿A qué vértice se refiere?

Z: De la…donde se unen las dos eh…acá en el gráfico

L: Los dos ejes

Z: Los dos ejes, claro.

L: Ese sería el punto ¿qué punto sería ese?

Z: El punto cero

L: El punto cero del sistema de ejes

Z: Exacto

L: ¿Ah si usted hubiera visto una recta…?

Z: Una recta, claro, me habría dado la sensación como más…o como más claridad que estamos hablando de una proporción directa y proporcional.

L: Ya ¿pero así como están las cosas?

Z: No, no me da la misma certeza.

L: Ya.

Z: No me da la misma certeza.

L: Le voy a pasar otra para que también la vea, es esta

Z: Ya.

L: Si pudiera describir lo que ve

Z: Bueno acá tenemos también una eh…dos columnas con información sobre la edad del padre y una segunda con edad del hijo, entonces parte de un padre que tiene desde 26 años y va aumentando de una edad hasta los 37 de un año, y un hijo que va desde los 0 años y va aumentando también hasta los 11 eh… Bueno aquí yo veo también una relación directa y proporcional, porque en la medida que va aumentando cada uno 1 año, obviamente el otro también va aumentando 1 año.

L: Ya.

Z: No hay manera que sea distinta, salvo que en algún minuto se interrumpa la edad de alguno de los dos

L: Ah por fallecimiento dice usted

Z: Claro, ahí podría ser. Acá está claro que el padre fue papa a los 26 años y a partir de ahí nace su hijo a los 27, a lo mejor podría ser que a los 26 lo engendró creo, podría ser

L: Cumplió el primer año (risas)

Z: Cumplió el primer año, claro (risas). Y después va aumentando 1 año cada uno, va subiendo 1 año cada uno de vida, padre e hija.

L: Si se fija ¿en qué se fija? ¿Qué le da más información de las dos cosas, la tabla o la gráfica?

Z: La tabla, la tabla como que me da, en este caso como que me habla mejor, porque quizás al ver la gráfica, si no hubiese tenido esto yo, me habría costado a lo mejor suponer de que, bueno partió desde los 20, partió a las 26 años porque obviamente ahí fue padre. La edad del papá. Ahí fue su primer o…no sé si será su primera hija.

L: Ya, y ¿cómo se ve la gráfica, por ejemplo qué figura forma el gráfico?

Z: Bueno aquí se ve como una línea más… un segmento más recto.

L: Ya.

Z: A partir de los 25 va aumentando directamente 1 año más cada vez que cumple años el papá, cumple 1 año más también la hija. Y ahí lo vería como más directa, más proporcional.

L: ¿Sería proporcional en este caso?

Z: Quizás, porque el único antecedente que podría argumentar es que es proporcional porque hay 1 año, cada uno cumple 1 año a la vez.

L: Ya.

Z: Pero a lo mejor la proporción, quizás podría dudar a lo mejor en el sentido de que claro uno se va convirtiendo en una…va aumentando en edad, el otro también, pero uno se va convirtiendo en una persona más mayor o más vieja. No sé cuál sería la reflexión correcta.

L: Pero en el caso anterior, usted me mencionaba que lo que esperaba era una recta, me decía, que cumplía ciertas condiciones.

Z: Claro, pero que pasara por el punto cero. En este caso no porque pasa…parte de los 26 años que es la edad cuando el padre, a partir de ese minuto se convierte en papá. Entonces desde ahí para arriba podría ser. No podría ser en este caso, en ningún caso podría ser del punto cero, no podrían partir los dos del punto cero.

L: Ya, y con esta evidencia ¿Qué diría usted? ¿Qué es una relación proporcional o no proporcional?

Z: No, yo diría que es directa… Pero que sí, sí podría ser proporcional, aunque al ver el cociente que se va obteniendo al hacer la división ahí eh 0, 14, 9… No, no, no, no me que queda claridad de que si es que el cociente puede entregar una información más o menos precisa.

L: O sea, a usted cuando ve la tabla, la tabla le genera duda ¿Sí? ¿No es como, no es concluyente digamos la tabla? Perdón la…

Z: ¿la gráfica?

L: La imagen, no le da seguridad digamos.

Z: No, sí, sí, sí…En ese sentido yo siento que sí que me da seguridad como para determinar sola, obviamente que solo para determinar que es una relación directa.

L: Ya, pero ¿para determinar si es proporcional o no?

Z: No.

L: La tabla, el dibujo no le sirve mucho.

Z: No.

L: ¿Y la tabla?

Z: No, yo creo que la tabla me deja como claro que no, que no es… No es proporcional

L: ¿Por qué?

Z: No es proporcional porque…creo que el cociente que se obtiene entre las dos cantidades no me indica eso.

L: ¿Encuentra usted aquí en esa tabla algún par de números que sean, que den un cociente distinto por lo menos?

Z: Bueno obviamente en el primero da 0, en el 1 da 1, o sea en la segunda columna, perdón fila, daría 1, en la tercera daría 14, ya se vería…

L: Ya, ya no son…

Z: No, después daría 9.

L: Por lo tanto según la tabla ¿le da claridad para emitir un juicio más categórico?

Z: Claro, que es una relación directa.

L: ¿Pero es proporcional o no es proporcional?

Z: No, no es proporcional. Diría yo que no.

L: ¿Pero su principal argumento es la evidencia que obtiene de la tabla?

Z: Claro la tabla y el cociente que me voy imaginando…

L: Si hubiera dispuesto solamente de la gráfica, no se habría atrevido a afirmar que es o no es proporcional.

Z: Es que yo creo que más que la tabla, la lógica a uno le indica que no por el mismo hecho de que…bueno el padre parte a los 26 años y a partir de ese minuto el 27 sería 1 año, los 28 serían 2 años eh… Eso me da, esas dos cifras, esos dos datos, a pesar de que estemos hablando de la edad de ambas personas, no me indica hubiera una relación proporcional, directa sí pero no proporcional.

L: Ya, directa en el sentido que me decía antes, es decir, que cuando uno aumenta…

Z: Claro. En la medida que aumenta uno el otro también aumenta, y en la misma cantidad

L: A ya, el que sea de uno en uno, dice usted

Z: De uno en uno, claro.

L: Ya.

Z: Ahora no es lo mismo cumplir 31 que cumplir 4.

L: Ah no por supuesto.

Z: Claro, si haces una diferencia entre, no sé po entre los 26 y los 36, claro aquí va también eh…si yo noto la primera cifra hasta los 36 obviamente hay 10 años

L: De diferencia

Z: De diferencia, claro. Y aquí también hay 10 años de diferencia, pero…o sea cumplen 10 años pero…y siempre van a tener la misma distancia entre ellos dos, siempre va a haber la misma diferencia de edad entre las dos personas, en la medida que vayan avanzando en el tiempo, se va a seguir estableciendo la misma cantidad de distancia, de años de diferencia.

L: Ya, entre ambos. Y en el caso de la proporción ¿se requiere la diferencia o…si fuera proporcional digamos?

Z: Yo diría que ahí es cuando, bueno por lo que usted me está preguntando…ahí se produce una una reflexión distinta porque eh…entre 10 y 36 podría decir que es como razón casi de 1 a 3 o 3 a 1, en cambio de 26 a 0, de 27 a 1 hay una proporción mucho más amplia. Diría yo, como una primera refle…

L: Ya ¿Cómo una proporción o una razón?

Z: Razón, como una razón, exacto, razón. A lo mejor sería…

L: ¿Y cuál es la idea que usted tiene de una razón? ¿Qué es una razón? ¿Cómo la…?

Z: Yo la interpretaría casi como una… un cociente, una división.

L: Ya.

Z: La interpretaría así. Claro, especialmente porque estamos hablando de 2 cifras que están hablando de lo mismo ¿no es cierto?...Sí, puede que sea una razón, porque ahí…si yo lo dividiera sería 3,6 pero aquí la división sería…sería diferente, bueno sería 0, 2,7, 1,4…o 14 perdón.

L: Ya, esos cocientes que para usted son razones, me dice, que no dan lo mismo por lo tanto eso…

Z: Claro.

L: Esa sería la explicación de que esto no fuera…

Z: Claro, 14…9 y tanto eh…6, 6 por 4, 7 por 4, 6, 7, va aumentando ah sí. Quizás podría decir que tienen relación directa y proporcional a ver. Quizás, a lo mejor si pudiera eh…tener una… una mayor certeza de la… de la cifra del… del cociente que se va obteniendo

L: Ya.

Z: Sí, se podría a lo mejor concluir un poco más en esto, dependiendo de cuál sea, desde desde mi punto de vista, la diferencia entre una cantidad y la otra, si es que efectivamente es…va aumentando proporcionalmente una con respecto a la otra, a la anterior.

L: Ya, usted ve en este, en este tema de la proporcionalidad algo complejo, difícil en su preparación, en su…

Z: Eh…sí y no, o sea, del punto de vista de la lógica no, no lo encuentro difícil, pero de repente del punto de vista estadístico propiamente tal o del punto de vista eh…de las cifras, y de la concep… de la concepción del concepto mismo sí de repente noto una cierta eh… inseguridad.

L: Ya ¿Lo ve como un tema difícil de enseñar?

Z: No, no, no, no, yo creo que si hay un eh…tuviera la oportunidad de preparar una…el tema, especialmente pensando en los estudiantes, en los niños, yo diría que no porque hay alguna, he hecho algunas experiencias con ellos, donde hemos hecho algunas eh… experiencias sobre todo bien concretas, donde hemos por ejemplo trabajado con la edad de las niñas, la edad de los niños eh…sus gustos, entonces los he invitado a hacer gráficos, los he invitado a hacer eh… relaciones entre 2 cantidades, que les ha parecido bastante eh… familiar y les ha parecido eh…simpática a los cabros, como agradable. Entonces se han podido conseguir algunas cosas ahí eh…al establecer 2…comparar comparar 2 cifras.

L: Ok. Listo profesor con eso, le agradezco su colaboración.

Z: De qué profesor

L: Su infinita paciencia

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

NOMBRE 1	NOMBRE 2

A continuación se presentan diversos contextos, matemáticos y cotidianos, en los cuales aparecen dos variables relacionadas. Analice cada situación usando una hoja distinta. Cada hoja debe contener las siguientes partes:

a) Identificación de la situación (Situación 1, Situación 2, etc.)
b) Tabla de valores: tabla de dos columnas (X e Y) con al menos 10 valores en cada columna.
c) Análisis de las propiedades de la tabla (cocientes, productos, constantes, etc.)
d) Gráfico de dispersión usando los valores de la tabla del punto (a).
e) Conclusiones: comentario fundado respecto del tipo de relación detectada[16] y las razones que justifican su opción.

<u>Situaciones a analizar</u>

1. Lado de un cuadrado y su perímetro.
2. Radio de un círculo y su área.
3. Edad de una madre y su hijo
4. Número entero y su valor recíproco[17]
5. Peso de un bebé en gramos y su edad en meses
6. Cantidad de trozos iguales de un tubo de PVC y largo de cada trozo. (Considere tubo de PVC de 6 m de largo)
7. Altura de un avión planeador lanzado de 3000 m de altura que desciende 50 m por cada 500 m que avanza.
8. Cucharadas de agua que se vierten en un vaso cilíndrico y altura del nivel agua en dicho vaso
9. Tarifa a pagar por una carrera de taxi que cobra $300 por cada 200 m recorridos y tiene una subida de bandera de $250
10. Trozos idénticos en que se divide un cuadrado y área de cada trozo

16 La relación puede ser del tipo: directa proporcional, directa no proporcional, inversa proporcional o inversa no proporcional)

17 Ejemplo: el valor recíproco de 4 es ¼. En general el recíproco de n es 1/n