Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

# UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA DESDE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA**

De: Valeria Constanza Bizet Leyton
Profesoras Guías: Elisabeth Ramos Rodriguez
Romina Menares Espinoza
Patricia Vásquez Saldías

Valparaíso, diciembre 2017

A

DIOS

MI FAMILIA

Gracias por su apoyo incondicional y amor.

## Índice

## Introducción

En la década anterior, la mayoría de los países (mundo) se interesó en realizar mejoras al currículo en los contenidos de estadística y su enseñanza en los distintos niveles del sistema educativos (Morin, 2002). Particularmente en Chile, en la enseñanza media los conceptos estadísticos y probabilísticos, son una parte importante del currículo nacional en la educación matemática (MINEDUC, 2009), y su enseñanza debe proporcionar a los estudiantes una manera de pensar, una forma de tratar con los datos y aprender a tomar decisiones.

El presente escrito aborda uno de los objetos matemáticos fundamentales del eje Datos y Azar en la educación media, como lo es la variable aleatoria, pues este concepto da paso a comprender otros temas en probabilidad como función de probabilidad, función de distribución y modelos probabilísticos. Así como también la variable aleatoria permite vincular el ámbito experimental y el ámbito matemático. Ejemplo de ello es observar la temperatura diaria a las 18 horas en Viña del Mar, observar la altura (o el peso, pulsaciones por segundo, etc.) de un grupo de individuos, o cuando nos encontramos con juegos y experimentos en los que utilizamos dados, monedas, etc.

Desde años anteriores, Heitele (1975) propone a la variable aleatoria entre los diez conceptos fundamentales en la enseñanza de la estadística y posiciona a ésta como una de las ideas esenciales en la educación escolar. En la actualidad, Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez (2016) consideran a la variable aleatoria como uno de los conocimientos relacionados con la probabilidad, relevante para entender situaciones de la vida real.

Esta monografía tiene como propósito presentar un Estudio de Clases que aborda el aprendizaje del concepto variable aleatoria desde su carácter funcional, en segundo medio. Así como también proponer una secuencia didáctica que favorezca la comprensión de la enseñanza del carácter funcional de la variable aleatoria en educación media.

En el primer capítulo se da a conocer la problemática de investigación y antecedentes que la sustentan. Además se expone un análisis del objeto matemático variable aleatoria, considerando el contexto escolar y epistemología.

En el segundo capítulo se da a conocer el Estudio de Clases llevado a cabo, con su respectivo análisis a priori, análisis a posteriori y contraste entre ellos.

En el tercer capítulo se presenta una secuencia que favorezca la comprensión de la enseñanza del carácter funcional de la variable aleatoria en educación media.

Finalmente, en el cuarto capítulo se muestran las conclusiones del presente escrito.

# Capítulo 1: Problemática y el objeto matemático

En este capítulo, se expone el problema de investigación, un análisis del objeto matemático variable aleatoria la distancia entre sus saberes, organizados en cinco apartados.

En los tres primeros apartados, se da a conocer el problema de investigación, algunos antecedentes que lo sustentan y los objetivos del monográfico, respectivamente.

En el siguiente apartado se lleva a cabo un análisis desde el contexto escolar, que incluye un análisis del currículo nacional y de textos escolares, así como también la indagación de la variable aleatoria desde el punto de vista erudito, una definición escolar y la distancia entre el saber erudito y el saber escolar.

El quinto apartado aborda un análisis de la evolución histórica epistemológica del objeto en cuestión.

## 1.1 El problema de investigación

La presente monografía aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación media en comprender la naturaleza funcional del concepto variable aleatoria. Es de interés conocer cómo los estudiantes se apropian del concepto aludido a nivel escolar. Esta necesidad surge porque la variable aleatoria parece sencilla de comprender, pero en su definición formal y construcción intervienen distintos conceptos, como función, espacio muestral, sucesos aleatorios, etc., además de sus diferentes representaciones: lenguaje natural, figural y tabular, que la hace tener una gran complejidad para el aprendizaje del estudiante.

En la construcción del conocimiento por parte del estudiante, intervienen componentes epistemológicas, cognitivas y didácticas. Este escrito aborda las distintas dimensiones con la intensión de generar conocimientos del concepto variable aleatoria para la didáctica de la matemática, que contribuyan al proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula.

## 1.2 Antecedentes

En el contexto del currículo nacional (MINEDUC, 2009), el concepto variable aleatoria se introduce en el nivel segundo medio (15-16 años). Además en la guía didáctica del docente para dicho nivel y distribuida por el MINEDUC se menciona con respecto al objeto matemático aludido, que algunos errores de los estudiantes pueden provenir de una inadecuada comprensión del concepto función (Jiménez y Rupin, 2013).

Entre las investigaciones que abordan temáticas relacionadas a la problemática en estudio se encuentra la desarrollada por Pérez y Parraguez (2013), las que afirman que la variable aleatoria al ser enseñada en el nivel secundario presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas existiendo "*Poca claridad de la noción de variable aleatoria y tendencia a asociarla con el mismo significado de variable algebraica (en el contexto matemático, determinista), lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio)*" (Ibíd, p. 590).

Desde el ámbito cognitivo, Nardecchia y Hevia (2003), mencionan que una de las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar en la construcción de la variable aleatoria, es no visualizar el azar en el fenómeno aleatorio que se está tratando de modelar haciendo uso de la variable aleatoria, es decir la dificultad en aceptar la relación entre la aleatoriedad y la variable aleatorio, de modo que esta vinculación entre la realidad y la variable aleatoria (como modelo matemático) puede constituir un obstáculo con el que se podría enfrentar el estudiante.

Desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, para Ruiz (2006), un obstáculo que pueden evidenciar los estudiantes, respecto al surgimiento y desarrollo del concepto aludido es "*dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad. Tradicionalmente ha sido más tratada como variable (magnitud aleatoria*)" (Ibíd, p.156).

Por su parte, Landín y Salinas (2016), en su investigación centrada en describir el desempeño de los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de libro de textos, antes y después de un periodo de enseñanza aprendizaje, concluyen que pocos estudiantes lograron de identificar y representar una variable aleatoria mediante notación algebraica (en el sentido de lenguaje simbólico).

Aún más, Ortiz (2002) evidencia en los textos escolares ausencia de la noción de variable aleatoria, posiblemente debido a la limitación de tiempo y espacio, así como también confusión entre variable aleatoria y variable estadística. De esta manera, la poca claridad del objeto matemático, impide relacionar el concepto en cuestión con su significado funcional, no aportando a la construcción del conocimiento en los estudiantes.

## 1.3 Objetivos del monográfico

Con la finalidad de aportar a soluciones prácticas a dicha problemática este trabajo tiene el objetivo:

- Presentar un Estudio de Clases que aborda el aprendizaje del concepto variable aleatoria desde su carácter funcional en segundo medio, para aportar al desarrollo profesional.

- Proponer una secuencia didáctica que favorezca la comprensión de la enseñanza del carácter funcional de la variable aleatoria en educación media.

## 1.4 Análisis desde el contexto escolar

A continuación se presenta un análisis del objeto matemático variable aleatoria desde el contexto escolar y considerando aspectos epistemológicos.

### 1.4.1 Análisis curricular

En el contexto del currículo nacional (MINEDUC, 2009), el concepto matemático en estudio se introduce en el nivel segundo medio. Allí se presenta el concepto de variable aleatoria, y se realiza la distinción entre las variables aleatoria de tipo discreta y continua. Se pretende que los estudiantes apliquen dichos conocimientos en la resolución de problemas.

Para lograr construir objeto en cuestión, se requieren de algunos contenidos previos como experimento aleatorio, espacio muestral asociado y probabilidad teórica. Aquellos son abordados en el nivel séptimo básico, con la finalidad que el estudiantes determine la probabilidad de un evento equiprobable asociado a un experimento aleatorio, mediante la regla de Laplace.

Además en octavo básico, se aporta otro contenido relevante para la construcción de la variable aleatoria, la noción de función, en el contexto de introducir el estudio de la función lineal y afín. Mientras que en el nivel primero medio, es cuando existe un mayor aporte, se presenta el concepto de función considerando los conceptos de dominio, recorrido y codominio. Estos son fundamentales, pues el concepto en estudio, es una función, con ciertas características, su dominio es el espacio muestral de un experimento aleatorio y su recorrido un sub-conjunto de los números reales.

En segundo medio es comprendido el concepto de variable aleatoria (v.a), mientras que en los siguientes niveles de educación media es aplicado.

Particular en tercero medio se utilizan las variables aleatorias de tipo discreta, para abordar el concepto de función de probabilidad de una v. a. discreta (función de cuantía), pues el dominio de una función de probabilidad corresponde al recorrido de la variable aleatoria. También el concepto en cuestión, se emplea para introducir el estudio de la función de distribución de una v. a discreta, ya que ella es definida a partir de una v. a discreta y la función de probabilidad de esta variable. Además en tercero medio el estudiante debe lograr calcular la esperanza, desviación estándar y varianza de una v. a. discreta y aplicar ésta para comprender el modelo de distribución binomial, un modelo de probabilidad para v. a. discretas.

En el nivel cuarto medio, es aplicado el concepto de variable aleatoria, pero las de tipo continua. Inicialmente es definida la función de probabilidad de una v.a. continua (función de densidad), para la cual es necesario el concepto de v.a continua y el de función. Cabe destacar que este tipo de función es trabajada a través de la interpretación geométrica de la integral, es decir, como el área bajo la curva de la función. Para concluir el estudio de la v.a continua, ésta es utilizada para comprender el modelo de distribución normal, un modelo de probabilidad para v. a continuas. Es importante mencionar que para este nivel, en el currículo, no se hace mención al cálculo de esperanza y varianza para una v.a continua.

La información presentada se resumió en el esquema expuesto a continuación (figura 1).

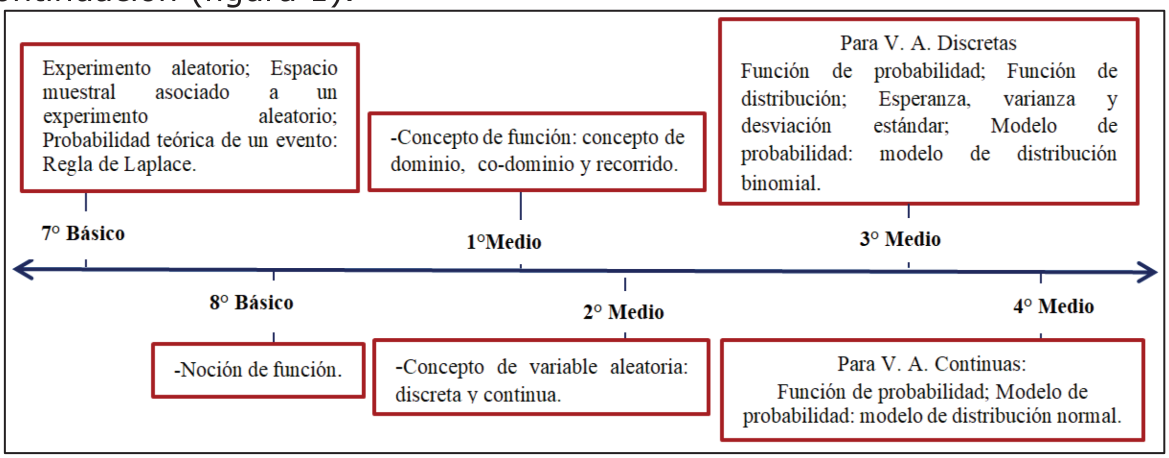



*Figura 1.* Esquema sobre análisis curricular del objeto matemático variable aleatoria.

A demás, los conceptos relacionaron con el objeto matemático variable aleatoria, como: experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, probabilidad, función, etc., se organizaron en un mapa conceptual, expuesto en la figura 2.

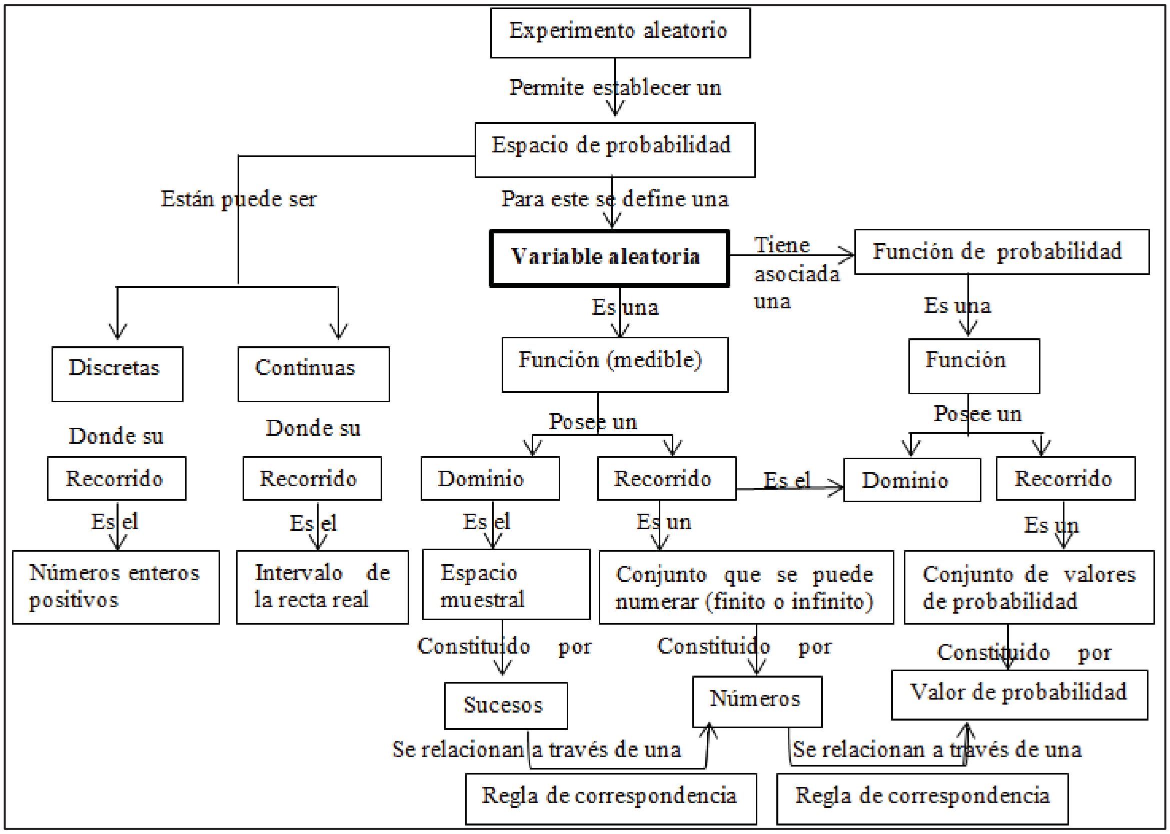



*Figura 2*. Mapa conceptual del objeto matemático variable aleatoria.

## 1.4.2 Análisis de textos escolares

Se analizaron tres textos de estudio de circulación nacional, el primero de ellos entregado por el MINEDUC, de manera gratuita a los establecimientos educacionales municipales y subvencionados del país. El segundo y el tercer texto distribuidos por una editorial particular. Cada uno de estos, está mencionado en la tabla 1. Además, todos los libros considerados para este análisis pertenecen al nivel segundo medio, ya que es la etapa en que el currículo nacional (MINEDUC, 2009) propone para introducir al alumno en el estudio del concepto variable aleatoria.

*Tabla 1*. Textos escolares utilizados para el análisis de textos.

| Texto | Título | Autores | Editorial y año |
|---|---|---|---|
| T1 | *Matemática 2º medio texto del estudiante* | Muñoz, Rupin y Jiménez. | SM, 2013. |
| T2 | *Texto escolar Matemática 2º Proyecto Bicentenario* | Blanco, Bozt, Calderón, Jiménez, González, López, Romero y Díaz. | Santillana, 2009 |
| T3 | *Puente del Saber Matemática 2° Medio* | Muñoz, Sáez, Díaz, López., Astromujoff. | Santillana, 2014. |

En los textos mencionados, se introduce el concepto variable aleatoria de manera deductiva, a través de la presentación de un experimento aleatorio como lanzamiento de una moneda o el juego pepito paga doble, utilizándose dos distintas representaciones.

Particularmente en T1, se utiliza el experimento aleatorio "juego Pepito paga doble". Se plantea el problema y su respuesta en tres pasos, primero da a conocer el espacio muestral del experimento aleatorio, luego se establece la variable aleatoria y finalmente se muestra su función de probabilidad asociada. En la figura 3, se puede apreciar, que el objeto matemático variable aleatoria se representa en dos distintos registros: lenguaje natural y lenguaje figural, a través de un diagrama sagital.

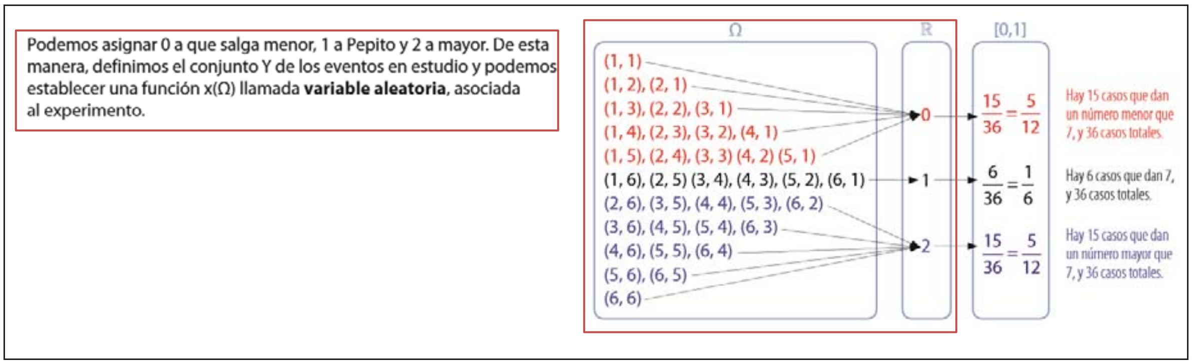
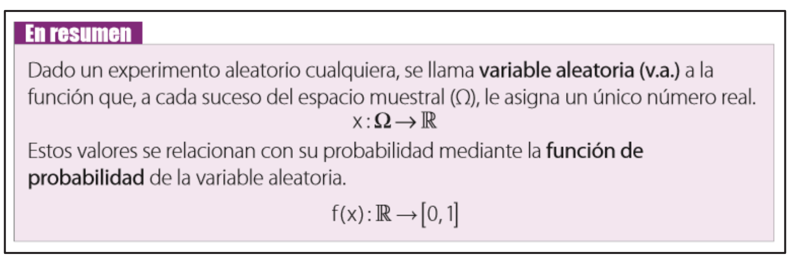



*Figura 3*. Representación en lenguaje natural y natural de una variable aleatoria (Rupin y Jiménez, 2013, p. 281).

Además, este texto, a modo de formalización de los conceptos abordados en la lección, se presenta un cuadro resumen con sus definición (ver figura 4).


**En resumen**

Dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama **variable aleatoria (v.a.)** a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asigna un único número real.

$$x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Estos valores se relacionan con su probabilidad mediante la **función de probabilidad** de la variable aleatoria.

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

*Figura 4.* Definición de la variable aleatoria (Rupin y Jiménez, 2013, p. 281).

En T2, es propuesto el experimento aleatorio "lanzar cuatro monedas", aunque al igual que en el texto anterior, se muestra el problema y su resolución. En este libro, se puede observar que en la estrategia de resolución planteada, para representar la variable aleatoria son utilizados dos distintos registros: lenguaje natural y lenguaje figural (emplea el diagrama sagital), según se expone en la figura 5.

De esta forma se construye el concepto de **variable aleatoria (v.a.)**, el cual corresponde a una "regla" que relaciona elementos de un espacio muestral con un número. En este caso, la regla es "número de caras", que asocia los elementos del espacio muestral **Ω**, con un número perteneciente al conjunto **ℚ**, tal como se muestra en el gráfico sagital de la figura 1.

Matemáticamente, la regla que relaciona los elementos del espacio muestral con un número se define como una **función** (que se denota por la letra **X**), cuyo dominio son los elementos del espacio muestral (que se representan por la letra **ω**) y el recorrido es el conjunto de los Números Racionales, es decir:

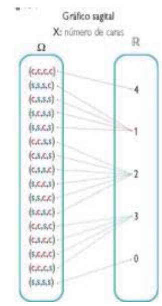



*Figura 5*. Representación en lenguaje natural y figural de una variable aleatoria (Blanco, Bozt, Calderón, Jiménez, González, López, Romero y Díaz, 2009, p. 320).

Además, en T2, se presenta un cuadro resumen con la definición de variable aleatoria y se hace la distinción entre las de tipo discretas y continuas (ver tabla 2), elemento que no se aborda en T1.

*Tabla 2.* Definición de la variable aleatoria y tipos de variables aleatorias (Rupin y Jiménez, 2013, p. 281).

**variables aleatorias discretas:** son aquellas que tienen como recorrido un conjunto finito o infinito de elementos que se pueden enumerar, en el que hay un primer elemento, segundo, tercero, etcétera.

**variables aleatorias continuas:** son aquellas variables aleatorias que tienen como recorrido un segmento completo de la recta numérica.

EN SÍNTESIS

- La variable aleatoria **(v.a.)** es una función que relaciona los elementos de un espacio muestral **Ω** con el conjunto de los Números Reales.
- Existen variables aleatorias discretas y continuas. En esta unidad se estudiarán solo las discretas, que se definen como aquellas que tienen como recorrido al conjunto de los Números Racionales, y se representa por $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$.

Finalmente en T3, se propone el experimento aleatorio "lanzar dos dados de seis caras", pero a diferencia de los dos textos anteriores, se plantea el problema, define la variable aleatoria en lenguaje natural y de manera implícita, además se propone al estudiante resolverlo con la estrategia por medio de tablas, como se aprecia en la figura 6.

Sea el experimento aleatorio "lanzar dos dados de seis caras". Completa la tabla con los elementos del espacio muestral (Ω).

| Ω | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | | | | | |
| 3 | (3, 1) | | | | | |
| 4 | (4, 1) | | | | | |
| 5 | (5, 1) | | | | | |
| 6 | (6, 1) | | | | | |

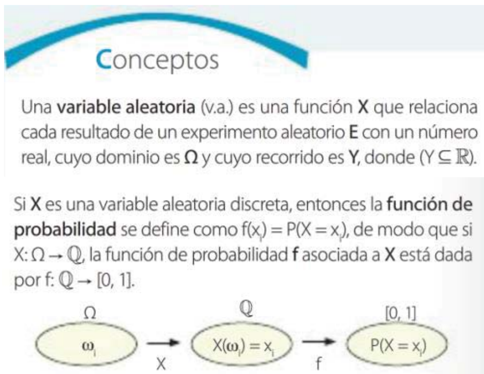
Considera X: suma de los puntos de las caras de los dados. Luego, completa la tabla.

| $X = x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | | | | | |
| 3 | 4 | | | | | |
| 4 | 5 | | | | | |
| 5 | 6 | | | | | |
| 6 | 7 | | | | | |

Figura 6. Representación en lenguaje tabular de una variable aleatoria (Muñoz, Sáez, Díaz, López y Astromujoff, 2014, p. 272).

También en T3, es presento un cuadro resumen con la definición de variable aleatoria, y al igual que en T2, se hace la distinción entre las de tipos discretas y continuas (ver tabla 3).

*Tabla 3*. Definición de la variable aleatoria y tipos de variables aleatorias (Muñoz, Sáez, Díaz, López y Astromujoff, 2014, p. 272).



Conceptos

Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función **X** que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio **E** con un número real, cuyo dominio es **Ω** y cuyo recorrido es **Y**, donde ($Y \subseteq \mathbb{R}$).

Si **X** es una variable aleatoria discreta, entonces la **función de probabilidad** se define como $f(x_i) = P(X = x_i)$, de modo que si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$, la función de probabilidad **f** asociada a **X** está dada por $f: \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$.



Para saber más

Una **variable aleatoria discreta** es aquella en la que su recorrido es un conjunto finito o infinito de elementos que se pueden numerar, en el que hay un primer elemento, segundo, tercero, etcétera.

Una **variable aleatoria continua** es aquella en la que su recorrido representa un segmento de la recta numérica.

Cabe mencionar que los tres textos escolares indagados, presentan el concepto variable aleatoria relacionándolo a continuación con el concepto de función de probabilidad, en el misma lección analizada, como es el caso de T1 y T3, o en la siguiente lección, como ocurre en el texto.

### 1.4.3 Definición escolar de la variable aleatoria

Según lo expuesto anteriormente, el objeto matemático variable aleatoria, se introduce en la educación escolar, específicamente nivel segundo medio (15-16 años). Es por ello, que como definición escolar se consideró la propuesta para dicho nivel, en un texto distribuido por el MINEDUC el presente año (ver figura 7).

Dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama variable aleatoria (v.a) a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asignamos un único número real.

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Estos valores se relacionan con su probabilidad mediante la función de probabilidad de la variable aleatoria.

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

*Figura 7.* Definición de la variable aleatoria (Muñoz, Rupin, y Jiménez, 2013, p. 281).

### 1.4.4 Definición experta de la variable aleatoria

Previamente es necesario definir espacio de probabilidad.

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad $\mathrm{P}$, es una función valorada en los reales, cuyo dominio es $\mathcal{A}$.

$$\mathrm{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

Tal que cumplen las siguientes propiedades:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Sea $\{A_i / i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}\}$ mutuamente excluyente, entonces $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

(Suárez, 2002, p. 18).

En las condiciones anteriores se dice que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad. Ahora *"sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, una función tal que*

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega) = k$$

*donde:*

*sí $x \in \mathbb{R}$ entonces $\{X = x\} = \{\omega \epsilon \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$, la función de valores reales $X$ recibe el nombre de variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$"* (Suárez, 2002, p.45).

*El recorrido o rango de la variable aleatoria $X$, "es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar $X$. $\mathcal{R}_X = \{k \in \mathbb{R}: \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = k\}$"(*Vladimirovna, 2005, p. 158).

Luego, la naturaleza del recorrido, permite definir dos tipos de variables aleatorias.

*"Variables aleatorias de tipo discreta, si el recorrido de la variable aleatoria es numerable (finito o infinito)"* (Evans y Rosenthal, 20, p. 62).

"Variables aleatorias de tipo continua, si el recorrido de la variable es un intervalo de la recta real" (Evans y Rosenthal, 2004, p. 72).

En la figura 8, se puede apreciar una representación del objeto matemático variable aleatoria.

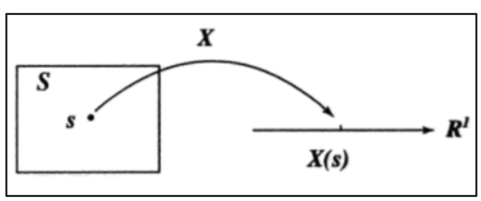



*Figura 8*. Una variable aleatoria X como función definida sobre el espacio muestral S y que toma valores $R^1$ (Evans y Rosenthal, 2004, p. 54).

Es importante declarar que en este monográfico se trabaja con variables aleatorias de tipo discretas.

### 1.4.5 Distancia entre saber erudito y saber escolar

Se observan diversas e importantes diferencias entre los saberes expuestos anteriormente en este capítulo.

El saber erudito, inicialmente da a conocer el espacio de probabilidad, ámbito en que se sitúa la variable aleatoria, para luego presentar su definición. Se aborda el objeto matemático en un registro mixto, es decir combinando distintos tipos de representaciones: lenguaje natural y lenguaje simbólico, aunque principalmente emplea el lenguaje simbólico. También se puede apreciar el objeto en una representación figural (figura 8), en la que se visualiza como esta función relaciona el concepto de espacio muestral y números reales. Además en el saber erudito, se hace referencia al concepto de recorrido, elemento importante que permite definir a una función, para luego diferenciar entre variables aleatoria de tipo discretas y de tipo continuas.

Mientras que el saber escolar, no sitúa en el espacio en que habita el objeto matemático variable aleatoria. Igualmente, presenta a este en un registro mixto, utiliza dos distintos tipos de representaciones: lenguaje natural y lenguaje simbólico, pero se centra en el lenguaje natural. Además, inmediatamente define la función de probabilidad y relaciona ambos conceptos. En ninguna parte de la página en que se presenta a la variable aleatoria, se hace referencia a sus distintos tipos, discretas y continuas.

En consideración con lo anterior, es importante tener en cuenta que, un objeto matemático posee distintos registros de representaciones, y hay que trabajar con su diversidad, ya que son necesarios para la actividad matemática y comunicación de ideas. Según Duval (1998), que el estudiante domine dos distintos y variados registro de representaciones semiótica, es una de las dos condiciones necesarias, para afirmar que el estudiante ha aprehendido un objeto matemático.

Es claro que el saber erudito, no puede ser enseñado, como se encuentra en textos científicos, en este caso, en los textos de probabilidad y estadística, ya que ello constituye un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje, según afirma Chevallard (1992). Aunque como docentes reflexivos y críticos se debe cuidar que la brecha existente entre dichos saberes no sea muy grande, para favorecer a que los estudiantes desarrollen un determinado saber.

De esta manera, el análisis del objeto matemático variable aleatoria desarrollado anteriormente, se utilizó como sustento para el diseño de una clase que compone el Estudio de Clases llevado a cabo. Este estudio se expone en el siguiente capítulo.

Además dicho análisis sirvió para diseñar una secuencia didáctica que tiene como propósito comprender el concepto variable aleatoria y aplicarlo a diversas situaciones. Esta secuencia se presenta en el capítulo 3.

## 1.5 Análisis epistemológico histórico

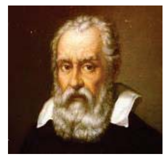
La variable aleatoria, al igual que otros conceptos matemáticos tiene su origen en las primeras civilizaciones. Posteriormente se ha desarrollados progresivamente a través de la historia, donde han ocurrido eventos que marcaron su evolución y su conceptualización en la matemática. A continuación se expone una línea de tiempo de los principales acontecimientos relacionados con la variable aleatoria.

**1200**

Primeros indicios de la variable aleatoria se encontraron en los juegos de azar.

**1526**

Girolano Cardano escribió Liber Ludo Alae.



**1613 a 1624**

Galileo Galilei escribió Sopre le Scoporte dei Dadi.


**1650**

Blaise Pascal y Pierre Fermat iniciaron la probabilidad como teoría matemática.

**1657**

Chrisitaan Huygens escribió De Ratiociniis in Ludo Aleae.

**1713**

Jacob Bernoulli publicó Ars conjectandi: usó explícitamente la variable aleatoria.

**1730**

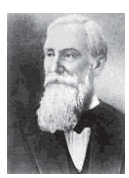
Abraham De Moivre publicó Miscellanea Analytica: indagó el comportamiento de las distribuciones de probabilidad de distintas variables aleatorias.

**1812**

Pierre Laplace publicó Théorie Analytique des probabilités: hizo referencia a las variables aleatorias en el contexto de resultados numéricos de experimentos aleatorios.

**1837**

Simeón Poisson publicó Recherches sur la probabilite des jugements en matiere criminelle et en matiere civile, por primera vez usó el concepto de variable aleatoria como función aleatorias.



**1846-1887**

Pavnutii Chebyshev en sus trabajos (Des valeurs moyennes y Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités): utilizó de manera más explícita el concepto de variable aleatoria, las nombró como cantidades y magnitudes.

**1900-1901**

Aleksandr Liapunov en sus obras (Sur une proposition de la théorie des probabilités y Sur théorème du calcul des probabilités): identificó y enunció variables aleatorias y comenzó a trabajar con la función de probabilidad.

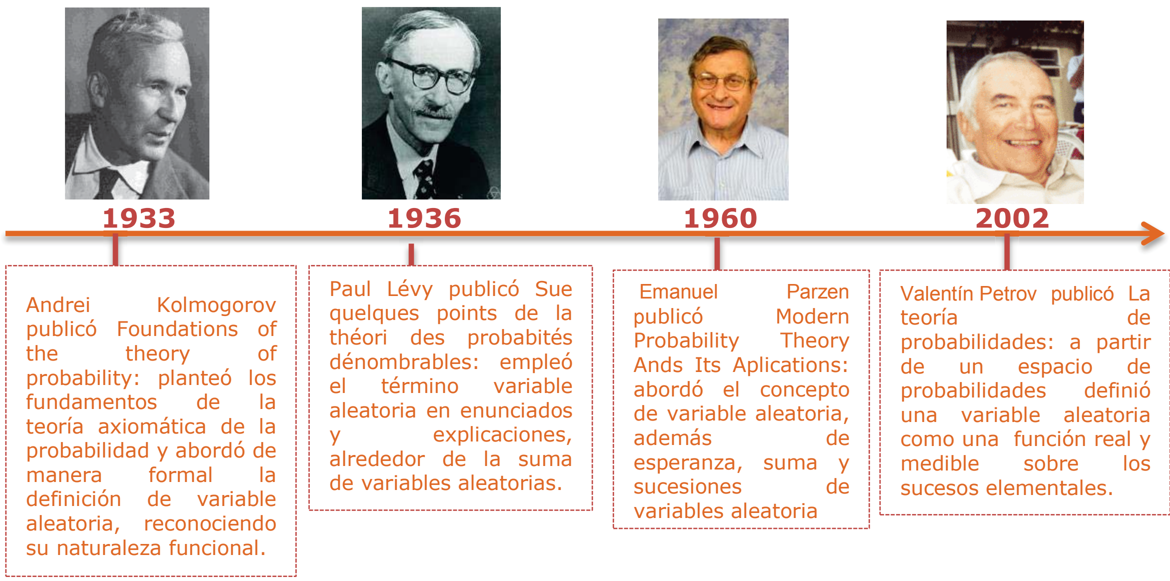



*Figura 9*. Desarrollo histórico epistemológico de la variable aleatoria

Ahora se expone el origen, evolución y constitución histórica que llevan a la construcción del concepto en cuestión, organizado en tres etapas:

- Primeros indicios de la variable aleatoria
- Nociones de la variable aleatoria
- Formalización matemática de la variable aleatoria

## Primeros indicios de la variable aleatoria

Los primeros indicios de la variable aleatoria fueron en los juegos de azar. Las pruebas más antiguas de uso de juegos de azar aparecen en la cultura egipcia, griega y romana mediante la utilización de tableros y dados (Fernández, 2007). Pese al interés de estas civilizaciones por los juegos con dados, ellas no se percataron de la equiprobabilidad de los resultados elementales en dados equilibrados, lo que generó un estancamiento del desarrollo del cálculo de probabilidad.

En la Edad Media, debido al teocentrismo existió un nulo o escaso desarrollo de las ideas de aleatoriedad.

Luego, en el Renacimiento fue cuando comenzó una nueva perspectiva del mundo, resurgió el espíritu griego y la motivación de investigar en el ámbito de las ciencias. Además se realizó una reconsideración de los experimentos aleatorios y fue creada la imprenta que permitió desarrollar los principios de la teoría de probabilidad (Mateos y Morales, 2002).

En la Edad Moderna, matemáticos italianos como Girolano Cardano (1501-1576) y Galileo Galilei (1564-1642) contribuyeron a los inicios de la teoría de probabilidad. En este contexto, Cardano escribió en el año 1526 la primera obra relacionada con el mundo del azar, titulada Liber de Ludo Alae, cuya publicación fue en el año 1663. En su libro abordó problemas como calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados y trabajó con los conceptos desde un enfoque clásico de la probabilidad, logrando introducir la idea de asignar las posibilidades de obtener un determinado resultado en relación al número de posibles maneras en que ese resultado se puede obtener (García, 2005).

Por su parte, Galileo, entre los años 1613 y 1624 escribió el libro nombrado Sopre le Scoporte dei dadi, el cual fue publicado en el año 1718 con el título Consideratione sopra il Giuco dei Dadi. En este trabajo Galileo también se dedicó a resolver problemas sobre dados y su principal aporte a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. (Fernández, 2007).

También, matemáticos franceses como Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665), fueron los que empezaron a formalizar la teoría de las probabilidades, cuando un jugador conocido como caballero de Meré les propuso un problema de reparte de apuesta sobre juegos de dados (Pérez, 2009). Estos matemáticos resolvieron el problema correctamente por medios diferentes pero equivalentes, aunque no expusieron sus resultados por escrito.

Chrisitaan Huygens (1629 -1695), matemático holandés, inspirado en la comunicación sostenida a través de cartas con Pascal y Fermat, publicó en 1657 un tratado titulado De Ratiocinnis in ludo aleae. En este trabajo presentó catorce proposiciones que abordaban razonamientos relacionados a los juegos de los dados (Restrepo y González, 2003).

De esta manera, Cardano, Pascal, Fermat y Huygens centraron su interés por la predicción de los juegos de azar, en establecer las leyes necesarias para tener un juego equitativo, recurriendo de manera intuitiva en sus análisis a la utilización de la distribución de las variables aleatorias vinculadas y su valor esperado (Ruíz, 2013). Aunque fue Huygens, que en las tres primeras proposiciones propuestas en su libro De Ratiocinnis in ludo aleae, introduce el concepto de esperanza matemática de una variable aleatoria con un número finito (Salazar, 2014).

Es así, que hasta el año 1970, la variable aleatoria aún no era empleada de forma explícita, solo se usaba la idea de esperanza matemáticas y la obtención de distribuciones de probabilidad de algunas variables aleatorias discretas en el contexto de juegos de azar.

### Nociones de la variable aleatoria

La noción de variable aleatoria apareció desde los primeros intentos por definir los conceptos generales de probabilidad. Jacob Bernoulli (1652-1705), Abraham de Moivre (1667-1754) y Pierre Laplace (1749-1827) la usaron implícitamente en sus teorías y conceptualizaciones, y comenzaron a hacerla explícita en casos particulares.

Por su parte, Bernoulli enunció el primer teorema del límite en la teoría de probabilidad. En su obra Ars conjectandi (1713) usó explícitamente la variable aleatoria, sin embargo no logró profundizar en la naturaleza de este objeto (Ruiz, 2006, p. 139).

De Moivre, publicó en el año 1730 la obra titulada Miscellanea Analytica, en ella efectuó estudios sobre la ley de probabilidad binomial y propuso la primera formulación de la ley de probabilidad normal. La profundización y generalización de los problemas que abordó, le facilitó indagar el comportamiento de las distribuciones de probabilidad de distintas variables aleatorias.

Mientras Laplace (1778) trabajaba en proponer una mayor generalización que de Moivre sobre el teorema central del límite para variables discretas y algunos casos de continuas, descubrió y demostró la importancia de la distribución normal en la teoría de probabilidad ( Ruiz y Albert, 2013). En el año 1812, en su libro denominado La teoría de la probabilidad, hizo referencia a las variables aleatorias, aunque alude a estas en el contexto de resultados numéricos de experimentos aleatorios.

Los primeros avances en la definición de variable aleatoria los hizo Simón Poisson (1781-1840), luego Pavnutii Chebyshev (1821-1894) y Aleksandr Liapunov (1857-1918) la explicitaron y mostraron sus propiedades.

Poisson, en el año 1837, en su trabajo Recherches sur la probabilite des jugements en matiere criminelle et en matiere civile, por primera vez usó el concepto de variable aleatoria como función (Ruiz, 2013). Él comenzó con una variable cualitativa, definida como las posibles causas del envejecimiento, a la cual le asoció una variable cuantitativa ɑ con probabilidades conocidas.

Chebyshev en sus trabajos (1846 y 1887) utilizó de manera más explícita las ideas de variable aleatoria y de función de densidad, nombró de dos distintas maneras a las variables aleatorias, como cantidades y magnitudes. Este matemático fue precursor en estimar y utilizar la noción de variable aleatoria y su valor esperado (Ruíz, 2006), así como también en hacer uso de la noción de variable aleatoria con un carácter matemático y en formular un enunciado para el teorema central del límite involucrando una secuencia de variables aleatorias, ampliando el concepto de variable en probabilidad (Fischer, 2011).

Luego, Liapunov en sus obras (1900 y 1901) aportó significativamente en la conceptualización de la variable aleatoria, las identificó y enunció. Comenzó a trabajar con la función de probabilidad acercándose a lo que actualmente se conoce. Este matemático, dominó la función de distribución, de densidad y la distribución de probabilidad, además empleó sus características relativas a su valor esperado y sus varianza, así como también manejó su operatoria, convergencia y composición (Ruíz, 2013).

## Formalización matemática de la variable aleatoria

La formalización de la variable aleatoria, se hizo posible a principios del siglo XX con el desarrollo de las teorías de conjuntos y de la medida. Durante los primeros años de este siglo, uno de los matemáticos que aportó significativamente a dicha labor es, Andrei Kolmogorov (1903-1987). Este publicó en el año 1933 su obra Fundations of the Theory of Probability, donde consolidó la axiomatización de la teoría de la probabilidad vigente hasta nuestros días con la incorporación de las teorías de la medida y la integración (Ruíz, 2006). En el primer capítulo del libro, define el campo de probabilidad y sus axiomas, fundamentales para la formalización de gran parte de los conceptos probabilísticos.

A partir de lo anterior, Kolmogorov, en el capítulo tres del libro aborda de manera formal la definición de variable aleatoria, reconociendo su naturaleza funcional.

> Una función de valor real $x(\xi)$, definida sobre el conjunto básico E, es llamada una variable aleatoria si para cada elección de un número real a, el conjunto $\{x < a\}$ de todos los $\xi$ para los cuales la desigualdad $x < a$ es verdadera, pertenece al sistema de conjuntos $\mathfrak{J}$ (Kolmogorov, 1956, p. 22. Citado por Ruiz, 2013).

Luego Paul Lévy (1871-1956) y Valentín Petrov (1951- ) aportaron en el desarrollo de la teoría formal de la variable aleatoria.

El matemático Lévy, en el año 1936, publicó Sue quelques points de la théori des probabités dénombrables, en su obra empleó el término variable aleatoria en enunciados y explicaciones, particularmente alrededor de la suma de variables aleatorias.

Por su parte, Valentín Petrov (2002), en su libro La teoría de probabilidades, expuso la siguiente definición de variable aleatoria:

> Considerar, un espacio de probabilidades $(\Omega, A, P)$. Llamamos variable aleatoria a una función real $X = X(\Omega)$ definida en el espacio de sucesos elementales $\Omega$ y tal que satisface la condición: $\{w \in \Omega: X(\Omega) \leq x\}$
>
> Para todo x real. En la terminología del análisis real, una función $X(\Omega)$ que cumple la condición anterior, para todo x se denomina medible. De esta forma, una variable aleatoria es una función real y medible sobre los sucesos elementales. (Petrov y Mordecki, 2002, p. 55. Citado por Ruiz, 2006).

Finalmente, Emanuel Parzen (1929-2016), en el año 1960 publicó el libro denominado Modern Probability Theory Ands Its Aplications. Presentó desde el séptimo al décimo capítulo, la teoría de la variable aleatoria, en los que abordó conceptos como variable aleatoria, esperanza de una variable aleatoria, suma de variables aleatorias independientes y sucesiones de variables aleatorias. Definió a la variable de la siguiente manera:

> Decimos que un objeto X, es una variable aleatoria
>
> i)si es una función de valores reales definidas en un espacio de descripción muestral, sobre una familia de subconjuntos hayamos definido una función de probabilidad $P[\cdot]$
>
> ii) si para todo el conjunto boreliano B de números reales, el conjunto {s: X(s) pertenece a B} pertenece al dominio $P[\cdot]$ (Parzen, 1971, p. 300. Citado por Ruiz, 2013).

# Capítulo 2: Estudio de Clases

En este capítulo se expone el Estudio de Clases llevado a cabo, organizado en ocho apartados.

En los dos primeros apartados se expone la problemática y objetivos del estudio.

Posteriormente se da a conocer el marco teórico que sustenta este estudio y la metodología.

Luego se presenta la planificación de la clase con su respectivo análisis a priori y la vinculación de éste con los instrumentos de recogida de datos.

Continúa la presentación del análisis a posteriori y se finaliza con la confrontación entre los dos análisis mencionados.

## 2.1 Introducción

En el presente capítulo se describe la experiencia de un Estudio de Clases, el cual se desarrolla en el contexto de estudios de postgrado en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. La grabación de videos de las clases de matemática desarrolladas en colegios de la región de Valparaíso permitió analizar lo que sucedía al enseñar el concepto variable aleatoria en segundo medio. Así como también portar al desarrollo profesional docente, presentando a la comunidad una clase innovadora, todo ello con la idea de mejorar la enseñanza aprendizaje.

Este estudio aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación media en comprender la naturaleza funcional del concepto variable aleatoria. Algunos antecedentes que sustentan ésta son expuestos en el capítulo 1.

## 2.2 Objetivos de investigación

En consideración con la problemática y antecedentes presentados se establecen los siguientes objetivos para este estudio:

### Objetivo general

Realizar un Estudio de Clases que aborda el aprendizaje del concepto variable aleatoria desde su carácter funcional, en segundo medio.

### Objetivos específicos:

- Diseñar una situación didáctica que permita introducir el concepto variable aleatoria.
- Implementar la situación didáctica.
- Analizar los datos obtenidos con base en la teoría de situaciones didácticas

Con base en lo anterior se propone la siguiente pregunta de investigación

¿Cuáles son las dificultade*s* que presentan los estudiantes para llevar a cabo las fases de la teoría de situaciones didácticas en una clase sobre variable aleatoria variable aleatoria en un problema asociado a la probabilidad*?*

El sustento teórico del estudio lo constituye la teoría de situaciones didácticas (TSD) planteada por Guy Brousseau (2007). Particularmente se emplean alguno de sus elementos para el análisis de una clase.

## 2.3 Marco teórico

La TSD tiene como objetivo indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes profesor- estudiantes- saber y sus interacciones (figura 10), focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento.

Esta teoría propone la modelización de la enseñanza como un proceso centrado en la construcción del conocimiento, generado por la interacción del sujeto (alumno) y medio (Brousseau, 2007).

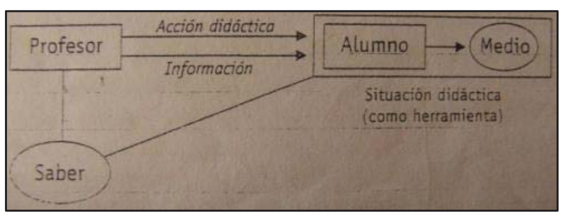



*Figura 10.*Sistema didáctico (Brousseau, 2007, p.50).

Uno de los elementos principales de la TSD, es el de situación a-didáctica, que es aquella situación que produce un aprendizaje por adaptación. La situación a-didáctica sólo puede comprenderse con relación a la situación didáctica, ya que la situación didáctica engloba a las situaciones a-didácticas.

Una situación didáctica consiste en que el profesor elige una situación o problema con la intensión que el estudiante modifique o construya un conocimiento matemático, posteriormente el docente se involucra en esta actividad para institucionalizar el saber adquirido. Mientras que en la situación a-didáctica el estudiante aborda la situación o problema de donde emergen conocimientos.

La situación didáctica está constituida por cuatro fases: fases de acción, fase de formulación, fase de validación y fase de institucionalización, descritas en la figura 11.

Algunos elementos basales de TSD utilizados en este estudio se organizan en el esquema expuesto en la figura 11.

Otro elemento importante, utilizado de la teoría, es el concepto de devolución (Brousseau, 2007), comprendido como el acto por el cual el profesor hace que el estudiante acepte la responsabilidad de tratar de resolver los problemas o los ejercicios cuya respuesta desconoce y acepto el mismo la consecuencia de esta transferencia. Además del concepto de contrato didáctico, definido como el conjunto de reglas, acciones establecidas implícitamente entre el profesor y estudiantes. Abarca el conjunto de comportamientos que el docente espera del alumno y viceversa. (Brousseau, 2007).

Esta teoría permite diseñar un plan de clase que aborda un desafío a través de tres fases de una situación didáctica: fase de acción, fase de formulación y fase de institucionalización Cabe destacar que en la clase no se realiza una fase de validación, pues los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación (variable aleatoria).

En la clase se lleva a cabo una primera fase (*de acción*), donde el estudiante se interesa en abordar la situación propuesta e intenta dar respuesta a ella poniendo en acción conocimientos previos. La segunda fase (*de formulación*) el estudiante comunica al equipo su estrategia y discute entre pares para generar una estrategia común. Una tercera fase (exposición y discusión de estrategias) donde cada equipo comunica al grupo curso sus resultados, comprobando estos, llegando a un acuerdo de ideas. Para finalizar con la cuarta fase (*de institucionalización*) en la que el profesor explicita las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante y el saber que desea enseñar. Todo ello con la finalidad de observar y analizar como el estudiante aplica sus conocimientos previos e interactúe con sus pares, para generar estrategias que permitan dar respuesta al problema, e identificar las dificultades que emergen al introducir el concepto variable aleatoria.

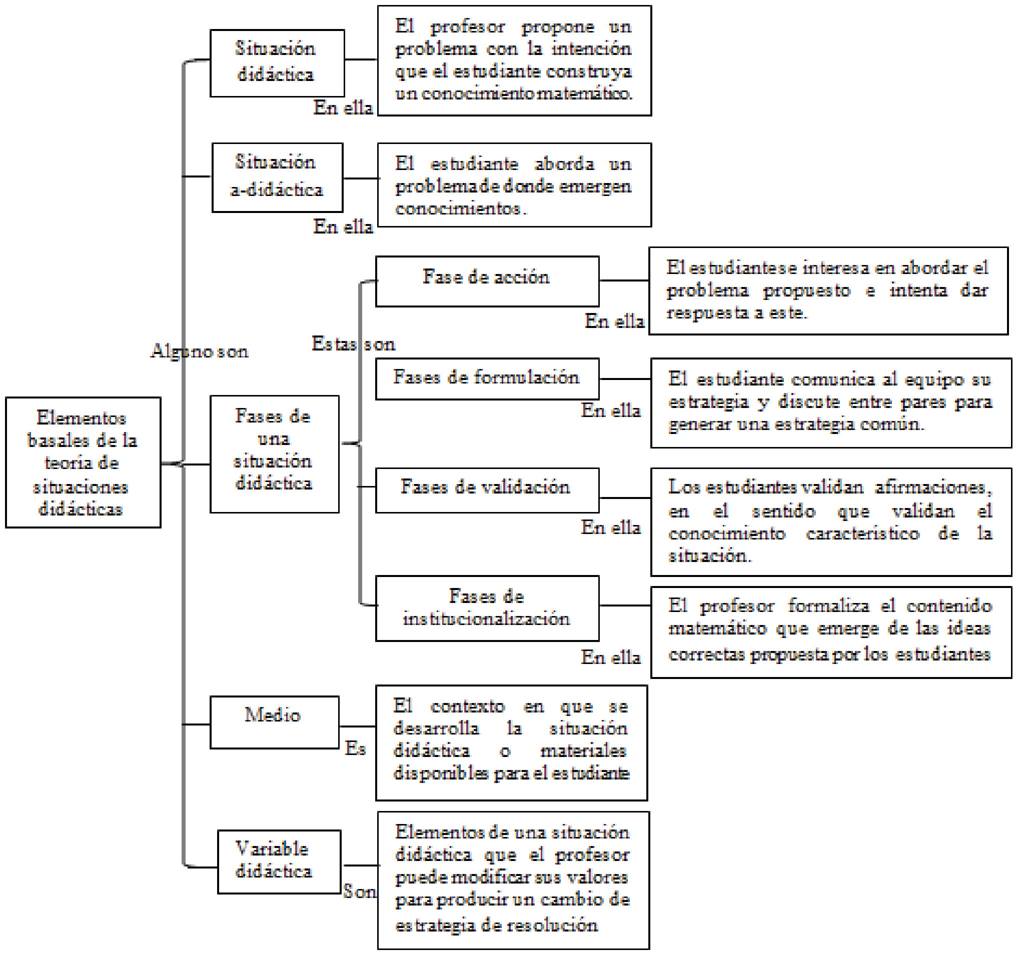



*Figura 11*. Esquema sobre algunos elementos basales de la teoría de situaciones didácticas.

## 2.4 Metodología

### 2.4.1 Tipo de investigación

Este estudio que se ha realizado es de corte cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006), ya que estuvo orientado a describir hechos ocurridos en una clase de educación escolar al introducir el concepto variable aleatoria, además de comprender cómo los estudiantes construye el conocimiento aludido e identificar las dificultades que surgen en su aprendizaje. Se empleó como diseño el Estudio de Clases.

### 2.4.2 Diseño metodológico

El Estudio de Clases, es una actividad desarrollada por un grupo de 3 o más profesores que favorece el desarrollo profesional docente, mejorando las capacidades para enseñar de los profesores participantes e impactando positivamente en los aprendizajes de los estudiantes (Isoda y Olfos, 2009). Es un proceso cíclico constituido por cuatro fases interrelacionadas: identificación del problema, planificación de la clase, implementación y reflexión, como se aprecia en la figura 12.

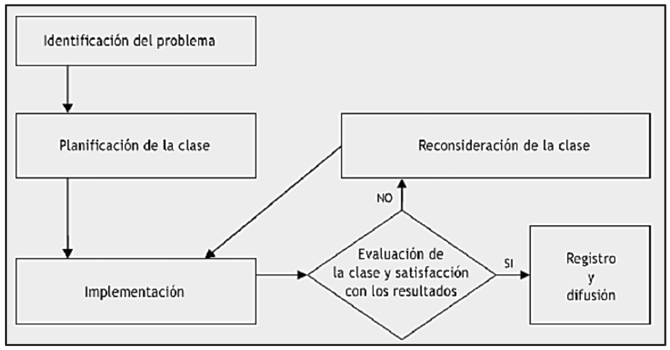



*Figura 12.* Ciclo Estudio de Clases (Isoda y Olfos, 2009, p. 39)

En la fase inicial, preparación de la clase, es identificado un tema de enseña problemático a tratar. En la segunda etapa, planificación de clase, se prepara detalladamente una clase que aborde dicho problema, la cual se implementa en un curso en semanas posteriores. La tercera fase, implementación, se centra en que un profesor realiza la clase y los demás docentes participantes observan y toman registro de ésta respecto al plan de clase diseñado en las fases anteriores. La cuarta fase sobre reflexión, el grupo de profesores involucrados discute el logro de los objetivos de la clase y llevan a cabo una retroalimentación. Esta última etapa conduce a un segundo ciclo de Estudio de Clases, que comienza con la fase de afinamiento de la lección y otra vez, las fases de implementación y reflexión, de la misma manera es posible llevar acabo un tercer ciclo y así sucesivamente.

Particularmente en esta investigación, el Estudio de Clases llevado a cabo, los integrantes son tres profesores de la región de Valparaíso. Además fueron desarrollados tres ciclos y se implementaron en establecimientos educacionales distintos de dicha región. Aunque en el presente capítulo de la monografía se expone en detalle el análisis del segundo de estos ciclos.

Los elementos principales del segundo ciclo lo constituyeron: inicialmente la planificación de la clase, etapa en la que se modificó el desafío propuesto en el primer ciclo para abordar la problemática expuesta anteriormente. Además se desarrolló su respectivo análisis a priori. Posteriormente la implementación de la clase, fase donde el plan de clase diseñado se aplicó a un grupo de curso del nivel segundo medio en la quinta región y se filmó su aplicación. Ello conllevó la realización de un análisis a posteriori. Finalmente la etapa de contraste entre los dos análisis, en ella se realizó una confrontación entre el análisis a priori y análisis a posteriori, también se reflexionó sobre la clase en relación a la problemática propuesta.

### 2.4.3 Sujetos informantes

En el segundo ciclo del Estudio de Clases, el contexto de este estudio lo constituyó, el nivel segundo medio (15 a 16 años) de la educación escolar, pues según el currículo nacional (MINEDU, 2009) es cuando se introduce al alumno en el estudio de la variable aleatoria desde su concepción como función.

Los sujetos informantes fueron 18 estudiantes del nivel segundo medio de un establecimiento educacional de modalidad científico-humanista, subvencionado de la región de Valparaíso, estos participaron por libre disposición.

### 2.4.4 Técnicas de recogida de datos

Para la recogida de datos se ha utilizado técnicas directas (Hernández., Fernández y Baptista, 2006), aquellas como: la observación de participantes a través de un video de la implementación del desafío las acciones de los estudiantes, es decir sus estrategias de resolución de la situación

Los procedimientos llevados a cabo, alineados de acuerdo a los objetivos específicos propuestos en este estudio, se describen en la tabla 4.

Tabla 4. Resumen de procedimientos para la recogida de datos.

| Objetivos específicos | Procedimientos |
|---|---|
| Realizar un análisis preliminar del concepto variable aleatoria a partir de un análisis epistemológico, de los textos escolares y del currículo nacional. | -Es estudiado el concepto desde la disciplina, además de su evolución histórica epistemológica.<br>-Se indaga en la enseñanza tradicional del concepto en cuestión. |
| Diseñar una situación didáctica que permita introducir el concepto variable aleatoria. | Para diseñar la situación didáctica:<br>- Se considera el análisis preliminar del concepto y se seleccionan elementos basales de la TSD.<br>- Es planificada la clase, organizada a partir de algunas fases de la TSD, en la que se incluye una situación (desafío).<br>- Se realiza un análisis a priori de la situación. |
| Implementar la situación didáctica y analizar los datos obtenidos con base a la metodología de Estudio de Clases. | -La implementación del desafío se realiza en el contexto del segundo ciclo de un Estudio de Clases. Se utiliza como técnicas de recogida de datos la observación de participantes a través de un video y el análisis de las acciones de los estudiantes.<br>-Para el análisis de la implementación de la situación se analizan los datos con base a las categorías a cuasi-aprioristas definidas.<br>En ambos procedimientos se usa como instrumento de recogida de datos: un cuestionario que es un desafío y un video de la clase en que se aplicó este. |

Cabe destacar que una de las instancias de recogida de datos se realizó de manera presencial, constó de la aplicación de un desafío (ver tabla 5) sometido a juicio de expertos.

*Tabla 5*. Instrumento de recogida de datos.

**Desafío**

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de apoderados | 8 | 13 | 7 | 2 |
| Número de estudiantes | 1 | 2 | 3 | 4 |

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por:

A: el conjunto de 30 apoderados del taller.

B: el conjunto de cantidad de estudiantes.

C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación

Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

La implementación del desafío, se desarrolló en una clase de 90 minutos organiza a partir de algunas fases de la teoría de situaciones didácticas como se aprecia en la tabla 6.

*Tabla 6*. Descripción de las fases de la teoría de situaciones didácticas específica para el desafío propuesto.

| Fase | Descripción |
|---|---|
| Acción | Los estudiantes en tríos leen y estudian el enunciado del desafío, aplican sus conocimientos previos como espacio muestral, sucesos, probabilidad y función para identificar preliminarmente elementos que pueden contribuir a la resolución del desafío. |
| Formulación | Los alumnos comunican ideas a su equipo, discuten y generan una estrategia común. |
| Exposición y discusión de estrategias | En plenario, tres grupos exponen y argumentan su respuesta al desafío (el primero con respuesta incorrecta, el segundo con respuesta incompleta y el tercero con respuesta correcta), responden a las preguntas planteadas por el profesor. El grupo curso logra un consenso sobre la respuesta precisa del desafío. |
| Institucionalización | El profesor a partir de las representaciones propuestas por los grupos, formaliza los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad. |

### 2.4.5 Técnicas de análisis de datos

Para el análisis de datos se empleó la técnica de categorización. La simplificación de contenidos a categorías son de acuerdo a algunos elementos basales de la TSD y conceptos matemáticos específicos del desafío, particularmente se definen categorías de análisis en la primera y segunda fase de la situación didáctica diseñada, pues es donde el estudiante tiene un rol protagónico, la fase de exposición y discusión de estrategias y fase de institucionalización son de carácter descriptivo.

En la fase de acción el procedimiento se realiza a partir de la identificación preliminar de elementos conceptuales que pueden contribuir a la resolución del desafío, mientras que en la fase de formulación, se produce con base al reconocimiento de las posibles estrategias de resolución de este.

De esta manera las categorías cuasi-aprioristas definidas para el análisis de datos se exponen en la tabla 7. Es importante destacar que los datos obtenidos en la implementación del desafío (video y producciones de los estudiantes), son analizados con las mismas categorías. Los procedimientos centrales que guían el proceso de análisis de los datos, es la clasificación en categorías, de extracto de las producciones de los estudiantes y de la trascripción de las partes principales de su discurso. Luego se interpretan los datos de cada categoría de análisis y se expone una evidencia de ésta, particularmente constatando alguna dificultad de aprendizaje del concepto variable aleatoria.

Tabla 7. Categorías de análisis de datos.

| **Fase** | **Categoría** | **Descripción** |
|---|---|---|
| Acción | $C_1$: El estudiante identifica el espacio muestra asociado al experimento. | El estudiante determina todos los elementos del conjunto A como una colección de elementos, representado por ejemplo A= {apoderado1, …, apoderado 30} |
| | $C_2$: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral según la característica del problema. | El estudiante agrupa los elementos del espacio muestral según la cantidad de estudiantes que posee un apoderado. |
| | $C_3$: El estudiante identifica que los elementos del conjunto C son probabilidades | El estudiante identifica los cuatro elementos del conjunto C y expresa la probabilidad de ocurrencia de cada suceso. |

| | | |
|---|---|---|
| | $C_4$: El estudiante identifica que la relación entre los conjuntos A y B está representada en la tabla dada. | Es estudiante afirma que el conjunto B está representado en la primera fila de la tabla y el conjunto A en la segunda fila. |
| Formulación | $C_5$: El estudiante identifican y registran en lenguaje natural la relación entre los conjuntos A y B | El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la característica o cualidad que permite vincular a cada suceso (elemental) con un valor numérico. |
| | $C_6$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje figural | El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos A y B y relaciona cada elemento del conjunto A (suceso elemental) con único elemento de B (valor de la variable {1,2,3,4}) |
| | $C_7$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje tabular. | El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de estudiantes y la segunda columna al número de apoderados. |
| | $C_8$: El estudiante identifican y registran en lenguaje natural la relación entre los conjuntos B y C | El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la correspondencia que permite asignar a cada valor de la variable aleatoria un valor de probabilidad. |
| | $C_9$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos B y C en lenguaje figural | El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos B y C y relaciona cada elemento del conjunto B (valor de la variable aleatoria {1,2,3,4}) con único elemento de C (valor de probabilidad) |
| | $C_{10}$: El estudiante representa la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje tabular. | El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de apoderados y la segunda columna a la probabilidad asociada. |

## 2.5 Planificación de la clase

### 2.5.1 Objetivo de la clase

Para la clase, se propone el objetivo *conocer la variable aleatoria y la función de* probabilidad asociada, aunque a los estudiante se les presentará como objetivo *introducir un nuevo concepto asociado a la probabilidad*, para no darles indicios del conocimiento que se pretende que construyan.

En dicha instancia, se aborda un desafío (ver tabla 5). Este requiere que los estudiantes utilicen algunos de sus conocimientos previos como experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos aleatorios, probabilidad clásica y función, con la finalidad que comprendan el enunciado. Posteriormente vinculen estos conocimientos y construyan una variable aleatoria discreta y función de probabilidad asociada.

De esta manera los alumnos se introduzcan en el estudio de nuevos conceptos probabilísticos, y el profesor a partir de las estrategias de resolución de la situación, propuestas por ellos, defina la variable aleatoria y función de probabilidad. A su vez se revele la vinculación de la variable aleatoria con otros conceptos matemáticos y probabilísticos que en ella convergen, tales como los mencionados anteriormente como conocimientos previos, función de probabilidad, entre otros.

### 2.5.2 Descripción y presentación de la clase

La clase se diseña considerando elementos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), como: situación didáctica, situación a-didáctica, fases de una situación didáctica (fase de acción-fase de formulación-fase de institucionalización), contrato didáctico y devolución.

La clase tiene como objetivo introducir un nuevo concepto asociado a la probabilidad, su duración es de 90 minutos y está organizada en cuatro fases:

**Inició de la clase (15 min.)**

Se presenta el objetivo de la clase, el curso se organizan en grupos de tres integrantes y entrega el material de trabajo (hoja con el desafío impreso a cada estudiante, y un pliego de cartulina y un plumón a cada grupo). Luego se seleccionan dos personas para leer al curso, en voz alta el enunciado, se pregunta ¿Qué debo hacer para resolver el desafío? ¿Quién tiene dudas?

**Desarrollo de la clase (55 min.)**

- Primera fase (fase de acción- 10 min.): Cada grupo lee comprensivamente el enunciado del desafío (ver tabla 1), se interiorizan con la situación, identificando elementos conceptuales que pueden contribuir posteriormente a su resolución. Identifican el experimento aleatorio, el espacio muestral, los sucesos compuestos (cada uno de los subconjuntos generados de la división o partición del conjunto A según la característica de interés), el conjunto C, particularmente que está constituido por cuatro elementos que son probabilidad de sucesos aleatorios, y que la relación entre el conjunto A y B está representada en la tabla propuesta.
- Segunda fase (fase de formulación- 20 min.): Cada grupo de estudiantes a partir de los conceptos matemáticos identificados previamente, discuten sus ideas y general una estrategia común. La posibles estrategias de resolución pueden ser representar la relación

entre los conjuntos en lenguaje figural, a través de un diagrama sagital ( estrategia experta), representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural (estrategia 1), representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular ( estrategia 2) o representar solo una de la relaciones pedidas, entre el conjunto B y C, en lenguaje gráfico, mediante un gráfico estadístico o gráfico cartesiano funcional ( estrategia 3).

- Tercera fase (exposición y discusión de estrategias- 20 min): Tres grupos exponen al curso, sus estrategias de resolución del desafío, utilizan su papelógrafo, el primer grupo con respuesta errónea, el segundo con respuesta incompleta y el tercero con respuesta correcta. En esta instancia los grupos confrontan y comprueban las afirmaciones expresadas previamente, reflejando el razonamiento lógico matemático logrado y contribuyendo a la construcción de nuevos saberes. Se discuten con el curso sobre las diferencias, similitudes y pertinencia de las estrategias, e identifican los papelógrafo en que están correctamente definida y representada la relación entre los conjuntos A y B y los conjuntos B y C. Cabe destacar que en la clase no se realiza una fase de validación, pues los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación (variable aleatoria).
- **Cierre de la clase (20 min.)**
  Cuarta fase (institucionalización-20 min.): El profesor a partir de las producciones de los estudiantes, explica la variable aleatoria y función de probabilidad del desafío. Luego con la representación de los conjuntos A y B, explica el concepto de variable aleatoria y con la representación de los conjuntos B y C, explica el concepto de función de probabilidad. Posteriormente el profesor define formalmente los conceptos mencionados. Las definiciones que se presentaran a los estudiantes se detallan a continuación

*"La variable aleatoria es una función $X$ que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio E con un número real, cuyo dominio es $\Omega$ y cuyo recorrido es $Y$, donde $Y \subseteq \mathbb{R}$*

$$X\colon \Omega \to Y \subseteq \mathbb{R}$$

*Si $X$ es una v. a discreta, entonces la función de probabilidad f asociada a $X$ está dada por*

$$f : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x_i \to f(x_i) = P(X = x_i)"$$

(Muñoz, Sáez, Díaz, López y Astromujoff, 2014, p. 272)

## 2.5.3 Plan de clase

A continuación se presenta la planificación de la clase correspondiente al segundo ciclo del Estudio de Clases llevado a cabo.

| MOMENTO: TIEMPO | ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE | INTERVENCIÓN DOCENTE | EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE |
|---|---|---|---|
| **Inicio de la clase:**<br>**15 min.** | **0. Indicaciones de la clase**<br>**1. Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo.**<br>**2. Presentación del objetivo de la clase:** Introducir un nuevo concepto asociado a la probabilidad<br>**3.Planteamiento de la situación** | 0. Explicitar el contrato didáctico<br>1. Entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de tres a cinco integrantes. Además entrega a cada grupo un pliego de cartulina y un plumón.<br>2. Escribir el objetivo de la clase.<br>3. Presentación de la de la clase: Se proyecta en la pizarra la situación problema (PPT). Un estudiante lee en voz alta.<br>3.1 Preguntar a un estudiante: ¿Qué entendió del desafío? ¿Cuál es la tarea de hoy?<br>3.2 Preguntar ¿Alguien tiene dudas sobre el desafío? | ¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?<br>¿Comprenden el problema?<br>¿Son capaces de identificar la tarea?<br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

**Desafío**

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de apoderados | 8 | 13 | 7 | 2 |
| Número de estudiantes | 1 | 2 | 3 | 4 |

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por:

A: el conjunto de 30 apoderados del taller.

B: el conjunto de cantidad de estudiantes.

C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación

Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Desarrollo de la clase:**<br>**Fase de acción**<br>**(10 min.)**<br>**Fase de formulación**<br>**(20 min.)** | **4. Solución al problema**<br>4.1 Los alumnos trabajan en su hoja.<br>-Buscan estrategias propias.<br>-Comprueban sus estrategias e intercambian opiniones con su compañero. | 4.1 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra).<br>-Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error.<br>**- Basado en la observación, selecciona a tres grupos, uno con respuesta errónea, uno con repuesta incompleta, uno con respuesta correcta pero distintas estrategia. Dos representantes de cada grupo presentan su estrategia en la pizarra.** | ¿Discuten con su compañero?<br>¿Identifican los conjuntos asociados al desafío?<br>¿Determinan los elementos del conjunto C? (probabilidades)<br>¿Definen la relación entre el conjunto A y el conjunto B? (variable aleatoria)<br>¿Definen la relación entre el conjunto B y el conjunto C?<br>¿Registran en la hoja posibles representaciones?<br>¿Logran representar la V.A como una función?<br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

**Anticipación de dificultades/ Devoluciones**
$D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
$D_2$: También entendida como la dificultad para identificar los subconjunto que componen la partición del espacio muestral.
$D_3$: Dificultad en asignar probabilidad a los valores de la variable aleatoria en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la partición del espacio muestral.
$D_4$: Dificultad para identificar función de probabilidad, particularmente asignarle un valor de probabilidad a cada valor de la variable aleatoria
$D_5$: Dificultad para definir la variable aleatoria como relación funcional

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Momento de exposición y discusión de estrategias**<br><br>**(25 min.)** | **5. Trabajo en la pizarra**<br><br>5.2 Tres alumnos definen las relaciones entre los conjuntos involucrados en el desafío, representan dichas relaciones y explican cómo obtuvo su respuesta.<br><br>**Est. 1 Define la relación entre A y B y/o B y C, de manera errónea. Las representa incorrectamente.**<br><br>**Est. 2 Define correctamente la relación entre el conjunto A y B o entre B y C. Representa la relación mediante diagrama, tabla o gráfico.**<br><br>**Est. 3 Define correctamente las relaciones entre el conjunto A y el conjunto B y el conjunto B y el conjunto C. Representa estas a través de diagramas o tabla.** | 5.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes.<br><br>5.2 Pide a cada uno de los tres grupos, seleccionados previamente, uno a la vez que pegue en la pizarra el papelógrafo elaborado con su respuesta y explique su estrategia de resolución al grupo curso.<br><br>**5.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos del conjunto C?**<br><br>**¿Es posible representar en un solo esquema o dibujo las dosraciones?** | ¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra?<br><br>¿Explican sus estrategias?<br><br>¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos?<br><br>¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?<br><br>¿Hay alumnos que abandonan el desafío?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

**Posibles estrategias**
Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos utilizando diagrama sagital.
Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natura.
Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabula.
Estrategia 3: Representar la relación entre conjuntos en lenguaje gráfico

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Cierre de la clase:**<br><br>**Fase de institucio-nalización**<br><br>**(20 min.)** | **6. Sintetizar las ideas**<br><br>6.1 Se ilustra en la pizarra la correspondencia que involucra los conjuntos A y B, y los conjuntos B y C, a través de diagramas (en caso de no haberlo propuesto un estudiante) | 6.3 Se muestra la correspondencia entre elemento de dos conjuntos previamente mencionada por estudiantes y pregunta<br><br>i) **¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función?** [Se espera que los estudiantes consideren la def. de función y respondan que cada apoderado le corresponde solo una cantidad de | ¿Los estudiantes participan activamente en la clase?<br><br>¿Los estudiantes identifican que las relaciones definidas son funciones? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6.2 Se destaca las relaciones definidas por los tres estudiantes.<br><br>6.3 **¿La relación entre los elementos de los conjuntos podrá representar una función? ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función**?<br><br>6.4 ¿Cuántas funciones observas?<br><br>6.5 **Introducción del concepto nuevo "Variable aleatoria"** | estudiantes o que cada grupo de apoderados con una número específico de estudiantes tienen una única posibilidad de ganar las entradas].<br><br>ii) Se pregunta a algunos estudiantes: **¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? [Se espera que los estudiantes respondan que todos los elementos del conjunto A tengan una única imagen en el conjunto B]**<br><br>6.4 Se espera que reconozcan dos funciones, una asociada a los conjuntos A y B, y otra asociada a los conjuntos B y C. [Se espera que los estudiantes encuentren dos relaciones entre conjuntos que además cumplen con ser funciones y que logren categorizarlas según sus características. Entre A y B que relacionan un elemento con un número real y entre B y C un número real y la probabilidad asociada]<br><br>***6.5 Las funciones que aparecen en el problema, son funciones especiales una reciben el nombre de "Variable Aleatoria" (Relación entre los elementos del conjunto A y B) y la otra "Función de Probabilidad" (Relación entre los elementos del conjunto B y C)***<br><br>***Una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral $\Omega$ y recorrido es $B$, que relaciona a cada resultado de un experimento aleatorio, con un número real.***<br><br>$\boldsymbol{X}: \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}$ | ¿Los estudiantes asignan un nombre a las funciones identificadas?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

<table>
<tr><th colspan="3">PIZARRA DE LA CLASE</th></tr>
<tr>
<td>Fecha<br>Objetivo<br><br>Desafío</td>
<td>Estrategias de los estudiantes<br><br><u>Relación(es) definida(s)</u><br><u>Representación</u><br><br><u>Relación(es) definida(s)</u><br><u>Representación</u><br><br><u>Relación(es) definida(s)</u><br><u>Representación</u></td>
<td>Conclusiones de la actividad<br><br>Def. de variable aleatoria<br><br>Def. de función de probabilidad</td>
</tr>
</table>

### 2.5.4 Análisis a priori

El análisis a priori al cual se hace referencia considera los siguientes elementos:

- Matemática involucra en el desafío
- Respuesta experta para resolver el desafío
- Posibles estrategias de los estudiantes para resolver el desafío
- Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

A continuación se desarrollan cada uno de estos elementos.

**Matemática involucrada en el desafío**

La matemática en juego en el desafío corresponde a:

- Experimento aleatorio: Corresponde a sortear una rifa.
- Espacio muestral: Apoderados del taller, conjunto A= {apoderado 1, apoderado 2, ……, apoderado 29, apoderado 30}
- Partición de un conjunto: Se obtiene la partición del conjunto de apoderados que tienen inscritos el mismo número de estudiantes.
- Sucesos compuestos: Apoderados con el mismo número de estudiantes , es decir son 4 sucesos, el conjunto de apoderados que tienen un estudiante inscrito, el conjunto de apoderados que tienen dos estudiantes inscritos, el conjunto de apoderados que tienen tres estudiantes inscritos y el conjunto de apoderados que tienen cuatro estudiantes inscritos.
- Dominio de una función: En la relación entre los conjuntos A y B, el dominio corresponde al conjunto A de 30 apoderados del taller. Entre los conjuntos B y C, es el conjunto B cantidad de estudiantes B={1, 2, 3, 4}
- Recorrido de una función: En la relación entre los conjuntos A y B, el recorrido corresponde al conjunto B. Entre los conjuntos B y C, el conjunto C de posible ocurrencia de cada situación.
- Función: La relación entre los conjuntos A y B, es el número de estudiantes que tiene inscrito en el taller cada apoderado. La relación entre los conjuntos B y C, es la probabilidad que tiene un apoderado de ganar la rifa según la cantidad de estudiantes que posee inscritos en el taller.
- Definición clásica de probabilidad: A los valores de la variable aleatoria {1, 2, 3, 4}, asignarle un valor de probabilidad en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la división del espacio muestral, utilizando la regla de Laplace.

Los conocimientos previos que el estudiante debe aplicar para responder el desafío se organizar en la tabla 8, en correspondencia con el nivel educativo en que se introduce el concepto.

*Tabla 8*. Conocimientos previos en la situación problemas n°1 y nivel educativo introducido

| Concepto matemático | Nivel educativo |
|---|---|
| Experimento aleatorio | 7° básico |
| Espacio muestral | 7° básico |
| Suceso aleatorio | 7° básico |
| Probabilidad clásica: Regla de Laplace | 7° básico |
| Función | 8 básico y 1° medio |
| Dominio de una función | 1° medio |
| Recorrido de una función | 1° medio |

Los conocimientos que se pretenden construir con el desafío son una variable aleatoria y la función de probabilidad asociada, enfatizando en la representación figural de estas funciones.

**<u>Respuesta experta para resolver el desafío</u>**

i) Se define por extensión los conjuntos A, B y C.

Sea el espacio muestral A= {apoderado 1, apoderado 2, apoderado 3, apoderado 4, apoderado 5, apoderado 6, apoderado 7, apoderado 8, ….., apoderado 29, apoderado 30}

Sea el conjunto de cantidad de estudiantes B= {1, 2, 3, 4}

Sea el conjunto de posible ocurrencia de cada situación $C = \left\{\frac{8}{30}, \frac{13}{30}, \frac{7}{30}, \frac{2}{30}\right\}$

ii) Se define las relaciones entre los conjunto A y B

Sea la variable aleatoria X: cantidad de estudiantes que posee un apoderado

iii) Se realizan una división de todos los elementos del conjunto A según la característica de interés, estudiantes que tienen inscritos los apoderados, formándose sucesos compuestos.

$A_1 = \{Apoderados\ \ que\ posee\ un\ estudiante\ inscrito\ en\ el\ taller\}$

Donde $A_1$={apoderado 1, apoderado 2, apoderado 3, apoderado 4, apoderado 5, apoderado 6, apoderado 7, apoderado 8}

$A_2 = \{Apoderados\ \ que\ posee\ dos\ estudiante\ inscrito\ en\ el\ taller\}$

Donde $A_2$={apoderado 9, apoderado 10, apoderado 11, apoderado 12, apoderado 13, apoderado 14, apoderado 15, apoderado 16, apoderado 17, apoderado 18, apoderado 19, apoderado 20, apoderado 21}

$A_3 = \{Apoderados\ \ que\ posee\ tres\ estudiante\ inscrito\ en\ el\ taller\}$

Donde $A_3$= {apoderado 22, apoderado 23, apoderado 24, apoderado 25, apoderado 26, apoderado 27, apoderado 28}

$A_4 = \{Apoderados\ \ que\ posee\ cuatro\ estudiante\ inscrito\ en\ el\ taller\}$

Donde $A_4$= {apoderado 29, apoderado 30}

Así  A= {{apoderado 1, apoderado 2, apoderado 3, apoderado 4, apoderado 5, apoderado 6, apoderado 7, apoderado 8}, {apoderado 9, apoderado 10, apoderado 11, apoderado 12, apoderado 13, apoderado 14, apoderado 15, apoderado 16, apoderado 17, apoderado 18, apoderado 19, apoderado 20, apoderado 21}, {apoderado 22, apoderado 23, apoderado 24, apoderado 25, apoderado 26, apoderado 27, apoderado 28}, {apoderado 29, apoderado 30}}.

iv) Se define las relaciones entre los conjunto B y C

Sea la función de probabilidad  f: probabilidad que un apoderado con b estudiantes sea seleccionado.

v) Se representa la relación entre los conjunto Ay B y entre B y C.

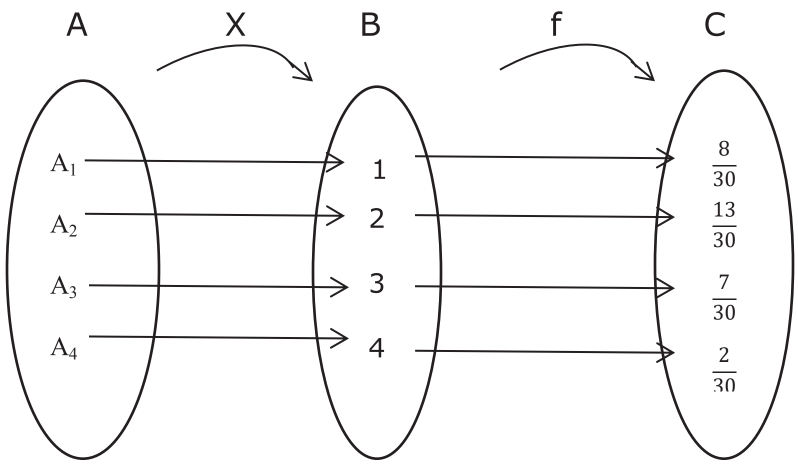



*Figura 13.* Diagrama sagital de la variable aleatoria y función probabilidad del desafío

**<u>Posibles estrategias de los estudiantes para resolver el desafío</u>**

Además de la respuesta experta, se identificaron tres posibles estrategias de los estudiantes para resolver el desafío.

**Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural**

Considerar la relación entre el conjunto A y B como el número de estudiantes que tiene un apoderado.

Considerar la relación entre el conjunto B y C como la posibilidad que un apoderado con "b" estudiantes sea seleccionado

**Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular**

*Tabla 9*. Variable aleatoria y función de probabilidad del desafío

| A<br>Apoderados del taller | B<br>Número de estudiantes inscritos (x) | C<br>Distribución de probabilidad |
|---|---|---|
| apoderado 1, apoderado 2, apoderado 3, apoderado 4, apoderado 5, apoderado 6, apoderado 7, apoderado 8. | 1 | $\frac{8}{30}$ |
| apoderado 9, apoderado 10, apoderado 11, apoderado 12, apoderado 13, apoderado 14, apoderado 15, apoderado 16, apoderado 17, apoderado 18, apoderado 19, apoderado 20, apoderado 21. | 2 | $\frac{13}{30}$ |
| apoderado 22, apoderado 23, apoderado 24, apoderado 25, apoderado 26, apoderado 27, apoderado 28. | 3 | $\frac{7}{30}$ |
| apoderado 29, apoderado 30 | 4 | $\frac{2}{30}$ |

**Estrategia 3: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje gráfico**

Esta estrategia es incompleta, pues solo se representa la relación entre los conjuntos B y C, es decir la función de probabilidad, a través de un gráfico cartesiano funcional (figura 14) o grafico estadístico, como gráfico de barra (figura 15.1) o histograma (figura 15.2).

**Gráfico cartesiano funcional**

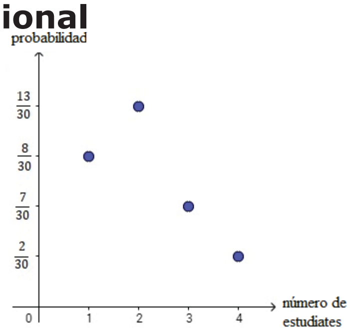



*Figura 14*. Gráfico cartesiano de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del desafío

**Gráfico estadístico**

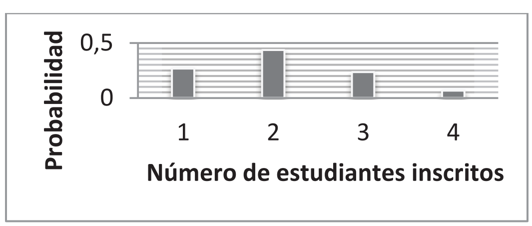



*Figura 15. 1* Gráfico de barra de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del desafío

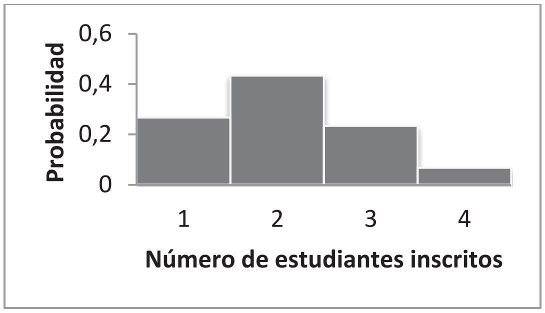



*Figura 15.2* Histograma de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del desafío

## Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

Las posibles dificultades y errores que pueden presentar los estudiantes al abordar el desafío, se organizar con su respectiva devolución en la tabla 10.

*Tabla 10*. Limitaciones de aprendizaje y devoluciones para el desafío del Estudio de Clases.

| Concepto | Dificultad | Error | Devolución |
|---|---|---|---|
| Espacio muestral | $D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio (Batanero, 2001). | $E_1$: Identificar como espacio muestra del experimento la cardinalidad de los sucesos compuestos. El estudiante afirma que el espacio muestral es A= { 8, 13, 7, 2} | ¿Cuánto apoderados tienen inscritos en el taller a estudiantes? ¿Cuáles son los elementos del conjunto? |
| | | $E_2$: Identificar el espacio muestra asociado al experimento como una colección de números. El estudiante determina todos los elementos del conjunto A como una colección de números A= {1, …, 30} | Considere el curso 2° medio ¿Cómo puedo representar el conjunto de los estudiantes que utilizan lentes? ¿Cuáles son los elementos? ¿Quién puede representarlo en el pizarrón? |
| Suceso aleatorio compuesto/ Partición del espacio muestral. | $D_2$: Dificultad para identificar los sucesos aleatorios compuestos asociado al espacio muestral/ También entendida como la dificultad para identificar los subconjunto que | $E_3$: El estudiante reconoce que hay 4 sucesos compuesto en el espacio muestral, pero los representa como su cardinalidad. / El estudiante reconoce que el espacio muestral se ha particionado, quedando constituido por cuatro subconjunto, aunque representa cada uno de ellos con su | ¿Cuáles son los elementos del conjunto A? ¿Cuántos elementos tiene? ¿Cuántos elementos tienen el conjunto A que usted definió? El número 8 ¿a qué corresponde en el desafío? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | componen la partición del espacio muestral (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013). | cardinalidad.<br>Ejemplo: el estudiante afirma que el espacio muestral es<br>A= { 8, 13, 7, 2} | |
| Cálculo probabilidad | $D_3$: Dificultad en asignar probabilidad a los valores de la variable aleatoria en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la partición del espacio muestral. (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora, 2011). | $E_4$: El estudiante identifica como número de casos posibles a 63 apoderados, por ejemplo $\frac{7}{63}$ | ¿Cuántos elementos posee el conjunto A (espacio muestral)?<br>Se realiza el sorteo de la rifa ¿Cuál es la posibilidad de obtener un boleto de un apoderado con tres estudiantes en el taller de artes? |
| Función de probabilidad | $D_4$ : Dificultad para identificar función de probabilidad, particularmente asignarle un valor de probabilidad a cada valor de la variable aleatoria (Ruíz, 2006) | $E_5$: estudiante define la relación entre los conjuntos A y C ( probabilidad definida sobre el espacio muestral) en vez de definir la relación entre los conjuntos B y C ( función de probabilidad asociada a la variable aleatoria) | ¿Cómo está definido el conjunto B?<br>¿Cuántos elementos tiene el conjunto B?<br>¿Cuáles son los elementos del conjunto B? |
| Variable aleatoria | $D_5$: Dificultad para definir la variable aleatoria como relación funcional (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013). | $E_6$: El estudiante define la relación entre los conjuntos A y B, como la relación del conjunto B a un conjunto A $(B \rightarrow A)$ o que es la cantidad de apoderados que tiene cada alumno.<br>Por ejemplo 1 alumno tiene 8 apoderados, 2 alumnos tienen 13 apoderados, 3 alumnos tienen 7 apoderados y 4 alumnos tienen 2 apoderados. | Lea el primer párrafo enunciado del problema.<br>¿Qué información necesita saber en el colegio?<br>En la relación que ha definido ¿Puede observar o conocer esa relación? |

## 2.6 Vinculación del análisis a priori con los instrumentos de recogida de datos

En el análisis a priori desarrollado previamente, se identificó la matemática en juego en el desafío, se previeron los comportamientos posibles de los estudiantes al abordar este y se propusieron devoluciones ante algunas dificultades o errores que podían surgir. Cabe destacar que en esta instancia solo se alude al primer y segundo aspecto mencionado, ya que son estos los que permitieron establecer las categorías de análisis de datos.

Entre los conceptos matemáticos que se identificaron previamente se consideraron: espacio muestral, sucesos, cálculo de probabilidad y función. La identificación de estos elementos posibilitó establecer cuatro categorías de análisis en la fase de acción de la situación didáctica (Brousseau, 2007), (ver tabla 11). El reconocer por parte de los estudiantes estos elementos, cuando realizaron una lectura comprensiva del cuestionario, dan cuenta como ellos se interiorizaron con el desafío en la primera fase de la TSD.

Se determinaron tres posibles estrategias de resolución del desafío: respuesta experta (representar la relación entre los conjuntos utilizando diagrama sagital), estrategia 1 (representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural) y estrategia 2 (representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular). Estas hicieron posible establecer seis categorías de análisis en la fase de formulación de la situación didáctica (Brousseau, 2007), como se aprecia en la tabla 12.

Es importante mencionar que los datos obtenidos en la aplicación de los instrumentos (cuestionario y video de la aplicación de la clase) fueron analizados con las mismas categorías de análisis expuestas en la tabla 11 y tabla 12.

El anclaje entre el instrumento de recogida de datos, particularmente el cuestionario y categorías de análisis, se resumen en la tabla 11 y tabla 12.

*Tabla 11*. Clasificación del cuestionario de acuerdo al análisis a priori en la fase de acción.

| Instrumento | Identificación de conceptos matemáticos | Fase | Categoría |
|---|---|---|---|
| Cuestionario: Lectura comprensiva del enunciado. | Espacio muestral | Acción | $C_1$: El estudiante identifica el espacio muestra asociado al experimento. |
| | Suceso compuesto (Partición de un conjunto) | Acción | $C_2$: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral |

<table>
<tr><td rowspan="3">Desafío<br>A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:<table><tr><td>Número de apoderados</td><td>8</td><td>13</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>Número de estudiantes</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.<br>Dados los conjuntos A, B y C definidos por:<br>A: el conjunto de 30 apoderados del taller.<br>B: el conjunto de cantidad de estudiantes.<br>C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación<br>Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.</td><td></td><td></td><td>según la característica de interés del problema.</td></tr>
<tr><td>Cálculo de probabilidad</td><td>Acción</td><td>$C_3$: El estudiante identifica que los elementos del conjunto C son probabilidades</td></tr>
<tr><td>Función</td><td>Acción</td><td>$C_4$: El estudiante identifica que la relación entre los conjuntos A y B está representada en la tabla dada.</td></tr>
</table>

*Tabla 12*. Clasificación del cuestionario en la fase de formulación, de acuerdo al análisis a priori.

<table>
<tr><th>Instrumento</th><th>Estrategia</th><th>Fase</th><th>Categoría</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Cuestionario: Requerimiento<br>Desafío<br>A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:<table><tr><td>Número de apoderados</td><td>8</td><td>13</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>Número de estudiantes</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.<br>Dados los conjuntos A, B y C definidos por:<br>A: el conjunto de 30 apoderados del taller.<br>B: el conjunto de cantidad de estudiantes.<br>C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación<br>Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.</td><td>Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural</td><td>Formulación</td><td>$C_5$: El estudiante identifican e indica en lenguaje natural la relación entre los conjuntos A y B</td></tr>
<tr><td>Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos utilizando diagrama sagital</td><td>Formulación</td><td>$C_6$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje figural</td></tr>
<tr><td>Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular</td><td>Formulación</td><td>$C_7$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje tabular.</td></tr>
<tr><td>Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural</td><td>Formulación</td><td>$C_8$: El estudiante identifican e indica en lenguaje natural la relación entre los conjuntos B y C</td></tr>
<tr><td>Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos utilizando diagrama sagital</td><td>Formulación</td><td>$C_9$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos B y C en lenguaje figural</td></tr>
<tr><td>Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular</td><td>Formulación</td><td>$C_{10}$: El estudiante representa la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje tabular.</td></tr>
</table>

## 2.7 Análisis a posteriori

En el presente apartado se expone el análisis de datos obtenidos en la implementación de la clase y los resultados conseguidos, en relación a la problemática propuesta.

En una primera etapa, se realiza una descripción de la implementación de la clase.

En una segunda etapa, se presenta el análisis de resultados. Para la reducción de la información, las respuestas que iban dando los grupos de estudiantes en el transcurso de la resolución del cuestionario (desafío), observadas en sus producciones o discurso (video de la implementación de la clase), fueron clasificadas conforme a las categorías previamente establecidas. Luego se analizaron los conceptos matemáticos y estrategias que manifestó cada grupo de alumnos al resolver el desafío. Para ello, se describe el actuar de los grupos de estudiantes con base a las categorías de análisis y se expone una evidencia para cada una de estas.

En una tercera etapa, se declaran los resultados del estudio, momento centrado principalmente en la interpretación que se hace de las respuestas que los grupos de estudiantes dieron a medida que fueron resolviendo el desafío (cuestionario), haciendo notar el conocimiento matemático empleado y dificultades que emergieron.

En una cuarta y última etapa se realiza la discusión de los resultados.

### 2.7.1 Descripción de la implementación de la clase

En la implementación de la clase, los estudiantes se organizaron en cinco grupos, como se aprecia en la tabla 13.

*Tabla 13*. Organización de un curso de 22 estudiantes en grupos.

| Grupo | Cantidad de estudiantes |
|---|---|
| G1 | 5 |
| G2 | 5 |
| G3 | 4 |
| G4 | 3 |
| G5 | 5 |
| Total | 22 |

En la aplicación de la clase se llevaron a cabo los siguientes momentos: inicio de la clase, desarrollo de la clase (fase de acción-fase de formulación-momento de exposición y discusión de estrategias) y por último el cierre de la clase (institucionalización).

Aunque en el cierre de la clase solo se logró implementar hasta la fase de sintetizar ideas donde los estudiantes discutieron, y argumentaron porque las relaciones identificadas y representadas previamente en el desafío corresponden a funciones, todo ello en un tiempo de 90 minutos. No se alcanzó a formalizar los conceptos de variable aleatoria y función de probabilidad.

### 2.7.2 Análisis y síntesis de resultados

En este apartado, las respuestas al desafío de cinco grupos de estudiantes, organizados como se apreció en la tabla 13, fueron clasificadas en diez categorías anteriormente expuestas, a partir de la fase de acción y fase de formulación de TSD, como se expone en la tabla 14. Cabe mencionar que este proceso se realizó a partir de estrategias dados por grupos de alumnos, posterior a que fueron planteadas algunas devoluciones al curso o estudiantes por parte del docente.

Tabla 14. Clasificación de los conceptos matemáticos y estrategias utilizadas por los estudiantes para responder al desafío.

| **Fase** | **Categoría** | **Grupo** |
|---|---|---|
| Acción | $C_1$: El estudiante identifica el espacio muestra asociado al experimento. | $G_1$-$G_2$-$G_3$-$G_4$ (17 estudiantes) |
| Acción | $C_2$: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral según la característica del problema. | $G_1$-$G_2$-$G_3$-$G_4$ (17 estudiantes) |
| Acción | $C_3$: El estudiante identifica que los elementos del conjunto C son probabilidades | $G_1$-$G_2$ -$G_4$ (13 estudiantes) |
| Acción | $C_4$: El estudiante identifica que la relación entre los conjuntos A y B está representada en la tabla dada. | $G_2$ (5 estudiantes) |
| Acción | $C_5$: El estudiante identifican e indica en lenguaje natural la relación entre los conjuntos A y B | $G_1$-$G_3$ ( 9estudiantes) |
| Formulación | $C_6$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje figural | $G_1$ -$G_3$ (9 estudiantes) |
| Formulación | $C_7$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje tabular. | $G_2$ (5 estudiantes) |
| Formulación | $C_8$: El estudiante identifican e indica en lenguaje natural la relación entre los conjuntos B y C | $G_1$- $G_4$ (8 estudiantes) |
| Formulación | $C_9$: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos B y C en lenguaje figural | $G_1$ (5 estudiantes) |
| Formulación | $C_{10}$: El estudiante representa la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje tabular. | $G_2$ (5 estudiantes) |
| | No responde | $G_5$ (5 estudiantes) |

En la fase de acción, inicialmente cuatro grupos $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3 \text{ y } \mathrm{G}_5)$ identificaron como espacio muestra la cardinalidad de los cuatro sucesos compuestos que lo conforman (o cardinalidad de los cuatro subconjuntos al realizar una partición en A), (ver figura 16). Después de realizar la devolución prevista en el plan de clase, fue posible clasificar a cuatro grupos en la categoría $C_1$, aunque dos de ellos $(\mathrm{G}_1 \text{ y } \mathrm{G}_4)$, identificaron el espacio muestral asociado al experimento como una colección de números (ver tabla 15).

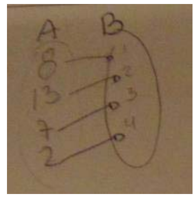
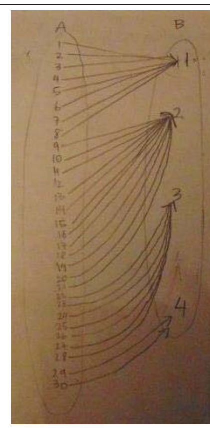
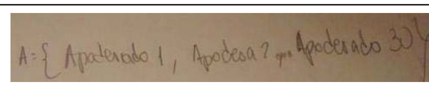
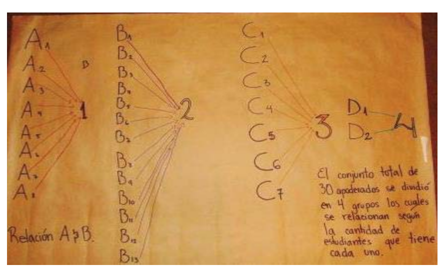
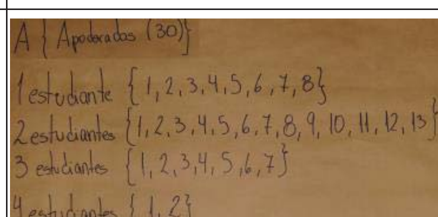
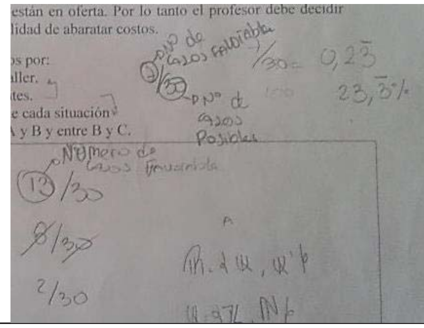
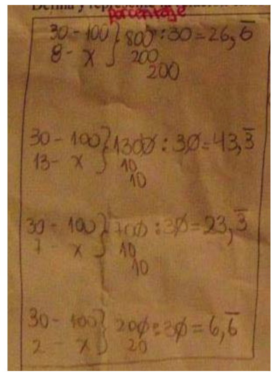
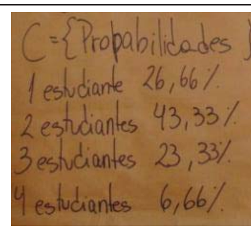



*Figura 16.* Identificación del espacio muestral de $G_1$ antes de plantear devolución al curso.

Además en la fase se acción, solo a tres grupos $(G_1, G_2, G_4)$ identificaron que el conjunto C está compuesto por probabilidades de sucesos y determinaron sus cuatro elementos, clasificándolos en la categoría $C_3$. Dos grupos $(G_2 \text{ y } G_3)$ representaron las probabilidades a través de porcentajes y un grupo $(G_1)$ como cociente entre el número de casos favorables del suceso y número de casos posibles (ver tabla 15).

*Tabla 15*. Evidencias de grupos en algunas categorías de la fase de acción.

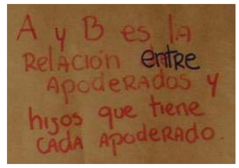
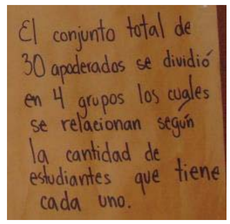
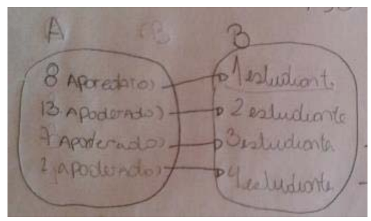
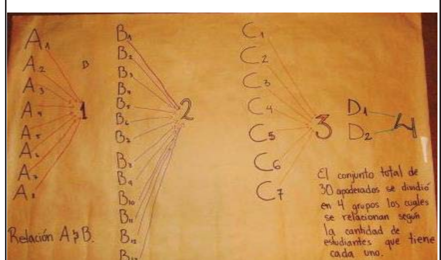
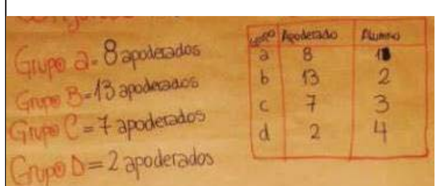
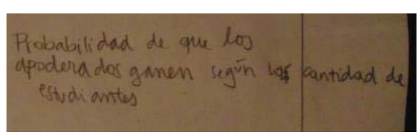
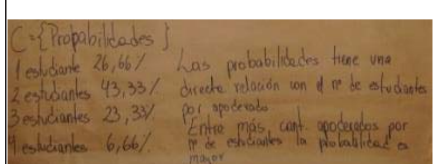
| Fase | Categoría | Grupo | Evidencia | Concepto matemático |
|---|---|---|---|---|
| Acción | $C_1$ | $G_1$ |  | Espacio muestral |
| | | $G_2$ |  | |
| | | $G_3$ |  | |
| | | $G_4$ |  | |

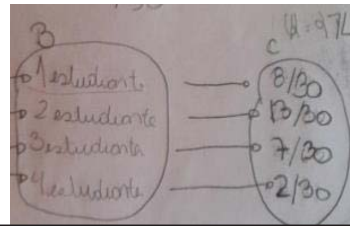
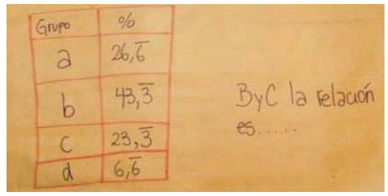
<table>
<tr><td></td><td>$C_3$</td><td>$G_1$</td><td>
</td><td rowspan="3">Cálculo de probabilidad</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$G_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$G_4$</td><td>
</td></tr>
</table>

En la fase de formulación, tres grupos $(G_1, G_2, G_3)$ identificaron en el desafío la variable aleatoria, dos de ellos $(G_1 \text{ y } G_3)$ representaron la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje natural $(C_5)$ y lenguaje figural $(C_6)$ a través de un diagrama sagital o esquema. Además solo un grupo ($G_2$) representó dicha relación a través de una tabla $(C_7)$, (ver tabla16).

También en la fase de formulación, tres grupos $(G_1, G_2 \text{y } G_4)$ reconocieron la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria, dos de ellos $(G_1 \text{ y } G_4)$ representaron la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje natural $(C_8)$. Además el grupo $G_1$ representó la relación en lenguaje figural mediante un diagrama sagital $(C_9)$, (ver tabla 6). Es importante destacar que la respuesta del grupo $G_{2,}$ fue clasificada en la categoría $C_{10}$, ya que se identificaron en ella elementos de la estrategia 2, como el hecho de que una de las columnas de la tabla corresponde a la probabilidad. Además en su discurso evidenciaron haber reconocido la función de probabilidad (ver tabla 16), aunque precisamente en la tabla representaron la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad.

*Tabla 16*. Evidencias de grupos en cada categoría de la fase de formulación.

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Categoría</th><th>Grupo</th><th>Evidencia</th><th>Estrategia</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Formulación</td><td rowspan="2">$C_5$</td><td>$G_1$</td><td>
</td><td rowspan="2">Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural</td></tr>
<tr><td>$G_3$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$C_6$</td><td>$G_1$</td><td>
</td><td rowspan="2">Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural</td></tr>
<tr><td>$G_3$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$C_7$</td><td>$G_2$</td><td>
</td><td>Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$C_8$</td><td>$G_1$</td><td>
</td><td rowspan="2">Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural</td></tr>
<tr><td>$G_4$</td><td>
</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $C_9$ | $G_1$ |  | Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural |
| | $C_{10}$ | $G_2$ | <br>*"Por ejemplo la probabilidad de un apoderado que tiene un hijo gane la rifa".* | Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular. |

### 2.7.3 Principales resultados

A continuación se exponen los principales resultados sobre el análisis de desarrollado anteriormente.

En la fase de acción, se identificaron entre los conceptos que permitieron a los alumnos interiorizar el desafío: el espacio muestral, suceso compuesto (partición de un conjunto) y cálculo de probabilidad. Un ejemplo de ello lo muestra la figura 17

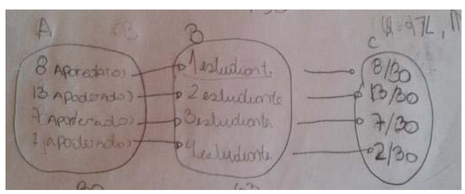


*Figura 17*. Respuesta al desafío de $G_1$

También en dicha instancia, se estableció que los estudiantes presentaron dificultad para identificar el espacio muestral del experimento aleatorio. Después que se planteó al curso la devolución prevista en el plan de clase, la mayoría de los grupos (4 grupos) logró identificar la cardinalidad del espacio muestral, pero continuaron describiendo sus elementos como una colección de números (2 grupo) y no como una colección de personas (ver figura 18)

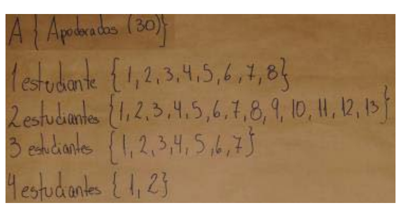



*Figura 18*. Identificación del espacio muestral de $G_4$

Además, los estudiantes presentaron dificultad para identificar probabilidad de sucesos, ya que solo tres grupos identificaron que los elementos del conjunto C son probabilidades, un ejemplo de eso se aprecia en la figura 19. Sin embargo, estos grupos realizaron una correcta comprensión del objeto matemático, que expresaron en forma de porcentaje (reconociendo que es una parte del 100%) o representaron como cociente (distinguiendo que es una parte de la unidad).

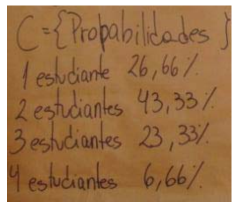



*Figura 19*. Identificación del conjunto C de $G_4$

En la fase de formulación se aprecia, en las producciones o discurso de los grupos, que solo un grupo no respondió al requerimiento (ver figura 20). Los cuatro grupos restantes, que abordaron el desafío, utilizaron entre sus estrategia para representar a la variable aleatoria, el lenguaje natural, lenguaje figural o lenguaje tabular.

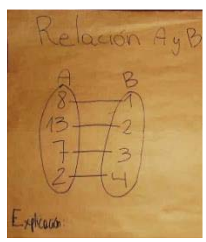



*Figura 20*. Respuesta al desafío de $G_5$

Finalmente, en la segunda fase, fue posible identificar dificultad asociada a aplicar el concepto de función real en el contexto de probabilidad. Solo tres grupos identificaron la función de probabilidad, un ejemplo de esto se expone en la figura 21. Uno de ellos (grupo $G_1$) la representó en lenguaje natural y figural, otro grupo ($G_4$) lo hizo empleando sólo el lenguaje natural y el restante (grupo $G_2$) empleó el lenguaje tabular. Aunque el grupos $G_2$, representó en su hoja la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad, apreciándose una complejidad epistemológica relacionada a la composición de función el dicho contexto.

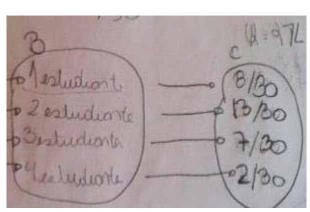



*Figura 21*. Identificación de la función de probabilidad de $G_1$

### 2.7.4 Discusión

Entre los resultados de este estudio se consideran, las identificación de dificultades que surgen cuando se enfrentan a un problema vinculado con la variable aleatoria (de manera implícita) y contenidos matemáticos relacionados.

Entre las dificultades identificadas se encuentra dificultad en identificar elementos del espacio muestral, como también se evidencian en el trabajo de Batanero (2001), la cual afirma que los estudiantes pueden tener dificultades en identificar todos los posibles resultados de un experimento, es decir el espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades.

También se evidenció la dificultad en identificar las probabilidades de sucesos, constatada por Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2011) y Vásquez (2014).

Del mismo modo, se constató la dificultad asociada a la comprensión de funciones conjunto de valor real, cuando debe aplicar en un contexto de probabilidad, como también se aprecia en (Jiménez y Rupin, 2013). En particular se observó, dificultad en relacionar el recorrido de la variable aleatoria con el conjunto de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles valores. Sobre esto último, Ruiz (2006) identifica que la dificultad de asignar probabilidades a los valores de la variable aleatoria puede deberse a que el estudiante no podría desvincular la probabilidad de su cálculo a través de la regla de Laplace, y por lo tanto olvidar su interpretación como la razón entre los favorables y los posibles, así como también por no poder desligar el valor de la variable aleatoria (en el desafío propuesto número de estudiantes) de los eventos (apoderados con ese número de estudiantes), lo que repercute en que no represente el conjunto de los estudiantes con un número (el valor de la variable aleatoria correspondiente).

Como resultado de la implementación del desafío se evidenció la utilización implícita de la variable aleatoria sin haber sido definida previamente (Ruiz, 2006).

## 2.8 Contraste entre análisis a priori y posteriori

Sobre la gestión de la clase, la fase de institucionalización no se llevó a cabo como estaba prevista, ya que el momento de la fase de acción-fase de formulación tuvo una duración de 40 minutos, 10 minutos más de lo planificado. Esto se debió a que los estudiantes presentaron dificultad en identificar el espacio muestral del experimento aleatorio.

En las estrategias de resolución desarrolladas por los grupos de estudiantes para dar respuesta al desafío, se apreciaron elementos de tres estrategias propuestas en el análisis a priori: respuesta experta, mediante el uso de diagrama sagital o esquema; estrategia 1, haciendo uso del lenguaje natural (cotidiano); estrategia 2, a través de la utilización de tablas.

Particularmente, ninguno de los grupos de estudiantes representó la relación entre los conjuntos B y C a través de un gráfico estadístico o cartesiano, como se propuso en el análisis a priori (estrategia 3).

Cabe destacar que dos grupos (8 estudiantes) en su estrategia de resolución, para determinar los elementos del conjunto C, aplicaron proporción directa y representaron cada uno de sus cuatro elementos a través de porcentajes, aspecto no considerado en el análisis a priori.

A demás se reflexionó en torno a la puesta en práctica del plan de clase y se acordó modificar los tiempos destinado a cada momento de la lección, para en una próxima implementación lograr llevar a cabo en su totalidad el plan diseñado. Además de establecer que en la última etapa, institucionalización, la formalización del concepto variable aleatoria se realice considerando las producción de los estudiantes, explicar el concepto y cada uno de los términos matemáticos relacionados a ésta a partir de las estrategias de los alumnos plasmadas en papelógrafo, más que la presentación de una definición mediante símbolos matemáticos.

A continuación, en el tercer capítulo se presenta la secuencia didáctica diseñada.

## 2.9 Conclusiones sobre los objetivos y pregunta de investigación

En este capítulo, se presentan las principales conclusiones del estudio entorno a los objetivos de investigación.

Sobre el primer objetivo específico propuesto *"diseñar una situación didáctica que permita introducir el concepto variable aleatoria".* El estudio del currículo, textos escolares y epistemología del concepto, sirvieron como sustento para la creación de la situación didáctica. Aquella es un desafíos propuesto en el contexto de juegos de azar, donde se originó y tiene significado el objeto variable aleatoria. Con el desafío se abordó la introducción de la variable aleatoria desde su significado funcional, haciendo hincapié a la representación figural, con la finalizada que el estudiante visualizara que el objeto involucrado en una función y lleve a cabo una construcción paulatina de este conocimiento tan complejo.

En relación a los objetivos específicos planteados, *"implementar la situación didáctica y* analizar los datos obtenidos con base en la teoría de situaciones didácticas". Se aplicó el desafío, a 22 estudiantes del nivel segundo medio, en el contexto de la implementación del segundo ciclo del Estudio de Clases. A partir del trabajo desarrollado por los grupos de estudiantes en la fase de acción y fase de formulación de la situación, se obtuvo información sobre los conocimientos previos que utilizaron para interiorizar el desafío y estrategias empleadas para responder éste. Así como la constatación de algunas dificultades.

Los conocimientos que requiere el estudiantes para construir el objeto variable aleatoria son: concepto de espacio muestral, partición de un conjunto (sucesos compuestos), concepto de función y sus distintos registro de representaciones. Mientras que las estrategias e

Entre las estrategias de resolución al desafío, los estudiantes para definir y representar la relación entre los conjuntos requeridos, utilizaron los distintos registros de representación de la variable aleatoria, como: el registro figural (diagrama sagital, esquema), registro natural y registro tabular. Dominar al menos dos de éstos favorece la comprensión del objeto matemático (Duval, 1998)

Sobre la pregunta de investigación planteada, se confirman la presencia de varias dificultades reportadas previamente en la literatura relacionada con la comprensión de la variable aleatoria como: dificultad en identificar elementos del espacio muestral, dificultad en identificar las probabilidades de sucesos y dificultad en aplicar el concepto de función real en un contexto de probabilidad.

Si bien existen investigaciones previas que reconocen la dificultad en la comprensión de la variable aleatoria como función real, estas no conectan estas dificultades con el análisis de los potenciales tipos de registros usados por los estudiantes y los obstáculos intrínsecos asociados a estos:

En relación a la construir tablas, Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2013), afirman que se genera un obstáculo cuando los estudiantes agrupan los elementos del espacio muestral en subconjuntos excluyentes para generar una partición. Persistiendo la idea de que la relación que se busca establecer se da es términos de los valores de la variable aleatoria con los cardinales de los subconjuntos correspondientes de la partición.

Acerca de los diagramas sagitales en la representación de la partición generan dificultades, ya que lo que se ilustra en ellos son la correspondencia si acaso la relación de dependencia entre magnitudes o variables (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán, y Zamora).

# Capítulo 3: Secuencia didáctica

En este capítulo se da a conocer la secuencia didáctica diseñada para aborda la problemática planteada en la introducción. Se organiza en siete apartados:

Inicialmente, se presenta la secuencia didáctica, luego se realiza una explicación y organización de ésta. Posteriormente se expone el objetivo de la secuencia didáctica y la articulación entre los objetivos de cada clase que la compone.

Después, se muestra el marco teórico que sustenta el diseño de la secuencia didáctica.

Finalmente se da a conocer cada una de las tres clases que componen la secuencia didáctica, con su respectivo plan de clase y análisis a priori.

## 3.1 Presentación

Los antecedes expuestos en el capítulo 1, justifica la importancia de diseñar una secuencia didáctica que desarrolle la noción de la variable aleatoria desde su significado funcional. Mediante situaciones vinculadas a contextos reales, donde el estudiante necesite recurrir a sus conocimientos y experiencias previas, relacionarlos con la información que va acceder (proveniente) del enunciado y estudio de cada situación. De esta manera, el desarrollo de la secuencia sea significativa, tenga sentido y permita al estudiante construir conocimiento.

También como sugiere Ortiz (2002), la enseñanza del concepto variable aleatoria debe relacionarse con la probabilidad, ya que es allí donde adquiere sentido y relevancia.

A continuación se da a conocer la secuencia didáctica diseñada.

## 3.2 Explicación y organización de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica propuesta, se diseñada para el nivel segundo medio, unidad temática datos y zar y el tema es probabilidad, específicamente el contenido a abordar es la variable aleatoria.

La secuencia está constituida por tres desafíos, cada uno se abordada en una clase con una duración de 90 minutos.

En la primera clase, se aborda el desafío propuesto para el segundo ciclo del Estudio de Clases (ver tabla 17). Ésta sesión tiene por objetivo *conocer la variable aleatoria y la función de probabilidad asociada*, con la finalidad que el estudiante se introduzca en el estudio del concepto variable aleatoria desde su significado función relacionándolo con la probabilidad. Así, el alumnos comprenda que esta variable es un tipo especial de función que tiene como dominio el espacio muestral y toma valores reales, donde la función de probabilidad necesita de estos valores numéricos para operar.

*Tabla 27.* Desafío n°1 de la secuencia didáctica

**Desafío**

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de apoderados | 8 | 13 | 7 | 2 |
| Número de estudiantes | 1 | 2 | 3 | 4 |

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por:

A: el conjunto de 30 apoderados del taller.

B: el conjunto de cantidad de estudiantes.

C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación

Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

En la segunda clase, se presenta el desafío n°2 (ver tabla 18). Esta sesión tiene por objetivo *determinar variables aleatorias para un mismo experimento aleatorio*, el propósito es que el alumnos a partir de un experimento aleatorio (propuesto), genere distintas variables aleatorias que tengan como dominio el mismo espacio muestral.

Tabla 18. Desafío n°2 de la secuencia didáctica.

**Desafío**

Sofía estudia para la prueba de matemática, probabilidad no es su fuerte, por lo que recurre a buscar en internet un ejemplo de variable aleatoria, pero para un mismo experimento aleatorio encontró dos distintas respuestas, como se aprecia a continuación:

*Se lanzan dos dados de seis caras no cargados.*

*Ejemplo 1: se define la variable aleatoria asociada al número obtenido al sumar los puntos de las caras de los dos dados*

*Ejemplo 2: se suman los números obtenidos y define la variable aleatoria asignar 1 si la suma de los puntos es un número par y 0 en otros casos*.

Ayuda a Sofía a responder ¿Cuál(es) de los ejemplo(s) es (son) correcto(s)? Justifica tu respuesta.

En la tercera clase, se propone el desafío n°3(ver tabla 19). La sesión tiene por objetivo aplicar el concepto de variable aleatoria y función de probabilidad en la resolución de problemas, con la finalidad que el estudiante a través de la utilización de dichos conceptos pueda tomar una decisión informada sobre un juego.

Tabla 19. Desafío n°3 de la secuencia didáctica.

**Desafío**

Jorge asiste a la kermés de su colegio en la que hay distinto juegos y concursos. Elige jugar a la ruleta, como la que se muestra en la figura1


Figura 1. Ruleta

El juego 1 consiste en lanzar dos veces la ruleta, se gana si los números obtenidos son de distintos color y su suma es un número impar.
El juego 2 consiste en lanzar dos veces la ruleta, se gana si los números obtenidos son de igual color y su suma es un número par.
¿Cuál juego le conviene elegir Jorge? Representa el juego ganador a través de un esquema, diagrama o gráfico en donde se visualice la variable aleatoria y la función probabilidad.

En general, los recursos que se emplearan en la secuencia didáctica son presentación power point, para mostrar y leer en colaboración con los estudiantes el enunciado de cada desafío, hoja de trabajo para cada alumno que contenga este impreso, plumones y pliego de cartulina, en el cual cada grupo de alumnos exprese su respuesta y use para exponer su estrategia al curso. Además de una pizarra, su organización para cada clase se expondrá en el apartado de secuencia didáctica.

## 3.3 Objetivo de la secuencia didáctica y articulación entre objetivos de los desafíos

La secuencia didáctica diseñada, tiene como propósito *comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo a diversas situaciones*. Está constituida por tres clases, en cada una de ellas se aborda un desafío distinto. Se busca con las situaciones creadas conectar la matemática con la realidad de los estudiantes presentes en la sala de clase.

En la primera clase, se propone el objetivo *conocer la variable aleatoria y la función de* probabilidad asociada, aunque a los estudiante se les presentará como objetivo *introducir un nuevo concepto asociado a la probabilidad*, para no darles indicios del conocimiento que se pretende que construyan.

En dicha instancia, se aborda  el desafío n°1 (ver tabla 17), el cual requiere que los estudiantes utilicen algunos de sus conocimientos previos como experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos aleatorios, probabilidad clásica y función, con la finalidad que comprendan el enunciado. Posteriormente, el alumno vincule estos conocimientos y construyan una variable aleatoria discreta y función de probabilidad asociada.

De esta manera, los estudiantes se introduzcan en el estudio de nuevos conceptos asociados a la probabilidad, y el profesor a partir de las estrategias de resolución de la situación, propuestas por ellos, defina la variable aleatoria y función de probabilidad. A su vez se revele la vinculación de la variable aleatoria con otros conceptos matemáticos y probabilísticos que en ella convergen, tales como los mencionados anteriormente como conocimientos previos, función de probabilidad, entre otros.

La segunda clase tiene como objetivo *determinar variables aleatorias para un mismo experimento aleatorio*. En esta sesión es propuesto el desafío n°2 (ver tabla 18), en el que se requiere, que los estudiantes apliquen los conocimiento previos expuestos previamente, además del concepto de variable aleatoria introducido la clase anterior, para tomar una decisión sobre cuál(es) de los ejemplos propuestos son variables aleatorias. De esta manera, determinar dos variables aleatorias distintas que poseen como dominio el mismo espacio muestral. Así con este conocimiento que emerge de la resolución del desafío, profundizar en el estudio del concepto.

En la tercera y última clase, se presenta como objetivo *aplicar el concepto de variable aleatoria y función de probabilidad en la resolución de problema*, en ella se propone el desafío n°3 (ver tabla 19). Para resolver este, los estudiantes deben tener en consideración el conocimiento que emergió en la clase anterior, ya que al juego 1 y el juego 2 de la situación problema propuesta, están asociados variables aleatorias distintas que poseen como dominio el mismo espacio muestral del experimento. Además se requiere de los conocimientos previos expuestos anteriormente, el concepto de variable aleatoria y función de probabilidad, pues la situación da la posibilidad a los estudiantes de modelar un fenómeno, en el sentido que permite modelar la relación del espacio muestral mediante la distribución de probabilidad en forma funcional y así responder la situación.

## 3.4 Marco teórico

### 3.4.1 Pertinencia del marco teórico

Según lo expuesto en la introducción del presente escrito, investigaciones realizadas en educación estadística a nivel escolar (educación media), muestran que los estudiantes presentan serias dificultades para comprender el concepto variable aleatoria. Dificultades de tipo cognitiva, epistemológica y didácticas asociadas a su construcción y aplicación a situaciones prácticas.

Las dificultades epistemológicas se reproducen con frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes (Batanero, 2001). Es por ello que el trabajo del profesor es adaptar el concepto a las capacidades cognitiva de los estudiantes, proponerle a éste situaciones de aprendizajes que generen la construcción de sus conocimientos como respuesta individual a una pregunta y le permita aplicarlos o modificarlos en respuesta a las exigencias del medio (Sadovsky, 2005). Este contexto hace necesario utilizar la teoría de situaciones didácticas, para diseñar situaciones didácticas que permitan al estudiante utilizar sus conocimientos previos para introducirse en la comprensión del problema y ofrezca a este una resistencia (conflictos) para cuestionar, hacer evolucionar sus conocimientos anteriores y construir un nuevo conocimiento matemáticos, como la variable aleatoria.

De esta manera, el diseño de la secuencia didáctica propuesta, se sustenta en elementos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), como: situación didáctica, situación a-didáctica, fases de una situación didáctica, contrato didáctico y devolución. La definición de cada uno de estos elementos se encuentra en el apartado de maro teórico del capítulo2.

La aplicación de la TSD, se concreta en la propuesta, debido al diseño de los tres desafíos (situaciones didácticas) en contextos reales y cercanos a los estudiantes y en el diseño de los planes de clases en que se organiza la aplicación de cada una de ellos.

Se pretende que la construcción del concepto emerja de la actividad del estudiante, a través de distintas etapas: una primera fase de acción, donde este se interesa en abordar la situación propuesta e intenta dar respuesta a ella aplicando sus conocimientos previos. La segunda fase de formulación, en la que el estudiante comunica al equipo su estrategia y discute entre pares para generar una estrategia común. Una tercera fase de exposición y discusión de estrategias, donde cada equipo comunica al grupo curso sus resultados, comprobando estos, y llegando a un acuerdo de ideas. Para finalizar con la cuarta fase de institucionalización, en la que el profesor explicita las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante y el saber que desea enseñar.

### 3.4.2 El marco teórico en el diseño de la secuencia didáctica

A continuación se explicitan tres fases de una situación didáctica en cada una de las clases que componen la secuencia didáctica.

Cabe destacar que en el inicio de cada clase se presentara el contrato didáctico, el que consiste en dar las indicaciones necesarias para generar un ambiente propicio para el aprendizaje: levantar la mano para indicar que quiere hablar al grupo curso o preguntar duda, no interrumpir al profesor o compañero cuando habla, respetar las opiniones e ideas de los compañeros, responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo.

### 3.4.3 Clase N°1

La clase tiene como objetivo introducir un nuevo concepto asociado a la probabilidad, su duración es de 90 minutos y está organizada considerando las cuatro fases de una situación didáctica.

**Inició de la clase (10 min.)**

Se presenta el objetivo de la clase, el curso se organizan en grupos de tres integrantes y entrega el material de trabajo (hoja con el desafío impreso a cada estudiante, y un pliego de cartulina y un plumón a cada grupo). Luego se seleccionan dos personas para leer al curso, en voz alta el enunciado, se pregunta ¿Qué debo hacer para resolver el desafío? ¿Quién tiene dudas?

**Desarrollo de la clase 50 min.)**

- Primera fase (fase de acción- 10 min.): Cada grupo lee comprensivamente el enunciado del desafío (ver tabla 18), se interiorizan con este, identificando elementos conceptuales que pueden contribuir posteriormente a su resolución. Determinan el experimento aleatorio, el espacio muestral, los sucesos compuestos (cada uno de los subconjuntos generados de la división o partición del conjunto A según la característica de interés), el conjunto C, particularmente que está constituido por cuatro elementos que son probabilidad de sucesos aleatorios, y que la relación entre el conjunto A y B está representada en la tabla propuesta.
- Segunda fase (fase de formulación- 30 min.): Cada grupo de estudiantes a partir de los conceptos matemáticos identificados previamente, discuten sus ideas y general una estrategia común. La posibles estrategias de resolución pueden ser representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural, a través de un diagrama sagital ( estrategia experta), representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural (estrategia 1), representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular ( estrategia 2) o representar solo una de la relaciones pedidas, entre el conjunto B y C, en lenguaje gráfico, mediante un gráfico estadístico o gráfico cartesiano funcional ( estrategia 3).
- Tercera fase (exposición y discusión de estrategias- 20 min): Tres grupos exponen al curso, sus estrategias de resolución del desafío, utilizan su papelógrafo, el primer grupo con respuesta errónea, el segundo con respuesta incompleta y el tercero con respuesta correcta. En esta instancia los grupos confrontan y comprueban las afirmaciones expresadas previamente, reflejando el razonamiento

lógico matemático logrado y contribuyendo a la construcción de nuevos saberes. Se discuten con el curso sobre las diferencias, similitudes y pertinencia de las estrategias, e identifican los papelógrafo en que están correctamente definida y representada la relación entre los conjuntos A y B y los conjuntos B y C. Cabe destacar que en la clase no se realiza una fase de validación, pues los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación (variable aleatoria).

**Cierre de la clase (20 min.)**

- Cuarta fase (institucionalización-20 min.): El profesor a partir de las producciones de los estudiantes, explica la variable aleatoria y función de probabilidad del desafío. Luego con la representación de los conjuntos A y B, explica el concepto de variable aleatoria y con la representación de los conjuntos B y C, explica el concepto de función de probabilidad. Posteriormente el profesor define formalmente los conceptos mencionados. Las definiciones que se presentaran a los estudiantes se detallan a continuación.
  *"La variable aleatoria es una función $X$ que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio E con un número real, cuyo dominio es $\Omega$ y cuyo recorrido es $Y$, donde $Y \subseteq \mathbb{R}$*

$$X: \Omega \to Y \subseteq \mathbb{R}$$

*Si $X$ es una v. a discreta, entonces la función de probabilidad f asociada a $X$ está dada por*

$$f : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x_i \to f(x_i) = P(X = x_i)\text{”}$$

*(*Muñoz, Sáez, Díaz, López, y Astromujoff, 2014, p. 272)

**3.4.4 Clase N°2**

La clase n°2 tiene como objetivo determinar variables aleatorias para un mismo experimento aleatorio, su duración es de 90 minutos y está organizada considerando las cuatro fases de una situación didáctica.

**Inicio de la clase (15 min.)**

Se presenta el objetivo de la clase, el curso se organizan en grupos de tres integrantes y entrega el material de trabajo (hoja con el desafío impreso a cada estudiante, y un pliego de cartulina y un plumón a cada grupo). Luego se seleccionan dos personas para leer al curso, en voz alta el enunciado, se pregunta ¿Qué debo hacer para resolver el desafío? ¿Quién tiene dudas?

**Desarrollo de la clase (60 min.)**

- Primera fase (fase de acción- 10 min.): Cada grupo lee comprensivamente el enunciado del desafío (ver tabla 19), se interiorizan con este, identificando elementos conceptuales que pueden contribuir posteriormente a su resolución. Determinan el experimento aleatorio, el espacio muestral asociado al experimento aleatorio, variable aleatoria y los sucesos compuestos, es decir cada uno de los subconjuntos generados de la división o partición del espacio muestra según la característica de interés, suma de los puntos obtenidos (en el juego 1) y sumar los puntos y verificar si el número resultante es par (el en juego 2).
- Segunda fase (fase de formulación- 30 min.): Cada grupo de estudiantes a partir de los conceptos matemáticos identificados previamente, discuten sus ideas y general una estrategia común. La posibles estrategias de resolución son justificar que el ejemplo 1 y el ejemplo 2 son variables aleatoria, utilizando el concepto de cuantificar (estrategia 1), utilizando el concepto de función (estrategia 2) o realizar la respuesta experta.
- Tercera fase (exposición y discusión de estrategias- 20 min): Tres grupos exponen al curso, sus estrategias de resolución de la situación problema, utilizan su papelógrafo, el primer grupo con respuesta errónea, el segundo con respuesta incompleta y el tercero con respuesta correcta. En este momento de la clase, los grupos confrontan y comprueban sus argumentos expresados previamente, evidenciando el razonamiento lógico matemático logrado y contribuyendo a la construcción de nuevos saberes. Se discuten con el curso sobre las diferencias, similitudes y pertinencia de las estrategias, e identifican los papelógrafo en que están correctamente determinada las variables aleatorias y representadas. Es importante mencionar que no se realiza una fase de validación, pues no se valida ninguna propiedad, algoritmo, etc.

**Cierre de la clase (15min.)**

- Cuarta fase (fase de institucionalización-15 min): El profesor a partir de las producciones de los estudiantes, formaliza el conocimiento que en un experimento aleatorio se pueden generar distintas variables aleatorias que tengan como dominio un mismo espacio muestral, por ejemplo en el experimento aleatoria de lanzar dos dados de seis caras, entre las variables aleatorias que se pueden crear se encuentran, X: asociada al número obtenido al sumar los puntos de las caras de los dos dados y Z: asignar 1 si la sumas de números es un número par y 0 en otros casos, etc.

### 3.4.5 Clase N°3

La clase n°3 tiene como objetivo aplicar el concepto de variable aleatoria y función de probabilidad en la resolución de problema, su duración es de 90 minutos y está organizada considerando las cuatro fases de una situación didáctica

**Inicio de la clase (15 min.)**

Se presenta el objetivo de la clase, el curso se organizan en grupos de tres integrantes y entrega el material de trabajo (hoja con el desafío impreso a cada estudiante, y un pliego de cartulina y un plumón a cada grupo). Luego se seleccionan dos personas para leer al curso, en voz alta el enunciado, se pregunta ¿Qué debo hacer para resolver el desafío? ¿Quién tiene dudas?

**Desarrollo de la clase (60 min.)**

- Primera fase (fase de acción- 10 min.): Cada grupo lee comprensivamente el enunciado del desafío (ver tabla 20), se interiorizan este, identificando elementos conceptuales que pueden contribuir posteriormente a su resolución. Determinan el experimento aleatorio, el espacio muestral y los sucesos compuestos del juego 1 y del juego 2 (cada uno de los subconjuntos generados de la división o partición del espacio muestral según la característica de interés ganar el juego).
- Segunda fase (fase de formulación- 25 min.): Cada grupo de estudiantes a partir de los conceptos matemáticos identificados previamente, discuten sus ideas y general una estrategia común. La posibles estrategias de resolución pueden ser, representar la variable aleatoria y función de probabilidad asociada al juego 1 a través de un diagrama sagital (estrategia 2), representar la variable aleatoria y función de probabilidad asociada al juego 1 en lenguaje tabular (estrategia 1), desarrollar la estrategia experta o solo representar la función de probabilidad en lenguaje gráfico, mediante un gráfico estadístico o gráfico cartesiano funcional (estrategia 3).
- Tercera fase (exposición y discusión de estrategias- 25 min): Tres grupos exponen al curso, sus estrategias de resolución de la situación problema, utilizan su papelógrafo, el primer grupo con respuesta errónea, el segundo con respuesta incompleta y el tercero con respuesta correcta. En esta etapa de la clase los grupos confrontan y comprueban las ideas manifestadas anteriormente, reflejando el razonamiento lógico matemático logrado y aportando a la construcción paulatina del nuevo saber. Se discuten con el curso sobre las diferencias, similitudes y pertinencia de las estrategias, e identifican los papelógrafo en que están correctamente representada la variable aleatoria asociada al juego 1, la función de probabilidad

asociada al juego 1 o ambas. Cabe destacar que no se realiza una fase de validación, pues no se valida ninguna propiedad, algoritmo, etc.

**Cierre de la clase (10 min.)**

- Cuarta fase (institucionalización 10): El profesor a partir de las producciones de los estudiantes, particularmente considera la representación de la variable aleatoria y la función de probabilidad asociada al juego 1, formaliza el conocimiento matemático que subyace al problema, es decir, la importancia que tienen las variables aleatorias en probabilidad y estadística. Como una función de probabilidad necesita de valores numéricos para hacerla operatoria, una variable aleatoria es necesaria ya que, es el nexo entre lo experimental y la matemática, dado que es una clase especial de función que tienen como dominio el espacio muestral y toma valores reales. A demás la variable aleatoria da la posibilidad de modelar fenómenos aleatorios, en se sentido que permite modelar la relación del espacio muestral mediante la distribución de probabilidad en forma funcional.

## 3.5 Secuencia didáctica: clases N°1

El desafío abordado en la primera clase de la secuencia didáctica, corresponde al mismo aplicado en el segundo ciclo del Estudio de Clases llevado a cabo, por lo que se puede apreciar en el capítulo 2, página 28 (ver tabla 5).

Del mismo modo, el plan de clase correspondiente a la clase n°1 y análisis a priori realizado al desafío n°1 se desarrollaron anteriormente y se exponen en el capítulo 2 en sus respectivos apartados.

## 3.6 Secuencia didáctica: clase N°2

### 3.6.1 Tarea

El desafío abordado en la segunda clase de la secuencia didáctica, se muestra previamente en este capítulo en el apartado explicación y organización de la secuencia (ver tabla 18).

### 3.6.2 Análisis a priori

El análisis a priori al cual se hace referencia considera los siguientes elementos:

- Matemática involucra en el desafío
- Respuesta experta para resolver el desafío
- Posibles estrategias de los estudiantes para resolver el desafío
- Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

A continuación se desarrollan cada uno estos elementos en el desafío n°2

**Matemática involucra en el desafío**

En la clase n°2, la matemática puesta en juego en el desafío es:

- Experimento aleatorio: Corresponde a lanzar dos dados de seis caras
- Espacio muestral: Es el conjunto $\Omega$ ={(1,1), (1,2),(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2), (4,3),(4,4),(4,5),(4,6), (5,1),(5,2),(5,3),(5.4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
- Partición de un conjunto: En el ejemplo 1, se obtiene la partición, conjunto de resultados que obtienen el mismo número al sumar los puntos de las caras de los dos dados. Además en el ejemplo 2, se obtiene la partición conjunto de resultados que obtienen un número par al sumar los puntos de las caras de los dos.
- Sucesos compuestos: En el ejemplo 1, son doce sucesos, uno de ellos es el conjunto de números que al sumar los puntos obtenidos en las dos caras de los dados se obtiene 4. En el ejemplo 2. son dos sucesos, uno de ellos es el conjunto de los números que al sumar los puntos de las caras de los dos dados se obtiene un número par de dos.
- Variable aleatoria: En el ejemplo 1, el dominio es el espacio muestral $\Omega$ y recorrido el conjunto {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. Además la regla de correspondencia es el número obtenido al sumar los puntos de los dos dados. En el juego 2, el dominio es el espacio muestral $\Omega$ y recorrido el conjunto {0,1}. Además la regla de correspondencia asignar el valor 1 si el número obtenido al sumar los puntos de los dos dados es par y O en otro caso.

Los conocimientos previos que el alumno requiere utilizar para comprender la situación problema n°2 se encuentran organizados en la tabla 20

Tabla 20. Conocimientos previos en la situación problemas n°2 y nivel educativo introducido

| Concepto matemático | Nivel educativo |
|---|---|
| Experimento aleatorio | 7° básico |
| Espacio muestral | 7° básico |
| Suceso aleatorio | 7° básico |
| Probabilidad clásica: Regla de Laplace | 7° básico |
| Función | 8 básico y 1° medio |
| Dominio de una función | 1° medio |
| Recorrido de una función | 1° medio |
| Variable aleatoria | 2° medio |

En esta sesión, el conocimiento que se pretenden que emerja, alude a que en un experimento aleatorio se pueden generar distintas variables aleatorias que tengan como dominio un mismo espacio muestral, por ejemplo en el experimento aleatoria de lanzar dos dados de seis caras, entre las variables aleatorias que se pueden crear se encuentran, X: asociada al número obtenido al sumar los puntos de las caras de los dos dados, también sumar los números obtenidos en las dos caras de los dados y definir la variable aleatoria Z: asignar 1 si la sumas de números es un número par y 0 en otros casos, etc.

**Respuesta experta**

Se considera el experimento aleatorio E: lanzar dos dados de seis caras no cargadas y observar sus caras. Asociado a este experimento aleatorio se define el espacio muestral $\Omega$

$\Omega$={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) ,(3,1),(3,2),(3,3),(3,4), (3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5.4),(5, 5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Ahora se dividen todos los elementos del conjunto $\Omega$, según la característica que se desea observar en el experimento aleatorio. Posteriormente a cada suceso compuesto del espacio muestral se le asigna un valor numérico.

**En el ejemplo 1**, la característica que se desea observar en el experimento aleatorio E, suma de los puntos obtenidos, permite definir una variable aleatoria X: número obtenido al sumar los puntos de las caras de los dos dados, cuyos posibles valores que puede tomar X forma el conjunto correspondiente al recorrido de la variable aleatoria X y es $R_X$={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Luego, cada elemento de $R_X$ tiene asociado un suceso o una unión de sucesos (suceso compuesto) de $\Omega$, como se aprecia a continuación:

{(1,1)} $\longrightarrow$ 2
{(1,2), (2,1)} $\longrightarrow$ 3
{(1,3), (2,2), (3,1)} $\longrightarrow$ 4
{(1,4), (2,3), (4,1), (3,2)} $\longrightarrow$ 5
{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)} $\longrightarrow$ 6
{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)} $\longrightarrow$ 7
{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (3,5), (6,2)} $\longrightarrow$ 8
{(4,5), (5,4), (3,6), (6,3)} $\longrightarrow$ 9
{(5,5), (4,6), (6,4)} $\longrightarrow$ 10
{(5,6), (6,5)} $\longrightarrow$ 11
{(6,6)} $\longrightarrow$ 12

**En el ejemplo 2**, la característica que se desea observar en el experimento aleatorio E, es sumar los puntos y verificar si el número resultante es par, permite definir una variable aleatoria como Y: asignar 1 si el número obtenido en la suma de los puntos es un número par y 0 en otros casos, cuyos posibles valores que puede tomar Y forma el conjunto correspondiente al recorrido de la variable aleatoria Y y es $R_Y = \{0,1\}$

Luego, cada elemento de $R_y$ tiene asociado un suceso o una unión de sucesos (suceso compuesto) de $\Omega$, como se aprecia a continuación:

$\{(1,2), (2,1), (1,4), (2,3), (4,1), (3,2), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (4,5), (5,4), (3,6), (6,3), (5,6), (6,5)\} \longrightarrow 0$

$\{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (5,5), (4,6), (6,4), (6,6)\} \longrightarrow 1$

## Posibles estrategias

### Estrategia 1: Utilizar concepto de cuantificar

Considerar el experimento aleatorio E: lanzar dos dados no cargados de seis caras, y asociado a este se tiene el espacio muestral $\Omega$.

*Tabla 21*. Espacio muestral del desafío n°2

| $\Omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Además, una variable aleatoria permite asignar un valor numérico a los resultado de un experimento aleatorio. Así:

**En el ejemplo 1**, se define la variable aleatoria X: asociada a la suma de los puntos obtenidos en los dos dados, donde los resultados numéricos del experimento E se organizan en la siguiente tabla (tabla 22).

*Tabla 22.* Variable aleatoria del ejemplo del desafío n°2

| Resultado | {(1,1)} | {(1,2), (2,1)} | {(1,3), (2,2), (3,1)} | {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,1} | {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)} | {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)} | {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (3,5), (6,2)} | {(4,5), (5,4), (3,6), (6,3)} | {(5,5), (4,6), (6,4)} | {(5,6), (6,5)} | {(6,6)} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

**En el ejemplo 2**, se define la variable aleatoria Y: asignar el valor 1 si la suma de los puntos es un número par y 0 en otros casos, donde los resultado numéricos del experimento E se organizan en la siguiente tabla (tabla 23).

Tabla 23. Variable aleatoria del ejemplo 2 en situación n°2.

| | | |
|---|---|---|
| Resultado | {(1,2), (2,1), (1,4), (2,3), (2,5), (4,1), (3,2), (1,6), (3,4), (4,3), (5,2),(6,1),(4,5), (5,4), (3,6), (6,3), (5,6), (6,5)} | {(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (2,6), (4,4), (5,3), (3,5), (6,2), (5,5), (4,6), (6,4), (6,6)} |
| | 0 | 1 |

## Estrategia 2: Utilizar concepto de función

Considerar el experimento aleatorio E: lanzar dos dados no cargados de seis caras, y asociado a este se tiene el espacio muestral Ω.

Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) ,(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),

(5,1),(5,2),(5,3),(5.4),(5,5) ,(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}.

Además, una variable aleatoria es una función que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio con un número real, cuyo dominio es el espacio muestral y cuyo recorrrido es un subconjunto de los números reales. Así:

**En el ejemplo 1**, se define la variable aleatoria X: asociada a la suma de los puntos obtenidos en los dos dados, cuyo dominio es Ω y el recorrido es $R_X$={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, donde a cada lanzamiento de los dos dados le corresponde un único número resultante de sumar los puntos obtenidos en sus caras. Dicha correspondencia se representa a continuación

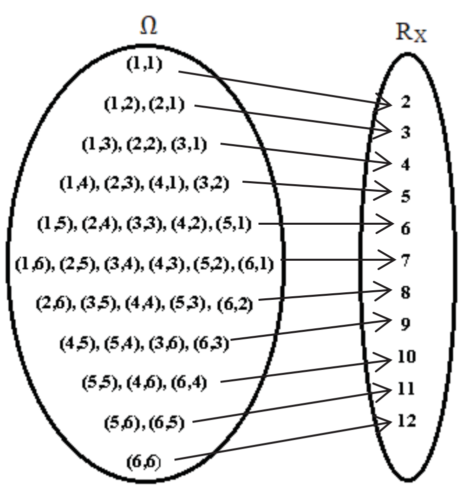



Figura 22. Diagrama sagital de la variable aleatoria del desafío n°2 ejemplo 1

**En el ejemplo 2**, se define la variable aleatoria Y: asignar 1 si la suma de los puntos es un número par y 0 en otros casos, cuyo dominio es Ω y el recorrido es $R_Y$= {0,1}, donde a cada lanzamiento de los dos dados le corresponde un único número resultante de sumar los puntos obtenidos en sus caras, pudiendo ser un número par o impar. Dicha correspondencia se representa a continuación.

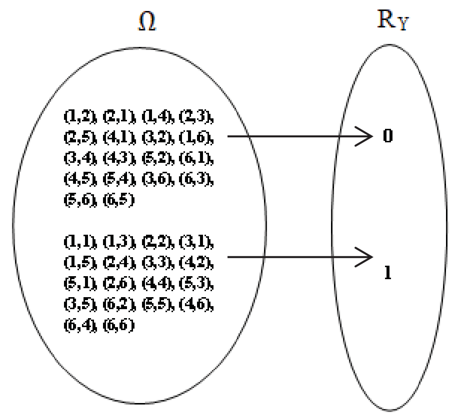



Figura 23. Diagrama sagital de la variable aleatoria del desafío n°2 ejemplo 2.

## Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

*Tabla 24*. Limitaciones de aprendizaje y devoluciones para el desafío n°2.

| Concepto | Dificultad | Error | Devolución |
|---|---|---|---|
| Espacio muestral | $D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio (Batanero, 2001). | $E_1$: Considerara que el resultado (2,5) es el mismo que (5,2). | ¿Qué resultado obtuvo en el primer dado y en el segundo dado? En el caso (5,2) ¿Qué resultado obtuvo en el primer dado y en el segundo dado? |
| Suceso aleatorio compuesto/ Partición del espacio muestral. | $D_2$: Dificultad para identificar los sucesos aleatorios compuestos asociado al espacio muestral. / También entendida como la dificultad para identificar los subconjunto que componen la partición del espacio muestral (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013). | <u>En el ejemplo 2</u><br>$E_2$: Es estudiante clasifica algunos elementos del espacio muestral en 6 conjuntos, según el número par obtenido al sumar los dos números (2, 4, 6, 8, 10, 12)<br>{(1,1)}<br>{(3,1), (1,3), (2,2)}<br>{(3,3), (5,1), (1,5), (4,2), (2,4)}<br>{(4,4), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3)}<br>{(5,5), (4,6) (6,4)}<br>{(6,6)} | <u>En el ejemplo 2</u><br>¿Qué características está observando en cada resultado del experimento que identificó?<br>¿Cuántos son los resultados del experimento que están en el mismo caso (número par)?<br>¿Cuántos son los elementos del espacio muestral?<br>Por ejemplo si obtiene en un dado el n° 1 y en el otro dado el n°2 y suma los números ¿qué característica cumple el número resultante? |
| Variable aleatoria | $D_3$: Dificultad para identificar el recorrido de la variable aleatoria, la cual | <u>En el ejemplo 1</u><br>$E_4$: El estudiante identifica como recorrido de la variable aleatoria {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} | ¿Qué números debe obtener en el primer dado y en el segundo dado para que la suma de estos sea 1? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | puede provenir de una inadecuada comprensión del concepto de función (Díaz, Muñoz y Rupin, 2009) | <u>El en ejemplo 2</u><br>$E_5$: El estudiante identifica como recorrido de la variable aleatoria {2,4,6,8,10,12} | Por ejemplo, considere el elemento del espacio muestral, obtener en un dado el n° 1 y en el otro dado el n°2 y luego sume estos ¿El número resultante con cuál de los valores que identificó puede relacionarlo? |

### 3.6.3 Plan de clase N°2

En la siguiente tabla se aprecia la planificación de la clase n°2 de la secuencia didáctica propuesta, posteriormente se incluye la organización de la pizarra de la sesión.

| MOMENTO: TIEMPO | ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE | INTERVENCIÓN DOCENTE | EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE |
|---|---|---|---|
| **Inicio de la clase:**<br>**15 min.** | **0. Indicaciones de la clase.**<br>**1. Presentación del objetivo de la clase:** Determinar variables aleatorias para un mismo experimento aleatorio.<br>**2. Recordar concepto abordado la clase anterior.**<br>**3. Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo.**<br>**4. Planteamiento del problema**<br>**Desafío**<br>Sofía estudia para la prueba de matemática, probabilidad no es su fuerte, por lo que recurre a buscar en internet un ejemplo de variable aleatoria, pero para un mismo experimento aleatorio encontró dos distintas respuestas, como se aprecia a continuación:<br>*Se lanzan dos dados de seis caras no cargados.*<br>*Ejemplo 1: se define la variable aleatoria asociada al número obtenido al sumar los puntos de las caras de los dos dados*<br>*Ejemplo 2: se suman los números obtenidos y define la variable aleatoria asignar 1 si la suma de los puntos es un número par y 0 en otros casos.*<br>Ayuda a Sofía a responder ¿Cuál(es) de los ejemplo(s) es (son) correcto(s)? Justifica tu respuesta. | 0. Explicitar el contrato didáctico<br>1. Escribir el objetivo de la clase.<br>2. Hacer distinguir a los estudiantes cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben. Preguntar ¿Qué concepto abordado en la clase anterior utilizaremos en esta clase? ¿Qué entiende por variable aleatoria?<br>3. Entrega a cada estudiante la situación problema impresa en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de tres integrantes.<br>Además entrega a cada grupo un pliego de cartulina y un plumón<br>4. Presentación d la situación problema de la clase: Se proyecta en la pizarra el desafío (PPT). Un estudiante lee en voz alta.<br>4.1 Preguntar a un estudiante: ¿Qué entendió del desafío? ¿Cuál es la tarea de hoy?<br>4.2 Preguntar ¿Alguien tiene dudas sobre el desafío? | ¿Los estudiantes idéntica la variable aleatoria como conocimiento previo?<br>¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?<br>¿Comprenden el problema?<br>¿Son capaces de identificar la tarea?<br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Desarrollo de la clase:**<br><br>**Fase de acción**<br><br>**(10 min.)**<br><br>**Fase de formulación**<br><br>**(30 min.)** | **5. Solución al desafío**<br><br>5.1 Los alumnos trabajan en su hoja.<br><br>- Buscan estrategias propias.<br><br>-validan sus producciones e intercambian opiniones con su compañero. | 5.1 Observa las estrategias de los grupos, identifica las variables aleatorias que los estudiantes reconocen para un mismo experimento, además de su argumentación.<br><br>-Identifica dificultad o error y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error.<br><br>**- Basado en la observación, selecciona a tres grupos: el primero de ellos con una respuesta errónea, el segundo de estos con una repuesta incompleta y el tercero de ellos con una respuesta correcta -** | ¿Discuten con su compañero?<br>¿Reconocen que el ejemplo 1 es una variable aleatoria?<br>¿Reconocen que el ejemplo 2 es una variable aleatoria?<br>¿Argumentan su respuesta?<br>¿Definen una variable aleatoria asociada al experimento aleatorio dado, distinta a las propuestas?<br>¿Registran en la hoja posibles representaciones?<br><br>¿Logran representar las V.A como una función?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |
| **Anticipación de dificultades/ Devoluciones**<br>$D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.<br>$D_2$: Dificultad para identificar los sucesos aleatorios compuestos asociado al espacio muestral. / También entendida como la dificultad para identificar los subconjunto que componen la partición del espacio muestral.<br>$D_3$: Dificultad para identificar el recorrido de la variable aleatoria, la cual puede provenir de una inadecuada comprensión del concepto de función. | | | |
| **Momento de exposición y discusión de estrategias**<br><br>**(20 min.)** | **5. Trabajo en la pizarra**<br><br>5.2 Tres grupos identifican variables aleatorias asociadas al experimento propuesto y argumentan su respuesta:<br><br>**El primer grupo con una respuesta errónea (afirma que uno o los dos ejemplos propuestos no corresponden a variables aleatorias)**<br><br>**El segundo grupo con una repuesta incompleta (solo identifica correctamente que uno de los ejemplos corresponde a una variable aleatoria y argumenta a su respuesta)**<br><br>**El tercer grupo con una respuesta correcta (identifica que las dos ejemplos propuesta corresponden a variables aleatorias y argumenta su respuesta, además define otra variable aleatoria asociada al** | 5.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes.<br><br>5.2 Pide a cada uno de los tres grupos, seleccionados previamente, uno a la vez que pegue en la pizarra el papelógrafo elaborado con su respuesta y explique su estrategia de resolución al grupo curso.<br><br>**5.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó que el ejemplo 1 corresponde (o no corresponde) a una variable aleatoria?**<br><br>**¿Cómo determinó que el ejemplo 2 corresponde (o no corresponde) a una variable aleatoria?**<br><br>**¿Cómo determinó una variable aleatoria asociada al experimento aleatorio distinta a las propuestas?** | ¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra?<br><br>¿Explican sus estrategias?<br><br>¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?<br><br>¿Hay alumnos que abandonan la situación problema?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **experimento propuesto y representa como función una de ellas.** | | |
| **Posibles estrategias**<br>Respuesta experta<br>Estrategia 1: Utilizar concepto de cuantificar.<br>Estrategia 2: Utilizar concepto de función. | | | |
| **Cierre de la clase:**<br><br>**Fase de institucio-nalización**<br><br>**(15 min.)** | **6. Sintetizar las ideas**<br><br>6.1 Se escriben en la pizarra las distintas variables aleatorias definidas por los estudiantes para el experimento aleatorio propuesto.<br><br>6.2 Se destacan en los papelógrafo las representaciones de las variables aleatorias realizadas por los estudiantes (en caso de no haber propuesto los estudiantes la representación de la v. a del ejemplo 1 y ejemplo 2, se realiza en la pizarra mediante un diagrama sagital)<br><br>6. 3 Institucionaliza el saber de la clase | 6.1 A partir de las producciones de los estudiantes destacar que para un mismo experimento aleatorio, como el propuesto en la situación problema, se pueden crear variables aleatorias distintas.<br><br>6.2 Para el ejemplo 1 y ejemplo 2 de la situación problema, se expresa la característica o cualidad que permite vincular a cada suceso elemental del experimento aleatorio con un valor numérico y se muestra la correspondencia entre los elemento del dominio y recorrido de la variable aleatoria.<br><br>6.3 ***Al realizar un experimento aleatorio, podemos observar los resultados a partir de distintas característica o cualidad que permitirá*** **vincular a cada resultado del experimento (suceso elemental) con un valor numérico, es decir** ***cuantificar los resultados. Esto significa que para un mismo experimento aleatorio podemos crear distintas variables aleatorias, en el caso de la situación problema propuesta, tienen como dominio un mismo espacio muestral y distinto recorrido.*** | ¿Los estudiantes participan activamente en la clase?<br><br>¿Comprenden que para un experimento aleatorio es posible definir distintas variables aleatorias?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

| PIZARRA DE LA CLASE | | |
|---|---|---|
| Fecha<br>**Objetivo**<br><br>**Desafío** | **Estrategias de los estudiantes**<br><br>Grupo 1<br><br>Grupo2<br><br>Grupo 3 | **Conclusiones de la actividad**<br><br>**Institucionalización del saber** |

## 3.7 Secuencia didáctica: clase N°3

### 3.7.1 Tarea

El desafío abordado en la tercera clase de la secuencia didáctica, se muestra previamente en este capítulo en el apartado explicación y organización de la secuencia (ver tabla 19).

### 3.7.2 Análisis a priori

El análisis a priori al cual se hace referencia considera los siguientes elementos:

- Matemática involucra en el desafío
- Respuesta experta para resolver el desafío
- Posibles estrategias de los estudiantes para resolver el desafío
- Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

A continuación se desarrollan cada uno estos elementos en el desafío n°3

**Matemática involucra en el desafío**

En la clase n°3, la matemática en juego en el desafío n°3 corresponde a:

- Experimento aleatorio: Corresponde a lanzar dos veces una ruleta
- Espacio muestral: Es el conjunto $\Omega$
- Partición de un conjunto: Se define, conjunto de opciones que hay al jugar la ruleta 1 (ganar o perder) y el conjunto de opciones que hay al jugar la ruleta 2.
- Sucesos aleatorios compuestos: En el ejemplo 1 son dos sucesos, uno de ellos es el conjunto de los números obtenidos que son de distintos color y su suma es un número impar y el otro suceso es cualquier otro caso. En el ejemplo 2 son dos sucesos, uno de ellos es el conjunto de los números obtenidos que son de igual color y su suma es un número par y el otro suceso es cualquier otro caso.
- Variable aleatoria: En el ejemplo 1 y juego 2, el dominio es el espacio muestral $\Omega$ y recorrido el conjunto $\{0, 1\}$. Además la regla de correspondencia es asociar 0 a perder el juego y 1 a ganar el juego
- Definición clásica de probabilidad: Asignar probabilidad a los valores de la variable aleatoria $\{0,1\}$, en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la división del espacio muestral, utilizando la regla de Laplace.
- Función de probabilidad: La relación entre los valores de la variable y la probabilidad que tiene Jorge de ganar la ruleta según la característica que cumplan los números obtenidos.

Los conocimientos previos que el estudiante necesita emplear en la situación problema n°3, se presentan en la tabla 25, en relación con el nivel educativo en que se introduce el concepto.

*Tabla 25*. Conocimientos previos en la situación problemas n°2 y nivel educativo introducido

| Concepto matemático | Nivel educativo |
|---|---|
| Experimento aleatorio | 7° básico |
| Espacio muestral | 7° básico |
| Suceso aleatorio | 7° básico |
| Probabilidad clásica: Regla de Laplace | 7° básico |
| Función | 8 básico y 1° medio |
| Dominio de una función | 1° medio |
| Recorrido de una función | 1° medio |
| Variable aleatoria | 2° medio |

En esta clase, se pretende que el conocimiento matemático que subyace al problema, es la importancia que tienen las variables aleatorias en probabilidad y estadística. Como una función de probabilidad necesita de valores numéricos para hacerla operatoria, una variable aleatoria es necesaria ya que, es el nexo entre lo experimental y la matemática, dado que es una clase especial de función que tienen como dominio el espacio muestral y toma valores reales. A demás la variable aleatoria da la posibilidad de modelar fenómenos aleatorios, en se sentido que permite modelar la relación del espacio muestral mediante la distribución de probabilidad en forma funcional.

**Respuesta experta**

Considerar el experimento aleatorio E: lanzar la ruleta dos veces, asociado a este se define el espacio muestral $\Omega$= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

En el **juego 1**, se gana si los números obtenidos son de distintos color y su suma es un número impar, luego se dividen todos los elementos del conjunto $\Omega$ según la característica ganar el juego. Ahora para transformar todos los resultados del espacio muestral $\Omega$ en cantidades numéricas se definen la variable aleatoria X: asignar el valor 1 a ganar y el valor 0 a perder, cuyo recorrido es $R_x$= {0,1}.

Así los sucesos compuestos asociados al recorrido de X son:

{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3) $\longrightarrow$ 0
(3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)}

{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), $\longrightarrow$ 1
(4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4)}

Ahora se define la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X.

$$0 \longrightarrow \frac{13}{25}$$
$$1 \longrightarrow \frac{12}{25}$$

Por lo tanto la probabilidad de que Jorge gane el juego 1 es $\frac{12}{25}$

En el **juego 2**, se gana si los números obtenidos son de igual color y su suma es un número par. Para transformar todos los resultados del espacio muestral $\Omega$ en cantidades numéricas se definen la variable aleatoria Y: asignar el valor 1 a ganar y el valor 0 a perder, cuyo recorrido es $R_Y$= {0,1}.

Luego los sucesos elementales asociados al recorrido de X son

$$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4)\ (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3)\ (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\} \longrightarrow 0$$

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\} \longrightarrow 1$$

Ahora se define la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria Y.

$$0 \longrightarrow \frac{20}{25}$$
$$1 \longrightarrow \frac{5}{25}$$

Por lo tanto la probabilidad de que Jorge gane el juego 2 es $\frac{5}{25}$.

De lo anterior, es más probable que Jorge gane el juego 1.

## Posibles estrategias

### Estrategia 1: Utilizar tabla

Dado el experimento aleatorio E: lanzar la ruleta dos veces, se identifica a través de una tabla el espacio muestral asociado, como se aprecia en la tabla 26.

Tabla 26. Espacio muestral asociado al experimento aleatorio de la desafío n°3.

| $\Omega$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **(1,1)** | **(1,2)** | **(1,3)** | **(1,4)** | **(1,5)** |
| **2** | **(2,1)** | **(2,2)** | **(2,3)** | **(2,4)** | **(2,5)** |
| **3** | **(3,1)** | **(3,2)** | **(3,3)** | **(3,4)** | **(3,5)** |
| **4** | **(4,1)** | **(4,2)** | **(4,3)** | **(4,4)** | **(4,5)** |
| **5** | **(5,1)** | **(5,2)** | **(5,3)** | **(5,4)** | **(5,5)** |

**Para el juego 1**

Se divide el espacio muestral en dos conjuntos disjuntos, un conjunto asociado a los resultados del lanzamiento de la ruleta que permiten ganar el juego 1, y otro conjunto asociado a perder el juego 1. Posteriormente se calcula la probabilidad de cada situación, como se aprecia en la tabla 27.

Tabla 27. Variable aleatoria y función de probabilidad del juego 1 en el desafío n°3.

| A | B | C |
|---|---|---|
| (1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5) | 0 | $\frac{13}{25}$ |
| (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4) | 1 | $\frac{12}{25}$ |

Luego la probabilidad que Jorge gane el juego 1 es $\frac{12}{25}$

**Para el juego 2**

Se divide el espacio muestral en dos conjuntos disjuntos, un conjunto asociado a los resultados del lanzamiento de la ruleta que permiten ganar el juego 2, y otro conjunto asociado a perder el juego 2. Posteriormente se calcula la probabilidad de cada situación, como se aprecia en la tabla 28.

Tabla 28. Variable aleatoria y función de probabilidad del juego 2 en situación n°3.

| A | B | C |
|---|---|---|
| (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (2,3), (2,4) (2,5), (3,1), (3,2), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4) | 0 | $\frac{20}{25}$ |
| (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) | 1 | $\frac{5}{25}$ |

Luego la probabilidad que Jorge gane el juego 2 es $\frac{5}{25}$

Por lo tanto, a Jorge le conviene elegir el juego 1.

**Estrategia 2: Utilizar diagrama sagital**

Dado el experimento aleatorio E: lanzar la ruleta dos veces, se identifica el espacio muestral asociado Ω= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}.

**Para el juego 1**

Se asocian todos los casos posibles del experimento aleatorio al suceso ganar el juego 1 o al suceso perder el juego 1 y se define la variable aleatoria X: asociar 0 a perder el juego y 1 a ganar el juego. Luego se calcula la probabilidad de cada suceso y define la función de probabilidad.

La representación de la variable aleatoria X y función de probabilidad asociada se realiza utilizando diagrama sagital, como se aprecia en la figura 24

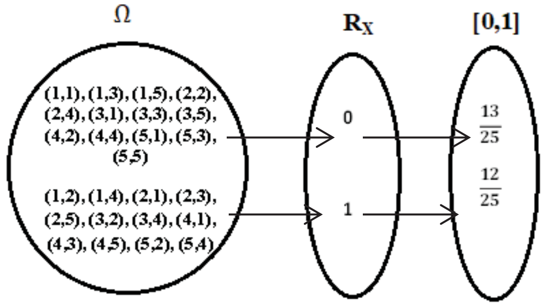



Figura 24. Diagrama sagital de la variable aleatoria y función de probabilidad del juego 1 en la situación n°3.

**Para el juego 2**

Se asocian todos los casos posibles del experimento aleatorio al suceso ganar el juego 2 o al suceso perder el juego 2 y se define la variable aleatoria Y: asociar 0 a perder el juego y 1 a ganar el juego. Luego se calcula la probabilidad de cada suceso y define la función de probabilidad.

La representación de la variable aleatoria Y y función de probabilidad asociada se realiza utilizando diagrama sagital, como se aprecia en la figura 25

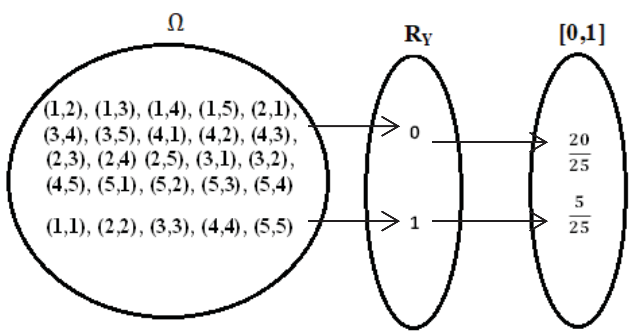



Figura 25. Diagrama sagital de la variable aleatoria y función de probabilidad del juego 2 en el desafío.

**Estrategia 3: Utilizar gráfico**

Esta estrategia es incompleta, pues solo se representa la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del juego ganador a través de un gráfico cartesiano funcional o gráfico estadístico (gráfico de barras o histograma).

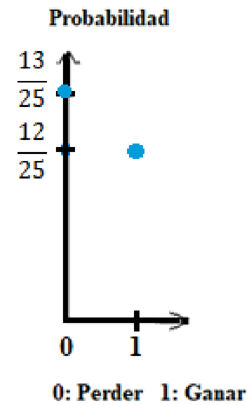



Figura 26. Gráfico cartesiano de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del juego 1.

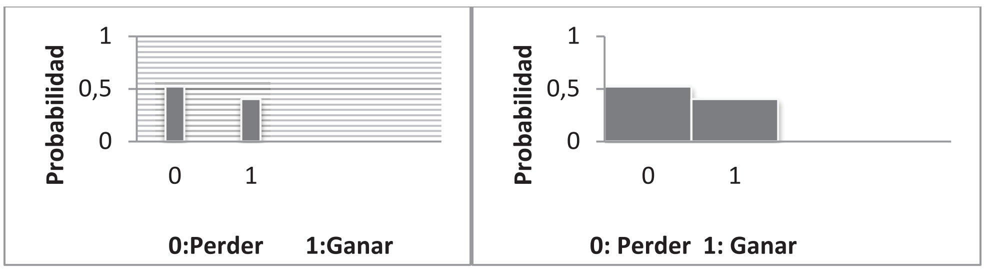



Figura 27. Gráficos estadísticos posibles de la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria del juego 1.

## Dificultades, errores y devoluciones para el desafío

*Tabla 29*. Limitaciones de aprendizaje y devoluciones para el desafío n°2.

| Concepto | Dificultad | Error | Devolución |
|---|---|---|---|
| Espacio muestral | $D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio (Batanero, 2001). | $E_1$: considerara que el resultado (2,5) es el mismo que (5,2). En el caso (2,5) ¿Qué resultado obtuvo en el primer lanzamiento de la ruleta y en el segundo lanzamiento de la ruleta? | En el caso (5,2) ¿Qué resultado obtuvo en el primer lanzamiento de la ruleta y en el segundo lanzamiento de la ruleta? |
| Suceso aleatorio compuesto/ Partición del espacio muestral. | $D_2$: Dificultad para identificar los sucesos aleatorios compuestos asociados al espacio muestral. /También entendida como la dificultad para | En el juego 1<br>$E_2$: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral en dos conjunto: Conjunto de los números de distinto color obtenido. **{(1,2),** (1,3), **(1,4),** (1,5), **(2,1), (2,3),** (2,4), **(2,5),** (3,1), **(3,2), (3,4),** (3,5), **(4,1),** (4,2), **(4,3), (4,5),** (5,1), **(5,2),** (5,3), | Cuando juega a un juego de azar como un raspe, kino o loto ¿Cuántos y cuáles son los posibles resultados? ( ganar o perder)<br>Para juego 1 o Juego 2 ¿Cuántas y cuáles características debe cumplir un resultado obtenido para lograr |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | identificar los subconjunto que componen la partición del espacio muestral (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013). | **(5,4)}.**<br>Conjunto de los números cuya suma es un número impar.<br>{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4)}.<br><u>En el juego 2</u><br>$E_3$: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral en dos conjunto:<br>Conjunto de los números de igual color obtenido.<br>{(1,1) (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}<br>Conjunto de los números cuya suma es un número par.<br>{**(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),** (1,3), (1,5), (2,4),(3,1), (3,5), (4,2), (5,1), (5,3)} | ganar el juego?<br>En todos los elementos que identificó ¿cuántos y cuáles cumplen con ambas condiciones?<br>¿Cuántos y cuáles son los elementos que no cumplen con ambas condiciones? |
| Cálculo de probabilidad | $D_3$: Dificultad en asignar probabilidad a los valores de la variable aleatoria en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la partición del espacio muestral (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora, 2011). | $E_4$: El estudiante identifica a 10 como número de casos posibles, por ejemplo $\frac{12}{10}$ | ¿Cuántos son todos los posibles resultados en el experimento aleatorio lanzar dos veces la ruleta? ¿Podría escribir cada uno de ellos?<br>También plantearle la situación de la clase anterior (situación problema n°2): En el experimento aleatorio lanzar dos dados de seis caras ¿Cuántos posibles resultados había? ¿Por qué?<br>O preguntar sobre la probabilidad asociada a un suceso ¿El número entre que valores puede tomar? |
| Variable aleatoria | $D_1$: Dificultad para definir la variable aleatoria como relación funcional (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2013). | $E_5$: El estudiante identifica erróneamente la variable aleatoria: asigna 1 si los números obtenidos son de distintos color y su suma es un número impar, 2 si los números obtenidos son de igual color y su suma es un número par. | Cuando juegas algún juego de azar, como un raspe, lotería o ruleta ¿cuáles son las posible situaciones que pueden presentarse? (ganar o perder).<br><u>Considerar el juego 1</u> |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | ¿Qué características deben cumplir el número que obtenga para ganar?<br><br>Si obtengo en el primer lanzamiento de la ruleta el número 2 y el segundo lanzamiento de la ruleta el número 2 ¿Podría ganar el juego 1?<br><br>Si obtengo en el primer lanzamiento de la ruleta el número 2 y el segundo lanzamiento de la ruleta el número 4 ¿Podría ganar el juego 1?<br><br><u>De manera análoga se puede proceder al considerar el juego 2</u> |

### 3.7.3 Plan de clase N°3

En la siguiente tabla se aprecia la planificación de la clase n°2 de la secuencia didáctica propuesta, posteriormente se incluye la organización de la pizarra de la sesión.

| **MOMENTO:**<br><br>**TIEMPO** | **ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE** | **INTERVENCIÓN DOCENTE** | **EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE** |
|---|---|---|---|
| **Inicio de la clase:**<br><br>**15 min.** | **0. Indicaciones de la clase.**<br><br>**1. Presentación del objetivo de la clase:**<br><br>Aplicar el concepto de variable aleatoria y función de probabilidad en la resolución de problema**.**<br><br>**2. Recordar conceptos abordados clases anteriores.**<br><br>**3. Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo.**<br><br>**4. Planteamiento del problema** | 0. Explicitar el contrato didáctico<br><br>1. Escribir el objetivo de la clase.<br><br>2. Hacer distinguir a los estudiantes cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben. Preguntar ¿Qué concepto abordado en clases anteriores utilizaremos en esta clase? ¿Qué entiende por variable aleatoria?<br><br>¿Qué entiende por función probabilidad?<br><br>3. Entrega a cada estudiante la situación problema impresa en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de tres integrantes.<br><br>Además entrega a cada grupo un | ¿Los estudiantes identifican la variable aleatoria como conocimiento previo?<br><br>¿Los estudiantes identifican la función de probabilidad como conocimiento previo?<br><br>¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?<br><br>¿Comprenden el problema?<br><br>¿Son capaces de identificar la tarea?<br><br>¿Se cumple el tiempo |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Desafío**<br>Jorge asiste a la kermés de su colegio en la que hay distinto juegos y concursos. Elige jugar a la ruleta, como la que se muestra en la figura1<br><br><br>Figura 1. Ruleta<br>El juego 1 consiste en lanzar dos veces la ruleta, se gana si los números obtenidos son de distintos color y su suma es un número impar.<br>El juego 2 consiste en lanzar dos veces la ruleta, se gana si los números obtenidos son de igual color y su suma es un número par.<br>¿Cuál juego le conviene elegir Jorge? Representa el juego ganador a través de un esquema, diagrama o gráfico en donde se visualice la variable aleatoria y la función probabilidad. | | pliego de cartulina y un plumón<br><br>4. Presentación d la situación problema de la clase: Se proyecta en la pizarra el desafío (PPT). Un estudiante lee en voz alta.<br>4.1 Preguntar a un estudiante: ¿Qué entendió del desafío? ¿Cuál es la tarea de hoy?<br>4.2 Preguntar ¿Alguien tiene dudas sobre el desafío? | planificado? |
| **Desarrollo de la clase:**<br><br>**Fase de acción**<br>**(10 min)**<br>**Fase de formulación**<br>**(25 min.)** | **5. Solución al desafío**<br>5.1 Los alumnos trabajan en su hoja.<br>- Buscan estrategias propias.<br>-Comprueban sus estrategias e intercambian opiniones con su compañero. sus producciones e intercambian opiniones con su compañero. | 5.1 Observa las estrategias de los grupos e identifica a aquellos que determinaron que Jorge tiene más posibilidad de ganar el juego 1. Además identifica los grupos que representan la variable aleatoria y función probabilidad.<br><br>-Identifica dificultad o error y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error.<br>**- Basado en la observación, selecciona a tres grupos: el primero de ellos con una respuesta correcta, el segundo de estos con una respuesta errónea y el tercero ellos con una respuesta correcta con pero con una estrategia distinta a la del grupo 1, para representar la variable aleatoria y función de probabilidad asociada a un juego.** | ¿Los estudiantes discuten con su compañero?<br>¿Determinan todos los casos posibles del experimento y los asocia al suceso ganar o perder en el juego 1?<br>¿Determinan todos los casos posibles del experimento y los asocia al suceso ganar o perder en el juego 2?<br>¿Identifican qué es más probable que Jorge gane el juego 1?<br>¿Definen una variable aleatoria asociada al juego 1?<br>¿Definen la función de probabilidad asociada al juego 1?<br>¿Logran representar la v. a y función de probabilidad?<br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

**Anticipación de errores/ dificultades:**
$D_1$: Dificultad para identificar espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
$D_2$: Dificultad para identificar los sucesos aleatorios compuestos asociados al espacio muestral. /También entendida como la dificultad para identificar los subconjunto que componen la partición del espacio muestral.
$D_3$: Dificultad en asignar probabilidad a los valores de la variable aleatoria en términos de la cardinalidad de los subconjunto que conforman la partición del espacio muestral
$D_1$: Dificultad para definir la variable aleatoria como relación funcional

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Momento de exposición y discusión de estrategias**<br>**(25 min.)** | **5. Trabajo en la pizarra**<br>5.2 Tres grupos identifica<br>el juego que tienen más probabilidad de ganar Jorge y lo representan explicitando la v. a y función de probabilidad asociada:<br>**El primer grupo con una respuesta correcta: afirma que Jorge tiene** | 5.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes.<br>5.2 Pide a cada uno de los tres grupos, seleccionados previamente, uno a la vez que pegue en la pizarra el papelógrafo elaborado con su respuesta y explique su estrategia de resolución al grupo curso. | ¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra?<br><br>¿Explican sus estrategias?<br><br>¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **más posibilidad de ganar el juego 1 y representa la v. a y función probabilidad asociada al juego 1 a través de una tabla o grafico (cartesiano o estadístico)**<br><br>**El segundo grupo con una repuesta errónea: afirma que Jorge tiene más posibilidad de ganar el juego 2 y representa la v. a y función probabilidad asociada al juego 2.**<br><br>**El tercer grupo con una respuesta correcta: afirma que Jorge tiene más posibilidad de ganar el juego 1 y representa la v. a y función probabilidad asociada al juego 1 a través de una esquema diagrama sagital.** | **5.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó el juego que es más probable que gane Jorge?**<br><br>**¿Cuál es la variable aleatoria asociada a ese juego?**<br><br>**¿Cómo representó la variable aleatoria y función de probabilidad asociada a ese juego?** | ¿Hay alumnos que abandonan la situación problema?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |
| -Posibles estrategias<br>- Respuesta experta<br>-Estrategia 1: Utilizar tabla<br>-Estrategia 2: Utilizar diagrama sagital<br>-Estrategia 3: Utilizar gráfico | | | |
| **Cierre de la clase:**<br><br>**Institución-alizaciónn**<br><br>**(15 min.)** | **6. Sintetizar las ideas**<br><br>6.1 Se escriben en la pizarra las variables aleatorias asociadas a los juego 1 y juego 2.<br><br>6.2 Se destacan en los papelógrafo las representaciones de la variable aleatoria y función probabilidad asociada al juego 1, realizadas por los estudiantes.<br><br>6. 3 Institucionaliza el saber de la clase | 6.1 Destacar que en contextos reales como jugar con una ruleta es posible encontrar variables aleatorias, que se presentan de manera implícita y son necesarias para definir funciones de probabilidad que permitan tomar decisiones de manera informada y certera.<br><br>6.2 Para el juego1, se expresa la característica o cualidad que permite vincular a cada suceso elemental del experimento aleatorio con un valor numérico y se muestra la correspondencia entre los elemento del dominio y recorrido de la variable aleatoria.<br><br>Posteriormente se muestra la asignación de un valor de probabilidad a cada valor de la variable aleatoria.<br><br>6.3 ***Destacar la importancia que tienen las variables aleatorias en la probabilidad y estadística. Mostrar que, como una función de probabilidad necesita valores numéricos para hacer la operatoria, una variable aleatoria es necesaria*** | ¿Los estudiantes participan activamente en la clase?<br><br>¿Se cumple el tiempo planificado? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ***ya que es el nexo entre lo experimental y lo matemático, dado que es una clase especial de función que tiene como dominio el espacio muestral y toma valores reales.*** | |

| PIZARRA DE LA CLASE | | |
|---|---|---|
| Fecha<br>**Objetivo**<br>**Desafío** | **Estrategias de los estudiantes**<br>Grupo 1<br>Grupo2<br>Grupo 3 | **Conclusiones de la actividad**<br>**Institucionalización del saber** |

# Capítulo 4: Conclusiones

En este último capítulo se exponen las conclusiones de este trabajo en relación, al Estudio de Clases llevado a cabo y al diseño de la secuencia de clase propuesta.

## 4.1 Conclusiones sobre el Estudio de Clases

El Estudio de Clases, sin duda es un proceso sistemático de aprendizaje, que enriquece la práctica educativa. Como se constató, permitió trabajar de manera colaborativa con compañeros de labor (profesores) y en conjunto comprender e interpretar nuestra práctica educativa. Del mismo modo, innovar en la enseñanza del concepto variable aleatoria, a través del diseño de un plan de clase, implementación y discusión de la clase, el cual favoreció el cambio y mejoró nuestra práctica profesional.

Esta actividad, no solo favorece la práctica en el aula en que se experimenta, sino que también impacta fuera de ésta, influyendo en la formación docente, la elaboración de textos y la innovación curricular (Isoda y Olfos, 2009). Además hizo posible desarrollar un ambiente de aprendizaje motivador para los estudiantes participantes, donde asumieron un rol activo y protagónico en sus aprendizajes y en la construcción del concepto variable aleatoria

Como profesora participante, en la planificación, implementación y discusión del Estudio de Clases, movilizó y permitió reflexionar sobre el conocimiento disciplinar, didáctico y pedagógico del concepto variable aleatoria, necesarios para el proceso. Según Barboza y Zapata (2013) estos aspectos ayudan a que se manifiesten las creencias y concepciones de los profesores y posibilita la generación de conocimiento didáctico del contenido, necesario para anticipar los procesos de enseñanza con pertinencia.

En relación al conocimiento didáctico del contenido, es aquel conocimiento que se relaciona con las formas de enseñar el contenido, por lo tanto va más allá que el contenido en cuestión (Shulman, 1986). Entre los identificados en este estudio se encuentran:

- Las distintas representación de la variable aleatoria, registro figural (diagrama sagital), registro natural (lenguaje cotidiano, es *una función cuyo dominio es el espacio muestral $\Omega$ y recorrido es $B$, que relaciona a cada resultado de un experimento aleatorio, con un número real*) y registro tabular (tabla de valores).
- La variable micro didáctica, cantidad de elementos que posea el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

- La historia y epistemología de la variable aleatoria, primeros indicios en el año 1200 y se vincula con los juegos de azar.

Sobre la pregunta de investigación propuesta *¿Cuáles son las dificultades* que enfrentan los estudiantes sobre variable aleatoria en un problema asociado a la probabilidad? Se evidenció la dificultad en identificar elementos del espacio muestral. Además de la dificultad asociada a la comprensión del con concepto de función en el contexto de probabilidad, en particular la dificultad en relacionar el recorrido de la variable aleatoria con el conjunto de valores de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles. También se constató la dificultad en identificar las probabilidades de sucesos.

En respuesta a la pregunta *¿Qué conocimientos requiere el estudiante de secundaria para construir el objeto matemático variable aleatoria?* Es posible identificar que estos conocimientos son, el concepto de espacio muestral, partición de un conjunto (sucesos compuestos), que los estudiantes utilizan de manera implícita dividiendo los elementos de un conjunto a partir de una característica, el concepto de función y sus distintos registro de representaciones

Finalmente, es fundamental para el desarrollo profesional docente, que en los establecimientos educacionales donde nos desempeñamos como profesor, promovamos estas instancias participativas y de reflexión crítica, mediante las cuales se fomenta el aprendizaje tanto en profesores como estudiantes.

## 4.2 Conclusiones en relación a la secuencia didáctica

En relación al objetivo, se puede dar cuenta de:

*Proponer una secuencia didáctica que favorezca la comprensión de la enseñanza del carácter funcional de la variable aleatoria en educación media.*

Para lograr este objetivo, se realizó un análisis preliminar del objeto matemático variable aleatoria, en el que se incluyó el contexto escolar y aspectos epistemológicos, tanto desde la disciplina matemática como su evolución histórica. A la luz de la información obtenida, teniendo claro la problemática a indagar y considerando algunos elementos de la TSD, comenzó a diseñarse la secuencia didáctica.

Se inició la elaboración de cada una de los desafíos, donde se pretendía abordar el concepto variable aleatoria desde su noción de función, enfatizando en sus distintos registros de representación: lenguaje figural, lenguaje natural y lenguaje tabular. Según Duval (1998), que el estudiante domine dos distintos y variados registro de representaciones semiótica, es una de las dos condiciones necesarias, para afirmar que el este ha aprehendido un objeto matemático. Particularmente, se destaca el lenguaje figural, pues el estudiante mediante el uso de un diagrama sagitales o un esquema, es más favorable que visualice la división de los elementos del espacio muestral a partir de una característica de interés (partición de un conjunto) y posteriormente vincule cada uno de estos sucesos compuestos con un valor real a través de una correspondencia, es decir identifique la variable aleatoria.

Se diseñaron desafíos en el contextos de juegos de azar, ya que según el análisis histórico epistemológico, es donde se origina el concepto variable aleatoria. Además estos están vinculados a contextos reales, y tratan en profundidad y de manera adecuada los contenidos matemáticos vigentes en el currículo nacional.

En relación a la innovación, este estudio, propició diseñar nuevos tipos de clases, a través de la creación de situaciones didácticas para apoyar a los alumnos a comprender el concepto de variable aleatoria discreta, donde los estudiantes tienen un rol activo y son el actor principal en la construcción de su conocimiento. Del mismo modo, las situaciones propuestas están relacionadas a contextos reales y cercanos a los estudiantes, como el juego de una rifa en el día del alumno, estudiar probabilidad y recurrir a buscar ejemplos en internet y el juego de una ruleta en una kermés. Además cada ellas trata en profundidad y de manera adecuada los contenidos matemáticos vigentes en el currículo nacional.

El llevar a cabo una innovación, hizo posible un estudio más profundo del objeto variable aleatoria, desde la disciplina matemática y en el contexto de enseñanza escolar, identificando y constatando algunas dificultades de aprendizaje. Todo ello favoreció la mejora de mi práctica docente.

A través de este monográfico se pretender aportar a la comunidad educativa, con contenidos matemáticos y didácticos del concepto variable aleatoria, que contribuyan al proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Compartir esta experiencia con profesores para proporcionar información del objeto matemático variable aleatoria en el contexto escolar, generar una reflexión de su labor educativa e interés en innovar en su propia práctica.

## Referencias


Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada, España: Universidad de Granada.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*, New York: Springer.

Beltrán, L. y Suárez, W. (2014): Una propuesta para la noción de variable aleatoria discreta y algunas representaciones en grado 5°. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estadística* (pp. 238-243). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Jiménez, M., González, M., López, M., Romero, P. y Díaz, M. (2009). *Texto escolar matemática 2º proyecto bicentenario*. Santiago: Santillana.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Burrill, G. (2011). The role of statistics in improving education. En Satellite conference IASE, *Statistics Education and Outreach* (pp. 1-4). Dublin, Irlanda.

Díaz, M., Muñoz, G. y Rupin, P. (2009). *Matemática 2 proyecto bicentenario.* Santiago: Santillana

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Concha, A. (2010). *Una propuesta didáctica para el aprendizaje de variable aleatoria en 3NM bajo la perspectiva de la teoría APOE*. Tesis de magister no publicada. UCSH. Chile.

Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de probabilidad. *SUMA, 55*, pp. 7-20.

Fernández, F., Andrade, L., Montañez, J., Beltrán, J. y Zamora, S. (Junio, 2011). *Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria.* Comunicación presentada en la XIII *Conferência Interamericana de Educação Matemática (*XIII CIAEM), Recife, Brasil.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2013). Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria. En P. Perry, C. Samper, O. Molina, L. Camargo, A. Echeverry, F. Fernández, L. Andrade & B. Sarmiento (Eds.), *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística* (pp. 93-163). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Evans, M. y Rosenthal, J. (2004). *Probabilidad y estadística la ciencia de la incertidumbre*. Barcelona: REVERTÉ.

Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de probabilidad. *SUMA, 55*, pp. 7-20.

Fischer, H. (2011). *A history of the central limit theorem from classical to modern probability theory.* New York: Springe.

García, M. (2005). *Introducción a la teoría de la probabilidad I. Primer curso*. México D.F: FCE.

González, P. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 9* (3), 28 1-289.

Heitele, D. (1975). Un punto de vista epistemológico sobre las ideas fundamentales estocásticas*. Estudios de la educación en matemáticas, 6*, 187-205.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Cd. de México: McGraw-Hill.

Isoda, M. y Olfos, M. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso: Ediciones.

Jiménez, L. y Rupín, P. (2013). *Matemática 2° medio guía didáctica del docente.* Santiago: Ediciones SM.

Ladín, P. y Salinas, J. (2016). Probabilistic reasoning of high school students on sample space and probability of compound events. En C. Batanero y E Chernoff (Eds.), *13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-4). Hamburgo, Alemania.

Mateos, G. y Morales, A. (2002). Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la teoría de la decisión. En F. Martín (Ed.), *Historia de la probabilidad y de la estadística* (pp. 1-18). Madrid, España: Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas*. Bulcaramanga: Ediciones UIS.

Méndez, T. y Guzmán, I. (2016). Aproximación intuitiva a la aleatoriedad, el caso de alumnos de 13 y 14 años de un liceo municipal. *Bolema*, *30*(56), 1145- 1164.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media.* Santiago: autor.

Muñoz, G., Rupin, P. y Jiménez, L. (2013). *Matemática 2º medio texto escolar. Santiago: SM.*

Muñoz, G., Sáez, N., Díaz, M., López, M. y Astromujoff, N. (2014). *Puente del Saber Matemática 2° Medio.* Santiago: Santillana.

Morin, A. (julio, 2002). *How far can we go in the Statistics curriculum development at the secondary school level to reach successfully the objective?* Reporte de investigación presentado en el 6th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6), Ciudad del Cabo, Sudáfrica.

Nardecchia, G. y Hevia, H. (2003). *Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria*. Trabajo presentado en el V Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy, Argentina.

Ortiz J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Tesis doctoral no publicada. Grupo de educación estadística de la Universidad de Granada. España.

Oseguera F. (1994). *El concepto de variable aleatoria en el contexto del currículo. Análisis y Alternativas.* Tesis de Maestría. México D.F, México: CINVESTAV-IPN.

Pearson, K. (1924). Historical note on the origin of the normal curve of errors*. Biometrika, 16*(3), 402-404

Pérez, M. (2009) *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes.* Madrid, España*:* Visión Libros.

Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 589-598. México D.F: Comité Latinoamericano de. Matemática Educativa.

Restrepo, L. y González, J. (2003). La historia de la probabilidad. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias*, *16* (1), pp. 83-87.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN. México.

Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos Matemáticos relacionados por estudiantes* *universitarios.* Tesis de doctorado. Granada, España: Universidad de Granada.

Ruiz, B. y Albert, J. (2013). *Un análisis epistemológico de la variable aleatoria*. Monterrey, México: ITESM.

Salazar, R. (2014).*La variable aleatoria desde la perspectiva de la teoría APOE.* Tesis de magister. Valparaíso, Chile: PUCV.

Shulman, L (1986). Those who understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Suárez, L. (2002). *Introducción a la Teoría de Probabilidad*. Manizales. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Barboza, J. y. Zapata, H. (2013). El estudio de clase, estrategia y escenario para la cualificación del profesor de matemáticas. *Formación universitaria, 6* (4), 49-62.

Vásquez, M. (2014). *Secuencia didáctica: Introducción a los significados clásico y frecuencial de la probabilidad para estudiantes de grado quinto de primaria.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Vladimirovna, O. (2005). *Fundamentos de Probabilidad y Estadística.* Cd. de México: Universidad Autónoma del Estado de México.