Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

“SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE ECUACIONES LINEALES UTILIZANDO PROPIEDAD CANCELATIVA EN $\mathbb{N}$”

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DE: VERÓNICA FUENTES COFRÉ
PROFESORES: PATRICIA VÁSQUEZ, ELISABETH RAMOS Y ROMINA MENARES

VALPARAÍSO, DICIEMBRE DEL 2017

DEDICATORIA

No te rindas, aún estás a tiempo
de alcanzar y comenzar de nuevo,
aceptar tus sombras,
enterrar tus miedos,
liberar el lastre, retomar el vuelo.
No te rindas que la vida es eso,
continuar el viaje, perseguir tus sueños,
destrabar el tiempo,
correr los escombros y destapar el cielo.
No te rindas, por favor no cedas,
aunque el frío queme,
aunque el miedo muerda,
aunque el sol se ponga y se calle el viento.
Aún hay fuego en tu alma,
aún hay vida en tus sueños.
Porque cada día es un comienzo nuevo,
Porque esta es la hora
y el mejor momento.
Porque no estás sola, Porque yo te quiero.

“No te rindas”
Mario Benedetti

Perseguí mis sueños, y los seguiré haciendo, gracias a mi maravillosa familia que me da las fuerzas para no rendirme jamás, gracias padre, por ser el mejor padre que me pudo haber dado Dios, a mi madre, una mujer fuerte, perseverante y digno ejemplo a seguir, mi pequeña y bella hermana, quien siempre recuerda aquello que olvido con facilidad. Mi mayor ejemplo, mi oma, como quisiera algún día ser tan noble y con tanta sabiduría.

A mis amigos, amigas, compañeras, compañeros, colegas y a todos aquellos que aportaron con un abrazo, un beso, una caricia, un ánimo que se puede!. Agradecida también de aquellos profesores que creyeron en mis capacidades y no dudaron en abrir mis alas e impulsar mi vuelo.

Agradecida de la vida y de cada día para comenzar.

ÍNDICE

Resumen 5
Introducción 5
Objeto matemático: Ecuaciones lineales de un paso 8
Objeto matemático en el currículo 8
Definición escolar/Saber escolar 9
Definición experta/Saber erudito 11
Distancia entre saberes escolar/erudito 11
Análisis Histórico Epistemológico 12
Perspectiva histórica 12
Grandes Civilizaciones 15
    Civilización Egipcia 15
    Civilización Mesopotámica 15
    Civilización Griega 16
    Civilización Hindú 17
    Civilización Árabe 18
Europa 19
Geometría Analítica 21
    Descartes 21
    Euler, Lagrange y Gauss 21
    Galois 23
Asentamiento epistemológico para el sistema de los números naturales 23
La clase del estudio, objetivos y articulaciones 24
Clase Nº1: 26
La tarea de Juan 35
Análisis a priori del plan de estudio 27
    Matemática en Juego 28
    Descripción del plan de clase Nº1 28
    Descripción de la actividad 29
    Errores, dificultades y devoluciones 27
    Respuesta Experta 32
    Posibles estrategias 34
    Plan de clases 34

Clase Nº2 43
Matemática en Juego.......... 45
Análisis a priori del plan de estudio 46
Errores, dificultades y devoluciones.......... 48
Respuesta Experta 51
Posibles estrategias.......... 52
Clase Nº3 54
Posibles estrategias.......... 55
Respuesta experta.......... 56
Dificultades, errores y devoluciones 57
Plan de clases 60
Matemática en juego.......... 62
Diseño de la Investigación y pertinencia del marco teórico 63
Metodología y Teoría.......... 63
Contexto y sujetos 64
Técnicas de análisis de datos 64
Análisis de Resultados 65
Análisis a posteriori 65
Contraste entre análisis.......... 67
Conclusión.......... 68
Referencias 69
Anexos 73
Técnicas de recogida de datos.......... 73
Evidencias y registros de las categorías de análisis 73
Síntesis global de resultados.......... 75
Recursos Clase Nº1 75
Espiral de conocimientos a traves de niveles escolares.......... 77
Objetivos de aprendizaje 78

RESUMEN

Se presenta una secuencia didáctica de tres clases, que se origina de un Estudio de Clases Japonés, con marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, con el objetivo de abordar y solucionar la problemática presentada por estudiantes de entre 10 y 11 años, al enfrentar tareas matemáticas que involucran la resolución de ecuaciones lineales de un paso, en el sistema de los números naturales. Se exponen a su vez, antecedentes sobre la problemática, objeto matemático, descripción de cada plan de clase, la respuesta experta de cada actividad matemática, las posibles estrategias que pueden tomar los alumnos, los errores y dificultades que pueden tener los alumnos, las devoluciones que puede realizar el docente, la matemática que los estudiantes deben poner en juego frente a las tareas de cada clase, el objeto matemático en currículo nacional vigente, las definiciones escolares y antecedentes que sustentan la estructura y planificación de las actividades de cada plan de clases.

Palabras claves: Ecuaciones lineales en $\mathbb{N}$, secuencia didáctica, objeto matemático, Estudio de Clases Japonés y Teoría de Situaciones Didácticas.

INTRODUCCIÓN

Las dificultades que presentan los estudiantes de quinto básico en la educación chilena, cuando se enfrentan a la tarea de resolver ecuaciones lineales de primer grado, y los procesos o estrategias que utilizan para su desarrollo, son nuestro tema de interés. Como se mencionará más adelante, los estudiantes usan razonamientos como, “si a este lado está sumando, al otro, pasa restando”, la que podría formalizarse como el uso del inverso aditivo en séptimo año básico – sin pretender establecer un remedial – pero ¿son significativas las estrategias utilizadas por los alumnos de este nivel?, ¿qué pasa cuando los estudiantes conocen únicamente los números naturales?, ¿tiene sentido el uso del inverso aditivo? Estas dificultades que se presentan en el aula son visibles para el docente y dan paso a diversas investigaciones respecto a ¿cómo se propone a nivel nacional dentro del currículo el objeto matemático?, ¿cuáles son las proyecciones curriculares?, ¿de qué manera se presenta a los estudiantes en los textos de estudio?, ¿qué pasa con la naturaleza u origen del objeto matemático?, ¿cómo evolucionó en el tiempo?, ¿cuáles serían aquellas estrategias propias del nivel educativo de los estudiantes para introducir efectivas propuestas didácticas?, todos estos cuestionamientos con la finalidad de propiciar el aprendizaje significativo y colaborativo, donde el estudiante sea aquel que a partir de sus conocimientos, habilidades e hipótesis cimienten la adquisición de sólidas bases matemáticas, y el docente sea quien logre proponer la interacción entre saber, estudiante y medio.
La investigación se inicia a partir de los lineamientos que da el Ministerio de Educación chileno, encontrándonos con que en quinto año básico, se encuentra el objetivo de aprendizaje: “resolver problemas, usando ecuaciones […] de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica” (MINEDUC,

año 2013, p. 120). En relación a lo anterior, se presentan algunos antecedentes que evidencian la existencia de dificultades por parte de los estudiantes al enfrentar a la resolución de ecuaciones lineales de un paso en $\mathbb{N}$ y de aquellos presentes en la literatura, que orientan la creación de actividades con la finalidad de proponer una innovación en el aula.

Hurtado y Torres (2015) señalan que los estudiantes, dado sus años de experiencia con cantidades numéricas exactas y conocidas, tienden a mantener interpretaciones aritméticas de la mayoría de las situaciones algebraicas, y no aceptan la existencia de cantidades desconocidas, de variables con múltiples significados y mucho menos, que el resultado de una expresión pueda ser una letra o una expresión simbólica. Por ello, los autores afirman que la permanencia de una 'cultura aritmética' en los estudios algebraicos, la carencia de conceptos, operaciones y propiedades necesarias para el estudio del álgebra, entre otras, son serias dificultades que los estudiantes deben superar para lograr darle sentido a sus estudios algebraicos (Hurtado y Torres, 2015).

En relación con lo anterior, Zambrano (2011) afirma que, para un gran número de estudiantes, resolver ecuaciones de primer grado, se reduce a la aplicación de algoritmos de forma mecánica, que muchas veces no comprenden y se convierten en un ejercicio de memoria. Por su parte, Chavarría (2014), logra apreciar que varios de los estudiantes no interrelacionan los contenidos matemáticos aprendidos y tienen vacíos conceptuales sobre los contenidos que tuvieron que ser aprendidos anteriormente. A partir de esto, el autor concluye que muchos estudiantes aprendieron de memoria determinados procesos, pero sin analizar realmente el razonamiento que cada problema conllevaba para su resolución. En este contexto, Chavarría (2014) cita a Skemp (1978), quien afirma que la mayoría de los alumnos tienen una comprensión instrumental de la matemática, pero presentan dificultades para comprender la matemática racional (Chavarría, 2014, p. 29).

Al mismo tiempo, Abrate, Pochulu y Font (2008), en su propia versión sobre las dificultades que presentan los estudiantes en relación al objeto en cuestión, afirman que a pesar de la importancia que tienen las ecuaciones en el currículum – independientemente del país del que provenga – por diversas razones, los alumnos no suelen contar con muchos recursos para resolverlas, lo que según los autores, podría deberse a que cuando los alumnos creen conocer todas las técnicas básicas, terminan utilizándolas sin distinción y analizar que el problema pudría haber sido resuelto más fácilmente, a través de otros métodos. Los mismos autores señalan, además, que el uso de algunos modelos de resolución de ecuaciones no resulta inocuo para el aprendizaje de los estudiantes, en tanto conlleva a dificultades que no logran superar y conducen a la aparición de errores. Por lo mismo, se tornaría evidente según ellos, que la falta de un modelo didáctico que sirva de referente adecuado para la resolución de ecuaciones, obstaculiza el proceso de desarrollo de las competencias y habilidades a lograr en esta área (Ibíd, p. 168). Y en relación a los principales errores que los estudiantes cometen en determinados contenidos matemáticos, y en particular en la resolución de ecuaciones, mencionan que un error frecuente, deviene de inferencias o asociaciones incorrectas realizadas por los alumnos, las que se originan por la creación de nuevas reglas de transposición de términos a partir de las que ya conocía, como por ejemplo, tal como se mencionó anteriormente, pensar que cuando un número está sumando a un lado de la igualdad, debe pasar restando al lado opuesto. Se sabe que existen fundamentos teóricos que sustentan las manipulaciones que permiten resolver determinado tipo de ecuaciones, pero en general, según Abrate, Pochulu y Vargas (2006), son sustituidos por abundantes reglas de transformación de ecuaciones que no tienen la validez, que explícita o implícitamente se le asignan. Así, si bien las reglas válidas normalmente son muy pocas, por otro lado, los alumnos tienden a sobrecargar la memoria con muchas de ellas, aplicándolas sin comprensión, por ejemplo, la reglas nemotécnicas, ignorando que son una versión simplificada de las operaciones elementales aplicadas a igualdades y se pierden en transposiciones de términos y cuentas cuando deben resolver ecuaciones (Ibíd, p. 115).

En coherencia con lo anterior, González, Rey, Olivares y Parra (2015), agregan que el problema ocurre cuando se realiza un proceso algorítmico desprovisto de significado con un lenguaje poco riguroso e incorrecto y que, sin embargo, conduce a una respuesta correcta. Este tipo de situaciones, generan falta de comprensión y apropiación del objeto matemático. Es aquí donde según los autores, los estudiantes transponen indiscriminadamente los términos bajo estas reglas, sin notar qué es lo que debe realizar primero en una operación. En consecuencia, el estudiante solo realiza un proceso mecánico, sin analizar los procesos previos que lo llevan a utilizar esta operación matemática y como consecuencia, se evidencia que el alumno muestra una falencia de comprensión de conceptos matemáticos en la ecuación de primer grado (Íbíd, p. 2).

En relación al uso de la balanza como herramienta de apoyo al aprendizaje, Muñoz y Swears (2013), realizan una investigación con el objetivo de modificar la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, basada en elaborar un sistema de adiestramiento del estudiante para que domine técnicas que deben seguirse para lograr resultados correctos. Concretamente, el trabajo de estos investigadores, corresponde al diseño de una Situación Didáctica en la que se utiliza la balanza para la resolución de ecuaciones. A partir de este trabajo, los autores logran concluir que la utilización de la balanza, para buscar estrategias en la resolución de ecuaciones, permite hacer una transición natural entre la actividad concreta y la noción de equivalencia presente en la ecuación, así como las operaciones necesarias para resolverla. Y, además, los estudiantes desarrollan una manera concreta de trabajar, ya que son ellos mismos los que están construyendo su noción de ecuación al interactuar con la balanza, logrando inducir el pensamiento que comprende el funcionamiento matemático presente en la resolución de ecuaciones (Ibíd, p. 8).

Finalmente Radford (2011), indica que los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización, pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual; afirma “si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio". (p. 18), (Como se cita en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012). A luz de lo anterior, se hace necesario que los profesores se involucren como participantes de esta visión ampliada del álgebra, que ya ha sido propuesta en variadas experiencias didácticas e investigaciones en el área de álgebra según (Godino et al, 2012), Son dichas implicancias, del uso de la balanza en la resolución de ecuaciones, las que nos llevan a utilizarla en nuestro plan de clases, con motivo de significar el aprendizaje del objeto matemático en cuestión. Y en concordancia con lo anterior se utilizan los objetivos de aprendizaje asociados a ecuaciones, ya que promueven una progresión desde lo concreto a lo pictórico (icónico) y a lo simbólico (abstracto), en forma bidireccional (MINEDUC, 2012).

OBJETO MATEMÁTICO: ECUACIONES LINEALES DE UN PASO EN $\mathbb{N}$

OBJETO MATEMÁTICO EN EL CURRÍCULO

Las ecuaciones están presentes en el currículum educacional chileno (MINEDUC, 2012) desde primer año básico, lo cual se ve reflejado en los objetivos de aprendizaje de los planes y programas. En primer año básico con el OA12, en donde los estudiantes deben describir y registrar igualdades y desigualdades como equilibrio y desequilibrio, usando balanza en forma concreta, pictórica y simbólica.

Luego, en segundo básico, lo anterior varía de describir y registrar en forma concreta pictórica y simbólica, a demostrar, explicar y registrar las igualdades y desigualdades en forma concreta y pictórica, constituyéndose específicamente en el objetivo de aprendizaje Nº12 (Ver anexo de objetivos de aprendizaje)

Posteriormente, en tercero básico se introduce el concepto de resolución de ecuaciones por medio de adición y sustracciones en el objetivo de aprendizaje Nº13 Así, del tipo de resolución propuesto en tercero básico, este se reformula, incluyendo la modelación de ecuaciones con balanzas y la resolución de problemas vinculados a la vida diaria, lo que se refleja en el objetivo de aprendizaje Nº14 (Ver anexo de objetivos de aprendizaje) Después, en quinto básico, la resolución de ecuaciones se manifiesta por medio de una inspección, relativa a conocimientos previos de adición y sustracción, lo cual se manifiesta en el objetivo de aprendizaje Nº15 (Ver anexo de objetivos de aprendizajes)

Luego, en sexto básico, se define por primera vez el uso de la incógnita y el de procedimientos formales en la resolución de ecuaciones de primer grado, lo cual se expresa en el objetivo de aprendizaje Nº11 (Ver anexo de objetivos de aprendizajes). Hasta este punto entonces, los estudiantes trabajan solo en $\mathbb{N}$. A continuación, en séptimo, los estudiantes se enfrentan a la resolución de ecuaciones con enfoque en la modelación de situaciones de la vida diaria, en el sistema numérico $\mathbb{Z}$, lo que se traduce en el objetivo de aprendizaje Nº9 (Ver anexo objetivos de aprendizaje)

Posteriormente, en octavo básico, los estudiantes siguen enfrentados a la modelación de situaciones de la vida diaria, pero en el sistema numérico $\mathbb{Q}$, con su objetivo de aprendizaje Nº8 (Ver anexo objetos de aprendizaje).

Después, en la enseñanza media, específicamente en primero medio, las ecuaciones se abordan en la resolución sistemas de ecuaciones, graficando ecuaciones y sus relaciones por medio del uso de la proporcionalidad directa e inversa, lo que se puede ver en los aprendizajes esperados Nº04 y Nº05, Consecutivamente, en segundo medio, se introduce la modelación y aplicación de funciones en problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en $\mathbb{R}$, y sus respectivos aprendizajes esperados son el aprendizaje esperado Nº06 y 07 (Ver anexo objetos de aprendizaje).

Casi al terminar su etapa escolar, en tercero medio, pasan de la resolución de las ecuaciones, a reconocer el conjunto de solución de las mismas, en sistemas numéricos complejos, por medio del aprendizaje esperado Nº10 (Ver anexo objetos de aprendizaje).

Finalmente, en cuarto medio, pasan de reconocer, a la resolución y representación de ecuaciones en $\mathbb{R}2$, lo que se expresa respectivamente en el aprendizaje esperado Nº02

DEFINICIÓN ESCOLAR/SABER ESCOLAR

El texto ministerial de la Editorial Santillana que se encuentra en vigencia actualmente, define al objeto ecuación como: “Una igualdad entre dos expresiones en las que hay valores desconocidos llamados incógnitas” (Ho, F., Kee, G., & Ramakrishnan, C. 2017, p. 262). También es interesante conocer la definición que establece la misma editorial en su licitación privada, en donde se define la ecuación como: “Una igualdad entre dos expresiones, en las que hay términos desconocidos o incógnitas. Esta igualdad satisface para uno o varios valores de la incógnita, que corresponde a la solución de la ecuación. La incógnita generalmente, se puede simbolizar con una letra” (Ávila, N. & Navarro, F. 2016, p. 160)

Con el fin de contrastar el tratamiento que se da al objeto matemático “ecuación”, es que a continuación presentamos un análisis comparativo de dos textos de estudio. El primero, de Editorial Santillana (2017), texto que distribuye el ministerio de educación en chile a los colegios subvencionados y municipalizados del país, y el segundo, de licitación privada Editorial SM, que utilizan algunos colegios particulares de Chile. Para esto, nos hemos centrado en tres ideas: concepto de igualdad, definición de ecuación y estrategias de resolución de ecuaciones, las cuales consideramos importantes tener presentes, al momento de hablar sobre nuestro objeto.

En primer lugar, nos enfocaremos en el concepto de igualdad, el cual se define en el texto Santillana a partir de las propiedades, enfatizando que esta igualdad se mantiene cuando se suma, resta, divide o multiplica el mismo número a ambos lados de la igualdad. Por otra parte, el texto de editorial SM, presenta el concepto de igualdad como: “dos expresiones que pueden ser iguales o distintas y que denotan un mismo objeto reciben el nombre de igualdad”, pero no distinguen ningún tipo de propiedad para este concepto. Por lo anterior, consideramos que ambos textos presentan deficiencias al abordar las definiciones de igualdad, ya que si bien, se nombra el equilibrio en el tratamiento del concepto en ambos textos, no se relaciona directamente, los conceptos de equilibrio e igualdad, sino que solo queda mencionado, dejando de lado un punto importante en la comprensión del concepto igualdad.

El concepto de ecuación en el texto Santillana, se define como una igualdad entre dos expresiones en las que se encuentran valores desconocidos llamados incógnitas. Por su parte, el Texto SM, plantea que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en donde existen una o más incógnitas representadas por una letra. Además, declara que para resolver ecuaciones, se pueden representar en una balanza o realizar operaciones inversas a las que contiene la igualdad. En consecuencia, si nos enfocamos en la definición erudita de ecuación, nos encontramos con que ambos textos presentan deficiencias importantes al momento de acercar a los estudiantes al concepto de ecuación, ya que ninguno de ellos considera el dominio en el cual deben trabajar los estudiantes, solo se hace referencia a los conceptos de incógnitas y/o valores desconocidos. A raíz de esto nos preguntamos: ¿Y qué pasa con el equilibrio?

Finalmente, las estrategias de resolución de ecuaciones en el texto Santillana, apuntan al ensayo y error, a determinar la solución por tanteo o a la aplicación de técnicas que impliquen uso de inversos aditivos y multiplicativos, además de la amplificación de fracciones. El texto de editorial SM, propone dos formas de resolver ecuaciones, la 6 primera consiste en representar pictóricamente la ecuación en una balanza, sacando simultáneamente la misma cantidad en ambos lados de ella, manteniendo su equilibrio, hasta que la incógnita quede sola en un plato de la balanza; la segunda, consiste en aplicar operaciones inversas a las contenidas en la igualdad. Así, el texto ministerial, pide a los estudiantes aplicar inversos en la resolución de ecuaciones, al igual que una de las técnicas de SM, algo que conduciría a error, ya que en quinto básico, el sistema numérico utilizado es el de los números naturales ($\mathbb{N}$) y en ese contexto, no existen las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo. En consecuencia, será esto finalmente, lo que lleva a los estudiantes a aplicar reglas en forma indiscriminada, sin comprender significativamente el concepto de ecuación y su resolución.

DEFINICIÓN EXPERTA/SABER SABIO

Para la definición de ecuación, consideramos el trabajo de Klein (1950), en donde se interpreta que una ecuación corresponde a una igualdad de funciones. Así por ejemplo,

$x - 2 = x + 3$ puede separarse en dos funciones reales: $f\ (x) = x - 2$ y $g\ (x) = x + 3$ y por lo tanto, la ecuación inicial podría escribirse como $f(x) = g(x)$.

Las propiedades de la igualdad como relación de equivalencia, la que se presenta a continuación:

- Reflexiva donde $a = a$
- Simétrica si $a = b$, entonces $b = a$
- Transitiva si $a = b$ y $b = c$, entonces $c = a$

El uso de la propiedad cancelativa en $\mathbb{N}$ para operaciones de adiciones y sustracciones, en ecuaciones son:

- $a = b \leftrightarrow a + c = b + c$
- $a = b \leftrightarrow a - c = b - c\ ; c < a$

DISTANCIA ENTRE SABERES ESCOLAR/ERUDITO

La definición erudita y las definiciones escolares que se le dan al objeto ecuación, en una simple lectura, podrían interpretarse como iguales, sin embargo, hay una diferencia fundamental entre ellas, la que tiene directa relación con el dominio en donde éste se trabaja. Por una parte, la definición escolar no considera el hecho de que existen distintos tipos de soluciones para las ecuaciones, así como tampoco, considera el sistema numérico en el cual los estudiantes trabajan. Por otra parte, la definición de Klein, permitiría – de cierta manera - superar esta dificultad, ya que el dominio de la función permitiría a los estudiantes, aplicar propiedades y operaciones acordes al sistema numérico en el cual están trabajando

Si bien en quinto básico no se encuentran las funciones de manera explícita, se podrían dar argumentos como *"el que sigue siempre serán menores de x-2 es menor que x, mientras que el que le sigue a x+ 3 es más grande que x"*

X-2 no puede ser igual a x+3 y en él contexto funcional la recta de ecuación y=x+3 es paralela a la recta de ecuación y=x-2 y como son distintas, no se intersectan, $\therefore s = \emptyset$

ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

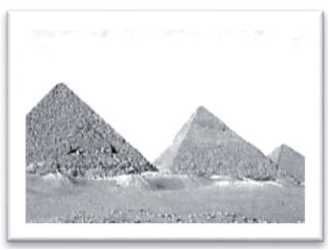
La investigación sobre el origen, naturaleza y evolución del concepto de ecuación pretende fortalecer las ideas de que los estudios sobre dichos elementos son de suma importancia en la educación, y Sierra, González y López (1999) consideran que algunos fundamentos de la enseñanza de la matemática se sustentan en los principios del conocimiento, y debido a un abuso de la transposición del conocimiento se sugiere considerar los elementos basales del concepto matemático para la introducción de este en el aula escolar.

En consecuencia con lo anterior Rico (1998) afirma "Los profesores de matemáticas presentan acusadas carencias formativas en psicología, pedagogía, sociología de la educación, *epistemología, historia, y didáctica de la matemática*, lo cual implica una desconexión entre su trabajo profesional y las bases y desarrollos teóricos correspondientes". (p.6).

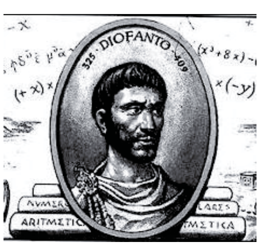
A continuación se presentan las evidencias encontradas a partir de la revisión de la literatura, desde aquellas primeras civilizaciones, hasta los últimos referentes del álgebra, para finalmente realizar un establecimiento entre el saber "ecuaciones" y "el sistema de números naturales."

PERSPECTIVA HISTÓRICA


Egipto

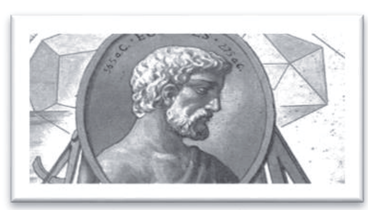

Mesopotamia


Grecia



Diofanto


Escuela Pitagórica


Euclides

India

Abu Muhammad Ben Musa Al-kwarizmi

Leonardo de pisa (Fibonacci)

Annibale
della Nave

Antonio
María Fior

Scipione Del Ferro

Niccolo Fontana (Tartaglia)

Jerónimo Cardano

Ludovicco Ferrari

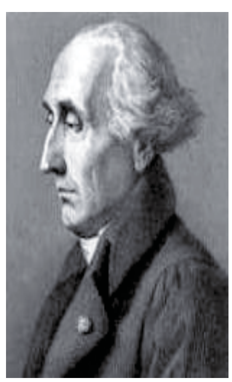
Rafael Bombelli

François Viéte

René Descartes

Pierre de Fermat

Leonhard Euler



Joseph Louis Lagrange

Carl Friedrich Gauss

Évariste Galois

GRANDES CIVILIZACIONES

CIVILIZACIÓN EGIPCIA

El origen de muchos de los 110 problemas contenidos en los papiros de Rhind y de Moscú está estrechamente relacionado con la vida cotidiana. Estos problemas se resuelven generalmente con la sola ayuda de la aritmética o utilizando ecuaciones lineales de la forma $x+ax=b$ o $x+ ax+cx=b$, donde la incógnita x se llama *"aha".*

Generalmente, la solución de una ecuación lineal proviene de la aplicación del método de "falsa posición": Por ejemplo, si $x+ \ x/7=24$ se asigna un primer valor a x y se comprueba si es válido: sea $x=7$, entonces $7+ 7/7=8$, lo cual es falso *(se esperaba que fuera 24):* sin embargo, $3x8=24$, de donde la solución es $3x7=21$, es decir, $x =21$.

En general, los egipcios no resolvían la ecuación cuadrática, pero eso no les impidió resolver ciertas ecuaciones de segundo grado. Los egipcios utilizaban muy poco el simbolismo en su álgebra: manipulaban con éxito las progresiones aritméticas y quizás las geométricas y utilizaban con soltura la conmutatividad y la distributividad, y estaban familiarizados con el inverso aditivo ([2])

---

[2] Morales, L. (2002). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *1*(1), p.10

CIVILIZACIÓN MESOPOTÁMICA

"El sistema babilónico permite resolver una ecuación lineal como $\alpha x+b=c$ usando exactamente los mismos pasos que usaríamos nosotros. Se resta para obtener $\alpha x = c-b$ y luego se multiplica por el reciproco de α para llegar $a\ x = \frac{c-b}{a}$. Es indudable que las características de la aritmética babilónica permiten un tratamiento de ecuaciones lineales completamente distinto de los métodos egipcios.

Por consiguiente, los babilonios no tienen la necesidad de utilizar métodos como la falsa posición. Lo cual implica que las ecuaciones de primer grado no representan ningún reto importante para la matemática babilónica, tanto así que en álgebra: "Los babilonios podían resolver ecuaciones con una incógnita tales como: $ax=b$, $x^2+ax=c$, $x^2-ax=c$, $x^2=b$, $x(x+1)=b$, $ax^2+bx=c$ y $ax^4-bx=c$".

"Las matemáticas babilónicas, abarcaban generalmente aproximaciones de números irracionales como soluciones de las ecuaciones determinadas y utilizaban fórmulas tales como: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$**".** También desarrollaron sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, todo ello formulado y resuelto de una forma totalmente verbal. ([3])

CIVILIZACIÓN GRIEGA

La figura griega más representativa de la época con respecto al álgebra, fue el matemático Diofanto de Alejandría con su obra *Aritmética*; en la que trató por primera vez la historia de las matemáticas griegas, no solo en las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. La *Aritmética de Diofanto* es una colección de 189 problemas donde introduce algunas expresiones y símbolos para representar las incógnitas, las operaciones y las potencias de las incógnitas, estos problemas prepararon el camino a lo que siglos más tarde sería "La teoría de Ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes de sus métodos, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna ([4]) y Según Bell (1949) manifiesta que:

> "Diofanto fue el primer matemático griego, si realmente fue griego, que mostró un talento genuino para el álgebra. Siguiendo a los pitagóricos, Euclides había dado equivalentes geométricos para las identidades sencillas de segundo grado, como $a(a+b) = a^2 + ab$, y $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + a2b$, y había resuelto $x^2 + ax = a^2,\ a$ positiva, geométricamente. Dando soluciones esencialmente algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como , $x + y = 100, x - y = 40$.
>
> Más importante aún, había empezado a usar los símbolos operando con ellos. Este largo paso hacia delante es tanto más notable cuanto que su anotación algebraica, comparada con la de hoy o la del siglo XVII, cuando Descartes la perfeccionó prácticamente, era casi tan engorrosa como la logística griega. El que hiciera lo que hizo con la técnica disponible lo sitúa sin ningún género de duda entre los grandes algebristas." (p.78)

---

[3] Saez, J. (2014). Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. (Tesis de Magister).Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia, p.14

[4] Saez, J. (2014). Diseño de una unidad didáctica basada en métodos informales para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. (Tesis de Magister).Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia, p.27

CIVILIZACIÓN HINDÚ

Uno de los aportes más notables de la cultura hindú es su sistema de numeración, del cual proviene el que usamos actualmente y que fue importante para el surgimiento de un álgebra de tipo aritmético.

Cuatro de los matemáticos hindúes más sobresalientes y conocidos hasta la fecha son: **Aryabhata** Cuya obra *Aryabhatiyam* (499 d.C.) que incluye problemas sobre series, permutaciones y ecuaciones lineales y cuadráticas, **Brahmagupta**: Su *Brahmasiddhānta* (628 d.C.) contiene una regla satisfactoria para resolver ecuaciones cuadráticas y problemas que incluyen temas tratados por Aryabhata, **Mahavira**: Su *Ganita-Sāra Sangraha* (850 d.C.) contiene un largo número de problemas que involucran series, radicales y ecuaciones y **Bhaskara**: Su *Bija Ganita* (1150 d.C.) contiene nueve capítulos y extiende su trabajo a través de las ecuaciones cuadráticas.([5])

Nos centraremos en Brahmagupta quien fuera el más grande los matemáticos hindúes del siglo VII; vivió en Ujjain, centro de astronomía situado en la India central. Hacia el año 628, escribió una de sus obras más significativas titulada Brahmasiddhānta o Brahmasphuta siddhānta o Sistema revisado de Brama, que comprende 21 capítulos, algunos de los cuales tratan esencialmente sobre trigonometría, geometría y álgebra, y al igual que en los trabajos que le precedieron, se mezclan resultados correctos con otros que son incorrectos.

Sin embargo, los que tienen que ver propiamente con álgebra son mucho más importantes que las fórmulas para calcular áreas, y da soluciones generales para ecuaciones cuadráticas e incluso considera el caso de soluciones negativas. Más aún, este es el primer texto antiguo en donde se da un tratamiento sistemático de la aritmética con números negativos y entre su contribuciones más valiosas ha de mencionarse su generalización de la fórmula de Herón para el área de un cuadrilátero, soluciones generales de las ecuaciones cuadráticas que incluyen raíces negativas y positivas, la aritmética de los números negativos y del cero, y la solución general de una ecuación diofantina lineal ax by c en la que a, b y c son enteros y se buscan todas las soluciones enteras. ([6])

[5]Carrillo, F. (2003). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *1*(2), p.5
[6]Dávila, G. (2003). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *1*(2), p.10

Brahmagupta sabía que cuando *a* y *b* son primos entre sí, todas las soluciones vienen dadas por $x= r- mb$; $y= s - ma$ en las que *m* es cualquier entero. Además, halló todas las soluciones enteras de la ecuación diofantina, mientras que Diofanto frecuentemente se conformaba con hallar una solución. Por último, estudió también la ecuación de Pell, $y^2 = ax^2 + 1$ en la que *a* es un entero de raíz cuadrada irracional, cuya teoría completa no quedaría terminada hasta los estudios de Lagrange en el siglo XVIII. ([7])

CIVILIZACIÓN ÁRABE

La civilización árabe sostuvo contactos culturales con los griegos y los egipcios; por ello, adquirieron traducciones al idioma árabe de obras de Euclides, Ptolomeo, Arquímedes y Aristóteles. Esto permitió la influencia de los griegos con respecto a la variable y su dimensionalidad, estando aquella presente en las longitudes de segmentos de recta, área o volumen.

Según Acevedo y Falk (1997), el Árabe Abu Muhammad Ben Musa Al-kwarizmi, fue el primer autor islámico que escribió sobre la solución de problemas por al-jabr y almugabala, que significa más o menos compleción y reducción. Al examinar su obra titulada *El Compendio de Cálculos por Al-jabr y Almugabala*, encontramos un libro de álgebra con soluciones de ecuaciones por medio de la manipulación de los términos. De esta manera, el tratado de álgebra de Al-kwarizmi, desarrolla un trabajo algebraico similar al de nuestros días. En la primera parte de su obra desarrolla la solución de seis tipos de ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones lineales y cuadráticas. En notación contemporánea estas son:

$$a^x = bx, \qquad ax^2 = b, \;\; ax = b, \qquad ax^2 + bx = c, ax^2 + \; c = bx \;\; y \; ax^2 = bx + c$$

Al-kwarizmi da reglas para resolver estas ecuaciones, demuestra la validez de sus reglas e ilustra su aplicación mediante ejemplos. En la terminología original considera el problema tipo: raíces y cuadrados iguales a números.

[7]Carrillo, F. (2003). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *1*(2), p.10

EUROPA

El comercio desempeñó un papel muy importante en la transmisión del conocimiento árabe a Europa; en particular, los mercaderes italianos estuvieron usando los números indo-arábigos para sus asuntos mercantiles desde mucho antes que se extendiera su uso en el continente.

En su obra el *Liber Abaci* (1202), Fibonacci resolvió numerosos problemas de tipo práctico (relativos a transacciones comerciales), mediante la aplicación de la sucesión que lleva su nombre o de procedimientos relativos al análisis indeterminado de primer y segundo grado. Es interesante destacar que, para resolver ecuaciones de segundo grado, Leonardo siguió el estilo diofantino y árabe considerando separadamente cinco casos distintos, de manera que los coeficientes resultaran siempre positivos y, para cada uno de ellos, encontró la solución utilizando los razonamientos geométricos de Euclides.

Para encontrar la solución de los problemas de análisis indeterminado aplicó distintos x artificios de tipo aritmético utilizados por Diofanto o el método de la "falsa posición". Loria. C. (1929). p.386-391

Alrededor del 1500 Scipione Dal Ferro enunció la fórmula resolutiva de la ecuación $x^3 + pq = q \; con \; p \; y \; q$ enteros positivos , pero Desafortunadamente, del Ferro nunca publicó sus resultados, antes de su muerte, reveló el método a su yerno, Annibale della Nave, y a su discípulo Antonio María Fior, quien, de regreso a su natal Venecia, pretendía formarse un buen nombre como matemático y para ello retó a una contienda matemática a Niccolo Fontana, mejor conocido por el sobrenombre de Tartaglia.

A partir de 1545, con la publicación de *Ars Magna* de Jerónimo Cardano (1501-1576), se hizo común la solución de la ecuación cúbica y de la ecuación cuártica. Fue tan fuerte su impacto que frecuentemente se toma el año de 1545 como el inicio del período moderno en matemáticas.

Cardano no fue el descubridor de la solución de ninguna de ellas. Él mismo admite en su libro que la idea para resolver la ecuación cúbica la obtuvo de Tartaglia (Niccolo Fontana 1500-1557), y que la solución de la ecuación cuártica fue primero descubierta por Ludovico Ferrari (1522-1565). Lo que Cardano no menciona en *Ars Magna* es la promesa que había hecho a Tartaglia de no revelar el secreto.

Se presume que el mismo Tartaglia había recibido ideas sobre la solución de la ecuación cúbica de fuentes anteriores. Cualquiera que sea la verdad en la controversia entre Cardano y Tartaglia, parece claro que ninguno de ellos fue el primero en hacer el descubrimiento. Lo más importante es que impulsó la investigación en álgebra en varias direcciones. Por ejemplo, un resultado inmediato de la solución de la ecuación cúbica fue el uso de un nuevo tipo de números. Aunque los racionales fueron aceptados desde el tiempo de Cardano, los imaginarios tuvieron que ser calculados, aún cuando se intentara restringir a raíces reales.

En el aspecto anterior, Rafael Bombelli (1526-1573), llegó a apreciar que los radicales deben estar relacionados de la misma manera como están relacionados los radicandos. Es decir, que son imaginarios conjugados que producen números reales, anticipando el papel que los conjugados jugarían en el futuro.

Bombelli escribió su *Álgebra* alrededor de 1560 y fue impresa, en parte, hasta 1572. Contiene símbolos parecidos a los de Chuquet, por ejemplo, los símbolos italianos p y m para la adición y sustracción; pero utiliza también otras formas de expresión, por ejemplo, las potencias de la incógnita aparecen como números arábigos arriba de un pequeño arco circular. No aparece símbolo para la igualdad; aunque ya se tenía. ([8])

En la última mitad de siglo XVI Francia produce a François Viète, con quien se produce el cambio más significativo en la construcción del lenguaje simbólico. Este autor fue el primero que utilizó sistemáticamente las letras para todas las cantidades (la incógnita, sus potencias y los coeficientes genéricos) y los signos para las operaciones, empleaba este lenguaje simbólico tanto en los procedimientos resolutivos como en la demostración de reglas generales. Viète llamaba a su álgebra simbólica *logística especiosa* en oposición a la *logística numerosa*: consideraba el *álgebra* como un método para operar sobre las especies o las formas de las cosas, y la *aritmética*, la *numerosa,* como una técnica que se ocupaba de los números. De este modo el *álgebra* se transformó en el estudio de los tipos generales de formas y de ecuaciones, porque lo que es aplicable al caso general es válido para los infinitos casos particulares ([9])

[8]Rodríguez. O. (2002). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *1*(1), p.26-27
[9] Malsani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico: visión histórica. *Irice, 34(13),* 7-8

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DESCARTES

El paso final en la preparación para las nuevas matemáticas infinitesimales, y aquel que tuvo más posibilidades para la investigación, fue el desarrollo de la geometría por René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665). La Geometría de Descartes fue publicada en 1637 como uno de tres apéndices de su Discurso del Método / para conducir bien la razón, y buscar / la Verdad en las ciencias. / Además / La Dióptica / Los Meteoros / y / la Geometría / que son ensayos de este Método".

La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación f (x, y) 0 y el lugar (generalmente una curva) consistente de todos aquellos puntos cuyas coordenadas (x, y) relativas a dos ejes fijos perpendiculares satisfacen la ecuación Descartes empezó con un problema geométrico, que comúnmente involucraba una curva dada, y la definía tanto como un lugar geométrico estático a la manera de los griegos como en términos de un movimiento continuo uniforme (como la espiral de Arquímedes). Su procedimiento fue trasladar un problema geométrico al lenguaje de una ecuación algebraica, luego simplificarla y finalmente resolver esta ecuación.

EULER , LAGRANGE Y GAUSS

En 1748, Euler publicó en Lausana, Suiza, el primero de sus tres grandes tratados sobre cálculo: *Introductio in Analysi Infinitorum*. Esta obra, una de las más importantes en la historia del cálculo infinitesimal y de la geometría analítica, recoge resultados que había escrito en memorias anteriores, presenta nuevos aportes y desarrolla algunos de los principales conceptos que sobre el tema habían obtenido sus predecesores, como Newton, Leibniz y los Bernoulli.

Euler pudo probar que todo polinomio real de grado n, con $n \leq 6$, tiene exactamente n raíces complejas y además era claro para él que si un polinomio real tenía una raíz compleja de la forma $a+ b\sqrt{-1}$, entonces su **conjugada** $a - b\sqrt{-1}$ también era raíz de ese polinomio. En 1749 intentó el caso general, a saber, que todo polinomio real de grado n, para n arbitrario, tiene exactamente n raíces complejas. Su prueba es incompleta y Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), en una memoria presentada a la academia de Berlín en 1772, trata de completar la prueba de Euler, aunque su razonamiento no es muy preciso pues Lagrange, al igual que Euler y muchos matemáticos de la época, operaban libremente con las raíces de las ecuaciones como si fueran números ordinarios sin tomar en cuenta que esas raíces podían ser números complejos.

Es a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a quien le corresponde el mérito de haber sido el primero en dar una prueba convincente, aunque no completamente rigurosa, del TFA en su tesis doctoral titulada "*Nueva Demostración del Teorema de que Toda Función Algebraica en una Variable puede ser Factorizada en Factores Reales de Primero o Segundo Grado*", en el año 1799. En este trabajo se hace una crítica de los intentos anteriores de D'Alembert, Euler y Lagrange, y se aborda el teorema desde una perspectiva diferente pues Gauss no calcula las raíces de un polinomio real sino que demuestra la existencia de éstas por medio de un método muy original, que presentamos aquí de manera muy sintetizada. Si el polinomio real $P(z)$ tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$, entonces $P(a + bi) = 0$ y, además, esta función algebraica es posible representarla como $P(x + yi)=u(x,y) + iv(x,y)$.

La gran originalidad de Gauss fue hacer corresponder cada raíz compleja $a + bi$ de P con un punto (a,b) del plano cartesiano. De esta manera, el punto (a,b) debe ser una intersección de las curvas $u = 0$ y $v = 0$ por lo que es necesario probar que estas dos curvas se cortan. Gauss utiliza un argumento cualitativo para esta prueba y su razonamiento se basa en las gráficas de las curvas por lo que no es completamente riguroso. Sin embargo, su argumento es convincente y prueba así que un polinomio real de grado n se factoriza como producto de factores lineales de primero y segundo grado.

En 1814, Jean Robert Argand (1768-1822) presenta una prueba sencilla del TFA basado en las ideas de D'Alembert y en 1816 Gauss ofrece otra prueba del teorema la cual se basa en las ideas de Euler; su demostración es completa y correcta. En ese mismo año, Gauss presenta una tercera prueba del teorema y, en este caso, sus argumentos son de naturaleza geométrica, como en su primera demostración.

En 1849, Gauss prueba el TFA en su forma general, a saber, que un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas, lo que en términos modernos equivale a decir que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado.([10])

[10]Dávila. G. (2003). Apuntes de *Historia de las matemáticas*, *2*(2), p.45-50

GALOIS

Galois considerado como el iniciador de la teoría, relacionó sus trabajos sobre ecuaciones algebraicas con los de grupo de permutaciones, en los cuales penetró profundamente en las propiedades generales de la teoría de grupos, es él quien define el concepto de subgrupo distinguido o normal y reconoce su importancia, y es también a Galois a quien se deben las primeras ideas sobre “Representación lineal de grupos”, esto es prueba de que manejaba la noción de Isomorfismo entre dos estructuras de grupo. Galois además probó que una ecuación es soluble por radicales (o resoluble) solo si su grupo de Galois lo es (asoció a una ecuación polinomial un grupo de permutaciones), a su vez, demostró fue que “El problema de la solución de una ecuación poli-nómica es, por lo tanto, esencialmente un problema numérico”; así, debemos tener en cuenta que el presente siglo y el empleo de herramientas como la calculadora y el computador, reflejan directamente la importancia de nueva fundamentación de la matemática sobre la base de la aritmética.

La teoría general del álgebra (álgebra abstracta) centra su interés en las estructuras algebraicas (grupo, anillo, c ampo, etc.) más que en la teoría de ecuaciones; esto se debe, entre otras razones a una teoría conocida como “La Teoría de Galois” que demuestra, basándose en resultados pertinentes a las estructuras algebraicas, que en general no existen métodos algebraicos para resolver ecuaciones de grado cinco o mayor; es decir que no existe ninguna fórmula de solución para dichas ecuaciones, que tal como en el caso de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuánticas, puede expresarse en términos de operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, extracción de raíces) con los coeficientes de la ecuación.([11])

ASENTAMIENTO EPISTEMOLÓGICO PARA EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Considerando la evolución del objeto matemático durante la historia, su estructura interna y propiedades generales, determinamos que el sistema de los números naturales no poseen estructura de grupo con respecto a la suma o al producto, ya que carece de inverso con respecto a estos; por tanto tampoco posee estructura de anillo y cuerpo, ya que carece de simetría. Sin embargo para poder solucionar ecuaciones lineales de un paso en $\mathbb{N}$ contamos con la propiedad cancelativa, quien nos establece un discurso apropiado para el sistema numérico.

[11]Polania, L. y Bohórquez, C. (2016).Aspectos históricos de la teoría de grupos. *Paideai Surcolombia,* (7), 3-5

LA CLASE DEL ESTUDIO, OBJETIVOS Y ARTICULACIÓN

Este estudio se basa en una secuencia didáctica de tres clases considerando las fases del Estudio de Clases Japonés, como un proceso mediante el cual los docentes buscan mejorar sus métodos de enseñanza, centrando sus esfuerzos en los estudiantes que aprenden (Isoda, Arcavi y Mena, 2012), incluyendo actividades para lograr que estudiantes del nivel quinto año básico (10 a 11 años), frente al objeto matemático ecuaciones de primer grado, logren el objetivo de resolverlas mediante adiciones y sustracciones, interactuando con estas. Desde el punto de vista teórico, se considera como referente la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante, TSD) que considera el desarrollo de una situación de aprendizaje, según las fases de acción, formulación y validación. Brousseau (2007) las define como “un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable” (p. 16).

En relación la problemática, en este estudio, se han planteado las siguientes preguntas de investigación:

- ¿La propiedad cancelativa resulta un aporte en la comprensión del procedimiento de ecuaciones de primer grado?
- ¿Se logra la habilidad de resolver ecuaciones de primer grado a partir de la aplicación de la propiedad cancelativa?

En consonancia con ello, se han propuesto los siguientes objetivos:

Tabla 1: Objetivos propuestos para el estudio.

Objetivos	Descripción
General	Proponer una secuencia didáctica para la comprensión de ecuaciones de primer grado en estudiantes de entre 10 a 11 años, basado en el uso de la propiedad cancelativa.
Específicos	– Diseñar una secuencia didáctica de tres clases para el trabajo de resolución de ecuaciones de primer grado basado en el uso de la propiedad cancelativa. – Implementar una clase de la secuencia didáctica diseñada. – Analizar los resultados de la implementación.

A la luz del objetivo general de la secuencia didáctica, se presentan los objetivos específicos para abordar progresivamente los conocimientos de los estudiantes y desafiar sus habilidades en las clases planificadas bajo la metodología de Estudio de Clases. A continuación se presenta una tabla con la articulación de la clase, el objetivo que se pretende lograr, el objetivo presentado en la clase y los tiempos utilizados, se pretende, que durante la implementación de esta secuencia, los estudiantes descubran, enuncien y se apropien de la propiedad cancelativa como estrategia para resolver ecuaciones en diversos contextos.

Secuencia	Articulación de las Clases	Objetivo a lograr	Objetivo de la clase	Tiempo
Clase 1	Se considera que en cuarto básico se presenta el OA 14 que posee estricta relación con la resolución de ecuaciones de primer grado en ℕ de adiciones y sustracciones	Resolver ecuaciones de primer grado de adiciones y sustracciones en ℕ a través de la balanza , aplicando propiedad cancelativa	Resolver ecuaciones de adiciones y sustracciones	90 minutos
Clase 2	Contexto geométrico, considerando las indicaciones sugeridas por MINEDUC, presentes como OA23 para cuarto básico, se refuerza una perspectiva icónica	Resolver situaciones en el marco geométrico que contemplen proponer y resolver ecuaciones de primer grado en ℕ de adiciones y sustracciones aplicando propiedad cancelativa	Resolver una situación en el marco geométrico de ecuaciones adiciones y sustracciones	90 minutos
Clase 3	Una de las habilidades centrales y transversales: resolver problemas, propia desde los niveles preescolares en el currículo.	Resolver situaciones de la vida cotidiana a través del uso de ecuaciones de primer grado en ℕ de adiciones y sustracciones, aplicando propiedad cancelativa	Resolver una situación de la vida cotidiana con ecuaciones adiciones y sustracciones	90 minutos

Clase adecuada para la implementación en el aula

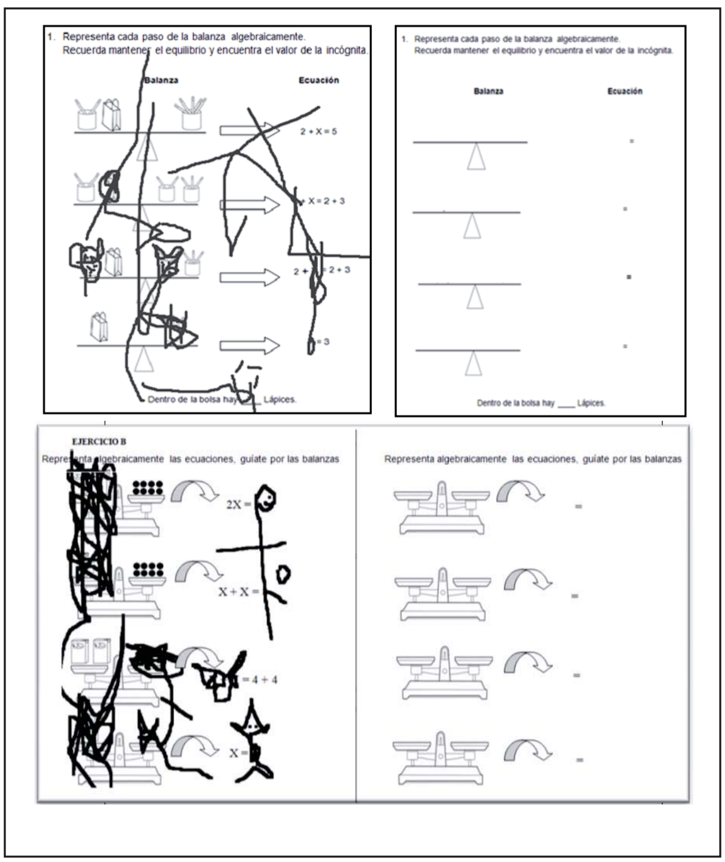
Tabla 2: Articulación objetivos de estudio para secuencia didáctica

CLASE Nº1:

"LA TAREA DE JUAN"

Como actividad central de la clase, se presenta una situación (guía de estudio) a lo cual los estudiantes se pudieran ver reflejados, ya que la profesora envía tarea y el hermano pequeño, la estropea, rayándola y dejándola impresentable, la profesora muy amable comprende la situación y le entrega una nueva guía para que rehaga su tarea, sin embargo, Juan nervioso no recuerda cómo replicarla. Tras esta introducción, se les pide a los estudiantes que ayudemos a Juan y se les entrega una nueva y limpia guía, como la que tuvo que resolver Juan, el trabajo está planificado para que trabajen en parejas, otro objetivo transversal de estas actividades, es promover el trabajo en equipo, argumentación de los estudiantes y la capacidad de reproducir elementos faltantes

*Esta Actividad está planeada para movilizar la **fase de formulación**, ya que se espera que en parejas logren establecer la noción de equilibrio (=), y den respuesta a la ecuación a través del uso de propiedades o una resolución intuitiva*



Ejemplos de la actividad 1 y 2

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

En las actividades 1 y 2, se promueve que los estudiantes a partir de la actividad inicial logren descubrir los elementos que hay tras las rayas y a su vez identificar el valor del elemento incógnito.

Una vez finalizada las actividades 1 y 2, son los estudiantes quienes en la pizarra indican las respuestas, de esta manera serán los propios estudiantes quienes, a través de la argumentación, adquieran la capacidad de referirse a la x como incógnita, equilibrio o como una igualdad, mostrando sus estrategias.

Finalmente se espera que las parejas sean capaces de reconocer que a partir de utilizar la propiedad cancelativa pueden llegar a conocer el valor de este elemento incógnito, siendo de gran importancia que logren comunicar sus conclusiones a partir del uso de un lenguaje algebraico, refiriéndose a igualdades a partir de signo =, de incógnitas a partir de una letra, en este caso x, y encontrar la solución a partir de sus estrategias y caminos recorridos. El trabajo solo en el sistema numérico los números naturales beneficia que los estudiantes puedan utilizar propiedades y diversas descomposiciones, tales como que 5 es igual a decir 1+1+1+1+1, 5 es igual a 2+3 o 5 es igual a 2+2+1, dependiendo de los valores que se pueda descomponer al otro lado de la igualdad.

Al término de la clase se motiva a los estudiantes a comunicar sus estrategias, donde utilizan un lenguaje asociado a "eliminar", "tachar", "cancelar" al referirse a las estrategias utilizadas (Propiedad cancelativa). Estableciendo una asociación con la ***fase de Validación***

ANÁLISIS A PRIORI DEL PLAN DE ESTUDIO

A continuación Se presentan los análisis preliminares de la secuencia didáctica de tres clases, considerando el objeto matemático de ecuaciones de primer grado de un paso de adición y sustracción en conjunto con la introducción de la propiedad cancelativa de los números naturales para resolverlas, enmarcada en quinto año básico (estudiantes de entre 10 y 11 años) y las actividades planificadas para movilizar y activar las fases de la TSD.

Posteriormente se ejemplifican y describen las actividades de cada una de las secuencias y los siguientes elementos para su análisis: Respuesta experta, devoluciones del docente, matemática en juego y posibles estrategias de resolución basados en Radford (2011) (Como se cita en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012) para la segunda y tercera clase de la secuencia didáctica, considerando como error las definiciones de Font (2000, en Neira, 2009) y Godino, Batanero y Font (2003, en Neira, 2009) como "cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (p. 8); y dificultades, las que indican "el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio" (p. 8), igualmente consideraremos aquellos errores y dificultades establecidos por Puig (2004) que presentan los estudiantes frente a la habilidad de resolver problemas.

MATEMÁTICA EN JUEGO

Para el desarrollo de esta actividad, con base en la progresión curricular de objetivos propuestos por MINEDUC, se espera que los estudiantes posean el desarrollo y adquisición de competencias propias a los niveles anteriores de estudio (Ver anexo Tabla Nº3: conocimientos previos (esperados) de los estudiantes)

Establecemos por tanto, que los estudiantes deben poseer el dominio de la matemática asociada a lograr reconocer y reproducir patrones, describir y registrar la igualdad a través de balanza en el ámbito numérico del 0 al 20 y resolver ecuaciones de un paso del 0 al 100, promoviendo el desarrollo lógico-matemático

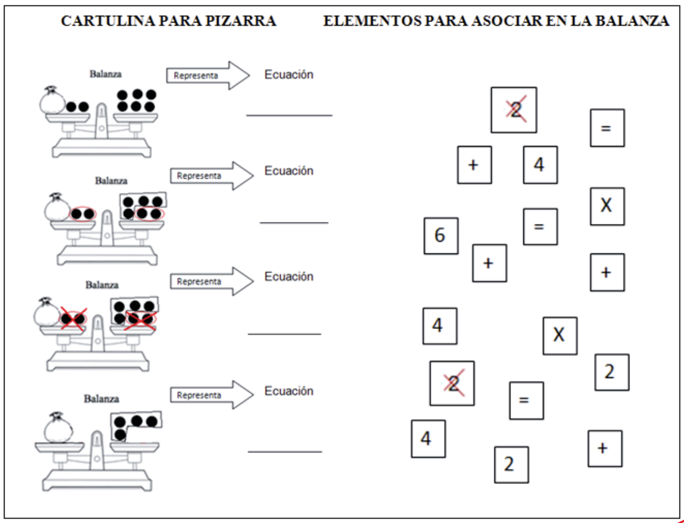
DESCRIPCIÓN DEL PLAN DE CLASE Nº1:

"LA BALANZA Y LA TAREA DE JUAN"

Para el objetivo, resolver ecuaciones de adiciones y sustracciones, se establecen dos actividades distintas dentro de la planificación, la primera actividad consisten en activar los conocimientos previos de los estudiantes, y movilizar el conocimiento de la matemática adquirida, con el propósito que asocien en primera instancia el lenguaje simbólico con el icónico a partir de la representación de la balanza, para después resolver la ecuación, reconociendo los pasos que se utilizan en la balanza, también se activa la fase de acción de la TSD, ya que serán los estudiantes, los que deban manipular, asociar y determinar si las asociaciones realizadas por sus pares son correctas, argumentando y fundamentando sus respuestas o razonamientos.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

El trabajo introductorio consiste en que los estudiantes salgan a la pizarra y asocien cada elemento de la balanza con la representación en el lenguaje simbólico de esta (pueden ser cartulinas desmontables o uso de pc), de manera tal que reconozcan la idea de equilibrio y búsqueda de una solución al elemento incógnito.



Modelo de actividad inicial motivacional

Se promueve la discusión entre los estudiantes, ya que en un lado está la representación icónica a través de la balanza y en el otro lado de la pizarra, el lenguaje algebraico que deberán asociar a cada representación de la balanza. Deben encontrar el valor de elemento incógnito que se asociará con la representación algebraica de X.

*Esta actividad está planificada para activar la **fase de acción**, ya que se espera que los estudiantes interactúen con el medio, comunicando sus estrategias y modelos empleados.*

El trabajo de esta actividad promueve la visualización del equilibrio, la representación en diversos lenguajes (icónico - simbólico) y encontrar el valor de esta incógnita a través de una cierta cantidad de pasos.

ERRORES, DIFICULTADES Y DEVOLUCIONES

Para esta primera clase de la secuencia didáctica se consideran los siguientes errores, dificultades de los estudiantes y las posibles devoluciones del docente, tanto en la actividad de inicio como central de la clase, así como aquellos provenientes de la literatura

Tabla Nº4: Dificultades y errores de la primera implementación de la secuencia didáctica

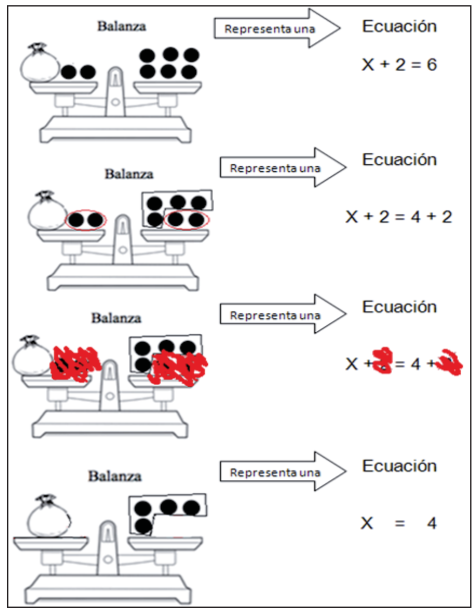
Momento de la clase	Dificultad	Errores	Devolución
Inicio	Godino y Font (2003) determinan que los convenios ambiguos, pueden provocar dificultades, ya se utilizan significados muy distintos en aritmética como en álgebra, por ejemplo poner la equis (x) para multiplicar; indicar el operador (=) como igualdad y no como equivalencia entre expresiones	(Socas et al., 1989), clasifica errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso del recíproco y errores de cancelación	Frente a los errores en el mal uso de propiedades, se les pide a los estudiantes que comprueben sus cálculos
		las características del lenguaje algebraico (Socas et al., 1989)	Si x representa una multiplicación, en el otro extremo de la balanza ¿está la respuesta?, ¿cuáles son los factores que se multiplican? Si al signo = lo asocian al resultado de una ecuación, se pregunta al estudiante: si en un extremo de la balanza tengo 5 bolitas + 4 bolitas y en el otro extremo tenemos 3 bolitas + 3 bolitas + 3 bolitas. ¿Cuál es el resultado en ambos extremos?,

			¿representan lo mismo?
Desarrollo	Para obtener una estrategia adecuada al momento resolver	Eliminar o cancelar elementos sólo de un extremo de la balanza	¿Qué pasa con el equilibrio de la balanza?, ¿Se mantiene?, ¿de qué manera podríamos mantener este equilibrio?
	Para descomponer los elementos numéricos en la balanza	Descomponer elementos numéricos sin considerar el equilibrio	Con las nuevas agrupaciones de realizó ¿puede mantener el equilibrio de la balanza si desea agregar o quitar? Preguntar todas los posibles formas de descomponer un número y ubicar la mejor descomposición para resolver la ecuación
	Para establecer relaciones entre el elemento incógnito representado de forma icónica y un valor numérico	Establecer que la incógnita es 0	Recordar lo que representa la balanza y pedir que verifiquen las equivalencias incluyendo el 0
		Indicar que el elemento incógnito es 1	Recordar lo que representa la balanza y pedir que verifiquen las equivalencias incluyendo el 1

RESPUESTA EXPERTA

Existen dos respuestas expertas asociadas a la primera clase, ya que esta consta con varias actividades, tanto al inicio de la clase como durante el transcurso del desarrollo. A continuación se explicitarán las respuestas para cada una:

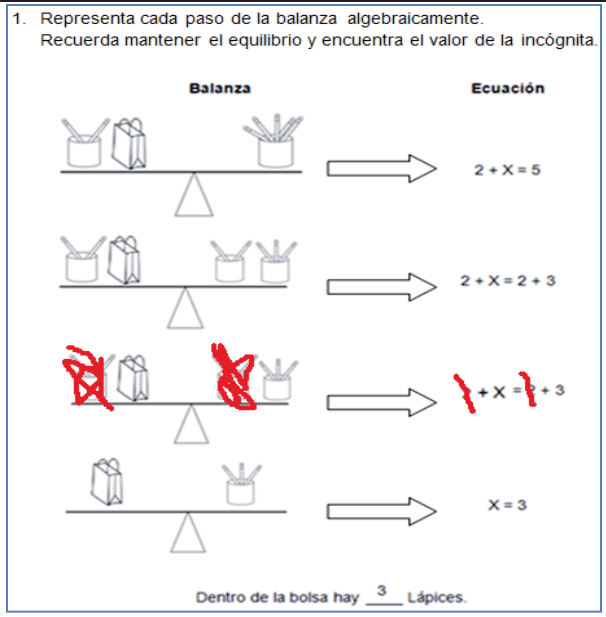
Tabla 5: Respuesta experta en actividades de inicio y centrales de la clase

Respuesta experta de actividad de inicio	
Como actividad de inicio el o los estudiantes deben manipular los elementos representados algebraicamente para asociarlos con la balanza y su representación icónica, cada elemento representa determinados momentos de la balanza, se espera que el estudiante logre asociar por ejemplo la x con la balanza, posicionándola encima de la representación icónica, el signo = entre ambos extremos de la balanza para identificar el equilibrio y así sucesivamente, hasta llegar a establecer que tras diversas pasos, el valor de la incógnita es 4	

Respuesta experta de actividad de desarrollo Nº1

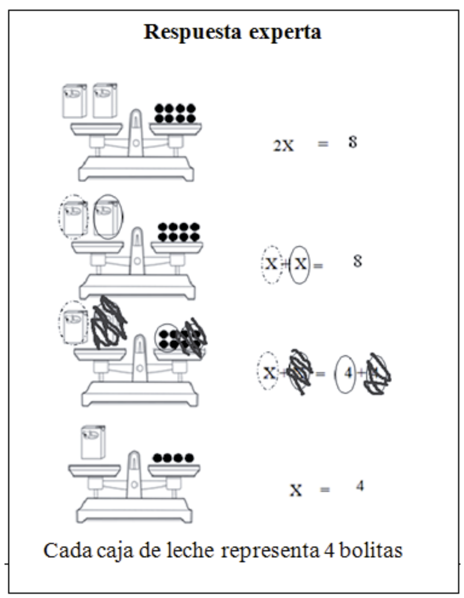
Este trabajo en parejas, busca que los estudiantes logren identificar aquellos elementos consignados en la actividad, tanto en la balanza como su representación algebraica y sean capaces de establecer ciertos diálogos y comunicaciones entre pares con las estrategias o dificultades establecidas.

Los estudiantes deberían de reproducir la imagen que se muestra a continuación para establecer la asociación icónico/algebraico



Respuesta experta de actividad de desarrollo Nº2

Una vez establecido el trabajo con la actividad Nº1, se entrega a las parejas la actividad Nº2, donde se verán enfrentados a la misma dificultad, agregando ahora en vez de la representación de una incógnita, dos.
Serán los estudiantes quienes deban establecer la correspondencia entre la balanza, cada uno de sus elementos y la representación algebraica, de manera tal que en ambas representaciones se establezca una igualdad.



El objetivo de esta clase consiste en que los estudiantes logren identificar las representaciones icónicas y simbólicas de una ecuación, y a partir del equilibrio representado por la balanza, descubrir diversas estrategias dentro del sistema de los números naturales, para encontrar un valor desconocido, descartando convenios ambiguos como que la x es multiplicar o el = es el resultado de algún algoritmo.

POSIBLES ESTRATEGIAS

Durante el análisis de la clase se han considerado las siguientes estrategias que pueden establecer las parejas de estudiantes, principalmente nos referiremos a aquellas asociadas al trabajo de las actividades centrales de la clase 1 y 2, estructuradas en la siguiente tabla

Tabla Nº6: Posibles estrategias de actividad de la clase 1

Estrategia de resolución actividad 1	Ejemplificación
Descomposición 1 a 1	Descomponen el número 5 en 1 + 1 + 1 + 1 + 1 y asocian los elementos unitarios para encontrar el valor desconocido: Ejemplo: $x + 2 = 5$ $x + 1 + \cancel{1} = \cancel{1}+1+1+1+1$ $x + \cancel{1} = \cancel{1}+1+1+1$ $x = 1+1+1$ o sea 3
Descomposición a partir de la agrupación	Descomponen el número 5 en 2 + 3 y asocian los elementos agrupados para encontrar el valor desconocido: Ejemplo: $x + 2 = 5$ $x + \cancel{2} = \cancel{2} + 3$ $x = 3$
Descomposición a partir de la agrupación	Descomponen el número 5 en 2 +2 + 3 y asocian los elementos agrupados para encontrar el valor desconocido: Ejemplo: $x + 2 = 5$ $x + \cancel{2} = \cancel{2} + 2 + 1$ $x + 2 = 2 + 1$ $x = 3$

Estrategia actividad 2	Ejemplificación
Descomposición 1 a 1	Descomponen los números unitariamente para encontrar el valor desconocido: Ejemplo: $2x = 8$ $x + x = 1+1+1+1+1+1+1+1$ $x + x = 1+1+1+1+1+1+1+1$ $x = 1+1+1+1$ o sea 4

Descomposición a partir de la agrupación	Descomponen el número agrupando elementos para encontrar el valor desconocido: Ejemplo: $2x = 8$ $x + x = 2+2+2+2$ $x + \cancel{x} = \cancel{2+2} + 2+2$ $x = 2+2$ $x = 4$

Las estrategias presentadas son aquellas que permitirían a los estudiantes resolver las ecuaciones a partir de la representación de equilibrio, buscando equivalencias entre ambos lados de la representación icónica de la balanza o términos de la representación algebraica, logrando a partir de diversas estrategias, solucionar el problema aplicando descomposiciones, uso de trazos auxiliares y eliminar términos en ambos lados de la igualdad, utilizando la propiedad cancelativa.

PLAN DE CLASE

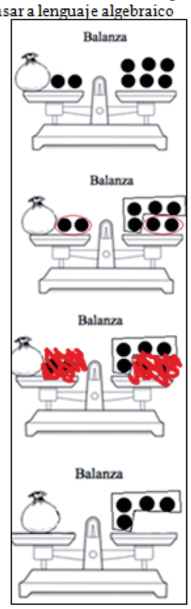
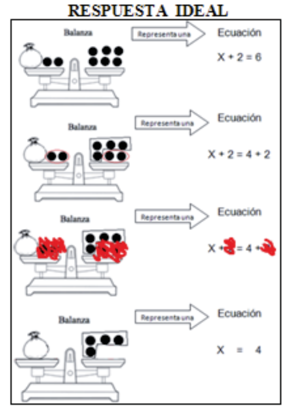
Se presenta la estructura de la secuencia didáctica a través del plan de clases Nº1, como aquella que debe dar inicio al estudio de resolución de ecuaciones, estableciendo el recurso, balanza, como elemento que proporciona a los estudiantes las nociones de equilibrio y asociaciones entre lenguaje icónico y algebraico.

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$
Objetivo	"Resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$.
Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Concepto de Multiplicación • Descomposición de Números Naturales • Nociones básicas de ecuaciones (igualdad e incógnita)	• Copias de la situación para cada estudiante • Lápiz grafito y goma • Cartulinas o papel kraft • Proyector y computador (si se cuenta con ellos) • Balanza (si es necesario)

Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Evaluación de la Marcha de la Clase
15 minutos		
0. Indicaciones de la clase (Posicionar a los estudiantes en parejas, frente a frente de manera que puedan ver la pizarra)	0. Explicitar el contrato didáctico y pedagógico. 1. Se explicita el objetivo de la clase "Resolver ecuaciones de primer grado" Se pregunta: a. la edad de mi hermana más 5 años es igual 12 años, ¿qué edad tiene mi hermana? b. Pedro gana el doble de gogos que David, si David tiene 15 gogos, ¿cuántos gogos tiene Pedro? c. si Luis me paga $500 pesos de una deuda de $1250, ¿cuánto le falta por pagar a Luis? d. ¿Cómo podríamos representar las situaciones anteriores?	0. Mantienen una actitud positiva y optimista frente al aprendizaje 1. ¿Los estudiantes se aproximan a una idea de incógnita? ¿Logran encontrar el valor de la incógnita? ¿Los estudiantes logran asociar algún elemento a la incógnita, sea □ ✎, ○, ♡ o una letra?

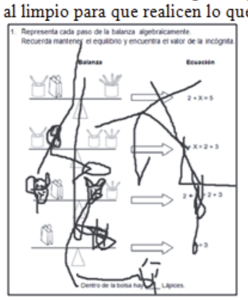
Respuestas esperadas de los estudiantes

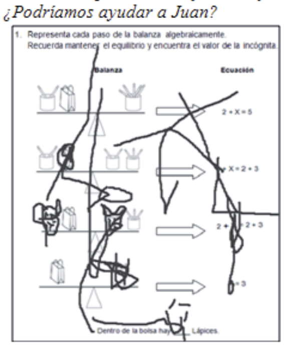
Se espera que los estudiantes logren a partir de la intuición determinar el valor de la cajita negra, a su vez asociar esta misma a un valor inicialmente desconocido y poder asociarla a una incógnita sea pictórico o algebraico.

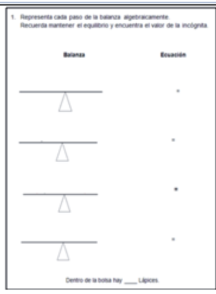
Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Evaluación de la Marcha de la Clase
30 minutos		
2. Planteamiento de la ecuación para traspasar a lenguaje algebraico 	2. Se presenta a los estudiantes la siguiente ecuación en una balanza para que la puedan escribir en lenguaje algebraico representando cada elemento de la balanza con los elementos (x, + , =, 6, 4, 2, 2, cruz, cruz), estos estarán para poder recortar y posicionar junto la balanza como se muestra en la respuesta ideal (Idealmente en cartulina a papel kraft) **Posibles preguntas ante la observación del de la balanza:** Estudiante: ¿Qué hay en la bolsa? Profesor: Eso es lo que tenemos que descubrir. Estudiante: ¿Por qué no puede ser una sola bolita que sea equivalente a 2? Si alguno de los estudiantes comente algún error y el resto del curso no se percata de tal, se pide al final que se revise nuevamente la situación, siendo los estudiantes quienes en conjunto deban analizar y verificar los pasos realizados. **Posibles dificultades en la actividad:** Algunos estudiantes podrían asociar erróneamente el lenguaje algebraico con la balanza, representando por ejemplo inmediatamente la bolsa como 4, sin embargo se debe reforzar la idea que hay un proceso (Pasos en la balanza), para llegar a ese resultado que si bien es el correcto, no se representa inmediatamente en la balanza, a su vez algunos estudiantes pueden asociar la X con la operación multiplicar	2. ¿Los estudiantes son capaces de asociar los elementos de la balanza? ¿Logran comprender que la balanza representa una ecuación? ¿Comprenden que se visualiza la resolución de una ecuación en la balanza? Los estudiantes son capaces de llegar a visualizar la ecuación **RESPUESTA IDEAL** 

Devolución del profesor

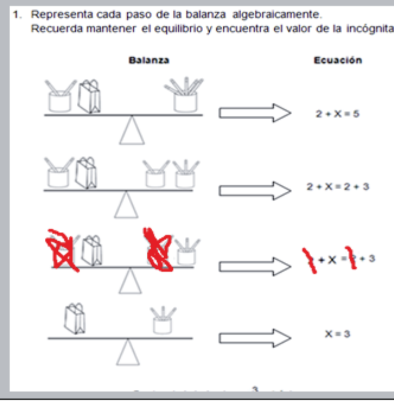
Muchos estudiantes no estarán acorde con asociar inmediatamente el 4, y otros determinarán que la X corresponde a una multiplicación, es entonces donde el docente interviene indicando que la multiplicación se representará a partir de (·) e invitará a otros compañeros para que discutan sobre la representación algebraica de los términos en la balanza

20 minutos		
3. Se presenta la tarea y se relata lo sucedido a un estudiante llamado Juan 4. Planteamiento del problema a la clase. *Juan es el mayor de dos hermanos y cursa quinto básico de la escuela los pensamientos. El domingo por la tarde finalizaba orgullosamente su tarea de matemáticas, cuando su madre desde la cocina le recuerda que se debe cepillar los dientes. Mientras Juan se cepillaba sus dientes su hermano menor tomó uno de los lápices que se encontraban encima de la mesa y rayó la tarea que estaba haciendo Juan. La mamá también llamó al hermanito a tomar la leche quien corrió y cerró el cuaderno de Juan.* *Cuando Juan ordenó su mochila no se percató de que su hermanito había rayado sin querer la tarea y al llegar a la clase, en el momento en que la profesora indica que revisará la tarea Juan se da cuenta de la situación, angustiado le explica a la profesora y muestra lo que había hecho su hermanito, frente a la situación la profesora le da la oportunidad a Juan*	3. Se les pide a los estudiantes que en parejas realicen un trabajo colaborativo. Aquellos alumnos que están sentados solos se cambian de lugar para trabajar con otro compañero que esté en la misma condición. De ser impar el total de estudiantes, se podrá conformar un trío. 4. Se les muestra a los alumnos, el problema, se pide a un estudiante que lea el problema y se les pregunta a los estudiantes ¿Qué se entiende del problema?, ¿Qué es lo que se puede extraer del problema?, ¿Qué es lo más importante del problema? ***Para mantener la atención de los estudiantes se puede hacer leer por partes el problema de manera de que se le de paso a que cualquier estudiante continúe la lectura*** A continuación se le entrega a las parejas la tarea de Juan y la hoja al limpio para que realicen lo que se les pide en la actividad.  	3. ¿Los estudiantes son capaces de trabajar colaborativamente? ¿Se produce una actitud persistente durante la tarea para solucionar la problemática? 4. ¿Los estudiantes comprenden el problema entregado? Se les pregunta más de una vez ¿Qué debemos hacer hoy? ¿De qué se trataba la tarea de Juan? ¿Han comprendido la mecánica de la tarea? ¿Logran comprender que cada elemento de la balanza está representado también en la ecuación? ¿Están completando la tarea o persisten las dudas?

que la pase al limpio. Sin embargo, Juan molesto y nervioso, no recuerda cómo ni lo que había bajo las rayas. ¿Podríamos ayudar a Juan?  *Se entrega la tarea a cada pareja completa* 	***Intervención del profesor*** Si nos fijamos al lado izquierdo de la hoja, tenemos la tarea de Juan que en algunas partes están rayadas, y al lado derecho de la hoja, tenemos una balanza vacía y un espacio donde debemos ayudar a Juan a anotar la ecuación que representa cada una de las balanzas. A partir de la tarea de Juan y de la información que aún se logra ver, deben completar al lado derecho, con lo que debería tener la balanza y cómo debería estar planteada la ecuación", para qué al final logremos encontrar el valor de la incógnita. **"LA BOLSA"** Suponiendo que los estudiantes aún no comprenden que la bolsa, o el contenido de ella, es el valor desconocido de la ecuación que puede ser nombrado como "el valor desconocido", el profesor realizará la siguiente devolución Una vez que se ha observado el progreso de los estudiantes, se intenciona que pase la pizarra a presentar el trabajo realizado, con distintas estrategias de solución. Esto con la intención de que sea el resto de sus compañeros quienes aporten al desarrollo o corrección de las tareas presentadas si es que hay algún error o dificultad.	**Devolución** Pa: ¿Sabemos qué tiene la bolsa, cuánto pesa o a cuántos elementos del otro lado de la balanza equivale? Pa: ¿La bolsa podría equivaler a 0 o 1?, ¿Por qué?, ¿Qué pasaría con el equilibrio de la balanza? Pa: Cuando tenemos un elemento del ¿Son capaces de descomponer un número para cancelar términos y encontrar el valor desconocido? ¿Se cumple la intencionalidad de resolver la ecuación manteniendo la igualdad? ¿Es suficiente el tiempo planificado para la actividad? ¿Utilizan la estrategia utilizada inicialmente para encontrar los valores desconocidos?



Respuesta Experta



5.
Puesta en común de las diversas estrategias

5.
En esta primera etapa se pretende que los estudiantes logren representar tanto la balanza como la ecuación, y además determinar que hay una raya que tapa la incógnita, a partir de la respuesta experta de deducen las posibles dificultades o errores:

a) Los estudiantes pueden determinar que la incógnita es X, sin embargo también podrían asociar cualquier letra lo cual no estaría incorrecto pero pierde la asociación con la tarea de Juan.

b) Podrían dibujar en el lado de la ecuación una bolsa, o elemento distinto a una letra.

c) Así mismo podrían determinar que la bolsa es equivalente a 0 elementos, que existe un vació, indicando que $0 + 2 = 2 + 3$, sin mantener el equilibrio en la balanza

d) Si determinan que el valor de la bolsa corresponde a 1, se realizaría la misma devolución determinando que $1 + 2 = 2 + 3$

e) Si sólo reconocen al valor incógnito cómo 3 se realiza la siguiente devolución

Devoluciones

Recordemos que debemos ayudar a Juan a representar cada paso de la balanza algebraicamente independiente de que ya sepamos el valor de la incógnita, por tanto evaluemos de qué manera podemos ayudar a encontrar qué colocar en cada balanza y a su vez en cada platillo de esta, para posteriormente representarla algebraicamente

Persistencia de la Duda

Si los estudiantes aún no comprenden la resolución de la ecuación a través de la balanza, se debe utilizar la balanza en concreto, resolviendo la ecuación nuevamente y haciendo el nexo entre lo concreto, la gráfica y lo simbólico (lenguaje algebraico).

Devoluciones

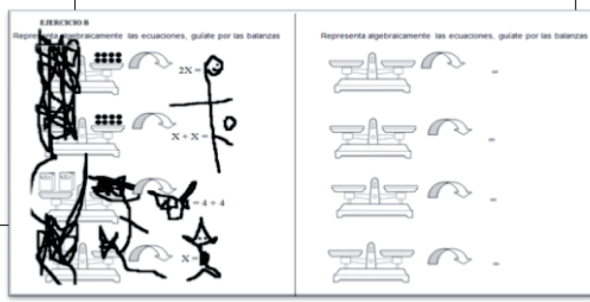
Si los estudiantes asocian otra letra distinta a X, podríamos decir que se considera correcto, ya que algebraicamente se utilizan letras pero la más utilizada de todas es la x.

Si llegasen a dibujar un elemento en la ecuación, se volvería a preguntar
¿Qué diferencia a la balanza de una ecuación?, ¿Representan lo mismo?, si representan lo mismo y considerando que hay una diferencia entre las dos, ¿Cuál es esa diferencia?, ¿cómo podemos representar lo mismo en una ecuación?

Si los estudiantes determinan que en la bolsa no hay nada se refuerza la idea de igualdad y correspondencia uno a uno

¿Los estudiantes realmente comprendieron la resolución de la ecuación, estableciendo la relación entre ésta y la balanza?

15 minutos		
6. Institucionalización Se pretende que los estudiantes comprendan que cuando se resuelven ecuaciones de primer grado en ℕ, los números pueden descomponerse con el objetivo de cancelarlos, manteniendo la igualdad y logrando despejar la incógnita y obteniendo su valor.	6. Finalmente, el docente pregunta a los estudiantes a modo de establecer una generalidad: ¿Qué acciones utilizamos para ayudar a Juan? ¿En esta tarea fue solamente necesario encontrar el valor de la incógnita? ¿Para qué me sirve el uso de la balanza? ¿Qué podríamos mandar a decir a Juan para su próxima tarea de ecuaciones? *"Cuando se resuelven ecuaciones de primer grado con números naturales, como conocemos. Se pueden descomponer números convenientemente, para eliminarlos a ambos lados de la ecuación, y así, mantener su equilibrio".*	¿Los estudiantes son capaces de poder verbalizar el trabajo realizado en clases? ¿Comprenden la importancia de la representación de la balanza para resolver ecuaciones?
20 minutos		
7. Se entrega a los estudiantes el ejercicio B	7. Se pide a los estudiantes que trabajen colaborativamente en parejas, en la primera parte del segundo ejercicio.	¿Los estudiantes han identificado que 2X en la ecuación, se representa en la balanza como 2 elementos incógnitas?



Posibles Preguntas de Estudiantes

Alumno: ¿Qué es 2X?

Profesor: ¿Recuerdas a qué llamábamos con X?

Respuesta alumno: A una incógnita.

Profesor: Entonces, ¿cuántas incógnitas tenemos ahora?

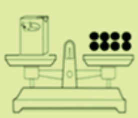
Devolución

Si el estudiante aún con la intervención del docente, no comprende qué se representa como 2X, entonces se puede recurrir al ejercicio A para que observe que X sirve para llamar a un elemento o número desconocido, la diferencia es que ahora tenemos 2 incógnitas.

¿Lo estudiantes reconocen que cuando se tiene 2X, eso representa una multiplicación, es decir, que se tiene 2 veces X?

Posibles Estrategias
Errores y Dificultades

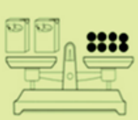
a).



i. $2X = 8$

ii. $2X = 9$

b).



i. $2X = 8$

ii. $2X = 10$

Devolución

¿Qué significa 2X? ¿Qué operación hay entre el 2 y la X? ¿Qué significa $2 \cdot 3$? (2 veces 3) ¿Qué me dice el 2 del 3?

¿Qué representaba la X? Si tengo 2X entonces, ¿Qué de dibujar en la balanza?

¿Por qué 9? ¿Cómo se representa en la balanza las dos cajas? ¿Cómo debo representar entonces, las 8 bolitas de la ecuación, en la balanza? De ser necesario, recurrir a la asociación término a término entre la balanza y la ecuación.

¿Por qué 10? ¿Dónde está el 10 en la balanza?

Posibles Preguntas de Estudiantes

Estudiante: ¿Por qué ahora hay X + X y no 2X?

Profesor: ¿Qué quiere decir 2X?

Respuesta estudiante: Que la X está 2 veces

Profesor: Entonces, ¿De qué otra manera podemos escribirlo?

Devolución

Se puede ejemplificar con una multiplicación.

$2 \cdot 3 = 3 + 3$

Repetición de Dificultades

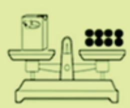
Existe la posibilidad que aun cuando hayan comprendido y resuelto el ejercicio A, persistan las dificultades para realizar el ejercicio B. Si es este el caso, se recomienda volver a las estrategias y devoluciones anteriores como:

1° Relacionar término a término (¿Dónde está la bolsa en la ecuación? ¿Dónde están las 3 bolitas en la ecuación? ¿Dónde están las 6 bolitas en la ecuación?)

2° Recurrir al uso concreto de una balanza.

3° Recurrir a al Pensamiento Hablado (Decir en voz alta: *"Si la balanza es lo mismo que la ecuación y yo a un lado tengo un término que no conozco, entonces en la ecuación también debe estar. Si ese valor que no conozco está acompañando al 3 en la balanza, entonces en la ecuación mi valor*

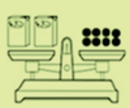
Posibles Estrategias
Errores y Dificultades

a). 

i. $X + X = 2X$

ii. $X + X = 10$

iii. $X + X = 8$

b). 

i. $X + X = 2X$

ii. $X + X = 10$

iii. $X + X = 8$

Devolución

¿Por qué 2X? ¿Qué pasa con las 8 bolitas que están en el platillo derecho de la balanza? ¿Dónde se deben representar en la ecuación?

¿Por qué 10? ¿Cuántas incógnitas teníamos?

Posibles Preguntas de Estudiantes

Estudiante: ¿Por qué 4 + 4 y no 8?

Profesor: ¿Por qué crees tú? ¿Recuerdas que algo similar

¿Comprenden por qué el 8 puede escribirse como 4 + 4?

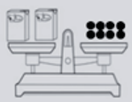
Devolución

Se puede explicar la descomposición numérica a partir de un ejemplo.

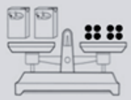
¿Los estudiantes reconocen que una X y un 4 fueron cancelados?

Posibles Estrategias
Errores y Dificultades

a).



b).



i. $2 = 4 + 4$

ii. $2 = 8$

iii. $2X = 4 + 4$

iv. $X + X = 4 + 4$

v. $X + X = 8$

vi. $2X = 8$

Devolución

¿2 es igual a 4 + 4 o a 8? ¿De qué se tienen 2 en la ecuación (incógnitas)?

2X = 4 + 4 Para resolver la ecuación ¿Qué es más conveniente, dejarlo como 2X o X + X?

X + X = 8 Fíjate cómo está representado el 8 en la ecuación. ¿Qué es más conveniente para resolver la ecuación, 4 + 4 o 8?

Si en la ecuación tenemos 4 + 4, ¿cómo es más conveniente representar las 8 bolitas en la balanza?

Posibles Preguntas de Estudiantes

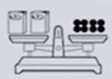
Ao: ¿Me falta una X! ¿Qué pasó con ella?

Pa: ¿Qué crees tú? Fíjate en la ecuación anterior (X + X = 4 + 4) ¿Por qué

Una vez que ha observado el progreso de los estudiantes, se intenciona que pase la pizarra, esto con la intención de que sea el resto de sus compañeros quienes aporten al desarrollo o corrección de las tareas presentadas.

Posibles Estrategias
Errores y Dificultades

a).



i. $2X = 8$

b).

i. $2X = 4 + 4$

c).

i. $X = 4 + 4$

ii. $X = 8$

d).

i. $X = 4$

Devolución

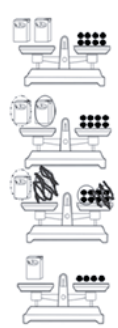
En la ecuación hay solo una X al lado izquierdo.

¿Qué habrá pasado con la otra X? ¿Por qué?

¿Si cancelamos la X, es decir, eliminamos un elemento de un lado de la ecuación, qué tenemos que hacer para mantener el equilibrio?

¿Qué sacamos del otro lado entonces para mantener el equilibrio? ¿Entonces, qué nos queda en la balanza y en la ecuación?

Respuesta experta



$2X = 8$

$X + X = 8$

$X + \cancel{X} = 4 + \cancel{4}$

$X = 4$

Cada caja de leche representa 4 bolitas

10 minutos		
8. Finalización de la actividad y anclaje de conocimientos	8. El docente realiza las siguientes preguntas: Profesor: ¿Qué función cumplían las balanzas? Estudiante: Representar la ecuación, ya que la ecuación y la balanza representan lo mismo. Profesor: ¿Qué estrategias fueron las más adecuadas para encontrar el valor de la incógnita? Estudiante: Descomponer números o elementos para luego cancelarlos o eliminarlos, manteniendo siempre el equilibrio de la balanza y de la ecuación. Profesor: ¿En qué consiste resolver una ecuación? Estudiante: Encontrar un valor desconocido o el valor de la incógnita, manteniendo siempre la igualdad de la ecuación. Profesor: ¿Cómo podemos comprobar que el valor que hemos obtenido de la incógnita está correcto? Estudiante: Remplazando ese valor por la misma cantidad de bolitas en la balanza o reemplazar ese valor en la X de la ecuación. Finalmente el profesor en conjunto con los estudiantes definen: ***“Para poder resolver ecuaciones, podemos descomponer números que nos permitan cancelar términos a ambos lados de la igualdad, para mantener la igualdad en la ecuación”***	8. Los estudiantes responden y realizan la asociación con la tarea planteada en clases.

Observación: Se adjunta guía para imprimir y PPT con la actividad

Las últimas palabras del profesor quedan registradas en un papelógrafo o cartulina

*Ver Anexo con Guías y Presentación del problema para los estudiantes

CLASE Nº2

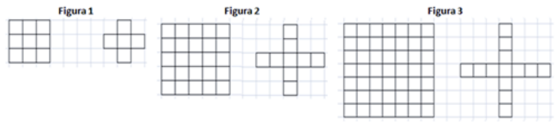
“ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA”

Se presenta la segunda estructura de la secuencia didáctica a través del plan de clases Nº2, que consiste en reforzar el tránsito entre los diversos registros, en este caso algebraico y geométrico. Estableciendo para su solución la asociación con la balanza, a partir de encontrar los elementos que deben de manipular para convertirse o igualar a la otra figura, manteniéndose la igualdad.

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$
Objetivo	Resolver problemas geométricos de ecuaciones lineales de adiciones y sustracciones en $\mathbb{N}$.
Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Concepto de Multiplicación • Descomposición de Números Naturales • Nociones básicas de ecuaciones (igualdad e incógnita) • Calculo de área de cuadrado • Apropiación de propiedad cancelativa	• Copias de la situación para cada estudiante • Lápiz grafito y goma • Proyector y computador (si se cuenta con ellos) para proyectar la actividad

Tiempo y preguntas	Respuesta Experta	Posibles estrategias de los estudiantes	Dificultades y errores	Devoluciones
		Inicio de la clase		
15 min **Gestión del aula:** Se disponen a los estudiantes a trabajar en grupos aleatoriamente ¿De qué manera se puede calcular la cantidad de □ qué se debe quitar a la figura de la para obtener la figura de la derecha?	$9=5+X$ $\cancel{5}+4=\cancel{5}+X$ (se cancela) $4=X$	Tarea que se entrega al estudiante  **Posibles estrategias de solución de los estudiantes** **Estrategia 1**: el estudiante puede contar la cantidad de cuadros de la izquierda y restar los de la derecha “en un lado 9 y en el otro 5, 9-5 = 4” **Estrategia 2**: “conjeturan indicando que si tienen 5 les faltan 4 para completar 9” **Estrategia 3**: Sumar ambas figuras 9 + 5 = 14 y restar las faltantes 14-4 = 10 **Estrategia 4**: Los estudiantes marcan con lápiz los espacio vacios de la figura de la derecha (4)	D: No comprender la pregunta del problema E: Sumar ambas figuras y restar las faltantes D: Resolver sin considerar un elemento faltante o incógnito	D: Preguntar a otro integrante del grupo que explique lo solicitado D: Recordar la pregunta inicial D: preguntar ¿podríamos hacer lo mismo con una figura más grande?

<table>
<tr><th>Tiempo y preguntas</th><th>Respuesta Experta</th><th>Posibles estrategias de los estudiantes</th><th>Dificultades y errores</th><th>Devoluciones</th></tr>
<tr><th colspan="5">Desarrollo de la clase</th></tr>
<tr>
<td>55 min
Gestión del aula:
trabajo en grupos</td>
<td>n(número de la figura) ● 4 (lados de la figura de la izquierda) + 1 (cuadrado del centro)
Fórmula general (n●4)+1

121=21+X
100+~~21~~=~~21~~+X
100=X
Se deben restar 100 cuadritos</td>
<td>Actividad que se le entrega al estudiante


Pregunta que se realiza al estudiante
Si el cuadrado correspondiente a la figura 5 de la izquierda es de lado 11 ● 11 , calcule la cantidad de cuadritos que debe quitar a la figura para obtener la figura de la derecha

Estrategia 1: Los estudiantes pueden dibujar la figura 4 y 5 para contar y restar los cuadrados que deben contar
Figura 4

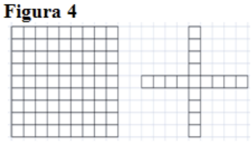
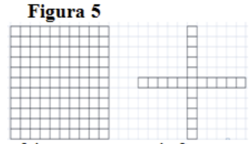



Figura 5

De manera que contar los cuadrados faltantes o contar la figura que se crea a la derecha para restar a la izquierda</td>
<td>D: no recordar el cómo calcular el área del un cuadrado

D: no encontrar el patrón de crecimiento en cada figura

D: No recordar procedimiento para multiplicar 11 x 11</td>
<td>D: recordar que se calcula multiplicando base por altura

D: utilizar las figuras para la comprensión del crecimiento según un patrón

D: Recordar estrategias de descomposición de factores y posterior agrupación para resolver
Ej: 11 x 11es igual a multiplicar 10 x 11 y luego 1 x 11 y los productos sumarlos</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Estrategia 2: Confeccionan una tabla asociando un patrón de aumento en las figuras
<table>
<tr><td>Figura</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Lado</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Total cuadrados</td><td>9</td><td>25</td><td>49</td><td>81</td><td>121</td></tr>
<tr><td>Se quitan la cantidad de lados más un número par</td><td>3+2=5</td><td>5+4=9</td><td>7+6=13</td><td>9+8=17</td><td>11+10=21</td></tr>
<tr><td>Cuadrados faltantes</td><td>9-5=4</td><td>25-9=16</td><td>49-13=36</td><td>81-17=64</td><td>121-21=100</td></tr>
</table>
Responden: a la 5ª figura se le deben quitar 100 cuadraditos.
Estrategia 3: Los estudiantes logran comprender la relación que hay entre el número de la figura y sus lados, asociando que siempre quedará 1 al centro, por tanto en la figura 5 conjeturan (5 por el número de la figura ●4 por el tipo de figura que se debe crear a la izquierda y +1 por el cuadrado del centro) da como resultado 21, quiere decir que en la izquierda la figura posee 21 cuadritos, por tanto se restan 121-21=100. Deben restar 100 cuadros para encontrar la figura de la izquierda.</td>
<td>E: Multiplicar erróneamente

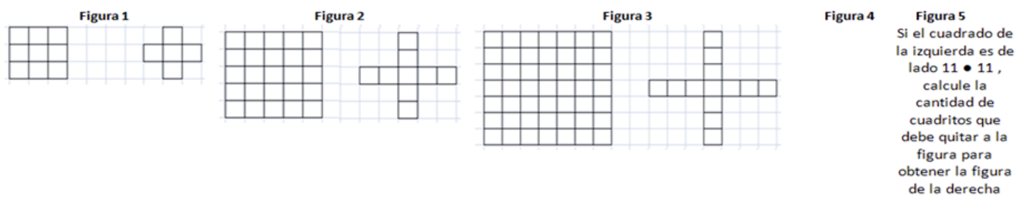
E: errores en algoritmos</td>
<td>D: Descomponer al menos un factor y operar

D: solicitar que el grupo completo realice los cálculos y los comprueben.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tiempo y preguntas</th><th>Posibles estrategias de los estudiantes</th><th>Dificultades y errores</th><th>Devoluciones</th></tr>
<tr><th colspan="4">Cierre de la clase</th></tr>
<tr>
<td>20 min
Gestión del aula:
Debate entre grupos y estudiantes (presentación de estrategias)
PLENARIO</td>
<td>Debate entre los estudiantes y posibles soluciones
Cada grupo expone sus estrategias para resolver el problema y razonamientos mientras sus compañeros escuchan atentos y con respeto</td>
<td>D: no recordar cómo calcular área de cuadrado</td>
<td>D: recordar a partir de un sinónimo lo que es área (superficie)</td>
</tr>
</table>

	Evaluación de la clase **¿Los expositores plantean claramente sus procedimientos o estrategias?** Finalmente, el profesor generaliza la situación problemática, comentando: La situación que resolvieron si bien se puede dar una respuesta sin utilizar una ecuación, se hace más engorroso cuando por ejemplo se pide la figura 7, 22 o 100, ya el realizar tablas o graficarlas no sería el procedimiento más rápido. Se da la importancia al planteamiento de la ecuación y el poder encontrar un patrón	D: dar vaga importancia al concepto de "valor descocido"	D: Recordar que no siempre podremos calcular aritméticamente un valor desconocido y recordar que estos se le llaman incógnitas y que se pueden solucionar con el planteamiento de una ecuación.

Recurso que se debe entregar al estudiante



MATEMÁTICA EN JUEGO

En esta segunda actividad de la secuencia didáctica se espera que los estudiantes posean los mismos aprendizajes ya enunciados en la actividad 1 asociados a patrones, secuencias y solución de ecuaciones en acotados ámbitos numéricos, sin embargo en esta clase, se espera que tengan los aprendizajes relacionados a geometría, como el cálculo y reconocimiento de concepto de área de cuadrado y rectángulo. *Ver anexo tabla Nº8: Conocimientos previos (esperados) de los estudiantes en el ámbito geométrico)* para comprender la relación entre nivel educativo y conocimiento adquirido

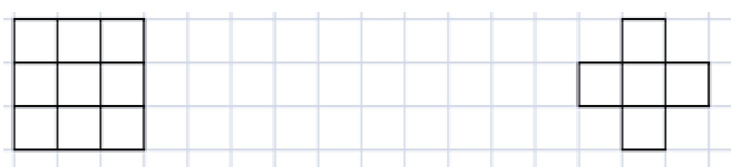
"ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA"

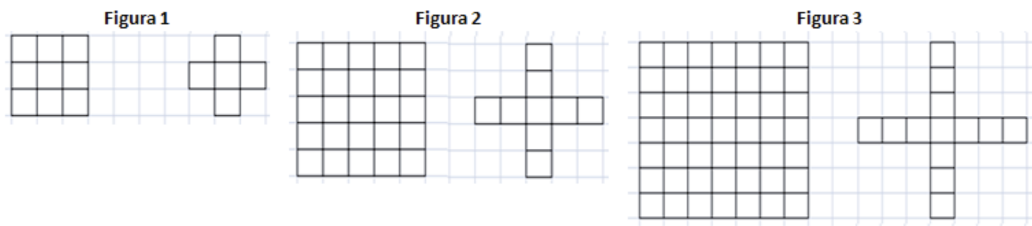
ANÁLISIS A PRIORI DEL PLAN DE ESTUDIO

Una actividad inicial y motivacional consiste en presentar una situación donde a partir de cálculos sencillos pueden resolver la interrogante, pero se complejiza al preguntar por una figura determinada que no se encuentra representada, motivando al estudiante a establecer diversas estrategias para dar solución a la problemática

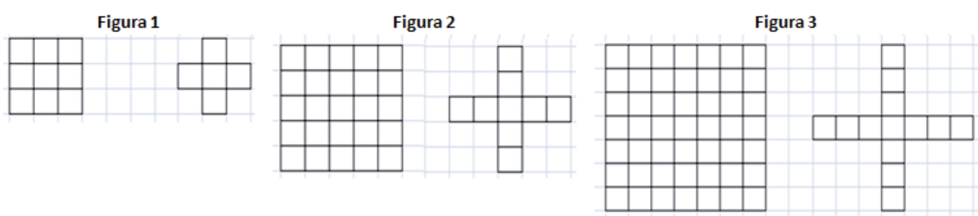
Las actividades propuestas para este plan de estudio, se asocian directamente con un plano algebraico, ya que se espera que los estudiantes logren asociar las ecuaciones pertinentes que permiten satisfacer a las preguntas, al igual que la actividad de la clase Nº1, esta clase se estructura con una actividad inicial, que puede ser resuelta inclusive de forma mental o pudiendo caer en un simple conteo de cuadrículas , se espera que a través de la interacción de los estudiantes, logren modelar una ecuación.

Se espera que al ya conocer la respuesta, logren enunciar fácilmente la ecuación que, a su vez se pueden realizar preguntas tales cómo ¿qué algoritmo es necesario para dar solución a este problema?, ¿qué datos o elementos les entrega el problema?, ¿cómo podemos representar en una ecuación esta situación?, esperando que los estudiantes comuniquen sus estrategias y posibles representaciones de la ecuación, para provocar una discusión entre los estudiantes, y promover el análisis y argumentación de la actividad inicial.

Actividad inicial
 ¿De qué manera se puede calcular la cantidad de □ qué se debe quitar a la figura de la para obtener la figura de la derecha?

Actividad central de la clase
 Si el cuadrado correspondiente a la figura 5 de la izquierda es de lado 11 ● 11 , calcule la cantidad de cuadritos que debe quitar a la figura para obtener la figura de la derecha

Posteriormente se presenta a los estudiantes la misma actividad pero con un grado de dificultad mayor, ya que se pide realizar la misma búsqueda que la actividad inicial, sin embargo se agrega un mayor grado de dificultad, al aumentar la cantidad de figuras, dando un salto entre la figura 2 a la figura 5. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes logren identificar que el planteamiento de una ecuación se consideraría una de las opciones más rápidas de encontrar la respuesta al problema



ERRORES, DIFICULTADES Y DEVOLUCIONES

En el contexto de esta segunda clase podemos considerar errores y dificultades propias del contexto geométrico y del planeamiento de una ecuación, a su vez se entregarán las posibles devoluciones para cada una de ellas.

Tabla Nº9: Dificultades y errores de la segunda clase de la secuencia didáctica

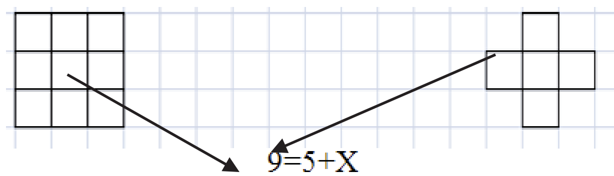
Momento de la Clase	Dificultad	Error	Devolución
Inicio	Para comprender la tarea matemática (acciones desprovistas de sentido relacionada con la problemática)	Considerar que la representación geométrica alude a calcular perímetro	La situación ¿le pide calcular el perímetro?, ¿qué es el perímetro?, ¿en qué consiste calcular el perímetro?, ¿será necesario para esta actividad? ¿Qué te pide el problema?, ¿de qué manera puedes dar respuesta a lo que se desea saber?
		Considerar que la representación geométrica alude a calcular áreas	La situación ¿le pide calcular áreas?, ¿qué es el área?, ¿en qué consiste calcular el área?, ¿es la única acción que se le pide realice?
Desarrollo	Para encontrar el patrón o regularidad	Crear modelos incompletos	Entregar un patrón simple de crecimiento por ejemplo 2-4-6…y preguntar ¿quien

			sigue en la sexta posición?, ¿de operación realizó para determinar la sexta posición?, ¿cuántos números le faltan al 6 para llegar a ser la sexta posición?, ¿cuántos elementos debemos quitar para que la sexta posición se transforme en la tercera posición? ¿Qué es un patrón?, ¿cómo identificas uno?, ¿has visto alguno?, ¿Cuáles son sus características?
	Para plantear la ecuación	Al plantar la ecuación	Compruebe su ecuación, su modelo debe volver a reproducir la figura 5 de lado 11 x 11 ¿Cuáles son los datos que te entrega el problema?, ¿qué elementos no conocía?
		Al posicionar la	Compruebe su

	incógnita	ecuación, su modelo debe volver a reproducir la figura 5 de lado 11 x 11. ¿Si tienes una manzana y te regalo otra, cuántas manzanas tienes?, ¿si tienes x + x a que es igual?

RESPUESTA EXPERTA

Respuesta ideal de la actividad inicial, se considera solamente los elementos entregados por el problema, tal que en el lado izquierdo y derecho representan los lados de la balanza, de manera que se logre resolver a partir del concepto de equilibrio



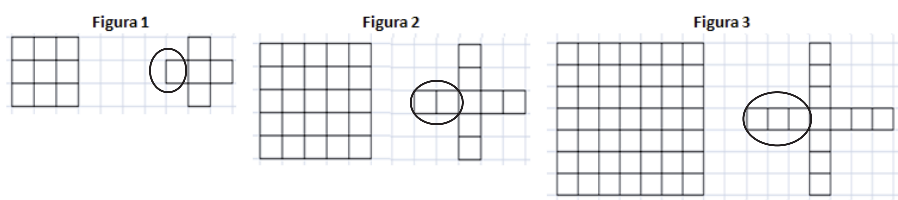
$9=5+X$

$\cancel{5}+4=\cancel{5}+X$ (se cancela)

$4=X$

La respuesta experta para la actividad central de la clase no solo puede contar con la formulación de una ecuación, logrando a su vez, plantear un patrón de formación para encontrar la figura de la quinta posición, al encontrar el patrón entre el número de la figura solicitada, 5 y los lados, en este caso 4, e identificar que en la figura de la izquierda se produce un crecimiento de un cuadrado por lado y generar un patrón, como se evidencia a continuación:

Patrón: (n●4)+1



n: Número de la figura
4: lados del cuadrado
+1: cuadrado central de la figura de la derecha

De esta manera el estudiante puede calcular la cantidad de cuadrados que se encontrarán a la derecha, de manera que el planteamiento de este resultaría

$121=21+X$

$100+\cancel{21}=\cancel{21}+X$

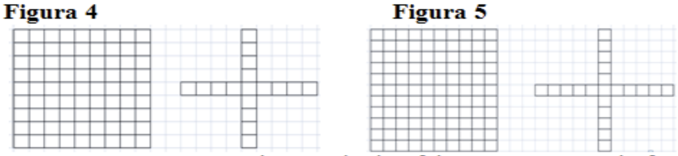
$100=X$

Se deben restar 100 cuadritos

POSIBLES ESTRATEGIAS

Para la elaboración de las posibles estrategias se consideran junto a los análisis de la clase lo expuesto por Radford (2011), quien declara que no hay solo una forma de resolver un problema, sino de diversas maneras, sobre todo en los estudiantes de los niveles básicos (citado en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012), a la luz de lo anterior tomaremos los medios de representación en lenguaje ordinario, gráfico, tabular, que se presentarán en la siguiente tabla

Tabla Nº10: Posibles estrategias de la actividad de la clase 2

Estrategia de resolución actividad 2	Ejemplificación
Uso del lenguaje	En la actividad inicial, el estudiante puede comunicar que si en una lado hay 9 cuadritos y en el otro 5, basta con descontar los cuadritos de un lado a otro, deduciendo que se deben quitar 4 cuadritos, ya que 9-5=4 y si a la figura de la izquierda le agrego 4+5=9
Uso de diagramas	Los estudiantes construyen las figuras correspondientes a la cuarta y quinta posición, para así determinar a partir del conteo, la cantidad de elementos faltantes Ejemplo **Estrategia 1**: Los estudiantes pueden dibujar la figura 4 y 5 para contar y restar los cuadrados que deben contar **Figura 4** **Figura 5**  De manera que contar los cuadrados faltantes o contar la figura que se crea a la derecha para restar a la izquierda
Registro Tabular	Los estudiantes confeccionan una tabla para describir todos los posibles datos entregados a modo de comparación Ejemplo:

Estrategia 2: Confeccionan una tabla asociando un patrón de aumento en las figuras

Figura	1	2	3	4	5
Lado	3	5	7	9	11
Total cuadrados	9	25	49	81	121
Se quitan la cantidad de lados más un número par	3+2=5	5+4=9	7+6=13	9+8=17	11+10=21
Cuadrados faltantes	9-5=4	25-9=16	49-13=36	81-17=64	121-21=100

Responden: a la 5ª figura se le deben quitar 100 cuadraditos.

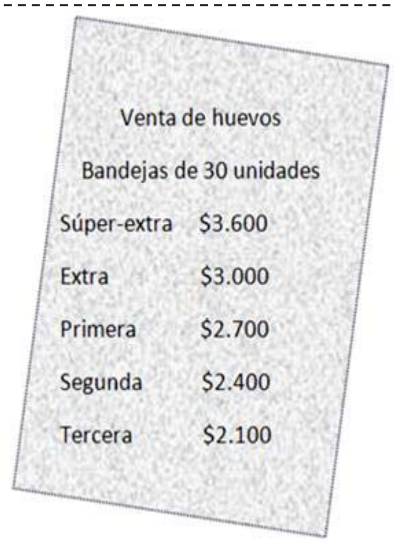
CLASE Nº3

“RESOLVIENDO PROBLEMAS A PARTIR DEL ÁLGEBRA”

Las actividades propuestas en este plan de estudio, se enmarcan en una de las habilidades transversales de la matemática, por tanto, se estructura una situación, en donde el estudiante deba identificar a partir de los valores del cartel que se les entregará, cuánto gasta un personaje, sin embargo, se le pide que determine la ecuación que permite encontrar el valor y resolver el problema.

La actividad a continuación es aquella que se entrega al inicio de la clase, su contexto es simple, para poder motivar a los estudiantes a resolver y plantear la ecuación. Se espera que logren asociar la tabla adjunta con lo que compraron Alicia y María, para establecer una solución a la actividad.

“Alicia y María compraron bandejas de huevos en la feria, Alicia compró dos bandejas de primera, y en total pagó $8 400, ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó María en huevos?, ¿qué bandeja pudo haber comprado María?”


Venta de huevos

Bandejas de 30 unidades

Súper-extra	$3.600
Extra	$3.000
Primera	$2.700
Segunda	$2.400
Tercera	$2.100

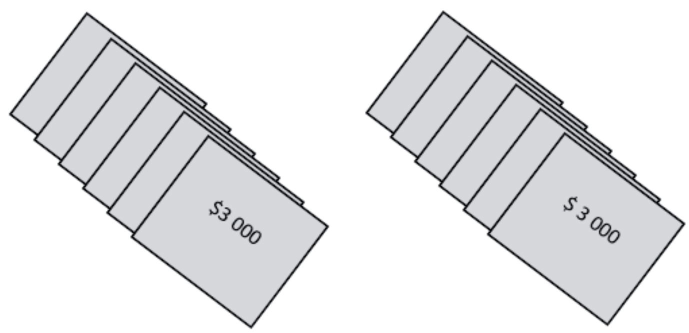
La actividad central de la clase, se mantiene con el mismo cartel de valores pero con un nivel de complejidad mayor, ya que se espera que los estudiantes, junto con resolver la problemática, sean capaces de plantear la ecuación que modela el problema, así como determinar los tipos de bandejas de huevos que compró cada uno y los gastos realizados por Juan, se restringen las posibilidades, al dar sólo el total de una boleta cancelado por ambos.

“Pedro y Juan compraron huevos por mayor, Pedro compra una caja de 12 bandejas Extra y en total pagan una boleta por $57 000.” ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó Juan?, ¿Podrías conocer qué tipos de huevos compró Juan?, argumenta tu estrategia.

POSIBLES ESTRATEGIAS

Considerando las estrategias de la clase anterior, es que consideramos las posibles formas de resolver problemas a partir del lenguaje natural, construcción de gráficas y tablas.

TablaNº11: Posibles estrategias de la actividad de la clase 3

Estrategia de resolución actividad 3	Ejemplificación
Uso del lenguaje	Establecen que 12 veces las cajas extras a $3 000, adicionando o multiplicando, dan un valor de $36 000, si por tanto entre ambos cancelaron 57 000, la diferencia es de 21 000. Entonces Juan gastó $21 000 y si miramos los precios de huevos, 10 bandejas de huevos de tercera suman $21 000
Uso de representaciones	Estrategia 2: Gráfica Representación de cada caja de huevo extra  La sumatoria 3 000 + 3 000 + …. 12 veces es 36 000 Por tanto 57 000 – 36 000 = 21 000 Juan pagó 21 000 y podría haber comprado 10 cajas de huevos de Tercera, ya que 2 100 + 2 100 + 2 100 … 10 veces es 21 000 **Se considera de los rectángulos representan las bandejas de huevos.*

Registro Tabular

Estrategia 3: Tabular

Cantidad de cajas	Cantidad de bandejas	Valor bandeja extra
1	1	3 000
	2	3 000
	3	3 000
	4	3 000
	5	3 000
	6	3 000
	7	3 000
	8	3 000
	9	3 000
	10	3 000
	11	3 000
	12	3 000
Total valor caja		36 000

Si Pedro gastó 36 000

57 000 – 36 000 = 21 000

Juan gastó 21 000

Si miramos los valores de las bandejas de huevos, el valor de huevos de tercera es igual comprar 10 bandejas, por lo tanto, Juan, compra 10 bandejas de huevo de tercera.

RESPUESTA EXPERTA

Esta respuesta promueve la movilización de diversas estrategias para resolver el problema, sin embargo, la orientación de la pregunta central consiste en que se plantee una ecuación como modelo para la problemática.

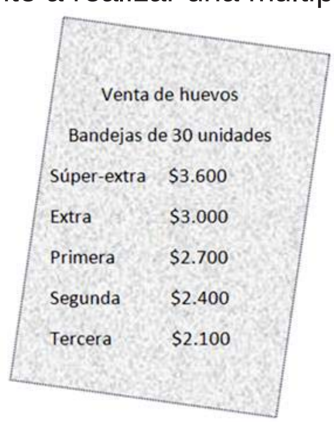
Los estudiantes proceden a asociar operadores aritméticos y valores numéricos con la respectiva representación algebraica del valor desconocido, logrando asociar diversas propiedades tanto de la adición como de la multiplicación, ya que en el enunciado al referirse “comprar 12 cajas de bandejas extras”, el estudiante puede asociar la frase anterior a adicionar 12 veces el valor de las bandejas extras o comprender que 12 veces el valor es equivalente a realizar una multiplicación por 12

$$12 \cdot 3\,000 + X = 57\,000$$

$$36\,000 + X = 57\,000$$

$$\cancel{36\,000} + X = \cancel{36\,000} + 21\,000$$

$$X = 21\,000$$


Venta de huevos

Bandejas de 30 unidades

Súper-extra	$3.600
Extra	$3.000
Primera	$2.700
Segunda	$2.400
Tercera	$2.100

<u>La ecuación que permite determinar cuánto más gastó Juan es 12●3 000 + X = 57 000</u>

Frente a la pregunta que requiere determinar el tipo de bandejas que compró Juan, estimula la indagación a partir de los posibles valores que correspondan sus bandejas, concluyendo que si Juan compra 21 000 en bandejas de huevos, estos serían de tercera.

> Los huevos que compra Juan son de Tercera, ya que
>
> $2\ 100 \cdot 10 = 21\ 000$
>
> Juan compra 10 bandejas de huevos de Tercera

Utilizando estrategias de la multiplicación el estudiante puede recordar que 21 000 por 1 es 21, para posteriormente agregar los ceros correspondientes a la potencia de 10, de manera que, 21 ●1 =21 y si anexamos ceros es 21 000.

DIFICULTADES, ERRORES Y DEVOLUCIONES

Para esta clase de la secuencia didáctica, se considerarán aquellas dificultades y errores obtenidos desde la literatura, ya que Puig (2004) establece dificultades y errores cometidos al momento de resolver problemas en el contexto algebraico, estas se presentan con sus respectivas devoluciones dadas por el autor.

Tabla Nº12: Dificultades y errores de la tercera clase de la secuencia didáctica según Puig (2004).p6-7

Momento de la clase	Dificultades	Error	Devolución
Inicio	Para analizar el enunciado y determinar las cantidades que hay que considerar para resolver el problema y las relaciones entre ellas.	Para comprender el enunciado	Promover que identifiquen los datos necesarios, argumentos que promuevan la resolución de un algoritmo o problema y las posibles estrategias. Identificar las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas

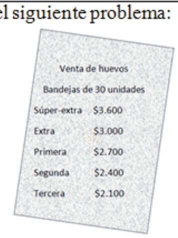
			(incógnita), así como las relaciones entre ellas
		Particularizar	Suscitar la comprensión desde lo general a lo particular
		Identificar relaciones inexistentes entre los datos	Determine ¿cuál es la relación entre el enunciado y las cantidades?
Desarrollo	Dificultades en la traducción	Asignar la misma letra a cantidades desconocidas distintas, ejemplo, asignar a Pedro y Juan la letra x	Asociar la asignación de la letra a elementos cotidianos, preguntando ¿existen compañeros que compartan el mismo número de lista en su curso?, ¿Por qué cree que ocurre esto? Asignar un nombre (letra) a las cantidades desconocidas
		Realizar modelos incompletos	Identificar los pasos o elementos en que el estudiante realiza una práctica o acción no válida. Representar las

		cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra
Dificultades al plantear una ecuación	Relacionar expresiones algebraicas y las relaciones entre diferentes cantidades	Ubicar a partir del lenguaje la asociación de sinónimos de los algoritmos de la adición y sustracción. Escribir una igualdad entre expresiones algebraicas (una ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.

PLAN DE CLASES

Se presenta la estructura de la secuencia didáctica a través del plan de clases Nº3, con el objetivo de que los estudiantes frente al planteamiento de un problema, necesariamente deban plantear una ecuación, al igual que la segunda clase de la secuencia didáctica, se entrega a los estudiantes una actividad inicial para resolver, relativamente sencilla para ir agregando un nivel de complejidad mayor en el desarrollo de la clase.

<table>
<tr><td>Problemática</td><td colspan="2">Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en N</td></tr>
<tr><td>Objetivo</td><td colspan="2">Resolver problemas en un contexto cotidiano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos Previos</td><td>Materiales</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Adición
• Sustracción
• Algoritmo de la Multiplicación y División
• Descomposición de Números Naturales
• Nociones básicas de ecuaciones (igualdad e incógnita)
• Apropiación de propiedad cancelativa</td><td>• Copias de la situación para cada estudiante
• Lápiz grafito y goma
• Proyector y computador (si se cuenta con ellos) para proyectar la actividad</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Tiempo y preguntas</th><th>Respuesta Experta</th><th>Posibles estrategias de los estudiantes</th><th>Dificultades y errores</th><th>Devoluciones</th></tr>
<tr><td colspan="5">Inicio de la clase</td></tr>
<tr><td>15 min
Gestión del aula:
Se disponen a los estudiantes a trabajar en grupos aleatoriamente, se entrega el problema, lo leen y se predisponen a trabajar en grupos</td><td>$2700 + 2700 + x = 8400$
$5400 + x = 8400$
$\cancel{5400} + x = 3000 + \cancel{5400}$
$x = 3000$
María gasta $3000 en una bandeja de huevos</td><td>Actividad para el estudiante, se le entrega el siguiente problema:
"Alicia y María compraron bandejas de huevos en la feria, Alicia compró dos bandejas de primera, y en total pagó $8 400, ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó María en huevos?, ¿qué bandeja pudo haber comprado María?"


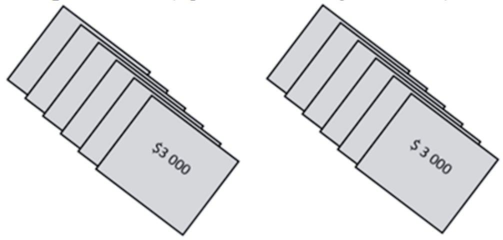
Posibles estrategias de solución de los estudiantes
Estrategia 1:Los estudiantes realizan el ejercicio aritméticamente ya que pueden indicar que $2700 + 2700 son $5400 y si le restan los $5400 a los $8400, la diferencia es $3000</td><td>D: dificultad al comprender el problema

D: No lograr plantear una ecuación</td><td>D: pedir que lo conversen entre el grupo y extraer los datos y la pregunta

D: Preguntar al grupo de trabajo ¿Qué representa una ecuación? (una igualdad). ¿Para qué sirve una ecuación? (para encontrar un valor desconocido)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Estrategia 2: Los estudiantes confeccionan tabla para calcular diferencias
<table><tr><td>Bandejas</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>Alicia</td><td>2700</td><td>2700</td></tr><tr><td>María</td><td colspan="2">X</td></tr><tr><td>Diferencias</td><td colspan="2">8400-5400=3000</td></tr></table>
Estrategia 3: escribir la ecuación pero no poder resolver correctamente.
Ej: $2700+2700 + x = 8400$
$5400 + x = 5400+3000$
$5400 - 3000 + x = 0$
$2400 + x = 0$</td><td>E: resolver la ecuación y dejar uno de sus términos en 0</td><td>D: Recordar que si es una igualdad, recordando a la balanza, ambos lados deben estar en equilibrio.</td></tr>
<tr><th>Tiempo y preguntas</th><th>Respuesta Experta</th><th>Posibles estrategias de los estudiantes</th><th>Dificultades y errores</th><th>Devoluciones</th></tr>
<tr><td colspan="5">Desarrollo de la clase</td></tr>
<tr><td>55 min
Gestión del aula:
Se disponen a los estudiantes a trabajar en grupos aleatoriamente, se entrega el problema, lo leen y se predisponen a trabajar en</td><td>$12 \cdot 3\,000 + X = 57\,000$
$36\,000 + X = 57\,000$
$\cancel{36\,000} + X = \cancel{36\,000} + 21\,000$
$X = 21\,000$
Respuesta: Los huevos que compra Juan son de tercera, ya que 2100●10=21000
Juan compra 10 bandejas de</td><td>Actividad para el estudiante, con los mismos valores anteriormente expuestos:
"Pedro y Juan compraron huevos por mayor, Pedro compra una caja de 12 bandejas Extra y en total pagan una boleta por $57 000. ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó Juan?, ¿Podrías conocer qué tipos de huevos compró Juan?, argumenta tu estrategia."
Posibles estrategias de solución de los estudiantes
Estrategia 1: Lenguaje cotidiano
"Establecer que 12 veces las cajas extras a $3000 (a través de una adición iterada o el algoritmo de la multiplicación), dan un valor de</td><td>D: No lograr entender el problema

E: multiplicar las bandejas por los huevos</td><td>D: pedir que lo conversen entre el grupo y extraer los datos y la pregunta, además de recordar el problema inicial

D: Indicar que el precio es por bandeja.</td></tr>
</table>

grupos	huevos	$36000", y si entre ambos cancelaron $57000, la diferencia es de $21000. (al establecer 57000-21000) **Estrategia 2**: Gráfica (representando las cajas de huevo)  *Nota: Los rectángulos representan las bandejas de huevos* "La sumatoria 3000 +3000 +….12 veces 3000" es $36000 Por lo tanto 57000-36000=21000 Respuesta: Juan pagó 21000 y podría haber comprado 10 cajas de huevos de Tercera, ya que 2100 +2100+…10 veces 2100 es $21000, también, pueden utilizar el algoritmo de la multiplicación en vez de la adición de (3000●12=36000 y de 2100●10=21000) **Estrategia 3**: Uso de tablas	D: No lograr plantear una ecuación	D: Preguntar al grupo de trabajo ¿Qué representa una ecuación? (una igualdad). ¿Para qué sirve una ecuación? (para encontrar un valor desconocido)

Cantidad de cajas	Cantidad de bandejas	Valor bandeja extra
1	1	3 000
	2	3 000
	3	3 000
	4	3 000
	5	3 000
	6	3 000
	7	3 000
	8	3 000
	9	3 000
	10	3 000
	11	3 000
	12	3 000
Total valor caja		36 000

Si Pedro gastó 36 000

57 000 – 36 000 = 21 000

Juan gastó 21 000

Si miramos los valores de las bandejas de huevos, el valor de huevos de tercera es igual comprar 10 bandejas, por lo tanto, Juan, compra 10 bandejas de huevo de tercera.

Tiempo y preguntas	Posibles estrategias de los estudiantes	Dificultades y errores	Dificultades y errores	Devoluciones
Cierre de la clase				
20 min **Gestión del aula:** Debate entre grupos y estudiantes (presentación de estrategias) PLENARIO		Debate entre los estudiantes y posibles soluciones Cada grupo expone sus estrategias para resolver el problema y razonamientos mientras sus compañeros escuchan atentos y con respeto **Evaluación de la clase** **¿Los expositores plantean claramente sus procedimientos o estrategias?** Se les pregunta a los estudiantes: ¿Qué fue lo más complejo de este problema?	D: para plantear la ecuación	D: indicar que es lo desconocido y cuáles son los valores conocidos para poder asociarlos a los distintos términos

		D: comprensión lectora	D: Pedir que cada integrante del grupo extraiga su idea de lo que se propone.

Recurso para el estudiante

"Alicia y María compraron bandejas de huevos, Alicia compró dos bandejas de primera, y en total pagó $8 400, ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó María en huevos?, ¿qué bandeja pudo haber comprado María?"

Venta de huevos

Bandejas de 30 unidades

Súper-extra	$3.600
Extra	$3.000
Primera	$2.700
Segunda	$2.400
Tercera	$2.100

Finalmente:

"Pedro y Juan compraron huevos por mayor, Pedro compra una caja de 12 bandejas Extra y en total pagan una boleta por $57 000. ¿Cuál es la ecuación que permite determinar cuánto gastó Juan?, ¿Podrías conocer qué tipos de huevos compró Juan?, argumenta tu estrategia."

MATEMÁTICA EN JUEGO

El centro de la enseñanza de la matemática es la habilidad de resolver problema, ya que fomenta el desarrollo de estructuras de pensamiento y de poder resolver problemas que lo lleven a posicionarse en contextos tanto cotidianos como no cotidianos.

Contextualizar el aprendizaje mediante problemas cotidianos relaciona la matemática con contextos específicos, y proporciona así un aprendizaje significativo, ya que, dota al estudiante, la oportunidad de afrontar situaciones desafiantes, que demandan, para su resolución, diversas habilidades, destrezas y conocimientos que no necesariamente persiguen diseños determinados.

Los conocimientos y habilidades que los estudiantes debieran poseer para enfrentar la resolución de un problema en el contexto de la situación didáctica, son: nociones de números y operaciones en naturales, destrezas en cálculos y uso de algoritmos, sobre patrones y álgebra, agudeza de describir e identificar diversas relaciones que pueden ser representadas en formas concretas, icónicas o simbólicas

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN Y PERTINENCIA DEL MARCO TEÓRICO

METODOLOGÍA

Este estudio se establece como un tipo de investigación descriptiva, la que, en términos generales, "busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 80), bajo un paradigma cualitativo y enfoque interpretativo, orientada a identificar, describir e interpretar ciertas características o fenómenos, y enmarcada en el Estudio de Clases Japonés, considerando las fases de preparación de la clase, implementación de esta, discusión evaluativa inmediata, en forma cíclica, tal como se documenta en Isoda y Olfos (2009).

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

La TSD, posee dos objetivos: por una parte, estudia la consistencia de los objetos y de sus propiedades, ya sean lógicas, matemáticas, y/o ergonómicas, que son necesarias para la construcción lógica y la invención de situaciones, donde (Brousseau, 2007) define una situación como "un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable" (p. 16); y por otra, la confrontación científica, del tipo empírica o experimental, de la adaptación de tales modelos y de sus características con la contingencia (Brousseau, 2010). Entre las situaciones planteadas por el autor, existen dos de suma importancia: a) la situación didáctica, que sucede cuando un individuo (educador), tiene por intención enseñar a otro (educando) un determinado saber matemático; b) la situación a-didáctica, se sucede cuando el sujeto interactúa con el medio para resolver un problema, y donde no existe una intención de enseñanza (Parraguez, Rojas y Vásquez, 2015).

La elección de la TSD como referente teórico para el presente estudio se justifica en que, a la luz de las orientaciones didácticas emanadas desde el currículum escolar vigente y de los fundamentos del Estudio de Clase Japonés sobre la mejora de los métodos de enseñanza, las fases de acción, formulación y validación permiten a los estudiantes la adquisición de nuevos conocimientos, dando así cumplimiento al objetivo propuesto relacionado con el análisis de los resultados.

CONTEXTO Y SUJETOS

Para dar respuesta al segundo objetivo específico, se efectuó la implementación de una clase de la secuencia diseñada en el establecimiento Rosa Marckmann de González Videla, en el curso quinto básico B, donde los sujetos participantes fueron 34 estudiantes de entre 10 y 11 años, quienes conformaron parejas de trabajo, situados uno frente a otro, y con la capacidad de poder mirar a la pizarra. La intervención se llevó a cabo durante 90 minutos, divididos en dos bloques de 45 minutos cada uno, previo y posterior al horario de almuerzo, el día miércoles 24 de mayo del presente.

TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS

Las categorías de análisis que se enuncian para la investigación son aquellas que a priori se consideraron como posibles estrategias que utilizan los estudiantes al momento de resolver ecuaciones, a través de las fases de acción, formulación y validación, que se pueden evidenciar en los distintos momentos de la clase implementada, específicamente en la interacción con la tarea inicial de asociar elementos icónicos de una balanza con sus respectivos elementos simbólicos, cada tarea en el Marco del Estudio de Clase, fue reestructurara para poder posicionarse en las categorías asociadas a cada fase.

De este modo, las categorías propuestas para este estudio se relacionan con las fases de la TSD en forma articulada, tal como lo muestra la siguiente figura:

Fases de la TSD	Categorías		Descripción
Acción	C_1	Correspondencia entre el lenguaje simbólico y pictórico	Los estudiantes se apropian de representaciones icónicas y simbólicas, descubriendo la correspondencia e interacción entre las representaciones, logrando así el tránsito entre diversas reconstrucciones.
Formulación	C_2	Noción de equilibrio	Los estudiantes manifiestan la noción de equilibrio utilizando trazos auxiliares o tachando elementos en ambos lados de la ecuación de forma agrupada o unitariamente.
	C_3	Resolución intuitiva	Los estudiantes resuelven la ecuación a partir de la exploración por ensayo y error del posible valor de la incógnita.

	C_4	Uso de propiedades	Los estudiantes utilizan estrategias de descomposición para igualar en ambos lados de la balanza, cancelando elementos en ambos lados de la ecuación con trazos auxiliares o tachan
Validación	C_5	Argumentación de los estudiantes basada en las estrategias utilizadas	Los estudiantes validan sus respuestas, demostrando sus estrategias utilizadas al momento de enfrentarse a la problemática.

Tabla Nº7: Categorías de Análisis según TSD

ANÁLISIS DE RESULTADOS

ANÁLISIS A POSTERIORI

En este estudio, de tres clases, se reestructura cada clase a la luz de las dificultades de los estudiantes que se evidencian en las aplicaciones anteriores de las clases anteriores asociadas al tratamiento del mismo objetivo, siendo la última reestructuración de la clase, de la secuencia didáctica, la que analizaremos con los datos entregados, tras la aplicación a 34 estudiantes de entre 10 y 11 años quienes cursan quinto año básico, en el establecimiento educacional Rosa Marckmann de González Videla de la comuna de La Cisterna, y aquellos registros escritos y audiovisuales.

El trabajo de los estudiantes consiste en la interacción con las actividades situadas en las fases de acción y formulación anteriormente expuestas, las cuales tendrán mayor incidencia en las categorías de análisis y a su vez fueron las actividades centrales de la clase, para la fase de formulación se establecen pareja de trabajo en forma aleatoria, asignándole a cada pareja la letra P, seguida por un número del 1 al 17.

A su vez, se presentan las categorías que se establecen para el análisis de datos de la clase, estás están ligadas a las actividades propuestas en las distintas fases, ya que fueron cuidadosamente planificadas y creadas a priori para contribuir a que los estudiantes superaran las dificultades evidenciadas en las aplicaciones de las clases anteriores, con la finalidad de lograr avanzar en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones. En conjunto, se exhiben algunas producciones del registro escrito de los estudiantes y transcripciones del registro audiovisual de la clase que posibilitan la visualización de las categorías de análisis propuestas para este estudio

**Ver anexo: Técnicas de recogidas de datos, Tabla de resultados y global*

A la luz de los análisis, y de la información proporcionada por las evidencias, se pueden establecer los siguientes resultados principales del estudio:

- En las producciones del os estudiantes, se evidencia que la mayoría de las parejas de sujetos informantes utilizan propiedades de la adición, tales como la asociatividad, para resolver la problemática, a la vez, demuestran ser capaces de dispensar de la representación icónica de la balanza, para solo utilizar la representación simbólica.

- Para las actividades 1 y 2 de las planificadas bajo la metodología del Estudio de Clases Japonés, diversos estudiantes son capaces de desprenderse del registro icónico o auxiliar entregado por la balanza, para trabajar en un plano algebraico. Presentan la representación algebraica de la balanza con pulcritud, utilizando sólo trazos auxiliares para encontrar la solución a la ecuación en esta representación

- Los registros audiovisuales de los estudiantes, en conjunto con sus movimientos corporales, indican ciertos elementos de la balanza en sus argumentaciones, y nos entregan la noción que una de sus preocupaciones principales es el equilibrio y es a partir de esta idea que evidenciamos en los registros audiovisuales la comunicación verbal a través del siguiente diálogo: *"deben quedar igual"* (se refieren los estudiantes a los extremos de la balanza) es la que refuerza los argumentos del *"sacar", "tachar", "robar"* los mismos elementos de un lado o del otro (refiriéndose a los extremos de la balanza).

Podemos concluir, que las depuraciones realizadas bajo la metodología del Estudio de Clases Japonés y la TSD, logran el objetivo propuesto en este estudio, ya que los estudiantes son capaces de sortear diversas dificultades para establecer nuevos aprendizajes, sin duda, existen lineamientos que promueven a lo largo del desarrollo del estudiante la aproximación al álgebra. Volviendo a la situación didáctica y la reestructuración y posterior aplicación de la clase, es que tomaremos algunos elementos de la Teoría de Registros Semióticos , ya que Duval (1993, 1995 en Socas, 2007) establece que: "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la compresión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación"(p.29), estableciendo el apoyo en el uso de la construcción de conceptos a partir de al menos dos registros, (pictórico/nos referiremos a las representaciones icónicas, la balanza/representaciones concretas de elementos y simbólico como el lenguaje algebraico, pudiendo ser este tránsito entre registros un soporte fundamental para la comprensión de los estudiantes.

CONTRASTE ENTRE ANÁLISIS

Inicialmente se esperaba que los estudiantes continuaran estableciendo las mismas dificultades que se evidenciaban al inicio de este estudio, sin embargo, la actividad reformulada que se presenta al inicio de la clase, con la representación icónica de la balanza, moviliza al estudiante a comprender que ciertos convenios ambiguos utilizados para aritmética son muy distintos para el tratamiento del álgebra. Siendo esta actividad una de las más exitosas para poder asociar el lenguaje algebraico e identificar la igualdad (=) como equivalencia entre expresiones y establecer que aquel elemento incógnito ya no puede ser 0.

Se pretendía, que los estudiantes trabajaran en las guías, tanto en la representación de la balanza y en el registro algebraico, siendo este último, el más utilizado para resolver los problemas, podríamos entonces establecer que los estudiantes al momento de comprender las relaciones existentes entre estos números y operadores (que alguna vez utilizaron solo para aritmética) son capaces de desprenderse de lo icónico y transitan entre los registros algebraicos, siendo capaces de establecer diversas estrategias propias de su conocimiento, tales como diversas descomposiciones.

En relación a lo anterior, resulta inminente que el primer agente de cambio, seamos los docentes, ya que con altura de mira, debe lograr evidenciar tanto sus virtudes como dificultades, de manera tal, que si posee vacios o conflictos con el tratamiento del Álgebra, sea capaz de instruirse dentro de la matemática, por tanto, la formación continua de docentes debiera ser un proceso cíclico donde tanto las prácticas como los planes de clases, sean compartidos, revisados y conocidos por toda la comunidad educativa.

CONCLUSIÓN

Sin duda uno de los agentes principales en este cambio, es el docente, ya que es quien evidencia tanto las fortalezas como dificultades de sus estudiantes, siendo responsable de intentar suplir estos vacio, falencias o conflictos frente al tratamiento no sólo del Álgebra, frente a esto es que invitamos a los docentes a buscar material de apoyo, como lo es hoy este estudio que cuenta con modificaciones, en beneficio del aprendizaje, ya que se enmarca en el Estudio de Clases, quien promueve el perfeccionar las prácticas y actividades desde una mirada crítica y constructiva, a su vez, la TSD sostiene toda la estructura de nuestra secuencia didáctica, ya que cada clase, se encuentra planificada bajo sus fundamentos teóricos y la visión matemática del saber.

El tratamiento del álgebra en la literatura nos indica, que aún existen las mismas dificultades al momento de resolver ecuaciones o establecer relaciones a partir del lenguaje algebraico, que hace décadas. Sin embargo, a pesar de las dificultades con la que se podría encontrar un estudiante, los primeros cinco años de escolarización pareciera estar desprovistos de una cultura algebraica, ya que a pesar del planteamiento curricular desde los niveles preescolares sobre la exploración a partir del material concreto, uso de balanzas, representaciones icónicas para poder progresar con la representación algebraica, que se establecen como objetivos mínimos de enseñanza, los estudiantes poseen dificultades al momento de resolver ecuaciones , en consecuencia con lo anterior, encontramos que estudios realizados por Radford (2011), afirman que si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. (Como se cita en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012), ya que no es suficiente con construir propuestas curriculares en torno al álgebra, sino que se hace extremadamente necesario que docentes participen de la mirada ampliada del álgebra. (Como se cita en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012). Y autores como Duval nos indican que el apoyo en el uso de la construcción de conceptos a partir de al menos dos registros, (pictórico/nos referiremos a las representaciones icónicas, la balanza/representaciones concretas de elementos y simbólico como el lenguaje algebraico, Duval (1993, 1995 en Socas, 2007) establece que: “toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa” y por tanto: “la compresión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación”(p.29)

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas. (2006). Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

Abrate, R., Font, V., & Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. En E. Rechimont y M. Ascheri (Presidencia), Memorias. Comunicación Breve en II Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa, Argentina.Acevedo.

M y Falk. M. (1997). Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Santa Fe de Bogotá, Colombia: Impresores & Publicistas. p. 53 -54.

Ávila, N. & Navarro, F. (2016). Matemática 5º Básico. Santiago, Chile: Santillana.

Bell, E. (1949) *Historia de las matemáticas* . Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (28 de agosto de 2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). Obtenido de pour un Dictionnaire de Didactique des mathématiques: http://guy-brousseau.com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: el caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. Revista Uniciencia, 28(2), 15-44.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros*. España: Universidad de Granada.

González, V., Rey, S., Olivares, P., & Parra, Y. (2015). Errores de estudiantes de primer año medio en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado. En C. Vásquez (Presidencia), Perspectivas actuales de la educación

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. México DF: Mc Graw Hill.

Ho, F., Kee, G. & Ramakrishnan, C. (2017). Matemática 5º Básico. Santiago, Chile: Santillana

Hurtado, C. y Torres, L. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. En A. Ruiz (Ed.). *Actas de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, México.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas, su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Johnson, D., Johnson, R. & Holubec, E. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Buenos Aires, Argentina: Paidós Saicf, p.5.

Klein, F. (1950), Matemática Elemental desde un punto de vista superior. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Loria, G. (1929). Storia delle Matematiche. Vol. I. Einaudi: Torino.

Malsani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico: visión histórica. *Irice, 34(13),* 7-8

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemáticas Como Herramienta Profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 22-39

Mena, A. (2009), El estudio de clases japonés en perspectiva. Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/372/373

Ministerio de Educación. (2012). Bases curriculares. Educación Básica. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Primer año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Segundo año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Tercer año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Cuarto año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Quinto año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2013). Matemática. Programa de Estudios. Sexto año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Programa de Estudios. Séptimo año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Programa de Estudios. Octavo año Básico. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Programa de Estudios. Primer Año Medio. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2011). Matemática. Programa de Estudios. Segundo Año Medio. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación. (2015). Matemática. Programa de Estudios. Tercer Año Medio. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Muñoz, L. y Swears, Y. (2013). Micro-Ingeniería didáctica adecuando una balanza para enseñar a los estudiantes a descubrir y desarrollar estrategias que les permita resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros. En E. Rodríguez (Ed.), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguay.

Parraguez, M., Rojas, J. y Vásquez, P. (2015). Situaciones a-didácticas para la enseñanza-aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problemas como medio. *XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Oaxaca*. Consultado el 27 de mayo de 2017, de Pontificia Universidad Católica de Chile. Campus Villarrica desde http://villarrica.uc.cl/files/matematica/materialweb/CB%2021.pdf

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17 (3)*, 463-476.

Socas, M. (2007).Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Universidad de la laguna, España.

Zambrano, L. (2011). Planteamiento y solución de problemas de ecuaciones, usando estrategias y métodos propuestos en el desarrollo histórico de la teoría de ecuaciones (tesis de grado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

ANEXOS

TÉCNICAS DE RECOGIDA DE DATOS

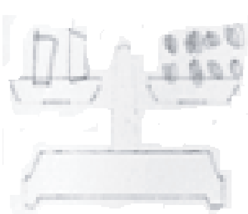
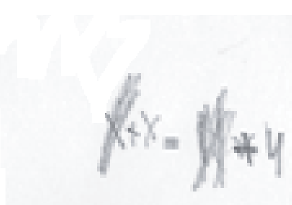
Dos fueron las técnicas utilizadas en este estudio para la recogida de datos durante su implementación, tal como lo muestra la siguiente tabla:

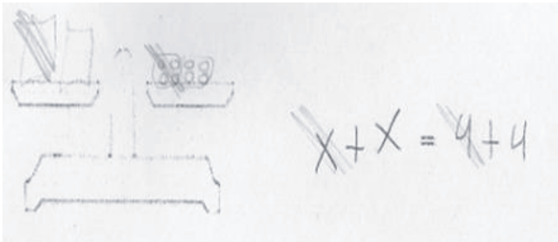
Tabla Nº13: Descripción de las técnicas de recogida de datos.

Técnicas	Descripción
Registros escritos	– Actividad “La Tarea de Juan”, que evidencia el trabajo y apropiación de los estudiantes sobre el objetivo de la clase implementada.
Registro audiovisual	Grabación en video de la clase implementada.

EVIDENCIAS Y REGISTROS DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Tabla Nº14: Identificación de las categorías de análisis propuestas para el estudio

Registro Gráfico	Descripción
 	El estudiante evidencia la asociación entre los elementos representados icónicamente en la balanza y la representación simbólica, en esta imagen se demuestra que el estudiante logra identificar el elemento correspondiente a estos dos registros, por tanto se cumple en la fase de acción la categoría C_1
Registro Escrito	**Descripción**
 	La P_2, evidencia la noción de equilibrio, ya que reproduce la ecuación simbólicamente y a su vez en la balanza representa los elementos correspondientes, utiliza trazos, para tachar y representar el equilibrio, evidenciando la fase de formulación C_2. Sin embargo no evidencia en la balanza este mismo proceso.



La P_5, evidencia el uso de propiedades, ya que agrupa los ocho elementos de la balanza con trazos auxiliares, además se evidencia el “tachar” para cancelar términos tanto en la balanza como en la representación simbólica, podemos identificar en esta pareja la categoría C_4 al representar el 8 como 4+4 o agrupar las 8 bolitas en 2 grupos de 4 en la fase de formulación.

La P_{11}, en la fase de formulación, logra resolver el problema utilizando propiedades para representar 5, descomponiendo el 2 + 3 y representando en la balanza 2 elementos junto a una bolsa quien representa la incógnita “*X*” en un lado y en el otro, dos elementos junto a otros tres, “tachar” los elementos necesarios para solucionar la ecuación sólo se evidencia en la representación simbólica, por tanto podemos evidenciar las categorías C_3 y C_4 que surgen en conjunto.

Transcripción registro audiovisual	Descripción
 Grabación Nº4 (13:02-13:20)	En la imagen de la izquierda se representa a dos parejas de estudiantes quienes plantean sus estrategias al momento de resolver la actividad., Los estudiantes discuten y validan sus estrategias a partir de la balanza y la representación simbólica de esta. El representante de la P_{15} indica: *“si separamos el número (aludiendo a la descomposición), lo vamos a poder sacar (refiriéndose a cancelar términos, el uso de la propiedad cancelativa) y mantenemos el equilibrio, así la balanza no se mueve”*

SÍNTESIS GLOBAL DE RESULTADOS

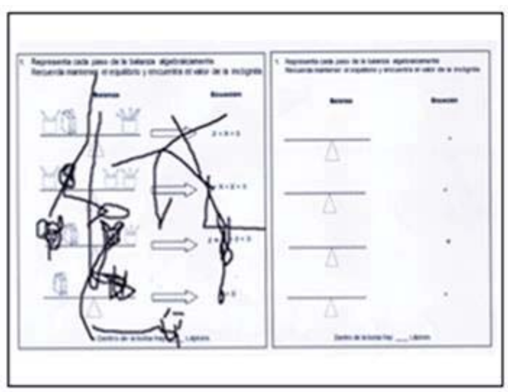
En la tabla a continuación, se presenta una síntesis de los resultados en función a las fases de acción, formulación y validación de la TSD, asociadas a sus respectivas categorías de análisis evidenciadas en las producciones de los sujetos participantes, quienes son clasificados como parejas.

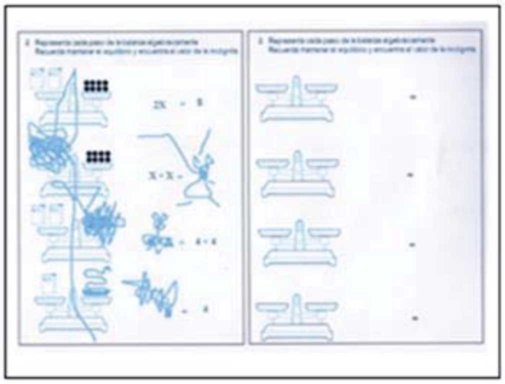
Tabla Nº15: Síntesis global de resultados.

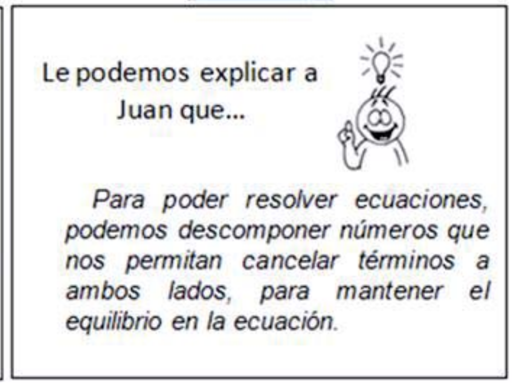
Fases de la TSD	Categorías	Parejas
Fase de acción	C_1	P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}
Fase de formulación	C_2	P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}
	C_3	No se evidencia la categoría
	C_4	P_2, P_4, P_5, P_6, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{15}, P_{16}
Fase de validación	C_5	P_2, P_4, P_6, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{15}, P_{16}, P_{17}

RECURSOS CLASE Nº1

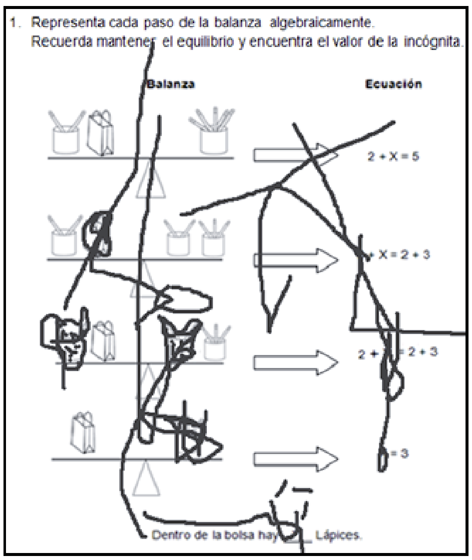
PPT

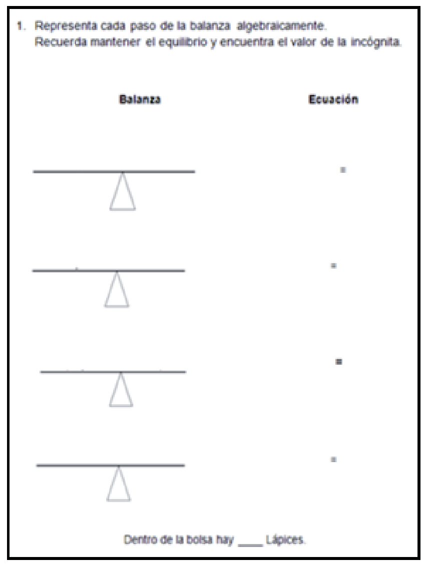


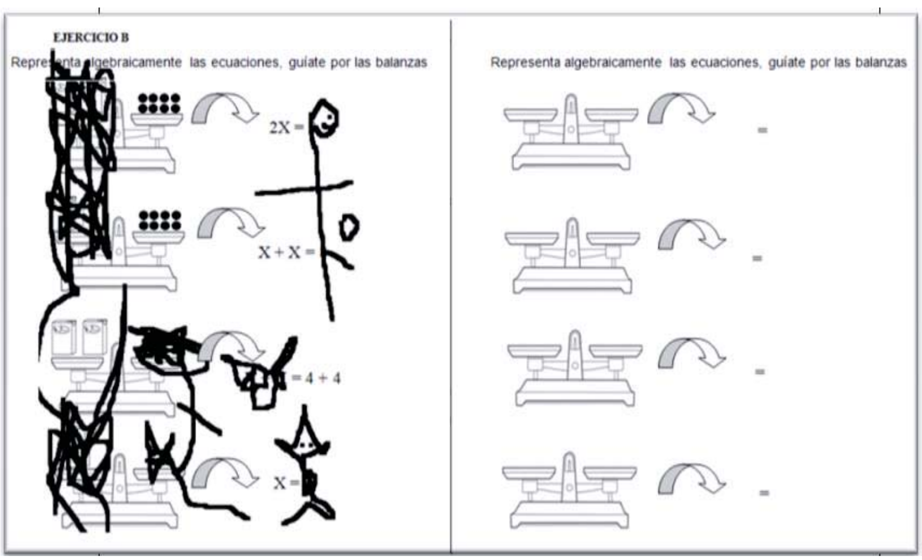



Le podemos explicar a Juan que...
Para poder resolver ecuaciones, podemos descomponer números que nos permitan cancelar términos a ambos lados, para mantener el equilibrio en la ecuación.

Guías


1. Representa cada paso de la balanza algebraicamente.
Recuerda mantener el equilibrio y encuentra el valor de la incógnita.
Balanza
Ecuación
2 + X = 5
X = 2 + 3
= 2 + 3
= 3
Dentro de la bolsa hay ___ Lápices.


1. Representa cada paso de la balanza algebraicamente.
Recuerda mantener el equilibrio y encuentra el valor de la incógnita.
Balanza
Ecuación
Dentro de la bolsa hay ___ Lápices.


EJERCICIO B
Representa algebraicamente las ecuaciones, guíate por las balanzas
2X =
X + X =
= 4 + 4
X =
Representa algebraicamente las ecuaciones, guíate por las balanzas

ESPIRAL DE CONOCIMIENTOS A TRAVÉS DE LOS NIVELES ESCOLARES

Clase Nº2

Tabla Nº3: Conocimientos previos (esperados) de los estudiantes

Nivel escolar	Aprendizajes esperados
Kínder	Reconocer secuencias de patrones de diferentes tipos, reproduciéndolas a través de diferentes formas (AE09)
1º básico	Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio, usando una balanza en forma concreta, simbólica y pictórica del 0 al 20, usando el signo = (OA12)
2º básico	Demostrar, explicar y registrar la igualdad y desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando los símbolos de igualdad y desigualdad (OA13)
3º básico	Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 (OA13)
4º Básico	Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y sustracción (OA14)

Fuente: Adaptado desde MINEDUC (2005-2016)

ESPIRAL DE CONOCIMIENTOS A TRAVÉS DE LOS NIVELES ESCOLARES

Clase Nº3

Tabla Nº8: Conocimientos previos (esperados) de los estudiantes en el ámbito geométrico

Nivel escolar	Aprendizajes esperados
Kínder	Reconocer secuencias de patrones de diferentes tipos, reproduciéndolas a través de diferentes formas (AE09)
1º básico	Reconocer, describir y crear patrones repetitivos (OA11)
º básico	Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes (OA12)
3º básico	Generar, describir y registrar patrones (OA12)
4º Básico	Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación (OA13) Demostrar que comprenden el concepto de área de un cuadrado y un rectángulo (OA23)

Fuente: Adaptado desde MINEDUC (2005-2016)

ANEXO (OBJETIVOS DE APRENDIZAJE)

Nivel escolar Ed. Básica	Objetivo de aprendizaje
1º	AO12 Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio, usando una balanza en forma concreta, simbólica y pictórica del 0 al 20, usando el signo =
2º	OA12 (Demostrar, explicar y registrar la igualdad y desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando los símbolos de igualdad y desigualdad).
3º	OA13 (Los estudiantes resuelven ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma concreta pictórica y simbólica del 0 al 100).
4º	OA14 (Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción).
5º	OA15 (Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica).
6º	OA11 (Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: usando una balanza; usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución)
7º	OA9 (Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$ (a, b y $c \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$) $ax < b$; $ax > b$; $\frac{x}{a} < b$; $\frac{x}{a} > b$(a, b y $c \in \mathbb{N}$; $a \neq 0$)).
8º	OA8 (Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$; $a \neq 0$; $ax + b = c$; $\frac{x}{a} + b = c$; $ax = b + cx$; $(x + b) = c$; $ax + b = cx + d$)

Nivel Escolar Ed. Media	Aprendizaje Esperado
1º	AE4 (Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo) y AE5 (Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma f(x,y) = ax + by)
2º	AE06 (Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente) y el AE07 (Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas).
3º	AE10 (Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos).
4º	AE02 (Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales) y AE05 (Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas)

Fuente: Adaptación desde MINEDUC (2005-2016)