

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO, CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS



# **Análisis Didáctico para promover Ideas Fundamentales de Estadística relacionadas a Medidas de Tendencia Central**

TRABAJO MONOGRÁFICO PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN  
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

**CARMEN GATICA RIQUELME**

PROFESORES  
**PATRICIA VÁSQUEZ - ROMINA MENARES - ELISABETH RAMOS**

VALPARAÍSO, DICIEMBRE 2017

## RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo presentar una secuencia didáctica que pretende generar conocimiento en estudiantes de 13 a 14 años, frente a la problemática de elegir el mejor representante de un conjunto de datos, bajo el escenario de las Medidas de Tendencia Central en presencia de valores atípicos.

En esta comunicación se informa sobre los argumentos empleados por los estudiantes, en la implementación de la última clase de la secuencia didáctica, la cual se llevó a cabo dentro del marco del curso Seminario Taller de Investigación del postgrado de Magister en Didáctica de la Matemática y se empleó la metodología estudio de clases. Los resultados evidencian dificultades en las respuestas de los estudiantes, para lograr razonamientos que contribuyan a entender que la mediana es un buen candidato en ese tipo de contextos. Con el fin subsanar las falencias y dificultades experimentadas, se han construido dos situaciones, que involucran el uso de ideas fundamentales para lograr una real comprensión de los conceptos estadísticos y contribuir a una mejora en la matemática educativa. La siguiente propuesta busca socializar actividades que sirvan para ese propósito.

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	2
<b>ÍNDICE</b> .....	3
<b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....	5
<b>2. ANTECEDENTES</b> .....	6
2.1 Investigaciones sobre la comprensión de las Medidas de Tendencia Central ...	6
2.2 Investigaciones sobre algunas ideas fundamentales de estadística: Representatividad- Variabilidad- Valor del dato en contexto.....	7
<b>3. OBJETO MATEMÁTICO</b> .....	9
3.1 En el currículo .....	9
3.2 Definición experta y escolar y la distancia entre saberes.....	12
3.3 Propiedades de las Medidas de Tendencia Central.....	13
3.4 Aspectos Epistemológicos .....	15
3.4.1 Análisis epistemológico de la Mediana .....	15
3.4.2 Análisis epistemológico de la Media .....	16
<b>4. SECUENCIA DIDÁCTICA</b> .....	18
4.1 Definición de representatividad, variabilidad y sentido del dato en contexto ...	18
4.2 Fuentes de Variación .....	19
4.2.1 Variación en la medida .....	19
4.2.2 Variación en la Naturaleza .....	19
4.3 Explicación y Organización de la Secuencia Didáctica .....	20
4.4 Objetivos de la Secuencia Didáctica .....	20
4.5 Marco Conceptual .....	20
4.6 CLASE 1 .....	23
4.6.1 Descripción Actividad.....	23
4.6.2 Respuesta Experta .....	24
4.6.3 Matemática en juego.....	25
4.6.4 Posibles Estrategias .....	25
4.6.5 Dificultades- Errores- Devoluciones.....	26
4.6.6 Plan de Clases 1 .....	28
4.7 CLASE 2 .....	31
4.7.1 Descripción Actividad.....	31
4.7.2 Respuesta Experta .....	32

4.7.3 Matemática en juego.....	33
4.7.4 Posibles Estrategias .....	33
4.7.5 Dificultades – Errores - Devoluciones .....	34
4.7.6 Plan de Clases 2.....	35
4.8 CLASE 3 .....	38
Análisis de instrucción - Análisis a priori .....	38
4.8.1 Descripción Actividad.....	38
4.8.2 Respuesta Experta .....	39
4.8.3 Matemática en juego.....	39
4.8.4 Posibles Estrategias .....	40
4.8.5 Dificultades – Errores – Devoluciones .....	41
4.8.6 Plan de clases 3.....	42
<b>5. LA CLASE DEL ESTUDIO DE CLASES: CLASE 3.....</b>	<b>46</b>
Análisis de actuación - Análisis a posteriori .....	46
5.1 Apreciación de Pares y Profesores.....	46
5.2 Análisis de las Producciones .....	47
<b>6. CONCLUSIONES .....</b>	<b>53</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>54</b>
<b>ANEXO .....</b>	<b>57</b>
Guía N°1 .....	57
Guía N°2 .....	58
Guía N°3.....	59
Tabla 8.....	60

## 1. INTRODUCCIÓN

En un mundo cada vez más globalizado, nos encontramos a diario con abundante información, en donde se hace necesario realizar una correcta interpretación de ella y evaluar de forma crítica los datos transmitidos por los medios de comunicación, pero la comprensión de esa información es un reto para muchos individuos. A pesar que la Estadística se enseña hoy en todos los niveles educativos, se observa que la mayoría de los estudiantes no son capaces de aplicar correctamente los conceptos y procedimientos estadísticos (Shaughnessy, 2007).

La existencia de un problema didáctico, donde la enseñanza de esta ciencia se transmite de manera mecánica y sin sentido para los estudiantes, queda evidenciado en la literatura (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013). Hay consenso entre los investigadores en que la escuela debe centrarse en el desarrollo del razonamiento Estadístico de los estudiantes (Batanero y Díaz, 2011, Garfield y Ben-Zvi, 2008).

La propuesta presentada en este monográfico nace ante la carencia de especificidad de la materia, detectada en la propia experiencia en aula, tras implementar una situación didáctica que pretendía desarrollar la habilidad de discriminar la Medida de Tendencia Central (MTC), más adecuada para representar un conjunto de datos, con valores atípicos.

La situación didáctica se implementó dentro del marco del curso Seminario Taller de Investigación del postgrado de Magister en Didáctica de la Matemática y empleó la metodología estudio de clases. Los resultados evidencian dificultades en los estudiantes, para lograr razonamientos que contribuyan a entender que la mediana es un buen candidato en ese contexto.

Una idea importante en esta propuesta es el desarrollo de conceptos subyacentes de la clase implementada, que se detectaron tras un análisis de la situación, como son la representatividad, variabilidad y el valor del dato en contexto. En este trabajo se propone una secuencia de situaciones didácticas: la primera está orientada a desarrollar el concepto de representatividad, específicamente al estudio de la media aritmética y sus cualidades. En la segunda, se resalta la fuente de variación de los datos dentro del contexto, para determinar el mejor representante teniendo en cuenta la variabilidad. Los conceptos desarrollados en estas dos clases permitirán dotar al estudiante de herramientas que le permitan enfrentar de mejor manera la problemática de la clase tres, que involucra la media y la variación de un conjunto de datos.

Ben-Zvi y Garfield (2004), afirman que los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con datos reales que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel. Los cambios en las situaciones hacen que los resultados no sean únicos, presentándose mayor variabilidad que otras áreas de las matemáticas. Esta afirmación nos hace reflexionar, en relación al uso de ideas fundamentales para lograr una real comprensión de los conceptos estadísticos y contribuir a una mejora hacia el desarrollo del razonamiento estadístico y no sólo en el aprendizaje de conocimientos en la educación. La siguiente propuesta busca socializar actividades que sirvan para ese propósito.

## 2. ANTECEDENTES

### 2.1 Investigaciones sobre la comprensión de las Medidas de Tendencia Central

Los investigadores se han preocupado de entender las dificultades que presentan los estudiantes, frente a ciertas tareas, los estudios han revelado que detrás de nociones, algunas veces de apariencia sencilla, se esconde una gran complejidad que surge cuando las nociones han de ser tratadas de forma pertinente en diversos problemas y contextos. Es así que Sánchez y Orta (2013) plantean que, un problema con la media aritmética es que la fórmula matemática es muy simple, pero su interpretación en los diferentes contextos en que se presenta, parece constituir un obstáculo. Al respecto Pollatsek, Lima y Well (1981), citados por Batanero (2001), afirman que estudiantes universitarios presentan dificultades al aplicar la media ponderada, y en repetidas oportunidades emplean la media simple, cuando se requiere ponderar un conjunto de valores. A su vez Cai (1995) descubrió que los estudiantes de 13 a 14 años presentan dificultades con la inversión del algoritmo de la media, esto es sólo algunos pueden determinar un valor desconocido en un conjunto de datos conocida su media y que por el contrario sí pueden aplicarlo adecuadamente de manera directa.

Según Campbell (1974), los estudiantes eligen la media aritmética siempre como el mejor representante, sin considerar la simetría de los datos o los datos atípicos presentes en la distribución.

Strauss y Bichler (1988), citado por Batanero (2001), investigaron el desarrollo evolutivo de la comprensión de la noción de media, en alumnos de 8 a 12 años, resaltando las siguientes propiedades, como de difícil comprensión para los estudiantes:

- La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero, lo que hace que sea un estimador insesgado.
- Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.
- La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada.

Gal, (1989,1990) y Watson, (1999) mencionados por Sánchez y Orta (2013) declaran que a pesar de que la media y la desviación estándar son fundamentales en estadística, en la práctica y en problemas en los que sería pertinente considerarlos, no son utilizados por los estudiantes.

Por otra parte, Watson y Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes de 11 a 15 años al término "promedio" y hallaron que un gran número consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Esta idea es correcta si la distribución es simétrica, pero si no lo es, solo se cumple para la mediana. En su estudio, tratan de analizar el desarrollo evolutivo del concepto e indican también que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, sólo la entienden los estudiantes de cursos avanzados.

Con respecto a las concepciones de los profesores, diversas investigaciones han arrojado que presentan dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de promedios, posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, elección de la medida de posición central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones (Batanero y cols., 1997, citados por Batanero (2001), Estrella (2016)).

## **2.2 Investigaciones sobre algunas ideas fundamentales de estadística: Representatividad- Variabilidad- Valor del dato en contexto.**

Cobb y Moore, (1997), mencionado en (Estepa y del Pino, 2013), exponen la importancia de la noción de variación en la siguiente afirmación:

Cualquier curso introductorio de Estadística debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los fundamentos del pensamiento estadístico. Esto incluye la necesidad de datos, la importancia de la producción de datos, la omnipresencia de la variabilidad, la cuantificación y la explicación de la variabilidad (p. 815).

En relación a esta afirmación Estepa y del Pino (2013), expresan que la noción de dispersión no se encuentra presente en el currículo oficial de España, sólo se presentan las medidas de dispersión. Indican que el hecho de que una noción tan importante como la dispersión no se presente en la enseñanza corresponde a un fenómeno, lo que conlleva a una debilidad en la enseñanza de la Estadística, puesto que es una idea fundamental que sirve de base para la comprensión de otros conceptos, así por ejemplo la consideración de las medidas de tendencia central obliga a la consideración de la dispersión.

Así vemos, cuando se presenta información en los medios de comunicación social y se emplea la media, esta nunca va acompañada de alguna medida de dispersión. En consecuencia una persona que no está formada estadísticamente en muchas ocasiones es incapaz de detectar la información estadística tendenciosa, afirman Estepa y del Pino (2013).

Por otra parte, Makar y Confrey (2005), afirman que en el estudio de la dispersión hay que considerarla en el contexto de los datos, no solamente su significado o como se utiliza como herramienta.

Además, Estepa y del Pino (2013), aseguran que la dispersión (entendida también por estos autores como variación o variabilidad), puede parecer un concepto fácil, pero es muy difícil de construir por el individuo, que no se adquiere de manera espontánea, para afirmar tal aseveración se basan en la evolución histórica de las leyes del error. Concuerdan con ellos Makar y Confrey (2005), ya que afirman que, pareciera que el concepto “variación” es demasiado sencillo y no se define.

Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que; “la comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas” (p.203).

Varios autores recomiendan enfocar la enseñanza de la estadística hacia su razonamiento y no sólo en el aprendizaje de procedimientos, así Burrill y Biehler (2011), indican que las ideas estadísticas fundamentales se encuentran en un buen número de situaciones en que hay que aplicar la estadística, por ello el estudiante ha de comprenderlas a un nivel adecuado, además que pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización y en cualquier nivel educativo.

Con base a lo expuesto, vemos que la estadística es hoy fundamental para adquirir la capacidad de lectura e interpretación de la información, presentada en los distintos medios de comunicación y de esta manera formar individuos con cultura estadística. Pero nos encontramos con dificultades en el aprendizaje de esta ciencia, una de las razones es que existen conceptos que aparentemente son fáciles de comprender, como la media aritmética, que guarda distintas interpretaciones dependiendo del contexto, pero presenta un uso común, de acuerdo a su algoritmo, por ejemplo en el cálculo de notas. Así vemos que los estudiantes no manejan la idea de representatividad de la media y no la ven como una herramienta que permite resumir y describir las características de un conjunto de datos. Los estudios afirman que resumir datos mediante la búsqueda de un medio, requiere una manipulación que suma y divide, pero al mismo tiempo sumerge los datos concretos. Esto se traduce en que la mayoría de la gente conoce el procedimiento para calcular la media, pero la construcción matemática es abstracta.

Por otra parte, las investigaciones afirman que la variación está presente en todos lados y por lo tanto en los datos, que es la causa subyacente de la existencia de la estadística. Pero su comprensión no es inmediata y requiere de la construcción del concepto.

En conclusión, se hace necesario que los estudiantes comprendan las ideas estadísticas fundamentales, en primer lugar porque están presentes en la mayoría de las situaciones relacionadas con la estadística y pueden ser aprendidas desde la enseñanza básica con distintos niveles de profundización. Se agrega, que para poder comprender la distribución de los datos, antes se requiere entender su variación.



### 3. OBJETO MATEMÁTICO

#### 3.1 En el currículo

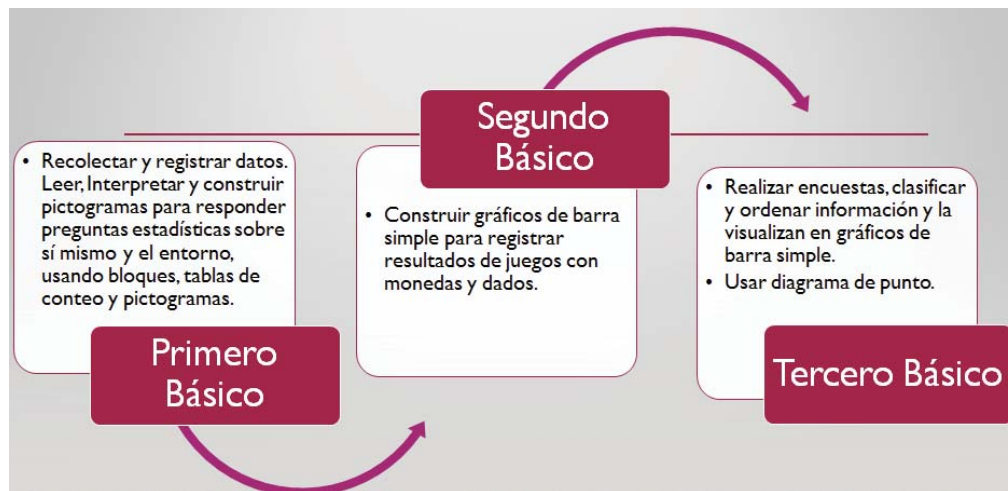
La Estadística se inserta en el currículo en el eje de “Datos y probabilidades”, que comienza en primer año de educación básica y termina en sexto básico, y luego en el de “Probabilidad y estadística”, que abarca desde séptimo básico a segundo año medio.

A partir de la educación básica, el currículo propone desarrollar habilidades de lectura, análisis e interpretación de la información, enfatizando el desarrollo de la habilidad de presentar la información. Así los conceptos se van integrando de manera progresiva, tomando en consideración la edad del estudiante.

Un objetivo que se propone alcanzar mediante la enseñanza de la estadística a nivel escolar, es que los estudiantes tengan una capacidad adecuada en el uso de herramientas y conceptos para el análisis de datos. Para esto, se pretende crear conciencia de la utilidad de la herramienta para la resolución de problemas. Por lo tanto, es necesario comprender la media o la mediana o la moda, como instrumento útil y significativo de acuerdo al contexto de la situación.

Con el objeto de lograr aprendizajes, la propuesta curricular, afirma que es necesario que los estudiantes conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios, por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido, estrategia que está presente desde el primer año de educación básica.

A continuación se presenta en la figura 1, un cuadro que resume el desarrollo de habilidades en Estadística que se vinculan, cuando menos de manera amplia, al tema de la interpretación de las MTC. El cuadro se elaboró a partir de las bases curriculares del Mineduc.



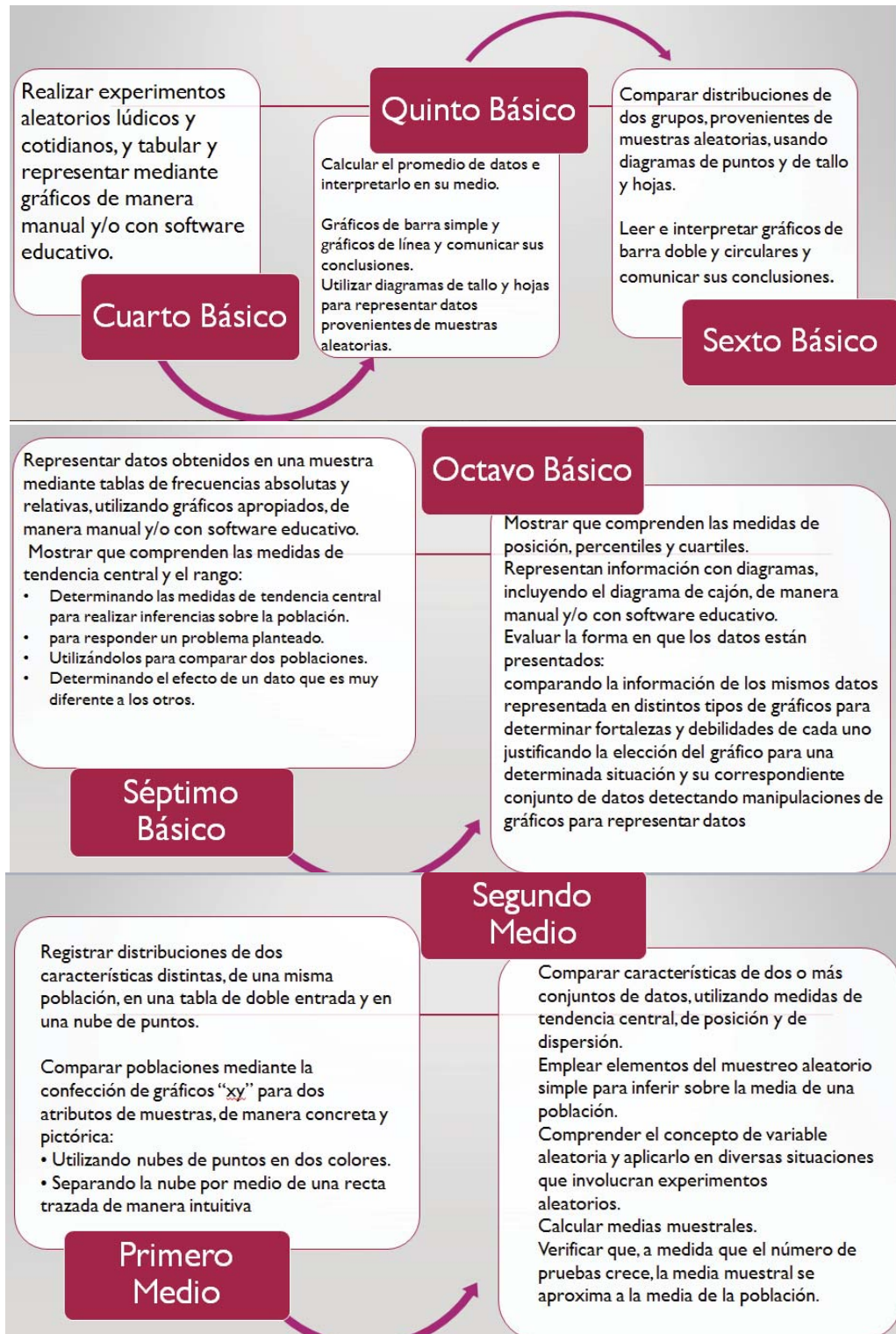




Fig. 1. Elaboración propia con base en Mineduc (2012)

### 3.2 Definición experta y escolar y la distancia entre saberes

Resulta relevante observar las diferencias en las definiciones de las MTC, como se presentan desde el saber sabio o erudito y desde el escolar. Para establecer este contraste, se cita a continuación un texto representante de cada nivel de saber:

**Texto erudito**, (Canavos, 1988, p.12-13)

Definición La **media** de las observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es el promedio aritmético de éstas y se denota por

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$$

Definición La **mediana** de un conjunto de observaciones es el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de éstas es menor que este valor y la otra mitad mayor.

Si el número de observaciones en el conjunto es impar, la mediana es el valor de la observación que se encuentra a la mitad del conjunto ordenado. Si el número es par se considera la mediana como el promedio aritmético de los valores de las dos observaciones que se encuentren a la mitad del conjunto ordenado.

Definición La **moda** de un conjunto de observaciones es el valor de la observación que ocurre con mayor frecuencia en el conjunto.

**Texto escolar**, (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin, 2016, pp. 312, 316, 320).

Se llama **media aritmética** o **promedio** a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales. La fórmula para el cálculo de esta medida de tendencia central es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Se llama **moda** ( $M_o$ ) de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia.

La **mediana** corresponde al **valor que ocupa el término central** de un conjunto de datos una vez ordenados de menor a mayor o viceversa. Si la cantidad de datos  $n$  es impar, entonces la posición de la mediana está dada por  $\frac{n+1}{2}$

Cuando la cantidad de datos del conjunto es par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos términos centrales una vez que estos se ordenan.

Se observa que la definición del texto erudito hace siempre referencia a un conjunto de observaciones. Por su parte, la definición del texto escolar sólo alude a un conjunto de datos en los casos de la mediana y la moda, haciendo imprecisa la definición de la media. Además, el texto escolar se refiere, tanto en el caso de la media como en el de la moda, al concepto de variable estadística, pero lo utiliza de manera errónea. En efecto, en la definición de media se habla de “la cantidad total de la variable”, frase que no determina ningún resultado matemático concreto. Similarmente, al abordar la moda, se la define como “la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia”, cuando en realidad se debería hablar del *valor* de la variable que presenta mayor frecuencia. También es posible criticar la presentación de la media en el texto erudito, puesto que media (aritmética) y promedio aritmético son sinónimos, de modo que la definición resulta tautológica. En resumen, la definición del texto escolar analizado adolece de imprecisiones que no están presentes en el texto erudito. El texto erudito, por otra parte, ofrece una definición de media que poco ayuda a la comprensión del concepto.

### **3.3 Propiedades de las Medidas de Tendencia Central**

Para el análisis de la secuencia didáctica se emplearán; algoritmos y propiedades de la MTC, los cuales es posible analizar de acuerdo a diferentes puntos de vista. Así, en algunos moda, mediana y media coinciden, pero en otros no.

Las medidas de posición central pueden ser contempladas desde diversos puntos de vista: como el resultado de un cálculo (el valor obtenido en el cálculo de la mediana), como operador que a una distribución asigna un número (el algoritmo u operación con los datos) y como un resumen estadístico o parámetro que caracteriza una distribución. (Cobo, 2003, p. 59).

A continuación se presenta una tabla que resume algunas propiedades de las medidas de posición central.

Tabla 1  
*Propiedades de Media, Mediana y Moda.*

	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>
<b>A. Propiedades Numéricas</b>			
A1. Pertenece al rango de la variable	Sí	Sí	Sí
A2. Coincide con un valor de los datos y pertenece al mismo conjunto numérico	No	No	Sí
A3. Se tienen en cuenta en los cálculos todos los valores de los datos	Sí	No	Sí
A4. Cualquier cambio en los datos cambia su valor	Sí	No	No
<b>B. Propiedades Estadística</b>			
B1. Representan a un colectivo	Sí	Sí	Sí
B2. Coincide con el centro de gravedad	Sí	No	No
B3. En distribuciones simétricas coinciden	Sí	Sí	Sí
B4. Resistente	No	Sí	Sí
B5. Iguala la suma de las desviaciones	Sí	No	No
B6. Suma de cuadrados de desviaciones mínima	Sí	No	No
B7. Definida si un intervalo es abierto	No	Sí	Sí
B8. Definida para variables cualitativas	No	No	Sí
B9. Definida para datos ordinales	No	Sí	Sí
B10. Mejor representante en distribuciones no unimodales	No	Sí	No

Extraído de Cobo (2003, p.63)



### 3.4 Aspectos Epistemológicos

Utilizar la epistemología y la historia en la enseñanza, permite iluminar ideas y métodos olvidados que nacieron en un contexto dado, para dar solución a necesidades y problemas particulares. Estos pueden contribuir a resolver conflictos tanto de orden científico, conceptual o metodológico (Aguilar, 2006).

#### 3.4.1 Análisis epistemológico de la Mediana

La postura de Francis Galton<sup>1</sup>, permite un proceso de resignificación para la enseñanza del concepto de mediana. Afirma que el procedimiento utilizado en una distribución de cualquier objeto o material y los errores inducidos por los promedios en las distribuciones, son las razones del porqué no considera práctico aplicar la media aritmética, a un gran conjunto de datos (Galton (1899), mencionado por Acevedo y Vanegas (2014)).

Galton emplea ejemplos prácticos para introducir el concepto de mediana, mediante la base de la búsqueda de un valor representativo para un conjunto de datos. A continuación se expone en detalle un ejemplo, cuando realiza el análisis sobre la media aritmética, en un caso hipotético en una repartición de fondos en un consejo o asamblea:

El método habitual es bastante insatisfactorio por que la opinión colectiva de los consejos, senados y las asambleas son los que determinan la cantidad de dinero más conveniente para concederse a cualquier propósito en particular (.....) cada integrante escribe su propia estimación o valor en un papel por separado, las estimaciones luego se suman, y el promedio de todas ellas es aceptado por el cuerpo entero del jurado y se expone al público como su veredicto (Galton, 1899 p. 638).

Las críticas sobre esta forma de repartición, si es la más adecuada, se enuncia como sigue : “Ya que un solo votante es capaz de producir un efecto mucho más allá de lo que le corresponde de cuota anotando una cantidad excesivamente grande o irrazonablemente pequeña” (Galton, 1899 p. 638).

De esta manera observa y hace relevante en su análisis, el hecho de porque la media se ve afectada por valores extremos, ya sean lo suficientemente grandes o pequeños, para este caso particular se hace notable la forma general como la media es utilizada para diversos asuntos tanto políticos, sociales y económicos, pero que en sí los promedio no siempre son tan exactos como se puede creer o pensar.

Otro de los descubrimientos realizados por Galton en 1899, corresponde a resaltar el hecho de que al aplicar la media aritmética a un gran conjunto de datos, implica al

---

<sup>1</sup> Francis Galton (1822-1911), científico británico, fue el primero en utilizar la estadística en sus observaciones. Introduce el concepto de mediana, mediante un ejemplo práctico y presenta diversas consideraciones sobre la búsqueda de un representante para un conjunto de datos.

investigador grandes esfuerzos operativos, que se traducen en dificultades para el análisis, por el gran volumen de datos, trayendo como consecuencia que el análisis se limita a cantidades pequeñas de información. Además, resalta el hecho, de la sensibilidad de la media y cómo su valor se puede desvirtuar en forma intencional en una distribución.

Galton lo expresa así:

Sin embargo los promedios son inaceptables para grandes conjuntos de datos, a causa de la aritmética tediosa, que luego sería necesaria. Por otra parte, un valor medio puede inducir a error en gran medida, a menos que cada estimación o varias de estas se hayan hecho de buena fe (Galton, 1899 p.639).

A Francis Galton se le atribuye la consolidación y uso de la mediana, a partir de diversas investigaciones destaca la aplicación de este concepto, ya sea para analizar datos o para determinar un valor representativo de algún problema en particular.

(.....) la estimación más cercana al valor del centro, la mediana es la correcta. Cualquier otra estimación presenta una mayoría de votantes en contra o a favor de ella, encontrándose los valores demasiado bajos o demasiado altos con respecto al centro. La estimación correcta para el valor de en medio no puede ser, el promedio como Galton lo afirma: este genera inquietudes que perjudican el juicio razonable. Por tales razones Galton hizo un hincapié considerable en la mediana, y en diversos algoritmos para determinarlo lo más rápido posible (Galton, 1924, p. 400, mencionado por Acevedo y Vanegas (2014)).

Galton le asigna a la mediana la característica fundamental de ser un valor central, de esta forma introduce el concepto de mediana, dándole la importancia dentro de una distribución y desde la cual se toma como un referente con respecto al análisis que se esté realizando, en el que los datos **varían**, ya sea que estos se encuentren por encima o por debajo de este estadístico.

La preocupación de Galton era resaltar el cuidado en las observaciones y el tratamiento detallado de la información, para ello profundizó en el análisis de los datos y sus estudios estuvieron dirigidos a plantear procedimientos que le posibilitaran la generación de cifras confiables y métodos que fueran lo suficientemente claros para ser aplicados en forma general. Una de sus aplicaciones en la que utiliza la mediana en forma práctica en la distribución de valores se encuentra en su artículo titulado: The vox populli (1907).

### **3.4.2 Análisis epistemológico de la Media**

En la antigüedad los astrónomos de Babilonia, querían saber un valor real, como la posición de un planeta o el diámetro de la luna, pero siempre se encontraron con errores de medida. Usando la media de los valores medidos, asumieron que los errores se suman a un número relativamente pequeño, en comparación con el total



de todos los valores medidos. Fueron los primeros en realizar la construcción del algoritmo. (Plackett, 1970).

En Egipto, Ramsés II hizo un censo de las tierras con el objeto de realizar un nuevo reparto, esto debido a las inundaciones de los terrenos provocadas por el río Nilo (Chan, 2009).

En el año 700 a.C. los comerciantes y cargadores convinieron en que los daños a la carga y al buque deberían ser repartidos equitativamente entre sí, cuando las tormentas en el mar causaban en las embarcaciones la pérdida de bienes. Lo que un comerciante debía pagar se llama contribución y el daño causado con el nombre de "havaría", de esta palabra latina se deriva la palabra avarage (promedio). La idea de promedio tiene sus raíces, por lo tanto, en una clase primitiva de seguros, (Bakker, 2003).

Un precursor de la media aritmética, es el rango medio, que es la media de los dos extremos, utilizado en la astronomía árabe, pero también en la metalurgia y navegación, en los siglos IX al XI (Eisnhart, 1974). Hoy en día sabemos que muchas observaciones y errores en esos contextos siguen la distribución normal. Por lo tanto el rango medio, probablemente, fue un valor razonable para tomar en esas situaciones.

En resumen, aunque la palabra mediana tiene al menos 2000 años, solo se ha utilizado para el valor medio de una fila de números ordenados, por primera vez en 1882, dada por Galton. Comparado con el promedio que ya se conocía en la época de Pitágoras, la mediana se creó más tarde. Una posible razón de ello, la suposición de que todas las distribuciones son simétricas.

Hay algunos contextos del siglo XVIII en los que podemos observar la utilización de la mediana, como se aplica actualmente. Así, Boscovich desarrolló un método alrededor de 1755 para encontrar una relación lineal en los datos de observación; al hacerlo, afirmó que la suma de las desviaciones a esta línea debería ser mínima (Eisnhart, 1961), pero fue hasta bien entrado el siglo diecinueve que se usara como la conocemos hoy en día. Una explicación para la forma de concebir la mediana, es la suposición de que fenómenos tales como errores alrededor del valor 'real' se distribuyeron simétricamente. Dentro de las ciencias naturales había una buena razón para esto, pero dentro de las ciencias sociales y económicas no.

Finalmente, se prestó atención a las distribuciones asimétricas. Esta situación, también creó la necesidad de un tamaño de centro alternativo que sea menos sensible a los valores extremos y esté más cerca de la mayoría de los datos. Para la educación podría significar que la mediana es menos simple de lo que parece. Para usarla de manera significativa, los estudiantes deben saber algo sobre valores atípicos y distribuciones asimétricas (Bakker, 2001).

## 4. SECUENCIA DIDÁCTICA

El objetivo de este estudio es realizar un aporte en la formación de ciudadanos estadísticamente educados, para ello se presenta una secuencia didáctica que permita desarrollar la habilidad de discriminar en estudiantes de 13 a 14 años, frente a la problemática de determinar el mejor representante de un conjunto de datos, en un contexto dado en presencia de datos atípicos, basándose en la articulación de algunas ideas fundamentales y conocimientos estadísticos que respalden las argumentaciones de la elección.

### 4.1 Definición de representatividad, variabilidad y sentido del dato en contexto

Las ideas fundamentales que se trabajarán en la propuesta didáctica son: representatividad, variabilidad y sentido del dato en contexto, las cuales se definen a continuación, basándose en diferentes autores.

**Representatividad** : Corresponde a comprender la idea del conjunto de datos como una unidad (Bakker, 2003; Batanero y Godino 2001; Mokros y Russell, 1995).

**Valor del dato en contexto**: “En Estadística los datos son números en contexto” (Moore, 1990, p. 96), y en el análisis de datos es el contexto el que otorga el sentido (Cobb y Moore, 1997; Ben-Zvi y Aridor, 2012).

**Variabilidad- Variación**: “A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o **variabilidad**”. (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 57). Se entiende la dispersión como la separación de los valores de un valor de tendencia central.

Reading y Shaughnessy (2004) apuntan que, según varios diccionarios consultados “**variation**” es un nombre usado para describir el acto de variar o cambiar una condición, es un nombre derivado del adjetivo “variable” y significa que algo es apto o propenso a variar o cambiar. Nos dice el hecho de variar.

En esta propuesta didáctica, se hará distinción entre variación y variabilidad, como se ha definido anteriormente. Cabe destacar que no hay consenso entre los diversos investigadores en cuanto a su definición, de hecho para algunos significan lo mismo. Garfield et al. (2008) apuntan que la distinción entre variabilidad y variación, no se ha acordado aún en la comunidad de Educación Estadística.

Se destaca el hecho que en el currículo oficial de Chile y textos escolares solamente se presenta la palabra dispersión, haciendo referencia a su medida, comúnmente se observa la expresión “medidas de dispersión”.

De acuerdo a Makar y Confrey (2005), afirman que la medida de la dispersión es una herramienta muy importante en el análisis de los datos, pero también debemos tener en cuenta la dispersión (o variación) de la siguiente forma:

- a. el concepto de dispersión, su definición, saber explicar en qué consiste.

- b. su uso, sobre todo cuando se mide, las técnicas matemáticas asociadas a la medida de la dispersión.
- c. el propósito que pretendemos con la dispersión, su utilidad dentro de un contexto, las fuentes de dispersión

En este punto nos detendremos para explicar las distintas fuentes de la variación, puesto que en la situación tres, se presentan dos tipos de variación, a saber: variación de medida y variación por naturaleza. Aspectos importantes a tener en cuenta en el análisis de la situación.

## **4.2 Fuentes de Variación**

Franklin et al. (2005), mencionado por Estepa y Del Pino (2013), aseguran que son muchas las fuentes de la dispersión, por ejemplo: dispersión inducida, dispersión en el muestro, la medida, la naturaleza. Aquí consideraremos las dos últimas.

### **4.2.1 Variación en la medida**

Este se manifiesta cuando aplicamos medidas repetidas sobre una misma observación. Estas medidas no son iguales varían de una vez a otra, esto es debido a varias causas, entre otras, a que el instrumento de medida no es muy fiable o adecuado, o bien, que el sistema donde se hace la medida está en constante cambio. Por ejemplo para esta segunda situación podemos poner el caso de la medida de la presión sanguínea, aunque el instrumento de medida sea preciso, la presión cambia en un instante.

En resumen, la variabilidad en las mediciones puede ocurrir por tres razones al menos. En primer lugar, las mediciones son imprecisas, y por lo tanto el error de medición es una fuente de variabilidad. En segundo lugar, existe una variabilidad natural a través de las personas en cualquier momento dado. Y en tercer lugar, a menudo existe una variabilidad natural en una característica de la misma persona a través del tiempo.(Utts, 2005, p.50 citada por Estepa y del Pino, 2013)

De estas palabras se deduce la importancia de la dispersión natural que comentamos a continuación.

### **4.2.2 Variación en la Naturaleza**

Si tomamos medidas sobre seres naturales de una misma especie encontramos diferencias, debido a que los individuos son diferentes (los estudiantes de una misma clase no tienen el mismo peso o la misma altura; las naranjas de una malla no pesan todas lo mismo, etc.). En estos ejemplos vemos que la variación se puede dar dentro de un grupo y entre grupos distintos de la misma especie. La variación es inherente a la Naturaleza y su comprensión es requisito imprescindible para comprender algunos métodos estadísticos modernos. Algunas veces encontramos patrones de la variación existente y buscamos maneras de trabajar sobre ella, tal es el caso de las tallas de la ropa o el número del calzado (Wild y Pfannkuch, 1999, citado por Estepa y del Pino, 2013).

### 4.3 Explicación y Organización de la Secuencia Didáctica

Con el objeto de entregar herramientas al estudiante para poder discriminar, se trabaja en primera instancia el concepto de representatividad de la media en clase uno, pues de acuerdo a la literatura se puede constatar que las dificultades se presentan cuando los estudiantes no logran ver el conjunto de datos como un todo, sino como valores aislados. Mokros y Rusell (1995) afirman que cuando entiendan esta propiedad de las MTC, podrán comprender la idea de resumen de datos o de representatividad.

Siguiendo con el desarrollo de la alfabetización estadística se propone en clase 2, el análisis de la tendencia de los datos poniendo de relieve su variabilidad. Vale decir la elección se respalda en la descripción de ellos, en cuanto al precisar cómo varían los datos con respecto a la media y la mediana, porqué cambia la media con el dato extremo y quién cambia la media, moda o mediana en presencia de datos atípicos, pues estos conceptos explican los efectos de valores atípicos sobre las MTC y en la elección del valor representativo del conjunto de datos. En ambas situaciones se orienta la toma de decisiones fundamentada a partir del análisis de los datos.

A partir de las clases 1 y 2 se espera que el estudiante comprenda los conceptos de representatividad y variabilidad, para ser aplicados en clase 3. De esta forma que pueda elegir la medida más representativa, de acuerdo a un análisis de la variación de los datos

### 4.4 Objetivos de la Secuencia Didáctica

**Objetivo clase 1:** Desarrollar la idea de representante de un conjunto de datos relacionándolo con la media aritmética, en un contexto dado.

**Objetivo clase 2:** Desarrollar la idea de variabilidad y variación de un conjunto de datos relacionándolo con las MTC, en un contexto dado.

**Objetivo clase 3:** Discriminar la MTC más apropiada para representar un conjunto de datos, dado un contexto y finalidad determinados.

### 4.5 Marco Conceptual

Dado el análisis a posteriori se observaron falencias en la implementación del estudio de clases, lo cual se evidenció en que la mayoría de los alumnos no logró entregar la respuesta correcta a la situación (Ver Anexo Tabla 8). De ahí la necesidad de dar una nueva mirada, en forma más minuciosa, respaldada con un Marco Teórico, que permita analizar y reflexionar en torno a las dificultades de los alumnos.

La fundamentación teórica que soporta el estudio a realizar corresponderá al Marco Conceptual, Análisis Didáctico (Rico, 2013). Como procedimiento es ideal para el diseño, implementación y evaluación de situaciones didácticas.

El Análisis Didáctico presenta cinco fases: Análisis Conceptual, Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo, Análisis de Instrucción y Análisis de Actuación. A continuación se explicitan de acuerdo a descripción enunciada por Lupiáñez y Rico (2008).

- Análisis Conceptual: delimita los conocimientos o conceptos de la investigación, es decir, identifica, organiza y selecciona los significados de un tema específico, considerando la epistemología, historia y estructura conceptual del objeto matemático. En este trabajo se ha empleado el desarrollo histórico-epistemológico para la construcción de las clases uno y dos.
- Análisis de Contenido: considera el análisis de los diferentes sistemas de representación y fenomenología del objeto matemático estudiado. Nos permitió recabar información en relación a los diversos significados del concepto MTC.
- Análisis Cognitivo: se centra en el aprendizaje escolar del contenido seleccionado. Considera las expectativas y limitaciones de aprendizaje en torno al objeto matemático. Este análisis nos permitió tener en cuenta los errores y dificultades de los estudiantes en relación al objeto estadístico en estudio, a la hora de construir la secuencia didáctica. Además de posicionar el trabajo dentro del currículo.
- Análisis de Instrucción: considera una secuencia de tareas, recursos y gestión del aula para el diseño de una unidad didáctica centrada en el objeto o concepto seleccionado. Este análisis nos permitió la construcción de la secuencia didáctica, teniendo en cuenta los análisis cognitivo, de contenido y conceptual en la creación de las tareas y el plan de clases.
- Análisis de Actuación: Corresponde a la revisión del proceso realizado, evaluando la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos diseñados. Nos permitió caracterizar el aprendizaje de los estudiantes con motivo de la puesta en práctica de la secuencia didáctica.

El Análisis Didáctico permite realizar un seguimiento histórico epistemológico y profundizar sobre los conceptos y propiedades de MTC, para conseguir precisión y dominio en su descripción. El análisis fenomenológico proporciona conocimiento de las formas de comprensión de la media aritmética (reparto equitativo, medida resumen, valor representante, estimador). Las devoluciones del docente, surgen de realizar un análisis a priori, considerando posibles estrategias de solución, errores y dificultades, que pueden surgir en la tarea, dado por el Análisis de Instrucción y Análisis Cognitivo. Por otra parte varios autores enfatizan en la importancia de desarrollar el Razonamiento Estadístico en los estudiantes (Garfield y Ben-Zvi, 2008,

Bakker y Gravemeijer, 2004, Shaughnessy, 2007, Moore 1991), situación que se pone además de manifiesto en las modificaciones del currículo escolar. Lo anterior conlleva a considerar conocimiento de las ideas fundamentales.

## 4.6 CLASE 1

### 4.6.1 Descripción Actividad

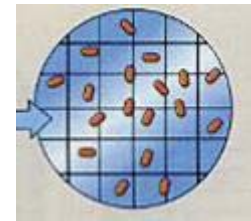
Con esta clase se pretende comenzar el estudio de la problemática, con ideas intuitivas de los estudiantes. Los estudiantes ya conocen la palabra promedio, en su uso común, que significa típico, pero no ven el promedio como un constructo representativo en el sentido técnico. Se requiere que el alumno desarrolle el concepto de representatividad, para ello se presenta la siguiente tarea:

#### **SITUACIÓN: LAS AVES RECORREN GRANDES DISTANCIAS**



La profesora de Margarita le dejó de tarea, que estimara el total de aves que se presentan en la imagen, pero de ninguna manera que los cuente de uno en uno.

Ella recuerda que una vez su hermana en un trabajo de



laboratorio de microbiología, tuvo que realizar un recuento de bacterias en el análisis de agua, para ello utilizó una cámara denominada hemocitómetro (ver figura), que consiste en una placa cuadrículada dividida en 25 cuadrados, de esta forma estimó el total, multiplicando el número de cuadrículas por un representante de las cuadrículas. Margarita piensa: ¡¡podría utilizar el mismo método!! , pero su dilema es que no sabe cómo elegir ese representante y qué cualidades debe cumplir, ¿le podrías ayudar a resolver su problema? Argumenta tu respuesta.

Elegido el representante, estima el total de aves de la imagen.

A continuación, en grupo de cinco estudiantes, anoten en una tabla el nombre de cada integrante del grupo y la estimación que realizó del total de aves de la imagen. Comparen los resultados y comenten la estrategia utilizada para escoger su representante. Soliciten a otro grupo que le den a conocer sus datos. Con los 10 datos recolectados, determinen un representante del grupo que les permita estimar el total de aves. ¿Cómo lo eligieron?, ¿En qué se basaron para afirmar que es el mejor representante?



La situación didáctica está dividida en dos partes:

- La primera es un trabajo individual que exige del alumno encontrar un valor que represente a las cuadrículas, de forma que sea un factor para obtener el total de aves de la imagen, multiplicando por el número de cuadrículas. De esta forma se pretende que el alumno pueda ir construyendo el concepto de representatividad y a la vez conectar ese representante con algunas cualidades como: compensación, equilibrio, intermediación y representatividad de la media aritmética.

La cuadrícula elegida, si es representativa del conjunto cuadrículas, no puede contener ni muchas, ni pocas aves, es decir una cuadrícula media, cuyo valor esté cercano a todos, está en el medio de otros (intermediación y equilibrio). También de alguna forma se introduce concepto de compensación (los cuadros que tienen mucho por una parte, se compensan con otros que tienen pocos). Estos aspectos cualitativos de la media incluyen el concepto de representatividad.

Con esta actividad se pretende que los estudiantes primero experimenten de manera intuitiva, en que situaciones es necesario aplicar la media aritmética, para luego presentar su algoritmo que se desprende de la situación. Bakker (2003) afirma que la estimación es un buen punto de partida para la educación estadística, de acuerdo al desarrollo histórico-epistemológico de la media, ya que la estimación considera muchos aspectos cualitativos de la media aritmética, que no se atienden cuando se enseña sólo su algoritmo.

- La segunda parte, plantea al alumno elegir un valor que represente a los 10 datos recolectados considerando los de su grupo y otro más, para estimar el total de aves de la imagen. Esta actividad se propone basada en el método de tomar la media aritmética como mejor representante, para reducir los errores de observación desarrollado principalmente en astronomía (Plackett, 1970).

Lo que interesa es ver los argumentos de los estudiantes, para partir de ahí ir construyendo conocimiento, específicamente que analicen la distribución de los datos. Si el conjunto de datos presenta un valor muy alejado de los demás, se espera que el estudiante advierta su presencia y cuestione su procedencia, con el fin de eliminar ese dato y calcular la media de los restantes. Con esta situación se enfatiza la idea fundamental de Estadística, del valor de dato en contexto.

La situación está pensada para 90 minutos y se espera que el alumno participe en forma activa en la actividad, entregando argumentaciones a sus respuestas y procedimientos. El docente cumplirá la función de mediador, el cual también debe argumentar al cierre de la clase.

#### 4.6.2 Respuesta Experta

- **Trabajo Individual:** como es una estimación se pueden aplicar varias estrategias, pero se espera que elijan como representante un cuadro medio de aves, es decir que no tenga ni muchas, ni pocas aves. Lo importante es que



se den cuenta de las cualidades que debe poseer ese representante de todas las cuadrículas.

- **Trabajo Grupal:**

Se busca un valor que resuma las características del conjunto de datos, que dé a conocer la tendencia del grupo, en consecuencia el mejor representante será calculado de acuerdo a la distribución. Si el conjunto de datos no tiene valores extremos, el valor es la media de todos los datos. Pero, si presenta datos atípicos, se elimina el dato erróneo y luego se obtiene la media aritmética del resto de los datos.

#### 4.6.3 Matemática en juego

- **Trabajo Individual:** en esta actividad el estudiante debe conocer concepto de estimación, para comprender la situación.
- **Trabajo Grupal:** el alumno debe elegir el mejor valor que represente a su grupo, en cuanto a la estimación del total de aves de la imagen, para ello debe poseer el concepto de representatividad de un conjunto de datos (por lo de menos de manera intuitiva, trabajada en la actividad individual) y además conocer concepto y algoritmo de la Media, trabajado de alguna forma en la primera parte de la clase.

Para poder estimar el total de aves se presenta la siguiente igualdad  $\bar{x} \cdot n = \sum x_i$ , del cual se desprende el algoritmo de la media aritmética.

Así  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ , en este punto el estudiante utiliza como conocimiento previo concepto de ecuación para poder determinar algoritmo de la media.

#### 4.6.4 Posibles Estrategias

- **Trabajo Individual:**
  1. Suma la cantidad de aves que hay en los cinco rectángulos de la diagonal y luego multiplica por cinco para determinar el total.
  2. Para determinar el representante elige cuatro rectángulos al azar y calcula la media aritmética de estos. Luego multiplica por 25 el representante para estimar el total.
  3. Elige como representante una cuadrícula que no tenga ni muchas, ni pocas aves. Luego multiplica por 25 para determinar el total.
  4. Elige como representante una cuadrícula al azar. Luego multiplica por 25 para determinar el total.
  5. Cuenta la cantidad de aves que hay a lo largo y luego a lo ancho, para luego multiplicar estos valores.
- **Trabajo Grupal:**
  1. Eligen el representante de acuerdo al que presentó mayor poder de persuasión.
  2. Si hay datos repetidos, eligen el que tiene mayor frecuencia (**Moda**).

3. Ordenan los datos de menor a mayor y eligen el promedio de los dos centrales (**Mediana**).
4. Eligen el dato menor y el dato mayor, para luego determinar la media de ellos (**Rango Medio**).
5. Determinan la media aritmética, sin analizar los datos (**Media con datos atípicos**).
6. Determinan la media aritmética, considerando el sentido de los datos y el contexto (**Media**).

#### 4.6.5 Dificultades- Errores- Devoluciones

Errores y dificultades son empleados comúnmente como sinónimos, pero presentan significados diferentes, en consecuencia antes de continuar con la exposición, consideramos esencial clarificar estos términos.

Abrate et al (2006), afirma: “El error es entendido como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no como consecuencia de la falta de conocimientos” (p.12), vale decir el error surge a partir de un conocimiento adquirido de forma incorrecta.

Mientras que de acuerdo a la RAE dificultad se define: “Embarazo, inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto” (extraído de <http://dle.rae.es>).

Por lo tanto podemos afirmar que una dificultad conlleva un error.

Tabla 6

*Posibles errores y dificultades vislumbradas en la actividad de aprendizaje*

<b>Dificultad</b>	<b>Error</b>	<b>Devolución</b>
No poseen la capacidad de discriminar lo que se solicita	Consideran un argumento no matemático, para la elección.	¿Qué debes determinar? ¿Entonces, es pertinente la elección de ser el mejor representante de tu grupo, considerando este argumento no matemático?
Dificultad para comprender el concepto de representativo. (Mokros y Rusell, 1995)	La estimación del total de aves de la imagen, la eligen de acuerdo al dato que más se repite dentro del grupo (Moda).	Si a los datos que ustedes tienen agregamos los de otro grupo, todos distintos entre sí y distintos a los de ustedes, en este caso ¿cuál es la moda?, ¿podría este valor representar al nuevo conjunto de datos?

¿Cuándo algo está de moda? ¿A qué porcentaje de la población representa?

No perciben la presencia de un dato atípico

Elección errónea como mejor representante (media aritmética)

¿Te das cuenta qué se presenta un dato atípico, es decir un valor muy alejado al resto de los demás? ¿Cómo influye este valor atípico en el cálculo de la media? ¿Lo puedes descartar considerando el contexto de dónde surgió?

---

## 4.6.6 Plan de Clases 1

Plan de clases 1	
Problemática:	Hemos observado, en nuestra práctica docente, que los estudiantes tienen dificultades para decidir qué MTC es la más apropiada para representar un conjunto de datos, en un contexto dado.
Objetivo:	Desarrollar la idea de representante de un conjunto de datos relacionándolo con las MTC, en un contexto dado
Contenidos previos	<b>Materiales</b>
- Cálculo MTC	- Guía con problema - Pizarrón - Phnones - Cartulina (para consignar argumentos)

### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Actividad de los alumnos (posibles respuestas)	Intervención docente	Evaluación de la marcha de la clase
<p><b>INICIO: 15 minutos</b></p> <p><b>0. Indicaciones</b> Lee con atención el siguiente texto, se requiere que respondas las preguntas dando a conocer por medio de argumentaciones tu razonamiento, en tu explicación puedes utilizar dibujos, gráficos, números, etc., lo importante es que muestres como piensas.</p> <p><b>1. Introducción al tema.</b> El docente presenta diversas situaciones cotidianas, en las cuales se observa la estimación matemática.</p> <p><b>2. Planteamiento del problema a la clase</b> Lectura comprensiva de la situación</p> <p><b>DESARROLLO: 60 minutos</b></p> <p><b>3. Resolución del problema</b> <b>I Parte (15 minutos)</b> Individualmente eligen representante que les permitirá, estimar el total de aves de la imagen</p>	<p><b>3. I Parte</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Suma la cantidad de aves que hay en los cinco rectángulos de la diagonal y luego multiplica por cinco para determinar el total.</li> <li>Para determinar el representante elige cuatro rectángulos al azar y calcula la media aritmética de estos. Luego multiplica por 25 el representante para estimar el total.</li> <li>Elige como representante una cuadrícula que no tenga ni muchas, ni pocas aves. Luego multiplica por 25 para determinar el total.</li> <li>Elige como representante una cuadrícula al azar. Luego multiplica por 25 para determinar el total.</li> <li>Cuenta la cantidad de aves que hay a lo largo y luego a lo ancho, para luego multiplicar.</li> </ul> <p><b>Devoción:</b> ¿Qué pasaría si escogemos una cuadrícula con muy pocas aves? o bien ¿Muchas aves?</p> <p><b>Devoción:</b> ¿Qué es un cuadro medio de aves?</p>	<p><b>0. Explicitar el contrato didáctico y pedagógico.</b></p> <p><b>1.</b> A modo de motivación el (la) docente plantea al grupo curso, que en varias ocasiones de la vida cotidiana es necesario utilizar la estimación matemática, para describir o explicar situaciones, como: ¿Cuántos kilos de carne se requieren para el asado?, ¿Cuántas personas asistieron al concierto?, ¿Cuántos vacunos hay en la pradera? En este problema se requiere que estimes la cantidad de aves que a menudo se visualizan en la desembocadura del río Aconcagua (Con-Con) (5 minutos)</p> <p><b>2.</b> El (la) docente hace entrega de la guía y pide a varios estudiantes que lean en voz alta. A continuación plantea diversas preguntas, con el fin de cerciorarse de que comprenden la tarea que deben realizar. Cuando esta etapa se encuentre superada se podrá avanzar a la etapa de Desarrollo (10 minutos)</p> <p><b>3.</b> El profesor explica que la resolución del problema se realizará en dos etapas; una individual y luego grupal. Solicita a los estudiantes que se enfrenten a la tarea individualmente durante 15 minutos y que anotens sus argumentos para luego ser discutidos con el grupo.</p> <p><b>Respuesta experta:</b> como es una estimación se pueden aplicar varias estrategias, pero se espera que elijan como representante un cuadro medio de aves. Además identifiquen la cualidad de este cuadro medio: que está representando a todas las cuadrículas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>¿Los alumnos se motivan con el tema?</li> <li>¿Los estudiantes comprenden la situación problemática?</li> <li>¿Los estudiantes identifican que el representante corresponde a un cuadro promedio?</li> <li>¿Reconocen que al estimar el total utilizan el algoritmo de la media?</li> </ul>

<p><b>II Parte(20 minutos)</b> En grupos de cinco (a libre elección)</p> <p>a) Realizan tabla donde se identifica a cada miembro del grupo y su estimación del total de aves de la imagen. Comparan los resultados y comparten estrategias utilizadas .</p> <p>b) Agregan a los datos anteriores, cinco más de otro grupo. Con los 10 datos recolectados, determinan un representante del grupo.</p> <p>c) Los grupos discuten y consignan argumentos en cartulina</p> <p><b>4. Puesta en común (25 minutos)</b> Cada grupo expone su respuesta y la estrategia utilizada, por medio de un representante del grupo. Se discute con el curso los resultados obtenidos. El docente guiará la discusión, hacia el objetivo planteado y destacando aspectos relacionados con la comprensión conceptual de la media aritmética. El profesor realiza una tabla en la pizarra, para resumir las respuestas de los estudiantes, destacando argumento utilizado en la elección del representante.</p>	<p><b>3. II</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Eligen el representante de acuerdo al que presentó mayor poder de persuasión.</li> <li>Si hay datos repetidos, eligen el que tiene mayor frecuencia. (<b>Moda</b>)</li> <li>Ordenan los datos de menor a mayor y eligen el promedio de los dos centrales. (<b>Mediana</b>)</li> <li>Eligen el dato menor y el dato mayor, para luego determinar la media de ellos (<b>Rango Medio</b>)</li> <li>Determinan la media aritmética, sin analizar los datos (<b>Media con datos atípicos</b>)</li> <li>Determinan la media aritmética, considerando el sentido de los datos y el contexto (<b>Media</b>)</li> </ul>	<p>Docente solicita se distribuyan en grupos (5 personas) para que discutan acerca de la pregunta del problema y escriban su respuesta y argumentos en una cartulina, para luego ser presentada al curso. El docente deberá ir por los grupos de trabajo monitoreando el avance de la actividad y hacer devoluciones en caso de que presenten errores o dificultades.</p> <p><b>Respuestas que Requieren devolución.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Argumento psicológico, pero no matemático.</li> <li>Si agregamos todos los datos del curso y son distintos a los datos que ustedes tienen, ¿cuáles la moda? ¿Podría este valor representar al conjunto de datos?</li> <li>Si bien es cierto eligen un valor que está cercano a la mayoría de los datos, pues está al centro de la distribución, ¿será el más representativo, teniendo en cuenta que su valor se calculó de acuerdo a su posición con respecto al resto y no considerando el valor numérico del conjunto de datos? (Si la distribución es homogénea)</li> <li>El valor calculado está influenciado solamente por dos datos, no se toman en cuenta los demás. ¿será el mejor representante?</li> <li>Dentro del conjunto de datos, existe uno (o más), muy distante a la distribución de la muestra, ¿influye este dato en el cálculo de la media, ¿lo sacarías o dejarías para determinar tu representante?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>¿Se respetó el tiempo establecido por la planificación?</li> <li>¿Son capaces de responder la pregunta y argumentarla?</li> <li>¿Se observa el desarrollo de la comprensión de representativo?</li> <li>¿Tienen en cuenta, el sentido del dato y su contexto al determinar el representante?</li> </ul>																											
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Grupo</th> <th>Representante</th> <th>Argumento</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>7.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table>	Grupo	Representante	Argumento	1.			2.			3.			4.			5.			6.			7.			8.				<p><b>Respuesta Experta:</b> Se busca un valor que resuma las características del conjunto de datos, en consecuencia el mejor representante se calculará de acuerdo a la distribución de los datos, analizando datos y contexto. Si el conjunto de datos no tiene valores extremos, el valor es la media de todos los datos Si el conjunto de datos tiene valores atípicos, también será la media, pero eliminando los datos extremos, pues estos nacen de un error de cálculo</p>	
Grupo	Representante	Argumento																												
1.																														
2.																														
3.																														
4.																														
5.																														
6.																														
7.																														
8.																														
		<p>A continuación, el docente solicita a los grupos que expongan sus conclusiones, para ello asigna 2' por grupo. El docente expondrá preguntas de devolución a todo el grupo curso (planteadas anteriormente), dependiendo del argumento de elección.</p>																												

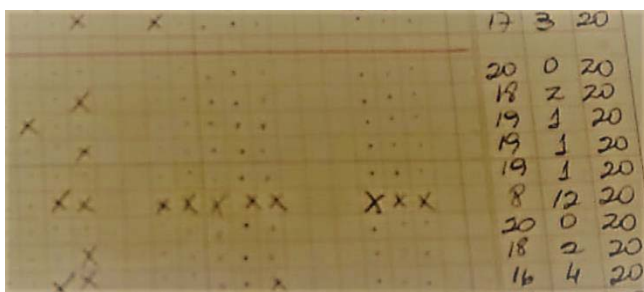
<p><b>CIERRE : 15 minutos</b></p> <p><b>Media Aritmética</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Toma en cuenta todos los valores de los datos de la distribución para su cálculo.</li> <li>• Es muy sensible a datos extremos.</li> </ul> <p><b>Mediana</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Su cálculo se realiza por medio de un ordenamiento de los datos, no por su valor.</li> <li>• No se ve afectada por valores extremos.</li> </ul> <p><b>Moda</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Su cálculo está dado, por la frecuencia de los datos, no por el valor.</li> <li>• No se ve afectada por valores extremos</li> <li>• Si todos los datos de la distribución tienen la misma frecuencia no hay moda.</li> </ul> <p>El cálculo utilizado por ustedes en la actividad individual, proviene de la génesis de la media aritmética en el desarrollo de la historia de las MTC, así para estimar el total de aves de la imagen, multiplicaron el valor del representante por el total de cuadrículas.</p> $x \cdot n = \sum$ $x = \frac{\sum}{n}$ <p>Un valor es representativo de un conjunto de datos, cuando reúne y describe las características del conjunto de datos. Ser representativo quiere decir que el valor está próximo a la mayor parte de los datos.</p>	<p>Los estudiantes, responden preguntas de <b>metacognición</b>, prestan atención a las conclusiones emanadas de la situación, toman nota en cuaderno, realizan preguntas en torno al tema.</p>	<p>Apoyándose en lo que ha escrito sobre la pizarra, el (la) docente resume las conclusiones de los estudiantes, en algunas características de las MTC, destacando el papel de ser representante de un conjunto de datos y el procedimiento para su cálculo.</p> <p>Retoma actividad individual para dar a conocer la génesis del algoritmo de la media en la historia.</p> <p>Presenta preguntas para promover la <b>metacognición</b> de los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>¿qué significa representativo para ti?</li> <li>¿Dónde crees que se ubica ese valor en relación a los datos?,</li> <li>¿Es cercano o lejano a los datos?</li> </ul> <p>Por último define el concepto de representativo</p>	<p>¿Se logró el objetivo de la clase?..</p> <p>¿Se cumple con el tiempo planificado?</p>
--	---	---	--

## 4.7 CLASE 2

### 4.7.1 Descripción Actividad

La clase está pensada como una continuación de la clase 1, en la cual se trabajó el concepto de representatividad de la media aritmética. La clase 2 presenta una distribución sesgada que puede mostrar la limitación del uso de la media y requerir otra medida. De esta forma se abordará el concepto de variabilidad que junto a la representatividad son esenciales para el desarrollo del razonamiento estadístico. A continuación se presenta la tarea:

#### SITUACIÓN: ASISTENCIA A CLASES



Los Directivos Docentes del Liceo Padre Hurtado de Quintero han notado una baja en la asistencia a clases. Necesitan saber con certeza qué curso(s) manifiestan la problemática, para despejar dudas recurren a las páginas de subvenciones de los respectivos libros de clases. Con la información a la

vista desean determinar un valor que describa la asistencia general de cada grupo curso.

Comienzan el estudio con dos cursos, 8°Básico y 1°Medio, para ello utilizan una tabla que presenta el número de lista de cada alumno del curso, con su asistencia entre los meses de Marzo a Junio y calculan la media aritmética y la mediana.

8° Básico Media= 70 Mediana = 71

1°Medio Media= 70 Mediana = 76

Al observar los resultados, quedan intrigados pues los dos cursos presentan la misma media aritmética, a pesar de que saben que uno de ellos presenta una asistencia poco predecible.

¿Puedes ayudar a dilucidar cuál de los dos valores, Media o Mediana, representan de mejor forma la asistencia diaria de cada curso? Argumenta tu respuesta.

N° de lista	8° Básico	1°Medio
1	60	61
2	70	56
3	70	73
4	71	76
5	74	74
6	74	6
7	70	77
8	76	79
9	60	76
10	74	59
11	76	80
12	74	77
13	60	79
14	74	76
15	76	68
16	66	78
17	71	75
18	74	72
19	60	78
20	70	80



Se requiere el concepto de variabilidad en los estudiantes, para que sean capaces de describir la forma de la distribución y sobre todo tomar conciencia de la presencia de valores atípicos. Por lo tanto la situación didáctica propone dos conjuntos de datos, una distribución homogénea y la otra con alta variabilidad, correspondientes a la asistencia diaria de los estudiantes de dos cursos de un liceo (8°básico y 1°medio), durante el período Marzo-Junio. Se propone la problemática de determinar cuál de los dos estadísticos (media o mediana) representan de mejor forma la asistencia diaria de cada curso, sabiendo que los dos cursos presentan la misma media (70) y distinta mediana (71 y 76), conforme el estudiante reconozca las diferencias de las distribuciones.

La trayectoria de aprendizaje del concepto de variabilidad comienza por comprender que los datos varían, de acuerdo a su origen (asistencia diaria). Se pretende que el estudiante comprenda que en la primera distribución la media aritmética es el estadístico que resume las características de un grupo de datos que varía, vale decir el promedio es el resultado de valores que varían alrededor de él (Watson, 2006), en una distribución uniforme. En la segunda, se espera que los alumnos perciban la presencia de un dato que está muy alejado del resto, en consecuencia la Media pierde su cualidad de ser el mejor representante, ya que en ella intervienen todos los datos y en este caso no es posible eliminar el dato atípico, debido a su contexto, mientras que la Mediana es la que presenta menor distancia con los valores de los datos de una distribución con alta variabilidad.

Garfield y Ben-Zvi (2008), manifiestan que es conveniente presentar problemas que consideren la comparación de conjuntos de datos, pues propicia inicialmente la inferencia estadística y son una excelente instancia para desarrollar estrategias en los estudiantes. Así la actividad presentada corresponde a la comparación de conjuntos de datos, dentro de un contexto significativo para el estudiante y favorable para la interpretación de la variabilidad. Se pretende de esta forma generar habilidades de razonamiento, al pedir la búsqueda de argumentos para justificar la respuesta.

La clase tendrá una duración de 90 minutos, con intervenciones acotadas por parte del (de la) docente, actuando como mediador. Los estudiantes se distribuirán en grupos de 5 personas, para comparar y contrastar, en el desarrollo de la clase sus resultados y argumentos. Se espera que den a conocer sus formas de pensar, escritas en una cartulina, para luego presentarla al resto del curso en plenario. El (la) docente guiará el plenario de modo que se pueda llegar a una síntesis de los argumentos presentados, para luego exponer la respuesta experta, al cierre de la clase.

#### **4.7.2 Respuesta Experta**

El mejor representante de un conjunto de datos será aquel que presente menor variabilidad, es decir, la suma de las desviaciones a un promedio para el conjunto de datos es mínima. Así entre las MTC, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos en distribuciones homogéneas, pues es un valor que se obtiene mediante el cálculo de todos los datos del conjunto y se sitúa al centro del recorrido de una distribución uniforme. Sin embargo en presencia de datos atípicos o distribuciones asimétricas, la Mediana es el mejor representante, pues la



media se desplaza hacia uno de los extremos de la distribución. En consecuencia en 8°Básico se elige la media aritmética y en 1°Medio la Mediana.

#### **4.7.3 Matemática en juego**

En esta situación se requiere como conocimientos previos, el concepto de representatividad, conocimientos básicos de las MTC, algoritmo de media y mediana. Se solicita que el estudiante desarrolle su capacidad de tratamiento de la información, realizando una descripción de los datos de cada distribución, con el fin de que adviertan como cambia la media en presencia de valores atípicos. Para este fin el estudiante utiliza la operatoria básica.

#### **4.7.4 Posibles Estrategias**

1. Dado que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de datos, eligen el valor que está al centro, para comparar la asistencia diaria de los dos cursos, es decir la Mediana. Luego afirman que 1°medio tiene mejor asistencia.
2. Cuentan los datos y eligen el que más se repite. Luego afirman que en 1°medio el mejor representante es la mediana 76, y en 8°básico es la media 70, ya que tiene mayor frecuencia que la mediana.
3. Realizan sumas numéricas, para determinar el que presenta menor variabilidad.
4. Eligen el punto medio entre el dato mayor y el menor.
5. Eligen la media como mejor representante, para ambos conjuntos de datos, sin analizar la variación de los datos.
6. Reconocen la presencia de datos atípicos, en la distribución de 1°medio, para luego eliminarlos y calcular la media.
7. Se apoyan de un gráfico realizando visualizaciones visuales de datos.
8. Comprenden la naturaleza de los datos dentro del contexto para mantener los datos atípicos dentro del conjunto y eligen la mediana como mejor representante en 1°Medio.

#### 4.7.5 Dificultades – Errores - Devoluciones

Tabla 7  
*Posibles errores y dificultades vislumbradas en la actividad de aprendizaje*

<b>Dificultad</b>	<b>Error</b>	<b>Devolución</b>
No analizan la variabilidad de cada conjunto, para determinar la tendencia del conjunto de datos. Watson (2006)	Para comparar la asistencia de los dos cursos, cometen el error de buscar una medida que se ubique al centro, para luego comparar.	¿Es siempre el mejor representante, el dato que se ubica al centro de la distribución?. ¿Qué tan cercano está este dato a los demás?.
No poseen la capacidad de describir la variación de los datos	Cometen el error de confundir el mejor representante, con el dato que tiene mayor frecuencia, es decir la moda	¿Siempre el dato que más se repite, estará más cercano a todos los datos de la distribución?. ¿Si el conjunto de datos no tiene moda, cómo elegirías el mejor representante de esa distribución?

## 4.7.6 Plan de Clases 2

### Plan de clases 2

Problemática:	Hemos observado, en nuestra práctica docente, que los estudiantes tienen dificultades para decidir qué MTC es la más apropiada para representar un conjunto de datos, en un contexto dado.	
Objetivo:	Desarrollar la idea de variabilidad y variación de un conjunto de datos relacionándolo con las MTC, en un contexto dado	
Contenidos previos	Materiales	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo MTC</li> <li>- Concepto de media aritmética, comprensión de la representatividad</li> <li>- Cálculo Mediana y Media</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Guía con problema</li> <li>- Pizarra</li> <li>- Plumones</li> <li>- Cartulina (para consignar argumentos)</li> </ul>	

### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Actividad de los alumnos (posibles respuestas)	Intervención docente	Evaluación de la marcha de la clase
<p><b>INICIO: 15 minutos</b></p> <p><b>0. Indicaciones</b> Lee con atención el siguiente texto, se requiere que respondas las preguntas dando a conocer por medio de argumentaciones tu razonamiento, en tu explicación puedes utilizar dibujos, gráficos, números, etc., lo importante es que muestres como piensas.</p> <p><b>1. Introducción al tema.</b> El docente retoma conceptos estudiados: representativo y MTC mediante una serie de preguntas. Destaca el hecho del cálculo de Media y Mediana y en qué lugar se sitúan en relación al conjunto de datos</p> <p><b>2. Basteamiento del problema a la clase</b> Lectura comprensiva de la situación</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Cuando describe las características de un conjunto de datos.</li> <li>▪ Cercano al conjunto de datos.</li> <li>▪ Sí, en su cálculo.</li> <li>▪ Se suman todos los valores de los datos y se dividen por el total de datos. En el cálculo de la media interviene el valor de cada uno de los datos.</li> <li>▪ La mediana de un conjunto ordenado de datos de una variable es el valor que deja igual número de datos por encima de él que por debajo de él.</li> <li>▪ En algún lugar del medio.</li> <li>▪ En el centro de los datos</li> </ul>	<p>0. Explicitar el contrato didáctico y pedagógico.</p> <p>1. El (la) docente hace presente los conceptos MTC y representativo con las siguientes preguntas:</p> <p>a) ¿Cuándo un valor es representativo?</p> <p>b) ¿Dónde se ubica ese valor en relación al conjunto de datos?</p> <p>c) ¿Media y Mediana representan a un conjunto de datos? ¿En qué difieren?</p> <p>d) ¿Cómo se calcula la media aritmética?</p> <p>e) ¿Qué es la Mediana?</p> <p>f) ¿Dónde se ubica la Media en relación al conjunto de datos?</p> <p>g) ¿Dónde se ubica la Mediana?</p> <p>2. El (la) docente hace entrega de la guía y pide a varios estudiantes que lean en voz alta. A continuación plantea diversas preguntas, con el fin de cerciorarse de que comprenden la tarea que deben realizar. Cuando esta etapa se encuentre superada se podrá avanzar a la etapa de Desarrollo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Los alumnos se motivan con el tema?</li> <li>▪ ¿Los estudiantes comprenden la situación problemática?</li> <li>▪ ¿Los estudiantes recuerdan conceptos de representativo, media y mediana.</li> </ul>

<p><b>DESARROLLO: 65 minutos</b></p> <p><b>3. Resolución del problema</b>  <b>I Parte(10 minutos)</b>          Individualmente eligen entre la Media o Mediana como mejor representante que les permita tener un valor resumen de la asistencia de cada curso.</p> <p><b>II Parte(30 minutos)</b>          En grupos de cinco (a libre elección)</p> <p>a) Comparan los resultados y presentan argumento utilizado que respalda elección .</p> <p>b) Calculan diferencias positivas entre representante elegido y cada dato.</p>	<p>Analizan pregunta en forma individual, determinan posible respuesta.</p> <p><b>3 a)</b>  <b>En 8°Básico:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eligen como mejor representante la Media Aritmética, pues reconocen en ella un valor que se obtiene mediante el cálculo de todos los datos del conjunto.</li> <li>• Eligen la Mediana como mejor representante</li> </ul> <p><b>En 1°Medio</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eligen como mejor representante la Media Aritmética, a pesar de que se dan cuenta que existen valores atípicos.</li> <li>• Eligen la Mediana como mejor representante, pues analizan datos y contexto.</li> </ul> <p><b>3b)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tienen las diferencias positivas, pero no saben qué hacer con la información.</li> <li>• Analizan las diferencias obtenidas y se dan cuenta que con uno de ellos la variación es menor, pero lo realizan de manera intuitiva.</li> </ul>	<p>Docente genera espacios para el análisis y reflexión en forma individual. No interviene.</p> <p>Docente solicita se distribuyan en grupos (5 personas) para que discutan acerca de la pregunta del problema y escriban su respuesta y argumentos en una cartulina, para luego ser presentada al curso.          El docente deberá ir por los grupos de trabajo monitoreando el avance de la actividad y hacer devoluciones en caso de que presenten errores, dificultades.</p> <p><b>Respuestas que requieren devolución</b>          ¿Siempre ocurrirá que la media es el mejor representante?          ¿Qué se considera para calcular la Mediana? ¿Crees que describa las características de la distribución de datos?          Necesitas describir las características del conjunto de datos, ¿qué efecto tienen los dos datos "4" en el cálculo de la Media? ¿Los puedes sacar del conjunto de datos para no influenciar el cálculo de la media o requieres otra medida?          ¿Por qué consideraste los datos atípicos al elegir tu mejor representante?</p> <p><b>Respuestas que requieren devolución</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si buscas el mejor representante, ¿cómo debe ser la variación entre el conjunto de datos y el representante elegido?</li> <li>• Necesitas determinar un valor que dé a conocer en forma global la distancia entre cada dato y tu representante, ¿qué operación puedes realizar con las diferencias obtenidas?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Se respetó el tiempo establecido por la planificación?</li> <li>• ¿Son capaces de responder las preguntas y argumentarlas?</li> <li>• ¿Analizan datos y contexto, para elegir el mejor representante</li> <li>• ¿Relacionan mejor representante, con menor variación?</li> </ul>
--	--	--	--

<p><b>4. Puesta en común (15 minutos)</b> Cada grupo expone su respuesta y la fundamentación de su elección, apoyada por el cálculo de las diferencias positivas. Se discute con el curso los resultados obtenidos. El docente guiará la discusión, hacia el objetivo planteado en la clase, destaca aspectos relacionados con la variación de los datos. El profesor realiza una tabla en la pizarra, para resumir las respuestas de los estudiantes, en una de las columnas anota la suma de las diferencias positivas de cada dato con su representante.</p>	<p>Grupos elegidos por el docente exponen su trabajo</p>	<p>A continuación, el docente solicita a algunos grupos que expongan su trabajo, cuyas respuestas serán un aporte al objetivo de la clase. El docente expondrá preguntas de devolución a todo el grupo curso (planteadas anteriormente), dependiendo de la respuesta entregada. El objetivo es generar conflictos cognitivos en los estudiantes, pues siempre consideran a la media como mejor representante de un conjunto de datos, pero en 1° medio no lo es.</p>																
<table border="1"> <thead> <tr> <th data-bbox="201 675 317 748">Mejor Representante</th> <th data-bbox="317 675 457 748">Argumento</th> <th data-bbox="457 675 594 748">Suma de las variaciones</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> <tr> <td> </td> <td> </td> <td> </td> </tr> </tbody> </table>	Mejor Representante	Argumento	Suma de las variaciones															
Mejor Representante	Argumento	Suma de las variaciones																
<p><b>CIERRRE : 10 minutos</b> El mejor representante de un conjunto de datos será aquel que presente menor variación, es decir, la suma de las desviaciones a un promedio para el conjunto de datos es mínima. Así entre las MTC, la media aritmética es generalmente la que mejor representa a un conjunto de datos. Sin embargo, hay casos en que la mediana representa mejor a un conjunto de datos, como ocurre en 1° Medio (de acuerdo al contexto los datos extremos se deben considerar), pues para afirmar tal representación se requiere que el valor elegido no se vea afectado por valores extremos atípicos.</p>	<p>Los estudiantes prestan atención a las conclusiones emanadas de la situación, toman nota en cuaderno, realizan preguntas en torno al tema.</p>	<p>Apoyándose en lo que ha escrito sobre la pizarra, el (la) docente considera las respuestas de los estudiantes, para realizar el cierre de la clase.</p>	<p>¿Se logró el objetivo de la clase?  ¿Se cumple con el tiempo planificado?</p>															

## 4.8 CLASE 3

### Análisis de instrucción - Análisis a priori

A continuación se realizará el análisis a priori de la clase implementada en el estudio de clases, lo cual incluye descripción de la actividad, respuesta experta de la pregunta planteada, matemática en juego, posibles estrategias de resolución por parte de los estudiantes, dificultades y errores con sus respectivas devoluciones, para finalizar con el plan de clases. Se debe considerar que las dificultades aquí expuestas provienen del respaldo teórico Análisis Didáctico.

#### 4.8.1 Descripción Actividad

Se presenta un conjunto formado por 10 datos, en el cual uno de ellos es atípico<sup>2</sup>, dentro del contexto de venta de mallas de naranjas en un cruce peatonal. Los datos representan las masas de cada malla, se pretende que los niños sean capaces de determinar el mejor representante de este conjunto, considerando la naturaleza de los datos, vale decir que reconozcan que las mallas de naranjas tienen distintas masas, debido a que provienen de un árbol. Dada esta razón la distribución de datos presenta variación y se presenta un dato muy lejano a los demás, dato atípico, ante esto deben razonar si es legítimo este dato o bien lo pueden descartar, para determinar el mejor representante. Además, se plantea la necesidad de aplicar el concepto de representatividad, es decir el estudiante debe poseer la idea del conjunto de datos como un todo, descartando las características individuales. Para resaltar el comportamiento de la distribución, se le puede solicitar a los estudiantes que apoyen su argumentación a partir de la representación gráfica.

Al igual que en las clases uno y dos, esta tendrá una duración de 90 minutos, siguiendo la misma dinámica de las precedentes, en la cual los alumnos trabajarán en grupos de 5 personas y expondrán sus resultados al resto del curso. El docente guiará el plenario y presentará una síntesis de los argumentos dados por los estudiantes, para luego dar a conocer la respuesta experta. A continuación se presenta la tarea:

---

<sup>2</sup> Un valor se considera atípico, si está fuera del intervalo formado por los límites superior e inferior,  $L_i$  y  $L_s$ .

Donde  $L_i = Q_1 - 1.5 \cdot RIC$ ,  $L_s = Q_3 + 1.5 \cdot RIC$ . Se entiende por RIC rango intercuartil ( $Q_3 - Q_1$ )

### **La situación de Diego**

Diego estudia en 8° básico y vivió la siguiente situación:

Su papá es feriante y compra mallas de naranjas a un agricultor local, para luego venderlas en un cruce de calles. En la etiqueta de las mallas se presenta una cierta cantidad de kilos. Hace unos días, un cliente vino a reclamar porque había pesado una malla en la balanza de su casa, y pesaba solo 2,7 kg., la cual no coincidía con el registro de la etiqueta. El papá de Diego trató de defenderse como pudo, pero no fue capaz de asegurarle que las mallas pesaran lo que se indicaba. Poco después, fue a ver al agricultor que le vendía las mallas. El agricultor se mostró muy extrañado. Decidieron pesar 10 mallas distintas, para ver si había variaciones. Los resultados fueron los siguientes:

2,8   2,9   3,1   3,3   2,7   3,4   3,4   6,0   2,7   2,7

El feriante y el agricultor revisaron los datos, pero no estuvieron seguros de que hubiera que modificar la etiqueta. Sabiendo que Diego está estudiando Estadísticas, su papá le planteó el problema a él. Pensando en buscar un valor representativo, Diego calculó las medidas de tendencia central:

Media = 3,3 kg   ; Moda = 2,7 kg   ; Mediana = 3,0 kg

¿Puedes ayudar a Diego a elegir la Medida de Tendencia Central más apropiada, para representar las 10 mallas de naranjas, para anotar su valor en la etiqueta? Justifica.

#### **4.8.2 Respuesta Experta**

El mejor representante es la mediana, pues la media aritmética está influenciada por todos los datos (de acuerdo a su algoritmo), en especial el dato atípico 6, este valor desplaza a la media aritmética hacia uno de los extremos de la distribución, aumentando la lejanía de esta con los demás datos, vale decir aumenta la variabilidad.

La moda no puede ser ya que en su cálculo interviene la frecuencia de los datos (algoritmo), sólo representa el 30% de los datos.

También se considerará como respuesta correcta, aquella que provenga de realizar un análisis de la variación de los datos, dentro del contexto. En este caso eliminan el dato atípico y determinan la media aritmética de los nueve datos restantes.

#### **4.8.3 Matemática en juego**

Para enfrentar esta situación se requiere los conocimientos previos; representatividad, variabilidad, valor del dato en contexto, además de algoritmos de



las MTC y algunas propiedades de las MTC, que se presentaron en las situaciones precedentes. Se espera por parte del estudiante que sea capaz de analizar los datos, y percibir la presencia de un dato atípico para luego elegir el mejor representante, considerando las propiedades o algoritmos e ideas fundamentales de estadística. Las propiedades que utiliza se muestran en la tabla 2

Tabla 2  
*Algunas propiedades de las MTC*

	<b>Media</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>
Se tienen en cuenta en los cálculos todos los valores de los datos	SÍ	NO	SÍ
Cualquier cambio en los datos cambia su valor	SÍ	NO	NO
Representan a un colectivo	SÍ	SÍ	SÍ
Resistente	NO	SÍ	SÍ

(Extraído de Cobo, 2003)

#### 4.8.4 Posibles Estrategias

1. Representan el conjunto de datos en un registro gráfico, para visualizar mejor la forma de la distribución y realizar un mejor análisis de los datos en cuanto a la tendencia y variabilidad.
2. Hacen variar algunos datos de la muestra, para ver cómo las variaciones inciden en los valores de las MTC. Ejemplo, pueden eliminar el dato de 6,0 kg, por tratarse de un dato inusual, para ver qué efecto tiene esa eliminación en el valor de la media y mediana.
3. Cuentan los datos y eligen el que tiene mayor frecuencia.
4. Suman todos los datos y los dividen por el total de valores, sin realizar un tratamiento de la información.



#### 4.8.5 Dificultades – Errores – Devoluciones

Tabla 3

*Posibles errores y dificultades vislumbradas en la actividad de aprendizaje*

<b>Dificultad</b>	<b>Error</b>	<b>Devolución</b>
Los estudiantes presentan dificultades para considerar en sus respuestas las características del conjunto de datos (Reading y Pegg, 1996)	Cometen el error de privilegiar argumentos no matemáticos, como la justicia o la conveniencia desde el punto de vista del vendedor o el cliente, o bien la simplicidad de la respuesta que no contenía decimales.	¿qué MTC te parece matemáticamente más representativa del conjunto de datos y por qué?
Existe dificultad para comprender que la media pierde su valor de ser el mejor representante, frente a distribuciones asimétricas o en presencia de datos atípicos.(Campbell, 1974)	Cometen el error de elegir siempre la media aritmética, como mejor representante.	¿Cuál es el valor de la media sin el dato 6,0? ¿Qué efecto produce el dato 6,0 en la media aritmética? ¿Produce el mismo efecto en la mediana?
Dificultades para comprender la propiedad de representatividad de la media, la cual es una propiedad estadística, les es más fácil comprender la propiedad de localización, relacionada más con el cálculo (Cobo, 2003).	Cometen el error de determinar la moda como mejor representante.	Supongamos que a la distribución dada agregamos datos 2,8 2,9 3,1 3,3 2,7 3,4 3,4 6,0 2,7 2,7 50 60 70 1000 1001..... 1005 Kg  ¿Seguiría siendo la Moda el mejor representante de este conjunto de datos?

### 4.8.6 Plan de clases 3

<b>Problemática:</b>	Hemos observado, en nuestra práctica docente, que los estudiantes tienen dificultades para decidir qué MTC es la más apropiada para representar un conjunto de datos, en un contexto dado.
<b>Objetivo:</b>	Discriminar la MTC más apropiada para representar un conjunto de datos, dado un contexto y finalidad determinados.
<b>Contenidos previos</b>	<b>Materiales</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cálculo MTC</li> <li>- Interpretación de las MTC ( en general y en particular)</li> <li>- Gráfico de puntos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Guía con problema</li> <li>- DATA para proyección del problema en la pizarra,</li> <li>- 1 malla de naranjas</li> <li>- Pizarrón</li> <li>- Plumones,</li> <li>- Cartulinas (para que cada alumno consigne sus argumentos)</li> </ul>

#### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Evaluación de la marcha de la clase
<p><b>0. Indicaciones de la clase</b> Lee con atención el siguiente texto, y luego responde la pregunta que el profesor planteará. Recuerda que en este trabajo es importante que converses con tus compañeros y como grupo argumenten con base en relación a la respuesta dada.</p> <p><b>1. Planteamiento del problema a la clase</b> <b>Comprensión de la situación de Diego</b></p>	<p><b>0. Explicitar el contrato didáctico y pedagógico.</b></p> <p>1. A modo de motivación el (la) docente plantea al grupo curso, que hoy desarrollarán una actividad, que se plantea a menudo en los cruces de calle, en la venta ambulante de mallas de frutas o verduras. Por ejemplo la venta de naranjas (muestra a los estudiantes la malla de naranjas, la cual se encuentra físicamente). Motiva y desafía a los alumnos a aplicar sus conocimientos de las MTC en una situación cotidiana.</p> <p>2. El (la) docente hace entrega de la guía y pide a varios estudiantes que lean en voz alta. Luego solicita a los estudiantes que reflexionen individualmente durante 5 minutos, en torno a la comprensión de la situación problemática. El docente realiza diversas preguntas a los estudiantes, con el fin de cerciorarse de que comprenden que; deben encontrar un valor central que sea representante del conjunto de datos. Cuando esta etapa se encuentre superada se podrá avanzar a la etapa del desarrollo. (15 minutos)</p>	<p>¿Los estudiantes comprenden la situación problemática?</p> <p>¿Los estudiantes identifican los datos del problema?</p> <p>¿Los estudiantes comprenden el sentido de las MTC en el contexto del problema?</p>
<p><b>Posibles preguntas de los estudiantes</b> Al: Profesora, ¿no entiendo el problema? ¿qué hay que hacer? Devolución: ¿Por qué crees que se produjo esta situación de que las mallas pesaran distinto? ¿Qué son las MTC? ¿Qué significa para ti elegir la MTC más apropiada? ¿Qué significa REPRESENTATIVO?</p>		
<p><b>Anticipación de errores/dificultades</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes no comprenden la situación, pues no entienden el origen del problema.</li> <li>• O bien, no comprenden el significado de una MTC.</li> <li>• Los estudiantes no manejan el término Representativo. Hacerles pensar en el término Representativo, apoyándose en una situación. Ejemplo ¿cómo pensarían un joven de tu generación que los represente?</li> </ul>		<p><b>Respuestas ejemplares:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Por qué no todas las naranjas poseen la misma masa.</li> <li>• Son valores centrales que buscan representar un conjunto de datos.</li> <li>• Hacer presente algo en la imaginación con palabras o figuras</li> </ul>

INICIO  
Tiempo: 25 min

<p>2. Los grupos discuten, buscan soluciones que den respuesta a la pregunta planteada. Consignan argumentos en cartulina(25minutos)</p>	<p>Enseguida el docente les pide que se distribuyan en grupos (5 personas) para que discutan acerca de la pregunta del problema y escriban su respuesta y argumentos en una cartulina, para luego ser presentada al curso. El profesor deberá ir por los grupos de trabajo monitoreando el avance de la actividad y hacer devoluciones en caso de que presenten errores o dificultades</p>	<p>¿Los estudiantes presentan una buena disposición hacia el trabajo?</p>				
<p><b>Anticipación de errores/dificultades:</b> El estudiante no comprende en el contexto del problema, que la moda sea 2,7 kg y/o que la mediana sea 3,0 kg y/o que la media sea 3,3 kg Respta que requieren devolución <b>*Mediana</b> Significa que el dato central es 3,0 kg <b>Devolución:</b> ¿Cuántos datos hay? ¿Es un número par o impar? ¿Hay un dato central si el número de datos es par? <b>*Media</b> Significa que si se suman los datos y se dividen por 10, da 3,3 kg <b>Devolución:</b> ¿Eso es el significado de la media o la manera de calcularla? ¿Qué pasaría si repartieras las naranjas en 10 mallas de igual peso? ¿Cuánto pesaría cada malla?</p>		<p><b>Respuestas ejemplares:</b> <b>*(Moda)</b> Significa que el peso que más se repite en las mallas es 2,7 kg <b>*(Mediana)</b> Significa que al ordenar los datos de forma creciente o decreciente, el promedio de los datos centrales es 3,0 kg <b>*(Media)</b> Significa que si se repartiera equitativamente la masa total de naranjas entre 10 mallas, cada una pesaría 3,3 kg</p>	<p>¿Son capaces de responder pregunta y argumentarla?  ¿Se cumple con el tiempo planificado?</p>			
<table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th data-bbox="491 1032 1010 1065">Posible respuesta 1</th> <th data-bbox="1012 1032 1530 1065">Posible respuesta 2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="491 1066 1010 1390"> <p>La solución es la moda, porque hay más mallas que tienen ese peso. <b>Devolución:</b> ¿Qué ocurriría si modificáramos los datos que no son moda? ¿Qué pasaría si hubiera 5 mallas cuyos pesos respectivos fueran 1.000, 1.001, ..., y 1.005 kg? ¿Cambiaría la moda en ese caso? ¿Puede, entonces, ser representativo el dato de la moda?</p> </td> <td data-bbox="1012 1066 1530 1390"> <p>La solución es la media, porque siempre la media es representativa del conjunto de datos. <b>Devolución:</b> ¿Qué piensas de este dato (señalando el dato extremo)? ¿Dirías que ese dato es cercano o lejano al resto? ¿Cuánto influye la presencia de ese dato en el cálculo de la media aritmética? ¿Qué puedes concluir al respecto?</p> </td> </tr> </tbody> </table>		Posible respuesta 1	Posible respuesta 2	<p>La solución es la moda, porque hay más mallas que tienen ese peso. <b>Devolución:</b> ¿Qué ocurriría si modificáramos los datos que no son moda? ¿Qué pasaría si hubiera 5 mallas cuyos pesos respectivos fueran 1.000, 1.001, ..., y 1.005 kg? ¿Cambiaría la moda en ese caso? ¿Puede, entonces, ser representativo el dato de la moda?</p>	<p>La solución es la media, porque siempre la media es representativa del conjunto de datos. <b>Devolución:</b> ¿Qué piensas de este dato (señalando el dato extremo)? ¿Dirías que ese dato es cercano o lejano al resto? ¿Cuánto influye la presencia de ese dato en el cálculo de la media aritmética? ¿Qué puedes concluir al respecto?</p>	
Posible respuesta 1	Posible respuesta 2					
<p>La solución es la moda, porque hay más mallas que tienen ese peso. <b>Devolución:</b> ¿Qué ocurriría si modificáramos los datos que no son moda? ¿Qué pasaría si hubiera 5 mallas cuyos pesos respectivos fueran 1.000, 1.001, ..., y 1.005 kg? ¿Cambiaría la moda en ese caso? ¿Puede, entonces, ser representativo el dato de la moda?</p>	<p>La solución es la media, porque siempre la media es representativa del conjunto de datos. <b>Devolución:</b> ¿Qué piensas de este dato (señalando el dato extremo)? ¿Dirías que ese dato es cercano o lejano al resto? ¿Cuánto influye la presencia de ese dato en el cálculo de la media aritmética? ¿Qué puedes concluir al respecto?</p>					

DESARROLLO  
Tiempo: 50 min

**Anticipación de errores/dificultades:**

El estudiante no acierta a la respuesta correcta.

Respuestas que requieren devolución

**RESPUESTA 1:** La MTC más apropiada es la **moda**

**Devolución:** ¿qué significa que algo esté de moda? ¿Cuántos individuos de la población poseen esa característica?

**RESPUESTA 2:** La MTC más apropiada es la **Media**

**Devolución:** ¿El dato 6, es cercano a los otros datos (región central)? ¿Qué sucedería si sacamos el dato 6? ¿cambia el promedio? (Considera que para entregar la respuesta debes considerar todos los datos, hacer comparación con el grupo de basquetbol)

Con el dato 6 dentro del conjunto de datos, ¿hacia dónde se ubica la media?

Si aún no comprenden!! Presentar las siguientes devoluciones

¿Qué sucederá con la media, si al conjunto de datos le agregamos una malla de 2Kg?

¿Qué sucederá con la media, si al conjunto de datos le agregamos una malla de 10Kg? Ubica el nuevo dato en el gráfico de puntos y la media.

¿Qué sucede con la media si se modifica algún dato o se agrega? ¿El valor de la media está influenciado por cada uno de los datos? ¿los valores obtenidos anteriormente son representativos del conjunto de datos?

Observa el gráfico de puntos.

Si agregáramos al conjunto de datos las dos mallas anteriores (2 Kg y 10 Kg), ¿cambiaría la Mediana? ¿Qué característica de la mediana, puedes deducir de esta situación?

**Respuestas ejemplares:**

**\*Moda:** En un grupo pequeño de datos la moda puede ser completamente inestable. En este caso la MODA no es representativa, pues dentro de los 10 datos, 2,7 se repite solamente 3 veces.

**\*Media:**

La media se ve influida por el valor de cada puntuación del grupo de datos.

La media no representa adecuadamente al grupo de datos. En consecuencia la mediana sería en este caso preferible como medida de tendencia central.

3. Puesta en común: Cada grupo expone su trabajo y los demás grupos plantean preguntas (4 minutos por grupo, en total 25 minutos)

4. El (la) docente utiliza tabla, para resumir las respuestas de los distintos grupos. Además consigna las características de cada MTC, entregada por los estudiantes.

Grupo	Moda	Mediana	Media
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

A continuación, el (la) docente solicita a los grupos que expongan sus conclusiones en 2 minutos. El curso dispone de 2 minutos para realizar preguntas al grupo que expone. El (la) docente realiza un resumen considerando los diversos puntos de vista de los estudiantes, consignando en pizarra. Si es necesario planteará preguntas para clarificar conceptos en relación a las MTC y sobre todo con la finalidad de resaltar ventajas y desventajas de utilizar una u otra. Con el fin de orientar la elección del mejor representante, el docente muestra la distribución de datos en un diagrama de puntos.

**Respuesta experta****Media Aritmética**

- Toma en cuenta todos los datos de la distribución para su cálculo.
- Es muy sensible a datos extremos.
- Cada conjunto de datos tiene media y esta es única.

**Mediana**

- No se ve afectada por valores extremos

**Moda**

- No se ve afectada por valores extremos

Si todos los datos de la distribución tienen la misma frecuencia no hay moda.

<p><b>Institucionalización</b>          Se tiende a situar la media en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos</p>	<p>Apoyándose en lo que ha escrito sobre la pizarra, el (la) docente resume las conclusiones de los estudiantes, guiando hacia la selección de la mediana como el mejor representante del conjunto de datos.</p> <p>Realiza preguntas para promover la metacognición de los estudiantes:          ¿Pudiste discriminar cuál era la MTC más apropiada para responder a este problema?          ¿Cómo obtuviste esa respuesta?</p>	<p>¿Cuántos estudiantes lograron discriminar la MTC más apropiada?</p> <p>¿Se respetó el tiempo establecido por la planificación?</p>
---	--	---

CIERRE      Tiempo: 15 min



## 5. LA CLASE DEL ESTUDIO DE CLASES: CLASE 3

### Análisis de actuación - Análisis a posteriori

En este apartado se analizará la clase implementada, correspondiente a la tercera dentro del Estudio de Clases. En consecuencia se tendrá en cuenta la metodología Estudio de Clases y el Marco Conceptual, Análisis Didáctico. Comenzaremos por dar a conocer una apreciación de pares y profesores del curso Seminario Taller de Investigación del postgrado de Magister en Didáctica de la Matemática, un análisis de las producciones de los estudiantes verificando si se consigue el objetivo de aprendizaje propuesto y las actuaciones del docente dentro en la clase implementada.

#### 5.1 Apreciación de Pares y Profesores

En el estudio de Estudio de Clases se considera visualizar, comentar y criticar la clase implementada a partir de la experiencia relatada por el docente implicado y las evidencias recogidas en el video de la clase.

Las oportunidades y aspectos a mejorar detectados son los siguientes:

- Los estudiantes no leen comprensivamente el problema.  
Se planifican intervenciones del (de la) docente durante la lectura del problema, para verificar la comprensión de los puntos clave.
- Algunas ideas que surgen en la argumentación habrían servido para que los grupos llegaran a conclusiones de mejor calidad.  
Se incorpora una segunda instancia de discusión grupal, posterior a la etapa de argumentación, para que los estudiantes tengan en cuenta las nuevas ideas que han escuchado.
- Hay estudiantes que formulan argumentos relacionados con la idea de justicia.  
Se elimina del enunciado la afirmación del cliente: “¡Es un robo!”, para que no induzca a reflexionar desde el concepto de justicia.
- En la validación, la docente realiza comentario que invalida uno de los argumentos presentados por estudiantes. Al exponer sus respuestas uno de los grupos afirma que la Moda no puede ser el mejor representante, pues representa a 3 datos de un total de 10. En este punto la profesora respalda la afirmación agregando otros argumentos, pero este grupo correspondía al primero de un total de ocho.
- Ausencia de tabla comparativa de las MTC, con base en argumentos de los estudiantes (presente en clases 1 y 2) dificulta la institucionalización.  
Se explicita en la planificación que el medio de organización del resumen que realiza el (la) docente es una tabla comparativa de las propiedades de las MTC, aspecto que docente omitió.
- Hay estudiantes que siguen seleccionando la moda como representante, aun cuando se les han hecho las preguntas de devolución correspondientes.

Se agrega una pregunta de devolución para reorientar a quienes eligen la moda, haciéndoles ver que su representatividad si no alcanza ni siquiera la mitad de los datos.

- Falta que la institucionalización se realice no solo verbalmente, sino también por escrito.

## 5.2 Análisis de las Producciones

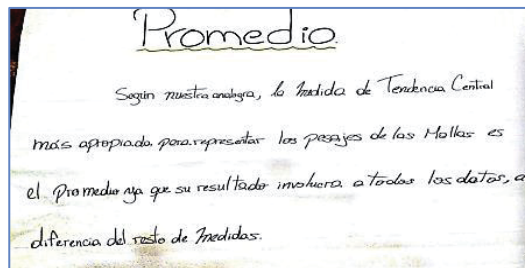
En este ítem se presentará el análisis de las producciones de los estudiantes, las cuales quedaron plasmadas en una cartulina y los distintos argumentos empleados por el profesor frente a esa respuesta, los cuales están registrados en los videos de las clases. El análisis se realizará bajo la óptica del Marco Conceptual, Análisis Didáctico, considerando que los diferentes análisis que lo conforman, nos entregan la herramienta necesaria para concretar dicha tarea.

Dentro del estudio de clases a los estudiantes se les brindó un espacio para la comunicación pública de sus respuestas y el docente no realizó las devoluciones en forma inmediata, sino que las retroalimentaciones fueron dadas al final de la exposición de cada grupo. En las tablas 4 y 5 se muestran las devoluciones del docente a la declaración específica de los estudiantes.

### 5.2.1 Evidencia 1



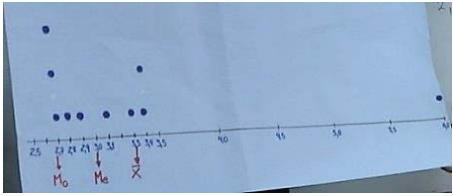
#### Respuesta del alumno



Los estudiantes eligen el promedio como mejor representante, ya que su valor involucra a todos los datos, a diferencia del resto de las medidas.



➤ Tabla 4  
Análisis a evidencia 1

Dificultad	Error	Devolución
<p>Existe dificultad para comprender que la media pierde su valor de ser el mejor representante, frente a distribuciones asimétricas o en presencia de datos atípicos. (Campbell, 1974)</p>	<p>Cometen el error de elegir siempre la media aritmética, como mejor representante.</p>	 <p>“ Cómo está el dato 6,0 con los demás datos?, mostrando la distribución de la situación propuesta. “...Voy a determinar el mejor representante de acuerdo a la distribución de los datos.”</p> <p>Video MAH02531 (min 3:55- min 7:20)</p>

➤ **Contraste con lo planificado**

- Docente se apoya de una representación gráfica para destacar el dato atípico, que se encuentra distante de la región donde se agrupan el resto de los datos. Luego resalta la forma de la distribución, en la cual la media ha sido desplazada hacia uno de los extremos, en consecuencia pierde su valor de ser el mejor representante.
- A diferencia de lo planificado presenta, a modo de ejemplo, dos distribuciones de datos; una homogénea (Fig.2) y otra con dato atípico (Fig. 3), con el fin de resaltar, la influencia del dato extremo sobre la media aritmética. Destaca la necesidad de analizar la variación de los datos, para tomar una decisión con fundamento.

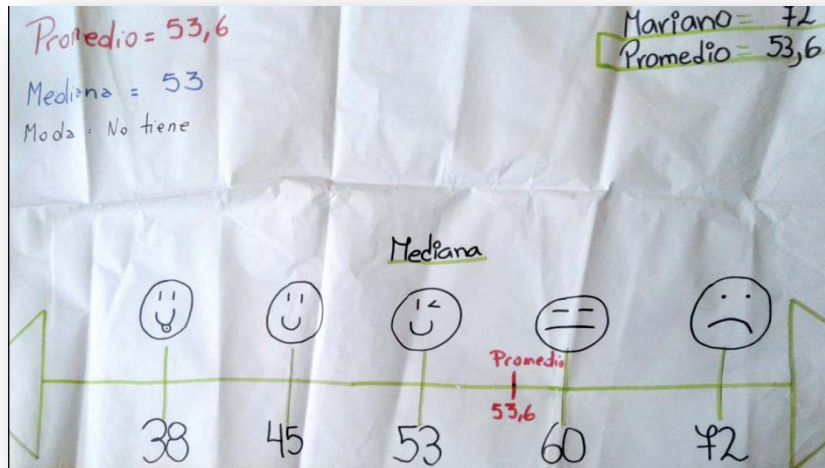


Fig. 2. Ejemplo de distribución homogénea, mediana y media, presenta variabilidad similar.

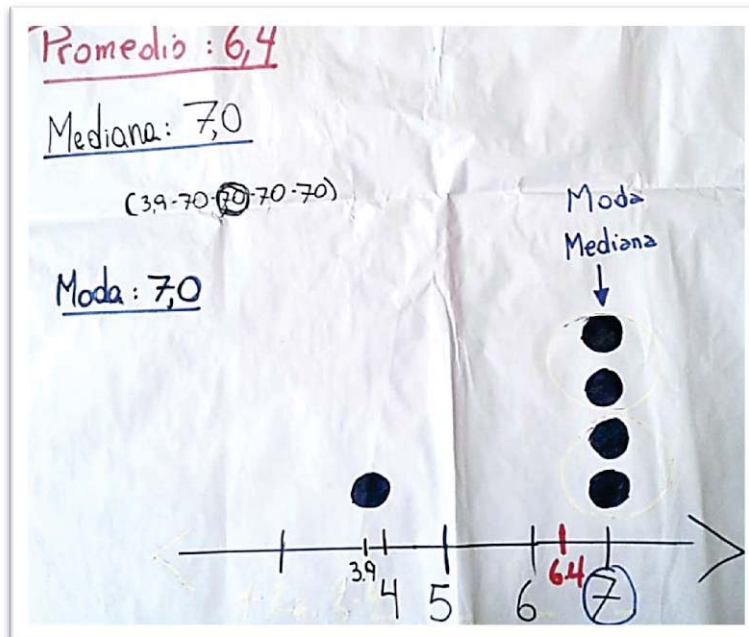


Fig. 3. Ejemplo de distribución con dato atípico. Media aritmética se presenta afectada por dato extremo, mediana presenta menor variabilidad.

## ➤ Conclusión

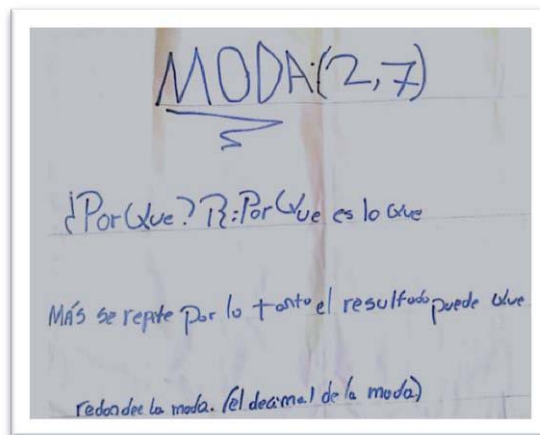
Se observa dificultad en los estudiantes para comprender que la media aritmética no es el más representativo del conjunto de valores dados por los datos.

Se pueden enunciar las siguientes explicaciones para sus dificultades:

- La media aritmética posee la propiedad de que en su cálculo, se tienen en cuenta todos los datos. Los estudiantes no perciben, que justamente esta propiedad incide, en que la media pierde su valor de ser el mejor representante.
- Eligen la media aritmética siempre como el mejor representante (Campbell, 1974), puede ser que es la medida que más conocen o bien por qué no realizan un análisis de la variación de los datos, de acuerdo al contexto.
- La idea de variabilidad no la poseen los estudiantes, en consecuencia faltó trabajar más en las propiedades o algoritmos de las Medidas de Tendencia Central con la variabilidad de los datos. Es decir, que la Mediana es resistente a datos atípicos, en consecuencia la variación de los datos no la afecta, mientras que la Media es un estadístico poco resistente. Conclusión el mejor representante es la Mediana, pues presenta menor variabilidad, está más cerca de la mayoría de los datos.

### 5.2.2 Evidencia 2

#### ➤ Respuesta del alumno



Los estudiantes eligen la moda como mejor representante, ya que es el que más se repite.

- Tabla 5  
*Análisis a evidencia 2*

<b>Dificultad</b>	<b>Error</b>	<b>Devolución</b>
Dificultades para comprender la propiedad de representatividad de la media, la cual es una propiedad estadística, les es más fácil comprender la propiedad de localización, relacionada más con el cálculo (Cobo, 2003).	Cometen el error de determinar la moda como mejor representante.	Supongamos que a la distribución dada agregamos datos 2,8 2,9 3,1 3,3 2,7 3,4 3,4 6,0 2,7 2,7 1000 1001..... 1005 Kg ¿Seguiría siendo la Moda el mejor representante de este conjunto de datos?

- **Contraste con lo planificado**

En este caso se sigue exactamente con el plan de clases

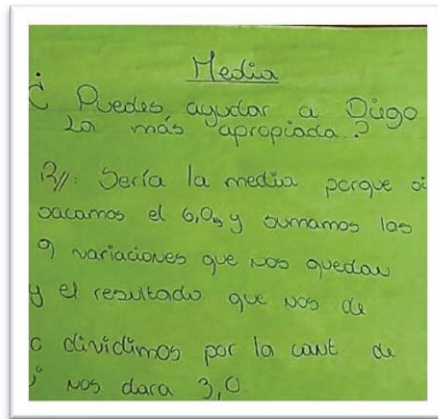
- **Conclusiones**

Se destaca el hecho de que la moda no es la más representativa del conjunto de datos, pues al agregar datos con frecuencia uno, la moda sigue siendo la misma, pero dista bastante de representar la tendencia de ese nuevo conjunto, debido a que es resistente a datos atípicos.

A pesar de entregar este argumento, algunos alumnos persisten en elegir la Moda, lo cual se puede explicar por la ausencia de la noción de representatividad, pues en este caso representa sólo al 30% de los datos.

### 5.2.3 Evidencia 3

#### ➤ Respuesta del alumno



Los estudiantes deciden eliminar el dato 6,0 kg y calcular la media de los 9 restantes.

#### ➤ **Análisis a evidencia 3**

Los estudiantes consideran el dato 6,0, como un dato erróneo dentro del contexto, para tomar una decisión en cuanto a elegir el mejor representante, que en este caso consideran la media aritmética.

La respuesta dada por los estudiantes es correcta, pues analizan la variación de los datos de acuerdo al contexto

#### ➤ **Contraste con lo planificado**

Si bien es cierto que dentro de las estrategias se consideró la posibilidad de que eliminaran el dato 6,0 por tratarse de un dato inusual, no se barajó la posibilidad de que eligieran la media como mejor representante.

#### ➤ **Conclusiones**

Los estudiantes perciben la presencia de un dato atípico, dentro del contexto de la situación. En consecuencia se presenta una variación por error de medida, el cual es considerado para la elección de la medida más representativa del conjunto de datos.

## 6. CONCLUSIONES

Los nuevos cambios curriculares hacen énfasis en la formación de ciudadanos para el mundo moderno. Una persona educada que sea capaz de entender y razonar con la información estadística a la que constantemente está expuesta. Hay consenso entre los investigadores que la escuela debe favorecer la cultura estadística. Pero cabe preguntarse, ¿cómo hacerlo? La presente investigación ha querido ayudar a esta labor, para ello se han propuesto tres situaciones didácticas que pueden ser útiles para desarrollar el razonamiento estadístico de los estudiantes en el tema de las Medidas de Tendencia Central, considerando algunas ideas fundamentales; representatividad, variabilidad y valor del dato en contexto.

El docente requiere de problemas para cubrir los contenidos presentes en el currículo, los problemas presentados ayudarán en parte a cubrir la necesidad. Los problemas se han construido para atraer el interés del estudiante, a saber no son triviales y se ubican dentro de un contexto.

La solución de los problemas presentados, requiere que el alumno enlace ideas, que le permita generar razonamientos y argumentos, que avalen la respuesta entregada. La intención es ir más allá de la aplicación de algoritmos y procedimientos, sino por el contrario, prestar atención a los significados, interpretación y al contexto donde se tomaron los datos.

La primera situación considera la estimación, como punto de partida, para enriquecer el significado de las nociones de media. En este punto cabe señalar que el estudio epistemológico ha sido fundamental para generar reflexiones y dar una mirada a los acontecimientos particulares y necesidades humanas donde el concepto tuvo su origen y motivo para surgir. En consecuencia un aporte para la enseñanza. La segunda situación se ha adaptado al formato de comparación de conjunto de datos, pues de acuerdo a la literatura, este tipo de situaciones, propician el estudio de la variación, idea fundamental en estadística. Por último el tercer problema corresponde a la clase implementada, el cual propicia la interpretación de la dispersión de datos en una situación contextualizada, con valores atípicos.

Las situaciones didácticas están pensadas con el espíritu de dejar a los estudiantes que propongan soluciones, promover la discusión y prever los errores y dificultades que se han presentado en este estudio. Se pretende así permitir al estudiante dotar de sentido a los objetos estadísticos e involucrarlos en su propio aprendizaje desarrollando un espíritu crítico e iniciativa personal.

## REFERENCIAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. 1° Edición. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Acevedo, L. y Vanegas, A. (2014). *A propósito de la mediana: una recontextualización en la enseñanza a partir de una interpretación estadística*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquía, Antioquía.
- Aguilar, Y. (2006). *El concepto de presión desde la perspectiva euleriana*. Medellín : Universidad de Antioquía.
- Bakker, A. (2001). De mediaan in het middelpunt. *Nieuwe Wiskrant*. 21(1), 28-31.
- Bakker, A. (2003). The early history of average values and implications for education. *Journal of Statistics Education*. 11,1-16.
- Bakker, A. & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp 147- 168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Ed.). (2011). *Estadística con Proyectos*. Granada, España: ReproDigital. Facultad de Ciencias.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, M. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*,83,7-18.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada, España: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (Ed.). (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Dordrecht, Netherlands: Springer.
- Ben-Zvi, D. & Aridor, K. (2012). *Children's wonder how to wander between data and context*. Actas del 12 Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-12). Seúl, Corea del Sur: ICMI.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Student's understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Presidencia), *Proceeding of the 19th PME Conference*. 3, 144-151. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Campbell, S. K. (1974). *Flaws and fallacies in statistical thinking*. New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.
- Canavos, G. C.(1988) *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México: Ed.Mc Graw-Hill. p. 12-13.
- Chan, C. (2009). *Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- Cobb, G. & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *American Mathematics Monthly*, 104(9), 801-823.
- Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.



- Eisenhart, C. (1961). Boscovich and the Combination of Observations. En M. Kendall y R.L. Plackett (1977). *Studies in the History of Statistics and Probability*. Volume II. London: Charles Griffin y Company Limited.
- Eisenhart, C. (1974). The development of the concept of the best mean of a set of measurements from antiquity to the present day. *1971 American Statistical Association Presidential Address*, unpublished manuscript.
- Estepa, A. y Del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números*, 83,43-63.
- Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 18(1), 1-22. Recuperado de <http://redie.uabc.mx/redie/article/view/635>
- Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D. A. (1989) Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children. Artículo presentado en el *Encuentro de la Sociedad para la Investigación en el desarrollo del Niño (Society for Research in Child Development)*. Kansas City.
- Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D. A. (1990). Statistical concepts and statistical reasoning in school children: Convergence or divergence? Artículo presentado en el *Encuentro de la Asociación de Investigación Educativa Americana (American Educational Research Association)*. Boston.
- Galton, F. (1899). The median estimate. p.638-640
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. USA: Springer.
- Lupiáñez, J. y Rico, L. (2008). Análisis Didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *Revista PNA*, 3(1), 35-48.
- Makar, K. & Confrey, J. (2005). Variation-talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 27-54. Recuperado de <http://www.stat.auckland.ac.nz/serj>.
- Martín-Guzmán, M. P. y Martín Pliego, F. J. (1985). *Curso básico de Estadística Económica*. Madrid, España: Editorial AC.
- Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante matemática 7° básico*. Santiago de Chile: SM.
- MINEDUC (2012). *Bases Curriculares Matemática*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.
- Mokros, J. & Russell, S.J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.
- Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.
- Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 14-25). Mathematical Association of America.
- Plackett, R. (1970). Studies in the History of Probability and Statistics. VII The Principle of the Arithmetic Mean. *Biometrika*. 45, 130-135.
- Reading, C. & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and*

- thinking*, (pp 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Reading, C., & Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 187-194). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN*. 33, 11-27.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age y NCTM.
- Sánchez, E. y Orta J. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números*. 83, 65-77.
- Watson, J. M. and Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 145–168.
- Watson, J., and Moritz, J. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*, 11-5.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

## ANEXO



### Guía N°1 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

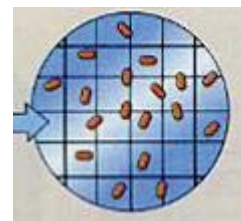
**Instrucciones:** Para lograr la finalidad de esta guía, se requiere que respondas las preguntas dando a conocer por medio de argumentaciones tu razonamiento, en tu explicación puedes utilizar dibujos, gráficos, números, etc., lo importante es que muestres como piensas. La primera parte del trabajo es individual y la segunda grupal. En esta segunda parte, es de vital importancia que converses con tus compañeros, para entregar una respuesta con fundamento.

### SITUACIÓN: LAS AVES RECORREN GRANDES DISTANCIAS



La profesora de Margarita le dejó de tarea, que estimara el total de aves que se presentan en la imagen, pero de ninguna manera que los cuente de uno en uno.

Ella recuerda que una vez su hermana en un trabajo de laboratorio de microbiología, tuvo que realizar un recuento de bacterias en el análisis de agua, para ello utilizó una cámara denominada hemocitómetro (ver figura), que consiste en una placa cuadrículada dividida en 25 cuadradas, de esta forma estimó el total, multiplicando el número de cuadrículas por un representante de las cuadrículas. Margarita piensa: ¿podría utilizar el mismo método!! , pero su dilema es que no sabe cómo elegir ese representante y qué cualidades debe cumplir, ¿le podrías ayudar a resolver su problema? Argumenta tu respuesta.



Elegido el representante, estima el total de aves de la imagen.

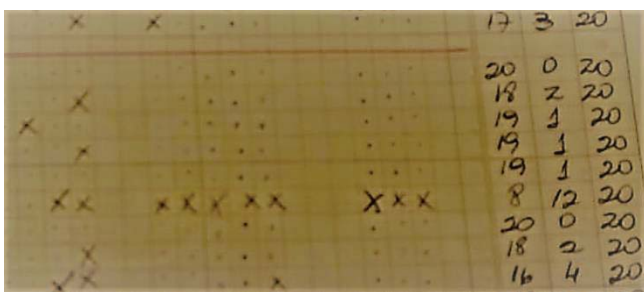
A continuación, en grupo de cinco estudiantes, anoten en una tabla el nombre de cada integrante del grupo y la estimación que realizó del total de aves de la imagen. Comparen los resultados y comenten la estrategia utilizada para escoger su representante. Soliciten a otro grupo que le den a conocer sus datos. Con los 10 datos recolectados, determinen un representante del grupo que les permita estimar el total de aves. ¿Cómo lo eligieron? ¿En qué se basaron para afirmar que es el mejor representante?



**Instrucciones:** Para lograr la finalidad de esta guía, se requiere que respondas las preguntas dando a conocer por medio de argumentaciones tu razonamiento, en tu explicación puedes utilizar dibujos, gráficos, números, etc., lo importante es que muestres como piensas.

La primera parte del trabajo es individual y la segunda grupal. En esta segunda parte, es de vital importancia que converses con tus compañeros, para entregar una respuesta con fundamento.

**SITUACIÓN: ASISTENCIA A CLASES**



Los Directivos Docentes del Liceo Padre Hurtado de Quintero han notado una baja en la asistencia a clases. Necesitan saber con certeza qué curso(s) manifiestan la problemática, para despejar dudas recurren a las páginas de subvenciones de los respectivos libros

de clases. Con la información a la vista desean determinar un valor que describa la asistencia general de cada grupo curso.

Comienzan el estudio con dos cursos, 8°Básico y 1°Medio, para ello utilizan una tabla que presenta el número de lista de cada alumno del curso, con su asistencia entre los meses de Marzo a Junio y calculan la media aritmética y la mediana.

8° Básico Media= 70 Mediana = 71

1°Medio Media= 70 Mediana = 76

Al observar los resultados, quedan intrigados pues los dos cursos presentan la misma media aritmética, a pesar de que saben que uno de ellos presenta una asistencia poco predecible.

¿Puedes ayudar a dilucidar cuál de los dos valores, Media o Mediana, representan de mejor forma la asistencia diaria de cada curso? Argumenta tu respuesta.

N° de lista	8° Básico	1°Medio
1	60	61
2	70	56
3	70	73
4	71	76
5	74	74
6	74	6
7	70	77
8	76	79
9	60	76
10	74	59
11	76	80
12	74	77
13	60	79
14	74	76
15	76	68
16	66	78
17	71	75
18	74	72
19	60	78
20	70	80

**“Medidas de Tendencia Central”**



**Instrucciones:**

Lee con atención el siguiente texto, y luego responde la pregunta que el profesor planteará. Recuerda que en este trabajo es importante que converses con tus compañeros y como grupo argumenten con base a tu idea. Debes registrar tu respuesta en la cartulina.



Como debes haber observado en algunos lugares de nuestro Valle del Aconcagua, se venden mallas de frutas o verduras, como lo muestra la imagen.

***La situación de Diego***

Diego estudia en 8° básico y vivió la siguiente situación:

Su papá es feriante y compra mallas de naranjas a un agricultor local, para luego venderlas en un cruce de calles. En la etiqueta de las mallas se presenta una cierta cantidad de kilos. Hace unos días, un cliente vino a reclamar porque había pesado una malla en la balanza de su casa, y pesaba solo 2,7 kg., la cual no coincidía con el registro de la etiqueta. El papá de Diego trató de defenderse como pudo, pero no fue capaz de asegurarle que las mallas pesaran lo que se indicaba. Poco después, fue a ver al agricultor que le vendía las mallas. El agricultor se mostró muy extrañado. Decidieron pesar 10 mallas distintas, para ver si había variaciones. Los resultados fueron los siguientes:

2,8    2,9    3,1    3,3    2,7    3,4    3,4    6,0    2,7    2,7

El feriante y el agricultor revisaron los datos, pero no estuvieron seguros de que hubiera que modificar la etiqueta. Sabiendo que Diego está estudiando Estadísticas, su papá le planteó el problema a él. Pensando en buscar un valor representativo, Diego calculó las medidas de tendencia central:

Media = 3,3 kg      ;    Moda = 2,7 kg ;      Mediana = 3,0 kg

¿Puedes ayudar a Diego a elegir la Medida de Tendencia Central más apropiada, para representar las 10 mallas de naranjas, para anotar su valor en la etiqueta? Justifica.



Tabla 8 *Respuestas de los estudiantes en clase implementada*

Aspecto Relevante	Ocurrencia
Media aritmética mejor representante con datos atípicos	6/25
Media aritmética mejor representante sin datos atípicos	2/25
Moda mejor representante	4/25
Incapacidad para argumentar	1/25
Mediana mejor representante	4/25

Elección dada por los diferentes grupos en la clase implementada, aplicada por los cuatro docentes en el estudio de clases.