Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Variable Aleatoria: una secuencia didáctica, bajo la mirada de la Teoría de la Situaciones Didácticas de Guy Brousseau

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA

De: Manuel Alejandro Cuevas León
Profesoras Guía:
Elisabeth Ramos Rodríguez
Patricia Vásquez Saldías
Romina Menares Espinoza

2017

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Esta investigación pretende establecer una secuencia didáctica sobre el objeto variable aleatoria y función probabilidad en nivel secundario, haciendo uso de la Ingeniería Didáctica. El estudio se enfoca en el análisis preliminar y epistemológico, y se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (TSD). En este estudio se aplica una clase para estudiantes de entre 15 a 17 años de edad en torno al objeto planteado variable aleatoria y función probabilidad.

Además este trabajo incluye un estudio, cuyo enfoque es cualitativo bajo el paradigma interpretativo. Para la recopilación de datos, se utilizó un cuestionario con preguntas abiertas, el cual se llevó a cabo en mayo del 2017 en un colegio subvencionado de la región de Valparaíso. Sus objetivos eran:

1. Realizar un estudio de clase bajo la TSD cuyo entorno es la variable aleatoria y la función probabilidad.
2. Proponer una secuencia didáctica.

A partir de la aplicación del instrumento creado y la confrontación de los análisis a priori y posteriori, se diseña una secuencia didáctica bajo el marco epistemológico de Guy Brousseau.

INTRODUCCIÓN

El concepto de variable aleatoria es una de las nociones base de la teoría de probabilidad y de la estadística inferencial (Batanero, Arteaga, y Contreras, 2011. Desde hace unos años el Ministerio de Educación de Chile, ha dado un realce a estas materias dentro de los Planes y Programas incorporandolas desde el nivel 1 al 12, provocando nuevos desafios a los profesores (Estrella y Olfos, 2013). El enfoque de la matemática, nos permite un manejo de diversos contextos en relación a los números reales, sumado a la perspectiva de una modelación, esto nos acota el contexto para trabajar individualmente con los elementos que involucre algún fenómeno aleatorio (Ruiz, 2006).

Además, el aumento de la tecnología, las innovaciones en ciencias y medios de comunicación en las sociedades actuales, han reflejado de manera imperativa la necesidad de incorporar en la educación formal una mayor actualización de los contenidos en el área de la probabilidad y estadística (Ruiz, 2006). En este ámbito tantos los gobiernos como las empresas requieren de personas con conocimientos de estadística básica, que puedan tomar mejores decisiones en el orden de lo económico, social y político (Batanero, 2002).

La educación en probabilidad y estadística es importante en la sociedad, ya que entrega conocimientos que permite comprender situaciones de la vida cotidiana, analizarlas y tomar decisiones. En este contexto Heitele (1975) propone que existen diez conceptos fundamentales, entre los que se encuentra el de variable aleatoria. Concepto relevante para entender situaciones de la vida real y poder evaluar críticamente la aplicación de modelos probabilísticos de fenómenos reales (Batanero, Chernoff, Engel, Lee, Sánchez, 2016).

En una primera instancia para los estudiantes, los conceptos Variable Aleatoria (VA) y Función Probabilidad (FP) aparentan ser sencillos, con base en nuestra experiencia, pero al momento de incorporar una breve formalidad o una manipulación en otro contexto se pierde de inmediato. En este mismo sentido numerosos estudiantes no pueden identificar la VA que se encuentra involucrada en alguna situación, con esto se le ocasionan fuertes obstáculos al momento de su desarrollo (Ruiz 2006). En otro caso la comprensión parcial o total de los conceptos vinculados a su definición provocan que no se establezcan adecuadamente las relaciones entre la VA y la FP. De esta manera, nuestra investigación apunta a proponer desde la TSD una secuencia didáctica, que permita promover el aprendizaje del objeto VA y FP en alumnos de 15 a 17 años, con esto se pretende dar respuesta a ¿cómo aporta la TSD a la construcción de secuencia de aprendizaje a los objetos Variable Aleatoria y Función Probabilidad?

Al final de este monográfico se concluyen algunos resultados de la primera clase aplicada de la secuencia diseñada.

PROBLEMÁTICA

Según, Ruiz y Albert (2013) un posible obstáculo en el surgimiento de la variable aleatoria por parte de los alumnos de secundaria, es la dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad, ya que tradicionalmente ha sido más tratada como variable (magnitud aleatoria) (Ibid p.6). Por otra parte Oseguera (1994) nos menciona que hay una falta de vinculación de la variable aleatoria con la intuición por parte de los alumnos.

Se intentará asociar el objeto en la unidad de Datos y Azar: la "Variable Aleatoria (VA)", donde en primeras instancias los ejercicios aparentan ser muy sencillos perdiendo su importancia. Dentro del desarrollo de esta unidad numerosos estudiantes no logran asimilar la variable aleatoria involucrada en alguna situación problemática, lo que les ocasiona fuertes dificultades al abordar su resolución (Ruiz, 2006). Por otra parte, tienen una comprensión incompleta de algunos conceptos vinculados con su definición, o bien no establecen adecuadamente las relaciones entre los mismos. Por lo que todo esto repercutirá negativamente en el estudio de otros conceptos que el estudiante deberá abordar posteriormente (Ruiz, 2006).

Según Miller (1998), quien realiza una breve crítica sobre el tratamiento que recibe la variable aleatoria en algunos textos, al introducir la estadística no desarrolla este concepto y cuando lo realizan, frecuentemente lo hacen de forma errónea ya que la vinculan al valor de los datos, con lo que arrastrar problemas en temas posteriores.

Por otra parte, Vallecillos (1999) realza la confusión entre estadístico y parámetro indicando que 'aunque los alumnos diferencian entre la media de la muestra y la de la población, no perciben la media muestral como una variable aleatoria' (p. 245). Así mismo, hace mención en su escrito que la comprensión de variable aleatoria y la dependencia de esta a un parámetro puede ser la causal de la mala interpretación.

Una investigación bibliográfica realizada por Nardecchia y Hevia (2003) pone de manifiesto los posibles errores que el aprendizaje de la variable aleatoria puede tener. Unos de estos resultados nos dicen que como el concepto variable aleatoria está ligado fuertemente a la aleatoriedad, evidenciando las principales dificultades con que un estudiante podría enfrentarse en la construcción de la noción de variable aleatoria.

Tras la revisión de la literatura se evidencia que existen pocas investigaciones sobre el concepto de variable aleatoria y función probabilidad, aunque se reconoce que hay una mayor cantidad de estudios sobre temas que están directamente relacionados, como por ejemplo la ley de los grandes números, teorema central del límite o en algunos casos con temas que no son propiamente estadísticos, como noción función o variable algebraica (Ruiz, 2006).

Lo expuesto anteriormente permite tener una idea sobre cómo el concepto de variable aleatoria y función probabilidad se encuentran actualmente en desarrollo desde distintas investigaciones, aportan resultados sobre su didáctica, es por esto que en el próximo apartado mostraremos algunos antecedentes bibliográficos.

A partir de la problemática nos planteamos dos objetivos generales:

1. Realizar un estudio de clase bajo la TSD cuyo entorno es la variable aleatoria y la función probabilidad.
2. Proponer una secuencia didáctica.

Ubicación del objeto en el Curriculum Escolar

El objeto que trata este estudio, lo podemos ubicar en los programas de estudio, en segundo año medio bajo la unidad 4 "Datos y Azar" (MINEDUC, 2011), que tiene como propósito incorporar nuestro objeto VA como una herramienta fundamental en la identificación de resultados de la probabilidad y la estadística.

Pero más específicamente VA y FP están considerados en el Aprendizaje Esperado (AE) 04, es decir:

"Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios". (MINEDUC, 2011, p. 80).

Además, nos sugiere algunos indicadores evaluativos para este objeto matemático como, por ejemplo:

- "Reconocen una variable aleatoria como una clase especial de función.
- Asignan números específicos a resultados de experimentos aleatorios". (MINEDUC, 2011, p. 80).

Esta secuencia didáctica, como se mencionó anteriormente, se compone de tres clases que tienen los siguientes por objetivos:

Clase 1: Identificar y representar relaciones entre conjuntos.

Clase 2: Definir y aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio.

Clase 3: Aplicar una variable aleatoria asociada a una función de probabilidad.

Las tres clases en su conjunto cubren los indicadores sugeridos por el Ministerio de Educación para este AE sobre el objeto Variable Aleatoria y Función Probabilidad.

OBJETO MATEMÁTICO

A continuación se presenta el concepto probabilístico en estudio, desde el ámbito erudito y escolar, posteriormente se realiza un estudio del currículo entorno a la variable aleatoria y función probabilidad, además de un análisis de textos escolares, para finalizar con una reflexión respecto a estas indagaciones.

Definición erudita

Previamente es necesario definir espacio de probabilidad.

"Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad P, es una función valorada en los reales, cuyo dominio es $\mathcal{A}$.

$$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$
$$A \to P(A)$$

Tal que cumplen los siguientes axiomas:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$.

ii) $P(\Omega) = 1$.

iii) Sea $\{A_i / i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}\}$ *mutuamente excluyente, entonces* $P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$*"* (Suárez, 2002, p. 18)

En las condiciones anteriores se dice que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad.

Ahora, "*sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, una función tal que:*

$$\mathrm{X}: \Omega \to \mathrm{R}$$
$$\omega \to \mathrm{X}(\omega) = \mathrm{k}$$

Para todo subconjunto de los reales $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}, \{X \in \mathcal{B}\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$, *la función de valores reales* X *recibe el nombre de variable aleatoria sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*"* (Suárez, 2002, p.45).

El recorrido o rango de la variable aleatoria X, *"es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar* X*.*

$$\mathcal{R}_X = \{k \in \mathbb{R}: \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = k\}$$ *"*(Vladimirovna, 2005, p. 158)

Es decir, son los valores que tienen asociado algún elemento del espacio muestral. Luego, la función *X* es una variable aleatoria discreta si el rango de X es contable (finito o infinito numerable)

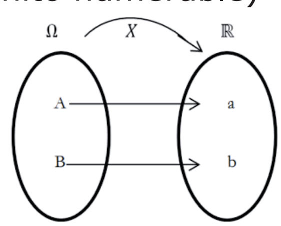


Figura 1: Representación gráfica de una variable aleatoria

Definición escolar

Dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama variable aleatoria a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asignamos un único número real.

$$X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Estos valores se relacionan con su probabilidad mediante la función de probabilidad de la variable aleatoria.

$$f(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

(Muñoz, Rupin, y Jiménez, 2013, p. 281)

Distancia entre definición erudita y escolar

Se observa una amplia diferenciación entre la definición erudita y escolar, ya que la primera comienza definiendo un espacio de probabilidad y los respectivos axiomas, antes de la definición del concepto probabilístico variable aleatoria. Por otro lado la definición escolar se centra en la definición de variable aleatoria a través de un lenguaje natural el cual se representa posteriormente en un lenguaje funcional, además relaciona la variable aleatoria con la función de probabilidad.

La definición erudita se centra en el concepto probabilístico a través de un lenguaje natural, lenguaje funcional y lenguaje conjuntista del concepto previo "Espacio de probabilidad"; y posteriormente define Variable Aleatoria articulando la definición de espacio de probabilidad en lenguaje funcional, y por lo tanto al tratarse de una función menciona el recorrido o rango de dicha función, definiéndolo en lenguaje conjuntista y posteriormente lo ilustra en una representación gráfica, específicamente representa una variable aleatoria discreta.

La definición escolar está enfocada en la aplicación del concepto probabilístico asociado a experimentos y sus probabilidades, es por ello que se puede inferir que las definiciones escolares no pretenden profundizar en el concepto de probabilidad, sino más bien aplicarla como una herramienta para modelar y solucionar problemas de la vida cotidiana, y así visualizar el comportamiento de los resultados de los experimentos, para luego relacionarlos con la función de probabilidad de la variable aleatoria.

Si bien es cierto la definición escolar ilustra el concepto probabilístico sólo en lenguaje natural y funcional, en la ejercitación del concepto probabilístico representan la variable aleatoria en lenguaje tabular y gráficamente.

Análisis Curricular

En el contexto del currículo nacional, el concepto probabilístico en estudio se introduce en el nivel segundo medio, allí se presenta el concepto de variable aleatoria, y se realiza la distinción entre las de tipo, discreta y continua. Se pretende que los estudiantes apliquen estos conocimientos en la resolución de problemas, pero para lograr construir este objeto, se requieren de algunos contenidos previos como experimento aleatorio, espacio muestral asociado y probabilidad teórico, abordados en el nivel séptimo básico, con la finalidad que el estudiante determine la probabilidad de un evento equiprobable asociado a un experimento aleatorio, mediante la regla de Laplace. Además en octavo básico, se aporta otro contenido relevante para la construcción de la variable aleatoria, la noción de función, en el contexto de introducir el estudio de la función lineal y afín, aunque es en el nivel primero medio, cuando existe un mayor aporte, pues se presenta el concepto de función considerando los conceptos de dominio, recorrido y codominio, y como se definió en el apartado anterior, el concepto en estudio, es una función con ciertas características, su dominio es el espacio muestral de un experimento aleatorio y su recorrido un sub-conjunto de los números reales.

Luego que en segundo medio es comprendido el concepto de variable aleatoria, y es aplicado en otros niveles de educación media, en particular en tercero medio se utilizan las de tipo discreta, para abordar el concepto de función de probabilidad de una v. a. discreta (función de cuantía), pues en general el dominio de una función de probabilidad corresponde al recorrido de la variable aleatoria. También el concepto en cuestión, se emplea para introducir el estudio de la función de distribución de una VA discreta, ya que ella es definida a partir de una v. a discreta y la función de probabilidad de esta variable. Además en tercero medio el estudiante debe lograr calcular la esperanza, desviación estándar y varianza de una v. a. discreta y aplicar ésta para comprender el modelo de distribución binomial, un modelo de probabilidad para VA discretas.

Luego, en cuarto medio, se considera la variable aleatoria, pero el de tipo continua. Inicialmente es definida la función de probabilidad de una VA. continua (función de densidad), para la cual es necesario el concepto de VA continua y el de función, cabe destacar que este tipo de función es trabajada a través de la interpretación geométrica de la integral, es decir, como el área bajo la curva de la función. Para concluir el estudio de la VA continua, ésta es utilizada para comprender el modelo de distribución normal, un modelo de probabilidad para VA continuas. Es importante mencionar que, para este nivel, en el currículo, no se hace mención al cálculo de esperanza y varianza para una VA continua.

La información presentada es resumida en el esquema expuesto a continuación en la figura 2

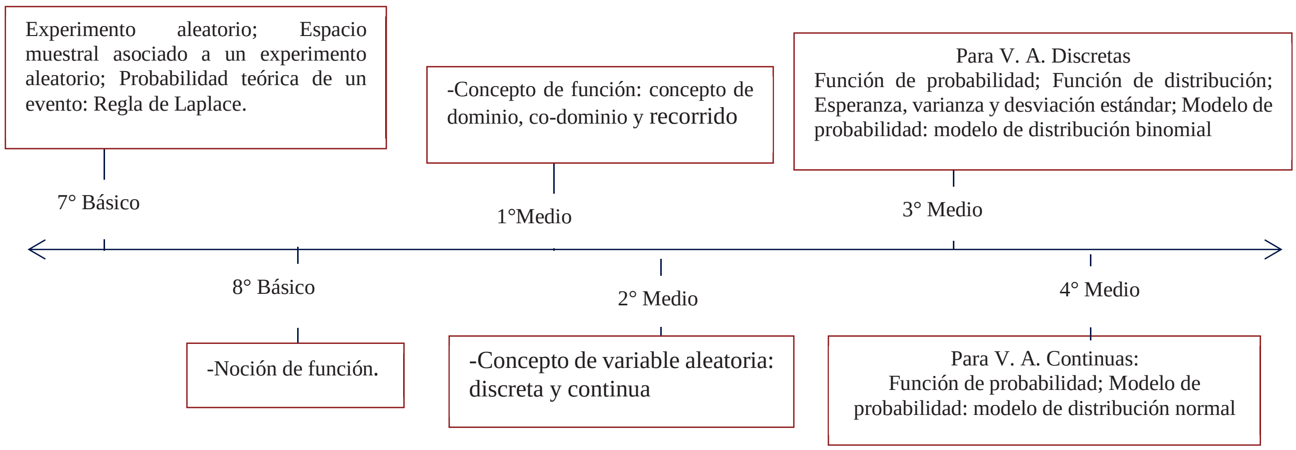


Figura 2: Esquema sobre análisis curricular de los objetos VA y FP

Análisis de textos escolares

Se indagaron tres textos de estudios de circulación nacional, 1 distribuido por el Ministerio de Educación, 2 distribuidos por una editorial particular donde se aborda dicha temática, como se muestra en la siguiente tabla 1.

Tabla 1: Textos de análisis, autores y editoriales

N °	**Nombre**	**Autores**	**Editorial y año**
1	Matemática 2º medio	Gerardo Muñoz, Pedro Rupin y Lorna Jiménez.	Ediciones SM, 2013.
2	Matemática 2º Medio Proyecto Puentes del Saber	Gabriel Muñoz Z, Nidia Sáez M., Miguel Díaz V., María Gabriela López U., Natacha Astromujoff.	Santillana, 2014.
3	Matemática 2º Proyecto Bicentenario	María del Pilar Blanco C., Jorge Bozt O., Felipe Calderón C., María José Jiménez R., María José González C., María Gabriela López U., Pola Romero H., Miguel Díaz V.	Santillana, 2009.

Los libros 1 y 3, exponen el concepto probabilístico a través de un experimento introductorio, el cual lo desarrollan paso a paso, dándole mucho énfasis a distintos tipos de registros involucrados a saber: “lenguaje natural, pictográfico y tabular” como muestra la figura 3. Luego durante el desarrollo de este, introduce el concepto de VA y FP. El libro 3 solo muestra el concepto de variable aleatoria y sus tipos en un cuadro de análisis. Para finalizar el libro 1 da un cuadro de resumen donde formalizan el saber erudito al saber escolar, como muestra la figura 4.

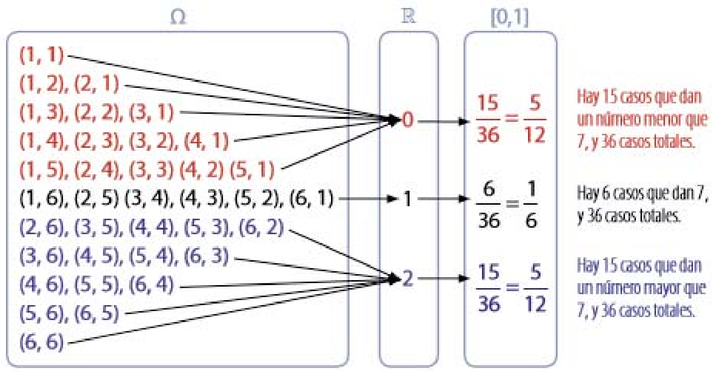


Figura 3: Cambio de registro en la VA y FP.
Fuente: Muñoz, Rupin y Jiménez, (2013, p.281)

En resumen

Dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama **variable aleatoria (v.a.)** a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asigna un único número real.

$$x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Estos valores se relacionan con su probabilidad mediante la **función de probabilidad** de la variable aleatoria.

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

Figura 4: Presentación de la Variable Aleatoria
Fuente: Muñoz, Rupin y Jiménez, (2013, p.281)

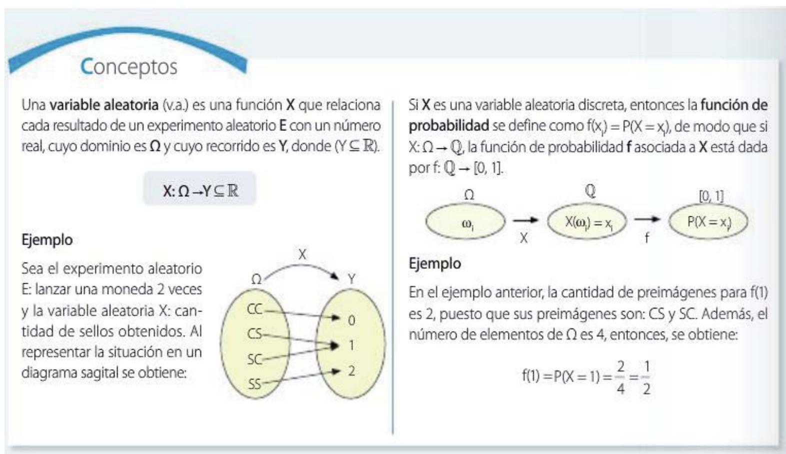
Por otra parte, los textos 1 y 3, luego de introducir el concepto probabilístico, ilustran una serie de ejercicios que van acorde con lo tratado anteriormente y estos poseen mucha similitud con el ejemplo mostrado.

Por último, en el texto 2 nos encontramos con que la introducción de los objetos estadísticos, se hace de manera deductiva, donde solo se aprecia un tipo registro el tabular - al contrario de los otros dos textos -con anterioridad los cuales representaban dos registros distintos, esto queda más claro en la figura 5. Con respecto al saber erudito, el texto escolar ilustra un saber muy limitado y carece de una profundización en los otros lenguajes que expone la definición. Por otro lado, la lista de ejercicios propuestos respecto a la variable aleatoria es escasa.

Para finalizar el libro 3, nos muestra un cuadro de conceptos en el cual se formaliza el saber escolar mediante definiciones y ejemplos como muestra la figura 6.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)					
3	(3, 1)					
4	(4, 1)					
5	(5, 1)					
6	(6, 1)					

Figura 5: Tablas de ejercicios
Fuente: Muñoz, Sáez, Díaz, López., Astromujoff, (2014, p.272)


Conceptos

Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función **X** que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio **E** con un número real, cuyo dominio es **Ω** y cuyo recorrido es **Y**, donde ($Y \subseteq \mathbb{R}$).

$X: \Omega \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$

Ejemplo

Sea el experimento aleatorio E: lanzar una moneda 2 veces y la variable aleatoria X: cantidad de sellos obtenidos. Al representar la situación en un diagrama sagital se obtiene:

Si **X** es una variable aleatoria discreta, entonces la **función de probabilidad** se define como $f(x_i) = P(X = x_i)$, de modo que si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$, la función de probabilidad **f** asociada a **X** está dada por $f: \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$.

Ejemplo

En el ejemplo anterior, la cantidad de preimágenes para f(1) es 2, puesto que sus preimágenes son: CS y SC. Además, el número de elementos de Ω es 4, entonces, se obtiene:

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Figura 6: Tabla de concepto
Fuente: Muñoz, Sáez, Díaz, López., Astromujoff, 2014, p272

Luego de realizado este análisis, nos pudimos acercar al objeto probabilístico variable aleatoria y función probabilidad, comprender el concepto en profundidad desde el área de probabilidad y estadística, y los contenidos relacionados. Así como también la distancia que se genera entre el saber sabio y el saber escolar, como resultado de la transposición didáctica.

Se cree que, en la definición escolar, la omisión de ciertos conceptos, como espacio de probabilidad, y rango se debe a que los textos escolares ilustran el concepto de probabilidad probabilístico como una herramienta modeladora para la resolución de problemas, dejando de lado la definición en lenguaje funcional, conjuntista y gráfico, además analiza el objeto matemático, relacionándolo con la asignación de probabilidad articulándolo con el concepto matemático función de probabilidad. Específicamente los textos escolares pretenden que los estudiantes logren determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, discriminar si son discretas o continuas y representar gráficamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

Aspectos epistemológicos

Un primer acercamiento para la comprensión de la didáctica de la variable aleatoria es a través de su origen histórico-epistemológico. La variable aleatoria cruza casi toda la historia; la vemos como experiencia cognitiva generando un primer acercamiento desde una *comprensión* de la experiencia de la variable aleatoria. Esto lo vemos en forma empírica en los juegos de azar principalmente en los juegos de dados, dicho acontecimiento se evidencia a través de un poema llamado *De Vetula* cuyo autor Richard Fournival se le atribuye dicho escrito cuyo entretenimiento era la destreza de los dados, advirtiendo la noción de probabilidad a través de la relación entre las frecuencias observabas y sus posibilidades Bellhouse (2000). Nuestra intención es reflexionar la relevancia y contribución epistemológica de la variable aleatoria, posicionándolo de manera formal como un objeto matemático.

Noción de probabilidad: este concepto se ve reflejado por primera vez en el poema: *"De Vetula"*, escrito en el siglo XIII; inserto en este manuscrito, se relata la vida amorosa de Ovidio, poeta romano cuya intención fue dar algunos consejos morales incluyendo los relatos de algunos pasatiempos y entretenimiento donde aparece por primera vez el concepto de probabilidad. Fournival busca explicar aquí los resultados obtenidos tras haber observado varias veces repeticiones del experimento aleatorio. Para ello se analizó teóricamente las posibles respuestas de un lanzamiento. De este modo en su análisis, explica las posibles configuraciones dando un claro ejemplo de lo que en la actualidad llamaríamos un espacio muestral. En 1620 se entrega una mejor definición, Galileo profundiza la noción de probabilidad, es decir la constante de las diversas combinaciones de los dados al ser lanzados llegando la misma solución que surge en el poema De Vetula, sin embargo agrega una demostración combinatoria completa de la solución, con lo anterior se tomaba en cuenta el orden de los dados y una definición apropiada del espacio muestral ;cada proporción u ordenamiento de los sucesos posibles tomando en cuenta el según el orden de colocación de los dados. Por lo tanto, podemos aseverar que el concepto de variable aleatoria está implícita en el origen la probabilidad.

Las observaciones empíricas se desarrollaron con mayor despliegue de la mano de algunos matemáticos como Cardano, Pascal, Fermat y Huygens, diversificando las posibles combinaciones desde el establecimiento de normas en el juego de azar para lograr un grado de equidad acudiendo de manera intuitiva el uso de la distribución de las variables aleatorias vinculadas y su valor esperado. En el libro *Liber de Ludo Aleae* de Cardano se plantea la idea de asignar una probabilidad p entre cero y uno, tomando en cuenta el número total de resultados y el número de casos favorables. Sin embargo lo más notable fue proponer explícitamente el uso del «peso relativo de los sucesos favorables» en los juegos de azar para hacer una apuesta equitativa recomendando el cálculo combinatorio a los jugadores; considerando el circuito completo, es decir; el número de lanzamientos que representan como puede ocurrir el resultado favorable en muchas formas y comparar ese número con el resto del circuito, y de acuerdo a esa proporción se deberán hacer las mutuas apuestas, así, se competirá en igualdad de condiciones.

Sin duda el tema es vasto, y para nuestra reflexión nos hemos enfocado en Cardano para un mayor acercamiento hacia la formalización de la variable aleatoria como objeto matemático. Los diversos enfoques que proveen los matemáticos Pascal y Fermant enriquece y amplían como propuesta de investigación resolviendo varios problemas donde hacen uso de la combinatoria y del análisis de las posibilidades que cada jugador tiene de ganar entre ellos, el problema de la apuesta interrumpida.

Otro autor Christian Huygens, matemático del siglo XVII, retoma la correspondencia de Pascal y Fermat y resuelve varios de los problemas planteados, entre ellos el problema de la apuesta interrumpida, en los diversos análisis, reafirmando el concepto de variable aleatoria donde un determinado contexto toman valores numéricos.

Contextualización como objeto matemático

Son numerosos los problemas con la variable aleatoria, desde hacer una predicción, evaluar una hipótesis, determinar factores que influyan en una cierta magnitud o tomar una buena decisión, hasta describir una cierta característica en una población (Ruiz, 2006).

Por otro lado, la variable aleatoria es una función que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio (Walpole, Myers y Myers, 1999).

La variable aleatoria también es reconocida como función matemática, el cual posee tres componentes: El espacio muestral asociado al experimento (dominio); la regla de correspondencia, que definirá la forma en que se vinculan el espacio muestral y el número real (perteneciente al conjunto imagen); y el conjunto de valores numéricos(imagen), que toma la variable aleatoria. Para cada evento del espacio muestral (dominio), el valor numérico será asignado mediante la regla de correspondencia que define a la variable aleatoria (Ruiz, 2006).

Una definición formal de Variable Aleatoria, para establecer antecedente y nomenclatura, podría ser la siguiente:

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad P, es una función valorada en los reales, cuyo dominio es $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} &\rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

Tal que cumplen los siguientes axiomas: $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$; $\mathrm{P}(\Omega) = 1$; Sea $\{\mathrm{A_i} / \mathrm{i} \in \mathbb{N}, \mathrm{A_i} \in \mathcal{A}\}$ mutuamente excluyente, entonces $\mathrm{P}(\bigcup_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}} \mathrm{A_i}) = \sum_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}} \mathrm{P}(\mathrm{A_i})$ (Suárez, 2002, p. 18)

En las condiciones anteriores se dice que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ es un espacio de probabilidad. Ahora "*sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad*, *una función tal que*

$$\begin{aligned} \mathrm{X}: \ \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow \mathrm{X}(\omega) = \mathrm{k} \end{aligned}$$

Para todo subconjunto de los reales $\mathcal{B}$, $\{X \in \mathcal{B}\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{A}$, *la función de valores reales* X *recibe el nombre de variable aleatoria sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$" (Suárez, 2002, p.45).

El recorrido o rango de la variable aleatoria X *corresponde a* $\mathcal{R}_X = \{k \in \mathbb{R}: \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = k\}$" (Vladimirovna, 2005, p. 158).

Como se puede observar en lo anterior, es evidente que una vez definida la variable aleatoria, la función de distribución también queda definida. En realidad, el objetivo final del procedimiento vinculado a la variable aleatoria es la definición de esta función porque ella es el modelo útil para realizar el análisis de la situación problema (Ruiz, 2006).

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se enmarca en la TSD, planteada por Brousseau (2007), y se apoya en las metodologías de Ingeniería didáctica (Artigue, 1995), enfocada en el análisis preliminar con la intención de identificar elementos que proporcionen sustento para el diseño de una situación didáctica.

La TSD se basa en el estudio del sistema didáctico, quien se sustenta en el triángulo epistemológico: docente-saber, matemático-alumno y sus relaciones (Brousseau, 1986). Los resultados aportados por estos dos componentes dan lugar al diseño de una secuencia didáctica que permitirá el estudio de la didáctica del concepto matemático en el aula a través de variables de observación relevantes también fundamentadas en el análisis preliminar.

En este apartado se expondrá el marco teórico que da sustento a la investigación para aborda y plantear la problemática expuesta en el apartado anterior.

Teoría de situaciones didácticas

Brousseau (2007) deja ver por primera vez la necesidad de utilizar un modelo propio de la actividad matemática en la investigación en didáctica de la matemática a partir de la problematización y cuestionamiento del conocimiento matemático enseñado. A ese modelo le llamó Teoría de Situaciones Didácticas, el que se sintetiza de acuerdo a situaciones o fases:

- La **situación acción**, es la fase donde el estudiante trabaja individualmente, con un problema, aplicando sus conocimientos previos y desarrollando un determinado saber. Es decir, el estudiante interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.
- La **situación de formulación,** consiste en el trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes. En esta fase se comparten experiencias para la construcción del conocimiento. Cabe mencionar que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas. En este sentido, Brousseau menciona la importancia de que cada integrante del grupo participe del proceso, con esto todos se verán forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.
- La **situación de validación**, corresponde a la interacción de forma individual o grupal de los estudiantes con el medio didáctico, somete a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto (Chavarría, 2006).

Por otra parte, a pesar de no constituir una situación a-didáctica, la **institucionalización del saber**, representa una actividad relevante en el cierre de una situación didáctica. Ya que este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarificando conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas.

Situaciones a-didácticas

Brousseau (2007) nos dice que la enseñanza moderna se basa en solicitar al maestro que provoque en el alumno las condiciones deseadas, partiendo con una elección acertada de las **'actividades'** que le plantea. Estas actividades deben hacerle al estudiante actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por el mismo. Una vez que el estudiante acepta la actividad como propio, el docente se niega a intervenir planteando los conocimientos que quiere ver aparecer. El estudiante debe ser capaz de construir el conocimiento ya una vez adquirido verdaderamente el conocimiento cuando el mismo sea capaz de ponerlo en acción. Tal situación es llamada a-didáctica (Ruiz 2006).

Situaciones didácticas

Cabe mencionar que uno de los aspectos importantes de la TSD es la situación didáctica. Peltier (1993) añade que para construir buenas situaciones didácticas se deben considerar los siguientes aspectos:

- La actividad propuesta como punto de partida debe presentar un verdadero problema para los alumnos, pero, a la vez, ser comprendido por ellos. Es decir, los estudiantes deben poder pensar y planear la respuesta del problema.
- Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores (para que pueda introducirse en el problema).
- Y debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar sus conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos conocimientos.
- Debe contener, en lo posible, su propia validación, es decir, el alumno debe poder por sí mismo – o confrontado con los otros alumnos – controlar su solución, decidir su validez de respuesta.
- El conocimiento previsto debe ser el más adaptado para resolver el problema.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Esta secuencia didáctica como se mencionó anteriormente se compone de tres clases cuyos objetivos se muestran en la siguiente tabla 2:

Tabla 2: Objetivos de la secuencia didáctica

Clases	Objetivo del Docente	Objetivo de la clase
Primera	Comprender el concepto de Variable Aleatoria y Función Probabilidad.	Introducir un nuevo concepto probabilístico.
Segunda	Aplicar la Variable Aleatoria en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.	Aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio.
Tercera	Definir la variable aleatoria mediante una función probabilidad.	Definir una variable aleatoria asociada a una función especial.

Las tres clases en su conjunto cubren los indicadores sugeridos por el Ministerio de Educación para este aprendizaje esperado[1] sobre el objeto matemático variable aleatoria y función probabilidad.

Cabe mencionar que las tres clases se elaboran utilizando el marco teórico de las Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (2007), donde solo se analizarán las fases de Acción y Formulación hechas por los sujetos de estudio.

A continuación, se mostrará la clase uno, dos y tres con sus respectivas tareas matemáticas, análisis a priori y plan de clases.

[1] "Comprender el concepto variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios" (Mineduc, 2001, p. 80).

CLASE UNO

"DÍA DEL ALUMNO"

El objetivo de la clase es **introducir un nuevo concepto probabilístico**. Para lograrlo, se construye un cuestionario con una pregunta abierta (ver figura 7), el cual será entregado a cada uno de los estudiantes, para luego trabajar en grupo y lograr una discusión entre ellos y así llegar a un consenso en forma cooperativa y posteriormente exponer las diferentes estrategias al grupo curso, finalmente el profesor realizará la institucionalización del objeto estadístico que se pretende incorporar.

Desafío 1

DÍA DEL ALUMNO

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor del taller de Cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de estudiantes	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de apoderados	**8**	**13**	**7**	**2**

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.
Dados los conjuntos A, B y C definidos por
A: el conjunto de 30 apoderados del taller,
B: el conjunto de cantidad de estudiantes.
C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación
Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

Figura 7: Desafío de la primera clase

Análisis a priori de la clase 1

Para un mayor comprensión del análisis a priori se exponen algunas definiciones que suelen ser confusas en el ámbito de la educación, Godino, Batanero y Font (2003) afirma que el error es "cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (p. 69), y por dificultad a aquello que indica en "mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio" (p.69).

A la luz del plan de clase diseñado para una de las tres clases que contempla la secuencia didáctica que lleva por objetivo introducir un nuevo concepto probabilístico se presenta a continuación el análisis a priori que incluye:

- la respuesta experta
- posibles estrategias de los estudiantes
- los errores y dificultades que se podrían producir en el desarrollo de la clase.
- matemática en juego

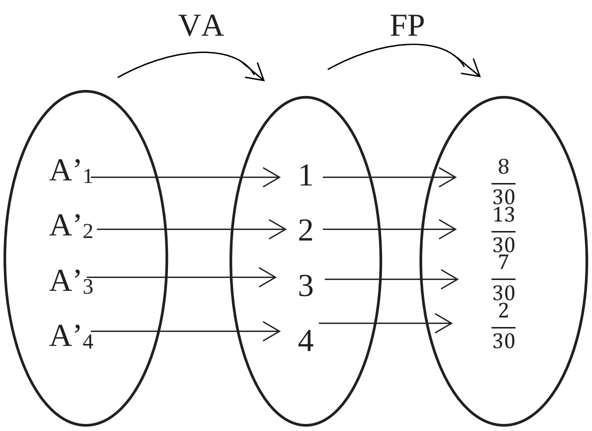
Las que se detallan a continuación:

Respuesta experta

Relaciones definidas:
- Variable Aleatoria: Relación entre apoderado y el número de estudiantes que posee.
- Función de Probabilidad: Relación entre el número de estudiantes que posee cada apoderado y su probabilidad

Representación de las relaciones: Utilizar diagrama sagital (ver tabla 3)

Tabla 3: Diagrama sagital de la respuesta experta

Diagrama Sagital	Descripción del conjunto A
	A'_1: Conjunto o grupo de apoderados que tiene un estudiante. A'_2: Conjunto o grupo de apoderados que tiene dos estudiantes. A'_3: Conjunto o grupo de apoderados que tiene tres estudiantes. A'_4: Conjunto o grupo de apoderados que tiene cuatro estudiantes.

Posibles estrategias desarrollada por los estudiantes

Posible estrategia
Relaciones definidas:
- Variable Aleatoria: Cantidad de estudiantes que tiene el apoderado
-Función de Probabilidad: Posibilidad que un apoderado con "b" estudiantes sea seleccionado
Representación de las relaciones: Utilizar tabla (ver tabla 4)

Tabla 4: Representación de la relación entre conjunto registro tabular

Conjunto A	Conjunto B	Conjunto C
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8	**1**	$\frac{8}{30}$
A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{21}	**2**	$\frac{13}{30}$
A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{28}	**3**	$\frac{7}{30}$
A_{29}, A_{30}	**4**	$\frac{2}{30}$

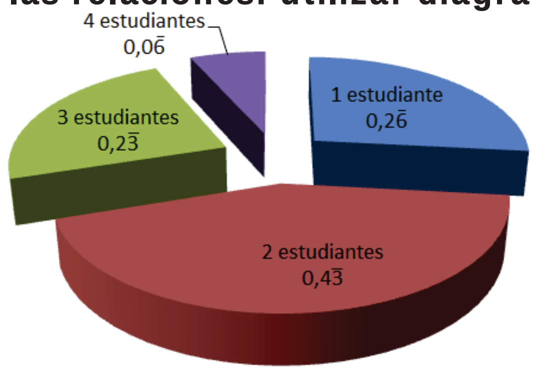
Posible estrategia

Establecen la relación que existe entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades a través de un diagrama de torta.

Relaciones definidas:

Función de Probabilidad: Probabilidad que un apoderado con cierta cantidad de estudiantes sea seleccionado

Representación de las relaciones: utilizar diagrama de torta



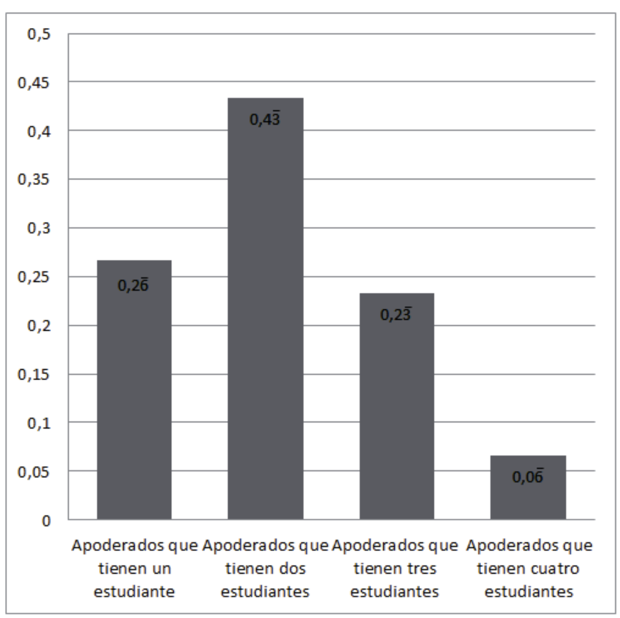
Posible estrategia

Establecen la relación que existe entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades a través de un gráfico.

Relaciones definidas:

Función de Probabilidad: Probabilidad que un apoderado con "b" estudiantes sea seleccionado.

Representación de las relaciones: utilizar gráfico

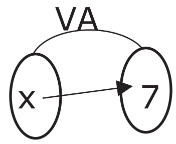


Errores y dificultades

A continuación, se muestra la tabla 5 que muestra los errores y dificultades de la primera clase con las respectivas devoluciones por parte del docente.

Tabla 5: Errores, dificultades y devoluciones

Error	Dificultad	Devolución
El alumno afirma que la cardinalidad de los sucesos son los elementos de los conjuntos. Por ejemplo A= {8, 13, 7, 2}.	Para definir un conjunto	Sugerir un ejemplo: ¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes? ¿Cuáles serían los elementos del conjunto?
El alumno describe por extensión los elementos de los conjuntos y las relaciones Por ejemplo: Conjunto A, B: A_8; A_{13}; A_{13}; A_7; A_7; A_7; A_2; A_2; A_2; A_2	Para representar un conjunto	Sugerir un ejemplo: ¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes?
El alumno cofunde la cantidad de apoderados que tiene el taller con la de estudiantes que tiene el taller.	Para identificar espacio muestral del experimento	Sugerir que analicen y comprendan la tabla con los datos recogidos de la encuesta y que identifiquen cuantos apoderados tiene el colegio
El alumno calcula erróneamente la ocurrencia de cada situación. Por ejemplo C= $\left\{\frac{8}{15},\frac{13}{15},\frac{7}{15}\right\}$	Para identificar los elementos del conjunto C, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación	Preguntar ¿Cuál es la posibilidad de que al seleccionar en la rifa un apoderado, este tenga un estudiante en el taller de cine?

El alumno confunde un valor numérico con una función. p.e. 7 => 	Para reconocer la existencia de la variable aleatoria al hacer composición entre los conjuntos (Ruiz, 2006).	Preguntar ¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que relacione (o permita asociar) elementos del conjunto A con elementos del conjunto B? ¿Cuál? ¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que relacione elementos del conjunto B con elementos del conjunto C? ¿Cuál (es)?
El alumno confunde la naturaleza funcional de la variable como una magnitud aleatoria (Ruiz, 2006).	Para identificar que las relaciones definidas son funciones	¿La relación definida es una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido?

Matemática en juego

Para el desarrollo de la primera clase de la secuencia de aprendizaje debemos considerar los siguientes conocimientos previos que estarán en juego en la actividad planteada a los estudiantes:

- Conjuntos (Diagrama sagital).
- Definición de relación
- Experimento
- Principio multiplicativo
- Regla Aditiva
- Función, reconocer dominio, codominio y recorrido.
- Representación de una función mediante tabla de valores, gráfico cartesiano, gráfico estadístico o diagrama sagital.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso (Regla de Laplace).
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio

Con esta actividad se pretende desarrollar los siguientes conocimientos en los estudiantes:

- Variable Aleatoria.
- Función distribución.
- Función Probabilidad.

Descripción del Plan de Clase 1

La clase estará organizada en 4 momentos y tendrá una duración de 90 minutos, a través de una pregunta abierta como se muestra en la figura 7.

En el primero, tendrá una duración de 10 minutos, de estos se menciona a los estudiantes el objetivo de la clase y los materiales que se utilizaran en esta (cartulinas, plumones y desafío), el objetivo será '**introducir un nuevo concepto probabilístico**' para presentar el desafío se realizara a través de una proyección, el cual el profesor hará lectura del desafío, haciendo que tres alumnos de grupos distintos sigan la lectura, con esto el profesor verifica la atención de los alumnos y su compromiso con la actividad. Una vez terminada la lectura se realizarán preguntas como: ¿qué entendió de la lectura?, ¿entiendes del enunciado?

El segundo momento, tendrá una duración de 35 minutos, en este se menciona la metodología de trabajo, correspondiente a trabajar en grupos de mínimo 3 y máximo 5 alumnos y los estudiantes se enfrentan al desafío, se espera que estos logren identificar y representar relaciones entre conjuntos, con el fin de reconocer la naturaleza funcional de la variable aleatoria. En esta etapa, los estudiantes es posible que manifiesten errores en su razonamiento o dificultad en abordar el desafío, para ello hemos previsto algunas devoluciones, explicitada en el plan de clase. Además, el profesor selecciona a tres parejas de estudiantes con estrategias correctas, un integrante de cada una de éstas, expondrá sus ideas al grupo curso.

En el tercer momento, de 25 minutos de extensión, un integrante de cada grupo, por turno, expone la respuesta del grupo, el profesor plantea preguntas que dejen en evidencia la estrategia usada.

El cuarto y último momento de la clase, durará 20 minutos, en este se sintetizan las ideas propuestas por los estudiantes e institucionaliza el concepto de variable aleatoria y función probabilidad.

Plan de clase 1

PLANIFICACIÓN DE CLASES N°1		
Asignatura: Matemática	Nivel: 2° Medio	Semestre: II
Unidad didáctica: 4 "Datos y Azar"		Horas Pedagógicas: 2
Aprendizaje Esperado AE 04 • Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.	Habilidades • Caracterizar variables aleatorias	Actitudes Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.
Problemática	Los estudiantes tienen dificultad para determinar la variable aleatoria y la función probabilidad, un contexto dado.	
Objetivo de la Clase	Introducir un nuevo concepto probabilístico.	

Contenidos Previos	Materiales Complementarios
Población y muestra Experimento aleatorio Muestreo aleatorio simple Equiprobabilidad de eventos Principio multiplicativo Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio Probabilidad teórica de un evento	• Guía con la Actividad • Reproductor Multimedia. • Pizarrón • Plumones • Cartulinas

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE
MOMENTO DE INICIO	15 minutos	
0. Indicaciones de la clase **1. Presentación del objetivo de la clase:** Identificar y representar relaciones entre conjuntos. **2.Planteamiento del desafío** A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor del taller de Cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:	0. Explicitar el contrato didáctico Dar indicaciones necesarias para generar un ambiente: propicio para el aprendizaje: levantar la mano para indicar que quiere hablar al grupo curso o preguntar duda, no interrumpir al profesor o compañero cuando habla, respetar las opiniones e ideas de los compañeros, responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo. 1. Escribir el objetivo de la clase. 2. Presentación del desafío de la clase: Se proyecta en la pizarra el desafío (PPT). Distintos estudiantes leen este en voz alta. 2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Qué nos pide la actividad?	¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema? ¿Comprenden el problema? ¿Son capaces de identificar la tarea? ¿Se cumple el tiempo planificado?

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>Número de estudiantes</td><td>Número de apoderados</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>13</td></tr>
<tr><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.
Dados los conjuntos A, B y C definidos por A: el conjunto de 30 apoderados del taller, B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.
</td>
<td>- “para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase”</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">MOMENTO DE DESARROLLO 55 minutos</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Solución al desafío
3.1 Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo.

3.2 Los alumnos trabajan en su hoja.
- Buscan estrategias propias.
-validan sus producciones e intercambian opiniones con sus compañeros.</td>
<td>3.1 Entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas.
3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra).
-Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error.
- Basado en la observación, selecciona a tres grupos, un estudiante de cada uno de ellos</td>
<td>¿Discuten con sus compañeros?
¿Identifican los conjuntos asociados al desafío?
¿Determinan los elementos del conjunto C? (probabilidades)
¿Definen la relación entre el conjunto A y el conjunto B? (variable aleatoria)
¿Definen la relación entre el conjunto B y el conjunto C?
¿Registran en la hoja posibles representaciones?</td>
</tr>
</table>

	presentará su estrategia en la pizarra.	¿Logran representar la VA como una función? ¿Se cumple el tiempo planificado?
4. Trabajo en la pizarra 4.2 Tres alumnos definen las relaciones entre los conjuntos involucrados en el desafío, representan dichas relaciones y explican cómo obtuvo su respuesta. Est. 1 Define la relación entre el conjunto A y el conjunto B. Representa ésta a través de diagrama, tabla o gráfico. Est. 2 Define la relación entre el conjunto B y C. Representa la relación mediante diagrama, tabla o gráfico. Est. 3 Define las relaciones entre el conjunto A y el conjunto B y el conjunto B y el conjunto C. Representa estas a través de diagramas o tabla.	4.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes. 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que escribe en la pizarra y explica su estrategia de resolución al grupo curso, anota su nombre en ella. 4.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo están definidos el conjunto A y B? ¿Cómo se relaciona? ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos del conjunto C? ¿Puedes asociar o relacionar con colores elementos de dos conjuntos?	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Explican sus estrategias? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas? ¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
MOMENTO DE CIERRE 20 minutos		
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la correspondencia que involucra los conjuntos A y B, y los conjuntos B y C, a través de diagramas (en caso de no haberlo propuesto un estudiante) 5.2 Se destaca las relaciones definidas por los tres estudiantes. 5.3 ¿La relación entre los elementos de los conjuntos podrá representar una función? ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función?	5.3 Se muestra la correspondencia entre elemento de dos conjuntos previamente mencionada por estudiantes y pregunta ¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función? [Se espera que los estudiantes consideren la def. de función y respondan que cada apoderado le corresponde solo una cantidad de estudiantes o que cada grupo de apoderados con un número específico de estudiantes tienen una única posibilidad de ganar las entradas]. Se pregunta a algunos estudiantes: ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? [Se espera que los estudiantes respondan que todos los elementos del conjunto	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes identifican que las relaciones definidas son funciones? ¿Se cumple el tiempo planificado?

	A tengan una única imagen en el conjunto B] 5.4 Se estable la definición de VA, utilizando unas de las respuestas de los grupos "en este caso la correcta", además también se define con esta misma la de función probabilidad. 5.5 Se institucionaliza a través de la definición escolar: "Una variable aleatoria es una función $\boldsymbol{X}$ que relaciona a cada resultado de un experimento aleatorio E, con un número real, cuyo dominio es el espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$ y recorrido es $\boldsymbol{Y}$, donde $\boldsymbol{Y}\subseteq\mathbb{R}$" $\boldsymbol{X}:\ \boldsymbol{\Omega}\rightarrow\boldsymbol{Y}\subseteq\mathbb{R}$	

PIZARRA DE LA CLASE		
Fecha **Objetivo** **Desafío**	**Estrategias de los estudiantes** Relación(es) definida(s) Representación Relación(es) definida(s) Representación Relación(es) definida(s) Representación	**Conclusiones de la clase** **Def. de V. A**

CLASE DOS

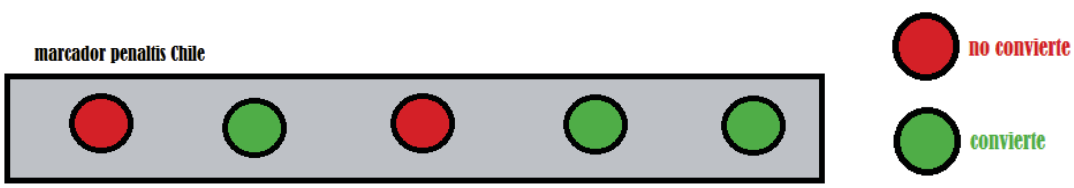
“FINAL COPA AMERICA”

El objetivo de la clase es **aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio**. Para lograrlo, se construye un cuestionario con una pregunta abierta (ver figura 8), el cual será entregado a cada uno de los estudiantes, para luego trabajar en grupo y lograr una discusión entre ellos y así llegar a un consenso en forma cooperativa y posteriormente exponer las diferentes estrategias al grupo curso, finalmente el profesor realizará la institucionalización del objeto estadístico que se pretende incorporar.

Desafío 2

“FINAL COPA AMERICA”

En la final de la Copa América Bicentenario del año 2016 la que estuvo disputada por las selecciones de futbol de Chile y Argentina, en los Estados Unidos de Norte América, y tras haber terminado el partido con un marcador igualado a 0, tanto en el tiempo reglamentario como en el alargue. Ambos equipos tuvieron que ir a penales, donde se desprende el siguiente marcador para Chile.



Representa la función Variable Aleatoria, para el experimento “lanzamiento de un penal”

Figura 8: Desafío de la segunda clase

Análisis a priori clase 2

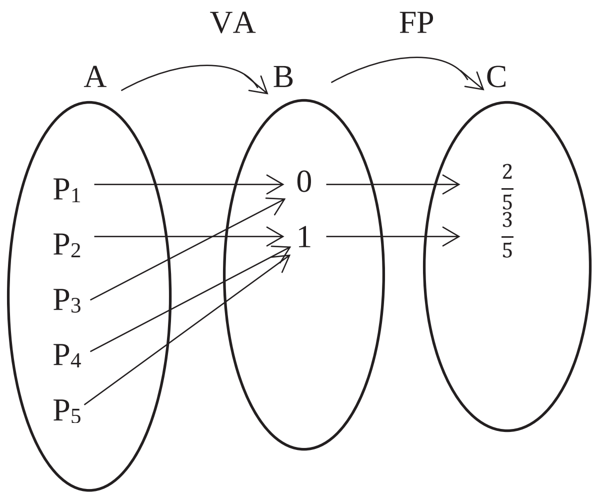
Respuesta experta

Relaciones definidas:

- **Variable Aleatoria**: Relación entre los penales lanzados y el suceso.
- **Función de Probabilidad**: Relación entre el suceso y su probabilidad.

Representación de las relaciones: Utilizar diagrama sagital (ver tabla 6)

Tabla 6: Diagrama sagital de la respuesta experta

Diagrama Sagital	Descripción del conjunto A
	P_1: Conjunto o grupo de penal. P_2: Conjunto o grupo de penal. P_3: Conjunto o grupo de penal. P_4: Conjunto o grupo de penal. P_5: Conjunto o grupo de penal

Posible estrategia desarrollada por los estudiantes

Relaciones definidas:

- **Variable Aleatoria**: Relación entre los penales lanzados y el suceso.
- **Función de Probabilidad**: Relación entre el suceso y su probabilidad.

Representación de las relaciones: Utilizar tabla (ver tabla 7)

Tabla 7: Representación de la relación entre conjunto registro tabular

A	B	C
P_1	0	$\frac{2}{5}$
P_3		
P_2	1	$\frac{3}{5}$
P_4		
P_5		

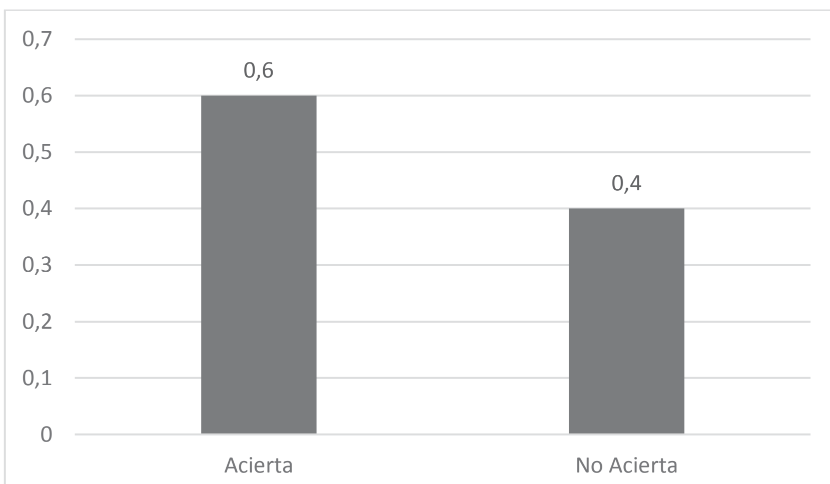
Posible estrategia

Establecen la relación que existe entre los valores de la variable aleatoria y las probabilidades a través de un gráfico.

Relaciones definidas:

-Función de Probabilidad: Probabilidad que un apoderado con "b" estudiantes sea seleccionado.

Representación de las relaciones: utilizar gráfico



Errores y dificultades

A continuación, se muestra en la tabla 8 con los errores y dificultades de la segunda clase con las respectivas devoluciones por parte del docente.

Tabla 8: Errores, dificultades y devoluciones

Error	Dificultad	Devolución
El alumno confunde los elementos del conjunto como B= {no convierte, convierte}, cuando debería colocar B= {0,1}.	Para definir un conjunto	Sugerir un ejemplo: ¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes? ¿Cuáles serían los elementos del conjunto?
El alumno describe por extensión los elementos de los conjuntos y las relaciones Por ejemplo: Conjunto A, B: P_1; P_3; P_2; P_4; P_5	Para representar un conjunto	Sugerir un ejemplo: ¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes?
El alumno cofunde la cantidad de apoderados que tiene el taller con la de estudiantes que tiene el taller.	Para identificar espacio muestral del experimento	Sugerir que analicen y comprendan la tabla con los datos recogidos de la encuesta y que identifiquen cuantos apoderados tiene el colegio
El alumno calcula erróneamente la ocurrencia de cada situación. Por ejemplo C= $\left\{\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right\}$	Para identificar los elementos del conjunto C, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación	Preguntar ¿Cuál es la posibilidad de que al seleccionar en la rifa un apoderado, este tenga un estudiante en el taller de cine?
El alumno confunde un valor numérico con una función.	Para reconocer la existencia de la variable aleatoria al hacer	Preguntar ¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que

p.e. 7 => $x \xrightarrow{VA} 7$	composición entre los conjuntos (Ruiz, 2006).	relacione (o permita asociar) elementos del conjunto A con elementos del conjunto B? ¿Cuál? ¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que relacione elementos del conjunto B con elementos del conjunto C? ¿Cuál (es)?
El alumno confunde la naturaleza funcional de la variable como una magnitud aleatoria (Ruiz, 2006).	Para identificar que las relaciones definidas son funciones	¿La relación definida es una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido?

Matemática en juego

Para el desarrollo de la primera clase de la secuencia de aprendizaje debemos considerar los siguientes conocimientos previos que estarán en juego en la actividad planteada a los estudiantes:

- Conjuntos (Diagrama sagital).
- Definición de relación
- Experimento
- Principio multiplicativo
- Regla Aditiva
- Función, reconocer dominio, codominio y recorrido.
- Representación de una función mediante tabla de valores, gráfico cartesiano, gráfico estadístico o diagrama sagital.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso (Regla de Laplace).
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio

Con esta actividad se pretende desarrollar los siguientes conocimientos en los estudiantes:

- Variable Aleatoria.
- Función distribución.
- Función Probabilidad.

Descripción del Plan de Clase

La clase estará organizada en 4 momentos y tendrá una duración de 90 minutos, a través de una pregunta abierta como se muestra en la figura 8.

En el primero, tendrá una duración de 15 minutos, de estos se menciona a los estudiantes el objetivo de la clase y los materiales que se utilizaran en esta (cartulinas, plumones y desafío), el objetivo será '**aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio**' para presentar el desafío se realizara a través de una proyección, el cual el profesor hará lectura del desafío, haciendo que tres alumnos de grupos distintos sigan la lectura, con esto el profesor verifica la atención de los alumnos y su compromiso con la actividad. Una vez terminada la lectura se realizarán preguntas como: ¿qué entendió de la lectura?, ¿entiendes del enunciado?

El segundo momento, tendrá una duración de 35 minutos, en este se menciona la metodología de trabajo, correspondiente a trabajar en grupos de mínimo 3 y máximo 5 alumnos y los estudiantes se enfrentan al desafío, se espera que estos logren identificar y representar relaciones entre conjuntos, con el fin de reconocer la naturaleza funcional de la variable aleatoria. En esta etapa, los estudiantes es posible que manifiesten errores en su razonamiento o dificultad en abordar el desafío, para ello hemos previsto algunas devoluciones, explicitada en el plan de clase. Además, el profesor selecciona a tres parejas de estudiantes con estrategias correctas, un integrante de cada una de éstas, expondrá sus ideas al grupo curso.

En el tercer momento, de 25 minutos de extensión, un integrante de cada grupo, por turno, expone la respuesta del grupo, el profesor plantea preguntas que dejen en evidencia la estrategia usada.

El cuarto y último momento de la clase, durará 20 minutos, en este se sintetizan las ideas propuestas por los estudiantes.

Plan de clase 2

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIFICACIÓN DE CLASES N°2</td></tr>
<tr><td>Asignatura: Matemática</td><td colspan="2">Nivel: 2° Medio</td><td>Semestre: II</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad didáctica: 4 “Datos y Azar”</td><td>Horas Pedagógicas: 2</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje Esperado
AE 04
• Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.</td><td colspan="2">Habilidades
• Caracterizar variables aleatorias</td><td>Actitudes
Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.</td></tr>
<tr><td>Problemática</td><td colspan="3">Los estudiantes tienen dificultad para determinar la variable aleatoria y la función probabilidad, un contexto dado.</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la Clase</td><td colspan="3">Aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos Previos</td><td colspan="2">Materiales Complementarios</td></tr>
<tr><td colspan="2">Población y muestra
Experimento aleatorio
Muestreo aleatorio simple
Equiprobabilidad de eventos
Principio multiplicativo
Espacio muestral asociado a un experimento
aleatorio
Probabilidad teórica de un evento</td><td colspan="2">• Guía con la Actividad
• Reproductor Multimedia.
• Pizarrón
• Plumones
• Cartulinas</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</td><td colspan="2">INTERVENCIÓN DOCENTE</td><td>EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="4">MOMENTO DE INICIO 15 minutos</td></tr>
<tr><td>0. Indicaciones de la clase

1. Presentación del objetivo de la clase: Aplicar una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio.

2.Planteamiento del desafío

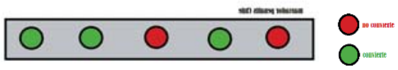
En la final de la Copa América Bicentenario del año 2016 la que estuvo disputada por las selecciones de futbol de Chile y Argentina, en los Estados Unidos de Norte América, y tras haber terminado el partido con un marcador igualado a 0, tanto en el tiempo</td><td colspan="2">0. Explicitar el contrato didáctico
Dar indicaciones necesarias para generar un ambiente: propicio para el aprendizaje: levantar la mano para indicar que quiere hablar al grupo curso o preguntar duda, no interrumpir al profesor o compañero cuando habla, respetar las opiniones e ideas de los compañeros, responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo.

1. Escribir el objetivo de la clase.</td><td>¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?

¿Comprenden el problema?

¿Son capaces de identificar la tarea?

¿Se cumple el tiempo planificado?</td></tr>
</table>

reglamentario como en el alargue. Ambos equipos tuvieron que ir a penales, donde se desprende el siguiente marcador para Chile.  Representa la función Variable Aleatoria, para el experimento "lanzamiento de un penal"	2. Presentación del desafío a través de la lectura del profesor en voz alta. 2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la tarea de hoy? - "para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase"	
MOMENTO DE DESARROLLO	**55 minutos**	
3. Solución al desafío 3.1 Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo. 3.2 Los alumnos trabajan en su hoja. - Buscan estrategias propias. -validan sus producciones e intercambian opiniones con sus compañeros.	3.1 Entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. 3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra). -Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. - Basado en la observación, selecciona a tres grupos, un estudiante de cada uno de ellos presentará su estrategia en la pizarra.	¿Discuten con sus compañeros? ¿Identifican los conjuntos asociados a cada enunciado planteado en la actividad? ¿Determinan los elementos de cada conjunto? (probabilidades) ¿Definen la relación entre el conjunto A y el conjunto B? (variable aleatoria) ¿Plantean una VA? ¿Registran en la hoja posibles representaciones? ¿Logran representar la VA como una función? ¿Se cumple el tiempo planificado?
4. Trabajo en la pizarra 4.2 Tres alumnos definen las relaciones entre los conjuntos involucrados en el desafío, representan dichas relaciones y explican cómo obtuvo su respuesta. Est. 1 Define la relación entre el conjunto A y el conjunto B. Representa ésta a través de diagrama, tabla o gráfico. Est. 2 Define la relación entre el conjunto B y C. Representa	4.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes. 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que escribe en la pizarra y explica su estrategia de resolución al grupo curso, anota su nombre en ella.	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Explican sus estrategias? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?

la relación mediante diagrama, tabla o gráfico. Est. 3 Define las relaciones entre el conjunto A y el conjunto B y el conjunto B y el conjunto C. Representa estas a través de diagramas o tabla.	4.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos del conjunto C? ¿Puedes asociar o relacionar con colores elementos de dos conjuntos?	¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
MOMENTO DE CIERRE		**20 minutos**
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la correspondencia que involucra los conjuntos A y B, y los conjuntos B y C, a través de diagramas (en caso de no haberlo propuesto un estudiante) 5.2 Se destaca las relaciones definidas por los tres estudiantes. 5.3 ¿La relación entre los elementos de los conjuntos podrá representar una función? ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función?	5.3 Se muestra la correspondencia entre elemento de dos conjuntos previamente mencionada por estudiantes y pregunta ¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función? [Se espera que los estudiantes consideren la def. de función y respondan que cada apoderado le corresponde solo una cantidad de estudiantes o que cada grupo de apoderados con un número específico de estudiantes tienen una única posibilidad de ganar las entradas]. Se pregunta a algunos estudiantes: ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? [Se espera que los estudiantes respondan que todos los elementos del conjunto A tengan una única imagen en el conjunto B] 5.4 Se establece la definición de VA, utilizando unas de las respuestas de los grupos “en este caso la correcta”, además también se define con esta misma la de función probabilidad.	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes identifican que las relaciones definidas son funciones? ¿Se cumple el tiempo planificado?

PIZARRA DE LA CLASE

Fecha
Objetivo

Desafío

Estrategias de los estudiantes

Relación(es) definida(s) Representación

Relación(es) definida(s) Representación

Relación(es) definida(s) Representación

Conclusiones de la clase

Def. de V. A

CLASE TRES

“EN BUSCA DEL EXPERIMENTO”

El objetivo real la clase es **definir una variable aleatoria asociada a una función especial**. Para lograrlo, se construye un cuestionario con una pregunta abierta (ver figura 9), el cual será entregado a cada uno de los estudiantes, para luego trabajar en grupo y lograr una discusión entre ellos y así llegar a un consenso en forma cooperativa y posteriormente exponer las diferentes estrategias al grupo curso, finalmente el profesor realizará la institucionalización del objeto estadístico que se pretende incorporar.

Desafío 3

“EN BUSCA DEL EXPERIMENTO”

Inventa dos experimentos distintos y define su variable aleatoria, de modo que su función de probabilidad sea la siguiente:

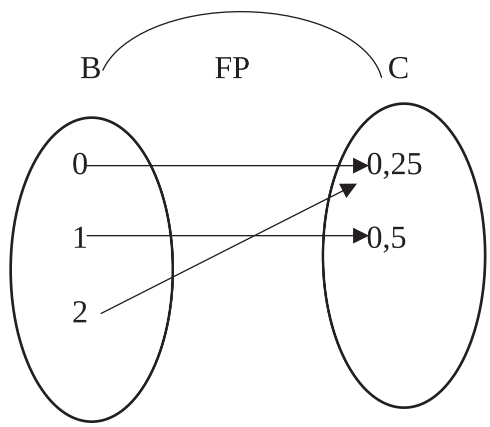


Figura 9: Desafío de la tercera clase

Análisis a priori clase 3

Respuesta experta

Como la última actividad de nuestra secuencia didáctica es una pregunta muy amplia y podría tener una gran cantidad de soluciones acá en la siguiente tabla 9 mostraremos tres de ellas:

Tabla 9: Posibles respuestas

Posible respuesta	**Posible respuesta**	**Posible respuesta**
El experimento consiste en extraer una bolita de la urna. Los resultados del experimento nos dan el conjunto: E = {azul, verde, roja}, Donde tenemos 6 rojas, 3 azules y 3 verde	Se tienen los números 15, 18, 25 y 42. Se escoge uno al azar y se cuenta la cantidad de cifras pares que tiene.	Número de sellos al lanzar dos monedas.

Posibles estrategias desarrollada por los estudiantes

Las posibles estrategias que podrían ellos utilizar son las siguientes:

- Gráfica de tabla
- Lenguaje Natural
- Gráfico de Porcentaje” torta”
- Diagrama Sagital

Errores y dificultades

A continuación, se muestra la tabla 10 con los errores y dificultades de la tercera clase con las respectivas devoluciones por parte del docente.

Tabla 10: Errores, dificultades y devoluciones

Errores	Dificultades	Devoluciones
El alumno confunde la naturaleza funcional de la variable como una magnitud aleatoria (Ruiz, 2006)	Para definir y representar un conjunto para montar la relación donde se refleje la VA.	Sugerir un ejemplo: recordad como se representa una función en forma sagital
El alumno cofunde la cardinalidad del espacio muestral de	Para identificar espacio muestral del experimento	Por ejemplo: El conjunto B definido como el conjunto del suceso B= {0,1}, es

una moneda como si fuera el de las dos.		decir lo confundan como B= {cara, sello}, esto debido que el conjunto B debe ser un numero Natural, para que se cumpla la relación de Variable Aleatoria. “Sugerir que analicen y comprendan la figuras que están en la actividad

Matemática en juego

Para el desarrollo de la primera clase de la secuencia de aprendizaje debemos considerar los siguientes conocimientos previos que estarán en juego en la actividad planteada a los estudiantes:

- Conjuntos (Diagrama sagital).
- Definición de relación
- Experimento
- Principio multiplicativo
- Regla Aditiva
- Función, reconocer dominio, codominio y recorrido.
- Representación de una función mediante tabla de valores, gráfico cartesiano, gráfico estadístico o diagrama sagital.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso (Regla de Laplace).
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio

Con esta actividad se pretende desarrollar los siguientes conocimientos en los estudiantes:

- Variable Aleatoria.
- Función distribución.
- Función Probabilidad.

Descripción del Plan de Clase 3

La clase estará organizada en 4 momentos y tendrá una duración de 90 minutos, a través de una pregunta abierta, como se muestra en la figura 9.

En el primero, tendrá una duración de 10 minutos, de estos se menciona a los estudiantes el objetivo de la clase y los materiales que se utilizaran en esta (cartulinas, plumones y desafío), el objetivo será '**definir una variable aleatoria asociada a una función especia**l' para presentar el desafío se realizara a través de una proyección, el cual el profesor hará lectura del desafío, haciendo que tres alumnos de grupos distintos sigan la lectura, con esto el profesor verifica la atención de los alumnos y su compromiso con la actividad. Una vez terminada la lectura se realizarán preguntas como: ¿qué entendió de la lectura?, ¿entiendes del enunciado?

El segundo momento, tendrá una duración de 35 minutos, en este se menciona la metodología de trabajo, correspondiente a trabajar en grupos de mínimo 3 y máximo 5 alumnos y los estudiantes se enfrentan al desafío, se espera que estos logren identificar y representar relaciones entre conjuntos, con el fin de reconocer la naturaleza funcional de la variable aleatoria. En esta etapa, los estudiantes es posible que manifiesten errores en su razonamiento o dificultad en abordar el desafío, para ello hemos previsto algunas devoluciones, explicitada en el análisis a priori. Además, el profesor selecciona a tres parejas de estudiantes con estrategias correctas, un integrante de cada una de éstas, expondrá sus ideas al grupo curso.

En el tercer momento, de 25 minutos de extensión, un integrante de cada grupo, por turno, expone la respuesta del grupo, el profesor plantea preguntas que dejen en evidencia la estrategia usada.

El cuarto y último momento de la clase, durará 20 minutos, en este se sintetizan las ideas propuestas por los estudiantes.

Plan de clase 3

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIFICACIÓN DE CLASES N°3</td></tr>
<tr><td>Asignatura: Matemática</td><td colspan="2">Nivel: 2° Medio</td><td>Semestre: II</td></tr>
<tr><td colspan="3">Unidad didáctica: 4 “Datos y Azar”</td><td>Horas Pedagógicas: 2</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje Esperado
AE 04
• Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.</td><td colspan="2">Habilidades
• Caracterizar variables aleatorias
➢</td><td>Actitudes
Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.</td></tr>
<tr><td>Problemática</td><td colspan="3">Los estudiantes tienen dificultad para determinar la variable aleatoria y la función probabilidad, un contexto dado.</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la Clase</td><td colspan="3">Definir una variable aleatoria asociada a una función especial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos Previos</td><td colspan="2">Materiales Complementarios</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Población y muestra
• Experimento aleatorio
• Muestreo aleatorio simple
• Equiprobabilidad de eventos
• Principio multiplicativo
• Espacio muestral asociado a un experimento
• aleatorio
• Probabilidad teórica de un evento
• Concepto de variable aleatoria.</td><td colspan="2">• Guía con la Actividad
• Reproductor Multimedia.
• Pizarrón
• Plumones
• Cartulinas</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</td><td colspan="2">INTERVENCIÓN DOCENTE</td><td>EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="3">MOMENTO DE INICIO</td><td>15 minutos</td></tr>
<tr><td>0. Indicaciones de la clase

1. Presentación del objetivo de la clase:
Definir una variable aleatoria asociada a una función especial
2.Planteamiento del desafío

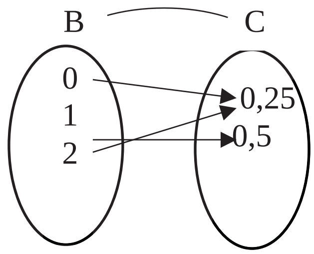
Desafío: Inventa dos experimentos distintos y define su variable aleatoria, de modo que su función de probabilidad sea la siguiente:</td><td colspan="2">0. Explicitar el contrato didáctico
Dar indicaciones necesarias para generar un ambiente: propicio para el aprendizaje: levantar la mano para indicar que quiere hablar al grupo curso o preguntar duda, no interrumpir al profesor o compañero cuando habla, respetar las opiniones e ideas de los compañeros, responsabilidad y colaboración en el trabajo en equipo.

1. Escribir el objetivo de la clase.</td><td>¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?

¿Comprenden el problema?

¿Son capaces de identificar la tarea?

¿Se cumple el tiempo planificado?</td></tr>
</table>

	2. Presentación del desafío a través de la lectura del profesor en voz alta. 2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la tarea de hoy? - "para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase"	
MOMENTO DE DESARROLLO	**55 minutos**	
3. Solución al desafío 3.1 Se entrega a los estudiantes hoja de trabajo. 3.2 Los alumnos trabajan en su hoja. - Buscan estrategias propias. -validan sus producciones e intercambian opiniones con sus compañeros.	3.1 Entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Indica la metodología de trabajo: trabajar en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. 3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra). -Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. - Basado en la observación, selecciona a tres grupos, un estudiante de cada uno de ellos presentará su estrategia en la pizarra.	¿Discuten con sus compañeros? ¿Identifican los conjuntos asociados a cada enunciado planteado en la actividad? ¿Determinan los elementos de cada conjunto? (probabilidades) ¿Definen la relación entre el conjunto A y el conjunto B? (variable aleatoria) ¿Plantean una VA? ¿Registran en la hoja posibles representaciones? ¿Logran representar la VA como una función? ¿Se cumple el tiempo planificado?
4. Trabajo en la pizarra 4.2 Tres alumnos definen las relaciones entre los conjuntos involucrados en el desafío, representan dichas relaciones y explican cómo obtuvo su respuesta. Est. 1 Define la relación entre el conjunto A y el conjunto B. Representa ésta a través de diagrama sagital. Est. 2 Define la relación entre el conjunto B y C. Representa la relación	4.1 La segunda columna de la pizarra la divide en tres partes, que serán completadas por los estudiantes. 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que escribe en la pizarra y explica su estrategia de resolución al grupo curso, anota su nombre en ella. 4.2 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Explican sus estrategias? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?

mediante diagrama, tabla o gráfico. Est. 3 Define las relaciones entre el conjunto A y el conjunto B y el conjunto B y el conjunto C. Representa estas a través de diagramas sagital.	estrategias usadas. ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos del conjunto C? ¿Puedes asociar o relacionar con colores elementos de dos conjuntos?	¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
MOMENTO DE CIERRE		**20 minutos**
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la correspondencia que involucra los conjuntos A y B, y los conjuntos B y C, a través de diagramas (en caso de no haberlo propuesto un estudiante) 5.2 Se destaca las relaciones definidas por los tres estudiantes. 5.3 ¿La relación entre los elementos de los conjuntos podrá representar una función? ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función?	5.3 Se muestra la correspondencia entre elemento de dos conjuntos previamente mencionada por estudiantes y pregunta ¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función? [Se espera que los estudiantes consideren la def. de función y respondan que cada apoderado le corresponde solo una cantidad de estudiantes o que cada grupo de apoderados con un número específico de estudiantes tienen una única posibilidad de ganar las entradas]. Se pregunta a algunos estudiantes: ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? [Se espera que los estudiantes respondan que todos los elementos de	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes identifican que las relaciones definidas son funciones? ¿Se cumple el tiempo planificado?

PIZARRA DE LA CLASE

Fecha

Objetivo

Desafío

Estrategias de los estudiantes

Relación(es) definida(s) Representación

Relación(es) definida(s) Representación

Relación(es) definida(s) Representación

Conclusiones de la clase

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA CLASE 1

En este apartado se evidenciará el marco metodológico de la primera clase implementada de esta secuencia metodológica

Sujeto de investigación

La investigación procede bajo la metodología de un Estudio de Clase Japonés (Isoda y Olfos, 2009), los participantes son jóvenes de entre 15 y 17 años de edad, estos son alumnos del colegio San Ignacio de Viña del Mar, el cual es un establecimiento particular subvencionado de tipo científico-humanista.

Para el desarrollo de la implementación cabe mencionar que el curso no conocía el concepto de variable aleatoria, solo el concepto de probabilidad.

Técnicas de recogida de datos

En esta investigación se utilizaron 2 instrumentos de recolección de datos, los cuales fueron los siguientes:

- Producciones de los estudiantes, estas se recogieron al final de la clase.
- Registro audiovisual, el cual nos sirvió para determinar momentos claves en el desarrollo de la investigación.

Técnica de análisis de datos

El análisis de los datos recogidos se analizará, con base en las transcripciones de las conversaciones entre los estudiantes, extraídas del material audiovisual, como además las construcciones realizadas por los alumnos para dar respuesta a la actividad que se les entrego al comienzo de la clase implementada.

La información obtenida se analizará apoyado en el marco teórico TSD y las sub-categorías de análisis creadas en forma cuasi – *a priorísticas* las que se describirán posteriormente.

Categorías de análisis

Para el surgimiento de categorías de análisis, se consideran las distintas situaciones, declaradas por Brousseau (2007), en el marco de la TSD con el fin de enmarcarlos en diferentes categorías de análisis como nos muestra la tabla 11:

Tabla 11: Categorías de análisis y definición de criterios

Fase de la TSD	Categorías de Análisis	Definición del Criterio de Análisis.
Acción	**C1:** Identifican los conjuntos.	Los estudiantes extraen del enunciado los distintos conjuntos
	C2: Identifican los elementos de cada conjunto.	Los estudiantes describen los elementos de cada conjunto.
	C3: Representan los conjuntos con diagramas disjuntos y no disjuntos.	Los estudiantes representan en uno conjunto a los apoderados y en otro el número de hijos por apoderado.
Formulación	**C1:** Relacionan los elementos del conjunto A con el conjunto B.	Los estudiantes representan la pre-imagen con su imagen de los distintos conjuntos.
	C2: Relacionan los elementos del conjunto B con el conjunto C.	Los estudiantes representan la pre-imagen con su imagen de los distintos conjuntos.
	C3: Representan los conjuntos en diagramas Sagitales y reconocen su relación.	Los estudiantes representan la pre-imagen con su imagen de los distintos conjuntos.
	C4: Representan los elementos en registro Tabular.	Los estudiantes representan los elementos de los conjuntos a través de tabla.

Evidencia de la Aplicación de la primera clase

Los resultados serán presentados a través de capturas del registro audiovisual de la clase, la transcripción de determinados diálogos extraídos del mismo, y los registros escritos de la actividad desarrollada por los sujetos informantes. Estos irán dando cuenta de las categorías de análisis propuestas para el estudio, que permiten evidenciar los elementos previstos en el análisis a priori respecto a la comprensión de la variable aleatoria y función probabilidad.

Para el desarrollo de la actividad los sujetos informantes se organizaron en distintos grupos de cinco integrantes cada uno, como se muestra en la tabla 12.

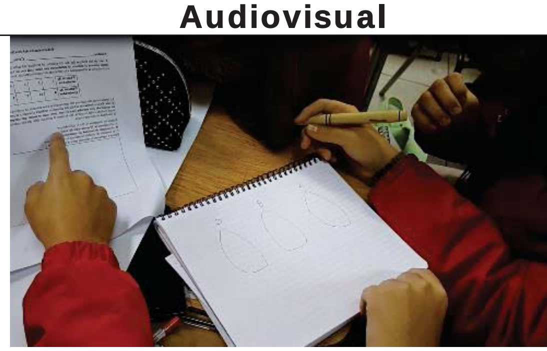
Tabla 12: Distribución por grupos de los sujetos informantes

Grupo	Estudiante
G1	E1, E2, E3, E4, E5
G2	E6, E7, E8, E9, E10
G3	E11, E12, E13, E14, E15
G4	E16, E17, E18, E19, E20
G5	E21, E22, E23, E24, E25

Los análisis se desarrollarán con los registros antes mencionados a través de tablas, en la que se presenta una transcripción del diálogo, además se demarca a través de un cuadro el fragmento específico donde se evidencian algún(as) categorías declaradas anteriormente en la tabla 13, las que están en correspondencia a las fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas planteada por Brousseau (2007).

En la tabla 13 se aprecia el diálogo entre dos estudiantes (E1, E2) y el profesor (P), del grupo G1, donde se evidencia la representación de los conjuntos y sus elementos. Esto se condice con los aspectos declarados en las categorías y en el análisis a priori.

Tabla 13: Evidencia de las actuaciones de los estudiantes del G1 en la fase de acción

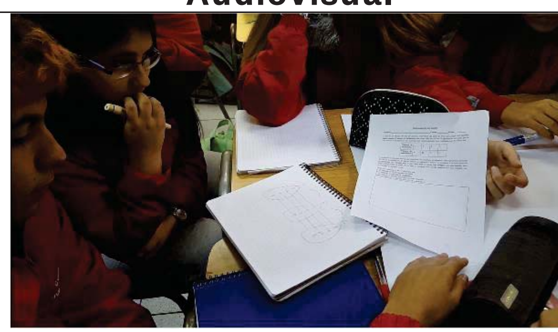
Transcripción de Diálogo	Captura del registro Audiovisual
Esto ocurrió entre el minuto 15 al 20 del desarrollo de la clase: **E1:** Tenemos 3 grupos A, B y C. Este (apuntando al conjunto A) se relaciona con este (apuntando al conjunto B). **P:** ¿Cuáles son los elementos del conjunto A?	

E2: Son los 30 apoderados del taller.
E1: 8, 13, 7, 2.
P: ¿Y cuáles son entonces los elementos del conjunto B?
E1: ¡Ah!, en el conjunto A, hay que poner los números así 8, 13, 7 y 2. Después acá hay que poner 1, 2, 3, 4 (apuntando al conjunto B). después acá debe colocar la suma de los estudiantes.

En este fragmento se evidencia la categoría C1 y C2, en términos de la fase de acción, donde los estudiantes recuperan los conocimientos previos para desarrollar la actividad.

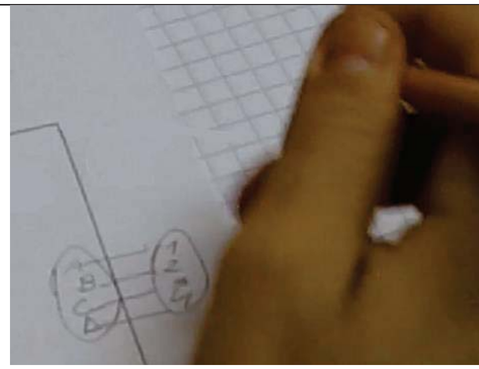
En la tabla 14 se aprecia el diálogo entre los estudiantes (E11, E12 y E13), del grupo G3, donde se evidencia la representación en forma sagital y la relación que existe entre los mismos. Esto se condice con los aspectos declarados en las categorías y en el análisis a priori.

Tabla 14: Evidencia de las actuaciones de los estudiantes del G3 en la fase de formulación

Transcripción de Diálogo	Captura del registro Audiovisual
Esto ocurrió entre el minuto 30 al 34 del desarrollo de la clase: **E11:** Hay 8 de 63 estudiante. **E12:** No son 8 de la suma de los apoderados, así como 8 de 30. **E11:** ¡Ah! entonces sería 8 de cada 30 apoderados **E12:** Ya poh ¿qué pasa con ellos? **E13:** Tiene 1 hijo poh. **E11:** ¡Ah! entonces 13 de 30 tiene 2 hijos, 7 de 30 tienen 3hijos y 2 de 30 tiene 4 hijos	
En este fragmento se evidencia la categoría C3, en términos de la fase de formulación, donde los estudiantes discuten sobre la representación de los conjuntos que realizan, logrando validar lo expuesto por el **E11.**	

En la tabla 15 se aprecia el diálogo entre los estudiantes (E17 y E20), del grupo G4, donde se evidencia la recuperación de información para la formación de los conjuntos y cómo sus elementos se relacionan con los elementos del otro conjunto. Esto se condice con los aspectos declarados en las categorías y en el análisis a priori.

Tabla 15: Evidencia de las actuaciones de los estudiantes del G4 en la fase de acción y formulación

Transcripción de Diálogo	**Captura del registro Audiovisual**
Esto ocurrió entre el minuto 53 al 58 del desarrollo de la clase: **E17:** ¿Cómo podemos representar la relación de los distintos conjuntos? **E20:** Es que estos dependen de estos (señalando a los elementos del conjunto B) depende del conjunto A, ¡ah! o sea esto sería a, b, c, d **E17:** Ya **E20:** Si y acá se ponen como los estudiantes **E17:** ¿Cuál? **E20:** Sería como este apoderado a tenía 1 estudiante **E17:** Ya **E20:** El otro sería b tenía 2 estudiante, c tenía 3 estudiante y d tenía 4 estudiante **E17:** Pero cuál es la relación **E20:** Ahí está; A es 1, B es 2, C es 3 y D es 4.	

En este fragmento se evidencian las categorías C1, C2 y C1, Este hecho es una clara demostración de que no siempre las fases de la TSD son lineales, sino más bien es un proceso dinámico de sucesión entre las fases.

Síntesis global de resultados

La tabla 16 muestra a continuación una síntesis de los resultados de acuerdo a los grupos, donde se evidencian las categorías levantadas para este estudio, las cuales tiene una estricta relación con las fases de la TSD.

Tabla 16: Síntesis global de resultados por grupos y categorías de análisis en las distintas fases

Fases	Categorías	Grupos
Acción	C1	G1, G2, G3, G4, G5
	C2	G1, G2, G3, G4
	C3	G5
Formulación	C1	G1, G3, G4
	C2	G1, G3, G4
	C3	G3, G4
	C4	G2

A luz de las categorías descritas anteriormente son desprendidas las siguientes evidencias presentadas por los sujetos de estudio en el marco de aplicación de la primera clase:

- En las producciones hechas por los sujetos de estudio en su gran mayoría alcanzan la fase Acción los C1, C2, C3, pero en la fase de formulación son algunos los que alcanzan a llegar al C3 de esto.
- En base al estudio de clases japonés y luego de haber realizado dos restructuraciones de la clase como puedo observar que los sujetos de estudio son capaces de poder extraer la información necesaria de la actividad y de manipular la información hasta lograr los que el profesor ha planificado lo que esta descrito en el plan de clase.
- Se puede desprender que logran un resultado tal como se previó en el análisis a priori.

A modo de conclusión y bajo el marco de la TSD se pude decir que el objetivo de la secuencia de clase se cumplió puesto que la mayoría de los alumnos logran la fase acción y formulación, permitiendo así también evidenciar lo que dice Ruiz y Albert (2013) con respecto a las dificultades que tienen los alumnos en relacionar la VA con una magnitud y no como una función la cual nos permite luego utilizarla para comprender el concepto de FP.

Por otra parte también se evidencia que los sujetos en cuestión al momento de comenzar a desarrollar la actividad e introducirse en ella comienzan de inmediato a calcular llegando en algunos casos de forma innata a la solución porcentual de la actividad, sin realizar lo que se le estaba solicitando en las preguntas abierta hechas. Con base a la experiencia los sujetos de estudio siempre tienden a encontrar un valor para dar respuesta a algún enunciado o ejercicio matemático.

CONTRASTE ENTRE LOS ANÁLISIS

Analizando las producciones de los sujetos de estudio, y comparando sus respuestas o estrategias consideradas en el análisis a priori, se puede decir que fueron asertivas, en el sentido que evidenciaron en la puesta común de la actividad, emergiendo producciones que no estaban contempladas en el análisis a priori.

Por otro lado en torno a los errores y dificultades de lo expuestos en el análisis a priori se puede afirmar que los sujetos de estudios si los comenten, esto nos indica que la VA y la FP si bien, son elementos en primera instancia sencillos al momento de cambiar el contexto se dificultan en comprender la relación entre ellos.

Se asumió que los sujetos de estudio deberían tener como conocimiento previo el concepto de conjunto, vital para el desarrollo de la actividad, pero una vez aplicada la actividad en una primera instancia se evidencio que no era así, por lo que en la segunda instancia de la aplicación de esta se tuvo que intervenir al curso con preguntas que orientaran, como por ejemplo: ¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes?, a modo de ayudar a los sujetos de estudio.

CONCLUSIONES

Desde hace unos años el Ministerio de Educación, tiene como objetivo incorporar el concepto de variable aleatoria para que los alumnos la identifiquen como una herramienta fundamental para entender resultados de probabilidad y de estadística y aplicar dichos resultados, como es el caso de la ley de los grandes números, en la cual se basa gran parte de la probabilidad y de la estadística (MINEDUC, 2011).

Por otro lado, Ruiz y Albert (2013) que nos dice: 'dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad, ya que tradicionalmente ha sido más tratada como variable (magnitud aleatoria)' (p.6). En respuesta a lo anterior es que se elabora esta secuencia didáctica, donde se plantean diversas actividades contextualizadas que permitirán al estudiante desarrollar habilidades de trabajo en equipo, a través de la elaboración de estrategia que permiten, la discusión y validación de sus argumentos en torno a la matemática en juego.

En esta misma línea, es que se hace necesario profundizar en la idea de la variable aleatoria, como vinculación entre la realidad del problema y su modelación a través de la función de probabilidad (Ruiz, 2006). Por este motivo la secuencia didáctica diseñada, considera un problema abierto, de tal manera que el estudiante proponga diversas variables aleatorias.

Sin duda que este trabajo le proporciona al docente un lineamiento para abordar la incorporación de un nuevo concepto probabilístico, pero este también está sujeto a modificaciones como, por ejemplo: optimizar mejor las preguntas de devolución por parte del docente, las cuales proporcionan a los alumnos ayuda específica en los puntos en que ha tenido mayor dificultad.

Esta monografía, da luces para el diseño de situaciones referidas a otros campos de problemas relacionados con la variable aleatoria, por ejemplo, el de ajuste de una función a una distribución de datos estadísticos, que permitan ver al alumno que la variable aleatoria es, sin duda, una herrramienta fundamental para el analisis de los resultados de las probabilidades.

De acuerdo con lo investigado y con la secuencia didáctica propuesta, podemos afirmar que a los alumnos se les facilita la comprensión de los objetos en cuestión con la ayuda de este tipo de actividades logrando una mayor apropiación del saber, esto al considerar la TSD, dado que este marco le entrega una mayor gama de herramientas al docente para trabajar en el aula. Además, como grupo se pudo evidenciar que las distintas fases de la TSD no son lineales, es decir que no siguen necesariamente un orden establecido, sino más bien que estas pueden surgir en cualquier momento de la clase.

Con respecto a la secuencia diseñada, nos abre puertas para mejorar la comprensión de la VA y FP en los jóvenes de 15 a 17 años, pues en el desarrollo de una de las clases, se pudo evidenciar que este tipo de estrategia ayudan al docente y alumnos a comprender de mejor manera los objetos vistos, aun cuando pueden ser reformuladas por parte de futuros docente que deseen aplicarla, en este sentido les pediría que se comunicaran con el autor al correo electrónico mcuevasleon@gmail.com para compartir sus evidencias entorno a ella.

REFERENCIAS

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). "El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA.", Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana, 2(2). http://emteia.gente.eti.br/

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Conferencia Inaugural de Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires, Argentina. Obtenido de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). Research on teaching and learning probability. In *Research on teaching and learning probability* (pp. 1-33). Springer International Publishing.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review*, *68*(2), 123-136.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática (2), 10.

Dìaz, G. M., Gutiérrez, P. R., y Martinéz, L. J. (2013). *Matemática 2º Medio.* Santiago: Ediciones SM.

Estrella, S., y Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. *Educación Estadística en América Latina*.

Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Godino, J; Batanero, C y Font, V (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada. Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics.In L. Pereira-Mendoza (Ed.). Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. (pp. 1221-1222). Singapore: IASE.

MINEDUC. (2011). *Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio* (Primera ed.). Santiago, Chile: Ministerio de Educación, República de Chile.

MINEDUC. (2016). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.* Santiago, Chile: Ministerio de Educación, República de Chile.

Muñoz, G. Sáez, N. Díaz, M. López, M y Astromujoff, N. (2014). *Matemática 2° Medio. Puentes del Saber.* Santiago: Ediciones Santillana.

Nardecchia, G. y Hevia, H. (2003). Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. Trabajo presentado en el V Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy, Argentina.

Ruiz Hernández , B. R. (2006). *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria.* México: Instituto Politecnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Ruiz, B. y Albert, J. (2013). Un análisis epistemológico de la variable aleatoria. Monterrey, México: ITESM.

Suárez, L. (2002). *Introducción a la Teoría de Probabilidad*. Manizales. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Vladimirovna, O. (2005). *Fundamentos de Probabilidad y Estadística.* México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evid ence on learning difficulties about testing hypotheses. Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute (Tome LVIII, Book 2, pp. 201-204). Helsinki: International Statistical Institute.

Walpole, R., Myers, R. y Myers, Sh. (1999). Probabilidad y estadística para ingenieros (6ª Ed.) (trad. R. Cruz). México: Prentie-Hall Hispanoamericana, S. A. (Trabajo original publicado en 1998)