Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Estrategias en la resolución de Inecuaciones lineales y racionales en Educación Superior, una mirada desde la Teoría Acción Proceso Objeto Esquema de Ed Dubinsky

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: Marcela Mabel Fuentes González.

Profesor Guía:
Sr. Arturo Mena Lorca
Sr. Raimundo Olfos Ayarza
Sra. Patricia Vásquez Saldías

2017

ÍNDICE

RESUMEN

La presente Monografía describe los aportes de un estudio de clase, diseñado para determinar los mecanismos mentales que se requieren para activar las construcciones mentales en alumnos de Educación Superior nivel Técnico Profesional (ESTP), necesarias para resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios asociados tienen grado menor o igual a dos.

El **Estudio de Clase** permitió identificar los conocimientos previos presentes en el conocimiento cognitivo de las inecuaciones y las construcciones mentales en estudiantes de ESTP, como consecuencia de las abstracciones reflexivas presentes.

El análisis de los resultados obtenidos en la implementación de la 1ª sesión dejó de manifiesto la necesidad de complementar ese Plan de Clase con dos clases más, construyendo para ello una Secuencia Didáctica de tres clases, teniendo como marco teórico la **Teoría APOE**

INTRODUCCIÓN

El estudio de las inecuaciones comienza en la etapa escolar, donde el nivel de análisis corresponde a situaciones del diario vivir, cuya praxis queda sujeta a registros matemáticos de desigualdad y comparación gráfica. Posteriormente, cuando estos mismos alumnos entran a la Educación Superior, sea esta de nivel técnico, profesional o académica, el nivel de análisis que deben desarrollar para el mismo objeto matemático, se ve ampliado a funciones, sistemas de inecuaciones, optimización y cálculo diferencial e integral.

La monografía responde a la temática de cómo los alumnos en etapa inicial de formación de los cursos de requisito de cada especialidad, en la unidad de aprendizaje de matemática aplicada, podrían resolver inecuaciones de forma gráfica. Para ello se diseñó un Plan de Clase, cuyo objetivo se fundamentó en la resolución gráfica de inecuaciones apoyada con el tratamiento del análisis de ecuaciones de la recta en el plano cartesiano.

Con los antecedentes presentados y el análisis de los datos de la implementación del Plan de Clase, lo que se busca es identificar los mecanismos y construcciones mentales para el concepto y resolución de inecuaciones, implementando una Secuencia Didáctica cuyo Plan de Clases permita la articulación de los conocimientos previos, conforme a la construcción que lo requiera en la dirección de una Descomposición Genética (DG) de las Inecuaciones.

CAPÍTULO 1
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Antecedentes y Problemática

Durante los años trabajados como profesor de Matemática he detectado que alumnos de primer año de Educación Superior de los niveles técnico, profesional y de academias, resuelven las inecuaciones transfiriendo técnicas propias de resolución de ecuaciones en su desarrollo, dejando de manifiesto que existen falencias arraigadas en los conocimientos previos.

Al buscar antecedentes respecto a la problemática planteada, nos encontramos con el análisis presentado por Malara, Brandoli y Fiori (1999, citado por Barbosa, 2008) quienes observaron dos grupos de alumnos en el primer año de Educación Superior Universitaria (italiano y brasileño) pudiendo identificar las siguientes dificultades en la resolución de inecuaciones:

- Resuelven una inecuación como si fuera una ecuación.
- Tienen dificultad en representar y determinar números reales en la recta numérica.
- Ponen énfasis en la manipulación algebraica y no en los conceptos y su interpretación.
- Presentan como conjunto solución de la inecuación $x^2 < 4$ la expresión $x < 2$.
- Hacen uso de la relación, si $x \cdot y > 0$, entonces necesariamente $x > 0$ ó $y > 0$.
- Emplean transformaciones no permitidas en las inecuaciones, sin tener control de la validez de esas transformaciones.
- Presentan muchas dificultades a través de la resolución y la interpretación de inecuaciones.

Sorprendentemente encontramos que, si bien estos antecedentes fueron observados hace 18 años, siguen estando presentes hasta el día de hoy en los alumnos de Educación Superior chilenos, cuyos registros fueron observados a la luz de un Estudio de Clase.

Por otra parte, se observa que los alumnos dan prioridad a la resolución de inecuaciones bajo el registro algebraico, debido que es la forma más utilizada en el currículo escolar chileno, lo que da cabida a lo planteado por Barbosa (2008), que sostiene que el hecho que las inecuaciones sean trabajadas en la enseñanza escolar utilizando sólo el álgebra, obstaculiza las construcciones mentales gráficas del objeto matemático en los alumnos.

OBJETIVOS DE LA INNOVACIÓN PRESENTE EN LA MONOGRAFÍA

Objetivo General

Proponer a partir de un Estudio de Clase, un diseño didáctico que permita articular las construcciones mentales para la resolución de inecuaciones, en alumnos de primer año de Educación Técnica nivel Superior, para la resolución de inecuaciones.

Objetivos Específicos

1. Diseñar e implementar un Plan de Clase que permita identificar las dificultades para la resolución de inecuaciones a partir de los registros gráficos.

2. Describir, estudiar e interpretar las construcciones mentales de los alumnos, en el desarrollo de las actividades planificadas para el Plan de Clase.

3. Proponer una DG para la comprensión y resolución de inecuaciones.

4. Proponer, a partir del análisis anterior, un diseño didáctico que permita articular las construcciones mentales.

Preguntas de Investigación

1. ¿Cómo resuelven inecuaciones los alumnos de primer año en Educación Superior?

2. ¿Qué conocimientos previos y en qué concepción, deben estar presentes en las construcciones mentales del alumno, para que pueda resolver de forma gráfica las inecuaciones?

3. Una vez determinadas las construcciones mentales que usa el alumno en el desarrollo de inecuaciones, ¿qué Diseño Didáctico hace posible estructurar una descomposición Genética (DG) para la comprensión y resolución de inecuaciones?

ANTECEDENTES RESPECTO DE LA INNOVACIÓN

Para obtener más antecedentes de la problemática propuesta, se buscó información respecto a otros estudios con el mismo objeto matemático.

Barbosa (2008), presenta un conjunto de construcciones mentales o esquemas que el alumno puede desarrollar para comprender el concepto de inecuación y a su vez una propuesta de enseñanza para mejorar la enseñanza–aprendizaje del objeto matemático.

Dentro del trabajo realizado, fue posible obtener algunas respuestas a dificultades encontradas, como por ejemplo, que los alumnos operan a ambos lados de la desigualdad utilizando la jerga "pasar para el otro lado" (Barbosa, 2008, p.152), sin considerar la posible alteración del signo de la desigualdad, dificultad que viene desde las etapas iniciales de su historia educativa.

Producto de esta investigación, finalmente señala que en el proceso enseñanza-aprendizaje de inecuaciones, deben estar presentes: las propiedades de los números reales; las funciones, los conceptos de dominio e imagen; y los de conjunto solución, de variable y de operaciones en el conjunto solución. Sin embargo, deja de manifiesto que, si bien otras investigaciones podrán encontrar construcciones mentales diferentes a las de su trabajo, pudiendo ser incluso más refinadas y mejoradas, asegura que las presentadas en su trabajo son suficientes para comprender el concepto inecuación.

Núñez (2012**),** observa de su propia experiencia algunas limitaciones y dificultades en la enseñanza de inecuaciones cuadráticas, como la presentación de la definición formal del objeto matemático, seguida por técnicas algebraicas de resolución que el alumno aprende de forma mecánica, sin una fundamentación que sustente la metodología, tampoco se presentan problemas contextualizados que permitan vincular el objeto matemático con otras áreas del conocimiento, lo que conlleva recurrir a los mismos procedimientos utilizados para resolver ecuaciones cuadráticas y determinar raíces del trinomio cuadrático. Estos modelos de enseñanza generan dificultades en el alumno, como por ejemplo: no lograr determinar el conjunto solución sobre todo cuando un trinomio cuadrático no es factorizable en $\mathbb{R}$; no identificar las inecuaciones equivalentes, especialmente cuando el término cuadrático tiene signo negativo; no saber cómo utilizar el método de los puntos críticos cuando el trinomio es factorizable; o el método de completar cuadrados cuando el trinomio no es factorizable en $\mathbb{R}$.

Todos estos antecedentes más los obtenidos de las investigaciones bibliográficas realizadas, lo llevaron a diseñar y proponer una Secuencia Didáctica orientada a superar las dificultades de los alumnos de Educación Superior en la comprensión de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas.

Torres (2013), realiza una investigación en alumnos de primer semestre de Ingeniería en una Universidad del Táchira, Venezuela en relación al uso de los registros gráfico y algebraico para el estudio de funciones e inecuaciones, analizando los conflictos semióticos que surgen en su estudio. La investigación examina el proceso de aprendizaje de inecuaciones y el impacto ofrecido por las nuevas herramientas didácticas sustentadas en el enfoque gráfico.

El primer instrumento de investigación aplicado por Torres, le permitió obtener registros sobre ciertas dificultades presentadas por los alumnos en relación al objeto matemático inecuación, siendo algunas de ellas las siguientes:

- Los alumnos no conocen con certeza el significado del término inecuación, sólo lo asocian a una condición establecida por una expresión algebraica.

- Relacionan el término inecuación con la comprobación o verificación de una condición dada por una desigualdad.

- Asignan un peso relativamente alto al manejo de los procesos algebraicos involucrados en la solución, evidenciando la presencia de obstáculos frente a la argumentación teórica.

- Tienen tendencia al uso exclusivo de herramientas de orden algebraico al momento de resolver inecuaciones, no tienen manejo de herramientas alternativas, como el enfoque gráfico.

El estudio desarrollado revela que, para garantizar un aprendizaje efectivo en el alumno, con una clara comprensión de conceptos y minimización de errores en la resolución de inecuaciones, es necesario crear situaciones didácticas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación, que se articulen de forma coherente.

Monje (2017), realizó un análisis del tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia, cuyas fuentes de información se basaron en el tratamiento de las inecuaciones en los planes y programas del Ministerio de Educación de Chile, los textos escolares que distribuye gratuitamente dicha entidad y los textos escolares utilizados por los alumnos de Rusia.

Para llevar a cabo la investigación, se propuso realizar una reconstrucción de la complejidad matemática de la inecuación, definida esa complejidad por Font y Rondero (2015) como la suma de todos los componentes que tienen lugar en determinado objeto matemático y las conexiones que existen entre ellos.

En los antecedentes curriculares de la investigación que realiza Monje, presenta los resultados obtenidos en la aplicación de un diagnóstico el año 2014, a 374 alumnos de Ingeniería que cursaban Cálculo I en una Universidad de Concepción, el cual consideró tres preguntas relacionadas con intervalos e inecuaciones. El resultado de dicho análisis demostró que menos del 60% de los alumnos respondió de forma correcta las preguntas relacionadas con intervalos y menos del 10% de alumnos respondió de forma correcta las preguntas que tenían relación directa con inecuaciones, dejando en evidencia la falta de un conocimiento acabado de intervalos, desigualdades e inecuaciones al momento de ingresar a la Universidad, donde cursos como Cálculo I, II y III, requieren de ellos al comparar números, estudiar funciones y resolver inecuaciones lineales, cuadráticas, con polinomios racionales y con valor absoluto.

Finalmente, en su análisis de comparación de ambos sistemas de educación logra observar que no existe una progresión de la enseñanza de las inecuaciones en el currículo escolar chileno, así como tampoco un tratamiento acorde a la complejidad de este objeto matemático.

CAPÍTULO 2
OBJETO MATEMÁTICO INECUACIONES

Objeto Matemático desde el Saber Sabio

Para el sistema de los números reales hay dos operaciones definidas, la suma y el producto, que le dan la **estructura de cuerpo** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y que satisfacen las siguientes propiedades, siendo $\mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

a) Para la suma $(\mathbb{R}, +)$:

- a.1) Asociatividad: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a + (b + c) = (a + b) + c)$
- a.2) Conmutatividad: $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a + b = b + a)$
- a.3) Elemento neutro de la suma: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})\ (a + 0 = 0 + a = a)$
- a.4) Elemento opuesto: $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists (-a)\ \in \mathbb{R})\ (a + (-a) = 0)$

b) Para el producto $(\mathbb{R}, \cdot)$:

- b.1) Asociatividad: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$
- b.2) Conmutatividad: $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a \cdot b = b \cdot a)$
- b.3) Elemento neutro del producto: $(\exists 1 \in \mathbb{R})\ (\forall a \in \mathbb{R})\ (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
- b.4) Elemento inverso: $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})\left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right)\left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$

c) Distributividad del producto respecto a la suma:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c))$$

d) Por otra parte, en el sistema de los reales, hay una relación de orden $\leq$, es decir, que cumple:

- d.1) Reflexividad: $(\forall a \in \mathbb{R})\ (a \leq a)$
- d.2) Antisimetría: $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b)$
- d.3) Transitividad: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c)$

Más aún, ese orden es total:

- d.4) $(\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a \leq b \vee b \leq \mathrm{a})$

Además, se tiene:

e) Compatibilidad de la suma y del producto con el orden

e.1) $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{R})\ (a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$

e.2) $(\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}^{+})(a \leq b \wedge (0 \leq c) \Rightarrow a\,c \leq b\,c)$

Entonces, de acuerdo a los puntos a) al e), el sistema de los números Reales es un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, lo que se podría representar de la siguiente forma:

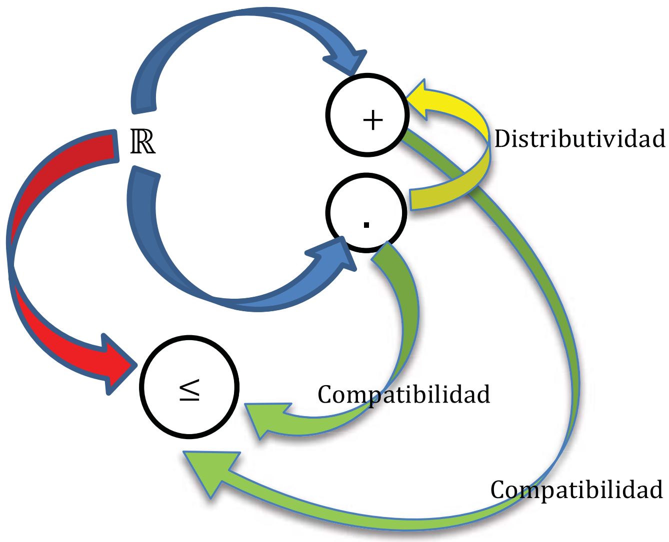


Figura 1. Representación del cuerpo ordenado ℝ. (Adaptación de Mena, 2011)

Si bien el sistema de los números reales satisface el axioma de completitud, no será considerado este último, ya que no actúa directamente en la resolución de las inecuaciones, sino más bien en la concepción de los números Reales.

Para resolver inecuaciones se debe utilizar las compatibilidades de la suma y del producto con el orden (Mena, 2000).

Se definen las siguientes relaciones:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$$
$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$
$$a > b \Leftrightarrow a \geq b \wedge a \neq b$$

Una inecuación (en una variable), es una función proposicional de la forma *p(x)*, del tipo

$$p(x): f(x)\mathcal{R}g(x)$$

De acuerdo al axioma de la especificación, dónde: *f, g* son funciones reales de variable real y $\mathcal{R}$ es una entre las relaciones $<, \leq, >, \geq$, la solución en los Reales es la inecuación:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | p(x)\} \text{ (Mena, 2000)}$$

Cada vez que exista una equivalencia lógica en el desarrollo algebraico de una inecuación, su representación gráfica tendrá el mismo conjunto solución, existiendo así una congruencia entre los registros gráficos y algebraicos de una inecuación. Damos a continuación algunas situaciones:

a) Caso lineal

$$f(x) = ax + b$$
$$p(x): 3 + 2x \leq 5x + 6$$

Tenemos:

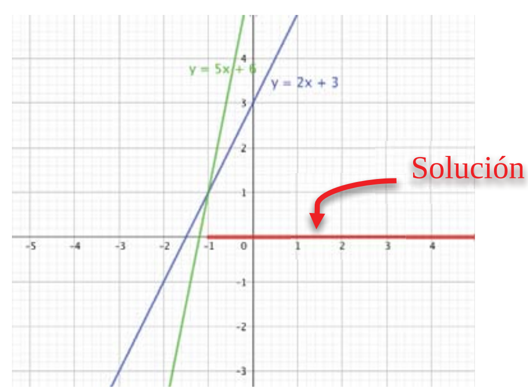
$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = 3x + 2 \qquad g(x) = 5x + 6$$

$$p(x): f(x) \leq g(x)$$

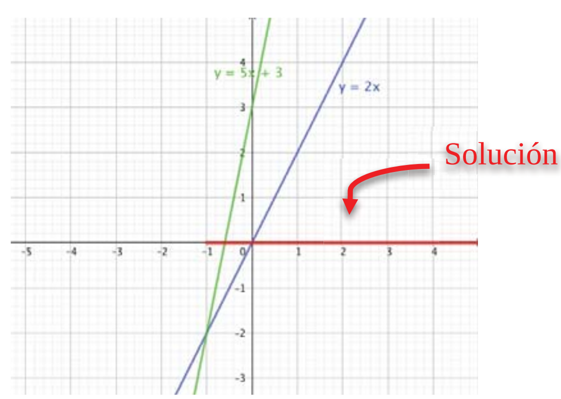
Registro Algebraico

Registro Gráfico

$$3 + 2x \leq 5x + 6$$
$$(-3) \Downarrow \quad (+3) \Uparrow$$

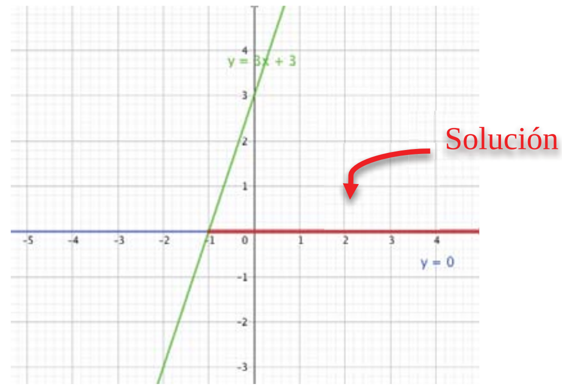


$$2x \leq 5x + 3$$
$$(-2x) \Downarrow \quad (+2x) \Uparrow$$



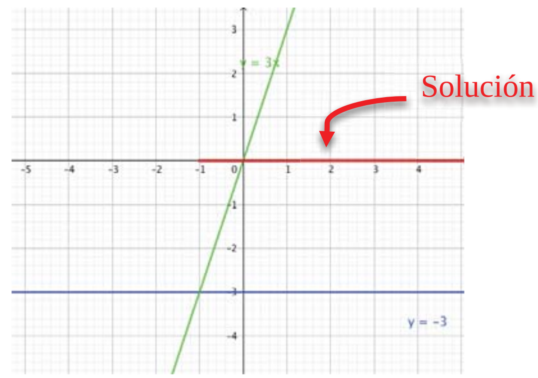
$0 \leq 3x + 3$

$(-3) \Downarrow \quad (+3) \Uparrow$

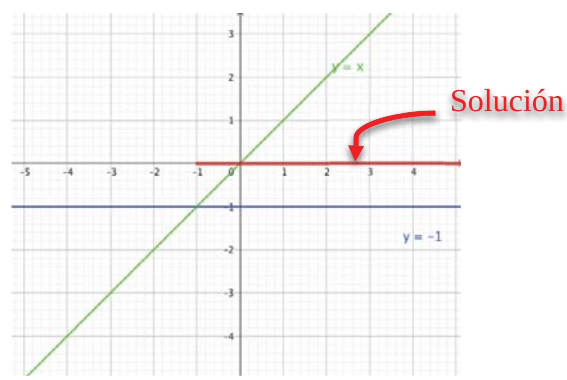


$-3 \leq 3x$

$\Updownarrow$



$-1 \leq x$



b) Caso cuadrático

Es sabido que una función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, que representa una parábola, donde el signo de a, indicará la orientación de la parábola en el plano cartesiano:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se tiene que,

b.1) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces es factorizable

$$f(x) = a(x - \sqrt{\Delta})(x + \sqrt{\Delta})$$

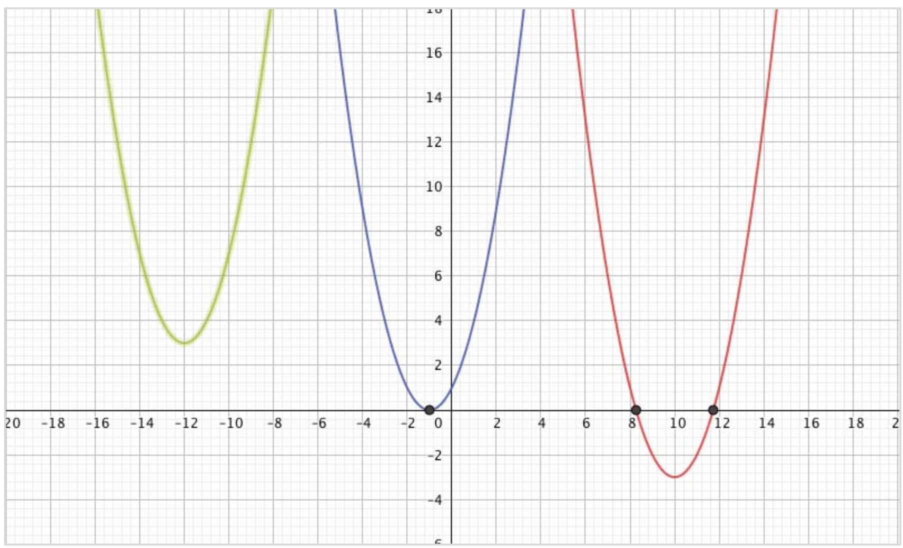
y la parábola tocará al eje x en 2 puntos (parábola de color rojo).

b.2) Para el caso contrario, que no sea factorizable, se debe ver el valor del discriminante $\sqrt{b^2 - 4ac}$, entonces:

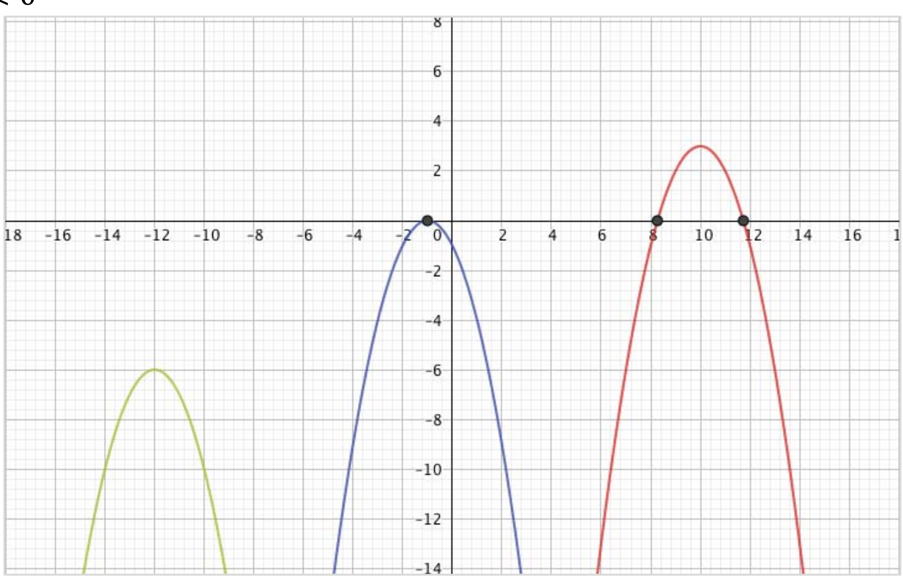
Si $\Delta < 0$, la parábola no tocará al eje x en ningún punto, encontrándose sobre o bajo el eje x, dependiendo del signo de a (parábola de color verde).

b.3) Si $\Delta = 0$, $\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$, entonces la parábola tocará al eje x en 1 solo punto (parábola de color azul).

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Ejemplo para el caso:

$$p(x): f(x) \leq g(x)$$
$$p(x): 3x + 6 \leq x^2 + x + 1$$

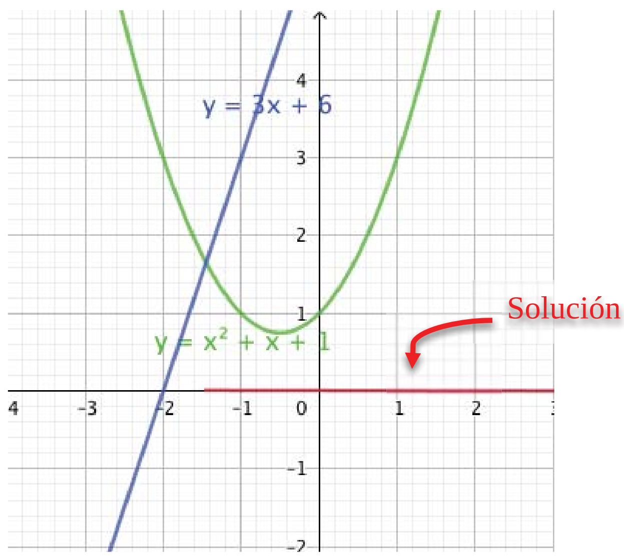
Aquí,

$$f(x) = 3x + 6$$
$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Para, $g(x) = x^2 + x + 1$, el discriminante es:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Dado que $a < 0$, ello significa que la parábola estará sobre el eje x, sin tocarlo en ningún punto, entonces:



c) Caso de una función racional con polinomios lineales

$$p(x): \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

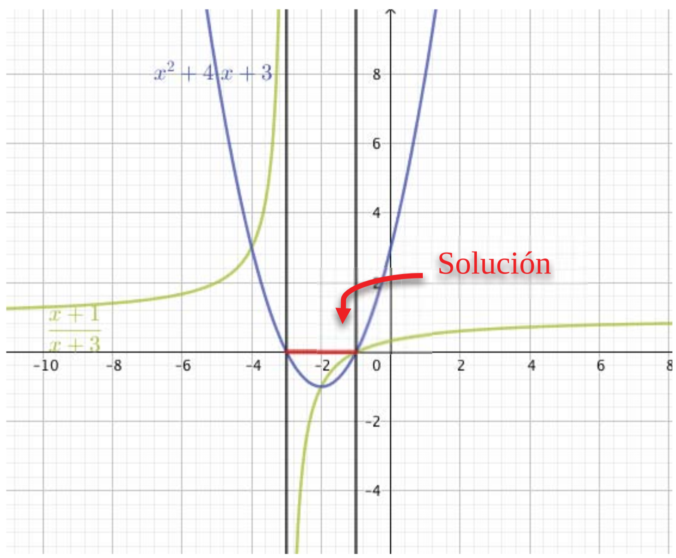
Siendo

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = cx + d$$

Definidas las formas como resolver inecuaciones cuadráticas y lineales bajo el registro algebraico y gráfico, se puede mencionar otro registro para obtener el resultado y es el registro tabular, donde se observa la condición de la inecuación y en qué intervalos se cumple dicha condición, esto utilizando el siguiente formato:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

Quedando demostrado bajo el registro tabular que la función $f(x) \cdot g(x)$ (parábola de color azul) y la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ (hipérbola de color verde), tienen el mismo conjunto solución:



Lo que muestra que, si $g(x) \neq 0$, se tiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

Estableciendo ciertas restricciones, donde $g(x) = (cx + d) \neq 0$

Finalmente, esto se puede resumir en el siguiente esquema:

$$\mathbb{R}$$

Lógica	Conjunto
$p(x)$	$S = \{x \in \mathbb{R}/p(x)\}$
$q(x)$	$T = \left\{x \in \dfrac{\mathbb{R}}{q(x)}\right\}$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	$S = T$
$2x + 5 \leq 11$	$S = \{x \in \mathbb{R}\ /2x + 5 \leq 11\}$
$(-5) \Downarrow \quad (+5) \Uparrow$	$\Downarrow\Uparrow$
$2x \leq 6$	$S = \{x \in \mathbb{R}\ /x \leq 3\}$
$\left(\cdot \dfrac{1}{2}\right) \Downarrow \quad (\cdot\, 2) \Uparrow$	$\Downarrow\Uparrow$
$x \leq 3$	$S =]-\infty, 3]$

Figura 2: Esquema resumen para encontrar el conjunto solución de las inecuaciones.

Objeto Matemático desde el Saber Escolar

Cuando se habla de saber escolar, se hace referencia al conocimiento del objeto matemático desde el currículo escolar, para llegar a generar el conocimiento en el alumno. Es por ello que para este proyecto de innovación el saber escolar sólo servirá de referencia para tener presente los conocimientos previos que debiese traer el alumno a la Educación Superior, toda vez que las inecuaciones en la Educación Superior tienen un tratamiento más cercano al Saber Sabio.

El estudio de las inecuaciones desde el saber escolar comienza con el concepto de desigualdad, definida como dos cantidades o expresiones que no son iguales, donde se utilizan registros gráficos y pictóricos asociados a los signos menor ($<$), menor o igual ($\leq$), mayor ($>$) o mayor o igual ($\geq$) y distinto ($\neq$). Si bien desde muy pequeños los alumnos están familiarizados al concepto de desigualdad cuando comparan sus estaturas para ordenarse en la fila del kínder, o van a un cumpleaños y terminan comparando quién agarró más dulces de la piñata, este es un concepto que no se ha definido como objeto matemático; por tanto, para nuestro proyecto de innovación tomaremos sus comienzos en cuarto año de enseñanza básica, que es el nivel donde el alumno realiza por primera vez operatoria con inecuaciones.

Para realizar el análisis desde el saber escolar, se revisaron los textos de matemáticas para el estudiante, que entrega el Ministerio de Educación, donde fue posible observar que la Editorial Galileo es la responsable de la edición de los textos de 1º a 6º año de educación básica, la Editorial SM de los textos de 7º y 8º año de educación básica y la Editorial Santillana de los textos de 1º a 4º año de educación media.

En el texto del estudiante de matemática de **4º Básico** correspondiente a la Editorial Galileo, las inecuaciones son trabajadas en la Unidad 3 “Fracciones, ángulos e isometrías”, del Capítulo 6 “Ecuaciones, ángulos y movimientos”, Lección 6-3 siendo el objetivo de esta lección **escribir y resolver inecuaciones de suma y resta**. Para ello, se utiliza una balanza con cantidades iguales a cada lado y luego con cantidades distintas, donde utilizando los signos > y < el alumno deberá señalar cual de los dos lados de la balanza es mayor que el otro.

Figura 3: Texto del estudiante 4º Básico Matemática p.150.
Editorial Galileo (2016)

En este texto, también se utiliza la recta numérica, donde el alumno es capaz de observar por primera vez que la solución de una inecuación, no es un solo número como sucede en las ecuaciones, ya que, la desigualdad es verdadera para para un conjunto de números.

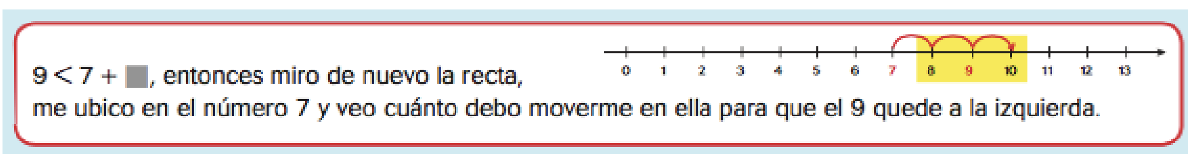


Figura 4: Texto del estudiante 4º Básico Matemática p.150
Editorial Galileo (2016)

Continuando con el análisis del saber escolar, se tomó el texto del estudiante de matemática de **5º año Básico** de la Editorial Galileo, observándose que las inecuaciones son trabajadas en la Unidad 1 “Números Naturales”, del Capítulo 4 “Números y álgebra”, lección 4-6, siendo el objetivo de esta lección **aprender a resolver inecuaciones de un paso**. El tratamiento que se le da al desarrollo de las inecuaciones es similar al de 4º básico, pero esta vez aparece el producto a ambos lados de la desigualdad; por otra parte aparecen por primera vez los signos $\neq, \leq, \geq$.

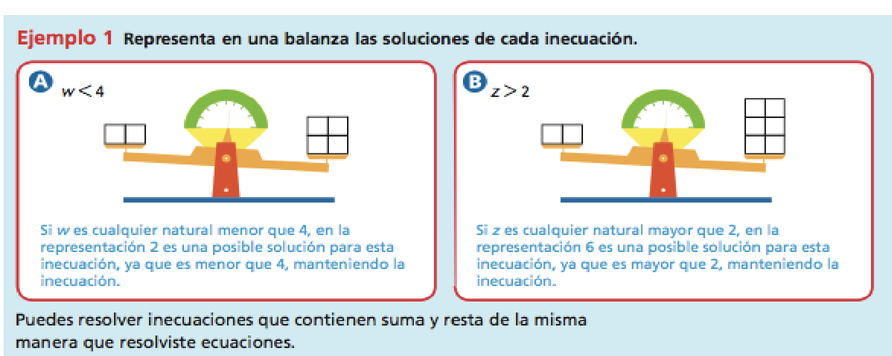


Figura 5: Texto del estudiante 5º Básico Matemática p.88, Editorial Galileo (2016)

En 7º **año de enseñanza básica** los alumnos trabajan con el Texto del estudiante del Departamento de estudios pedagógicos de ediciones SM. En él, las inecuaciones son trabajadas en la Unidad 2 del texto del estudiante "Álgebra y relaciones proporcionales", Sección 4 Álgebra, Lecciones 18 y 19, siendo el objetivo de ellas **resolver inecuaciones y representar sus soluciones y, resolver problemas que se modelan con ecuaciones e inecuaciones,** respectivamente.

En la lección 18, se observa que se siguen representando las inecuaciones mediante el uso de la balanza, pero se le incorporan ejemplos cercanos a la realidad del alumno como se observa en la Figura 6, permitiendo de este modo imaginar la situación, ya que es algo que pueden observar en el diario vivir.

Situación 1 Representar inecuaciones en la balanza

La pluma es un tipo de grúa utilizada en la construcción, que permite elevar materiales (cemento, fierros, etc.) a grandes alturas. A un lado de la pluma debe colocarse un contrapeso, es decir, un peso que permita mantener la fuerza que la pluma va a ejercer.

Jorge maneja una grúa pluma que solo puede elevar pesos menores al de su contrapeso. Para elevar 17 toneladas, puso en el contrapeso 3 barras de hormigón de igual masa, atadas con una cadena de 2 toneladas.

¿Cuál es la masa mínima de cada barra de hormigón?

Figura 6: Texto del estudiante 7º Básico Matemática p.120,
Departamento de estudios pedagógicos de ediciones SM, Chile. (2016).

Para la lección 19, se utiliza el modelamiento como estrategia de resolución, lo que hará que el alumno pueda resolver un problema de forma clara y ordenada, identificando los datos y analizando los resultados. Un ejemplo de este tipo de problemas que permite modelar es el de la Figura 7.

Situación 2 Modelar situaciones con inecuaciones

El curso de Héctor decidió realizar su fiesta en el mismo lugar del caso anterior. Cuando han reunido $ 675 000, un estudiante advierte que ya han sobrepasado el monto que necesitan.

¿Cuántos estudiantes puede tener el curso de Héctor?

Figura 7: Texto del estudiante 7º Básico Matemática p.125,
Departamento de estudios pedagógicos de Ediciones SM, Chile. (2016).

Es posible observar que las inecuaciones no son trabajadas en los planes y programas de 8º, 1º, 2º y 3º año de enseñanza media, pasando a ser consideradas recién en **4º año de enseñanza media** de matemática del plan común en la Unidad 1, dedicada a inecuaciones lineales, compuesta por 7 lecciones cuyos objetivos serán presentados a continuación:

Lección 1 **"Conjuntos",** el objetivo de esta lección consiste en representar conjuntos numéricos por extensión y comprensión, diseñando actividades como la que se presenta en la Figura 8.

1. Escribe por extensión los siguientes conjuntos.

a. $S = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es divisor de $32\}$

b. $T = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es múltiplo de $5\}$

c. $U = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x$ tiene 2 cifras $\wedge$ x termina en $4\}$

d. $V = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x$ es divisor de 8 $\vee$ x es divisor de $12\}$

e. $W = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x$ es primo $\wedge$ x es par$\}$

Figura 8, Texto del estudiante matemática 4º medio, p.21.
Editorial Santillana (2015)

Lección 2 **"Desigualdades",** cuyo objetivo es expresar información por medio de desigualdades. Recordar que en séptimo básico, los alumnos realizaron modelamiento como estrategia para resolver inecuaciones, ahora lo harán de la forma que se representa en la Figura 9.

1. Expresa la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.

a. Para un índice de radiación ultravioleta igual a 10, las personas de piel más sensible (aquellas que se queman con facilidad) no deben exponerse al sol sin protección más de 18 minutos.

b. Una recomendación general es utilizar un protector solar con factor de protección 15 o mayor.

c. **CONEXIÓN CON EL MEDIOAMBIENTE** ▶ Se considera que la calidad del aire es "regular" si el índice de calidad del aire por material particulado (ICAP) es superior a 100 y menor o igual a 200.

d. **CONEXIÓN CON LA MEDICINA** ▶ En un examen que mide la cantidad de glucosa en la sangre de una persona adulta, se consideran normales los valores que van de 64 a 110 mg/dL (miligramos por decilitro).

e. La nota n de Pedro no alcanzó el 6,0.

f. **CONEXIÓN CON LA FÍSICA** ▶ La longitud de onda de la luz visible es superior a 380 nm y menor o igual a 780 nm.

Figura 9, Texto del estudiante matemática 4º medio, p.23
Editorial Santillana (2015)

Lección 3 **"Intervalos de números reales",** el objetivo consiste en representar conjuntos de números reales utilizando intervalos y realizar operaciones con ellos. Aparece el concepto infinito positivo y negativo y la representación de intervalos, mediante paréntesis cuadrados.

1. Determina las siguientes uniones e intersecciones de intervalos. Expresa tu resultado como intervalo y represéntalo gráficamente en la recta real.

a. $[2, 5[\cup]3, 18[$

b. $]-5, 1] \cap]1, 7[$

c. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$

d. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cap \left]0, +\infty\right[$

e. $[0, 1[\cap \left( ]-3, 1[\cap [0, 5] \right)$

f. $\left( ]-\infty, 2[\cap [12, +\infty[\right) \cup [0, 20]$

Figura 10, Texto del estudiante matemática 4º medio p.29. Editorial Santillana (2015).

Lección 4 **“Propiedades de las desigualdades”,** su objetivo es conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades como la transitividad, observa como cambia el sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir por un número real negativo a ambos lados de la desigualdad, la Figura 11 presenta un ejemplo de la forma como es trabajada esta lección:

5. Considera la expresión $H = 2t^2 - 15t + 28$. Usando las propiedades de las desigualdades, demuestra que si $5 \leqslant t \leqslant 9$, entonces $3 \leqslant H \leqslant 55$.

6. CONEXIÓN CON LA CIENCIA ▶ Una escala de temperatura muy utilizada por los científicos es la escala Kelvin (K). La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit y Kelvin se puede representar por medio de la expresión $F = 1{,}8K - 459{,}67$, donde F es la temperatura medida en grados Fahrenheit y K, en Kelvin.

a. Si el agua permanece en estado líquido entre los 273,15 K y los 373,15 K, ¿cuál es esta variación si se mide en grados Fahrenheit?

b. ¿Entre qué temperaturas el agua permanece líquida si se mide en grados Celsius? Utiliza la expresión que relaciona las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit de la página anterior.

c. Un día, la temperatura mínima en Miami fue de 62 ºF, mientras que la máxima llegó a 75 ºF. ¿Cuál es esta variación de temperatura si se mide en Kelvin?

Figura 11, Texto del estudiante matemática 4º medio p.33. Editorial Santillana (2015).

Lección 5 **“Inecuaciones lineales con una incógnita”,** el objetivo es resolver inecuaciones lineales con una incógnita, sin embargo, lo primero que se hace es un repaso del objeto matemático ecuación.

La inecuación es definida como una desigualdad que tiene una o más incógnitas, para resolverlas se deben encontrar los valores que hacen que sea verdadera. Una vez obtenidos esos valores, se establece el conjunto solución de la inecuación, el cual es representado mediante un intervalo o de forma gráfica en la recta numérica. El tipo de situación planteada corresponde al de a Figura 12.

c. La suma de tres números consecutivos es mayor que 60. ¿Cuál es el menor valor que podría adoptar el número mayor?

d. Marcela, Francisco y Gustavo son hermanos. Marcela tiene 15 años y Francisco tiene 3 años más que Gustavo. La suma de los años de Francisco y Gustavo no alcanza a igualar la edad de Marcela. ¿Cuántos años tiene Gustavo si su edad es un número impar?

e. ¿Cuánto debe medir el largo de un terreno rectangular si su ancho mide 5 m y su perímetro no debe exceder los 26 m? Representa tu respuesta con un intervalo de números reales.

Figura 12, Texto del estudiante matemática 4º medio, p.49. Editorial Santillana (2015)

Lección 6, **“Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita”,** el objetivo consiste en resolver estos sistemas, definiendo el conjunto solución como la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones que conforman el sistema, utilizando la analogía con los sistemas de ecuaciones. También se consideran actividades con inecuaciones no lineales para que resuelva el alumno, sin dar las pautas para ello.

1. **Escribe un sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución esté representado por el intervalo del contexto inicial de la lección.**
2. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales y representa gráficamente su solución.**

a. $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant x - 4 \\ 5 - x \leqslant -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5 + 3x < x + 17 \\ x + 18 \geqslant -8x \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 0{,}5 \leqslant 1{,}2x - 0{,}2 \\ -x + 4{,}5 > 0{,}3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 3 \geqslant 11 - x \\ 4x \leqslant 45 - x \\ x - 18 > -2x \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x + 2 < x - 4 \\ 7x - 3 > 35 + 5x \\ 1 - 2x > 25 + x \end{cases}$

f. $\begin{cases} 21 - 6x \geqslant 2x - 19 \\ 3 + 8x < 6x + 7 \\ 1 + x \leqslant 0 \\ 5x - 9 > 2x - 3 \end{cases}$

Figura 13, Texto del estudiante matemática 4° medio p.52. Editorial Santillana (2015)

Finalmente, la lección 7 y última de esta Unidad **"Problemas con inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales",** el objetivo es llegar a la resolución de problemas, utilizando diferentes estrategias como ensayo y error, modelando la situación mediante una inecuación o con sistemas de inecuaciones.

1. **Rodrigo tiene 62 cm de alambre y quiere construir un cuadrado.**
   a. Si construye un cuadrado de lado igual a 18 cm, ¿le alcanzará con el alambre que tiene?, ¿por qué?, ¿y si hace un cuadrado de 10 cm de lado? Justifica.
   b. ¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadrado más grande que Rodrigo podría construir con la cantidad de alambre que tiene?

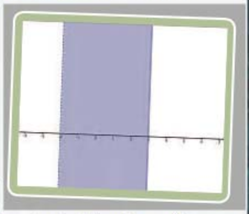
Figura 14, Texto del estudiante matemática 4° medio p.57. Editorial Santillana (2015).

En este nivel también se formulan problemas para ser trabajados con geogebra, lo que permitirá otro tipo de resolución a las inecuaciones como a continuación se presenta:

Uso GeoGebra EN PAREJAS

En la siguiente actividad usarás GeoGebra para representar intervalos de números reales y, luego, para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades.

1. **Inicien el programa GeoGebra y seleccionen la vista "Álgebra y gráficos". Luego, realicen los siguientes pasos.**
   a. Hagan clic con el botón secundario y presionen **Vista Gráfica**, Luego, elijan la pestaña **EjeY** y deshabiliten la opción **Muestra EjeY**. De esta manera en la vista gráfica no se verá el eje Y, pues no lo utilizaremos.
   b. Para representar el intervalo]–2, 3], escriban, en la barra de entrada, la expresión **–2 < x ⩽ 3** y luego presionen **Enter**. Los símbolos ⩽ y ⩾ los obtienen apretando el botón α. Obtendrán una representación como la que se muestra en la figura.



2. **A partir del intervalo que obtuvieron, respondan.**
   a. ¿Qué significa que un extremo del intervalo tenga línea punteada y el otro no?, ¿por qué?
   b. El número –2, ¿pertenece al intervalo representado?, ¿y el número 3? Comenten su respuesta.
   c. Determinen tres números que pertenezcan al intervalo representado y tres que no pertenezcan a él.
3. **Oculten el intervalo anterior haciendo clic con el botón derecho sobre él y deshabilitando la opción "Muestra objeto". Luego, grafiquen el intervalo]–∞, –1], escribiendo en la barra de entrada $x \leq -1$. Luego, presionen Enter.**
   a. ¿Cuáles son los límites del intervalo?
   b. El número –2014, ¿pertenece al intervalo?, ¿y el –1?
   c. Determinen tres números que pertenezcan al intervalo representado y tres que no pertenezcan a él.
4. **Ahora, muestren ambos intervalos simultáneamente.**
   a. A partir de la representación de los intervalos, ¿cómo determinarían la unión de ellos?, ¿y su intersección?
   b. Determinen la unión y la intersección de los intervalos, usando lenguaje conjuntista.

Figura 15, Texto del estudiante matemática 4° medio p.58. Editorial Santillana (2015)

Distancia entre saberes del objeto matemático

Al realizar un análisis de la distancia entre saberes, es posible visualizar que la parte axiomática con la cual son definidas las inecuaciones en el saber sabio, no son parte del saber escolar, es decir, no aparecen en el currículo. Si bien, en cuarto año de enseñanza media hay un tratamiento mayor para trabajar las inecuaciones, se menciona la propiedad de la tricotomía, pero no cómo esta se relaciona con las inecuaciones.

Del análisis de los textos Escolares de Matemática entregados por el Ministerio de Educación, es posible observar que existen diferencias en el planteamiento de sus actividades, no por el nivel para el cual están dirigidas, sino más bien por la forma de plantear las actividades de aprendizaje, lo que coincidentemente va de la mano con la Editorial que las diseñó. Las actividades de la Editorial Galileo, se presentan de forma tal que es el profesor quien debe dirigir cada una de las actividades, son actividades diseñadas por objetivo, que siguen patrones fijos y algoritmos para su resolución, a diferencia de lo que sucede con las actividades de la Editorial SM que tienden a ser del tipo contructivista, donde el alumno construye el conocimiento en base a situaciones que le permitan actuar y reflexionar, llegando así al aprendizaje significativo, por otra parte, la Editorial Santillana plantea las actividades en base a situaciones didácticas, en las cuales el objeto matemático está implícito en la actividad, siendo el alumno el encargado de resolverlo mediante diferentes estrategias y explicitarlo para que sea formalizado e institucionalizado por el profesor, es por ello que se considera importante el mencionar que en este tipo de actividades es perjudicial para el alumno la comparación con el objeto matemático ecuación, ya que de alguna forma lo están instando a buscar estrategias para resolver inecuaciones como si fuesen ecuaciones, dejando fuera el análisis de la estructura de cuerpo y orden en los Reales, utilizando la idea del “pasar para acá o pasar para allá”, considerando el signo de la desigualdad como un simple nexo entre dos expresiones algebraicas, al punto de sustituirlo por un signo igual sin generar mayores cambios, lo que se constituirá en un error en la Educación Superior.

Es importante señalar que la planificación y programación de las inecuaciones en el currículo escolar, son determinantes en la estructura de contenidos para el diseño de los textos escolares que entrega el Ministerio de Educación de Chile. Siendo necesario presentar la carencia de continuidad en el aprendizaje de las inecuaciones durante la formación escolar, ya que sólo son consideradas en 4º, 5º y 7º año de enseñanza básica, dejando de ser estudiadas hasta 4ºaño de enseñanza media, cinco años después, cuando el nivel cognitivo del alumno tampoco es el mismo, denotando con ello falta de conocimientos previos para el aprendizaje de las inecuaciones en la Educación Superior.

En lo que respecta a la metodología gráfica para resolver las inecuaciones, éstas son trabajadas sólo en cuarto año de enseñanza media, primero desde la recta numérica, donde intersectando o uniendo intervalos se obtiene el conjunto solución que satisface la inecuación. Posteriormente al terminar la Unidad se dan algunos ejemplos con Geogebra, no existiendo la representación gráfica en el plano cartesiano mediante funciones, es más las funciones se trabajan en el Capítulo 2 del texto del Estudiante de 4º año de enseñanza media, es decir, después de inecuaciones. Si se trabajasen las inecuaciones en el registro gráfico con funciones, donde es posible asignar valores a la imagen y pre-imagen, el alumno podría pasar al registro tabular para determinar cuando la proposición es verdadera, es decir, en el saber escolar no existe una estructura de aprendizaje en el currículo que permita articular el tránsito por los diferentes registros algebraico, gráfico y tabular, llegando a la enseñanza superior con ese vacío,

Finalmente, es oportuno mencionar que, el paso del saber sabio al saber escolar, se obstaculiza por la falta de conocimiento de los axiomas de cuerpo y orden de los Reales que, conjuntamente con la compatibilidad de la suma y del producto con la desigualdad en el sistema de los Reales definen las inecuaciones.

Barrido Histórico Epistemológico

Hacia el año 400 a.C., Eudoxo de Cnido contribuyó a la teoría de la proporción, observando que ciertas longitudes no eran comparables, utilizó el método de comparación de dos longitudes mediante la búsqueda de una longitud *t* de manera que $x = m \cdot t$; $y = \mathrm{n} \cdot t$ para los números enteros, no pudiendo trabajar con las líneas de longitudes 1 y $\sqrt{2}$ como los pitagóricos habían mostrado. Si bien ésta es una aproximacióna a los irracionales, son también los primeros indicios de la estructura de cuerpo en $\mathbb{R}$.

Corry (1994) sostiene, al igual que varios autores, que la definición de Eudoxo para el concepto de razón e identidad de razones, contiene la esencia del pensamiento matemático del siglo XIX en lo que respecta a la definición de los números Reales. Esta teoría plantea que las magnitudes están en razón que la primera con la segunda es la misma que la razón de la tercera con la cuarta, por tanto si se toma un múltiplo cualesquiera de la primera y de la tercera, y otro de la segunda y de la cuarta, sus resultados excederán, faltarán o coincidirán en la misma proporción.

El Libro I de los Elementos de Euclides, continene algunas de las propiedades sobre el orden y la suma entre magnitudes homogéneas. Si *A* y *B* son magnitudes homogéneas, debe ser:

$$A < B \quad \vee \quad A = B \quad \vee \quad A > B$$

En el primer caso, una magnitud *C*, del mismo tipo que *A* y *B*, tal que:

$$A + B = C$$

Además;

Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$
Si $A = B$, entonces $A + (-C) = B + (-C)$
Si $A < B$, entonces $A < C = B < C$

El producto de un número natural por una magnitud se entiende como una suma repetida:

$$nA = A + A + A + \cdots + A \text{ (}n\text{ veces)}$$

Sean *A* y *B* magnitudes homogéneas, son conmensurables si existe una magnitud *C* del mismo tipo que *A* y *B,* de modo que*:*

$$A = mC \qquad\qquad B = nc$$

Con *m* y *n* números naturales, entonces:

$$\frac{A}{B} = \frac{mC}{nC} = \frac{m}{n}$$

Euclides en su Libro V de los Elementos contiene 18 definiciones, siendo la igualdad de razones una de las definiciones consideradas como la más importante de este libro,

$$a:b = c:d$$

si para cada par de números enteros m, n se tiene que:

$$ma < nb \text{ entonces } mc < nd$$
$$ma = nb \text{ entonces } mc = nd$$
$$ma > nb \text{ entonces } mc > n\mathrm{d}$$

Lo que se relaciona con el concepto de razón e identidad de razones de Eudoxo, ya que la magnitud de la primera con la segunda y de la tercera por la cuarta no cambiarán el sentido de la desigualdad al multiplicarla por la misma magnitud.

La definición 7 del libro V, establece el orden entre razones:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$

si existe una fracción $\frac{n}{m}$, tal que:

$$\frac{A}{B} > \frac{n}{m} > \frac{C}{D}$$

El postulado o axioma de Arquímide se enuncia como:

> Cualquier cantidad, por pequeña que sea, puede hacerse tan grande como se quiera multiplicándola por un número suficientemente grande. Esto se puede reformular de la siguiente manera: Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con β < α), existe entonces:
>
> – Un número n tal que $n\beta > \alpha$
>
> – Un número n tal que $n(\alpha - \beta) > \gamma$ donde γ es cualquier magnitude de la misma clase. (Parra, 2009 p.31)

En el siglo XVI François Viète, introdujo un sistema de notación que hacía uso de letras en las fórmulas algebraicas, siendo esta una forma más adecuada del análisis algebraico, motivo por el cual es llamado el Padre del Álgebra. Se dice que fue Viète quien influyó en la notación del signo mayor que “>” y menor que “<”, que más tarde se le atribuye a Thomas Harriot, siendo este último quien sólo perfeccionó el símbolo, ya que este es el símbolo que se venía utilizando:

 → "mayor que"  → "menor que"

Robert Recorde utilizó por primera vez en el año 1557 el signo igual (=) cuando escribía su obra “The Whetstone of Witte”, fue la forma que él encontró de abreviar la palabra igual, para no tener que escribirla, ya que según decía no había nada más igual que dos rectas paralelas. (Cajory, 1991) Sin embargo Descartes en el año 1637 popularizó el signo igual = utilizado por Recorde a partir de la notación algebraica.

En el año 1734, Pierre Bouguer (1698-1758) introduce los símbolos ≥ para *mayor o igual* y ≤ para *menor o igual.*

En el año 1872 los matemáticos Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind formalizaron la definición de número Real. Georg Cantor, fue inventor de la teoría de conjuntos, base de la matemática moderna a través de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Richard Dedekind, trabajó en las cortaduras que llevan su nombre, las cuales son clases de números racionales, que presentan la primera construcción formal de número Real, dando las características de cuerpo ordenado y completo.

Respecto al análisis espistemológico del objeto matemático inecuaciones, es importante destacar que, existe una evolución paulatina en el pensamiento matemático que data del año 3000 a.C. Si bien no existen registros tangibles del comienzo de las inecuaciones a través de la historia, sí hay luces de aquellos elementos que ayudaron en su génesis, por ejemplo: teoría de conjuntos, proporciones, método de la exhauscíón, aproximación a límite y axiomas de orden y cuerpo de los números Reales.

Mapa Conceptual

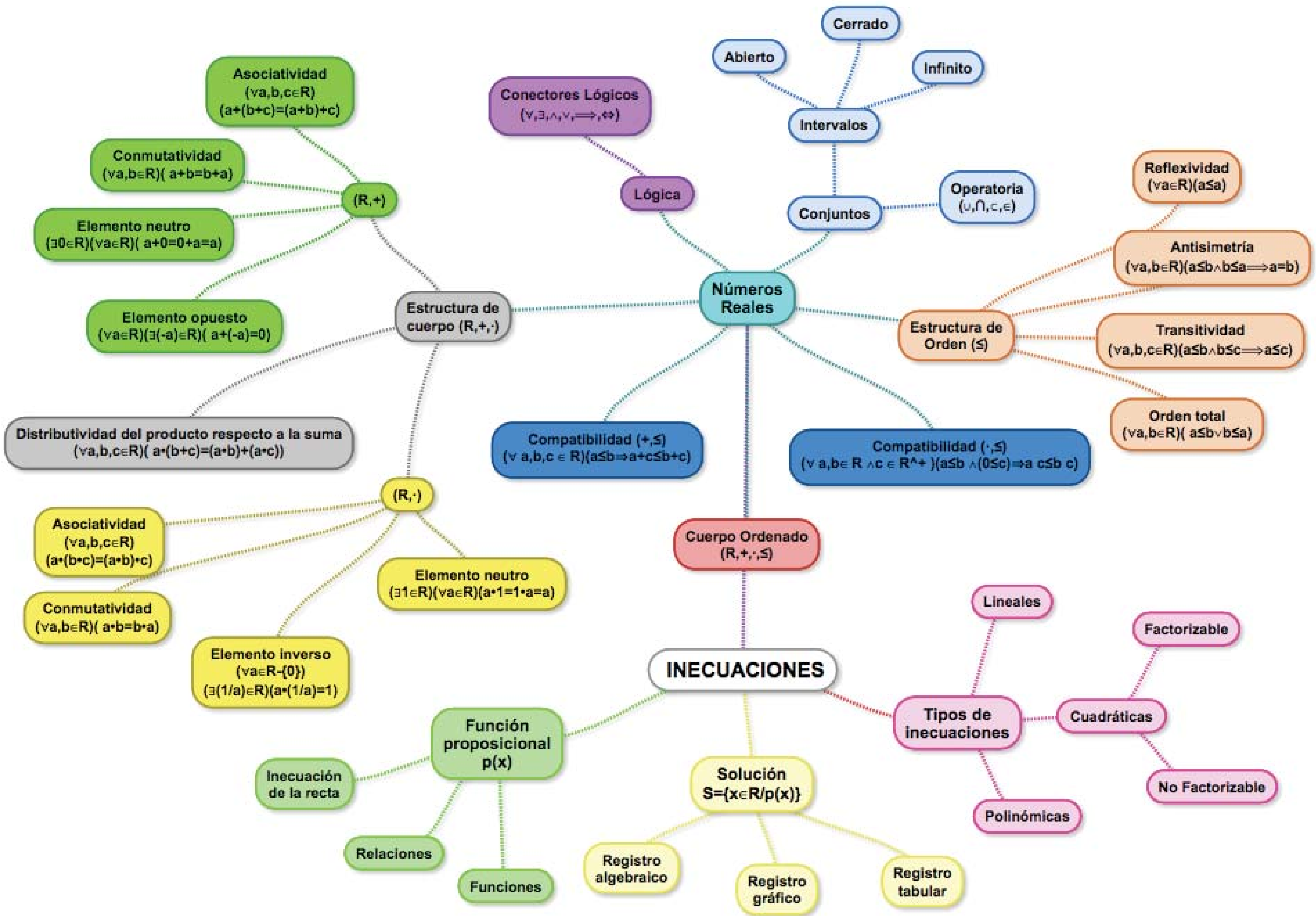


Figura 16 Mapa conceptual del concepto inecuaciones (Creación propia)

Barrido Curricular

Al realizar un barrido curricular por los Planes y Programas del Ministerio de Educación de Chile, es posible observar que las desigualdades se presentan como concepto implícito desde primero básico, cuando el alumno compara y ordena números de mayor a menor y viceversa.

En el año 2009, se realizaron cambios al currículo del plan de formación general del sector de matemática, lo que significó la modificación de los contenidos mínimos obligatorios, dentro de los que se considera el estudio de las inecuaciones. Dichos cambios se realizaron de forma paulatina, siendo el año 2012 el de los cambios al currículo de cuarto a sexto año básico y el año 2016 para los cambios en los niveles de séptimo y octavo básico (Monje, 2017).

Estos cambios también modificaron el currículo de la Educación media ya que, los contenidos que se veían antes en 1º, 2º, 3º año de enseñanza media referentes a inecuaciones se concentraron en 4º año de enseñanza media donde se instaura como tal el concepto inecuación, que antes recibía el tratamiento de desigualdad para trabajar inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones lineales. No obstante, el uso de conectivos lógico, no está presente en el currículo escolar.

Por otra parte, una vez finalizada la enseñanza media, el alumno se ve enfrentado a la Prueba de Selección Universitaria (PSU) que pretende medir sus conocimientos adquiridos en la educación media, donde las inecuaciones no son la excepción. Lo cierto es que en consideración a los cambios curriculares sufridos desde el año 2009 al 2016, la Universidad de Chile, a través de su Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) elaborador de esta prueba de admisión a las Universidades del Consejo de Rectores de las Universidades de Chile (CRUCH) y otras asociadas, consideró prudente incluir estos cambios curriculares de forma paulatina, de modo de no perjudicar al alumno que por cambios en el currículo, terminó con vacíos en los contenidos mínimos obligatorios propuestos por el Ministerio de Educación.

Continuando con el proceso de formación, en lo que respecta a la Educación Superior, no existen planes y programas establecidos por el Ministerio de Educación, sino más bien mallas curriculares definidas por el sistema educativo de cada casa de estudio, donde cada una de esas mallas depende del título al cual se va a optar, grado académico y orientación formativa, lo que se puede corroborar cuando se comparan las mallas curriculares de la misma carrera en universidades distintas.

Consecuente con lo anterior, las inecuaciones en Educación Superior forman parte de los contenidos de la asignatura de álgebra o de cálculo I. Ahora bien, independiente de la asignatura a la cual pertenezca, esta es definida por los axiomas de los números reales $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado, para posteriormente continuar con los diferentes métodos de resolución de inecuaciones lineales y cuadráticas.

Análisis de Textos de Educación Superior

A continuación, se presenta un breve análisis de este objeto matemático con algunos de los textos más utilizados en la Educación Superior en Álgebra Lineal y Cálculo I:

Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (Swokowski, 2011), en este libro las inecuaciones son tratadas como desigualdades, en los Capítulos 2 y 9. En el Capítulo 2 "Ecuaciones y desigualdades" se define como dos cantidades o expresiones que no son iguales, cuya condición se da a partir de los símbolos $>, <, \geq, \leq$ y la solución se obtiene a partir de la sustitución de números en las variables que hacen que el enunciado sea verdadero, no considerando en ningún momento los axiomas de cuerpo y orden de los Reales, así como tampoco la compatibilidad de la suma y el producto con el orden. Las soluciones de las desigualdades no son consideradas como un conjunto, sino más bien un número infinito de soluciones el cual es posible agrupar en intervalos, llegando a ser éstos la representación gráfica del conjunto solución, no hay registros en el plano cartesiano.

En el sentido de los métodos utilizados para resolver desigualdades, se indica que se utilizan las mismas propiedades para resolver ecuaciones, las que se verifica con la sustitución de números enteros en las variables.

Una vez definido el objeto matemático y sus propiedades se presentan diferentes ejemplos de desigualdad, como por ejemplo la desigualdad continua, la racional, la que contiene un valor absoluto.

EJEMPLO 5 **Resolución de una desigualdad racional**

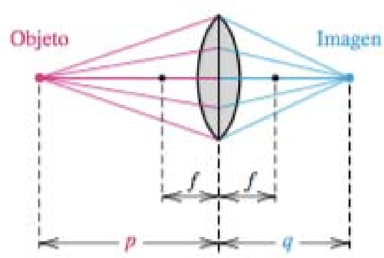
Resuelva la desigualdad $\dfrac{1}{x-2} > 0$.

SOLUCIÓN Como el numerador es positivo, la fracción es positiva si y sólo si el denominador, $x - 2$, es también positivo. Así, $x - 2 > 0$ o, lo que es equivalente, $x > 2$, y las soluciones son todos los números del intervalo infinito $(2, \infty)$ que se ve en la figura 7. ■

Figura 17. Resolución de desigualdad donde no es utilizada la parte axiomática que justifica la solución. Swowski, (2011, p.107)

Un aspecto importante de destacar de lo que hasta este momento se ha realizado, es lo que se puede observar en la figura 18, donde la resolución de desigualdades es atingente a Física, lo que compromete de alguna forma el nivel cognitivo del alumno para el nivel de enseñanza.

FIGURA 8



EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula de una lente**

Como se ilustra en la figura 8, si una lente convexa tiene longitud focal de f centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de p centímetros de la lente con $p > f$, entonces la distancia q desde la lente hasta la imagen está relacionada con p y f mediante la fórmula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Si $f = 5$ cm, ¿qué tan cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen esté a más de 12 centímetros de la lente?

Figura 18. Resolución de desigualdad con ejemplos acorde al nivel cognitivo del alumno. Swokowski (2011, p.107)

La resolución de desigualdades con polinomios de grado mayor que uno se obtiene como un producto de factores lineales $(ax + b)$ o de factores cuadráticos irreductibles $(ax^2 + bx + c)$. De este modo para el Ejemplo 1 (p. 112):
Resuelva la desigualdad:

$$2x^2 - x < 3$$

Registro algebraico

$$2x^2 - x < 3 \quad \text{original}$$
$$2x^2 - x - 3 < 0 \quad \text{iguale a 0 un lado}$$
$$(x + 1)(2x - 3) < 0 \quad \text{factorice}$$

Intervalos:

$$(-\infty, -1),\ \left(-1, \tfrac{3}{2}\right) \ \text{ y } \ \left(\tfrac{3}{2}, \infty\right).$$

Registro Tabular

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$
Signo de $2x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo resultante	$+$	$-$	$+$

Registro gráfico

Se entrega un pool de ejercicios para que el alumno resuelva de 55 ejercicios, 93 ejercicios de repaso, 09 ejercicios de análisis y un Examen de capítulo de 17 ejercicios.

Luego, en este mismo libro, en el Capítulo 9, se trabaja con Sistemas de ecuaciones y desigualdades de la forma:

$$ax + by \leq c \qquad \text{ó} \qquad ax + by \geq c$$

donde *a, b* y *c* son números reales y *x* e *y* las variables, cuya solución es un par ordenado (a, b) que produce un enunciado verdadero si se sustituyen por *x* e *y,* respectivamente. La representación gráfica de la desigualdad en este capítulo es el conjunto de todos los puntos (a, b) de un plano *x y* que dan cumplimiento a la condición propuesta lo que pasa a ser el conjunto solución, el que permitirá identificar equivalencias entre sistemas de desigualdades cuando tengan el mismo conjunto solución.

El aprendizaje de las desigualdades en este comienza con las directrices para trazar la gráfica de una desigualdad lineal que eventualmente también podría estar con valor absoluto *x* e *y*, observándose que los ejemplos fomentan en el alumno el utilizar puntos de prueba para comprobar la veracidad del gráfico.

Por otra parte, se promueve el uso de calculadora, incluyendo ejercicios resueltos para enseñar mostrar al alumno la forma uso y 50 ejercicios para que practique.

En lo que respecta a programación lineal se consideran las desigualdades lineales

$$ax + by \leq c \qquad \text{ó} \qquad ax + by \geq c$$

donde *a, b, c*, son números Reales, entonces la gráfica puede ser una región *R* en el plano *xy,* limitado por un polígono como el de la figura:

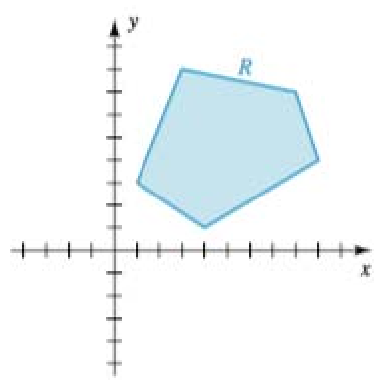


Figura 19. Región limitada por un polígono, Swokowski (2011, p.614)

Junto con la expresión de la forma:

$$C = Ax + By + K$$

donde, *A, B* y *K* son números Reales y el par (x, y) es un punto de *R.* Como para cada par (x, y) se obtiene un valor específico para C, llaman *C* a la función de dos variables *x* e *y.* En programación lineal, *C* se llama función objetivo y las desigualdades del sistema se conocen como restricciones en *C*. La solución del sistema determinadas como soluciones factibles, corresponden a los pares (x, y) correspondientes a los puntos de la región *R.*

Este tipo de problemas permiten tomar el valor máximo o mínimo de una región R, motivo por el cual se plantean 30 ejercicios para que resuelva el alumno, con aplicaciones financieras para representar costo, utilidad, pérdida o un recurso físico.

Álgebra Superior (Moyer y Spielgel, 2007), en este libro las inecuaciones son tratadas en el Capítulo 19 Desigualdades. La definición de desigualdad se da a partir de una cantidad real o expresión que es mayor o igual, menor o igual y mayor o menor estricto que otra. También se determina que es una desigualdad absoluta y una desigualdad condicional. Se especifican cuatro teoremas de las desigualdades que definen el sentido de la desigualdad al sumar, restar, multiplicar o dividir por un número real cuando este es positivo o negativo, presentando ejemplos numéricos para la comprensión del alumno.

La temática del libro presenta primero la definición y luego una serie de problemas para ejercitar lo aprendido. Dentro de los aspectos que llaman la atención tenemos lo siguiente:

1. El valor absoluto se presenta como la distancia a la que se encuentra una cantidad del valor cero en una recta numérica, lo que demuestra que la definición es más bien teórica, sin propiedades que fundamenten de alguna forma la definición propuesta.
2. En este mismo sentido de valor absoluto queda demostrado que no se presenta un lenguaje matemático con conectores lógicos que permita definir operaciones con proposiciones simples, para formar una proposición compuesta.
3. Se compara la resolución de desigualdades de orden superior a la de ecuaciones de orden superior. Lo que denota que lo mismo que estamos enseñando como profesores con estos textos es lo que luego pasa a ser un error en los alumnos.
4. Aparece el método gráfico como una forma de resolver desigualdades lineales con dos variables, sistemas de desigualdades lineales y programación lineal donde la función se maximiza o minimiza sujeta a una serie de condiciones o restricciones

Análisis respecto a la comparación de ambos libros

El primer punto importante a mencionar es que teniendo en consideración que ambos libros son utilizados por alumnos de Educación Superior y Técnico Profesional del siglo XXI, donde las herramientas tecnológicas en estos tiempos están al alcance de todos, no se han incluido situaciones con resolución gráfica trabajadas en algún software matemático, muy por el contrario, ambos libros mantienen la estructura de las ediciones anteriores y no sólo en lo que respecta a resolución de problemas, sino también al sistema de enseñanza utilizado el cual tiende a ser guiado por el profesor, sin dejar que el alumno sea quien construye el conocimiento mediante diferentes herramientas.

En ambos libros, la definición del objeto matemático es abordada con un lenguaje teórico que no sustenta las propiedades y axiomas que dan sentido a la desigualdad, lo que va de la mano con el lenguaje lógico matemático y la teoría conjuntista que son parte importante de la fundamentación matemática y que tampoco son utilizadas.

La representación gráfica en ambos libros es muy escaza, no obstante, el Schaum realiza sus análisis desde los registros gráficos (plano cartesiano) y algebraicos, lo que no ocurre en el Swokowski cuyos registros gráficos se ciñen a los intervalos de solución acompañados, por cierto, de los registros algebraicos.

CAPÍTULO 3
MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

El diseño e implementación del Plan de Clase propuesto, se sustenta en la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), la cual revela las construcciones cognitivas que se generan en el aprendizaje de matemática de los alumnos de Educación Superior, enfatizando el rol que juegan en estas construcciones los conceptos matemáticos.

Cabe señalar que la **Teoría APOE** tiene sus raíces en la **Teoría Cognitiva,** cuyo precursor fue Jean Piaget, quien propone un paradigma centrado en el desarrollo humano, considerando la madurez biológica e historia individual de cada alumno. De este modo el desarrollo estaría regido por la consolidación de estructuras mentales representativas del conocimiento, reguladas por los fundamentos biológicos del desarrollo y por el impacto de los factores de madurez del alumno (Piaget, 1958, citado por Vielma y Salas, 2000).

El avance del intelecto se produce porque los seres humanos buscan un equilibrio cognitivo, es decir, un estado de equilibrio mental en el que se integran nuevas experiencias con los esquemas que se tenían previamente. Cuando estas nuevas experiencias se ajustan con los esquemas previos, se mantiene el equilibrio como en una balanza, por otra parte, cuando se produce una nueva experiencia que es discordante e incomprensible, el alumno experimenta un desequilibrio cognitivo, el cual genera confusión en un primer momento, no obstante, mediante el proceso de acomodación y asimilación se da paso al aprendizaje. En relación, a lo mencionado recientemente, el proceso de asimilación se produce cuando las nuevas experiencias son reinterpretadas para que se relacionen con las antiguas experiencias; mientras que la acomodación ocurre cuando las experiencias anteriores se reestructuran para incluir las nuevas experiencias.

Piaget distingue dos aspectos en el desarrollo del alumno, el primero de ellos corresponde al aspecto psicosocial, que involucra todo lo que el niño recibe de su entorno, familia, colegio, educación en general y el segundo al desarrollo espontáneo o psicológico que corresponde a lo que el alumno aprende o piensa por sí mismo, sin una enseñanza de por medio, considerando las siguientes categorías:

1. Sensoriomotora, entre los 0 a 2 años.
2. Preoperacional, entre los 2 a 7 años.
3. Operacional Concreta, entre los 7 a 12 años.
4. Operacional Formal, comienza a los 12 años con la adolescencia (Piaget, 1973)

Si bien el que nos compete para elaborar el Plan de Clase es el desarrollo psicosocial, es oportuno tomar algunos aspectos del desarrollo psicológico del alumno, considerando que éste entregará ciertos antecedentes en base a la edad promedio que será aplicada, Operacional Formal, que comienza en la adolescencia donde el desarrollo cognitivo es más complejo, debido a que en este período el alumno desarrolla su pensamiento y empieza a ser consciente de lo que le rodea, es capaz de pensar sobre términos abstractos y podrá crear casos hipotéticos de conceptos, por lo que no sólo piensa en casos reales sino también sobre la multitud de posibilidades que podrían ocurrir. Jean Piaget en sus trabajos con el matemático sudafricano Seymour Papert en la Universidad de Ginebra entre 1959 y 1963, observó que los alumnos en el período operacional formal, son capaces de resolver operaciones matemáticas que en etapas anteriores no eran capaces de llevar a cabo, lo que demuestra que existen diferencias cualitativas en las diferentes etapas de la vida.

Consecuente con lo anterior, surge la **Teoría Constructivista del Aprendizaje,** que plantea la construcción del aprendizaje en base a las propias experiencias internas, por lo que no pueden medirse ya que no existe un parámetro de comparación, así como tampoco pueden programarse, de modo que aun cuando se fijen contenidos, objetivos y métodos para el aprendizaje, estos dependerán de las propias vivencias de cada alumno.

A la luz de los antecedentes presentados por Piaget en su Teoría Cognitiva y la Teoría Constructivista, surge la **Teoría APOE,** elaborada por Ed Dubinsky con el propósito de analizar las construcciones mentales del alumno en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Esta teoría plantea que la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas reiterados, mediante un proceso cognitivo donde el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento, favoreciendo con ello la construcción del aprendizaje como un proceso de construcciones mentales **(Acción, Proceso, Objeto y Esquema)**, articuladas a partir de la **abstracción reflexiva**, que había sido definida por Piaget como el proceso mediante el cual el alumno obtiene conocimiento a partir de la experiencia lógico-matemática que surge de sus propias acciones sobre los objetos.

Ahora bien, desde la teoría APOE, Dubinsky considera las abstracciones reflexivas como los mecanismos que dan lugar a las construcciones mentales, las que definiremos como:

1. **Interiorización**, mecanismo mental que ocurren cuando el alumno repite y reflexiona sobre una acción, construyendo una estructura mental igual a la acción externa, activando la reflexión sobre el concepto matemático permitiendo con ello la construcción del proceso.

2. **Coordinación,** mecanismo mental que consiste en hacer coincidir dos procesos, para construir uno solo, es de gran importancia en la construcción de un objeto a partir de otros. (Barbosa, 2008).

3. **Encapsulación,** mecanismo de conversión de una construcción proceso (dinámica) a una construcción objeto (estática), está presente cuando el alumno piensa en el proceso como un todo, realizando y construyendo

transformaciones sobre su totalidad. Es considerada una de las abstracciones reflexivas más importantes para construir conocimiento, pero a su vez, una de las más difíciles de lograr. Permite aplicar el objeto en diferentes contextos, debido a que el alumno se vuelve consciente de la aplicabilidad que posee.

4. **Reversibilidad o Desencapsulación**, consiste en la obtención de un nuevo proceso invirtiendo un proceso interiorizado, dicho de otro modo, a partir de un resultado o situación final, es posible llegar a deducir la situación inicial.

Las construcciones mentales sobre las cuales se articulan las abstracciones reflexivas antes mencionadas son las siguientes:

1. **Acción,** construcción mental repetitiva, que obedece a algoritmos conocidos, donde no existe un razonamiento mayor, sino más bien la repetición paso a paso de algo conocido.

2. **Proceso,** construcción mental que puede ser el resultado de la interiorización de una acción o de la coordinación de dos o más procesos, aparece cuando el alumno logra reflexionar respecto de una acción que ha sido repetida muchas veces, es capaz de describirla sin un grado de análisis y profundidad de comprensión, no obstante, es capaz de invertir los pasos realizados en la obtención del proceso.

3. **Objeto,** construcción mental que aparece cuando el alumno es capaz de reflexionar sobre las acciones que se aplicaron, logra analizar y comprender el proceso realizado como un todo, a tal punto de acuñar el concepto como un objeto, dejando de lado los ejemplos específicos para aplicar y/o considerar las propiedades y axiomática del objeto.

4. **Esquema,** construcción mental que se encuentra presente cuando el alumno es capaz de aplicar distintos métodos de resolución, cobrando sentido la resolución del objeto matemático. Se logra cuando están presentes las construcciones mentales acción, proceso y objeto, no obstante, también puede haber otros esquemas que tengan relación directa con el concepto matemático que se está construyendo, siempre y cuando exista coherencia entre ellos.

Es así como se construye la Teoría APOE, la cual "… comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones;* las acciones se interiorizan para formar *procesos* que se encapsulan para formar *objetos.* Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en *esquemas*" (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996, citado por Roa y Oktaç, 2010).

Las construcciones mentales y mecanismos antes mencionadas, permiten describir la manera como se construye el conocimiento de un determinado objeto matemático, mediante una herramienta para tal fin, conocida como **descomposición genética (DG),** que a su vez permitirá determinar la metodología de enseñanza a utilizar para llegar al equilibrio cognitivo descrito por Piaget.

Los fundamentos que sustentan la elección de la Teoría APOE, se basan en el objetivo específico tres de este proyecto de investigación, el cual consiste en identificar las construcciones mentales necesarias para construir una Descomposición Genética (DG) de Inecuaciones.

El método de investigación que plantea la Teoría APOE, integra tres componentes principales, las cuales están consideradas para realizar el diseño del Plan de Clase: **un análisis teórico** en base a estudios de literatura que involucran el mismo objeto matemático como es el caso de Barbosa (2008), Núñez (2012), Torres (2013) y Monje (2017), el **diseño e implementación de enseñanza** para lo cual se implementó el Plan de Clase y finalmente la **observación, análisis y verificación de datos** cuyos registros se obtuvieron del Plan de Clase

CAPÍTULO 4
DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo al objetivo de la investigación y a su naturaleza, se utilizó el paradigma interpretativo, también conocido como cualitativo, que da sentido a las investigaciones cuando estas son verificables con la experiencia y la observación, existiendo para este caso una interacción entre el alumno y el objeto de investigación.

El diseño de investigación aplicado a este proyecto de innovación corresponde a un Estudio de Clase que es un tipo de investigación cualitativa que se realiza desde la propia práctica educativa, con el propósito de mejorar la calidad profesional del docente. La Unidad de análisis corresponde a las producciones de los estudiantes en relación a los ítems o tareas seleccionadas de la secuencia de enseñanza, para interpretar la DG incipiente en un curso de 21 alumnos de Educación Técnica nivel Superior. El marco teórico elegido (APOE) cobra sentido al momento de identificar los conocimientos del alumno para resolver inecuaciones, desde el análisis de sus producciones para inferir acerca de sus construcciones mentales, toda vez que este marco permite identificar el desarrollo del pensamiento lógico y la forma en que el alumno logra ciertas construcciones mentales sobre un objeto matemático.

Antes de explicar cómo se llevó a cabo esta investigación, es oportuno dar una breve descripción del Estudio de Clase, de manera de comprender de mejor forma el por qué se trabajó con esta metodología de enseñanza aprendizaje. El Estudio de Clase, es una práctica pedagógica colaborativa que nace en Japón y que está definida como un medio de favorecer en profesores el desarrollo sus propias prácticas pedagógicas (Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A., 2012). Con el pasar de los años, se observó que estas prácticas no sólo permitían mejorar la formación docente, sino también la elaboración de textos para el aprendizaje y la innovación curricular.

Isoda et al. (2012) identifican y definen tres procesos en el estudio de clase preparación, clase a investigar y reflexión.

La preparación consiste en orientar el estudio del problema al objetivo de la clase que se va a implementar y preparar los materiales que permitan alcanzar dicho objetivo. La Clase a investigar, es la ejecución del Plan de Clase, observado por otros docentes, donde cada uno de ellos opina sobre la estructura de la clase, la interacción profesor alumno, el material entregado por el docente y genera críticas constructivas que permitan la mejora continua. Finalmente, en el proceso de Reflexión, el docente expone a los otros profesores lo que quiso desarrollar en la clase, por qué utilizó las actividades presentadas y las modificaciones que realizó (si es del caso) en el transcurso de la clase. Una vez terminada la exposición, los profesores que participaron como observadores dan sus reflexiones sobre la clase observada.

Para el diseño del Plan de Clase se trabajó sobre la problemática de este estudio, cuyo eje central se define como la falta de conocimiento en los alumnos de Educación Superior para resolver inecuaciones, utilizando registros gráficos, quedando definido el objetivo de esta clase como: Resolver inecuaciones racionales, con polinomios de grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

El Plan de Clase (Anexo 1) corresponde a la segunda implementación, por lo que existen algunas modificaciones respecto al original que serán mencionadas cuando corresponda.

Las actividades se diseñaron de manera tal que, activaran en los alumnos sus conocimientos previos y permitiesen el tránsito por los diferentes registros algebraico, tabular y gráfico, de manera de corroborar que independiente del registro utilizado el conjunto solución es el mismo.

El material para realizar la clase corresponde a una guía de colaboración para el alumno (Anexo 2) compuesta por tres ítems. El primero de ellos es el resultado de una primera modificación gestionada luego de ser implementada en alumnos de Educación Superior de una Universidad Privada.

La observación de la Clase se realizó en una sesión de 15 minutos presentada al Programa de 2º año de Magíster en Didáctica de la Matemática de la PUCV, frente a Profesores de Matemática de enseñanza básica, media y superior, así como también de Magíster y doctores en Didáctica de Matemática, quienes observaron el desarrollo de las actividades con las guías entregadas, sin perder de vista la metodología empleada para el desarrollo de la clase con la cual se estaba trabajando, debiendo estar presente para este caso la articulación de las construcciones mentales con las abstracciones reflexivas para desarrollar el objeto matemático. Se expuso el Plan de Clase, la justificación de la elección de las actividades para el objetivo propuesto y las modificaciones realizadas. A continuación, los profesores que participaron como observadores entregaron sus opiniones y observaciones sobre la clase presentada.

Plan de Clase

Como se mencionó anteriormente, el Plan de Clase (Anexo 1), corresponde a la segunda implementación, cuya modificación se realizó a la actividad 1 (Anexo 2), de la Guía para el Alumno, donde se le solicita a los alumnos reconocer a cuál de las dos rectas presentadas corresponden la gráfica ya que, originalmente lo que debían hacer era graficar las dos rectas en el plano cartesiano, pero debió ser modificada obedeciendo a la falta de conocimientos previos en los alumnos, resultando ser un distractor para el cumplimiento del objetivo propuesto, toda vez que los alumnos presentaron dificultad para graficar las rectas en el plano cartesiano, no consideraron que asignando valores a x e y podrían obtener la gráfica, lo que significó concentrar gran parte del tiempo de la clase en la primera actividad, cuyo diseño no debía ser más de 15 minutos. Es por ello que, para la segunda implementación, objeto de estudio de este proyecto de innovación, se entregó el registro gráfico de las rectas solicitando al alumno identificar su registro algebraico correspondiente. Esta actividad pretende activar los conocimientos previos como gráfico de rectas en el plano cartesiano, puntos de intersección con el eje X, interpretación gráfica usando intervalos, conversión entre los registros gráfico y algebraico. Consta de varias actividades que el profesor desarrolla de forma gradual con el alumno, como por ejemplo determinar los puntos de intersección de las rectas con el eje X, debiendo hacer $y = 0$, determinar los intervalos que se generaron en el eje X con los puntos de intersección encontrados, expresándolos conforme a su nomenclatura (abierto, cerrado, infinito) para posteriormente determinar el signo de la imagen que proyectan las rectas en cada intervalo generado, observando en el registro gráfico el conjunto solución de la inecuación, lo que a su vez puede ser corroborado por el registro tabular.

La actividad 2 del Anexo 2, propone su desarrollo utilizando las instrucciones de la actividad 1, con el propósito de generar construcción acción de lo realizado. Exceptuando, el momento en que debe utilizar el registro tabular, ya que al ser una gráfica distinta a la anterior donde las rectas se cruzan, se requiere de una abstracción reflexiva que permita una construcción distinta.

La actividad 3 del Anexo 2, consiste en encontrar el conjunto solución de una inecuación formulada como un cociente. Esta actividad se pensó con el propósito de lograr activar el axioma de orden de los Reales, ya que por la propiedad del inverso multiplicativo se puede observar que el signo no cambia aun cuando este en el numerador.

Método de Análisis

El método de análisis se basa en la observación y entrevista con aquellos alumnos que manifiestan respuestas que no se esperaba o cuya respuesta son poco explícitas, no permitiendo identificar qué construcción cognitiva es la lograda.

Con el propósito de establecer ciertos indicadores, respecto a la construcción cognitiva del alumno, se establece una tabla de categorías con indicadores asociados a cada actividad del Plan de Clase, los que, al ser analizados en el capítulo de resultados, permitirán establecer las construcciones necesarias para la concepción del objeto matemático inecuación en ambos registros. Cabe hacer presente que, ninguna de las actividades del Plan de Clase promueve la construcción esquema, sólo podrían llegar a la construcción objeto.

Categorización

Categoría	Indicadores a partir del análisis de producciones	Actividad del Plan de Clase	Matemática en juego
Acción	Transitan entre el registro gráfico de la recta y su registro algebraico	Actividad 1 Actividad 2	• Coordenadas cartesianas • Despejar variables • Álgebra
Acción	Identifican los puntos de intersección con el eje X	Actividad 1 Actividad 2	• Despejar variables X, asignando *y=0*
Acción	Identifican los intervalos delimitados por las rectas representadas graficamente en el eje X	Actividad 1 Actividad 2	• Intervalos abiertos, cerrados, infinitos, acotados • Lógica proposicional • Conectores lógicos • Teoría de conjuntos • Recta numérica de los Reales
Acción	Asocian una función a cada recta para determinar los valores de su imagen y pre-imagen	Actividad 1 Actividad 2	• Funciones
Proceso	Identifican la imagen y pre-imagen de una función representada de manera gráfica, relacionando sus signos con los intervalos delimitados por la intersección de la función con el eje X.	Actividad 1 Actividad 2	• Álgebra • Funciones • Teoría de conjuntos • Intervalos
Objeto	Utilizan el axioma del orden y del cuerpo de los Reales para resolver inecuación dada por un cociente.	Actividad 3	• Propiedades de los Reales. • Parábola • Hipérbola • Gráfica de inecuaciones cuadrática.

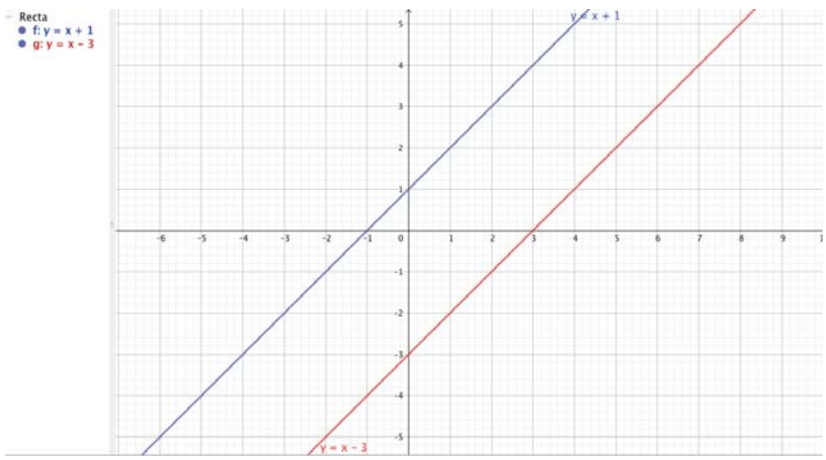
Análisis a Priori

A continuación, se presenta el análisis a priori de las actividades propuestas en el Plan de Clase, este análisis es independiente de la experiencia, en él se considera la Respuesta Experta, las posibles estrategias, dificultades y errores de los alumnos.

Respuesta experta del Plan de Clase

<u>Actividad 1)</u>

Identifique en el plano cartesiano la gráfica de las rectas $\mathrm{L1}: \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$



A continuación, realice las siguientes actividades:

a) Determine los puntos de intersección de las rectas

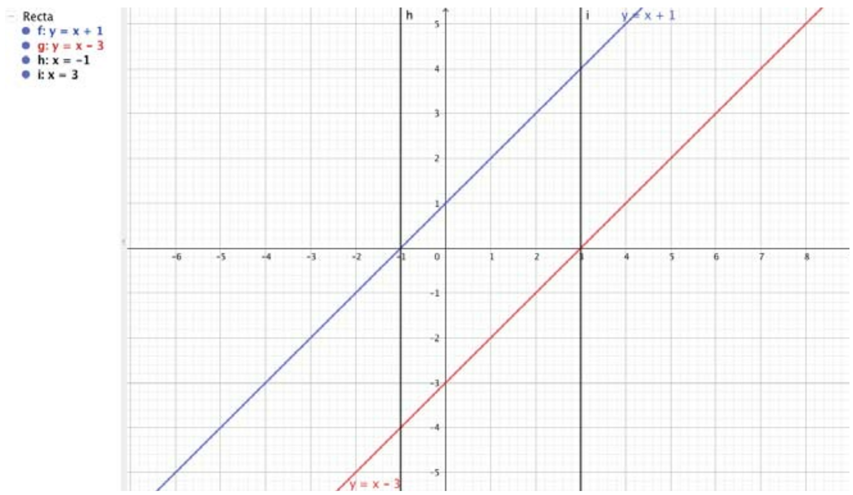
$$\mathrm{L1} : \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$$

con el eje X.

Los puntos de intersección con el eje X se obtienen haciendo *y*=0 para despejar X, de modo que para cada una de las rectas quedaría:

Recta L1	Recta L2
$y = x + 1$ $0 = x + 1$ $-1 = x$	$y = x - 3$ $0 = x - 3$ $3 = x$

b) Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos.



c) Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados. Considerando que los puntos donde la recta intersecta al eje X son los puntos (-1,0) y (3,0), los intervalos son:

$]-\infty,-1[$	$]-1,3[$	$]3,\infty^{+}[$

d) Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado. Para encontrar los signos de cada intervalo se le asigna un valor a la pre-imagen de la función y se busca en la gráfica su imagen, determinando de este modo el signo.

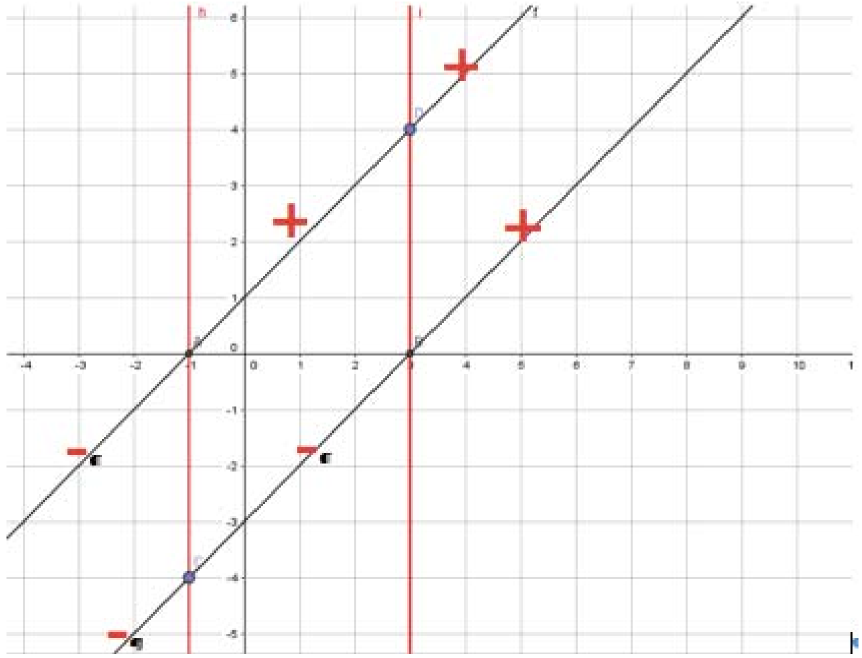
$$f(x) = x + 1$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-1	-
1	2	+
4	5	+

$$f(x) = x - 3$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-5	-
1	-2	-
4	1	+

e) Establezca una analogía de las rectas con el producto $(x+1)(x-3)$
Para establecer una analogía entre las rectas y el producto de ellas, se multiplican los signos obtenidos del siguiente modo:



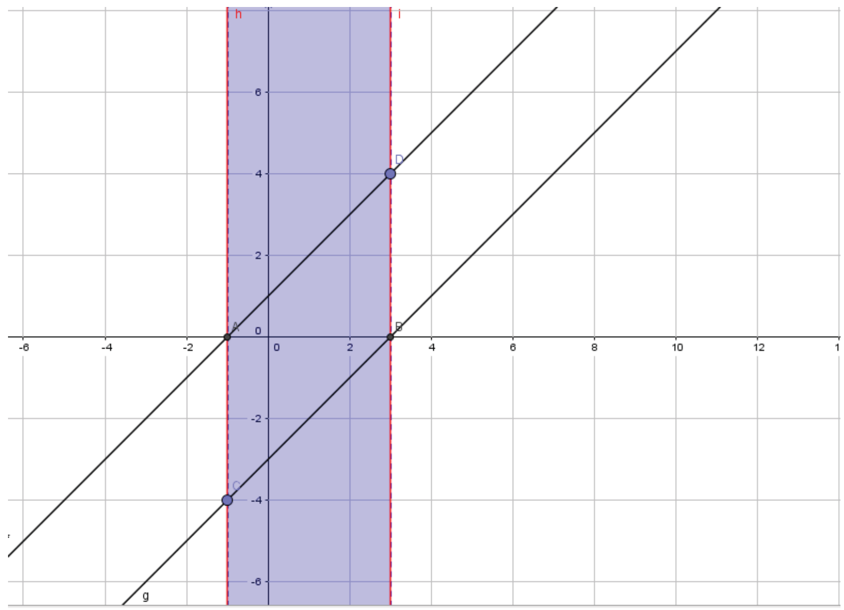
Llevando estos datos al registro tabular:

	$]-\infty,-1[$	$]-1,3[$	$]3,\infty^{+}[$
$(x+1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x+1)(x-3)$	+	-	-

Y, considerando que la condición de la inecuación es verdadera cuando $(x+1)(x-3)<0$, entonces la solución se encuentra en el intervalo $]-1,3[$.

f) Determine el conjunto solución de la inecuación $(x+1)(x-3)<0$.

$$S =]-1{,}3[$$



<u>Actividad 2)</u>

Utilizando el mismo procedimiento realizado en la Actividad 1), determine el conjunto solución de $(2\mathrm{x}+5)(-\mathrm{x}-1)<0$

En este caso el alumno debe graficar las ecuaciones de la recta en el plano cartesiano, lo que puede hacer asignando valores a la abscisa y ordenada del siguiente modo:

$$y = 2x + 5 \qquad\qquad y = -x - 1$$

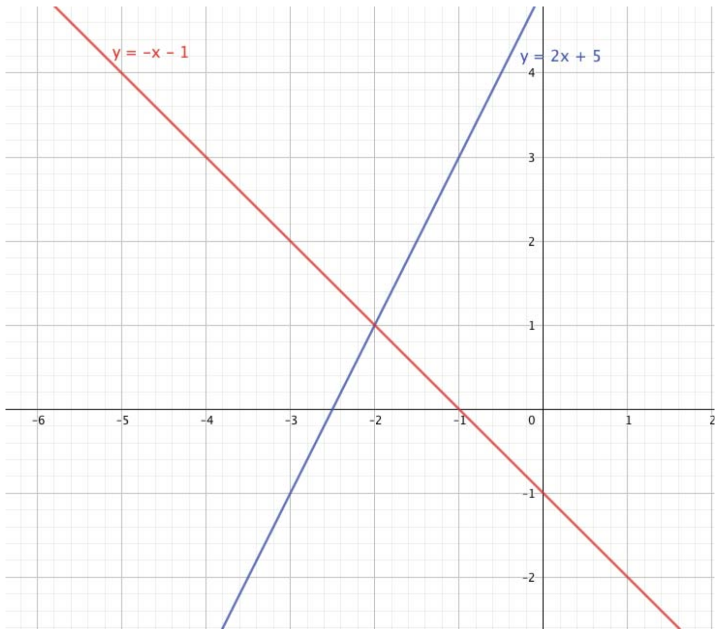
x	y
0	5
1	7
2	9
-1	3
-2	9

x	y
0	-1
1	-2
2	-3
-1	0
-2	1

a) Determine los puntos de intersección de las rectas

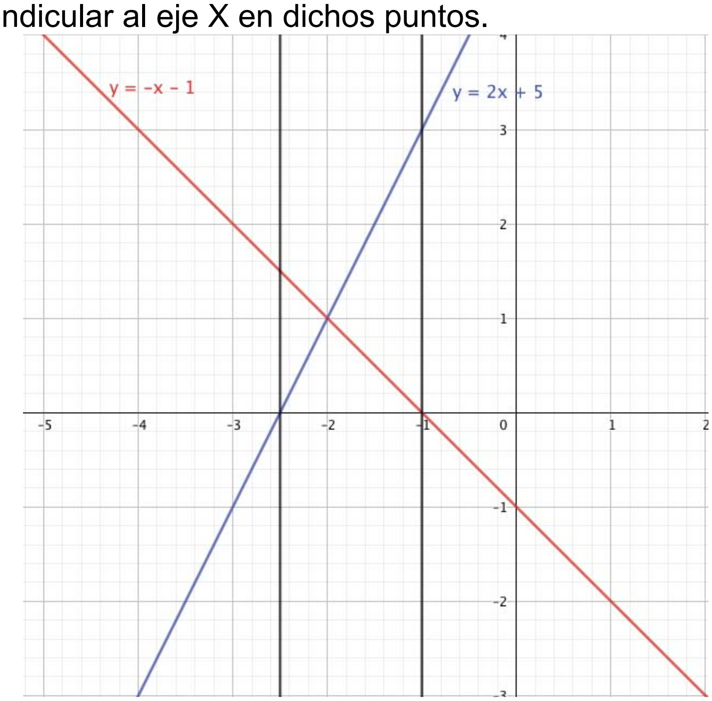
$$L1: y = 2x + 5 \quad \wedge \quad L2: \quad y = -x - 1$$

con el eje X.



Los puntos de intersección con el eje X se obtienen haciendo *y*=0 para despejar X, de modo que estos puntos serán $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y (-1, 0) para L1 y L2 respectivamente.

b) Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos.



c) Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados. Considerando que los puntos donde la recta intersecta al eje X son los puntos ($-\frac{5}{2}$,0) y (-1,0), los intervalos son:

$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2}, -1\right[$	$]-1, \infty^{+}[$

d) Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado. Para encontrar los signos de cada intervalo se le asigna un valor a la pre-imagen de la función y se busca en la gráfica su imagen, determinando de este modo el signo.

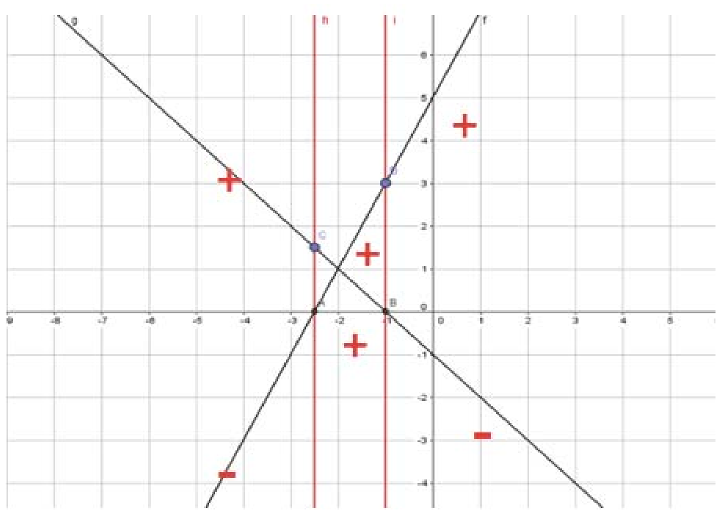
$$f(x) = 2x + 5$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-4	-3	-
-2	1	+
0	5	+

$$f(x) = -x - 1$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-4	3	+
-2	1	+
0	-1	-

e) Establezca una analogía de las rectas con el producto $(2\text{x} + 5)(-\text{x} - 1) < 0$ Para establecer una analogía entre las rectas y el producto de ellas, se multiplican los signos obtenidos del siguiente modo:

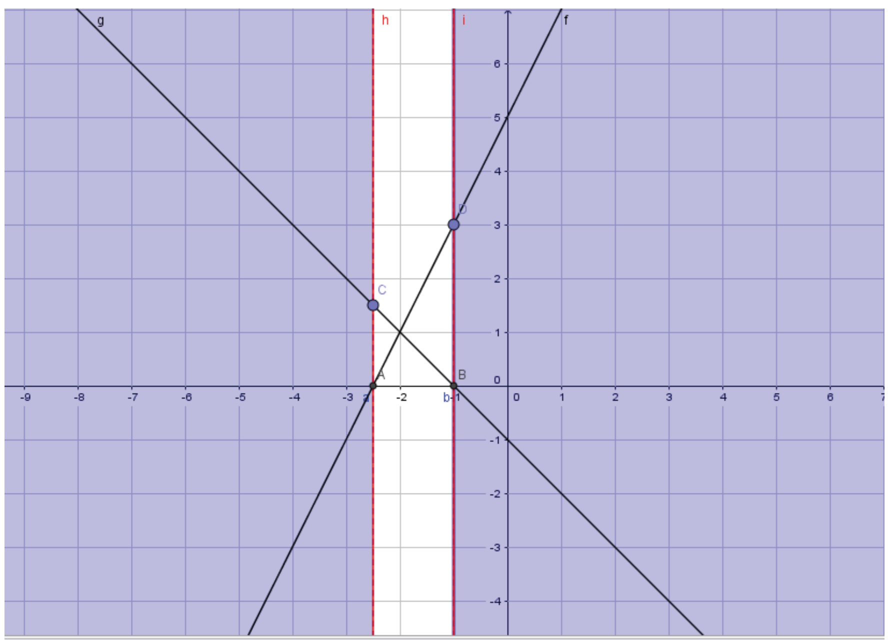


Llevando estos datos al registro tabular:

	$\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2},-1\right[$	$]-1,\infty^{+}[$
$(2x+5)$	-	+	+
$(-x-1)$	+	+	-
$(2x+5)(-x-1)$	-	+	-

Y, considerando que la condición de la inecuación es verdadera cuando $(2\mathrm{x}+5)(-\mathrm{x}-1)<0$, entonces la solución se encuentra en el intervalo:

$$S=\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right[\cup\,]-1,\infty^{+}[.$$



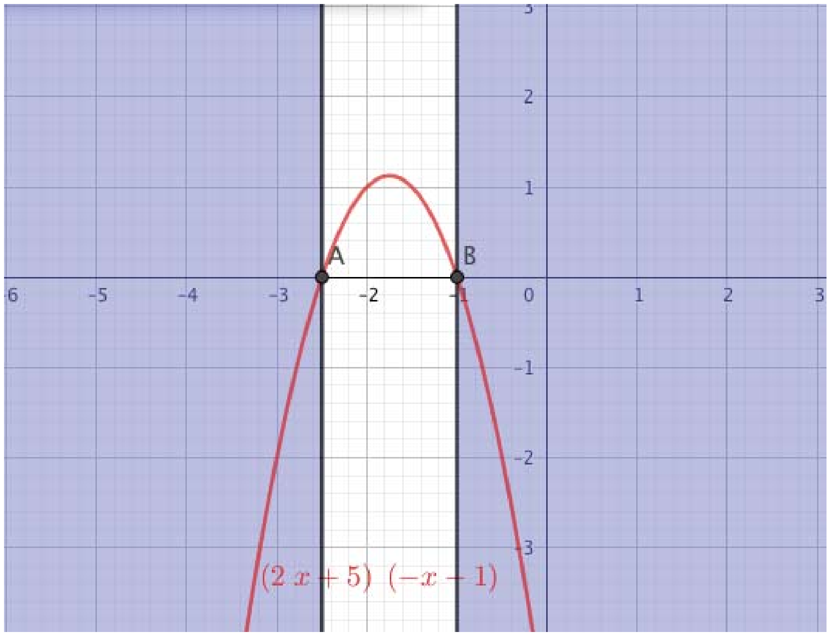
Otra forma de resolver podría ser que los alumnos graficaran la función:

$$(2\mathrm{x}+5)(-\mathrm{x}-1)<0$$

Resolviendo gráficamente:

$$-2x^2-7x-5<0$$

A continuación, grafican la parábola y observan el intervalo en el cual la inecuación es menor que cero, quedando la gráfica como:



Actividad 3)

Determine el conjunto solución de:

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Cuando se presenta esta problemática a los alumnos se espera que ellos adviertan que estamos trabajando con los Reales y que las inecuaciones se fundamentan bajo dos axiomas, que son el axioma de cuerpo y de orden de los Reales, donde para el primero de ellos existe un inverso multiplicativo de la forma:

$$(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})\left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right)\left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$$

donde,

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

Resultando

$$a \cdot a^{-1} = 1 > 0$$

Aplicando condiciones para resolver la inecuación:

$$(x+1)(x+3) < 0$$

$$\{(x+1<0) \wedge (x-3>0)\} \vee \{(x+1>0) \wedge (x-3<0)\}$$
$$\{x<-1 \wedge x-3>0)\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{\emptyset\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{x>-1 \wedge x<3\}$$

El alumno observará que la inecuación es igual a la de la primera actividad, por lo que el conjunto solución será el mismo, es decir:

$$S =]-1{,}3[$$

Posibles estrategias de los alumnos

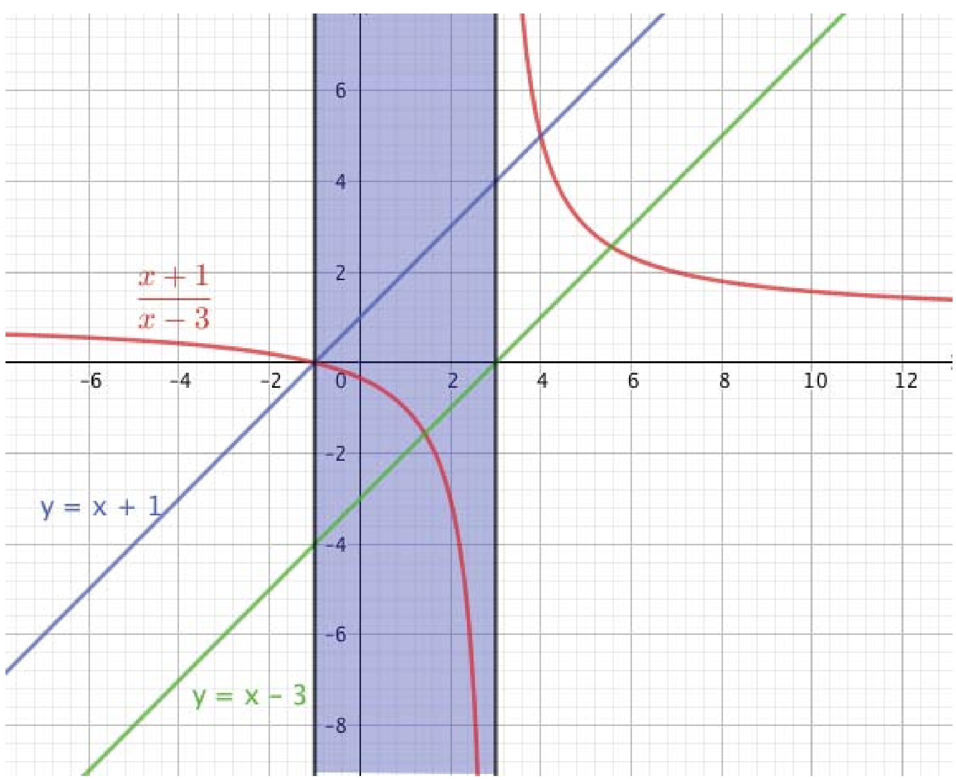
Estrategia 1 (Registro Algebraico y Tabular)

Encontrar los puntos críticos de cada función, los que se pueden obtener al igualar la función a cero, luego colocar esos valores en una tabla donde los puntos críticos van en las columnas y las funciones en las filas y se ve el signo que toma la función antes y después de los puntos críticos. Estableciendo el conjunto solución mediante los signos que dan cumplimiento a la inecuación.

Estrategia 2 (Registro gráfico)

Construir una tabla en la que se asignen valores para la variable x e y, con el objeto de determinar puntos que satisfagan las inecuaciones planteadas, luego trazar las rectas a partir de los puntos obtenidos y ubicar puntos de intersección con el eje X, considerando para ello $y = 0$. Identificar los sectores o intervalos en los cuales se divide el eje x a partir de los puntos de intersección. Reconocer el valor de la imagen de cada recta en cada sector identificado, proyectando la recta sobre el eje Y.

Obtener la respuesta a la inecuación planteada considerando los valores encontrados por las imágenes en cada sector. Dar respuesta a la inecuación a partir de la gráfica elaborada. Comparar las soluciones de las inecuaciones expresadas en forma de producto y en forma de cociente.



Posibles dificultades de los alumnos

1. Dificultad para determinar si los elementos que limitan los intervalos son o no parte del conjunto solución de la inecuación.
2. Dificultad para interpretar los conectores lógicos y las operaciones de conjuntos.
3. Dificultad para graficar la recta en el plano cartesiano al no recordar como asignar los puntos de ella, es decir si x = 1, ¿qué valor toma y?, sin poder identificar a qué corresponde a la abscisa y a la ordenada.
4. Otra dificultad podría ser el hecho de no tener claro que es la pre-imagen y la imagen.
5. Dificultades para determinar de manera algebraica los puntos donde la recta intersecta al eje X, sin tener la gráfica para comprobarlo.

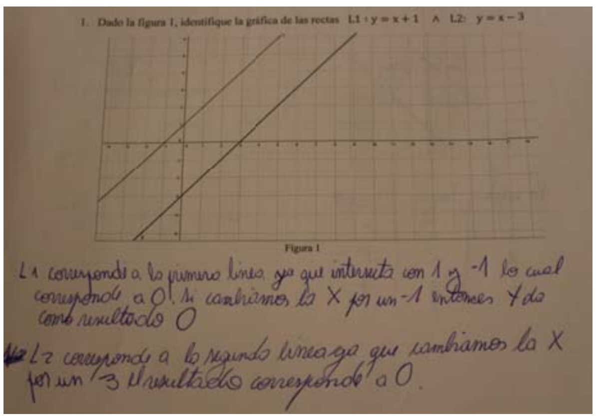
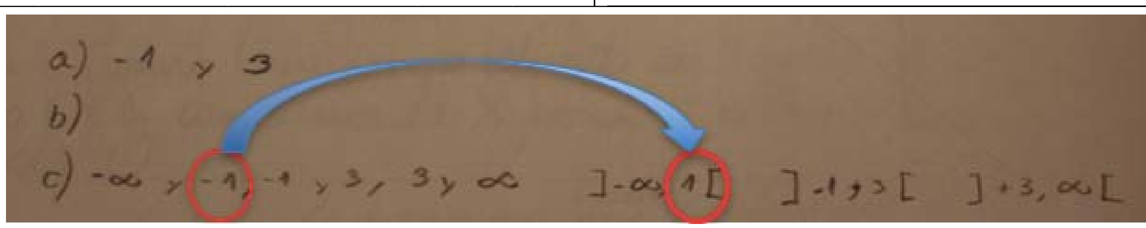
Posibles errores en los alumnos

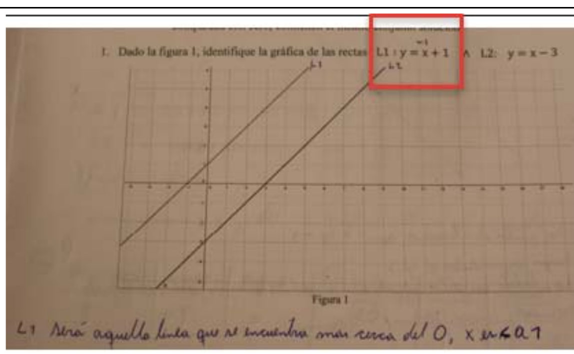
1. Considerar los extremos de los intervalos como elementos del conjunto solución, sin analizar si pertenecen o no al conjunto solución.
2. Someter las inecuaciones a resoluciones cuyo tratamiento es igual al de una ecuación.
3. Utilizar la misma notación para desigualdades estrictas como para desigualdades amplias.
4. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad cuando a ambos miembros de la desigualdad se les suma o resta por el mismo número positivo
5. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad si es que a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por el mismo número negativo.
6. No distinguir los casos cuando el denominador está representado por la variable en estudio de una inecuación.
7. Considerar que abscisa y ordenada es lo mismo que pre-imagen e imagen, respectivamente.

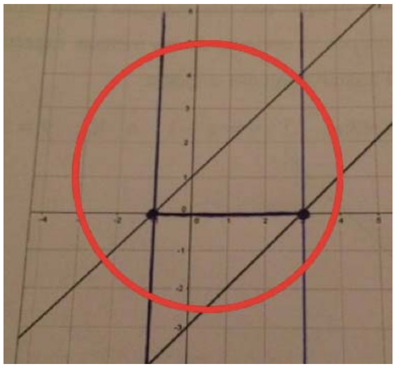
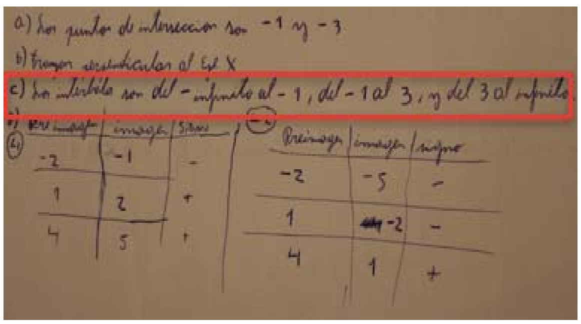
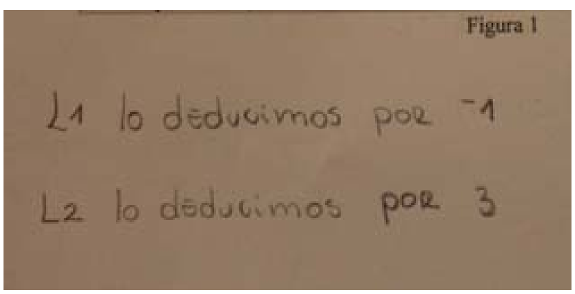
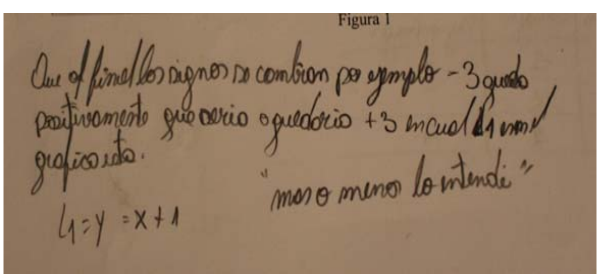
CAPÍTULO 5
RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

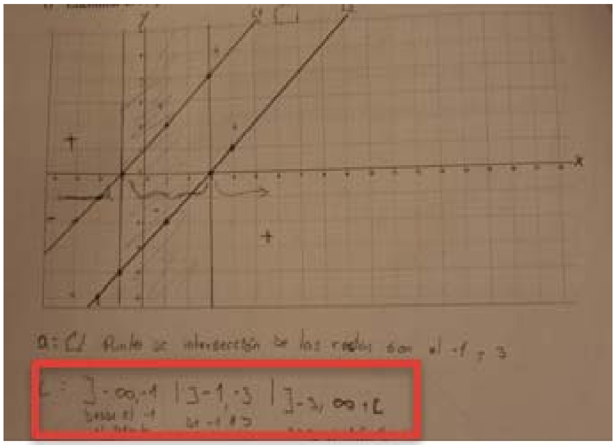
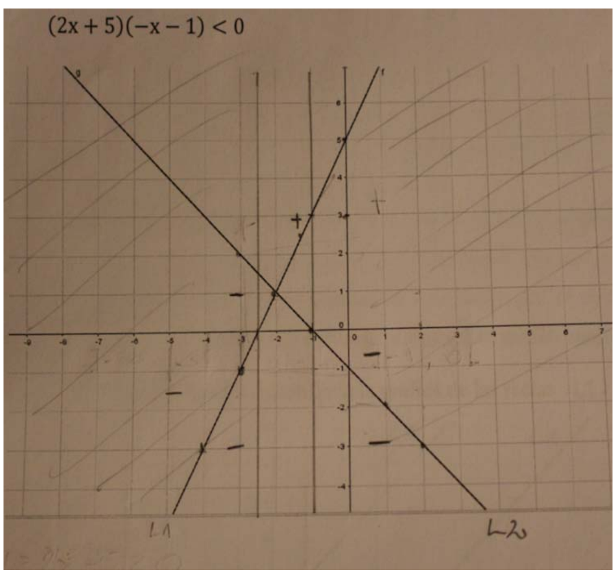
Análisis a Posteriori

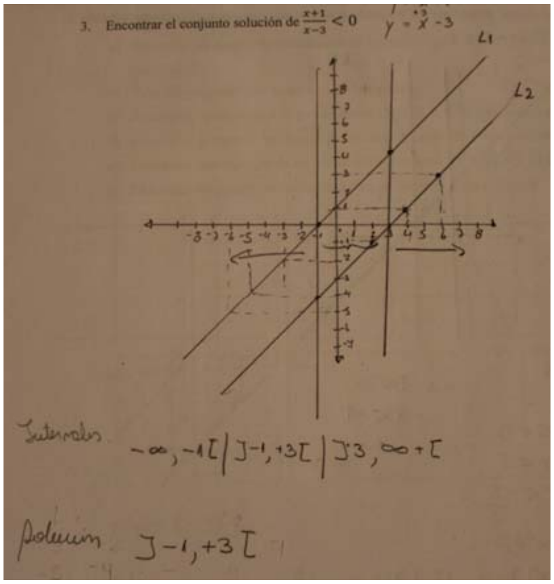
Para realizar el análisis a posteriori se hace presente que la clase se realizó en los 60 minutos programados, entregando los siguientes resultados:

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 1)
Identifique en el plano cartesiano la gráfica de las rectas
$L1: y = x + 1 \quad \wedge \quad L2: \quad y = x - 3$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Esta actividad está diseñada para determinar los conocimientos previos requeridos para realizar la gráfica de una función cualquiera.
En este caso el alumno, utiliza el método de reemplazar para que valores de x e y mirando la gráfica se cumple que el resultado sea cero. Reemplazando los valores en ambas rectas.
Al ser esta una actividad dirigida, donde no existe un análisis por parte del alumno, sino mas bien la repetición de algo conocido, se observa que tiene una construcción acción del objeto matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

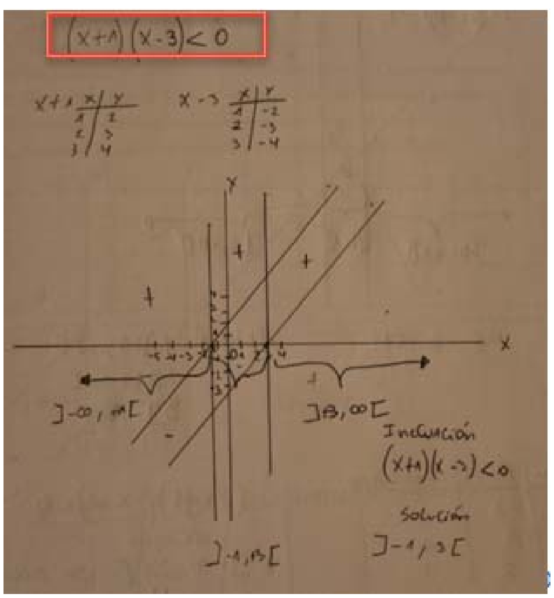
Se observa la complejidad que presenta el alumno para interpretar los intervalos, considerando que primero los escribe como un dictado de números cualquiera y después le asigna los parentesis cuadrados definiendo si lo incluye o no.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Para identificar a cual recta de la gráfica pertenece L1, se observa que probó con el valor -1 en la recta.</td></tr>
</table>

	Solución de un alumno al pedirle trazar la recta perpendicular al punto que corta al eje X, donde se observa que cofunde la recta paralela al eje X con la perpendicular al eje X. Se define como que confunde debido que en la letra b) de la imagen siguiente deja escrito trazar perpendicular.
	El mismo alumno que no distingue entre recta paralela y perpendicular, no es capaz de definir el conjunto solución mediante intervalos, así como tampoco de utilizar el símbolo del infinito (∞). Por lo que se observa que sigue en la construcción mental acción.
	Otra forma de determinar los puntos donde la recta corta al eje X es deduciendo como se presenta en la imagen, ya que no existe ningún cálculo asociado a su deducción.
	Otro alumno sólo asume que los signos se cambian, es decir, si ve que hay un -3, significa que cortará a x en +3. Ahora la pregunta es ¿tendrá claro lo que sucede si la x está con signo negativo?, lo más probable es que no , ya que en el registro escribió “mas o menos lo entendí”.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Si bien este alumno reconoce que las soluciones se presentan como pares ordenados (x,y), se observa que presenta dificultad en la interpretación de los intervalos, y en el orden de los números negativos y positivos, toda vez que escrbió como menor el -1 que el -3.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Actividad 2)
Utilizando el mismo procedimiento realizado en la Actividad 1), determine el conjunto solución de $(2x + 5)(-x - 1) < 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Lo relevante de este registro, es el hecho de identificar que las soluciones no están sólo en el eje X, ya que marca las soluciones como pares ordenados (x,y).</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Actividad 3</u>
Determine el conjunto solución de:
$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>El Alumno resuelve por el mismo método trabajado en la actividad 1 y 2, no obstante, no utiliza los axiomas que definen los Reales para explicar lo que sucede.

Se observa que el alumno sólo logro la construcción acción, toda vez que sólo repitió los pasos de la actividad 1) y al observar que las gráficas de las rectas son iguales, asume que los conjuntos solución también lo son.

No aparece la gráfica de la hipérbola en ninguno de los alumnos que realizan la actividad.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Respecto a este resultado, lo primero que se pensó es que el alumno había utilizado la propiedad del inverso multiplicativo para demostrar el conjunto solución, no obstante cuando se realizó la entrevista se definió que no fue asi, toda vez que el hecho de multiplicar hacia el lado, es una forma de presentar que las soluciones son las mismas.</td></tr>
</table>

Como la teoría APOE, se enfoca en la construcción de esquemas y procesos cognitivos en los sujetos o estudiantes que participan de la clase, el análisis se enfoca en las producciones de estos estudiantes al resolver determinadas tareas, para así establecer los mecanismos presentes que dan lugar a las construcciones mentales de las inecuaciones, las que, de acuerdo a la categorización definida anteriormente, entregan la información siguiente:

Categoría	Indicadores a partir del análisis de producciones	Actividad del Plan de Clase	Resultado del indicador
Acción	Transitan entre el registro gráfico de la recta y su registro algebraico	Actividad 1 Actividad 2	• Los alumnos carecen de conocimientos previos como coordenadas cartesianas. • Los alumnos no logran identificar que el orden en los números negativos no es igual a los positivos.
Acción	Identifican los puntos de intersección con el eje X	Actividad 1 Actividad 2	• Solo 4 (cuatro) alumnos despejaron la variables X, asignando $y = 0,$ los otros alumnos determinaron los intervalos por plena instuición.
Acción	Identifican los intervalos delimitados por las rectas representadas graficamente en el eje X	Actividad 1 Actividad 2	• Los alumnos no logran determinar de forma correcta los intervalos abiertos, cerrados, infinitos, acotados. • Olvidaron la simbología del infinito. • No hay una lógica proposicional en las respuestas. • Los conectores lógicos no son utilizados para la respuesta del conjunto solución, salvo por cuatro alumnos que lo hicieron. • Teoría de conjuntos sólo conocen la operatoria Básica. • No logran establecer un orden en los Reales en lo que respecta a números negartivos y positivos.

Categoría	Indicadores a partir del análisis de producciones	Actividad del Plan de Clase	Resultado del indicador
Acción	Asocian una función a cada recta para determinar los valores de su imagen y pre-imagen	Actividad 1 Actividad 2	• Los valores de imagen y pre-imagen son determinadas por los alumnos sin comprender el por qué de dichos valores.
Proceso	Utilizan registro gráfico	Actividad 2	• No utilizan el álgebra • Las funciones las resuelven de forma mecánica. • No utilizan en los registros utilizados la Teoría de conjuntos, así como tampoco los intervalos.
Proceso	Identifican la imagen y pre-imagen de una función representada de manera gráfica, relacionando sus signos con los intervalos delimitados por la intersección de la función con el eje X.	Actividad 1 Actividad 2	• Álgebra • Funciones • Teoría de conjuntos • Intervalos
Objeto	Utilizan el axioma del orden y del cuerpo de los Reales para resolver inecuación dada por un cociente.	Actividad 3	• Ningun alumno relaciona los axiomas de los Reales en la resolución de la última inecuación. • Los alumnos no resuelven de forma gráfica curvas asociadas a un registro algebraico como parábola, hipérbola. • No comparan el conjunto solución de la gráfica de inecuaciones cuadrática con inecuaciones como tal.

De los registros obtenidos por los alumnos en el Plan de Clase es posible observar que los alumnos carecen de conocimientos previos, lo que concuerda con los análisis bibliográficos realizados y que se ve doblemente perjudicado ya que no hay una continuidad en el aprendizaje de las inecuaciones en el currículo escolar. Si se tuviese que establecer las construcciones mentales del alumno articuladas en el Plan de Clase, se concluiría que sólo llegan a la construcción acción, toda vez que existen muchos vacíos arraigados en los conocimientos previos necesarios para cualquier construcción cognitiva.

La *construcción acción* se logra cuando el alumno sigue instrucciones para dar respuesta a un requerimiento sin prestar mayor observación a las relaciones existentes, por ejemplo cuando iguala a cero la ecuación de la recta para obtener valores críticos y luego traza las perpendiculares al eje X en esos puntos, o cuando determina los intervalos en que se divide el eje X, toda vez que estas acciones obedecen a estrategias repetitivas, guiadas, donde no existe un razonamiento por parte del alumno, sólo lo realiza porque es una acción aprendida pero no puede explicar por qué lo hace.

La *construcción proceso* se encuentra presente cuando el alumno visualiza e identifica en el gráfico, que existen subconjuntos del dominio que vuelven las imágenes positivas o negativas, ya que en este caso existe una reflexión por parte del alumno sobre las acciones realizadas, donde relaciona el dominio con la imagen, debiendo para ello sentar sus bases de análisis en los conocimientos previos de función y ecuación de la recta, lo que para el efecto de este Plan de Clase no fue así.

Consecuente con lo anterior y considerando que el alumno aún no es consciente del proceso como un todo, no es capaz de percibir y construir transformaciones que pueden influir en el proceso, entonces se dice que el proceso no ha sido encapsulado.

Más aún resulta más complejo aún lograr la construcción objeto ya que esta se logra cuando el alumno logra declarar, visualizar, explicitar y comprender las inecuaciones sobre el axioma de cuerpo y orden en los Reales, cuando es capaz de ejecutar acciones en el objeto y desencapsular el objeto y volverlo al proceso que le dio origen cuando sea necesario. Esto se visualiza en el momento que los alumnos identifican que pueden trasladar el signo de la imagen de las rectas, en cada sector de los intervalos generados por los puntos de intersección de la recta en el eje X trasladando esa información a lo que será el conjunto solución de la inecuación planteada.

La construcción esquema alude al desenvolvimiento gráfico de la resolución de la inecuación, desde el punto de vista gráfico se logra cuando el alumno identifica las funciones que pueden ser utilizadas para que el gráfico represente la inecuación que se quiere resolver; o cuándo se deben comparar dos o más gráficos dados, analizando los signos de las imágenes. En esta etapa los alumnos logran reconocer que el conjunto de una inecuación expresada en forma racional constituida por dos expresiones lineales de primer grado con una incógnita tiene el mismo conjunto solución, que el generado por las mismas expresiones lineales pero esta vez desarrolladas como un producto entre ellas y de esta forma podrán extrapolar a encontrar el conjunto solución de cualquier inecuación cuadrática.

Finalmente, a la luz de la Teoría APOE, es posible observar en los alumnos de Educación Técnica nivel Superior que hay una falta de conocimientos previos en el desarrollo del Plan de Clase, lo que resulta ser una amenaza importante, que impide la articulación de cualquier construcción mental que se quiera lograr, motivo por el cual se sugiere la implementación de una secuencia didáctica de tres clases, donde el alumno pueda construir el conocimiento sobre la base de los conocimientos previos que sería la primera clase, a continuación el Plan de Clase presentado ya que, al estar los conocimientos previos sería posible articular las construcciones mentales del objeto matemático para llegar a encapsular el concepto inecuación y finalmente un plan de clase tres que permita articular los diferentes registros para la resolución de las inecuaciones y como ellos definen el conjunto solución de la inecuación, logrando así la construcción esquema.

Secuencia Didáctica para el Objeto Matemático Inecuaciones

1) **Nivel de Implementación**
   Primer año Educación Superior nivel Técnico Profesional.

2) **Encargado de la Implementación**
   Marcela Mabel Fuentes González

3) **Tiempo asignado a cada implementación**
   60' cronológicos.

4) **Objetivos de la Secuencia Didáctica**

Plan de Clase Nº1 (Anexo 3)

Objetivo de la Clase: Resolver de forma algebraica y gráfica inecuaciones lineales y racionales, utilizando los conocimientos previos que definen la inecuación en los Reales.

Plan de Clase Nº2 (Anexo 6)

Objetivo de la Clase: Resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios tienen grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

Este Plan de Clase corresponde al Estudio de Clase analizado en esta Propuesta de Innovación, vale decir, a la clase puesta en práctica, no obstante, se menciona nuevamente, ya que en este caso se le hicieron las mejoras propuestas del análisis realizado.

Plan de Clase Nº3 (Anexo 9)

Objetivo de la Clase: Argumentar la equivalencia entre las inecuaciones por el método gráfico, a partir del conjunto solución.

CAPÍTULO 6
CONCLUSIONES

La Monografía presentada, cumplió con el primer objetivo específico que consistía en diseñar e implementar un Plan de Clase que permitiese identificar las dificultades para la resolución de las inecuaciones a partir de los registros gráficos, a su vez permitió identificar de forma concreta qué conocimientos previos son necesarios para lograr esa articulación entre las diferentes construcciones mentales, lo cual va de la mano con la literatura citada que da a conocer que los mismos problemas presentados por los alumnos chilenos se manifiestan en distintas partes del mundo.

Para la elaboración de este Plan de Clase se revisaron estudios que demostraron que uno de los factores dominantes en la Construcción Mental de Inecuación, es la falta de conocimientos previos, seguido por la inconsistencia en el programa curricular de enseñanza media respecto a las inecuaciones, considerando que son trabajadas por el alumno en 4º, luego en 7º y finalmente en 4º medio, bajo miradas muy distintas conforme al tipo de actividades realizadas.

Por otra parte, respecto del estudio de Barbosa (2008) también basado en la Teoría APOE, quien en su análisis sobre el aprendizaje de las inecuaciones por alumnos de Educación Superior define dos construcciones esquemas para las inecuaciones, siendo una de ellas el concepto inecuaciones como tal y el otro la resolución de inecuaciones, al respecto cabe hacer presente que si bien estas construcciones esquemas pueden ser aplicadas a los alumnos de Educación Superior, nos parece prudente manifestar que la construcción del objeto matemático inecuaciones debe ser abordado desde ambos esquemas y no por separado toda vez, que concepto y resolución debiesen conversar sobre todo desde la perspectiva de los registros gráfico, ya que de no ser así nos encontramos con problemas como los presentados por los alumnos que no asocian los axiomas de cuerpo y orden de los Reales para resolver inecuaciones.

Respecto al 2º objetivo específico que corresponde a describir, estudiar e interpretar las construcciones mentales de los alumnos, en el desarrollo de las actividades planificadas para el Plan de Clase, fue posible analizar las diferentes respuestas entregadas lo que permitió realizar modificaciones al Plan de Clase como, por ejemplo, considerar en la actividad 3 realizar la gráfica del cociente, no como rectas sino más bien como curvas y comparar sus soluciones, así como también eliminar aquellos elementos que impidan la articulación de las construcciones mentales para dicho propósito.

Respecto al 3º objetivo que considera proponer una DG para la comprensión y resolución de inecuaciones, es necesario hacer presente que aun cuando los antecedentes recopilados de la monografía resultan ser sólidos y fidedignos y el Plan de Clase diseñado permitió analizar las producciones de los alumnos desde la Teoría APOE, no fue posible estructurar una DG a partir de estos antecedentes, toda vez que no se evidenció la existencia de mecanismos que permitiesen llegar a la construcción esquema y para obtener una DG se requiere de las construcciones mentales Acción , Proceso, Objeto y Esquema, no obstante este objetivo sirvió como una herramienta fundamental para el 4º objetivo específico, que consiste en proponer un diseño didáctico que permita articular las construcciones mentales presentes en los alumnos.

Respecto al diseño didáctico mencionado, se volvieron a tomar en consideración los antecedentes de la monografía, donde aparece la falta de un diseño curricular continuo para el concepto inecuación, ya que después de ser visto en la educación escolar en 7º año básico no se vuelve a resolver inecuaciones hasta 4º año de enseñanza media, para posteriormente resolver inecuaciones en Primer año de Educación Superior, donde se le suma la dificultad de ser resueltas considerando la parte axiomática que no aparece en el diseño curricular escolar. Por otra parte, la información analizada del Plan de Clase, permitió observar que existe una falta abismante de conocimientos previos en los alumnos, lo que fue corroborado a través del análisis de la Teoría APOE ya que, los alumnos sólo lograron construcciones acción y sólo algunos de los alumnos de la clase llegaron a obtener una construcción proceso, es por ello que con estos antecedentes se pensó en la implementación de una Secuencia Didáctica compuesta por 3 clase donde la clase implementada pasa a ser la Segunda Clase que se articula con una Primera Clase que permite activar los conocimientos previos y en una tercera clase que permite transitar por los diferentes registros, condición que permitirá llegar a la construcción esquema de modo de acercarnos más a la construcción de una DG para la comprensión y resolución de inecuaciones.

La Secuencia Didáctica de Inecuaciones permitirá en el Plan de Clase Nº1, activar la construcción acción de los conocimientos previos para resolver inecuaciones de forma algebraica y gráfica, como son la representación de conjuntos, mediante intervalos que son fundamentales para la representación del conjunto solución de las inecuaciones y la resolución de inecuaciones con un grado de dificultad creciente, lo que permite la activación de los axiomas de orden y cuerpo de los Reales que dan sentido a las inecuaciones.

El Plan de Clase Nº2, retoma la construcción acción de los conocimientos previos, utilizándolos como mecanismos mentales que permitirán la construcción proceso para la resolución gráfica de inecuaciones a partir de rectas, no obstante, también se genera construcción acción en los procedimientos utilizados para realizar los registros.

Continuando con la Secuencia Didáctica, el Plan de Clase Nº3, tiene por objetivo encontrar la equivalencia entre las soluciones de tres inecuaciones distintas. Es aquí donde el alumno debe utilizar las construcciones acción y proceso generadas con los Planes de Clase Nº1 y Nº2 para encapsular ese conocimiento y generar la construcción objeto, con la cual el alumno podrá realizar cada registro y compararlo para verificar su equivalencia.

La implementación de esta Secuencia Didáctica, será una herramienta que permitirá de alguna manera, corregir nuestro rol como educadores, al atender necesidades reales de los alumnos, sobre todo en un objeto matemático que sólo presenta modificaciones en el currículo escolar en lo que respecta a horas y nivel de aprendizaje, pero no en lo que respecta a conocimientos requeridos para su concepción en la cognición del alumno de Educación Superior.

REFERENCIAS

Barbosa, K. (2008). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios*. Tesis de Doctorado publicada, Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

Cajory, F. (1991). *A History of Mathematics.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc.

Corry, L. (1994) La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. Mathesis. Filosofía e historia de las Matemáticas, 10(1), 1-24

Dedekind, R. (1872), *Continuidad y números irracionales*, consultado el 12 de noviembre de 2013

Erazo, L., Marmolejo, G. y Muñoz, J. (2013) La conversión en la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Un análisis semiótico de libros de texto. *Revista científica*, 675-678.

Hernández, M. R. (2010). Evolución histórica del concepto de Número. *Autodidacta*, *1*(1), 28-47. Recuperado de: http://www.autodidacta.anpebadajoz.es/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez_feb10.pdf.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2012) (3Ed) *El Estudio de Clases Japonés en perspectiva*. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from ancient to modern times.* Oxford: Oxford University press.

Mena, A. (2010). *Elementos de Matemáticas,1*. Valparaíso: Universidad Católica de Valparaíso.

Monje, Y. (2017). *Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia* (Tesis de Magíster), Universidad Católica de la Santísima Concepción. Concepción.

Moyer, R. y Spielgel, M. (2007) Algebra Superior (3ºEd) McGraw-Hill Interamericana México.

Núñez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas.* Tesis de Magíster publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.

Piaget, J. y Battro, A. M. (1973). *Estudios de psicología genética*. Emece.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(1), 89-112.

Swokowski, E. (13ºEd.) (2011). *Algebra y trigonometría con geometría analítica.* México: CENGAGE Learning.

Torres, R. (2013). Aplicación del Enfoque Gráfico en la enseñanza de Inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. *El cálculo y su enseñanza*, *4*, 83-102.

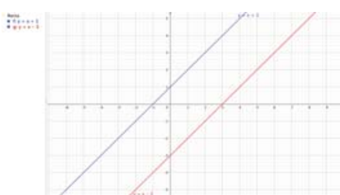
Vielma, E., y Salas, M. (2000). Aportes de las teorías de Vygotsky, Piaget, Bandura y Bruner. Paralelismo en sus posiciones en relación con el desarrollo. Educere, 3 (9), 30-37.

.

ANEXOS

ANEXO 1: PLAN DE CLASE

Objetivo de la clase: Resolver inecuaciones racionales, con polinomios de grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
1. Inicio La clase comienza con el planteamiento de una situación, donde se les solicita identificar en la gráfica a cuál de ellas corresponden las siguientes ecuaciones de la recta $y = x + 1 \ \wedge \ y = x - 3$  **Tiempo: 10'**	Una de las dificultades que se podría presentar es que los alumnos no identificaran los puntos de intersección con el eje x o que no fuesen capaces de asignar valores a x e y para determinar a cuál pertenece cada una de ellas.	El profesor da a conocer el objetivo de la clase y observa la forma en que sus alumnos resuelven lo solicitado, tomando nota de los métodos utilizados. A continuación, solicita a aquellos casos que él desea dar a conocer que salgan a la pizarra a explicar cómo lo hicieron.	En el Plan de Clase N°1, se activaron ciertos conocimientos previos, sobre todo en lo que respecta a la gráfica de inecuaciones, motivo por el cual en este Plan de Clase se esperaría construcciones del tipo acción y proceso.	Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas. **Habilidades en juego:** Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.

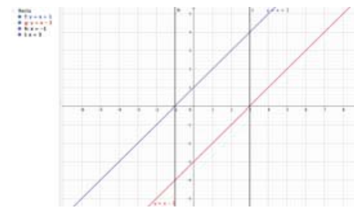
Material complementario:
PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</th><th>POSIBLES DIFICULTADES</th><th>INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE</th><th>POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE</th><th>GESTIÓN DE AULA</th></tr>
<tr>
<td>2. Desarrollo de la actividad: Una vez identificadas las gráficas a la cual corresponde cada recta, los alumnos deben trazar una recta perpendicular al punto donde intersectan al eje X, registrando de forma posterior los intervalos de intersección.

Tiempo: 10’</td>
<td>Una de las dificultades que se podría presentar es con el lenguaje matemático utilizado, al cambiar x e y por abscisa y ordenada respectivamente.

Dificultad para identificar los intervalos generados: $(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, +\infty$ siendo $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

Material complementario:
PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2</td>
<td>El profesor pregunta a sus alumnos: ¿qué pueden observar con respecto a la posición de la recta que se encuentra a la izquierda y a la derecha de la intersección con el eje X?, ¿Cómo es el valor de la ordenada en cada uno de estos sectores?

Luego pregunta ¿Cuáles son los intervalos que se generaron en el eje X, al realizar esta división?</td>
<td>Se espera que los alumnos logren visualizar que, si la recta es creciente, sobre la intersección con el eje X, todas las imágenes serán positivas y recíprocamente bajo la intersección serán negativas, lo cual una vez interiorizado permitiría observar lo que sucede cuando la recta es decreciente, donde esta relación se da de forma inversa.
</td>
<td>Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas.

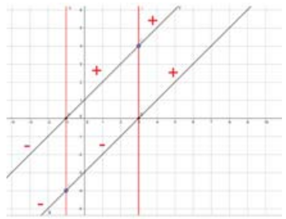
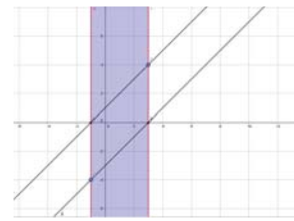
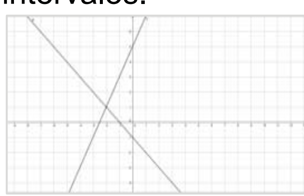
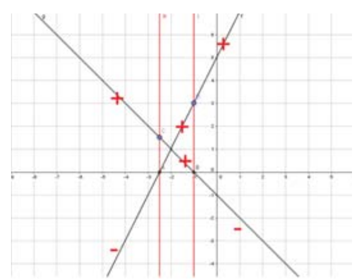
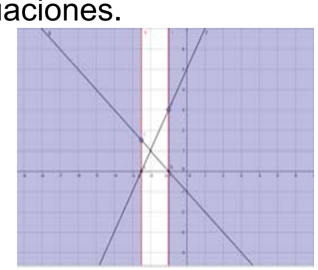
Habilidades en juego:
Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Se les solicita a los alumnos que identifiquen y registren en cada intervalo, la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas.

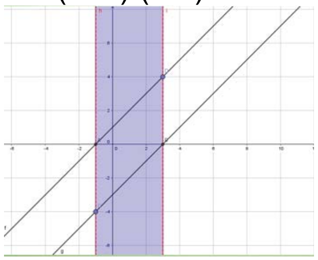
Tiempo: 10’</td>
<td>Dificultad para asignar la condición de positivo y negativo al infinito.

Material complementario:
PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2</td>
<td>¿Qué valor considera la imagen de las funciones presentes en cada uno de los intervalos? ¿Qué característica se ven presente en ellas?</td>
<td>Se espera que los alumnos elaboren una estrategia para registrar la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas por intervalo.

<table>
<tr><th></th><th>$(-\infty, x_1$</th><th>$(x_1, x_2$</th><th>$(x_2, +\infty$</th></tr>
<tr><td>F 1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F 2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas.

Habilidades en juego:
razonamiento, lógico, estrategia y resolución de situaciones.</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
4. A partir del **método establecido** el alumno puede resolver la inecuación $(x+1)(x-3)<0$ **Tiempo: 10'** **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2 (Anexo	Dificultades para identificar el valor que toma el producto de las funciones. 	El Profesor pregunta a los alumnos, ¿Cómo lograrían dar solución a esta inecuación a partir de los registros establecidos? ¿De qué manera estos registros permiten dar solución a esta inecuación?	A partir de los registros los alumnos identifican el producto de las funciones en cada intervalo y dan solución gráfica a la inecuación (área marcada), correspondiente al intervalo $]1,3[$ 	Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas. **Habilidades en juego:** razonamiento, lógico, estrategia y resolución de situaciones
5. Con el método trabajado se les pide **resolver la siguiente inecuación.** $(2x+5)(-x-1)<0$ **Tiempo: 10'** **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2	Al ser gráficas distintas donde las rectas se intersectan, podrían presentar alguna dificultad en la interpretación de los datos para llegar a la obtención de los intervalos. 	En esta actividad el Profesor sólo observa los registros de los alumnos y toma nota de aquellos que realizan una estrategia distinta o presentan alguna dificultad en su desarrollo. Debiendo llegar a establecer los signos de cada intervalo 	A partir de los registros los alumnos identifican el producto de las funciones en cada intervalo y dan solución gráfica a la inecuación (área marcada), correspondiente al intervalo $]-\infty,-2{,}5[\,\cup\,]-1,\infty^{+}[$ Con esta actividad se debiese activar la construcción acción para el objeto matemático inecuaciones. 	Estimular la participación de los alumnos para resolver la actividad, enfrentando el desafío de hacerlo solos. **Habilidades en juego:** razonamiento, lógico, estrategia y resolución de situaciones

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
6. Actividad de Cierre: Considerando el procedimiento para resolver inecuaciones de forma gráfica, ¿cómo graficaría la siguiente inecuación? $$\frac{x+1}{x-3} < 0$$ **Tiempo: 10'**	Dificultad al ver una inecuación racional, sin advertir que, por el axioma de cuerpo de los Reales, existe un inverso multiplicativo de la forma: $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})\left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right)\left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$ donde, $$\frac{1}{a} = a^{-1}$$ Resultando $$a \cdot a^{-1} = 1 > 0$$ **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2 (Anexo Nº1)	El Profesor pregunta a sus alumnos, a partir del procedimiento gráfico realizado, ¿cómo resolverían esta inecuación? ¿Qué contenidos previos permitirían resolver este tipo de inecuaciones? Ahora resuelva por el método gráfico de rectas. Con esta actividad, el Profesor se prepara para el cierre de la actividad preguntando, ¿Qué conclusiones se puede obtener con el desarrollo de las actividades trabajadas?, retomando los conocimientos previos trabajados en el Plan de Clase Nº1 y dando énfasis al desarrollo del método gráfico para resolver inecuaciones.	A partir del axioma de cuerpo de los Reales, los alumnos reconocen que un cociente es el producto de un término con el inverso multiplicativo de otra expresión. El signo de una expresión es la misma que la de su inverso multiplicativo $$\frac{x+1}{x-3} < 0$$ $$(x+1) \cdot \frac{1}{x-3} < 0$$ $(x+1)\ (x-3) < 0$ 	Estimular la participación de los alumnos, explicación en la pizarra. **Habilidades en juego:** Comunicativas al exponer ideas, opiniones, convicciones, fortaleciendo la confianza y seguridad en sí mismo.

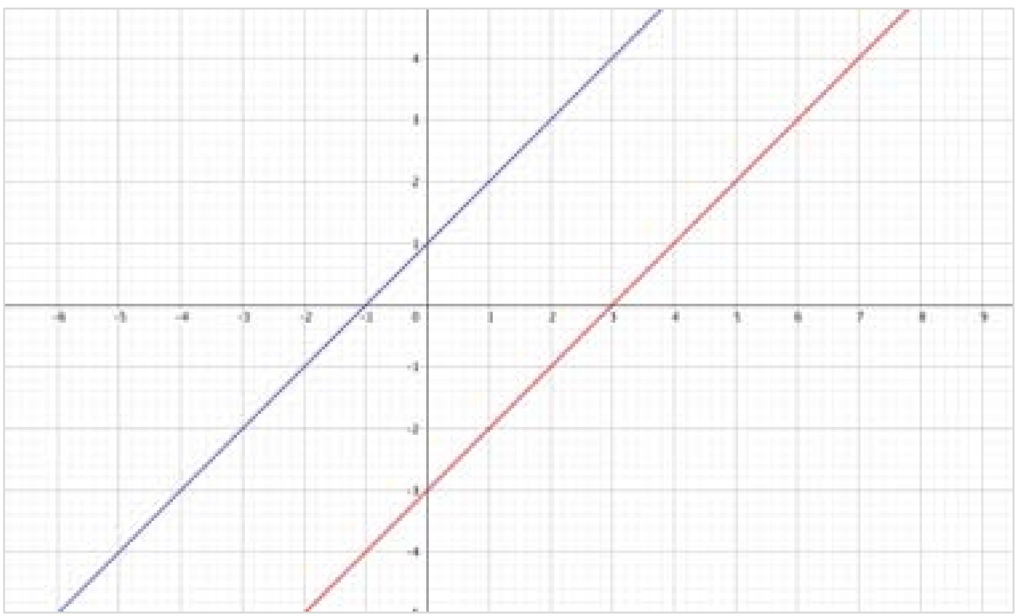
ANEXO 2: GUÍA PARA EL ALUMNO DEL PLAN DE CLASE

Nombre: ___________________________________ Fecha: ____________
Profesor(a): Marcela Fuentes González.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES
POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

Objetivo: Resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios tienen grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

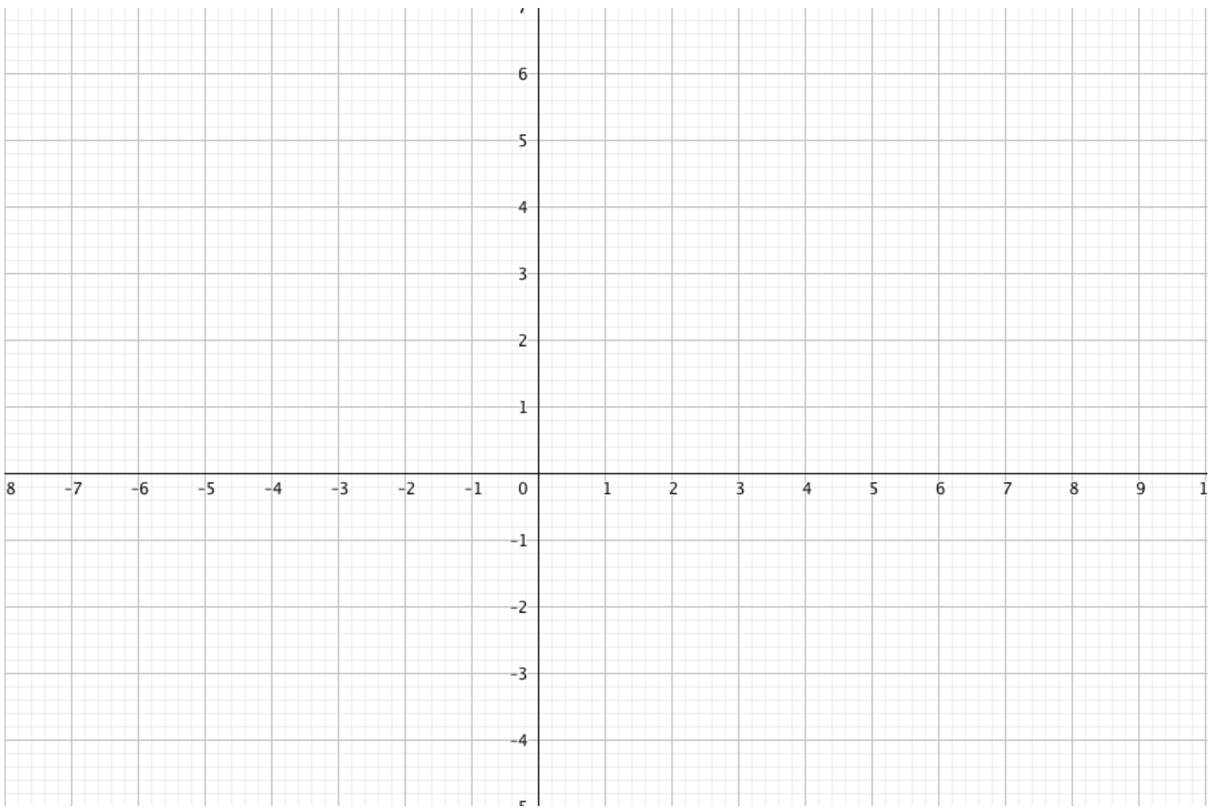
1. Identifique en el plano cartesiano la gráfica de las rectas $\mathrm{L1}: \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$



A continuación, realice las siguientes actividades:

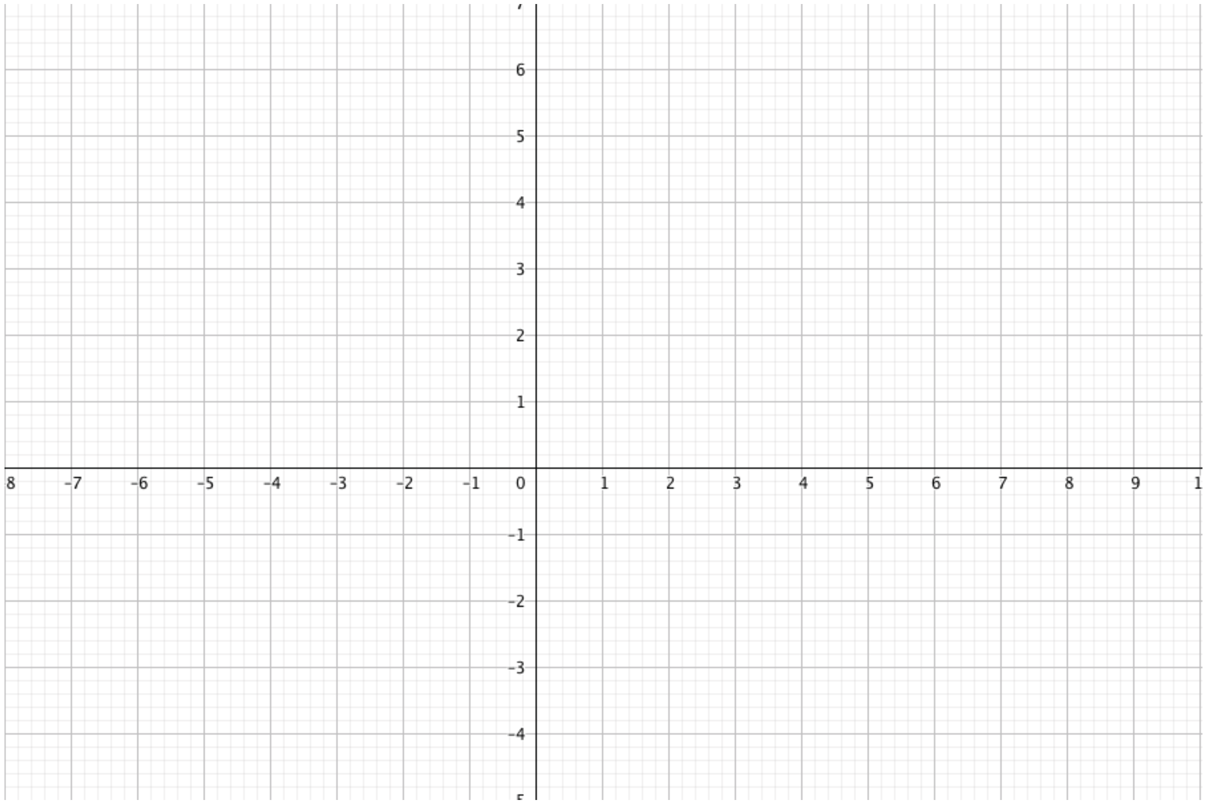
a) Determine los puntos de intersección de las rectas $\mathrm{L1} : \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$ con el eje X.
b) Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos
c) Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados.
d) Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado.
e) Establezca una analogía de las rectas con el producto $(x + 1)(x - 3)$
f) Determine el conjunto solución de la inecuación $(x + 1)(x - 3) < 0$.

3. Utilizando el mismo procedimiento realizado en la Actividad 1), determine el conjunto solución de $(2x + 5)(-x - 1) < 0$



4. Determine el conjunto solución de:

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$



ANEXO 3: PLAN DE CLASE 1 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Objetivo de la clase: Resolver de forma algebraica y gráfica inecuaciones lineales y racionales, utilizando los conocimientos previos que definen la inecuación en los Reales.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
1. Inicio La clase comienza con una pregunta que realiza el profesor a todo el grupo curso ¿que es una inecuación y qué propiedades cumple? **Tiempo: 10'** **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase N°1	Una de las dificultades que se esperaría es que sus respuestas se basaran en las propiedades de las ecuaciones, sin considerar la diferencia existente en el conjunto solución y en las propiedades que la definen.	El Profesor puede establecer estableciendo una comparación entre dos números Reales cualesquiera, es decir, generando acciones que permitan establecer en qué etapa de la construcción mental del alumno se encuentra el concepto inecuación. Luego puede preguntar ¿qué sucede si se multiplican por -1?, ¿cambia en algo el conjunto solución de la inecuación?, ¿sucede lo mismo en las ecuaciones?	Se espera que los alumnos respondan a partir de la construcción cognitiva del objeto matemático adquirido en la Educación Media, generando con sus respuestas, nuevas acciones que activarán los mecanismos mentales que promoverán la construcción de los conocimientos previos de inecuación en la construcción objeto.	Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas. **Habilidades en juego:** Razonamiento inductivo y reproducción de conocimiento
2. Planteamiento del problema. Se trabaja la guía para el alumno entregada de forma individual. En la **actividad 1)** los alumnos deben representar en una recta numérica los siguientes conjuntos: a) $[-3,2]$ b) $]-\infty,1] \cup [3,6[$ c) $]-\infty,3] \cap [-1,\infty^{+}]$ **Tiempo:20'**	Algunas de las dificultades que se esperaría es que los alumnos no identificaran el sentido de pertenencia al conjunto de los elementos situados en los extremos del intervalo cuando este es abierto o cerrado. Otra dificultad podría ser la interpretación de las operaciones de conjuntos que dan como resultado un nuevo conjunto.	El Profesor se pasea por los puestos de trabajo de los alumnos, tomando nota de aquellas respuestas que podrían generar en sus otros compañeros un desequilibrio cognitivo que los lleve a interiorizar la concepción acción en concepción proceso, haciendo que pasen a la pizarra a exponer y justificar su respuesta. **Material complementario:** Guía para el alumno del Plan de Clase N°1	Se espera que los alumnos interioricen las acciones en procesos promoviendo así la construcción de los conocimientos previos de inecuación que deben estar presentes para una posterior DG, como son la estructura de cuerpo y orden de $\mathbb{R}$, correspondencia entre los números reales y la recta numérica, representación e interpretación de operadores lógicos y conjuntistas	Estimular la participación de los alumnos, explicación en la pizarra. **Habilidades en juego:** Comunicativas al exponer ideas, opiniones, convicciones, fortaleciendo la confianza y seguridad en sí mismo.

<table>
<tr>
<th>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</th>
<th>POSIBLES DIFICULTADES</th>
<th>INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE</th>
<th>POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE</th>
<th>GESTIÓN DE AULA</th>
</tr>
<tr>
<td>3. Determine de forma gráfica y algebraica, para qué subconjunto de los Reales se cumple la desigualdad.

<table>
<tr><th>INECUACIÓN</th><th>SOLUCIÓN ALGEBRAICA</th><th>SOLUCIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>$x+1 \le 3$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{2} \le 3$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{-2} \le 3$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x} \le 3$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{x-2} \le 3$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tiempo:20'</td>
<td>Podría suceder que los alumnos no cambiaran el sentido del signo de la inecuación al multiplicar por -1.

Resolver la inecuación como si fuese una ecuación, sin restringir el conjunto solución de x y de x-2 cuando están en el denominador.

Dificultades en la representación gráfica y en la interpretación del conjunto solución.</td>
<td>El Profesor pregunta a sus alumnos: ¿qué diferencia hay en la forma de resolver la inecuación de la 1era y 2da fila?

Luego realiza la misma pregunta, para las inecuaciones de la 2da y 3era fila, esperando que respondan que el signo de la inecuación cambia su sentido al multiplicar por -1

Luego el profesor pregunta, ¿las inecuaciones de la 4ta y 5ta fila se resuelven exactamente igual a las anteriores o presentan alguna diferencia?, de ser así que condición debe darse en la inecuación para que tenga solución?</td>
<td>La actividad fue diseñada de modo que el alumno pueda determinar el conjunto solución de forma gráfica y algebraica, permitiendo con ello la construcción del concepto inecuación bajo el desarrollo de ambos registros.

Se espera que los alumnos construyan acciones sobre las dos primeras inecuaciones, pudiendo lograr la interiorización en la inecuación cuyo denominador es negativo, cuando aplicando las mismas acciones construye un proceso para su desarrollo.

Para el caso donde la incógnita se encuentra en el denominador, se espera que el alumno logre interiorizar con los conocimientos previos, las acciones para la construcción de nuevos procesos para la resolución de inecuaciones, de modo de lograr con la última inecuación propuesta, activar el mecanismo de coordinación entre ambos procesos y construir un proceso de la unión de ambos.</td>
<td>Estimular la participación de los alumnos, con la participación de los alumnos.

Habilidades en juego: Razonamiento y análisis al establecer relaciones entre las diferentes situaciones presentadas.</td>
</tr>
</table>

Material complementario:
Guía para el alumno del Plan de Clase Nº1

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
4. Actividad de cierre: A partir de la representación gráfica de las siguientes inecuaciones: $x - y \leq 1$ $x - y \geq 1$ Determine el conjunto solución de cada una de ellas y describa lo que sucede **Tiempo:10'**	Podría ocurrir que el alumno no fuese capaz de observar que, si bien la gráfica es la misma, el conjunto solución es distinto. **Material complementario:** Guía para el alumno del Plan de Clase Nº1	El Profesor pide a sus alumnos que realicen la gráfica y luego pregunta: ¿qué pueden decir de la gráfica de las inecuaciones si se compara una con la otra? Con esta actividad, el Profesor retoma los conocimientos previos trabajados en la clase, esperando que ellos argumenten la importancia de ellos en el concepto de inecuación.	La actividad fue diseñada de modo que el alumno pueda determinar de forma gráfica la diferencia entre ambas inecuaciones, lo que no resulta tan fácil a la hora de analizaras de forma algebraica. Se espera que los alumnos encapsulen los conocimientos previos del concepto inecuaciones, llegando a la construcción objeto del concepto matemático.	Estimular la participación de los alumnos, con la participación de ellos de forma voluntaria. **Habilidades en juego:** Razonamiento y análisis al establecer relaciones entre las diferentes situaciones presentadas.

ANEXO 4: GUÍA PARA EL ALUMNO DEL PLAN DE CLASE 1 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Nombre: ____ Fecha: __________
Profesor(a): Marcela Fuentes González

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Objetivo: Resolver de forma algebraica y gráfica inecuaciones lineales y racionales, utilizando los conocimientos previos que definen la inecuación en los Reales.

1. Represente en una recta real, los siguientes conjuntos.

   a) $[-3, 2]$

   b) $]-\infty, 1] \cup [3,6[$

   c) $]-\infty, 3] \cap [-1, \infty^{+}]$

2. Determine de forma gráfica y algebraica, para qué subconjunto de los Reales se cumple la desigualdad.

INECUACIÓN	SOLUCIÓN ALGEBRAICA	SOLUCIÓN GRÁFICA
$x + 1 \leq 3$		
$\frac{x+1}{2} \leq 3$		
$\frac{x+1}{-2} \leq 3$		
$\frac{1}{x} \leq 3$		
$\frac{x+1}{x-2} \leq 3$		

4. A partir de la representación gráfica de las siguientes inecuaciones, determine el conjunto solución de cada una de ellas y describa lo que sucede.

$x - y \leq 1$	$x - y \geq 1$
Descripción:	

ANEXO 5: GUÍA PARA EL PROFESOR DEL PLAN DE CLASE 1 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Objetivo: Resolver de forma algebraica y gráfica inecuaciones lineales y racionales, utilizando los conocimientos previos que definen la inecuación en los Reales.

1. SOBRE EL TEMA DE ESTUDIO DEFINICIÓN DE INECUACIONES

Para comenzar la clase es importante conocer la concepción de los alumnos sobre las inecuaciones, es por ello que la clase comienza con la pregunta ¿qué es una inecuación y qué propiedades cumple?, esperando que el alumno responda en base a los contenidos matemáticos de inecuación trabajados en la Unidad 1 Álgebra del Programa de Estudio de Matemática 4to año medio del Plan Común.

No sólo es importante la activación de los conocimientos previos del alumno, sino también la construcción mental en el que se encuentran estos, es por ello que se diseñó este Plan de Clase Nº1, compuesto por tres actividades cuyo objetivo es que el alumno reflexione sobre las propiedades de los números Reales y los axiomas de cuerpo y orden que definen la inecuación, establezca la relación entre los números Reales y la recta Real, utilice de manera adecuada la simbología para representar relaciones de orden, utilice las representaciones gráficas de función en el plano cartesiano para obtener el conjunto solución de las inecuaciones.

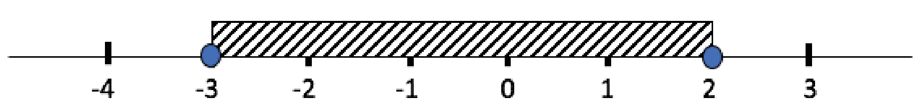
2. ANÁLISIS A PRIORI

RESPUESTA EXPERTA DEL PLAN DE CLASE 1

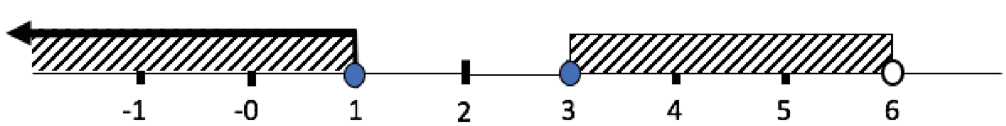
<u>Actividad 1)</u>

Represente en una recta real, los siguientes conjuntos.

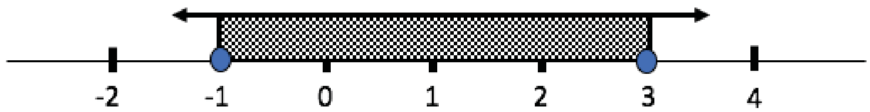
a) $[-3, 2]$



b) $]-\infty, 1] \cup [3,6[$

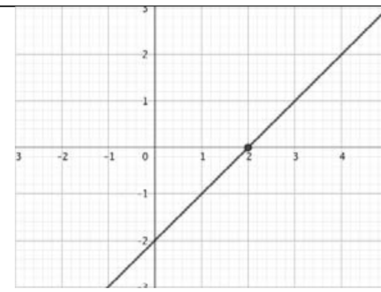
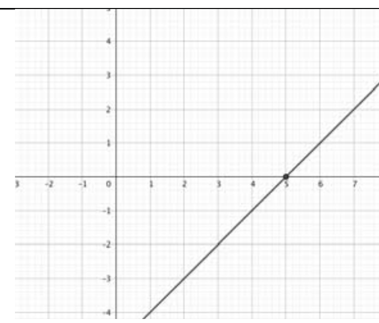
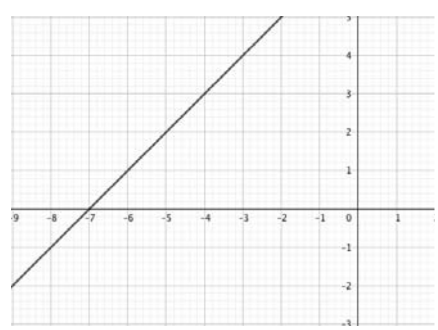


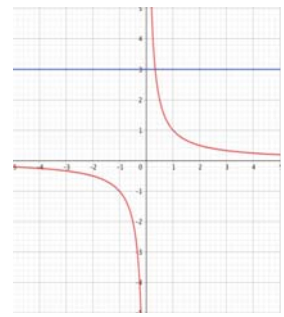
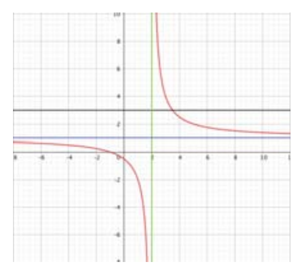
c) $]-\infty, 3] \cap [-1, \infty^{+}]$



Actividad 2)

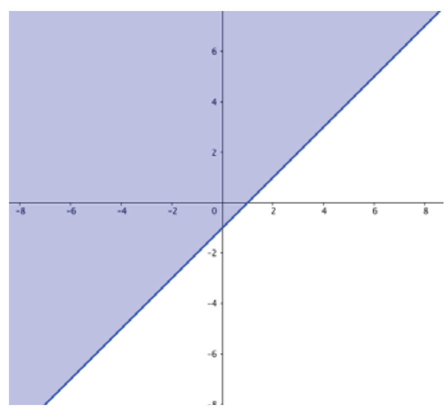
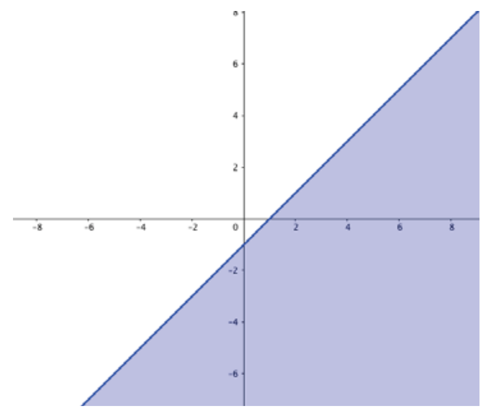
Determine de forma gráfica y algebraica, para qué subconjunto de los Reales se cumple la desigualdad.

INECUACIÓN	SOLUCIÓN ALGEBRAICA	SOLUCIÓN GRÁFICA
$x + 1 \leq 3$	$x + 1 \leq 3 \quad /+(-1)$ $x + 1 - 1 \leq 3 - 1$ $x \leq 2$ $S =]-\infty, 2]$	
$\frac{x+1}{2} \leq 3$	$\frac{x+1}{2} \leq 3 \quad /\cdot 2$ $\left(\frac{x+1}{2}\right) 2 \leq 3 \cdot 2$ $x + 1 \leq 6$ $x + 1 - 1 \leq 6 - 1 \quad /+(-1)$ $x \leq 5$ $S =]-\infty, 5]$	
$\frac{x+1}{-2} \leq 3$	$\frac{x+1}{-2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{2} \leq 3$ $\frac{-x-1}{2} \leq 3 \quad /\cdot 2$ $\frac{(-x-1) \cdot 2}{2} \leq 3 \cdot 2$ $(-x-1) \leq 6 \quad /+1$ $-x - 1 + 1 \leq 6 + 1$ $-x \leq 7 \quad /\cdot (-1)$ $x \geq -7 \quad /\cdot (-1)$ $S =]-7, \infty^{+}]$	

INECUACIÓN	SOLUCIÓN ALGEBRAICA	SOLUCIÓN GRÁFICA
$\frac{1}{x} \leq 3$	$\frac{1}{x} \leq 3 \qquad x \neq 0$ $\frac{1}{x} \leq 3 \wedge ((x < 0) \vee (x > 0))$ $\left(\frac{1}{x} \leq 3 \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{1}{x} \leq 3 \wedge x > 0\right)$ $(1 \geq 3 \cdot x \wedge x < 0) \vee \left(\frac{1}{x} \cdot x \leq 3 \cdot x \wedge x > 0\right)$ $(1 \geq 3x \wedge x < 0) \vee (1 \leq 3x \wedge x > 0)$ $(1 \geq 3x \wedge x < 0) \vee (1 \leq 3x \wedge x > 0)$ $\left(\frac{1}{3} \geq x \wedge x < 0\right) \vee \left(\frac{1}{3} \leq x \wedge x > 0\right)$ $S = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[\frac{1}{3}, \infty^{+}\right[$	
$\frac{x+1}{x-2} \leq 3$	$\frac{x+1}{x-2} - 3 \leq 0 \qquad x \neq 2$ $\frac{x+1}{x-2} - 3 \leq 0 \wedge \big((x-2 < 0)$ $\vee (x-2 > 0)\big)$ $\frac{x+1-3(x-2)}{x-2} \leq 0 \wedge \big((x < 2) \vee (x > 2)\big)$ $\frac{x+1-3x+6}{x-2} \leq 0 \wedge \big((x < 2) \vee (x > 2)\big)$ $\frac{-2x+7}{x-2} \leq 0 \wedge \big((x < 2) \vee (x > 2)\big)$ $\left(\frac{7-2x}{x-2} \leq 0 \wedge x < 2\right) \vee \left(\frac{7-2x}{x-2} \leq 0 \wedge x > 2\right)$ $(7-2x \geq 0 \wedge x < 2) \vee (7-2x \leq 0 \wedge x > 2)$ $(7 \geq 2x \wedge x < 2) \vee (7 \leq 2x \wedge x > 2)$ $\left(\frac{7}{2} \geq x \wedge x < 2\right) \vee \left(\frac{7}{2} \leq x \wedge x > 2\right)$ $\left]-\infty, \mathbf{2}\right[\cup \left[\mathbf{\frac{7}{2}}, \infty^{+}\right[$	

Actividad 3)

A partir de la representación gráfica de las siguientes inecuaciones, determine el conjunto solución de cada una de ellas y describa lo que sucede.

<table>
<tr>
<td>$$x - y \leq 1$$ $$-y \leq 1 - x \quad /\cdot(-1)$$ $$y \geq -1 + x$$ $$y \geq x - 1$$</td>
<td>$$x - y \geq 1$$ $$-y \geq 1 - x \quad /\cdot(-1)$$ $$y \leq -1 + x$$ $$y \leq x - 1$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Descripción:
El alumno debe identificar que ambas inecuaciones tienen la misma gráfica, pero el conjunto solución (área sombreada de l figura), es distinto para cada inecuación ya que la condición en cada una de ellas es distinta. Lo que si tiene en común es que el 1 es solución para ambas inecuaciones.</td>
</tr>
</table>

3. POSIBLES ESTRATEGIAS DE LOS ALUMNOS:

Para la Actividad 1), se espera que los alumnos tracen la recta numérica asignando valores conforme al rango de datos de la pregunta. La elección de trabajar sólo con números enteros se debe a la construcción acción de los intervalos y operatoria de conjuntos necesarias como conocimiento previo para la resolución de inecuaciones, por lo que se buscó alternativas que focalizaran el centro de atención del alumno en esas construcciones.

Para aquellas actividades con operadores de conjuntos (unión e intersección) se espera que los alumnos pinten sobre la recta numérica lo solicitado, considerando que ante una intersección tendrán una zona doblemente marcada a diferencia de lo que ocurre con la unión, sin perder de vista la pertenencia de los números de los extremos del conjunto (paréntesis hacia afuera o hacia adentro), marcando en la recta un círculo pintado cuando el número pertenece al conjunto o un círculo en blanco cuando no pertenece.

Para la Actividad 2) Y 3), en lo que respecta a la solución algebraica, podría ser que los alumnos resuelvan las inecuaciones pasando los términos de un lado para el otro para despejar la variable *x,* igual como lo hacen con las ecuaciones, lo que podría ser aplicado a la primera inecuación, sin embargo, la idea de presentar en ese orden las actividades obedece precisamente a que sea el alumno quien se dé cuenta que para las siguientes inecuaciones no es posible utilizar el método antes descrito, porque la solución de la inecuación no es un número como en la ecuación, sino un conjunto solución que cumple con la condición planteada, lo que tampoco significa que todos los elementos del conjunto son solución de la inecuación, debiendo restringir aquellos números para los cuales la inecuación se indefine, es decir, en qué puntos el denominador se hace cero.

Respecto a la solución gráfica, los alumnos podrían utilizar un Software Matemático como por ejemplo Geogebra, considerando que cuentan con las herramientas y conocimientos necesarios para utilizar este tipo de recurso, no obstante, también podrían resolverlos de forma manual, donde el conjunto solución obtenido puede ser confrontado con el registro algebraico.

4. POSIBLES DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS:

Dificultades en la interpretación de intervalos infinitos y finito, abiertos y cerrados, al no existir una construcción espacial.

Finalmente, para esta actividad la dificultad general, que podría manifestar el alumno, es la discontinuidad en la activación de los conocimientos en el currículum escolar, considerando que esto fue visto en la educación escolar básica y no se volvió a trabajar hasta 4to año de educación media.

Dificultades para expresar el conjunto solución como intervalo utilizando los conectores lógicos que dan sentido a los operadores de conjunto.

En lo que respecta a la representación gráfica, los alumnos pueden presentar dificultad para graficar de forma manual las funciones e interpretar el conjunto solución, sobre todo cuando una de las gráficas corresponde a una hipérbola.

5. POSIBLES ERRORES EN LOS ALUMNOS

No utilizar un lenguaje matemático acorde a los conceptos a las situaciones de estudio, pudiendo llevar a errores conceptuales sobre todo en lo que respecta a conectores lógicos y operatoria de conjuntos.

No cambiar el sentido de la inecuación cuando ésta se multiplica por un número negativo o cambiar el sentido de la inecuación cuando éste se suma con un número de signo negativo.

Considerar el numerador y el denominador independientes el uno de otro, sin considerar que si el denominador tiene signo negativo significa que el numerador también es negativo.

No aplicar el axioma de orden total de los reales, lo que es fundamental para encontrar el conjunto solución de la inecuación cuando la incógnita *x* se encuentra en el denominador, ya que ésta puede tomar valores negativos que cambiarían el sentido de la desigualdad.

Resolver la inecuación como una ecuación, sin considerar la diferencia que existe entre ellas, fundamentada en el axioma de orden y cuerpo de los Reales y la compatibilidad de la suma y el producto con el orden, que terminan por definir la inecuación.

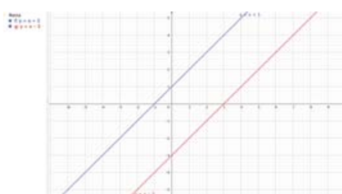
No establecer una relación entre la representación algebraica y gráfica de la inecuación, con sus respectivos intervalos de solución.

6. MATEMÁTICAS EN JUEGO

- Propiedades de los Reales
- Axioma de cuerpo y orden en los Reales
- Recta numérica de los Reales
- Intervalos abiertos, cerrados, infinitos, acotados
- Lógica proposicional
- Conectores lógicos
- Teoría de conjuntos
- Álgebra
- Funciones

ANEXO 6: PLAN DE CLASE 2 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Objetivo de la clase: Resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios tienen grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

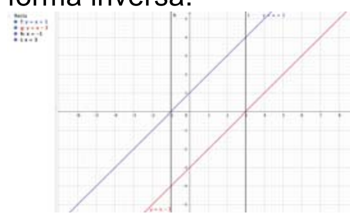
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	**POSIBLES DIFICULTADES**	**INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE**	**POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE**	**GESTIÓN DE AULA**
1. Inicio La clase comienza con el planteamiento de una situación, donde se les solicita identificar en la gráfica a cuál de ellas corresponden las siguientes ecuaciones de la recta $y = x + 1 \ \wedge \ y = x - 3$  **Tiempo: 10'**	Una de las dificultades que se podría presentar es que los alumnos no identificaran los puntos de intersección con el eje x o que no fuesen capaces de asignar valores a x e y para determinar a cuál pertenece cada una de ellas.	El profesor da a conocer el objetivo de la clase y observa la forma en que sus alumnos resuelven lo solicitado, tomando nota de los métodos utilizados. A continuación, solicita a aquellos casos que él desea dar a conocer que salgan a la pizarra a explicar cómo lo hicieron. **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2	En el Plan de Clase Nº1, se activaron ciertos conocimientos previos, sobre todo en lo que respecta a la gráfica de inecuaciones, motivo por el cual en este Plan de Clase se esperaría construcciones del tipo acción y proceso.	Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas. **Habilidades en juego:** Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</th><th>POSIBLES DIFICULTADES</th><th>INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE</th><th>POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE</th><th>GESTIÓN DE AULA</th></tr>
<tr>
<td>2. Desarrollo de la actividad: Una vez identificadas las gráficas a la cual corresponde cada recta, los alumnos deben trazar una recta perpendicular al punto donde intersectan al eje X, registrando de forma posterior los intervalos de intersección.

Tiempo: 10’</td>
<td>Una de las dificultades que se podría presentar es con el lenguaje matemático utilizado, al cambiar x e y por abscisa y ordenada respectivamente.

Dificultad para identificar los intervalos generados: $(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, +\infty)$ siendo $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

Material complementario:
PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2</td>
<td>El profesor pregunta a sus alumnos: ¿qué pueden observar con respecto a la posición de la recta que se encuentra a la izquierda y a la derecha de la intersección con el eje X?, ¿Cómo es el valor de la ordenada en cada uno de estos sectores?

Luego pregunta ¿Cuáles son los intervalos que se generaron en el eje X, al realizar esta división?</td>
<td>Se espera que los alumnos logren visualizar que, si la recta es creciente, sobre la intersección con el eje X, todas las imágenes serán positivas y recíprocamente bajo la intersección serán negativas, lo cual una vez interiorizado permitiría observar lo que sucede cuando la recta es decreciente, donde esta relación se da de forma inversa.
</td>
<td>Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas.

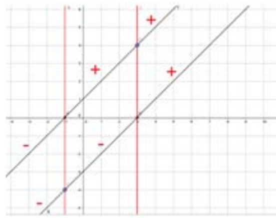
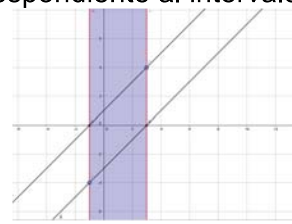
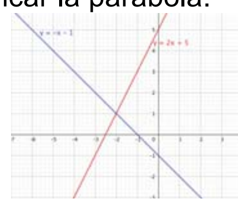
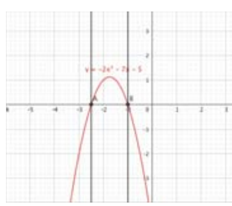
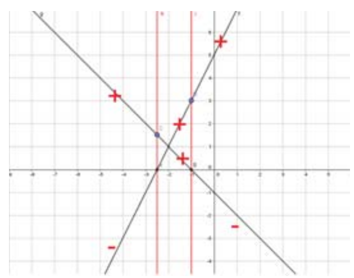
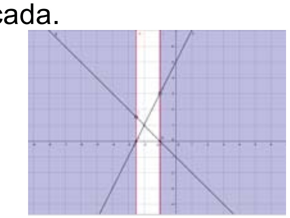
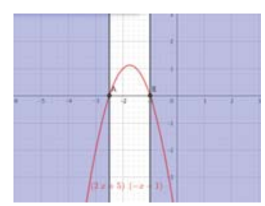
Habilidades en juego: Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Se les solicita a los alumnos que identifiquen y registren en cada intervalo, la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas.

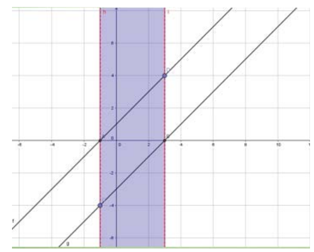
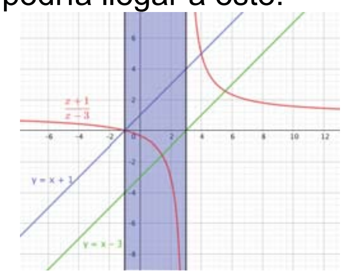
Tiempo: 10’</td>
<td>Dificultad para asignar la condición de positivo y negativo al infinito.

Material complementario:
PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2</td>
<td>¿Qué valor considera la imagen de las funciones presentes en cada uno de los intervalos? ¿Qué característica se ven presente en ellas?</td>
<td>Se espera que los alumnos elaboren una estrategia para registrar la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas por intervalo.

<table><tr><th></th><th>$(-\infty, x$</th><th>(x_1, x_2)</th><th>$(x_2, +\infty)$</th></tr><tr><td>F1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F2</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas.

Habilidades en juego: razonamiento, lógico, estrategia y resolución de problemas.</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
4. A partir del **método establecido** el alumno puede resolver la inecuación $(x+1)(x-3)<0$ **Tiempo: 10'**	Dificultades para identificar el valor que toma el producto de las funciones. 	El Profesor pregunta a los alumnos, ¿Cómo lograrían dar solución a esta inecuación a partir de los registros establecidos? ¿De qué manera estos registros permiten dar solución a esta inecuación?	A partir de los registros los alumnos identifican el producto de las funciones en cada intervalo y dan solución gráfica a la inecuación (área marcada), correspondiente al intervalo $]1{,}3[$ 	Estimular la participación de los alumnos, mediante preguntas dirigidas. **Habilidades en juego:** razonamiento, lógico, estrategia y resolución de
Material complementario: PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2 (Anexo Nº1)				
5. Se les pide a los alumnos **resolver la siguiente inecuación.** $(2x+5)(-x-1)<0$ dando libertad a que lo hagan por el método que ellos consideran el más adecuado para obtener el conjunto solución. **Tiempo: 10'**	Podrían resolver por el método trabajado en la actividad 1) o resolver la inecuación a una inecuación cuadrática y graficar la parábola.  	En esta actividad el Profesor sólo observa los registros de los alumnos y toma nota de aquellos que realizan una estrategia distinta o presentan alguna dificultad en su desarrollo. Debiendo llegar a establecer los signos de cada intervalo 	Si los alumnos resuelven a través de la gráfica de rectas o de la parábola debiesen llegar al mismo resultado, identificando el conjunto solución $]-\infty,-2{,}5[\,\cup\,]-1,\infty^{+}[$ Que corresponde al área marcada.  	Estimular la participación de los alumnos para resolver la actividad, enfrentando el desafío de hacerlo solos. **Habilidades en juego:** razonamiento, lógico, estrategia y resolución de problemas.
Material complementario: PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2 (Anexo Nº1)				

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
6. Actividad de Cierre: Resuelva por dos métodos diferentes la siguiente inecuación $\frac{x+1}{x-3} < 0$ **Tiempo: 10'** **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 2	Dificultad al ver una inecuación racional, sin advertir que, por el axioma de cuerpo de los Reales, existe un inverso multiplicativo de la forma: $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})$ $\left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right)\left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$ donde, $\frac{1}{a} = a^{-1}$ Resultando $a \cdot a^{-1} = 1 > 0$	El Profesor pregunta a sus alumnos, ¿cómo resolverían esta inecuación? ¿Qué contenidos previos permitirían resolver este tipo de inecuaciones? Ahora resuelva por el método gráfico de rectas. Con esta actividad, el Profesor se prepara para el cierre de la actividad preguntando, ¿Qué conclusiones se puede obtener con el desarrollo de las actividades trabajadas?, retomando los conocimientos previos trabajados en el Plan de Clase Nº1 y dando énfasis al desarrollo del método gráfico para resolver inecuaciones.	A partir del axioma de cuerpo de los Reales, los alumnos reconocen que un cociente es el producto de un término con el inverso multiplicativo de otra expresión. El signo de una expresión es la misma que la de su inverso multiplicativo $(x-3) \cdot \frac{1}{x-3} = 1$  También podría llegar a esto:  	Estimular la participación de los alumnos, explicación en la pizarra. **Habilidades en juego:** Comunicativas al exponer ideas, opiniones, convicciones, fortaleciendo la confianza y seguridad en sí mismo.

ANEXO 7: GUÍA PARA EL AUMNO DEL PLAN DE CLASE 2 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

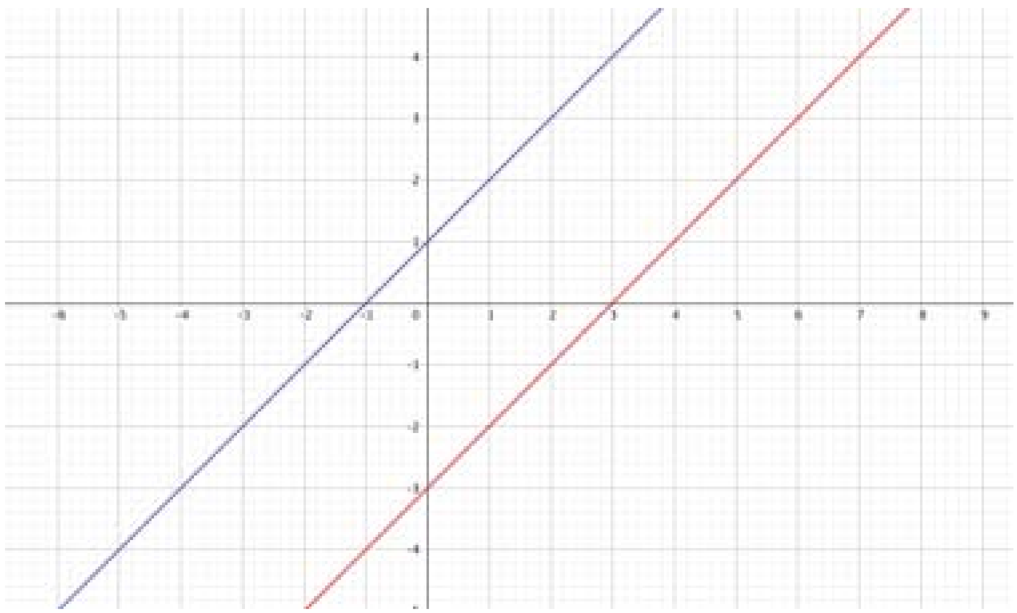
Nombre: ____ Fecha: _______________

Profesor(a): Marcela Fuentes González

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

Objetivo: Resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios tienen grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

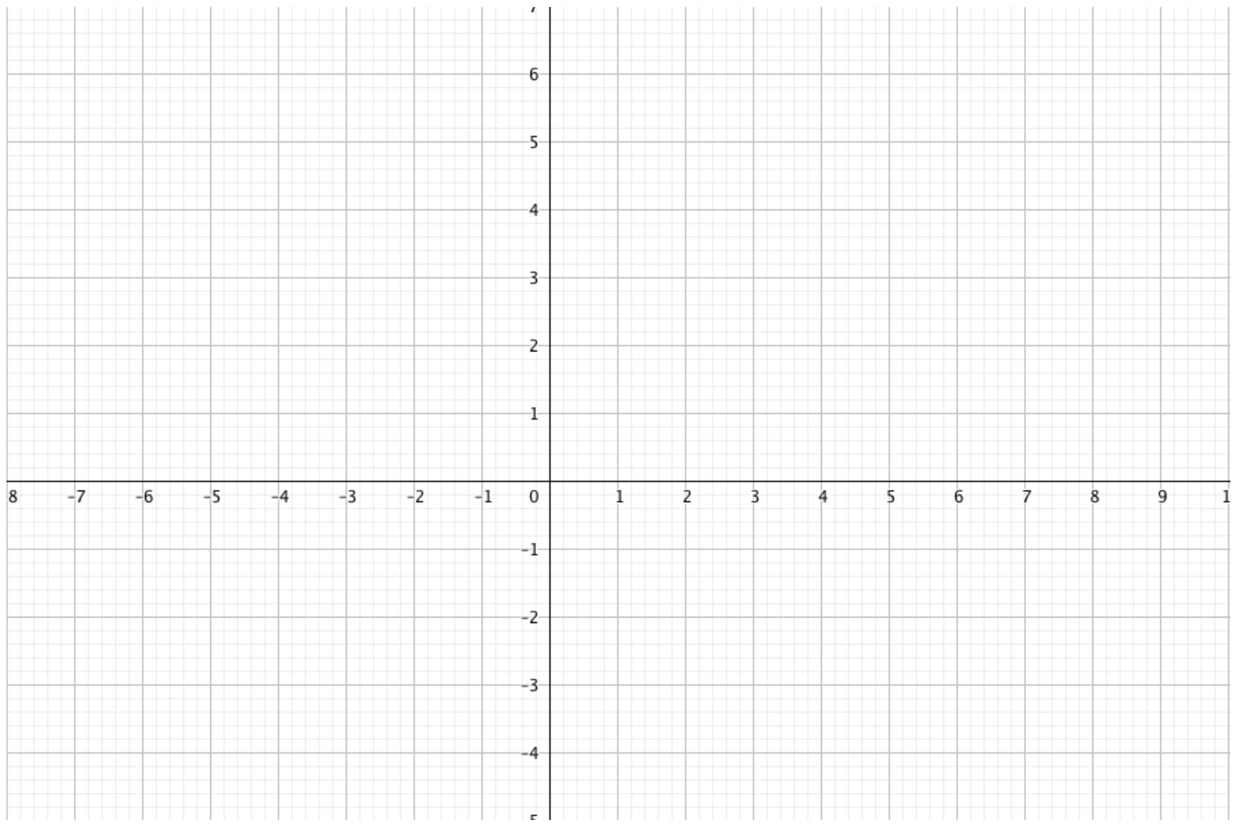
1. Identifique en el plano cartesiano la gráfica de las rectas $\mathrm{L1}: \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$



A continuación, realice las siguientes actividades:

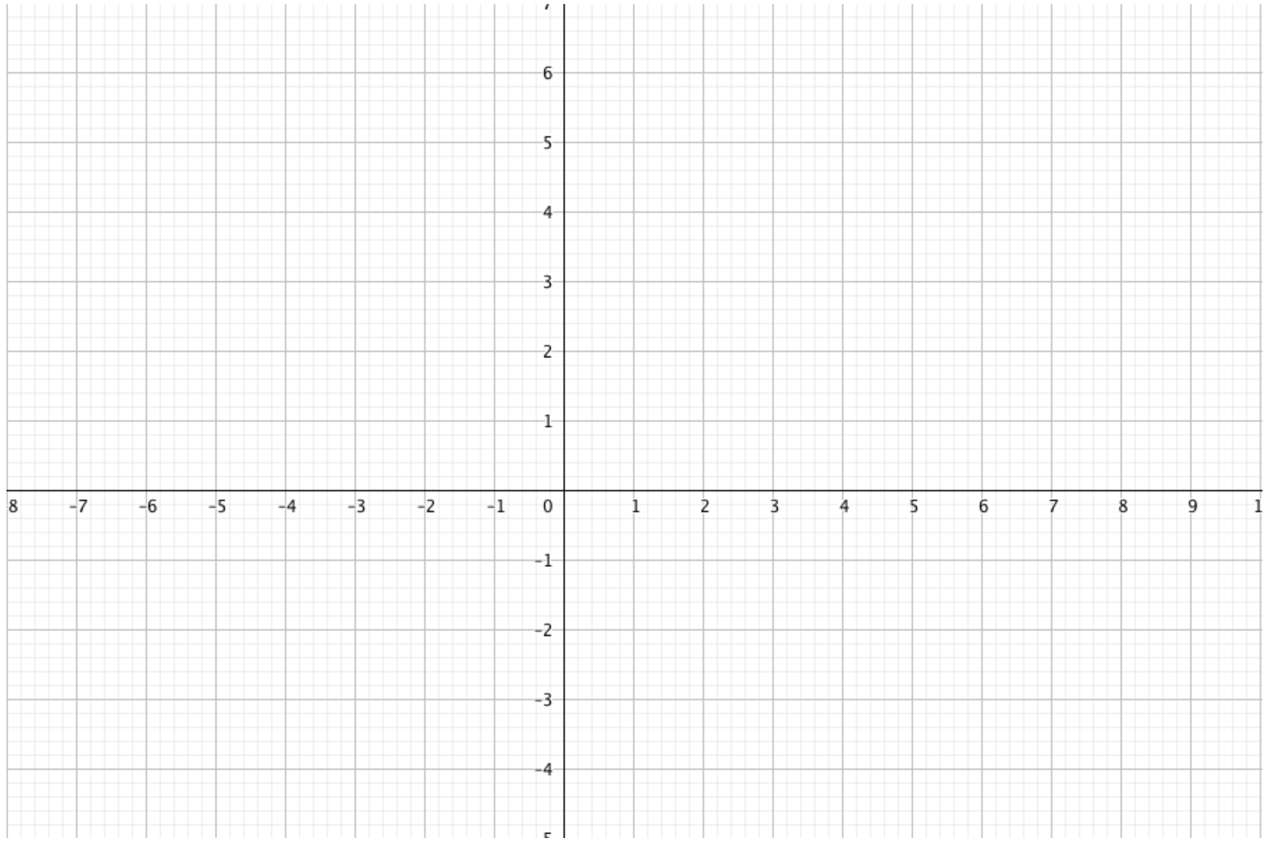
a) Determine los puntos de intersección de las rectas $\mathrm{L1} : \mathrm{y} = \mathrm{x} + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{L2}: \quad \mathrm{y} = \mathrm{x} - 3$ con el eje X.
b) Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos
c) Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados.
d) Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado.
e) Establezca una analogía de las rectas con el producto $(x+1)(x-3)$
f) Determine el conjunto solución de la inecuación $(x+1)(x-3) < 0$.

2. Determine el conjunto solución de $(2x+5)(-x-1)<0$



3. Resuelva por dos métodos diferentes la siguiente inecuación:

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$



ANEXO 8: GUÍA PARA EL PROFESOR DEL PLAN DE CLASE 2 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

Objetivo: Resolver inecuaciones racionales, cuyos polinomios tienen grado menor o igual a dos, por medio del método gráfico, utilizando rectas en la resolución del conjunto solución.

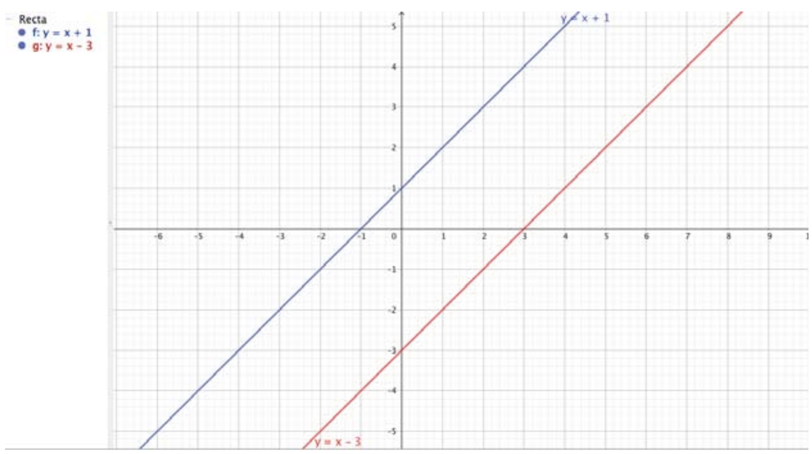
1. ANÁLISIS A PRIORI

RESPUESTA EXPERTA DEL PLAN DE CLASE Nº 2

<u>Actividad 1)</u>

Identifique en el plano cartesiano la gráfica de las rectas

$$\mathrm{L1: y = x + 1} \quad \wedge \quad \mathrm{L2:} \quad \mathrm{y = x - 3}$$



A continuación, realice las siguientes actividades:

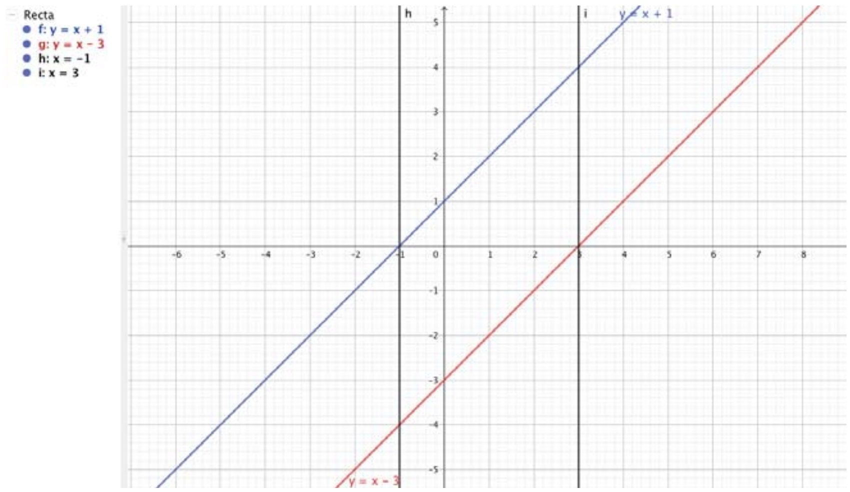
a) Determine los puntos de intersección de las rectas

$$\mathrm{L1 : y = x + 1} \quad \wedge \quad \mathrm{L2:} \quad \mathrm{y = x - 3} \text{ con el eje X.}$$

Los puntos de intersección con el eje X se obtienen haciendo *y*=0 para despejar X, de modo que para cada una de las rectas quedaría:

Recta L1	Recta L2
$y = x + 1$ $0 = x + 1$ $-1 = x$	$y = x - 3$ $0 = x - 3$ $3 = x$

b) Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos.



c) Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados.

Considerando que los puntos donde la recta intersecta al eje X son los puntos (-1,0) y (3,0), los intervalos son:

$]-\infty,-1[$	$]-1,3[$	$]3,\infty^{+}[$

d) Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado.

Para encontrar los signos de cada intervalo se le asigna un valor a la pre-imagen de la función y se busca en la gráfica su imagen, determinando de este modo el signo.

$$f(x) = x + 1$$

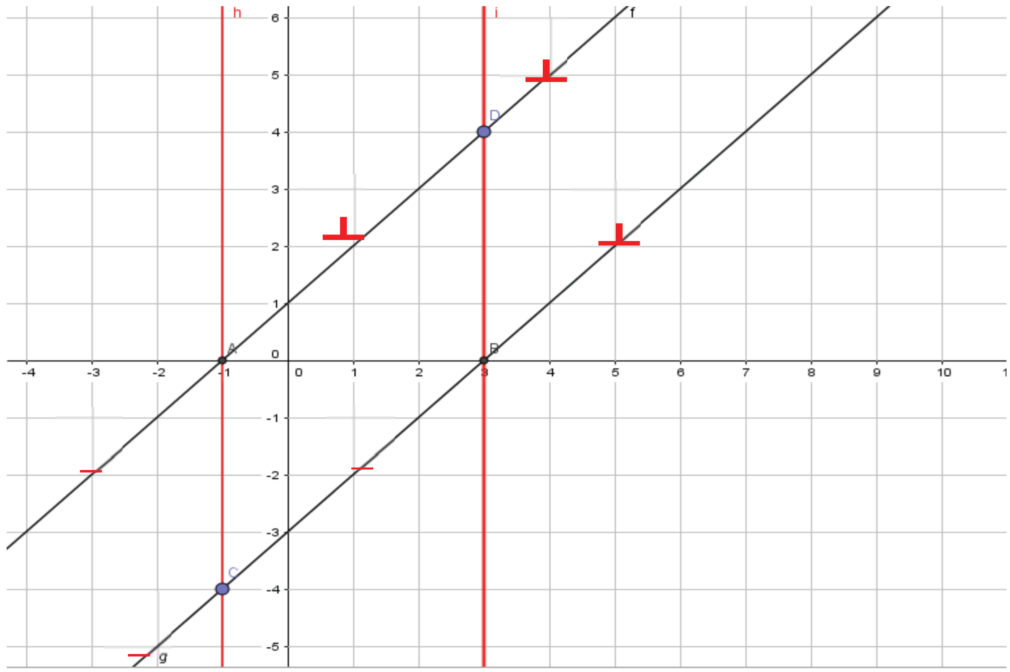
Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-1	-
1	2	+
4	5	+

$$f(x) = x - 3$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-2	-5	-
1	-2	-
4	1	+

e) Establezca una analogía de las rectas con el producto $(x+1)(x-3)$

Para establecer una analogía entre las rectas y el producto de ellas, se multiplican los signos obtenidos del siguiente modo:



Llevando estos datos al registro tabular:

	$]-\infty,-1[$	$]-1{,}3[$	$]3,\infty^{+}[$
$(x+1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x+1)(x-3)$	+	-	-

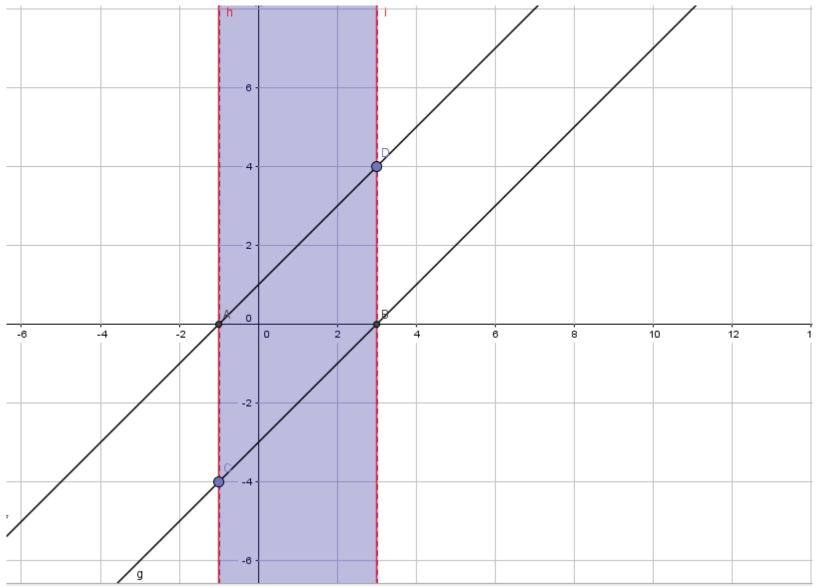
Y, considerando que la condición de la inecuación es verdadera cuando

$$(x+1)(x-3) < 0$$

entonces la solución se encuentra en el intervalo $]-1{,}3[$.

g) Determine el conjunto solución de la inecuación $(x+1)(x-3)<0$.

$$S =]-1{,}3[$$



Actividad 2)

Utilizando el mismo procedimiento realizado en la Actividad 1), determine el conjunto solución de $(2\mathrm{x}+5)(-\mathrm{x}-1)<0$

En este caso el alumno debe graficar las ecuaciones de la recta en el plano cartesiano, lo que puede hacer asignando valores a la abscisa y ordenada del siguiente modo:

$y = 2x+5$

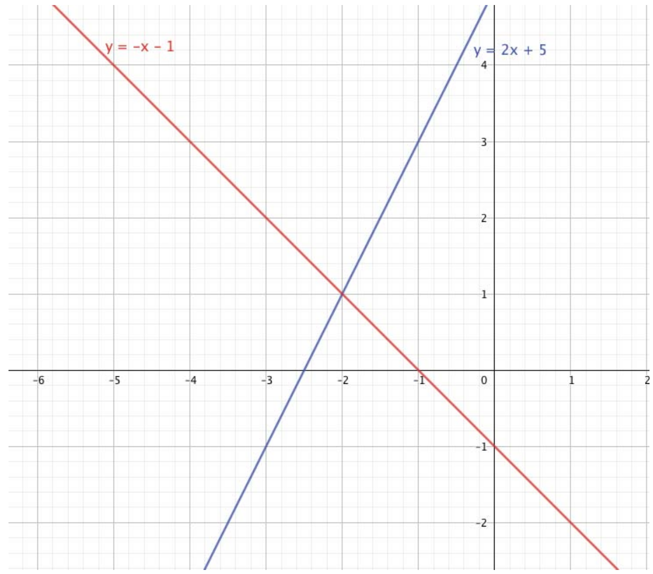
x	y
0	5
1	7
2	9
-1	3
-2	9

$y = -x-1$

x	y
0	-1
1	-2
2	-3
-1	0
-2	1

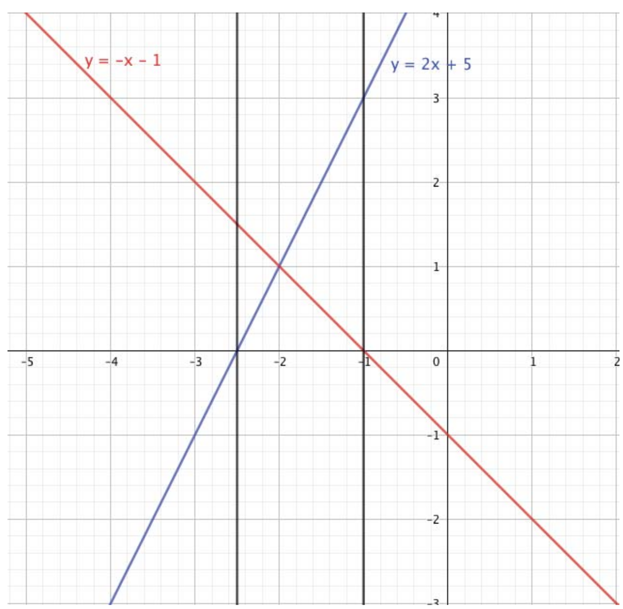
1. Determine los puntos de intersección de las rectas

$$L1 : y = 2x + 5 \quad \wedge \quad L2: \quad y = -x - 1$$ con el eje X.



Los puntos de intersección con el eje X se obtienen haciendo *y*=0 para despejar X, de modo que estos puntos serán $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y (-1, 0) para L1 y L2 respectivamente.

2. Trace la perpendicular al eje X en dichos puntos.



3. Determine los intervalos en que se divide el eje X, con los puntos encontrados. Considerando que los puntos donde la recta intersecta al eje X son los puntos $(-\frac{5}{2},0)$ y (-1,0), los intervalos son:

$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2}, -1\right[$	$]-1, \infty^{+}[$

4. Determine el signo de la imagen de las rectas en cada intervalo encontrado.

   Para encontrar los signos de cada intervalo se le asigna un valor a la pre-imagen de la función y se busca en la gráfica su imagen, determinando de este modo el signo.

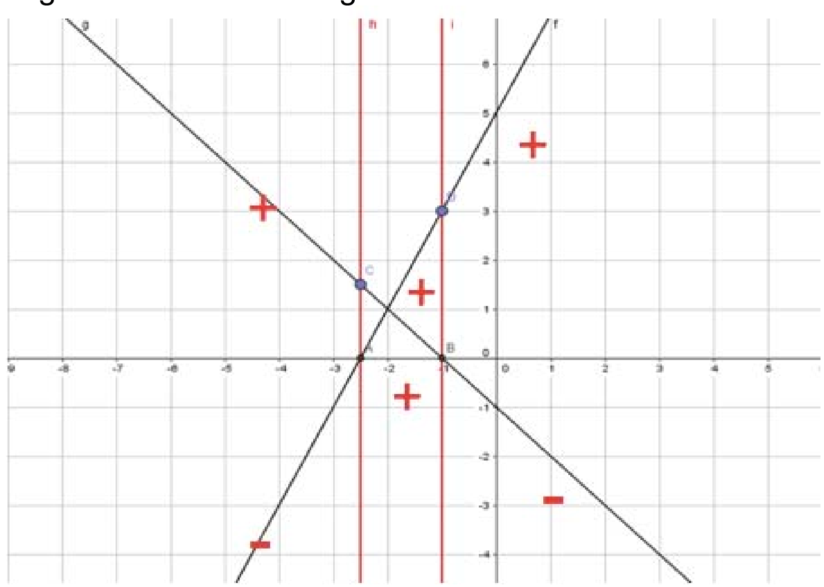
$$f(x) = 2x + 5$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-4	-3	-
-2	1	+
0	5	+

$$f(x) = -x - 1$$

Pre-imagen	Imagen	Signo de la imagen
-4	3	+
-2	1	+
0	-1	-

5. Establezca una analogía de las rectas con el producto $(2\mathrm{x} + 5)(-\mathrm{x} - 1) < 0$
   Para establecer una analogía entre las rectas y el producto de ellas, se multiplican los signos obtenidos del siguiente modo:



Llevando estos datos al registro tabular:

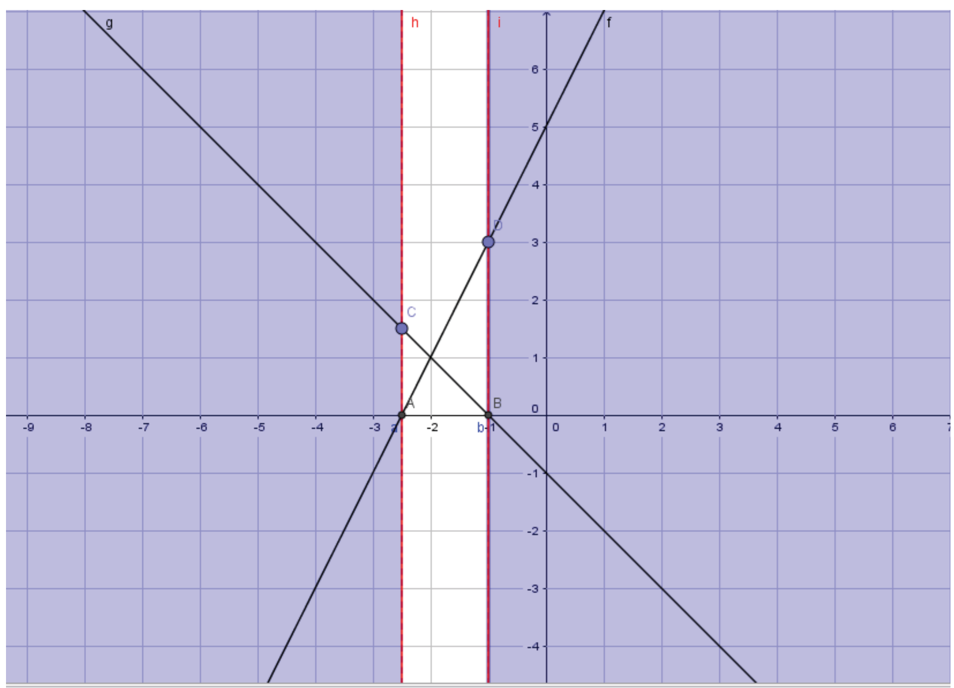
	$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2}, -1\right[$	$]-1, \infty^{+}[$
$(2x+5)$	-	+	+
$(-x-1)$	+	+	-
$(2x+5)(-x-1)$	-	+	-

Y, considerando que la condición de la inecuación es verdadera cuando

$$(2x+5)(-x-1) < 0$$

entonces la solución se encuentra en el intervalo:

$$S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \,]-1, \infty^{+}[.$$



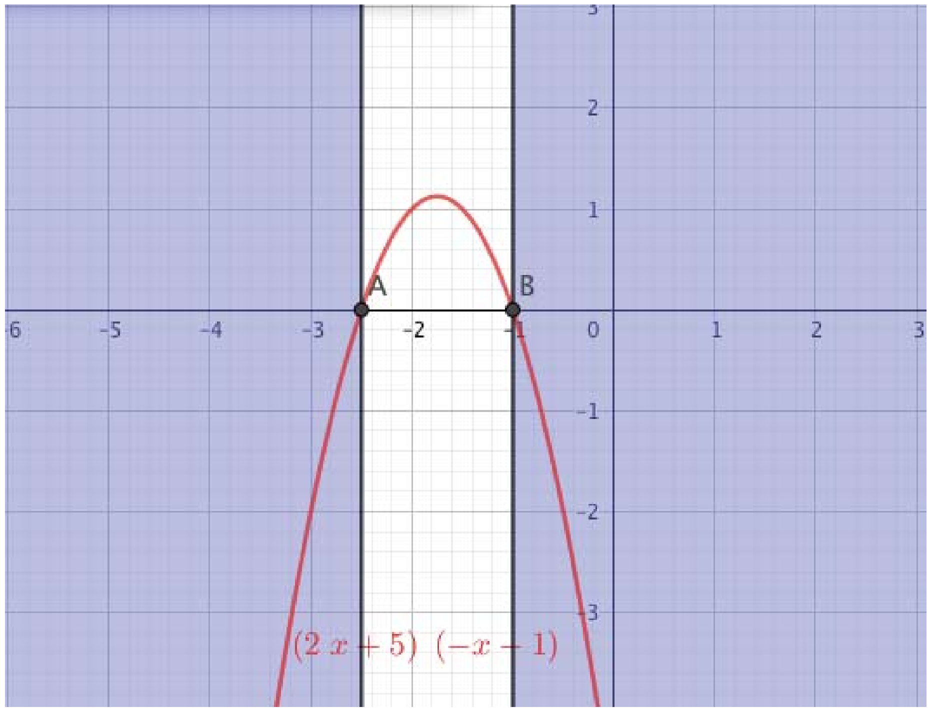
Otra forma de resolver podría ser que los alumnos graficaran la función:

$$(2x+5)(-x-1) < 0$$

Resolviendo gráficamente:

$$-2x^2 - 7x - 5 < 0$$

A continuación, grafican la parábola y observan el intervalo en el cual la inecuación es menor que cero, quedando la gráfica como:



Actividad 3)

Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación por dos métodos diferentes:

$$\frac{x+1}{x-3} < 0$$

Cuando se presenta esta problemática a los alumnos se espera que ellos adviertan que estamos trabajando con los Reales y que las inecuaciones se fundamentan bajo dos axiomas, que son el axioma de cuerpo y de orden de los Reales, donde para el primero de ellos existe un inverso multiplicativo de la forma:

$$(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right) \left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$$

donde,

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

Resultando

$$a \cdot a^{-1} = 1 > 0$$

Por tanto, si ocupamos la propiedad del inverso multiplicativo:

$$\frac{\mathrm{x}+1}{x-3}<0$$

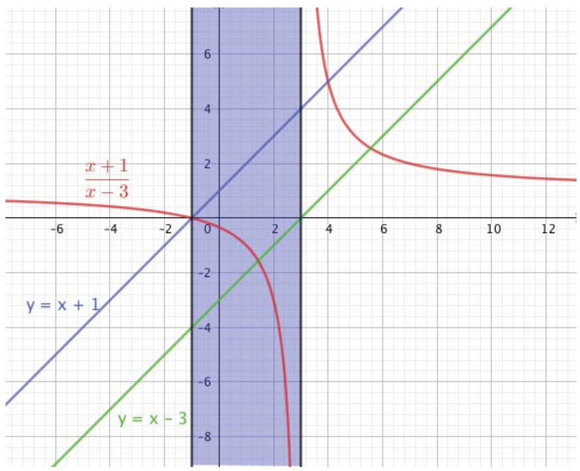
$$(x+1)\cdot\frac{1}{x-3}<0$$

$$(x+1)(x-3)<0$$

El alumno observará que la inecuación es igual a la de la primera actividad, por lo que el conjunto solución será el mismo, es decir:

$$S=\,]-1{,}3[$$

Resolver la inecuación utilizando el método de gráfica de rectas y graficando la hipérbola, debiese observarse que el conjunto solución es el mismo.



2. POSIBLES ESTRATEGIAS DE LOS ALUMNOS:

Construir una tabla de valores en la que se asignen valores para la variable x o para la variable y, con el objeto de determinar puntos que satisfagan las ecuaciones planteadas, luego trazar las rectas a partir de los puntos obtenidos y ubicar puntos de intersección con el eje X, considerando para ello $\mathrm{y}=0$. Identificar los sectores o intervalos en los cuales se divide el eje x a partir de los puntos de intersección. Reconocer el valor de la imagen de cada recta en cada sector identificado, proyectando la recta sobre el eje Y.
Deducir la respuesta a la inecuación planteada considerando los valores encontrados por las imágenes en cada sector. Dar respuesta a la inecuación a partir de la gráfica elaborada. Comparar las soluciones de las inecuaciones expresadas en forma de producto y en forma de cociente.

3. POSIBLES DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS:

La resolución de Inecuaciones está intrínsecamente unida al conocimiento de los intervalos y su representación en la recta real, por ser esta la manera de indicar

sus soluciones, es en este sentido que aparece la representación a través de intervalos como primera dificultad, que a su vez es considerado un conocimiento previo para el objeto matemático inecuaciones.
Podría existir la dificultad para graficar la recta en el plano cartesiano al no recordar como asignar los puntos de ella, es decir si x = 1, ¿qué valor toma y?, sin poder identificar a qué corresponde a la abscisa y a la ordenada.
Otra dificultad podría ser el hecho de no tener claro que es la pre-imagen y la imagen.
Dificultades para determinar en qué puntos la recta intersecta al eje x, sin tener la gráfica para comprobarlo.

4. POSIBLES ERRORES EN LOS ALUMNOS

Antes de ver los errores que podrían aparecer, que mejor que mencionar a Brousseau (1994), quien nos comenta que un error es un concepto equivocado, producto de las combinaciones de los conocimientos previos que poseen los alumnos, es decir, "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, sino que es un resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado". (p.17).

Algunos de los errores que podrían aparecer son:

1. Sustituir el signo mayor y menor, por el signo igual, siendo esto un error ya que el tratamiento de desarrollo de las inecuaciones no es el mismo que de las ecuaciones.
2. No utilizar lenguaje matemático, lo que conlleva a errores conceptuales al momento de resolver un ejercicio.
3. No reconocer la notación con desigualdades que corresponde a los intervalos infinito abierto, finito, semi-abierto y cerrado.
4. No reconocer la representación gráfica que corresponde a una notación con desigualdades
5. No reconocer la notación con desigualdades que corresponde a una determinada representación gráfica,
6. No lograr identificar el tipo de intervalo que corresponde a una determinada representación gráfica
7. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad cuando a ambos miembros de la desigualdad se les suma o resta por el mismo número positivo
8. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad si es que a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por el mismo número negativo.
9. No distinguir los casos cuando el denominador está representado por la variable en estudio de una inecuación.
10. Considerar que abscisa y ordenada es lo mismo que pre-imagen e imagen, respectivamente.

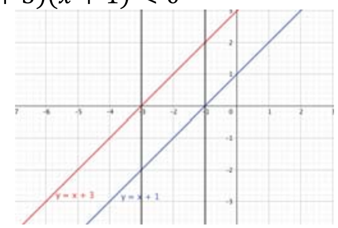
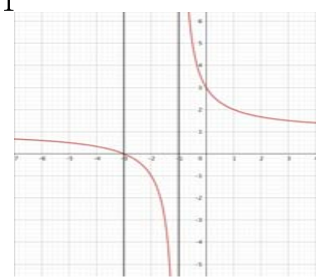
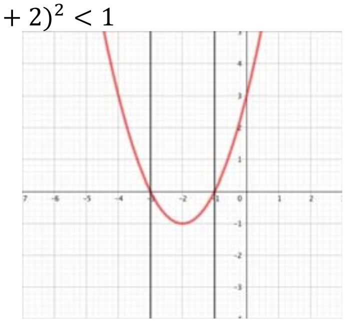
5. MATEMÁTICAS EN JUEGO

- Propiedades de los Reales
- Axioma de cuerpo y orden en los Reales
- Recta numérica de los Reales
- Intervalos abiertos, cerrados, infinitos, acotados
- Lógica proposicional
- Conectores lógicos
- Teoría de conjuntos
- Álgebra
- Funciones

ANEXO 9: PLAN DE CLASE 3 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Objetivo de la clase: Argumentar la equivalencia entre las inecuaciones por el método gráfico, a partir del conjunto solución.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
1. Inicio La clase comienza con el planteamiento de una situación, donde los alumnos deben determinar si existe equivalencia entre los conjuntos solución de las siguientes inecuaciones. $\frac{x+3}{x+1}<0$ | $(x+3)(x+1)<0$ | $(x+2)^2<1$ **Tiempo: 10'**	Una de las dificultades que se podría presentar es que los alumnos no fuesen capaces de graficar las inecuaciones y reconocer intervalos, axiomas, es decir lo trabajado en las clases dos y tres. **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 3	El profesor da a conocer el objetivo de la clase. A continuación, les pregunta ¿Qué entienden por equivalencia? Una vez que los alumnos contestan, el profesor presenta las tres inecuaciones y pregunta ¿podrán ser equivalentes estas inecuaciones? Luego vuelve a preguntar ¿su conjunto solución será equivalente?	Con este Plan de Clase Nº3, se pretende activar los conocimientos previos de la clase uno y dos, para lograr en los alumnos construcciones proceso del objeto matemático en ciertos alumnos y esquemas en otro. Se espera que en el inicio de la clase se genere un pequeño debate entre lo que es equivalencia, ya que de esta forma el alumno tendrá claro qué es lo que se les está pidiendo que realicen.	Estimular la participación de los alumnos, mediante un pequeño debate de lo que significan las equivalencias. **Habilidades en juego:** Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.
2. Desarrollo de la actividad: Una vez identificado lo que se les está pidiendo a los alumnos, se les entrega una guía en la cual deberán resolver de forma individual la equivalencia entre la solución de tres inecuaciones señaladas. **Tiempo: 30'**	Dificultad con la gráfica de inecuaciones donde la figura que se obtendrá no es una recta, sino más bien una parábola y una hipérbola. Respecto a esta última se podría presentar una dificultad extra al no trazar las rectas que cortan al eje X, por lo que definir el intervalo solución se vuelve un tanto complejo.	El profesor se pasea por los puestos de los alumnos para ir registrando las acciones realizadas, a su vez les solicita que resuelvan como ellos se sientan más cómodos para hacerlo, dejando sí el registro de lo que ellos piensan o realizan en su hoja de trabajo.	Se espera que los alumnos logren realizar las tres gráficas solicitadas y utilizar los conocimientos previos de la clase dos y tres para fundamentar cada una de sus respuestas.	Estimular la participación de los alumnos y el razonamiento para trabajar las actividades propuestas. **Habilidades en juego:** Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	POSIBLES DIFICULTADES	INTERVENCIÓN DOCENTE EN LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS BAJO LA TEORÍA APOE	GESTIÓN DE AULA
3. Cierre El cierre de la actividad se realiza con los registros obtenidos, donde el Profesor señala a algunos alumnos para que salgan a la pizarra en base a los registros que él pudo observar en los puestos de trabajo de los alumnos. **Tiempo: 10’**	Una de las dificultades que se podría presentar es que los alumnos no fuesen capaces de interpretar los resultados obtenidos. **Material complementario:** PPT, guía para el alumno del Plan de Clase 3	El profesor escucha los fundamentos de los alumnos que pasan a la pizarra y pregunta ¿están de acuerdo con la solución planteada por su compañero?, ¿hay alguien que resolvió de otra forma y obtuvo el mismo resultado?, ¿hay alguien que obtuvo otro resultado y cree que está correcto?	Los resultados esperados se señalan en detalle en la guía del Profesor, no obstante, aquí se mostrarán las gráficas que debiesen obtenerse de los alumnos. $(x+3)(x+1)<0$  $\frac{x+3}{x+1}<0$  $(x+2)^2<1$ 	Estimular la participación de los alumnos, mediante el desarrollo de las inecuaciones en la pizarra. **Habilidades en juego:** Razonamiento deductivo y reproducción de conocimiento.

ANEXO 10: GUÍA PARA EL ALUMNO DEL PLAN DE CLASE 3 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Nombre: ____

Fecha: ______________________

Profesor(a): Marcela Fuentes González

EQUIVALENCIA DE INECUACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO, A PARTIR DEL CONJUNTO SOLUCIÓN

Objetivo: Argumentar la equivalencia entre las inecuaciones por el método gráfico, a partir del conjunto solución.

Determine si existe equivalencia en el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, a partir de sus registros gráficos.

$(x+3)(x+1)<0$	$\dfrac{x+3}{x+1}<0$	$(x+2)^2<1$

ANEXO 11: GUÍA PARA EL PROFESOR DEL PLAN DE CLASE 3 DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

EQUIVALENCIA DE INECUACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO, A PARTIR DEL CONJUNTO SOLUCIÓN

Objetivo: Argumentar la equivalencia entre las inecuaciones por el método gráfico, a partir del conjunto solución.

Determine si existe equivalencia en el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, a partir de sus registros gráficos.

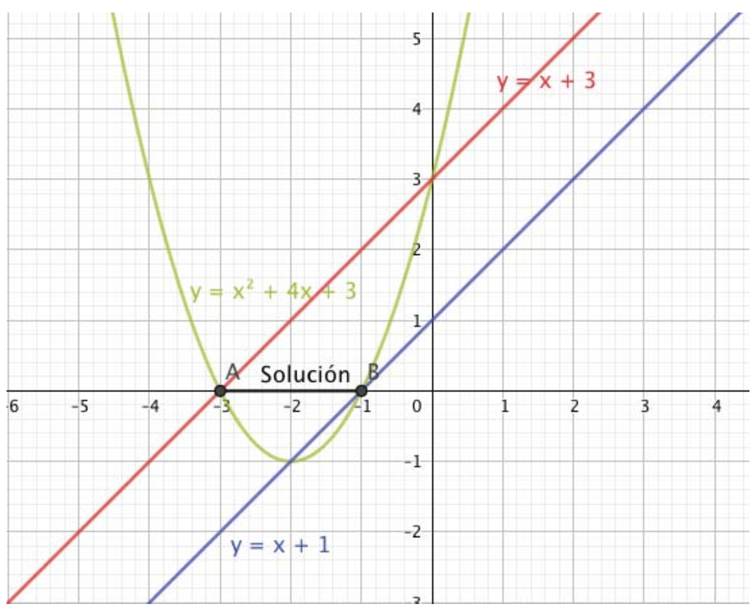
$(x+3)(x+1)<0$	$\frac{x+3}{x+1}<0$	$(x+2)^2<1$

1. ANÁLISIS A PRIORI

RESPUESTA EXPERTA DEL PLAN DE CLASE Nº 2

Se espera que los alumnos resuelvan la primera inecuación por el método de la gráfica de rectas ya que tienen la misma estructura de las trabajadas en la Clase 2, de este modo se resolvería de la siguiente forma:

$\boldsymbol{(x+3)(x+1)<0}$



Se espera que los alumnos interpreten a través de la representación gráfica que el conjunto solución de la inecuación se encuentra en el intervalo $]-3,-1[$, ya que es el único donde los valores son menores que cero.

$$S=\,]-3,-1[$$

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{x+1} < 0}$$

Se espera que los alumnos resuelvan la inecuación utilizando el axioma de cuerpo de los números Reales donde:

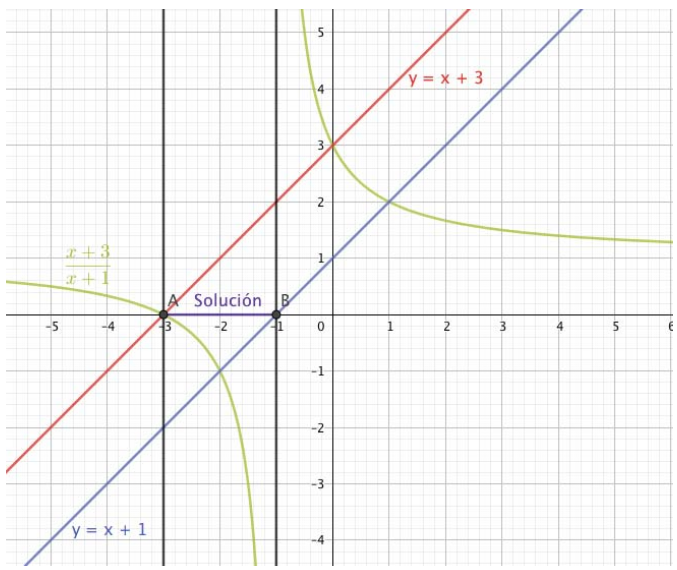
$$(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(\exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}\right)\left(a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1\right)$$

Es decir:

$$\frac{\mathrm{x}+3}{x+1} < 0$$
$$(x+3) \cdot \frac{1}{x+1} < 0$$
$$(x+3)(x+1) < 0$$

Considerando que la inecuación $(x+3)\,(x+1) < 0$ es igual a la del caso anterior, entonces no habría necesidad de graficar ya que el conjunto solución es el mismo, es decir el intervalo $]-3,-1[$.

Puede ser que los alumnos no utilicen el axioma de cuerpo de los Reales y prefieran graficar la inecuación, cuya gráfica sería:



Se espera que el alumno que resuelva de esta forma pueda observar que, si bien la gráfica es distinta, el intervalo para el cual se cumple la desigualdad sigue siendo $]-3,-1[$.

$(x + 2)^2 < 1$

Hay varias formas por las que el alumno podría resolver esta inecuación, mencionaremos alguna de ellas:

i. Expresarla como inecuación lineal:

$$(x+2)^2 < 1$$
$$x^2 + 4x + 4 < 1 \quad /+(-1)$$
$$x^2 + 4x + 4 - 1 < 1 + 1$$
$$x^2 + 4x + 3 < 0$$

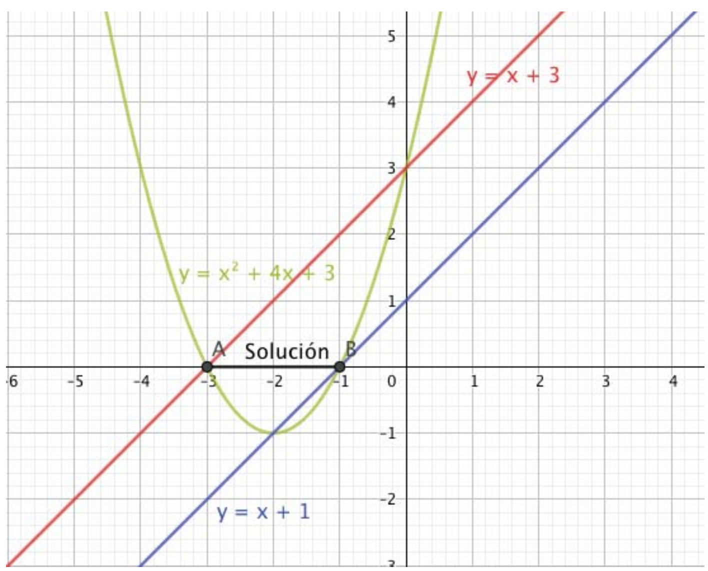
Factorizando:

$$(x+3)(x+1) < 0$$

Al resolver por este método se espera que los alumnos observen que esta expresión es la misma de la primera inecuación, por lo que su gráfica y conjunto solución son los mismos.

ii. Realizar la gráfica de la inecuación cuadrática

$$x^2 + 4x + 3 < 0$$



Al resolver la gráfica de esta inecuación cuadrática el alumno puede observar que el conjunto solución es el mismo.

$$S =]-3, -1[$$

Finalmente, el alumno debiese responder que las tres inecuaciones son equivalentes respecto a su conjunto solución.

2. POSIBLES ESTRATEGIAS DE LOS ALUMNOS:

Para esta situación, hay varias estrategias que puede utilizar el alumno dentro de las que se encuentran resolver por el método gráfico, construyendo los registros de cada una de las inecuaciones para finalmente observar que el conjunto solución es el mismo.

También pueden resolver por el método algebraico, pero la actividad estaba diseñada para que comprobaran a través del registro gráfico la equivalencia entre ellas, la que tiene su razón en el conjunto solución.

3. POSIBLES DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS:

Podría existir dificultad para graficar la parábola y la hipérbola en el plano cartesiano, sumando a esta última la dificultad para ver el conjunto solución si el alumno no traza la recta en el punto donde se corta el eje X.

Dificultad para determinar el punto donde se corta el eje X, cuando no hay una representación gráfica de por medio y por supuesto todas las dificultades de las clases dos y tres que tiene estrecha relación con esta.

4. POSIBLES ERRORES EN LOS ALUMNOS

Algunos de los errores que podrían aparecer son:

1. Errores algebraicos al transformar la inecuación cuadrática en una inecuación factorizable.
2. Cambiar el signo de la inecuación al restar por un número negativo, confundiendo esto con la multiplicación.
3. No determinar los intervalos de forma correcta infinito abierto, finito, semi-abierto y cerrado.
4. No identificar el intervalo que le corresponde a una determinada representación gráfica

5. MATEMÁTICAS EN JUEGO

- Propiedades de los Reales
- Axioma de cuerpo y orden en los Reales
- Recta numérica de los Reales
- Intervalos abiertos, cerrados, infinitos, acotados
- Lógica proposicional
- Conectores lógicos
- Teoría de conjuntos
- Álgebra
- Funciones