Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE DE LA VARIABLE ALEATORIA Y SU FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA

De: Daniela Araya
Profesoras Guías: Elisabeth Ramos
Patricia Vásquez
Romina Menares

Valparaíso, diciembre
2017

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mis agradecimientos a los profesores guías de este monográfico, por la dedicación y apoyo brindado.

Un trabajo de investigación es también fruto del reconocimiento y del apoyo vital que nos ofrecen las personas que nos estiman, sin el cual no tendríamos la fuerza y energía que nos animan a crecer como personas y profesionales. Gracias a mi esposo, a mi hijo y a mis padres, porque todos ellos son pilar fundamental en mi vida, quienes me alentaron a seguir adelante con este proyecto profesional cuando las metas se veían muy lejanas. Pero, por sobre todo, a mi marido e hijo, por su paciencia, comprensión, amor, solidaridad con este proyecto y por el tiempo que me han concedido, pues sin su apoyo este trabajo nunca se habría escrito y por eso éste también les pertenece. A todos, muchas gracias.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta monografía tiene como finalidad poner a disposición de profesores e investigadores un estudio de clase, que trata la variable aleatoria y su función de probabilidad, además propondrá una secuencia didáctica enfocada en problemas no rutinarios, cuyo objetivo es promover el aprendizaje de dicho objeto matemático, bajo el marco conceptual del análisis didáctico (Rico, 2013).

La estructura del trabajo se dividirá en dos partes, la primera tendrá relación con el estudio de clase y las fases del análisis didáctico.

En la primera fase, análisis conceptual se indagará en el objeto matemático en estudio, definiciones conceptuales eruditas y escolares, a través del análisis de textos, además la distancia entre los saberes y el análisis histórico epistemológico.

En la segunda fase, referente al análisis del contenido, se analizarán las diferentes concepciones de la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de diferentes representaciones semióticas según la tipología de los signos (Pierce, 1987).

Para el análisis didáctico cognitivo, se realizará un barrido curricular con los primeros acercamientos al objeto matemático y se indagarán en las dificultades y errores que cometen los estudiantes al intentar representar la variable aleatoria y su función de probabilidad.

La cuarta fase, se enfocará en la planificación de la clase y el análisis a priori de ella. Y finalmente, la fase de actuación, analizará los resultados, con respecto a las categorías del análisis a priori de la fase anterior, a la luz de los antecedentes recopilados. Los datos se interpretarán a través de los principales resultados y de la discusión posterior a la implementación con respecto a lo planificado y lo emergente.

La segunda parte de la monografía estará enfocada en la planificación y análisis a priori de dos clases didácticas consecuencia del estudio de clase, es decir, se analizará la fase de instrucción del análisis didáctico, pues las fases anteriores tienen el mismo análisis que la del estudio de clase. Cabe destacar que para estas dos clases didácticas la fase de actuación no se considerará, pues son una propuesta para profesores e investigadores.

PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

En el currículum de matemática en Chile, el eje Datos y Azar ha tomado un rol preponderante tanto en la educación secundaria como la superior. Por ello la importancia de mejorar este eje temático en el ámbito escolar, con la finalidad de comprender situaciones de la vida cotidiana y así tomar decisiones.

La motivación para la elección del objeto matemático variable aleatoria y su función de probabilidad, fue el desafío por adquirir los conocimientos y habilidades para responder a las exigencias de la enseñanza del concepto probabilístico, no sólo quedándose con los estudios teóricos sino que también con su enseñanza, es decir, el profesor debe saber lo que enseñará y debe saber cómo hacerlo.

Heitele (1975) propone diez conceptos fundamentales para la estadística dentro de la enseñanza escolar, entre ellos la variable aleatoria. El autor propone en su estudio que debe desarrollarse desde etapas tempranas de los estudiantes hasta etapas más desarrolladas a nivel profesionista. Este autor es un aporte para el análisis epistemológico sobre las ideas fundamentales sobre las variables aleatorias.

La variable aleatoria es un concepto abstracto y a la vez concreto, pues es relevante para entender situaciones cotidianas y evaluar la aplicación de modelos probabilísticos (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016), ya que extrae del contexto del problema los elementos que permiten trabajar la situación en un contexto matemático.

Resulta necesario indagar el concepto de variable aleatoria en la educación escolar, ya que existen escasos estudios en la educación media.

Oseguera (1994) evidencia que hay una desvinculación de la variable aleatoria con experiencias intuitivas de los estudiantes en los textos de secundaria, además, se evidencia la ausencia de la noción de este concepto (Ortiz, 2002).

La variable aleatoria se apoya en muchos conceptos matemáticos fundamentales y sirve a su vez de soporte a gran parte de los temas en probabilidad e inferencia estadística. Es por ello que Miller (1998) crítica al tratamiento de la variable aleatoria en los textos, afirmando que en libros de introducción a la estadística casi no la desarrollan y cuando lo hacen erran acarreando problemas posteriores.

En didáctica, Ruiz y Albert (2013) reportan como posible obstáculo epistemológico para el surgimiento de la variable aleatoria la “dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad, ya que tradicionalmente ha sido más tratada como variable”.

A partir de esta problemática se plantean dos preguntas de investigación:

¿Qué conceptos Fundamentales, representación de signo y qué estrategias utilizan los estudiantes de segundo año de secundaria para la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad?

¿Qué dificultades se manifiestan en los estudiantes de segundo año de secundaria, en el uso de la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad en problemas no rutinarios?

Donde el objetivo general es elaborar una secuencia didáctica para abordar la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad para estudiantes de segundo año de secundaria y estudiar los conceptos fundamentales, la representación de signo y las estrategias que los estudiantes utilizan para representan la variable aleatoria y su función de probabilidad en un contexto diseñado en un estudio de clase. Cuyos objetivos específicos son:

- Identificar la presencia de los conceptos matemáticos que se articulan en la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad en las producciones de los estudiantes.
- Identificar las estrategias y la presencia de signo según Pierce (1987) que utilizan los estudiantes para representar la variable aleatoria y su función de probabilidad.
- Identificar las dificultades en la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad y los conceptos matemáticos fundamentales asociados.
- Diseñar una secuencia didáctica con base en la clase analizada.

MARCO CONCEPTUAL

La investigación se centra en el estudio del concepto variable aleatoria y su función de probabilidad tomando como marco de referencia el “Análisis Didáctico”, que consiste en un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje; articulándose en cuatro fases: análisis de contenido, cognitivo, instrucción y actuación (Gómez, 2002).

El análisis de contenido identifica, organiza y selecciona los significados del objeto. Según Lupiáñez (2009), el análisis cognitivo estudia las capacidades de los estudiantes fundamentándose en el currículo y los errores y dificultades a los que pueden enfrentarse. Gómez (2002), señala que en el análisis de instrucción diseña, analiza y selecciona actividades, que posteriormente, en la fase final, determinarán las capacidades que los estudiantes desarrollaron y las dificultades que pudiesen haberse manifestado en la implementación.

Se realizarán las cinco fases (Rico, 2013), **análisis conceptual, didáctico del contenido, didáctico cognitivo, de instrucción y de actuación**. En la primera, se indagará lo que se entiende por variable aleatoria y su función de probabilidad desde el punto de vista escolar y matemático, determinando la distancia entre saberes.

Analizando diferentes concepciones de la variable aleatoria y su función de probabilidad desde el punto de vista didáctico, en sus diferentes representaciones y desde el enfoque fenomenológico.

Para indagar en las diferentes representaciones, desde un enfoque semiótico, se utiliza el concepto de signo de Peirce (1987) y su tipología de los signos para explorar algunas características de signos matemáticos en la representación funcional de la variable aleatoria y su función de probabilidad. Expone que el signo según su relación con el objeto clasifica los signos en: íconos, índices y símbolos.

Analizar las dificultades y errores de los estudiantes al definir y representar una variable aleatoria y su función de probabilidad consecuencia de una dificultad asociada, mostrando un barrido curricular, donde se presenta los primeros acercamientos al concepto con objetivos de aprendizaje en cada nivel. Se analizará la planificación de la clase implementada junto con las posibles estrategias, errores y dificultades a priori. Luego, se recogerán los resultados de la implementación, a la luz de los antecedentes para proponer la secuencia didáctica enfocada en la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad.

ESTUDIO DE CLASE

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

La investigación se plantea desde el paradigma cualitativo interpretativo (Sampieri, Fernández y Baptista, 2006), pues a partir de los resultados obtenidos y el marco conceptual elegido, se describirá cómo los estudiantes identifican los elementos matemáticos fundamentales para la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad.

Esta investigación tiene como foco el estudio de clase, como método de formación continua y desarrollo profesional docente basado en la colaboración, factor clave en la mejora de la enseñanza de las matemáticas en los sistemas implementados (Fernández y Yoshida, 2004). Colaboraron tres docentes estudiantes de Magister en didáctica de la matemática, proponiendo como desafío un problema no rutinario para introducir el concepto, enfocándose en la problemática: “dificultad en reconocer la naturaleza funcional de la variable aleatoria”.

Se consideran como sujetos informantes a estudiantes de segundo año de secundaria en Chile, entre 15 y 16 años. Implementándose en 3 establecimientos educacionales científico-humanista, subvencionado de la quinta región de Chile (Figura 1).

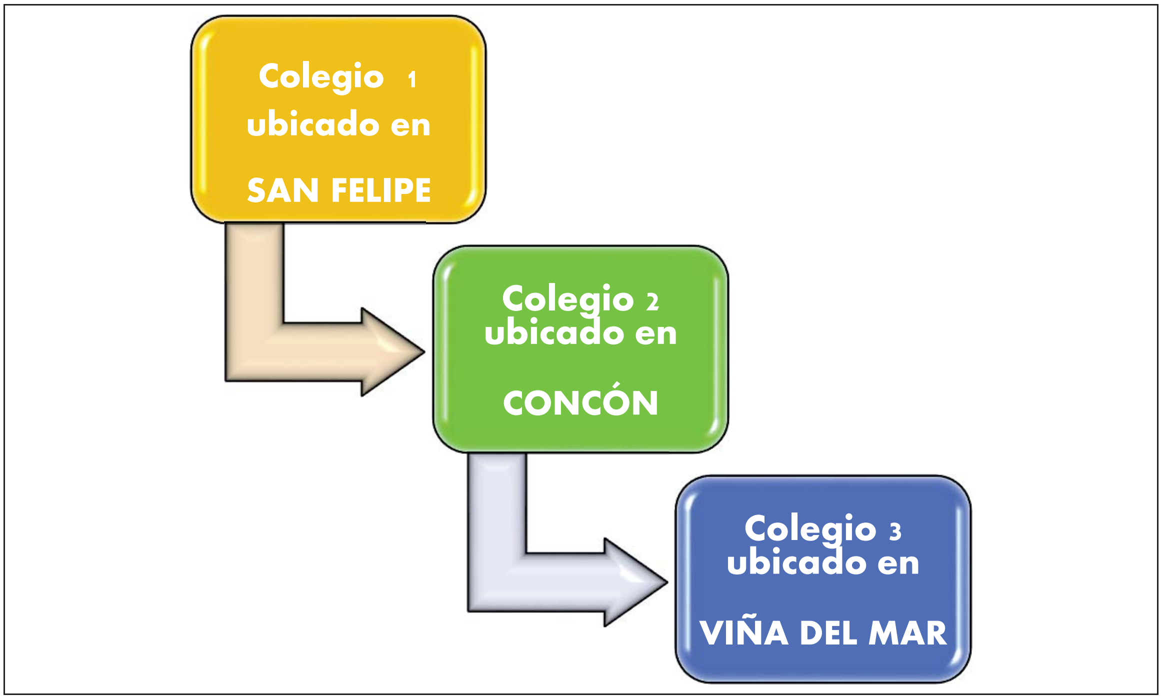


Figura 1: Establecimientos subvencionados de la quinta región en los que se implementó el estudio de clase.

ANÁLISIS CONCEPTUAL

En este estudio se analizará conceptualmente qué se entiende por variable aleatoria y su función de probabilidad, desde el punto de vista escolar y matemático, determinando la distancia entre saberes.

Objeto Matemático

El objeto en estudio es la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad, específicamente el carácter funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.

Mapa conceptual

Para identificar la matemática en juego para la representación del objeto matemático se ilustrará un mapa conceptual (Figura 2) que articule los conceptos matemáticos fundamentales.

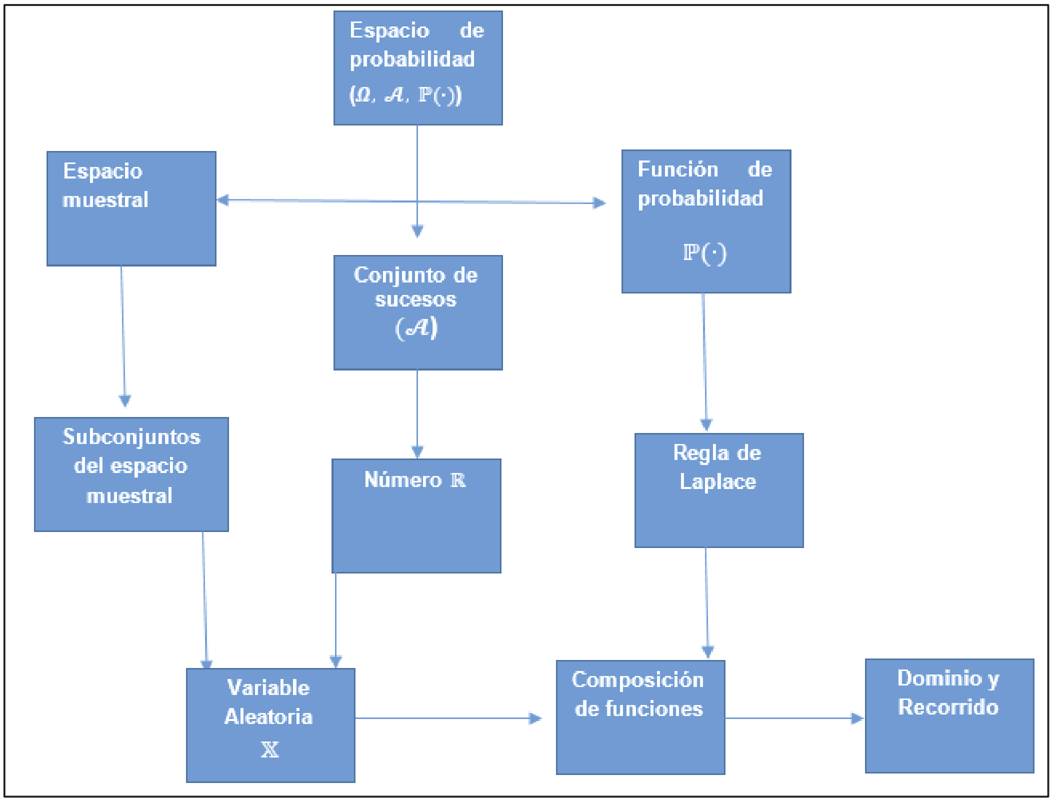


Figura 2: Mapa conceptual de la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad

Definición Experta y Escolar

Análisis de textos

Las definiciones del objeto en estudio se analizarán en un texto de estadística que representará la definición erudita del concepto variable aleatoria, mientras que para la definición escolar se analizaron dos textos escolares, uno entregado por el ministerio de educación y otro de tipo comercial (Figura 3).

Experta: Espacio de probabilidad: Sea $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad $\mathbf{P}$, es una función valorada en los reales, cuyo dominio es $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. $$\mathbf{P}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$$ $$\mathbf{A} \to \mathbf{P}(\mathbf{A})$$

Tal que cumplen los siguientes axiomas: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$; $\mathbf{P(\Omega) = 1}$; Sea $\{\mathbf{A_i} / \mathbf{i} \in \mathbb{N}, \mathbf{A_i} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\}$ mutuamente excluyente, entonces $\mathbf{P}(\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}} \mathbf{A_i}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\mathbf{A_i})$ (Suárez, 2002, p. 18)

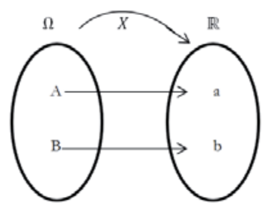
En las condiciones anteriores se dice que $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad. Ahora "*sea* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, una función tal que:*

$$\mathbf{X}: \ \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to \mathrm{X}(\omega) = \mathrm{k}$$

Para todo subconjunto de los reales $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}, \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}\} = \{\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega} / \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, *la función de valores reales* $\boldsymbol{X}$ *recibe el nombre de variable aleatoria sobre* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{P})$*"* (Suárez, 2002, p.45).

El recorrido o rango de la variable aleatoria $\boldsymbol{X}$*, "es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar* $\boldsymbol{X}$*.* $\boldsymbol{\mathcal{R}_X} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}: \exists \boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{k}\}$*"*(Vladimirovna, 2005, p. 158)

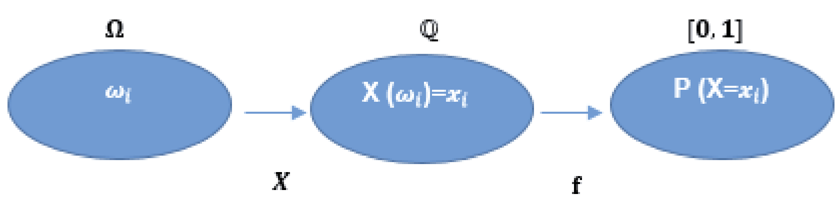
Es decir, son los valores que tienen asociado algún elemento del espacio muestral. Luego, la función X es una variable aleatoria discreta si el rango de X es contable (finito o infinito numerable)



Escolar 1: Una variable aleatoria es una función X que relaciona cada resultado de un experimento aleatorio E con un número real, cuyo dominio es $\boldsymbol{\Omega}$ y cuyo recorrido es Y, donde (Y$\subseteq \mathbb{R}$)

$$\mathrm{X}: \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{R}$$

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces la función de probabilidad se define como f($\boldsymbol{x_i}$)=P(X=$\boldsymbol{x_i}$), de modo que si X: $\boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la función de probabilidad f asociada a X está dada por f : $\mathbb{Q} \longrightarrow$[0,1]



(Muñoz, Sáez, Díaz, López& Astromujoff, 2014)

Escolar 2: Dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama variable aleatoria (v.a) a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asignamos un único número real.

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Estos valores se relacionan con su probabilidad mediante la función de probabilidad de la variable aleatoria.

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

(Dìaz, Gutiérrez, & Martinéz, 2013)

Figura 3: Definiciones de la variable aleatoria

Distancia entre saberes

Del análisis de textos se ha evidenciado la complejidad de la variable aleatoria y su función de probabilidad asociada, pues se relacionan con otros objetos matemáticos que tienen sus propias complejidades, que si no son comprendidas previamente no se podrá entender del todo la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad (Miller, 1998).

La definición erudita se transforma en el saber enseñado, el cual se debe adecuar al nivel del estudiante, presentándose en los textos escolares como una definición sencilla, como base para resolver problemas estadísticos que involucran la función de probabilidad, es decir, lo utilizan como una herramienta para el conocimiento de otro objeto matemático.

Cabe destacar que al profundizar sobre sus interacciones y concepciones surge una complejidad epistémica que también se puede observar en el surgimiento histórico del concepto. Lo que puede llevar a un obstáculo epistemológico, pues se presentan en el estudio de la variable aleatoria algunas dificultades tales como: la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad, la dificultad para reconocer la existencia de la variable aleatoria al hacer composición entre variables aleatorias, además se presenta una dificultad que se relaciona con la representación conjuntista y la relación entre los elementos, los cuales representan una función estadística.

Al analizar el currículum, el concepto variable aleatoria es introducido en el nivel segundo medio, en el eje Datos y Azar, tal como lo propone el programa de estudios de Chile (MINEDUC, 2011), específicamente en el AE 04: “Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios”; queda en evidencia la transformación del saber sabio de las concepciones de la variable aleatoria a un saber enseñado muchísimo más sencillo tal como lo propone el programa de estudio, enfocándose en la aplicación de la función de probabilidad que tiene como concepto matemático fundamental y base a la variable aleatoria, sin indagar en la naturaleza funcional de esta última ni la composición de las funciones.

Análisis histórico epistemológico

Para realizar un análisis epistemológico del objeto en estudio, debemos partir comprendiendo lo que significa la epistemología. Desde el punto de vista de la filosofía es la interesada por el conocimiento científico, la cual plantea interrogantes tales como: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico?, ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico?, ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico? , entre otras. Brousseau (1997) define el análisis epistemológico como esencial en el diseño de las situaciones didácticas puesto que a través de él se obtienen los posibles obstáculos epistemológicos, en los que se basa la construcción del conocimiento de los individuos.

El análisis histórico epistemológico sirve como herramienta cognitiva que permite encontrar en la historia conceptos matemáticos que ayuden a comprender el aprendizaje del concepto de variable aleatoria y su representación junto a su función de probabilidad.

La definición de la variable aleatoria a través del tiempo partió desde la probabilidad y la resolución de problemas, luego pasó a ser un fenómeno aleatorio desde resultados numéricos llegando al reconocimiento semiótico y funcional de la variable aleatoria. Terminando con el desarrollo de la teoría formal de la variable aleatoria.

Asociamos la variable aleatoria con la vida real, cuando nos encontramos con juegos y experimentos en los que usamos dados, monedas, etc. Así mismo tenemos experiencias cotidianas con variables aleatorias continuas, como el tiempo de espera del metro, o el necesario para llegar de nuestra casa al trabajo. Muchas veces, inconscientes asociamos nuestras experiencias con variables aleatorias antes que la de probabilidad.

A continuación se detallan los conceptos matemáticos que fueron construyendo y definiendo el concepto de variable aleatoria y su relación con la probabilidad. Ruiz (2004) reporta en su investigación sobre la exploración cognitiva sobre la variable aleatoria en situación de modelación nueve momentos históricos del desarrollo de la variable aleatoria.

Momentos históricos del desarrollo de la variable aleatoria

- Se asocian valores numéricos discretos a resultados de experimentos aleatorios, como el caso de varios problemas de planteo (Hald, 1990).
- Se identifican probabilidades asociadas a las magnitudes aleatorias discretas y sus distribuciones de probabilidad, principalmente en los trabajos de Bernoulli (Hald, 1990).
- Comienzan las primeras operaciones entre magnitudes aleatorias como uso de la suma, el cociente y la convergencia de sucesiones de variables aleatorias. Aparece la condición de independencia entre magnitudes aleatorias. Esto lo observamos en la Ley de los grandes números en Ars Conjectandi de Bernoulli (Hald, 1990).
- Se vinculan las magnitudes aleatorias con problemas reales como errores de medición o problemas de sobrevivencia (De Moivre, Laplace y Galton). Nace la magnitud aleatoria continua, así como su probabilidad identificada como la integral en un intervalo dado. Se identifican distribuciones de probabilidad para magnitudes aleatorias continúas. Particularmente la Normal y la Exponencial. Hay un auge del uso del cálculo infinitesimal en Probabilidad. Primeros enunciados del Teorema central del límite. Era común considerar la Probabilidad como un mal menor ante nuestra incapacidad de conocer con certeza.
- Aparecen los primeros indicios explícitos de asociación de resultados no-numéricos de experimentos aleatorios con ciertas magnitudes con asignación de probabilidades (Poisson, 1837).
- Se trabaja con muchas propiedades de las magnitudes aleatorias y rigor matemático (Maistrov, 1974) e incluso Lyapunov en algunos trabajos las denomina "variables aleatorias" (Hazewinkel, 2002).
- Las magnitudes aleatorias son un caso particular de las variables aleatorias. Éstas últimas son definidas como una función conjunto de valor real dentro de un espacio de probabilidad y que toma valores de un espacio de medible (Maistrov, 1974).
- Se multiplican las aportaciones a la Teoría de las variables aleatorias con Lévy (1939 y 1959), Meyer (1970/1973) y Petrov (2002). El nuevo paradigma de las variables aleatorias hace que se desarrolle teoría en probabilidad y que se tenga un mayor detalle en la definición de los conceptos estadísticos.
- Hay un nuevo equilibro entre paradigmas (Parzen, 1960/1971). El paradigma de magnitudes aleatorias surge de nuevo como una forma de introducir y manipular de forma más simple los problemas con fenómenos aleatorios de resultado numérico.

En resumen, se identifican cuatro etapas que marcan saltos cualitativos en la conceptualización de la variable aleatoria (Figura 4).

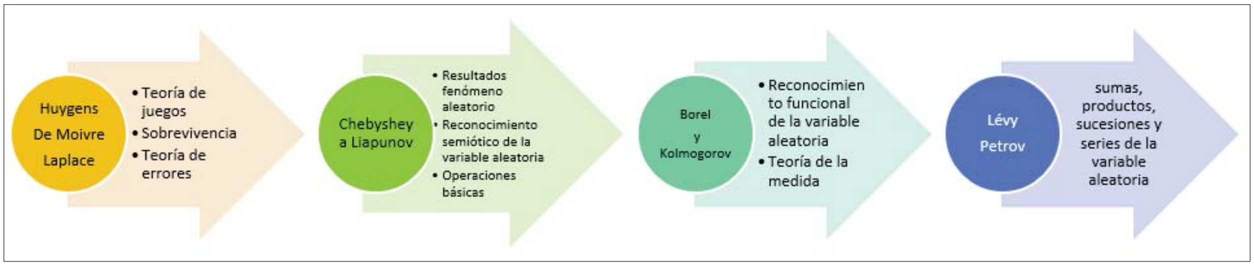


Figura 4: Matemáticos y aportes para la conceptualización de la variable aleatoria

En general, se puede concluir que análisis epistemológico de la variable aleatoria a través de la historia se ocupa más de la caracterización de su función de distribución que del concepto de variable aleatoria en sí mismo, además de que no incluye la composición de variables aleatorias dentro de problemas de planteo. De allí que nace la necesidad de comprender la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de problemas no rutinarios para asociarla con la vida cotidiana e identificar los diferentes conceptos matemáticos fundamentales que articulan su representación y la composición de funciones.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

En esta etapa del análisis didáctico se pretende analizar diferentes concepciones de la variable aleatoria y su función de probabilidad desde el punto de vista didáctico, en sus diferentes representaciones del objeto matemático se utilizará la representación de signos de Pierce (1987).

Para Pierce (1987) la concepción sobre el signo, en relación entre el signo y el objeto, los clasifica en:

Ícono: si los estudiantes identifican los elementos de cada uno de los tres conjuntos e intentan representar la relación entre ellos a través de una analogía o semejanza con la composición de dos funciones, al intentar representar la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de líneas y agrupaciones.

Índice: si los estudiantes identifican los elementos de cada uno de los tres conjuntos y representan la relación entre ellos, identificando que la relación entre los conjuntos tienen características de función y por lo tanto identifican el dominio de la función de A en B y de B en C, refiriéndose a composición de funciones.

Símbolo: si los estudiantes identifican los elementos de cada uno de los conjuntos y representan la relación entre ellos, a través de símbolos como letras mayúsculas, gráficos sagitales, uso de paréntesis de llaves, entre otros elementos del lenguaje conjuntista.

Según la forma de presentar el objeto matemático proveerá categorías para analizar las producciones de los estudiantes que evidenciarán la problemática de estudio la “dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad”. (Ruiz y Albert, 2013)

Análisis fenomenológico

Las áreas en las que se presenta la aplicación de la variable aleatoria son: la medicina, la química, los juegos de azar, pronóstico del tiempo, entre otros, en general en todos los contextos que involucren la toma de decisiones.

Artigue, Batanero y Kent (2007), exponen que a través de los métodos estadísticos se puede explicar el crecimiento en la demanda de educación estadística en Ingeniería, Psicología, Educación, Ciencias de la Salud, negocios etc, es decir, el rango se ampliado a otras áreas que necesitan de la toma de decisiones, y por lo tanto las han incluidos en los programas de estudios de las carreras de pregrado.

ANÁLISIS DIDÁCTICO COGNITIVO

En esta fase del marco conceptual se pretende indagar los tipos de dificultades y errores que cometen los estudiantes al definir y representar una variable aleatoria y su función de probabilidad, como consecuencia de una dificultad asociada, mostrar un barrido curricular, donde se presenta los primeros acercamientos al objeto matemático con sus objetivos de aprendizaje en cada nivel.

Barrido curricular

El concepto variable aleatoria es introducido en el nivel segundo medio, en el eje Datos y Azar, tal como lo propone el programa de estudios de Chile (MINEDUC, 2011), específicamente en el AE 04: “Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios”.

El plan de clase diseñado está enfocado, en dicho nivel, específicamente en la sub-unidad de probabilidad, proponiendo como objetivo “introducir el concepto probabilístico representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de problemas no rutinarios”.

En la figura 5 se muestra el barrido curricular del objeto en estudio desde 7º básico hasta 4º medio.

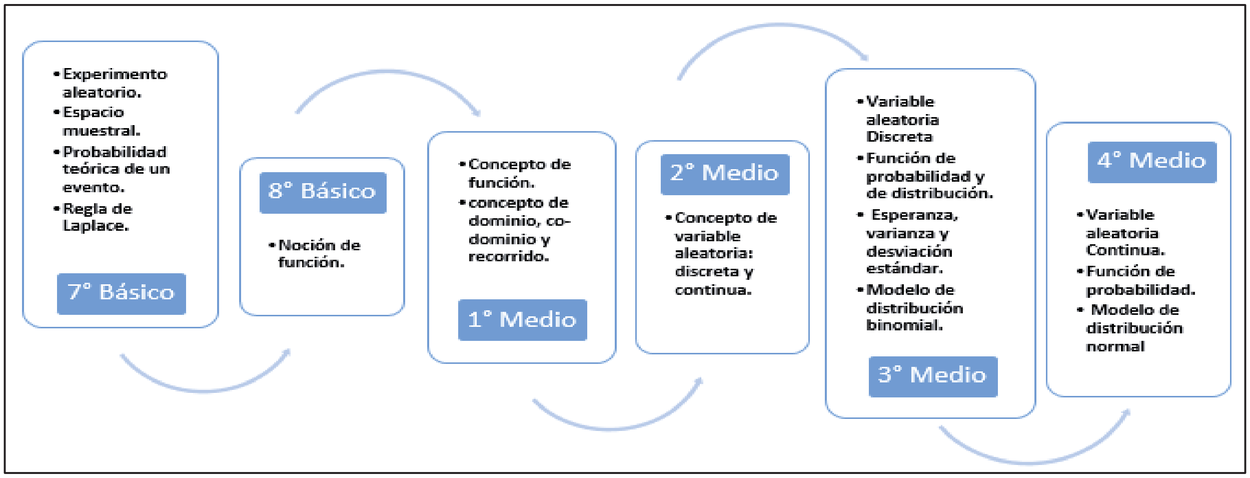


Figura 5. Esquema sobre análisis curricular del objeto probabilístico variable aleatoria

En el análisis didáctico cognitivo además se indagan las dificultades y errores de los estudiantes al definir y representar una variable aleatoria y su función de probabilidad consecuencia de una dificultad asociada (Tabla 1).

DIFICULTAD	ERROR
Dificultad de definir y representar un conjunto. Ortiz (2002)	Definen y representan el conjunto de inicio de la variable aleatoria como los elementos del espacio muestral, es decir, sin agrupan en particiones o subconjuntos los elementos con iguales características.
Dificultad para identificar espacio muestral del experimento. Ortiz (2002)	Identifican el conjunto de inicio de la variable aleatoria como los datos proporcionados a través de tablas en los problemas no rutinarios.
Dificultad en identificar los elementos del conjunto de llegada de la función de probabilidad, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación. Fine (1973)	Carecen del razonamiento proporcional asociado a la probabilidad.
Dificultad en definir relaciones entre los tres conjuntos Ruiz y Albert (2013)	Relacionan los elementos del conjunto A con los del conjunto B, porque observan los datos de la tabla. Por lo tanto, no los relacionan con las probabilidades pues no aparece en forma explícita en la tabla.

Dificultad en identificar que las relaciones definidas son funciones. Ruiz y Albert (2013)	Desconocen la definición de función representada en un gráfico sagital, como una relación particular entre sus elementos. Asocian una función a una gráfica en el plano cartesiano o en lenguaje algebraico y=f(x)
Dificultad de confundir el espacio muestral del experimento con el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria. Miller (1998)	Definen la variable aleatoria como la relación que existe entre cada uno de los elementos del espacio muestral y un número real.

Tabla 1: Dificultades y errores para la representación de la variable aleatoria y la función de probabilidad.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

En esta fase del marco conceptual se presenta la planificación de la clase para la implementación del estudio de clase, junto con las posibles estrategias, errores y dificultades a priori.

Se diseña un cuestionario como instrumento de recogida de información, con un desafío que pretende introducir el concepto de variable aleatoria junto a su función de probabilidad (Figura 6).

Desafío:

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor del taller de Cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de apoderados	8	13	7	2
Número de estudiantes	1	2	3	4

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por A: el conjunto de 30 apoderados del taller, B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación. Defina y represente la relación entre los conjuntos.

Figura 6: Desafío propuesto en el estudio de clase. (sin el destacado)

Las palabras destacadas señalan la presencia de los conceptos fundamentales asociados a variable aleatoria, en el siguiente orden: espacio muestral, experimento aleatorio, estrategia estadística, conjuntos, probabilidad, relación entre conjuntos, función y composición de funciones.

Dichos conceptos fundamentales se consideran a su vez como la matemática en juego del análisis a priori de la planificación de la clase.

Las fuentes de información serán extractos fotográficos de las producciones grupales de los estudiantes en la implementación de la clase.

Análisis a priori

Descripción de la actividad: Luego de explicitar el contrato didáctico se procede a escribir el objetivo de la clase y la presentación del desafío de la clase, entregando a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Tras la lectura del objetivo y del desafío en voz alta, se indica la metodología de trabajo: Primero hay un momento individual y luego grupal. Trabajo en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. A cada grupo se les entregará un papelógrafo para plasmar sus estrategias. Mediante el monitoreo de la clase identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. Basándose en la observación, se seleccionan tres grupos, que presentarán su estrategia en la pizarra. Todo lo anterior en 90 minutos (inicio 10 minutos, desarrollo 55 minutos y cierre 25 minutos).

Desafío: A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor del taller de Cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de estudiantes	1	2	3	4
Número de apoderados	8	13	7	2

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto, el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.
Dados los conjuntos A, B y C definidos por A: el conjunto de 30 apoderados del taller, B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación. Defina y represente la relación entre los conjuntos.

Objetivo: Conocer los conceptos variable aleatoria y función de probabilidad.

Respuesta experta

A'_1: Conjunto o grupo de apoderados que tiene un estudiante.

A'_2: Conjunto o grupo de apoderados que tiene dos estudiantes.

A'_3: Conjunto o grupo de apoderados que tiene tres estudiantes.

A'_4: Conjunto o grupo de apoderados que tiene cuatro estudiantes.

Posibles estrategias

Estrategia 1

A	B	C
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8	1	$\mathbf{\frac{8}{30}}$
A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{21}	2	$\mathbf{\frac{13}{30}}$
A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{28}	3	$\mathbf{\frac{7}{30}}$
A_{29}, A_{30}	4	$\mathbf{\frac{2}{30}}$

Estrategia 2

A	B	C
A1	1	$\frac{8}{30}$
A2	1	$\frac{8}{30}$
A3	1	$\frac{8}{30}$
A4	1	$\frac{8}{30}$
A5	1	$\frac{8}{30}$
A6	1	$\frac{8}{30}$
A7	1	$\frac{8}{30}$
A8	1	$\frac{8}{30}$
A9	1	$\frac{8}{30}$
A10	1	$\frac{8}{30}$
A11	1	$\frac{8}{30}$
A12	1	$\frac{8}{30}$
A13	1	$\frac{8}{30}$
A14	1	$\frac{8}{30}$
A15	1	$\frac{8}{30}$

A	B	C
A16	1	$\frac{8}{30}$
A17	1	$\frac{8}{30}$
A18	1	$\frac{8}{30}$
A19	1	$\frac{8}{30}$
A20	1	$\frac{8}{30}$
A21	2	$\frac{13}{30}$
A22	3	$\frac{7}{30}$
A23	3	$\frac{7}{30}$
A24	3	$\frac{7}{30}$
A25	3	$\frac{7}{30}$
A26	3	$\frac{7}{30}$
A27	3	$\frac{7}{30}$
A28	3	$\frac{7}{30}$
A29	4	$\frac{2}{30}$
A30	4	$\frac{2}{30}$

Posibles dificultades, errores y posteriores devoluciones (Tabla 2).

DIFICULTAD	ERROR	DEVOLUCIÓN	INVESTIGACIÓN
Dificultad de definir y representar un conjunto.	Definen los elementos del conjunto A como cada uno de los apoderados, es decir, apoderado1, apoderado2,….apoderado 30. No agrupan en particiones o subconjuntos los elementos con iguales características.	“¿Cómo puedo representar un conjunto de los estudiantes del curso de 2°medio que utilicen lentes? ¿Cuáles serían los elementos? ¿Quién puede representarlo en el pizarrón?”	(Ortiz, 2002)
Dificultad para identificar espacio muestral del experimento.	Identifican el conjunto A como el conjunto de los 30 apoderados del colegio lo representen como A= {8, 13,7 y 2}, es decir lo confunden con la cantidad de apoderados que tienen estudiantes en el taller de cine.	“Sugerir que analicen y comprendan la tabla con los datos recogidos de la encuesta y que identifiquen cuantos apoderados tiene el colegio. ¿Cómo podemos representar un conjunto de los estudiantes de 2°medio según preferencias de equipos de futbol? ¿Cuántos alumnos hay? ¿y cuantas preferencias distintas?”	(Ortiz, 2002)
Dificultad en identificar los	No identifican los elementos del conjunto	“¿Cuál es la posibilidad de	(Fine,1973)

elementos del conjunto C, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación.	C, pues carecen del razonamiento proporcional asociado a la probabilidad.	que al seleccionar en la rifa un apoderado, este tenga un estudiante en el taller de cine?”	
Dificultad en definir relaciones entre los tres conjuntos	Relacionan los elementos del conjunto A con los del conjunto B, porque observan los datos de la tabla. Por lo tanto, no los relacionan con las probabilidades pues no aparece en forma explícita en la tabla.	“¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que relacione (o permita asociar) elementos del conjunto A con elementos del conjunto B? ¿Cuál? ¿Existe(n) alguna(s) característica(s) (cualidad(es)) que relacione elementos del conjunto B con elementos del conjunto C? ¿Cuál (es)?”	Ruiz y Albert (2013)
Dificultad en identificar que las relaciones definidas son funciones.	Desconocen la definición de función representada en un gráfico sagital, como una relación particular entre sus elementos. Asocian una función a una gráfica en el plano cartesiano o en lenguaje algebraico y=f(x)	“Preguntar ¿La relación definida es una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su recorrido?”	Ruiz y Albert (2013)

Tabla 2: Relación entre dificultades y errores con la respectiva devolución para la clase 1.

- Representación de Conjuntos (Diagrama sagital).
- Relación entre Conjuntos
- Función, dominio, codominio y recorrido.
- Representación de una función mediante tabla de valores, gráfico cartesiano, gráfico estadístico o diagrama sagital.
- Experimento Aleatorio.
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso. (Regla de Laplace)

A continuación se presenta la planificación de la clase del Estudio de Clase (Tabla 3).

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">PLANIFICACIÓN DE LA CLASE 1</td></tr>
<tr><td>Asignatura: Matemática</td><td>Nivel: 2° medio</td><td align="center">Horas: 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aprendizaje esperado: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidad: Caracterizar variables aleatorias</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conocimientos previos:
• Experimento aleatorio
• Muestreo aleatorio simple
• Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
• Probabilidad teórica de un evento
• Relaciones y funciones</td></tr>
<tr><td colspan="3">Materiales:
• Desafío impreso
• Data
• Plumones
• Paleógrafo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Problemática: Dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo de la clase: Deducir la variable aleatoria y la función de probabilidad.</td></tr>
<tr><td align="center">ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</td><td align="center">INTERVENCIÓN DOCENTE</td><td>EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">INICIO (10 min)</td></tr>
<tr><td>0. Indicaciones de la clase

1. Presentación del objetivo de la clase: Identificar y representar relaciones entre conjuntos.

2.Planteamiento del desafío</td><td>0. Explicitar el contrato didáctico
Indicar que se debe generar un ambiente propicio para el aprendizaje(respeto, empatía y responsabilidad)

1. Escribir el objetivo de la clase.</td><td>¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema?

¿Comprenden el problema?

¿Son capaces de identificar la tarea?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor del taller de Cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

<table>
<tr><td>Número de estudiantes</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Número de apoderados</td><td>8</td><td>13</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.
Dados los conjuntos A, B y C definidos por A: el conjunto de 30 apoderados del taller, B: el conjunto de cantidad de estudiantes. C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación? Defina y represente la relación entre los conjuntos.</td>
<td>2. Presentación del desafío de la clase: Se proyecta el desafío en la pizarra (PPT), además se entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Tres estudiantes leen este en voz alta mientras el resto sigue la lectura.

2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la tarea de hoy?
- “para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase”</td>
<td>¿Se cumple el tiempo planificado?</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">DESARROLLO</td></tr>
<tr><td colspan="3">(30 min)</td></tr>
<tr>
<td>3. Solución al desafío

3.1 Los alumnos trabajan en su hoja.
- Buscan estrategias propias en forma individual.
-Validan sus producciones.
-Intercambian opiniones con sus compañeros.

3.2 Los estudiantes en forma grupal realizan una puesta en común sobre sus estrategias.</td>
<td>

3.1 Indica la metodología de trabajo: Primero hay un momento individual y luego grupal. Trabajo en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. A cada grupo se les entregará una cartulina o papelógrafo para plasmar sus estrategias.

3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra).</td>
<td>¿Identifican los conjuntos asociados al desafío?

¿Determinan los elementos del conjunto C? (probabilidades)

¿Definen la relación entre el conjunto A y el conjunto B? (variable aleatoria)

¿Definen la relación entre el conjunto B y el conjunto C?</td>
</tr>
</table>

	-Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. - Basado en la observación, selecciona a tres grupos, un estudiante de cada uno de ellos presentará su estrategia en la pizarra.	¿Registran en la hoja posibles representaciones? ¿Discuten con sus compañeros? ¿Logran representar la V.A como una función? ¿Se cumple el tiempo planificado?
25 min		
4. Trabajo en la pizarra 4.1 Cada uno de los tres estudiantes expondrá su cartulina en cada una de las 3 partes de la pizarra. 4.2 Tres alumnos definen las relaciones entre los conjuntos involucrados en el desafío, representan dichas relaciones y explican cómo obtuvo su respuesta. 4.3 Los estudiantes responden a las preguntas del profesor con respecto a sus estrategias.	4.1 La pizarra la divide en tres partes, que serán completadas con las cartulinas de los grupos.(escogidos previamente) 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que expongan su cartulina y expliquen su estrategia de resolución al grupo curso. 4.3 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos del conjunto C? ¿Puedes asociar o relacionar con colores elementos de dos conjuntos?	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Explican sus estrategias? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas? ¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
CIERRE (25 min)		
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la correspondencia que involucra los conjuntos A y B, y los conjuntos B y C, a través de diagramas (en caso de no haberlo propuesto un estudiante) 5.2 Se destaca y analizan las relaciones definidas por los tres estudiantes. a través de las siguientes preguntas: ¿La relación entre los elementos de los conjuntos podrá representar una función? ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función?	5.1 El profesor muestra la correspondencia entre elemento de dos conjuntos previamente mencionada por estudiantes. 5.2 El profesor pregunta a sus estudiantes: ¿La relación entre los elementos de dos conjuntos del desafío podría ser una función? [Se espera que los estudiantes consideren la def. de función y respondan que cada apoderado le corresponde solo una cantidad de estudiantes del taller o que cada grupo de apoderados con un número específico de estudiantes tienen una única posibilidad de ganar las entradas]. Se pregunta a algunos estudiantes: ¿Qué característica debe tener una relación de conjuntos para que sea una función? [Se espera que los estudiantes	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes identifican que las relaciones definidas son funciones? ¿Se cumple el tiempo planificado?

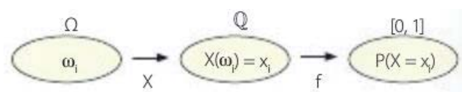
	respondan que todos los elementos del conjunto A tengan una única imagen en el conjunto B] 5.3 Se espera que reconozcan dos funciones, una asociada a los conjuntos A y B, y otra asociada a los conjuntos B y C. [Se espera que los estudiantes encuentren dos relaciones entre conjuntos que además cumplen con ser funciones y que logren categorizarlas según sus características. Entre A y B que relacionan un elemento con un número real y entre B y C un número real y la probabilidad asociada] Definición: (sobre las producciones de los estudiantes) 	

Tabla 3: Planificación de la clase implementada para el estudio de clase.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Las categorías surgen analizando las producciones grupales, de acuerdo a las posibles interacciones emergentes establecidas en los criterios que ilustra el diagrama en la figura 7.

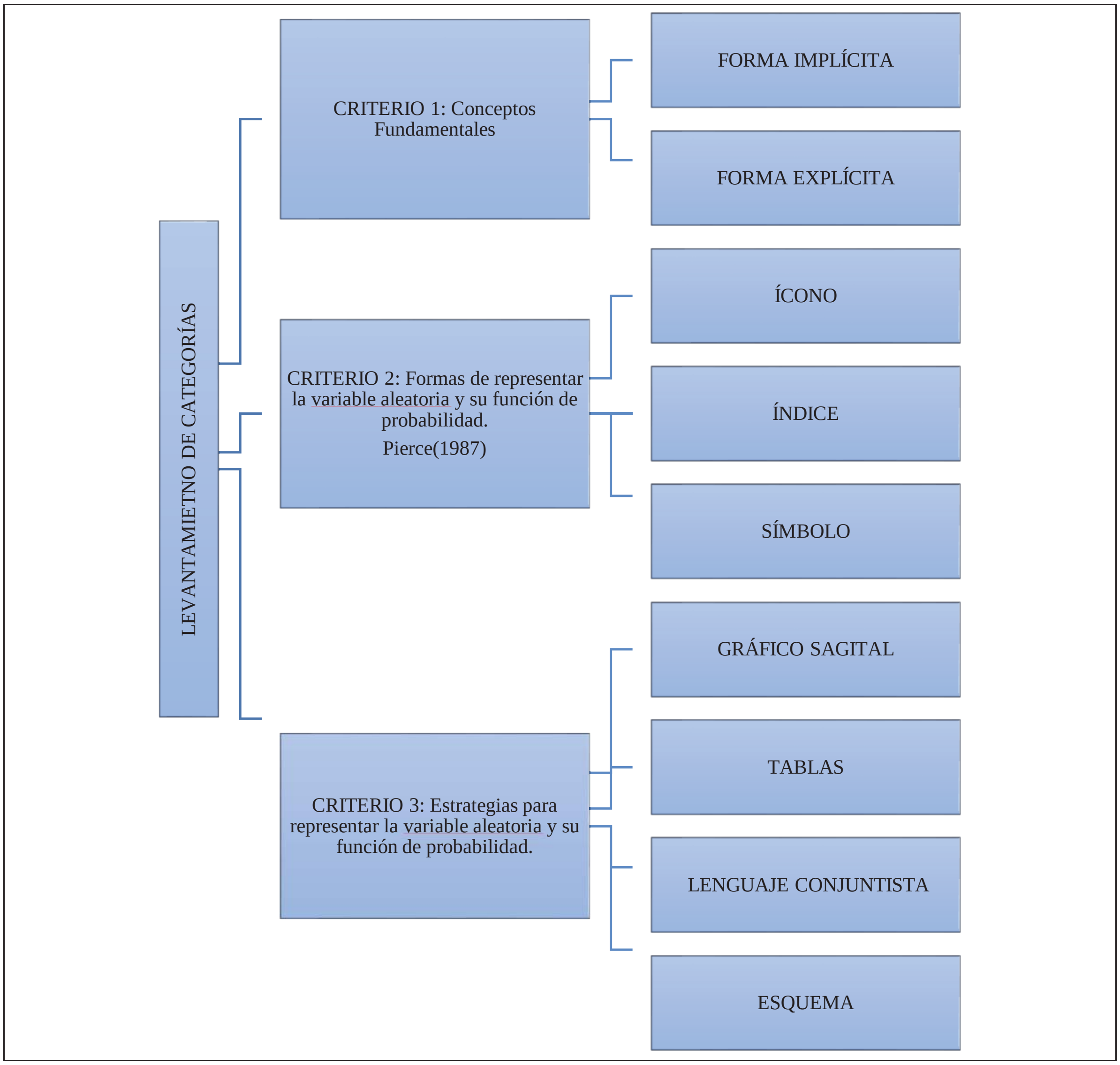


Figura 7: Categorías de análisis según criterios a observar en las producciones grupales del estudio de clase.

Criterios de análisis

Presencia de conceptos fundamentales

- EA: Experimento Aleatorio
- EM: Espacio muestral
- P: Probabilidad de ocurrencia de un suceso
- RC: Relación entre conjuntos
- F: Función
- D: Dominio de la Función
- R: Recorrido de la Función

Formas de representar la variable aleatoria y su función de probabilidad

- Representación funcional de la variable aleatoria, relación entre los elementos del conjunto de las particiones del espacio muestral y los elementos del conjunto de la cuantificación de ellas.
- Representación de la función de probabilidad, relación entre los elementos del conjunto de la cuantificación de cada subconjunto y los elementos del conjunto de la probabilidad de ocurrencia.
- Composición de funciones entre la variable aleatoria y su función de probabilidad.

Para Pierce la concepción sobre el signo, en relación entre el signo y el objeto, los clasifica en: íconos, índices y símbolos. Para el análisis se entenderá por objeto "Representación funcional de la variable aleatoria y su función de probabilidad". Según la presencia de signos se asociará a **ícono, índice o símbolo**, tal como se definió en la página 19 y 20.

Estrategias para representar la variable aleatoria y su función de probabilidad

- Representar la relación entre conjuntos a través de un diagrama sagital, tablas o columnas, esquemas o lenguaje de conjuntos.

Para operacionalizar el análisis de resultados, se describirá una posibilidad de producción de un estudiante, de acuerdo a la presencia implícita o explícita de los conceptos fundamentales, y si la estrategia de representación de signo es un ícono, índice o símbolo.

“Si el estudiante reconocen que los elementos del conjunto A pertenecen a subconjuntos del espacio muestral del experimento aleatorio y le asocian un elemento del conjunto B, cuyos elementos representan la cuantificación de cada subconjunto de A, y a estos se le asocia la probabilidad de ocurrencia para cada subconjunto, en un conjunto C. Además, representan la relación de elementos entre tres conjuntos en un diagrama sagital, reconociendo la composición de funciones e identificando sus dominio y recorridos”. Entonces se puede identificar:

1. *La presencia de conceptos fundamentales como* EA, EM, P, RC, F, D y R, en forma explícita.
2. *La presencia de la representación de signo, asociada a los conceptos fundamentales, se lleva a cabo a través de un índice, pues la representación de la relación entre los elementos de los tres conjuntos determina la presencia del concepto de función y por ende se identifica el dominio y recorrido de las funciones representadas, y por ende la composición de funciones, es decir, la representación del signo va más allá de la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad.*

ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

En esta última fase del análisis didáctico se pretende analizar los resultados de la implementación, a la luz de los antecedentes recogidos y las categorías de análisis que se levantan en el análisis a priori del estudio de clase.

Resultados

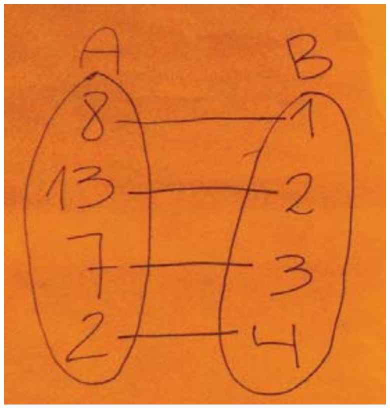
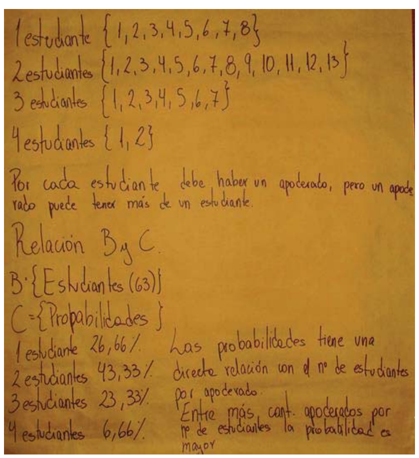
Para identificar la presencia de los conceptos fundamentales que articulan la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad en las producciones grupales, se observaran e interpretarán los datos de acuerdo a las posibles interacciones entre los criterios del análisis a priori. Se codificaran los grupos de estudiantes, como G1, G2, G3, G4 y G5, puesto que fueron cinco grupos de trabajo de un curso de 22 estudiantes. Para presentar una visión global de las producciones de los estudiantes de acuerdo a las categorías, se ha dispuesto la tabla 4.

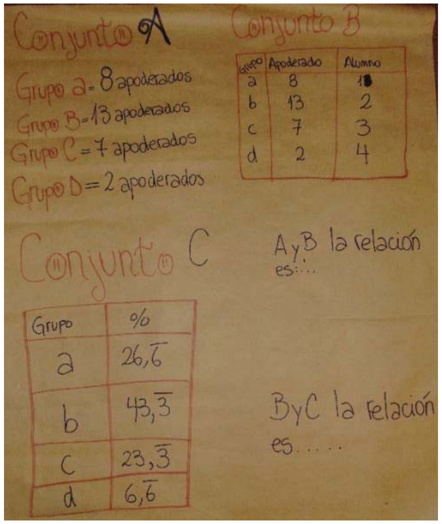
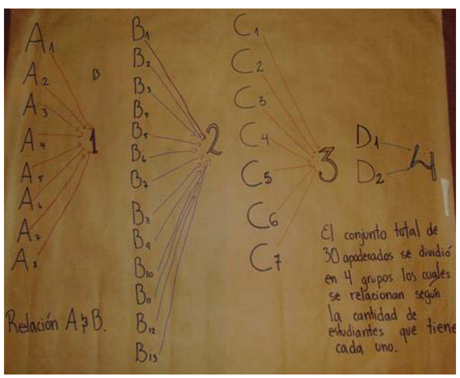
Criterios		Grupos de estudiantes	Cantidad estudiantes
Conceptos fundamentales	Forma Explícita		

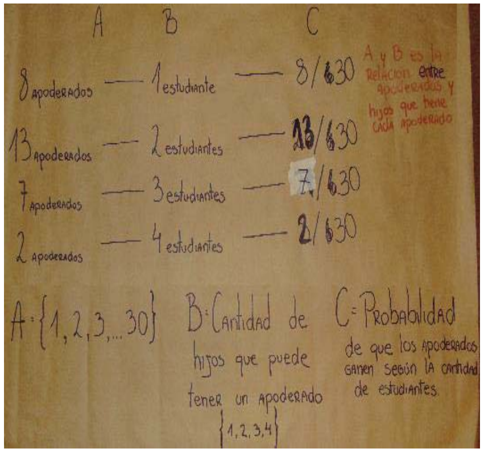
EA: Experimento Aleatorio EM: Espacio muestral P: Probabilidad de ocurrencia de un suceso RC: Relación entre conjuntos F: Función CF: Composición de funciones D: Dominio de la Función R: Recorrido de la Función	EM	G1, G2,G3, G4, G5	22
	P	G2,G3, G5	13
	RC	G1, G2,G3, G4, G5	22
	EA	G1, G2,G3, G4, G5	22
	Forma Implícita		
	F	G1, G3, G4, G5	19
	CF	G2,G3, G5	13
	D	G1, G2,G3, G4, G5	22
	R	G1, G2,G3, G4, G5	22
Formas de representar la variable aleatoria y su función de probabilidad según Pierce y la presencia de signo.	Ícono	G1, G3,G5	15
	Índice	-	0
	Símbolo	G1, G2, G4	12
Estrategias para representar la variable aleatoria y su función de probabilidad.	Gráfico sagital	G5	5
	Tablas	G3	5
	Lenguaje conjuntista	G2, G5	8
	Esquemas	G4	4

Tabla 4: Clasificación de las producciones de los grupos de estudiantes según criterios de las categorías.

Interpretación de resultados según categorías bajo el análisis didáctico

PRODUCCIÓN ESTUDIANTES	CONCEPTOS FUNDAMENTALES	PRESENCIA DE SIGNO	ESTRATEGIA
 G1: 5 estudiantes	En forma explícita los estudiantes identifican los elementos del conjunto B. Los elementos del conjunto A son asociados a los números de la tabla que representa la cantidad de apoderados. Los estudiantes, no agrupan en subconjuntos a los apoderados según cantidad de hijos en forma explícita, pero si relacionan los elementos del conjunto A y B en forma explícita. En forma implícita se representa la función de A en B. No representan el conjunto C.	La presencia de la representación de signo, asociada a los conceptos fundamentales, al ser implícita se lleva a cabo a través de un ícono, pues la representación de la relación entre los elementos de los conjuntos A y B determina la presencia del concepto de función, aun cuando no reconozcan que los elementos del conjunto A son particiones del espacio muestral., pero a la vez es símbolo, pues utiliza letras mayúsculas y gráfico sagital para representar los conjuntos.	Para relacionar los conjuntos A y B utiliza un gráfico sagital.
 G2: 3 estudiantes	Explícitamente, reconoce los elementos de cada conjunto. Logran agrupar en forma conjuntista los grupos de apoderados según la cantidad de estudiantes, es decir, relaciona el conjunto A y B. En forma implícita, relaciona los tres conjuntos, pues relaciona el conjunto A con el C, previa representación de la relación entre A y B. En forma implícita se presenta la composición de dos funciones, pues vinculan A con B por un lado y A con C por el otro, sabiendo que B se relaciona con C, pero no lo representan sólo la nombran.	Los conceptos fundamentales son representados a través de la presencia de signo como un símbolo, pues utilizan como estrategia el uso de paréntesis de llaves y letras mayúsculas para representar los elementos de los conjuntos.	Para la representación de la relación entre los conjuntos utiliza el lenguaje conjuntista.

 G3: 5 estudiantes	En forma explícita se identifican los elementos de cada conjunto, además agrupa los elementos del conjunto A en subgrupos: a,b,c y d, cada uno de ellos representan grupos de apoderados con cierta cantidad de hijos. Los elementos del conjunto C representan la probabilidad en porcentaje. En forma implícita se presenta la composición de dos funciones, pues relacionan A con B por un lado y A con C por el otro, sabiendo que B se relaciona con C, pero no lo representan.	La presencia de la representación de signo, asociada a los conceptos fundamentales, se lleva a cabo a través de ícono, pues identifican los elementos de cada conjunto y representan la relación entre ellos sin identificar que dicha relación se trata de la composición de dos funciones.	La representación de la relación entre los conjuntos es a través de tablas.
 G4:4 estudiantes	En forma explícita se identifican los elementos del conjunto A y B, además agrupa los elementos del conjunto A en subgrupos: A_i, B_j, C_k y D_l, cada uno de ellos representan grupos de apoderados con cierta cantidad de hijos. En forma explícita describen la relación entre el conjunto A y B. (variable aleatoria)	La presencia de signo se lleva a cabo a través de un símbolo, pues los estudiantes identifican los elementos del conjunto A caracterizando a través de las letras A_i, B_j, C_k y D_l, representando con un subíndice a cada apoderado según cantidad de hijos.	La relación entre los conjunto A y B se representa a través de un esquema.

<table>
<tr>
<td>

G5: 5 estudiantes</td>
<td>Los elementos del conjunto A son asociados a los números de la tabla que representa la cantidad de apoderados. Representan el espacio muestral como el conjunto A en lenguaje conjuntista. Los estudiantes, no agrupan en subconjuntos los apoderados según cantidad de hijos en forma explícita, pero si relacionan los elementos del conjunto A,B y C en forma explícita.

Reconocen y representan en forma explícita los elementos del conjunto B y C.

En forma implícita representan la composición de funciones entre los conjuntos A, B y C, pues representan la relación entre los tres conjuntos en un solo gráfico.</td>
<td>La presencia de la representación de signo, asociada a los conceptos fundamentales, se lleva a cabo a través de ícono, pues representa una analogía o semejanza con la composición de dos funciones, al intentar representar la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de líneas y agrupaciones.</td>
<td>La estrategia utilizada para representar la relación entre los conjuntos A, B y C, es el gráfico sagital (sin encerrar los elementos de cada conjunto). Además, utiliza el lenguaje conjuntista para identificar los elementos de cada conjunto.</td>
</tr>
</table>

Tabla 5: Análisis de resultados de las producciones grupales de estudiantes de 2° año de secundaria.

Análisis de resultados

A partir de los expuesto en el análisis de actuación se puede observar que la mayoría de los estudiantes logran identificar los elementos de cada conjunto, relacionan los elementos entre los conjuntos A, B y C, así como los conceptos fundamentales: P, EA, EM, RC, de manera explícita, mientras que en forma implícita los conceptos: F, CF,D y R.

En cuanto a la representación de signo, se pudo observar que la presencia de signo que predominó fue la representación de ícono y símbolo. La presencia de índice fue nula, siendo la representación más cercana la del G5, pero no describió que dichas relaciones entre conjuntos tienen características de función y que representan la composición de dos funciones. Se logró evidenciar que los estudiantes identifican los elementos esenciales que dan origen a la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad a través de representaciones análogas o semejantes a la del objeto en estudio.

Considerando las estrategias utilizados por los grupos de estudiantes, se observó una gran variedad de estrategias, predominando la estrategia del lenguaje conjuntista, seguida del gráfico sagital y las tablas o columnas. Todas ellas lograban representar la relación entre los conjuntos definidos, pero sólo una estrategia (G5) representó en un solo gráfico la composición de funciones a través de un gráfico sagital. Esto quiere decir que las estrategias utilizadas por los estudiantes para dar forma a su respuesta, están en correspondencia con las estrategias propuesta en las categorías de análisis.

SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia didáctica se diseña basándose en el estudio de clase que se implementó tres veces en distintos colegios de la quinta región de Chile, a estudiantes de segundo de secundaria. La clase 1 que se presentó anteriormente surge de la reformulación de la primera implementación. Esta primera clase tiene como objetivo deducir la variable aleatoria y la función de probabilidad, institucionalizando la representación funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones junto a su probabilidad. Es por ello, que la secuencia didáctica tendrá su foco en las representaciones, estrategias y los conceptos fundamentales que articulen dicha representación de la composición de estas dos funciones, aplicados a diferentes situaciones en que se hace partícipe el experimento aleatorio.

Análisis a priori de la clase 2

Descripción de la actividad:

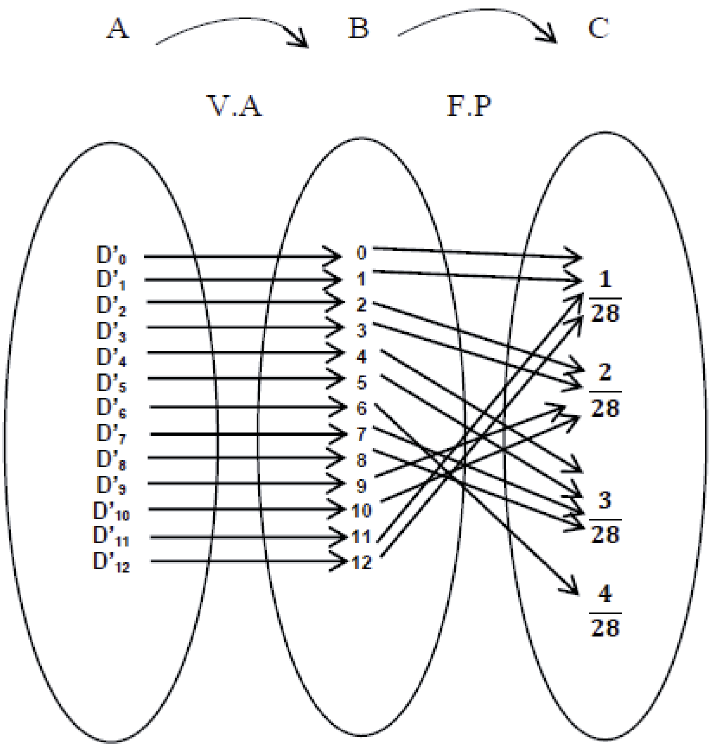
Se parte explicitando el contrato didáctico y se expone la matemática en juego de la clase anterior, se procede con el objetivo de la clase y la presentación del desafío de la clase, entregando a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Se explica la metodología de trabajo, que en esta secuencia didáctica las tres clases proponen la misma forma de trabajo primero individual y posteriormente grupal, con el fin de exponer las estrategias al cierre de la clase. (Inicio 10 minutos, desarrollo 55 minutos y cierre 25 minutos). En esta actividad, se aplica en concepto matemático institucionalizado la clase anterior.

Desafío: Un juego consiste en extraer una ficha de domino y adivinar la cantidad de puntos que tiene la ficha, que se calcula sumando los dos puntajes de cada ficha. Máximo un alumno aventajado de 2° medio del colegio Sol naciente propone una estrategia estadística para adivinar la cantidad de puntos que tendrá una ficha al ser extraída. “Una estrategia estadística es la representación de la variable aleatoria”. ¿Estás de acuerdo con lo que expone Máximo? De ser así, defina y represente la variable aleatoria y la función de probabilidad. En caso contrario argumentar por qué no aplica.

Objetivo

Representar la variable aleatoria y su función de probabilidad como una estrategia estadística que las relaciona con la cotidianidad.

Respuesta experta



D'_0: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene cero puntos.

D'_1: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene un punto.

D'_2: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene dos puntos.

D'_3: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene tres puntos.

D'_4: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene cuatro puntos.

D'_5: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene cinco puntos.

D'_6: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene seis puntos.

D'_7: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene siete puntos.

D'_8: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene ocho puntos.

D'_9: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene nueve puntos.

D'_{10}: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene diez puntos.

D'_{11}: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene once puntos.

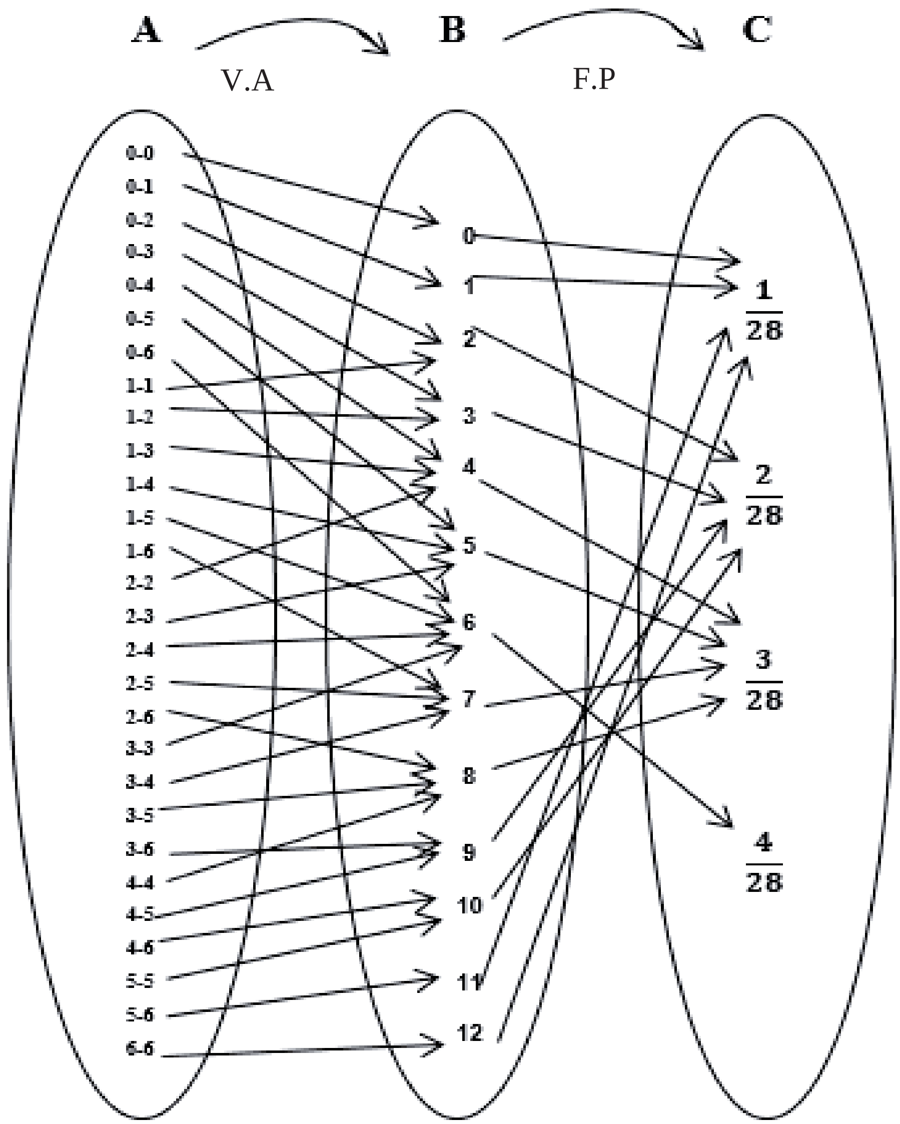
D'_{12}: Conjunto o grupo de piezas de dominó que tiene doce puntos.

Posibles estrategias

Estrategia 1

A	B	C
0-0	0	$\frac{1}{28}$
1-0	1	$\frac{2}{28}$
1-1 2-0	2	$\frac{1}{14}$
2-1 3-0	3	$\frac{1}{14}$
3-1 2-2 4-0	4	$\frac{3}{28}$
3-2 4-1 5-0	5	$\frac{3}{28}$
3-3 4-2 5-1 6-0	6	$\frac{1}{7}$
4-3 5-2 6-1	7	$\frac{3}{28}$
4-4 5-3 6-2	8	$\frac{3}{28}$
5-4 6-3	9	$\frac{1}{14}$
5-5 6-4	10	$\frac{1}{14}$
6-5	11	$\frac{1}{28}$
6-6	12	$\frac{1}{28}$

Estrategia 2: Espacio muestral sin agrupar.



Posibles dificultades, errores y posteriores devoluciones

DIFICULTAD	ERROR	DEVOLUCIÓN	INVESTIGACIÓN
Dificultad para identificar espacio muestral del experimento.	Definen los elementos del conjunto A como cada una de las piezas del dominó. No agrupan en particiones o subconjuntos los elementos con iguales puntos.	"Sugerir que analicen y comprendan el enunciado "obtener puntos" y que identifiquen cuantas piezas tiene el dominó."	(Ortiz, 2002)
Dificultad en identificar los elementos del conjunto C, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación.	No identifican los elementos del conjunto C, pues carecen del razonamiento proporcional asociado a la probabilidad.	"¿Por qué Máximo podría adivinar la pieza del dominó? ¿Cuál es la posibilidad de que al seleccionar una pieza del dominó, esta obtenga 7 puntos?"	(Fine,1973)
Dificultad para representar la variable aleatoria dado un experimento aleatorio.	Buscan otra estrategia para adivinar la pieza extraída. Calculan los puntos de cada pieza y buscan la con mayor frecuencia. No justifican, si es o no una estrategia.	"¿Cuántos puntos tiene la pieza del chancho mayor? ¿Y el chancho menor?	Nardecchia y Hevia (2003)

Tabla 6: Relación entre dificultades y errores con la respectiva devolución para la clase 2.

Matemática en Juego

- Función, dominio, codominio y recorrido.
- Representación de una función mediante tabla de valores, gráfico cartesiano, gráfico estadístico o diagrama sagital.
- Experimento Aleatorio.
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso. (Regla de Laplace)
- Variable Aleatoria y función de probabilidad.

Planificación de la clase 2

PLANIFICACIÓN DE LA CLASE 2		
Asignatura: Matemática	Nivel: 2° medio	Horas: 2
Aprendizaje esperado: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.		
Habilidad: Caracterizar variables aleatorias		
Conocimientos previos: • Experimento aleatorio • Muestreo aleatorio simple • Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio • Probabilidad teórica de un evento • Relaciones y funciones		
Materiales: • Desafío impreso • Data • Plumones • Paleógrafo		
Problemática: Dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.		
Objetivo de la clase: Representar la variable aleatoria y su función de probabilidad.		
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE
INICIO (10 min)		
0. Indicaciones de la clase 1. Presentación del objetivo de la clase: Argumentar si la representación de la variable aleatoria es una estrategia estadística. 2.Planteamiento del desafío Un juego consiste en extraer una ficha de domino y adivinar la cantidad de puntos que tiene la ficha. Máximo un alumno aventajado de 2° medio del colegio Sol naciente propone una estrategia estadística para adivinar la cantidad de puntos que tendrá una ficha al ser	0. Explicitar el contrato didáctico Indicar que se debe generar un ambiente propicio para el aprendizaje(respeto, empatía y responsabilidad) 1. Escribir el objetivo de la clase. 1.1 Un estudiante lee el objetivo de la clase. 1.2 Expone la matemática en juego de la clase anterior y pregunta a los estudiantes: ¿Cómo representaron la variable aleatoria en el desafío de la clase anterior? (Le pide a un estudiante a realizar la representación de la v.a del desafío anterior, al costado de la pizarra) 2. Presentación del desafío de la clase: Se entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Dos estudiantes leen este en voz alta mientras el resto sigue la lectura. 2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la tarea de hoy?	¿Los estudiantes recuerdan la representación de la variable aleatoria de la clase anterior? ¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema? ¿Comprenden el problema? ¿Son capaces de identificar la tarea? ¿Se cumple el tiempo planificado?

extraída. "La estrategia estadística es la representación de la variable aleatoria". ¿Estás de acuerdo con lo que expone Máximo? De ser así, defina y represente la variable aleatoria y la función de probabilidad. En caso contrario argumentar por qué no aplica.	- "para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase y la matemática en juego"	
DESARROLLO		
(35 min)		
3. Solución al desafío 3.1 Los alumnos trabajan en su hoja. - Buscan estrategias propias en forma individual para argumentar sus respuestas. -Validan sus producciones. -Intercambian opiniones con sus compañeros. 3.2 Los estudiantes en forma grupal realizan una puesta en común sobre sus argumentaciones y/o estrategias.	3.1 Indica la metodología de trabajo: Primero hay un momento individual y luego grupal. Trabajo en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. A cada grupo se les entregará una cartulina o un papelógrafo para plasmar sus estrategias. 3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las relaciones que definen (las registra). -Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. - Basado en la observación, selecciona a tres grupos, un estudiante de cada uno de ellos presentará su estrategia en la pizarra y su argumentación. (dos que argumenten que si es la estrategia adecuada, pero con diferentes representaciones y uno que tenga una estrategia diferentes)	¿Utilizan la representación de la v.a como una estrategia estadística? ¿Identifican los conjuntos asociados al desafío? ¿Determinan los elementos de cada conjunto? ¿Definen la relación entre dos conjuntos? (variable aleatoria) ¿Definen la relación entre otros dos conjuntos? (función de probabilidad) ¿Registran en la hoja posibles representaciones? ¿Discuten con sus compañeros? ¿Logran representar la V.A y su función de probabilidad? ¿Se cumple el tiempo planificado?
25 min		
4. Trabajo en la pizarra 4.1 Cada uno de los tres estudiantes expondrá su cartulina en cada una de las 3 partes de la pizarra. 4.2 Tres alumnos argumentan si es la estrategia adecuado representándola o argumentando lo contrario y	4.1 La pizarra la divide en tres partes, que serán completadas con las cartulinas de los grupos.(escogidos previamente) 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que expongan su cartulina y argumenten su estrategia de resolución al grupo curso.	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Argumentan su respuesta? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?

proponiendo una estrategia diferente. 4.3 Los estudiantes responden a las preguntas del profesor con respecto a sus estrategias.	4.3 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas. ¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos de cada conjunto? ¿Qué elementos utilizaron para su estrategia?	¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
CIERRE (20 min)		
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la representación de la v.a y su función de probabilidad como la estrategia estadística para el desafío. 5.2 Se destaca y analizan las argumentaciones de cada estudiante. En el caso, del estudiante que propone una estrategia diferente, realizar las siguientes preguntas: ¿Sumaste los puntos de cada ficha del dominó? ¿Calculaste frecuencias relativas?	5.1 El profesor muestra la representación de la v.a y su función de probabilidad, relacionando los elementos de cada conjunto. 5.2 El profesor pregunta a sus estudiantes: ¿Al observar la representación de la v.a y su función de probabilidad, es posible adivinar los puntos de una pieza de dominó?¿Por qué? 5.3 El profesor pregunta a sus estudiantes, con respecto a quien encontró otra estrategia. ¿Cuál es el espacio muestral de experimento?¿Cómo se construye? ¿Cómo se calculó la frecuencia relativa para saber el puntaje más frecuente?¿y la probabilidad de ocurrencia? (se espera que los estudiantes comprendan que quien encontró una forma de responder a la pregunta, lo hizo calculando los puntos, es decir, construyó el espacio muestral, contó cuantos puntos se repetían para saber el que tiene mayor frecuencia, por lo tanto asoció un número real al espacio muestral y además busca el más frecuente, pues tiene mayor probabilidad de salir. En conclusión, también utilizó la v.a y su función de probabilidad, pero no lo representa) Por lo anterior, la v.a junto a su función de probabilidad, es una estrategia estadística para dicho desafío.	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes relacionan los elementos de cada conjunto? ¿Los estudiantes comprenden que la v.a es la estrategia para el desafío? ¿Se cumple el tiempo planificado?

Tabla 7: Planificación de la 2° clase de la secuencia didáctica.

Análisis a priori de la clase 3

Descripción de la actividad

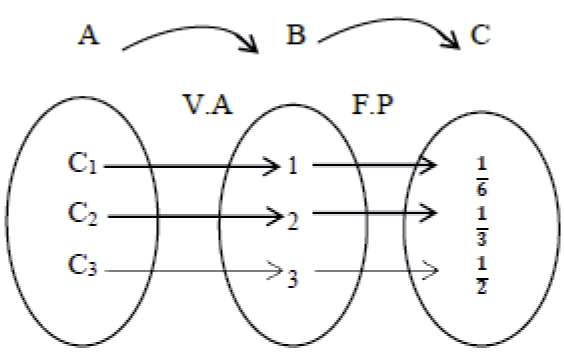
Se explicita el contrato didáctico, se expone la matemática en juego de las clases anteriores y mediante igual metodología de las clases anteriores, los estudiantes abordarán un desafío que tiene más de una respuesta experta, pues consiste en una pregunta abierta, que tiene como finalidad concluir que para un determinado espacio muestral existe más de una variable aleatoria que se puede representar junto a su función de probabilidad.

Desafío: En el 2°medio A del colegio Sol Naciente, en la clase de matemática, la profesora les propone el siguiente desafío: “Escribe los números del 1 al 6 cada uno con palabras”. Defina una variable aleatoria y represéntala junto a su función de probabilidad.

Objetivo
Definir una variable aleatoria a partir de un experimento aleatorio para luego representarla junto a su función de probabilidad.

Respuesta experta
Para la clase 3, al ser una pregunta abierta, se proponen tres respuestas expertas, pudiendo existir otras diferentes igual de expertas que éstas.

Respuesta experta 1

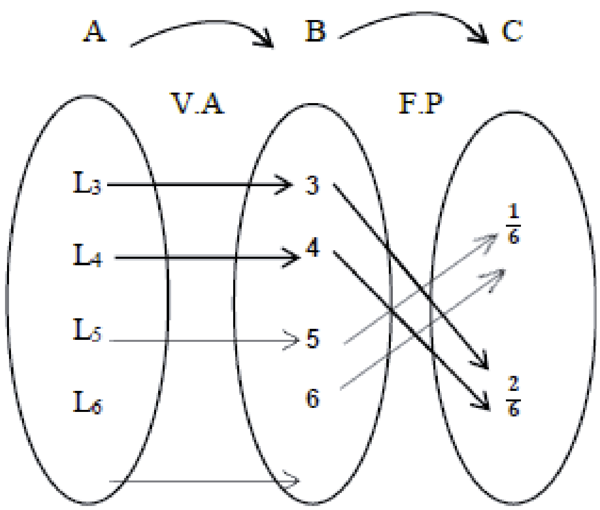


C_1: Conjunto o grupo de palabras que tienen una consonante.

C_2: Conjunto o grupo de palabras que tienen dos consonantes.

C_3: Conjunto o grupo de palabras que tienen tres consonantes.

Respuesta Experta 2



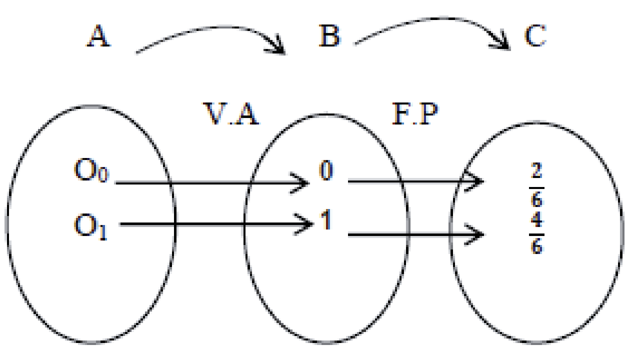
L_3: Conjunto o grupo de números en palabras que tienen 3 letras.

L_4: Conjunto o grupo de números en palabras que tienen 4 letras.

L_5: Conjunto o grupo de números en palabras que tienen 5 letras.

L_6: Conjunto o grupo de números en palabras que tienen 6 letras.

Respuesta Experta 3



O_0: Conjunto o grupo de palabras que no tienen la letra "O"

O_1: Conjunto o grupo de palabras que tienen la letra "O"

Posibles estrategias

Para este apartado, se proponen diferentes estrategias asociadas sólo a la respuesta experta 1.

Estrategia 1

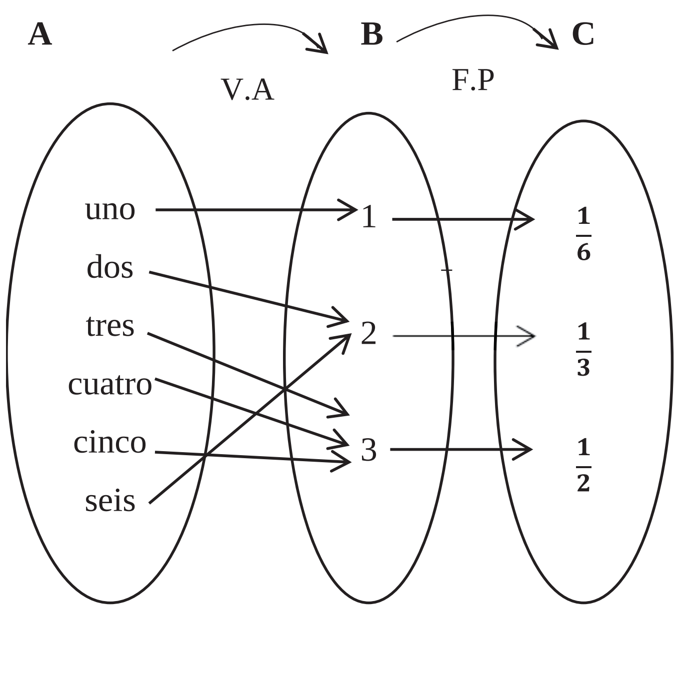
A	B	C
C1	1	$\frac{1}{6}$
C2	2	$\frac{1}{3}$
C3	3	$\frac{1}{2}$

C_1: Conjunto o grupo de palabras que tienen una consonante.

C_2: Conjunto o grupo de palabras que tienen dos consonantes.

C_3: Conjunto o grupo de palabras que tienen tres consonantes.

Estrategia 2: Espacio muestral sin agrupar.



Posibles dificultades, errores y posteriores devoluciones
En general, las dificultades que se presentan en las actividades anteriores pueden volver a presentarse; por ellos sólo propone la dificultad nueva que se podría presentar en la clase 3.

DIFICULTAD	ERROR	DEVOLUCIÓN	INVESTIGACIÓN
Dificultad en identificar los elementos del conjunto C, es decir la probabilidad de ocurrencia de cada situación.	No identifican los elementos del conjunto C, pues carecen del razonamiento proporcional asociado a la probabilidad.	¿Cuál es la posibilidad de que al seleccionar un número éste tenga sólo una vocal?"	(Fine,1973)
Dificultad para representar la variable aleatoria dado un experimento aleatorio.	No identifican características en común entre los números escritos en palabras.	"¿Cuál es el número con mayor cantidad de cierta cantidad de letras?	Nardecchia y Hevia (2003)
Dificultad de confundir el espacio muestral del experimento con el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria.	Definen la variable aleatoria como la relación que existe entre la palabra y su respectivo símbolo (número). (uno, 1)(dos, 2)….(cinco, 5), y por lo tanto la probabilidad de escoger uno de ellos es siempre la misma.	"¿Qué tienen en común los cinco números al escribirlos con palabras? ¿Puedes agrupar las palabras de los números en diferentes subconjuntos?	Miller (1998)

Tabla 8: Relación entre dificultades y errores con la respectiva devolución para la clase 3.

Matemática en Juego

- Función, dominio, codominio y recorrido.
- Experimento Aleatorio.
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Probabilidad de ocurrencia de un suceso. (Regla de Laplace)
- Variable Aleatoria y función de probabilidad.

Planificación de la clase 3

PLANIFICACIÓN DE LA CLASE 3		
Asignatura: Matemática	Nivel: 2° medio	Horas: 2
Aprendizaje esperado: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.		
Habilidad: Caracterizar variables aleatorias		
Conocimientos previos: • Experimento aleatorio • Muestreo aleatorio simple • Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio • Probabilidad teórica de un evento • Relaciones y funciones		
Materiales: • Desafío impreso • Data • Plumones • Papelógrafo		
Problemática: Dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad.		
Objetivo de la clase: Definir una variable aleatoria para luego representarla junto a su función de probabilidad.		
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUCIÓN DE MARCHA DE LA CLASE
INICIO (10 min)		
0. Indicaciones de la clase 1. Presentación del objetivo de la clase: Definir una variable aleatoria y representarla junto a su función de probabilidad. 2.Planteamiento del desafío En el 2°medio A del colegio Sol Naciente, en la clase de matemática, la profesora les propone el siguiente desafío: “Escribe los números del 1 al 6 cada uno con palabras”. Defina	0. Explicitar el contrato didáctico Indicar que se debe generar un ambiente propicio para el aprendizaje(respeto, empatía y responsabilidad) 1. Escribir el objetivo de la clase. 1.1 Un estudiante lee el objetivo de la clase. 1.2 Expone la matemática en juego de la clase anterior y pregunta a los estudiantes: ¿Qué características tienen los elementos de los conjuntos asociados a la v.a y su función de probabilidad? (Se espera que los estudiantes caractericen el conjunto A: como el espacio muestral, el conjunto B: como el valor real que se le asocia a los elementos de A y el conjunto C: como las probabilidades de ocurrencia) 2. Presentación del desafío de la clase: Se entrega a cada estudiante el desafío impreso en una hoja. Un estudiante lee este en voz alta mientras el resto sigue la lectura.	¿Los estudiantes caracterizan los elementos de los conjuntos de la variable aleatoria y su función de probabilidad? ¿Los estudiantes están atentos a la presentación del problema? ¿Comprenden el problema? ¿Son capaces de identificar la tarea? ¿Se cumple el tiempo planificado?

una variable aleatoria y represéntala junto a su función de probabilidad.	2.1 Pregunta a los estudiantes: ¿Cuál es la tarea de hoy? - "para responder la pregunta consideren también el objetivo de la clase y la matemática en juego"	
DESARROLLO		
(25 min)		
3. Solución al desafío 3.1 Los alumnos trabajan en su hoja. - Buscan estrategias propias en forma individual. -Validan sus producciones. -Intercambian opiniones con sus compañeros. 3.2 Los estudiantes en forma grupal realizan una puesta en común sobre las v.a que definieron y deciden una para representarla junto a su función de probabilidad en la cartulina.	3.1 Indica la metodología de trabajo: Primero hay un momento individual y luego grupal. Trabajo en grupo de 3 o 5 estudiantes para compartir ideas. A cada grupo se les entregará una cartulina para plasmar sus estrategias. 3.2 Observa las estrategias de los grupos identificando las v.a que definen (las registra). -Identifica las v.a que han definido erróneamente y plantea devoluciones para que identifiquen sus errores. -Identifica elementos de conjuntos erróneos y/o relaciones erróneas, u otra dificultad o error, y plantea devoluciones para que el estudiante se percate de su error. - Basado en la observación, selecciona a 4 grupos, que hayan definido diferentes v.a.	¿Definen una v.a asociada al desafío? ¿Identifican los conjuntos que relacionan la v.a y su función de probabilidad? ¿Determinan los elementos de cada conjunto? ¿Definen la relación entre dos conjuntos? (v.a) ¿Definen la relación entre otros dos conjuntos? (función de probabilidad) ¿Registran en la hoja posibles representaciones? ¿Discuten con sus compañeros? ¿Logran representar la V.A y su función de probabilidad? ¿Se cumple el tiempo planificado?
25 min		
4. Trabajo en la pizarra 4.1 Cada uno de los cuatro estudiantes ilustrará la v.a que han definido y representado junto a su función de probabilidad. 4.2 Los estudiantes responden a las preguntas del profesor con respecto a sus estrategias.	4.1 La pizarra la divide en cuatro partes, que serán completadas con las cartulinas de los grupos.(escogidos previamente) 4.2 Pide a cada uno de los estudiantes, seleccionados previamente, de manera individual que expongan su cartulina y expliquen sus estrategias para definir una v.a. 4.3 Va haciendo preguntas que dejen en evidencia las estrategias usadas.	¿Los alumnos se atreven a salir a la pizarra? ¿Los estudiantes en forma grupal escogen entre las v.a definidas individualmente? ¿Llegan a un consenso? ¿Representan la(s) relación(es) entre los conjuntos? ¿Se interesan los alumnos en compartir sus ideas?

	¿Cómo determinó la(s) relación(es)? ¿Cómo encontró los elementos de cada conjunto?	¿Hay alumnos que abandonan el desafío? ¿Qué devolución fue dada? ¿Se cumple el tiempo planificado?
CIERRE (30 min)		
5. Sintetizar las ideas 5.1 Se ilustra en la pizarra la representación de las diferentes v.a y su función de probabilidad. 5.2 Se destaca y analizan las argumentaciones de cada estudiante. En el caso, del estudiante que propone una estrategia diferente, realizar las siguientes preguntas: ¿Sumaste los puntos de cada ficha del dominó? ¿Calculaste frecuencias relativas?	5.1 El profesor muestra la representación de la v.a y su función de probabilidad, relacionando los elementos de cada conjunto en cada caso. 5.2 El profesor pregunta a sus estudiantes: Al observar la representación de las cuatro v.a y su respectiva función de probabilidad, ¿es posible definir otras v.a? ¿Algún grupo que haya definido otras v.a? 5.3 El profesor concluye: Con las respuestas anteriores, se concluye que para un determinado espacio muestral existe más de una variable aleatoria que se puede representar junto a su función de probabilidad.	¿Los estudiantes participan activamente en la clase? ¿Los estudiantes analizan si las v.a que definen sus compañeros cumplen las características de una función? ¿Los estudiantes relacionan los elementos de cada conjunto de las v.a propuestas por sus compañeros? ¿Se cumple el tiempo planificado?

Tabla 9: Planificación de la 3° clase de la secuencia didáctica

CONCLUSIONES

Promover el aprendizaje de la variable aleatoria en su naturaleza funcional junto a su función de probabilidad, a través de una secuencia didáctica planificada en base al análisis de una primera clase, ha sido un gran desafío, pues es de suma importancia para los docentes en cuanto a la educación continua, ya que nuestro currículum nacional se va ajustando de acuerdo a las necesidades de la sociedad, siendo una de las que predomina actualmente la estadística y por lo tanto lograr abordar los conceptos estadísticos en forma didáctica implica un aprendizaje significativo en los estudiantes y así profundizar en los conceptos matemáticos con el fin de desarrollar un pensamiento matemático para la resolución de problemas de nuestro diario vivir.

De acuerdo a las producciones de los grupos de estudiantes de segundo de secundaria y el análisis de resultados desarrollados bajo sustento, es posible afirmar que la comprensión del concepto matemático representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad es complejo para ellos, por ende en su proceso de aprendizaje se enfrentan a dificultades que el docente debe prever.

Las principales dificultades que se presentaron fueron definir y representar un conjunto, pues no agrupan los elementos en subconjuntos con iguales características (Ortiz, 2002), la otra dificultad que se presentó con mayor frecuencia fue la de definir relaciones entre los tres conjuntos e identificar que dichas relaciones definidas son funciones, tal como lo reportan Ruiz y Albert (2013).

La representación de variable aleatoria y su función de probabilidad son conceptos matemáticos abstractos que involucran varios conceptos matemáticos igual de abstractos y complejos para su comprensión (Miller, 1998), pero el desafío propuesto en el estudio de clase a través de un problema no rutinario, resultó ser a la luz de los datos, una estrategia estadística para relacionar dichos conceptos con la cotidianidad y lograr que se convierta en un objeto matemático que puede ser abordado en forma sencilla.

En el análisis epistemológico queda en evidencia que la variable aleatoria ocupa más de la caracterización de su función de probabilidad que de ella misma, además de no incluir la composición de funciones dentro de problemas de planteo.(Ruiz, 2004) es por ello que el desafío propuesto es un aporte sustancial a la comprensión del objeto en estudio, pues no sólo introduce en concepto de variable aleatoria, sino también su función asociada a la probabilidad, es decir, representa la relación de tres conjuntos con características de función, que genera una composición de funciones en problemas no rutinarios.

Además, en el análisis didáctico del contenido, no sólo pretende indagar en las diferentes representaciones del objeto matemático (tabular, gráfica, geométrica, conjuntista), sino que la presencia de signo en relación con la representación de la variable aleatoria y su función de probabilidad, pues como se dijo anteriormente acarrea un listados de conceptos matemáticos fundamentales que articulan su relación con el objeto matemático en cuestión. Pues, si se observa una producción que utilizó un gráfico sagital y una que utilizó una tabla, la relación entre los elementos de los conjuntos es la misma, sólo existe una diferencia de estrategia.

La representación de signo enriquece la interpretación de las producciones de los estudiantes, ya que si bien es cierto lograron relacionar los elementos de los conjuntos no fueron más allá del concepto de relación entre conjuntos, la identificación de los dominios y recorridos y tampoco notaron la presencia de una composición de funciones. Lo que conlleva nuevamente a que la comprensión del objeto matemático es compleja de ahí que no se hizo presente la representación de índice en las producciones de los grupos de estudiantes, predominando la de ícono y símbolo.

Queda de manifiesto que la línea de investigación debe enfocarse en el carácter funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones en problemas de planteo con el fin de convertir el saber sabio en un saber enseñado, pero que efectivamente logre el aprendizaje esperado propuesto por el currículo nacional "Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios", y no sólo enfocarse en la función de probabilidad que utiliza la variable aleatoria como una herramienta para su representación.

REFERENCIAS

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., & NCTM

Batanero, C., Chernoff, E. , Engel, J. , Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. New York: Springer.

Fernández, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Case of a Japanese Approach to Improving Instruction Through School-Based Teacher Development*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, (3), 251-293.

Heitele, D. (1975).*Un Punto de Vista Epistemológico Sobre las Ideas Fundamentales Estocásticas. Estudios de la Educación en Matemáticas*, 6, 187-205.

Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En L. Pereira (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 1221-1222). Singapur: IASE.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

Ortiz J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. España.

Oseguera F. (1994). *El concepto de variable aleatoria en el contexto del currículo.* Análisis y Alternativas. Tesis de maestría. Cd. de México, México: CINVESTAV-IPN.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

Rincón, L. (2007). *Probabilidad y Estadística*. Ciudad de México: Facultad de Ciencias UNAM.

Ruiz, B. y Albert, J. (2013). *Un análisis epistemológico de la variable aleatoria*. Monterrey, México: ITESM.

Sampieri, R, Fernández, C, Baptista, P. (2006*) Metodología de la investigación*. Cd.de México: McGraw Hill.