PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO, CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Viaje al centro de la muestra:

Secuencia didáctica para el desarrollo del concepto y de las propiedades de la mediana

TRABAJO MONOGRÁFICO PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DE: NICOLÁS LEÓN MC VEY

PROFESORAS GUÍAS: **PATRICIA VÁSQUEZ SALDIAS**
ROMINA MENARES ESPINOZA
ELISABETH RAMOS RODRIGUEZ

VALPARAÍSO, DICIEMBRE DE 2017

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este monográfico tiene por objetivo presentar al profesorado una secuencia didáctica orientada a que los estudiantes profundicen su comprensión sobre el uso y las propiedades de las medidas de tendencia central, centrándose en la mediana. Fue preparado en el marco del Seminario de Graduación del Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (MDM).

Diversas investigaciones en didáctica de la Estadística han apuntado al concepto de medida de tendencia central, mostrando, en distintos contextos, que si bien los estudiantes suelen tener la capacidad algorítmica de calcular la media, la moda y la mediana de un conjunto de datos dado, dicha capacidad no implica que sean capaces de dar un sentido a lo que estas medidas indican sobre dicho conjunto.

Algunos de ellos son los siguientes:

Russel y Mokros (1995) propusieron un cuestionario de preguntas abiertas a 21 estudiantes de 4º a 8º año, para indagar sobre su comprensión de los promedios. Los autores identificaron 5 nociones distintas que los estudiantes exhibían sobre este concepto: i) el promedio como moda, ii) el promedio como algoritmo, iii) el promedio como lo que es razonable, iv) el promedio como medio y v) el promedio como punto matemático de equilibrio. De estas nociones, solo las 3 últimas corresponderían a una comprensión que incorpora el concepto de representatividad. Entre sus conclusiones, establecen que los estudiantes que han desarrollado una comprensión intuitiva de la idea de representatividad pueden llegar a ver anulada dicha intuición por la introducción prematura de los algoritmos de cálculo de las MTCs, de una manera que resulta poco significativa, considerando sus conocimientos previos.

Complementaria a lo anterior es la idea que planteaba Cobo (2003), en su tesis doctoral sobre el sentido de las MTCs para estudiantes secundarios, al referirse a las limitaciones de la aproximación algorítmica a la enseñanza de los promedios:

> …no podemos esperar que, enseñando, por ejemplo, a los alumnos a calcular los promedios puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente el promedio más adecuado en situaciones problemáticas sencillas.
> (Cobo, 2003, p. 291)

Por su parte, en un estudio que involucró a 180 estudiantes entre 7º y 12º año, Reading y Pegg (1996) propusieron un ejercicio consistente en elegir un valor para representar un conjunto de datos, y luego justificar la elección. Una gran parte de los estudiantes eligió alguna de las MTCs para representar al conjunto de datos, sin embargo muy pocos (solo cuatro) de ellos pudieron entregan una justificación que tuviera en cuenta las características del conjunto de datos.

Similarmente, Martínez y Huerta (2016) aplicaron un cuestionario a 188 alumnos de distintos niveles educativos, desde primaria hasta estudiantes que actualizan su diplomatura a grado. Los cuatro problemas del cuestionario eran de respuesta abierta y exigían la comparación de diferentes distribuciones, que incluían datos atípicos. Los autores concluyeron que los estudiantes no tenían generalmente dificultades para calcular las MTCs, pero en su mayoría simplemente calculaban la media, sin considerar su grado de representatividad, de acuerdo a las características del conjunto de datos. Por otra parte, sólo un estudiante eligió calcular la mediana en presencia de datos atípicos.

En resumen, las investigaciones citadas muestran que los estudiantes suelen manejar con destreza los algoritmos de cálculo de las MTCs, y son capaces de presentar una o más de ellas al verse enfrentados a un problema de reducción de datos, sin embargo, es deficitaria la comprensión de la forma en que las características del conjunto de datos afectan los valores de las MTCs. Por consiguiente, también les resulta complejo seleccionar la MTC más apropiada, dado un conjunto de datos que se quiere representar.

Estas constataciones hacen pertinente la elaboración de secuencias didácticas que, más allá de proponer a los estudiantes ejercicios de cálculo de medidas de tendencia central, los expongan a situaciones en las cuales sea necesario dar sentido a dichos valores, en función de una problemática que se quiere resolver. Justamente, ese es el propósito declarado de este monográfico.

En particular, la secuencia didáctica propuesta tiene por objetivo que los estudiantes conozcan y se familiaricen con las propiedades de la mediana, presentándose en un énfasis comparativo con respecto a las de la media. Se pretende, de este modo, que mejore su capacidad de discernir cuál de las dos utilizar cuando se vean en la necesidad de representar variables cuantitativas[1].

[1] El uso de la moda se restringe, en presencia de variables cuantitativas, a distribuciones multimodales, mal representadas por la media y mediana, pero las bases curriculares no establecen como requisito que se aborden distribuciones de estas características

Objeto matemático

Aspectos Curriculares

La figura 1 muestra la progresión de los aprendizajes en Estadística que se vinculan con el concepto de MTC, desde 1° básico hasta II medio. Para su confección se utilizaron las bases curriculares (Ministerio de Educación de Chile, 2012, 2015).

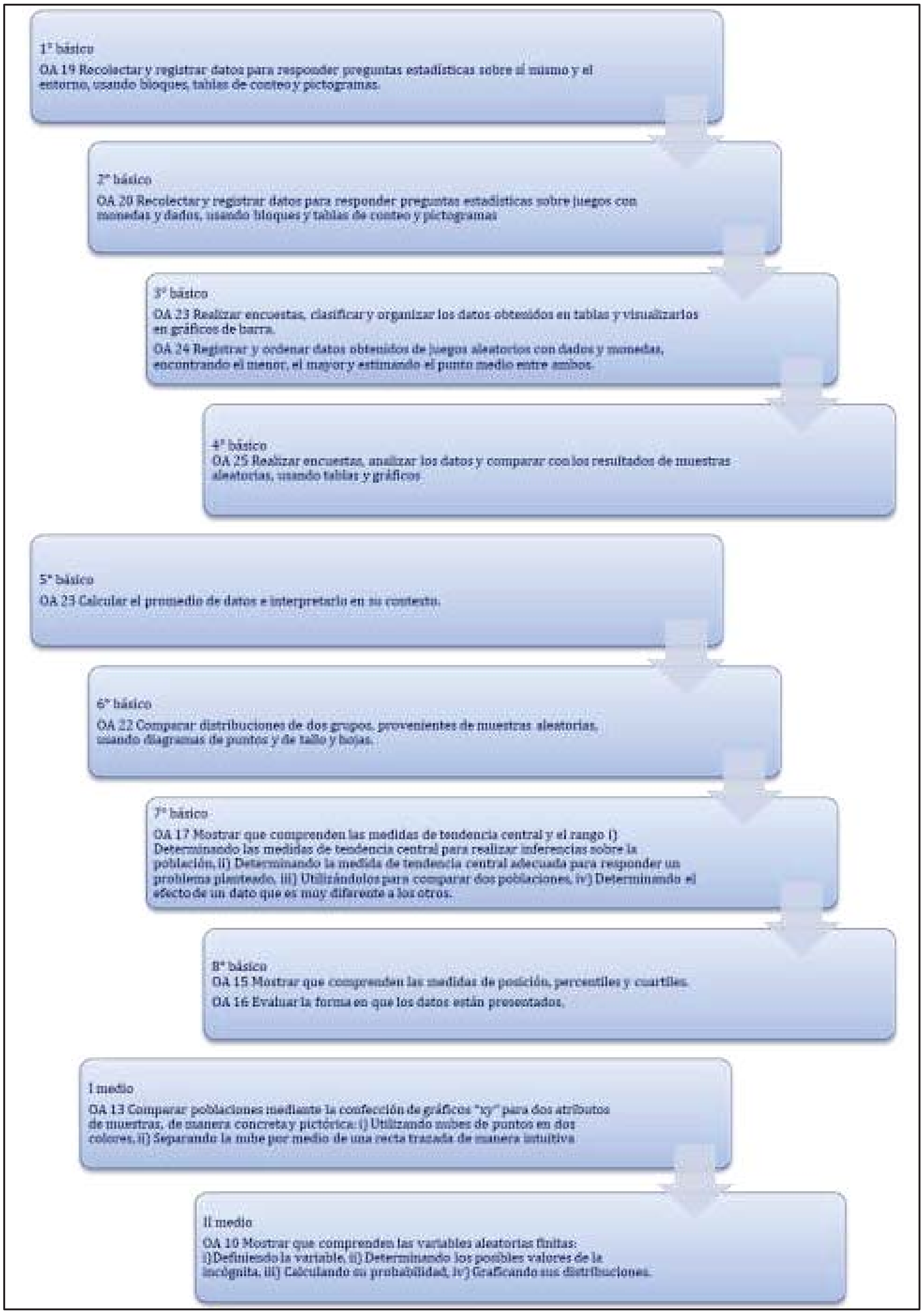

Figura 1. Progresión de objetivos de aprendizajes relacionados con las MTCs.

Se excluyen del barrido los niveles de III y IV medio, por encontrarse actualmente sus bases curriculares en proceso de adaptación, y porque las bases que dejarán de estar vigentes no presentan una conexión clara con los niveles inferiores[2].

Por otra parte, debe advertirse que la interpretación de la conexión con el concepto de MTC es restrictiva. No se incluyen, por ejemplo, conceptos de probabilidad que están a la raíz de la estadística inferencial y presentan, por tanto, conexiones más profundas con la idea de tendencia.

Se pueden poner de relieve los siguientes énfasis curriculares:

- Desde 1° a 4° básico se trabaja principalmente con la recolección, registro, organización y presentación de datos en diversos formatos (pictogramas, tablas y gráficos). Ciertamente, se está fundamentando con ello la noción de un conjunto de datos como objeto matemático de suyo, que será relevante para la construcción del concepto de MTC, puesto que las MTCs se calculan a partir de un conjunto de datos al que se pretende que representen.
- La primera aparición del concepto de MTC se da en 5° básico, asociado a la idea de promedio. Aquí promedio se toma como sinónimo de media aritmética. De los estudiantes se espera que sepan calcularlo, pero también darle una interpretación según el contexto.
- En 6° básico se produce un hiato, puesto que solo una interpretación amplia del Objetivo de Aprendizaje (OA) 22 permitiría dar cabida al uso del promedio. Más aún, en el programa de estudio (Ministerio de Educación de Chile, 2013) la palabra "promedio" aparece mencionada solo en escasos ejemplos de aplicaciones del eje de números, y se ve excluida del eje datos y probabilidades. Es pertinente preguntarse si la pausa en el estudio de los promedios en 6° puede tener repercusiones en la naturalidad con que los alumnos lo retoman en 7°.
- En 7° básico se abordan plenamente las MTCs de media, moda y mediana, poniéndolas al servicio de la inferencia, la comparación de poblaciones y la resolución de problemas. También se aborda el efecto que sobre ellas tienen los datos atípicos.
- A pesar del protagonismo que adquiere en 7° básico, desde 8° básico y hasta 2° medio el concepto de MTC se ve desplazado, no pudiendo detectarse en las bases conexiones evidentes con los conceptos nuevos. Los OA que han sido citados en el barrido no mencionan explícitamente a las MTCs, pero en los programas correspondientes es posible detectar ya sea indicadores de evaluación o actividades propuestas en los que se trae a colación la media aritmética.
- Es necesario señalar, por otra parte, que las bases curriculares sí mencionan a las MTCs en el ámbito de las Ciencias Naturales, como una de las herramientas matemáticas para el análisis y explicación de los resultados de investigaciones científicas.

---

[2] El actual programa para II medio dejará de estar vigente para 2018, y los programas de III y IV medio lo harán en los años sucesivos. En este barrido curricular se han considerado las bases curriculares de 7° básico a II medio del Ministerio de Educación de Chile (2015), excluyéndose, por tanto, el actual programa de II medio, que no concuerda con dichas bases.

DEFINICIÓN ESCOLAR

En esta sección, se analiza el texto escolar oficial del Ministerio de Educación de matemáticas para 7° básico ((Merino, Muñoz, Pérez y Rupin, 2016). En particular, se presentan y discuten las definiciones que entrega de cada una de las tres MTCs cuyo estudio exige el programa: media, moda y mediana.

> Se llama **media aritmética** o **promedio** a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales. La fórmula para el cálculo de esta medida de tendencia central es:
>
> $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
>
> (...)
> Se llama **moda** ($\mathbf{M_o}$) de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia.
> (...)
> La **mediana** corresponde al **valor que ocupa el término central** de un conjunto de datos una vez ordenados de menor a mayor o viceversa. Si la cantidad de datos **n** es impar, entonces la posición de la mediana está dada por
>
> $$\frac{n+1}{2}$$
>
> Cuando la cantidad de datos del conjunto es par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos términos centrales una vez que estos se ordenan.
> (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin, 2016, pp. 312, 316, 320)

Se observa que la definición solo alude a un *conjunto de datos* de referencia en los casos de la mediana y la moda, no así en el caso de la media, haciendo imprecisa su definición.

Además, se refiere, tanto en el caso de la media como en el de la moda, al concepto de *variable* (al que convendría, sin duda, agregar el calificativo *estadística*), pero lo utiliza de manera errónea. En efecto, en la definición de media se habla de "la cantidad total de la variable", frase que no determina ningún resultado matemático concreto. Similarmente, al abordar la moda, se la define como "la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia", cuando en realidad se debería hablar del *valor* de la variable que presenta mayor frecuencia.

En resumen, las definiciones del texto escolar analizado adolecen de imprecisiones que podrían ser fuente de obstáculos didácticos para los estudiantes. Se hace, por tanto, necesario que el profesor que decida servirse de él en sus lecciones haga las correcciones pertinentes al momento de definir las MTCs.

Una buena alternativa son las definiciones que entrega el siguiente texto erudito:

> Supongamos que tenemos una muestra de tamaño N, donde la variable estadística x toma los valores $x_1, x_2, \dots, x_N$. Se define la **media aritmética** $\bar{x}$, o simplemente **media**, de la muestra como
>
> $$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$$
>
> Es decir, la media se calcula sencillamente sumando los distintos valores de x y dividiendo por el número de datos.
>
> (…)
>
> Una medida de centralización importante es la **mediana** Me. Se define esta como una medida central tal que, con los datos ordenados de menor a mayor, el 50 % de los datos son inferiores a su valor y el 50 % de los datos tienen valores superiores.
>
> (…)
>
> suponiendo que tenemos los datos ordenados, la mediana será el valor central, si N es impar, o la media aritmética de los dos valores centrales, si N es par.
>
> (…)
>
> Se define la **moda** Mo de una muestra como aquel valor de la variable que tiene una frecuencia máxima. En otras palabras, es el valor que más se repite. Hay que indicar que puede suceder que la moda no sea única, es decir que aparezcan varios máximos en la distribución de frecuencias. En ese caso diremos que tenemos una distribución bimodal, trimodal, etc.
>
> (Gorgas, Cardiel y Zamorano, 2011, p. 21)

Para lograr mayor precisión, también se sugiere utilizar una n minúscula en lugar de la N mayúscula que propone la definición, para distinguir entre el tamaño de una muestra y el tamaño de la población.

Aspectos Epistemológicos

La Estadística, desde su etimología, es la "Ciencia del Estado", puesto que los Estados han buscado, desde la antigüedad, llevar registro cuantitativo de información sobre sus pobladores. Sin embargo, el uso de la Estadística como herramienta se remonta a un pasado más remoto. En efecto, en la isla de Cerdeña, existen restos arqueológicos de edificios llamados "nuraga", donde es posible encontrar grabados que dan cuenta de un registro primitivo del ganado. Los nuraga más antiguos están datados hacia 3.500 a.C., así que se puede afirmar con propiedad que la Estadística es una disciplina con orígenes en la prehistoria (Compostela, 2010).

Se podría establecer como supuesto razonable que la emergencia del registro de datos cuantitativos debería inducir pronto la aparición de estrategias para resumir esos datos. Sin embargo, ninguno de los antecedentes revisados permite afirmar que la media aritmética haya surgido tan temprano en la historia de la Estadística. Ian Hacking propone que uno de los primeros indicios se encuentra en un episodio del *Mahabharata*, en el que se habría utilizado la media para estimar el follaje de los árboles, sin embargo Torretti (2003) no comparte esa apreciación, por considerarla más bien fruto de una interpretación particular, entre muchas otras posibles.

Sí se puede afirmar con certeza, en cambio, la aparición del concepto de media (no sólo aritmética: también armónica y geométrica) en la antigua Grecia. Por ejemplo, Aristóteles se refiere a la media en estos términos:

> Es igual lo que es medio entre el exceso y el defecto; llamo el medio de la cosa, el que igualmente dista de los dos extremos, el cual en todas las cosas es de una misma manera; pero el medio en respecto de nosotros es aquello que ni excede ni falta de lo que conviene, el cual ni es uno, ni el mismo en todas las cosas.
>
> (Aristóteles, *Ética a Nicómaco*, Pedro Simón Abril (trad.), p. 45)

Enseguida, ejemplifica con los valores de 2 y 10, señalando que su "medio" es 6, puesto que 10–6 = 6–2. Aristóteles también distingue entre dicho medio del concepto de "medio respecto de nosotros", el que representa un valor apropiado según el contexto.

Recién en el siglo XVI, sin embargo, el concepto de media se hace extensivo para más de dos datos, lo que resulta útil para los astrónomos, puesto que les permite hallar una mejor aproximación de una magnitud, al promediar distintas observaciones que se han hecho de ella (Bakker & Gravemeijer, 2006).

Pero la media no siempre permite aproximar un valor real, como lo muestra el debate ente Christiaan y Ludwig Huygens (1629-1695, 1631-1699, resp.), narrado por Hacking (2006). Habiendo leído los trabajos de John Graunt sobre las tasas de mortalidad en Londres, Ludwig escribió a su hermano, desafiándolo a calcular "hasta qué edad debe vivir naturalmente un niño, en el momento mismo en que es concebido". Ludwig había calculado la esperanza de vida, es decir, la media de la población con la que Graunt realizó sus estudios, sin darse cuenta de que este valor está lejos de responder a la pregunta que él mismo formula. Christian observa, en cambio, que por la alta tasa de mortandad infantil característica de la época, una mejor estimación de la vida probable de un niño es la *mediana*, inferior en unos 7 años a la media. En otras palabras, la gran asimetría de la distribución de edades de fallecimiento, debida a la elevada mortandad infantil de la época, hace que la mediana aproxime mejor la vida probable de un niño en el momento de su concepción.

También se debe a Hacking (1990) el relato de un nuevo vuelco que se produce en el concepto de media a partir del siglo XIX, principalmente gracias a las contribuciones del astrónomo y matemático Adolphe Quetelet. Quetelet introduce el concepto de media como representante de un conjunto de datos, sobre todo a partir de la idea de *homme type*, u hombre promedio, una abstracción que pretende reunir las características en promedio (edad, estatura, peso, etc.) de los hombres que pertenecen a una nación. El ejercicio de calcular la media ya no tiene por objetivo hallar un valor real –ningún hombre real podría divorciarse 0,17 veces o tener 2,2 hijos–, sino representar a un conjunto de personas mediante un único valor. La media ha dejado en este punto de ser una herramienta para el cálculo de un valor real, para convertirse en un objeto matemático de suyo. Estas ideas generaron gran resistencia en la época de Quetelet.

En lo que se refiere a la mediana, el surgimiento de su estudio es más reciente. Walker (1929) cita a Gauss, Encke y Quetelet como algunos de los primeros matemáticos en mostrar cierto interés por la mediana. También señala que en el trabajo de Gustav Fechner (1801-1887), la mediana adquiere mayor importancia, desde un punto de vista más bien teórico. Fechner observa que, así como la media minimiza la suma de cuadrados de las desviaciones de una distribución con respecto a un punto definido, la mediana minimiza la suma de los módulos de las desviaciones. Así, considera a la mediana y a la media como casos particulares de ciertos puntos notables, *Potenz-mittelwerthen*, que minimizan la suma de diferencias positivas con respecto a un punto definido, elevadas a alguna potencia entera. Al estudiar sus propiedades, este matemático consideró que la ubicación y distancia de la mediana con respecto a la media podía utilizarse como medida del grado de asimetría de la muestra[3].

En consonancia con lo anterior, Bakker (2003) comenta que, si bien la mediana fue utilizada de manera implícita mucho antes de que se le diera el nombre y definición actual, solo se le otorga importancia en el siglo XIX, en conexión con el estudio de las distribuciones asimétricas.

A partir de la revisión de la evolución histórica de estos conceptos se pueden obtener algunas lecciones importantes, a saber:

DISTANCIAMIENTO DEL ENFOQUE FRECUENTISTA

La disociación de la media con respecto a la idea de "valor más probable" no es evidente, como lo muestra el debate entre los Huygens. Esta constatación coincide con lo observado por Mokros & Russell (1995), en el sentido de que hay estudiantes que confunden los conceptos de media y

[3] Retrospectivamente, es posible determinar que esta no era una buena idea, puesto que la "regla" que diversos textos enuncian de que la media siempre está desplazada hacia la cola de la distribución asimétrica falla en varios casos, como lo muestra Von Hippel (2005).

moda. Desde la didáctica, la resolución de dicha dificultad puede provenir del uso y discusión de ejemplos en los cuales la media presente una baja o nula frecuencia.

Aparición del concepto de representatividad

Tampoco resultó sencillo, históricamente, que se produjera la transición hacia la noción de que la media puede *representar* a un conjunto, como propone Quetelet. Batanero (2001) también señala la dificultad que implica para los estudiantes el acceso a la noción de representatividad. Más aún, describe la extrañeza que les causa a algunos el hecho de que la media pueda asumir valores fuera del conjunto numérico de donde provienen los datos que resume. ¿Cómo interpretar que la casa promedio tenga 1½ habitaciones? ¿Se trata de una casa con una habitación grande y otra pequeña?

Este análisis sugiere que, desde el punto de vista didáctico, puede resultar provechoso el proponer a los estudiantes ejercicios en los que deban comparar dos conjuntos de datos, buscando un único valor que los represente para efectos de la comparación. Esta estrategia podría promover la construcción del concepto de representatividad, ayudando a la vez a dar un sentido a los valores fraccionarios de la media aritmética.

Relevancia de las distribuciones asimétricas

Que el estudio de la mediana se volviera necesario al abordar las distribuciones asimétricas no es casual. Estas distribuciones, difícilmente representables mediante una media aritmética con tendencia a desplazarse en el sentido del sesgo, conforman el contexto natural para que aparezcan y se desarrollen los conceptos de mediana y, también, de media truncada.

La didáctica puede inspirarse en esta inflexión histórica para concebir situaciones que den sentido al uso de otras MTCs, permitiendo que los estudiantes desarrollen flexibilidad en el uso de las herramientas de la Estadística.

Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica se enmarca en el OA 17 del programa vigente para 7º básico, es decir,

> Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango:
>
> > Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población.
>
> > Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado.
>
> > Utilizándolos para comparar dos poblaciones.
>
> > Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros.
>
> (Ministerio de Educación de Chile, 2016, p. 165).

En total, la secuencia comprende 3 clases, que están diseñadas para que se las ejecute de manera consecutiva, en 3 bloques de 2 horas pedagógicas cada uno. Cada clase tiene por objetivo uno de los indicadores de evaluación que corresponden al OA 17, de modo que, mediante la secuencia, se cubren 3 de los 6 indicadores del OA, a saber,

> > Descubren que distribuciones muy dispersas y distribuciones homogéneas pueden tener la misma mediana [...]
>
> > Muestran que la mediana no se altera si hay variaciones grandes en los valores extremos.
>
> > Analizan situaciones y determinan cuál es la medida de tendencia central para efectuar las comparaciones e inferencias sobre la o las poblaciones.
>
> (Ministerio de Educación de Chile, 2016, p. 165).

La clase 1 aborda este último indicador, mientras que las clases 2 y 3 abordan, respectivamente, el primero y el segundo indicadores citados. La selección del orden de los objetivos obedece al propósito de despertar primero el interés de los estudiantes por la mediana y darle sentido al concepto, a través de la explicitación de su utilidad en situaciones como la que se resuelve en la clase 1, para luego abordar en mayor detalle sus propiedades, en las clases 2 y 3.

En la sección siguiente, se explicarán las características del marco teórico seleccionado para fundamentar el diseño de las clases. A continuación, se detallará el plan de cada clase y su análisis a priori. La clase 1 cuenta con un apartado adicional que describe el análisis a posteriori de su aplicación. Esto se debe a que ella fue aplicada, como parte de un trabajo de Estudio de Clases durante el tercer semestre del MDM.

Marco Teórico

Se ha seleccionado la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD; Brousseau, 2007) como marco teórico para el diseño y el análisis de la secuencia didáctica, considerando la necesidad que ocupa un lugar central en la problemática, esto es, que los estudiantes puedan dotar de un sentido a las MTCs. Este monográfico propone que el sentido puede ser generado por el propio estudiante, al verse confrontado a diversos problemas cuya resolución exige que produzca las propiedades principales de la media y de la mediana. Tal hipótesis es afín a la concepción de aprendizaje que supone la TSD, es decir, a la idea de que el estudiante aprende trasladándose de una situación de conocimiento a otra como resultado de la adaptación a un medio, en el que su situación de conocimiento previo era insuficiente.

Como lo declara el mismo Brousseau (1986):

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.10).

Por cierto, Brousseau (2007) indica que el interés con el que se desarrolla la TSD no es generar un marco para el diseño de situaciones de aprendizaje, sino más bien modelizar los procesos y relaciones que se establecen entre el estudiante, el saber y el docente a lo largo de una clase, por lo que algunos podrían considerar que es un marco inapropiado, habida cuenta de la naturaleza de este trabajo. Sin embargo, aunque no estuviera dentro de los planes de los principales referentes en la TSD, la teoría se ha posicionado, efectivamente, como un fundamento para el diseño. Así, por ejemplo, Douady (1994) la describe, junto a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y la Dialéctica herramienta-objeto, como un instrumento que permite ayudar a los estudiantes en sus esfuerzos para conceptualizar la realidad. Y no en vano existe la llamada Ingeniería Didáctica, metodología que toma a la TSD como referente teórico y permite, por una parte, el desarrollo de nuevas secuencias de enseñanza, al mismo tiempo que la investigación en didáctica de la matemática, constituyéndose en un verdadero motor del progreso de la didáctica (Artigue, 1988).

La TSD modela el proceso de aprendizaje de los estudiantes a través de las llamadas *situaciones adidácticas* de *acción*, *formulación*, y *validación*.

En la situación de acción, el estudiante intenta resolver el problema que se le ha propuesto a partir de teoremas en acto, es decir, de hipótesis completas o parciales sobre una estrategia apropiada de resolución que se ven confirmadas o no por el medio, al momento de ser puestas en ejecución.

En la situación de formulación, el estudiante debe verbalizar el modelo implícito de acción que ha venido a construir. Finalmente, en la situación de validación, el estudiante debe argumentar lógicamente, y no solo basándose en los resultados empíricos, que su aplicación del modelo explícito de acción es adecuada.

Las distintas situaciones se pueden alternar de diversas maneras en el desarrollo de una clase, no habiendo una ruta privilegiada, e incluso distintos estudiantes pueden estar en una situación distinta en un mismo momento. Además, las formas de organización de la clase que pueden permitir que se produzcan las situaciones requeridas son variadas. Los planes de las tres clases que se presentan en las secciones siguientes indican en qué situación se espera que estén todos o la mayoría de los estudiantes en cada momento de la clase.

Por otra parte, puesto que, desde la TSD, es el estudiante quien adquiere los conocimientos y no el docente quien se los transfiere, el docente no puede decir al estudiante lo que debe hacer frente al problema propuesto. Más bien, debe acudir al proceso de *devolución*, es decir, al planteamiento de preguntas que permitan al estudiante darse cuenta, por sí mismo, de lo que le hace falta para avanzar hacia la solución. En las planificaciones de este monográfico se plantea un *a priori* de las posibles acciones que pueden emprender los estudiantes en cada etapa de la clase, y a continuación se proponen preguntas de devolución que el docente podría formular para restituirles la responsabilidad de construir los conocimientos requeridos.

Dentro del rol del docente, también está incluido el proceso de *institucionalización*, en el cual debe resumir los saberes alcanzados por los estudiantes, y enmarcarlos dentro de un saber institucional. La institucionalización está propuesta aquí con una perspectiva que aún se centra en los estudiantes. Las planificaciones incluyen preguntas que el docente podría realizar para ayudar a los estudiantes a alcanzar una formulación más general de las conclusiones a las que han llegado al resolver el problema puntual que enfrentaron. El docente tendrá siempre la responsabilidad de complementar las respuestas de los estudiantes, si fuera necesario, para alcanzar la enunciación completa de la respuesta esperada a las preguntas de institucionalización. Asimismo, deberá introducir los conceptos clave en el vocabulario apropiado.

CLASE 1

ENUNCIADO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA PROPUESTA

Como debes haber observado en algunos lugares se venden mallas de frutas o verduras, como lo muestra la imagen.

La situación de Diego

Diego estudia en 8° básico y vivió la siguiente situación:

Su papá es feriante y compra mallas de naranjas a un agricultor local, para luego venderlas en un cruce de calles. En la etiqueta, las mallas dicen que son de 3 kg. Hace unos días, un cliente vino a reclamar porque había pesado una malla en la balanza de su casa, y pesaba solo 2,7 kg. "¡Es un robo!", aseguró enojado el cliente. El papá de Diego trató de defenderse como pudo, pero no fue capaz de asegurarle que las mallas pesaran 3 kg. Poco después, fue a ver al agricultor que le vendía las mallas. El agricultor se mostró muy extrañado. Decidieron pesar 10 mallas distintas, para ver si había variaciones. Los resultados fueron los siguientes:

2,8 2,9 3,1 3,3 2,7 3,4 3,4 6,0 2,7 2,7

El feriante y el agricultor revisaron los datos, pero no estuvieron seguros de que hubiera que modificar la etiqueta de 3 kg. Sabiendo que Diego está estudiando Estadísticas, su papá le planteó el problema a él. Pensando en buscar un valor representativo, Diego calculó las medidas de tendencia central:

Media = 3,3 kg ; Moda = 2,7 kg ; Mediana = 3,0 kg

¿Puedes ayudar a Diego a elegir la más apropiada?

ANÁLISIS A PRIORI

Objetivo de la clase

Analizar situaciones y determinar cuál es la medida de tendencia central para efectuar las comparaciones e inferencias sobre la o las poblaciones (4º indicador de evaluación del OA 17).

Respuesta experta

La medida de tendencia central que mejor representa los pesos (masas) de las mallas de naranjas es, en este contexto, la mediana, ya que no se ve perturbada por la asimetría de las distribuciones, a diferencia de la media. La moda no es apropiada en este contexto porque considera solo los datos más frecuentes y depende de la precisión de la medición.

Matemática en juego

Más allá de las medidas de tendencia central a las que hace referencia directa el problema propuesto, *media*, *moda* y *mediana*, otros conceptos de la Estadística Descriptiva están también involucrados.

Uno de ellos es la *simetría* de una distribución, entendida como el grado en que los datos que equidistan de un punto que se considera centro de la distribución presentan frecuencias similares. Al ser graficada, una distribución simétrica tendrá un gráfico simétrico con respecto a un eje vertical que intersecta al eje de las abscisas en el valor que se considera centro de la distribución. Por otra parte, se llama asimétrica a una distribución que no es simétrica. Existen diversas medidas del grado de asimetría de una distribución (Groneveld & Meeden, 1984; Brys, Hubert & Struyf, 2004), pero su uso escapa al alcance del problema.

La asimetría de las distribuciones es relevante aquí porque tiene un efecto en la *representatividad* de las MTC, otro concepto implicado en la resolución del problema. En efecto, la asimetría tiene como consecuencia en este caso que la media se distancie de la mayoría de los datos (aunque esto no puede considerarse una regla general, como lo muestra Von Hippel (2005)). Este resultado es consecuencia de la incorporación de la totalidad de los datos en su fórmula de cálculo.

Por otra parte, la mediana se ve menos afectada por la asimetría, de modo que permanece próxima a la mayoría de los datos, pudiendo afirmarse que los representa mejor, o que cuenta con mayor grado de representatividad que la media. La estabilidad de la mediana es consecuencia de que en su cálculo solo está involucrado el dato central (o los dos datos centrales, si hay un número par de datos), sin importar la distancia con respecto a éste a la que se sitúen los demás datos.

Conocimientos previos

Los estudiantes requieren conocer el concepto de medida de tendencia central, incluyendo al menos las tres MTCs que están involucradas en el problema, es decir, la media, la moda y la mediana. Deben conocer el modo de calcularlas a partir de un conjunto de datos. También deben ser capaces de identificar el conjunto de datos como un objeto matemático en sí mismo y contar con la intuición de que este es susceptible de ser representado por un valor que describe la tendencia de sus elementos.

Posibles estrategias

Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben reconocer propiedades relacionadas con la estabilidad de la media y la mediana en presencia de asimetría o datos atípicos en la distribución. También deben reconocer la falta de efecto que tiene sobre la moda el desplazamiento de los datos no modales, y/o la distorsión que produce sobre ella la precisión de la medición.

Para reconocer el comportamiento de las MTCs en presencia de asimetría o datos atípicos, los estudiantes pueden:

i) Representar el conjunto de datos en un registro pictórico, tabular (tabla de frecuencias) o gráfico, para visualizar mejor la distribución de valores, concluyendo que presenta gran asimetría.

ii) Hacer variar algunos datos de la muestra, para ver cómo las variaciones inciden en los valores de las MTC. P. ej., los estudiantes pueden eliminar el dato de 6,0 kg, por tratarse de un dato inusual, para ver qué efecto tiene esa eliminación en el valor de cada una de las MTC.

Con base en su concepto (incipiente) de representatividad, los estudiantes pueden cerrar su línea de razonamiento observando que si los datos atípicos alejan a la media de la mayoría de los datos, mientras que eso no ocurre con la mediana, entonces efectivamente la mediana representa mejor a esa mayoría.

Dificultades y errores

En la tabla 1 se presentan los errores que se estima que pueden cometer los estudiantes al enfrentar el problema, así como las dificultades que podrían estar en la base de cada error. Asimismo, se presentan posibles preguntas de devolución que permitirían al (a la) estudiante reapropiarse del problema y continuar en búsqueda de la solución.

Tabla 1

Errores, dificultades y posibles devoluciones para la primera clase

Error	Dificultad	Posibles preguntas de devolución
Seleccionar la moda	Determinan que la moda es representativa, puesto que corresponde al resultado más probable de obtener, según la información que se tiene de la muestra. Corresponde al enfoque frecuentista de la representatividad (Mokros & Russell, 1995).	¿Qué ocurriría si modificamos los datos que no son moda? ¿Qué pasaría si hubiera 5 mallas cuyos pesos respectivos fueran 1.000, 1.001 … 1.005? ¿Cambiaría la moda en ese caso? ¿Qué pasaría si la balanza tuviera 2 cifras decimales de precisión y las tres mallas que ahora pesan 2,7 kg pesaran 2,69, 2,70 y 2,71 kg, respectivamente? ¿Qué ocurriría con la moda? ¿Qué tan representativo puede ser el dato de moda, en este contexto?
Seleccionar la media	Tiende a seleccionar la MTC que le resulta más familiar. Presenta dificultad para incorporar otras MTCs al concepto de promedio (Martínez y Huerta, 2016)	¿Puedes plantear otros argumentos para elegir la media, aparte de que es conocida? ¿Que sea conocida garantiza que represente bien al conjunto?
	Piensa que se debe incluir todos los datos en el cálculo para alcanzar representatividad	Si te pido que me indiques qué estudiante en este curso tiene una estatura “promedio”, ¿a quién eligirías? ¿Fue necesario que hicieras un cálculo con todas las estaturas para elegir a este estudiante?
	No reconoce el efecto que tiene la presencia de datos atípicos sobre las MTCs	¿Dónde se sitúa la mayoría de los datos? ¿Qué MTC está más cerca de esa mayoría? ¿Por qué la media está más lejos de esa mayoría?

ANÁLISIS A POSTERIORI

Como se señaló anteriormente, la aplicación de la clase 1, en el marco del Estudio de Clases del tercer semestre del MDM, permitió realizar con respecto a ella un análisis a posteriori, cuyos resultados principales se presentan en este apartado.

El análisis de la clase fue posible gracias al registro en video de la clase. También fueron utilizadas las fotografías que se tomaron de las cartulinas donde los estudiantes escribieron las síntesis de sus reflexiones grupales. El modo de registro no permitió, por otra parte, hacer seguimiento de las contribuciones individuales de los estudiantes. Esta omisión se debe a que, inicialmente, la clase no se consideró como objeto de investigación más que para efectos del Estudio de Clases.

Resultados principales

Etapa de reflexión individual

Los estudiantes leen el problema y apuntan su primera aproximación a la respuesta. En los videos registrados se observan algunas situaciones que llaman la atención:

1. Varios estudiantes no escriben nada. Al preguntársele a uno de ellos por qué no ha respondido, indica que no está seguro de la respuesta que tiene en mente.
2. Un grupo de estudiantes (G3) completa la respuesta antes de tiempo y luego deja de escribir.

Etapa de reflexión grupal

En los distintos grupos se produce discusión con respecto a la selección de la MTC más adecuada. El docente se desplaza por la sala, solicitando a algún representante de cada grupo que le indique si han logrado consensuar una MTC. En el video se distinguen los siguientes 4 grupos:

G1. No alcanza consenso al estar compuesto por 4 estudiantes, y habiendo 2 que están a favor de la moda y 2 a favor de la mediana.

G2 El grupo inicialmente prefiere la moda, pero que, al intervenir el docente con preguntas de devolución, comprende que la moda no logra representar a los datos no modales.

G3 Grupo que inicialmente prefiere la media, pero que, al intervenir el docente con preguntas de devolución, comprende que la media se ve afectada por el dato atípico y decide calcular la media prescindiendo del dato atípico (ver figura 2).

G4 Grupo que solicita, en reiteradas ocasiones, al docente que explicite si existe una respuesta cerrada para el problema.

La etapa de reflexión grupal tomó más tiempo que el planificado, puesto que los estudiantes se demoraron en alcanzar consenso, y el proceso del traspaso de los argumentos a los papelógrafos fue más lento que lo presupuestado. Esto tuvo incidencia en las etapas posteriores de la clase.

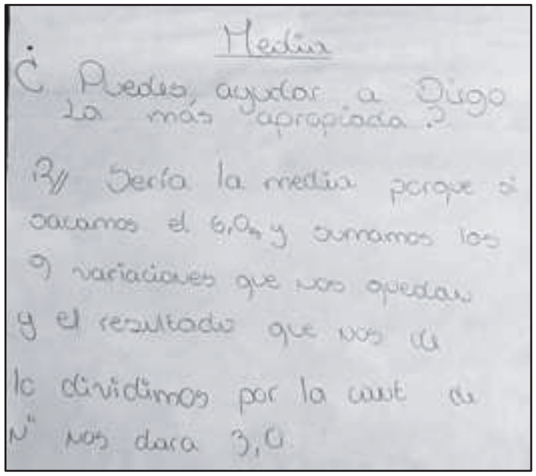

Figura 2. Respuesta de G3. Deciden eliminar el dato 6,0 kg y calcular la media de los 9 restantes.

Plenario

Al exponer sus resultados, los estudiantes argumentan y defienden la selección de una u otra MTC, apoyándose en lo que han escrito en sus papelógrafos. Una síntesis de los argumentos expuestos a favor de cada MTC se expone a continuación:

1. Mediana (G1 y G2)
    a. Representa la distribución más justa, para el comprador y el vendedor.
    b. El valor no tiene decimales.
2. Moda (G4 y G5)
    a. Es el valor que mejor conviene al cliente, puesto que es probable que el contenido sea mayor que 2,7 kg (ver figura 3).
    b. Es el valor que tiene mayor probabilidad de ocurrencia, por lo que más clientes quedarán satisfechos.

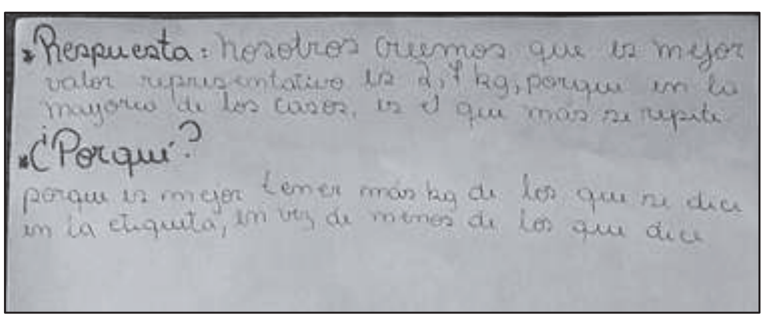

Figura 3. Respuesta de G4. Seleccionan la moda porque su valor es inferior a los demás datos de la muestra, haciéndolo más conveniente para el cliente.

3. Media, excluyendo el dato atípico (G3)
    a. Se debe excluir el dato 6,0, porque está apartado del resto de los datos.

Por falta de tiempo, la discusión posterior a las presentaciones de los grupos fue breve y no surgieron en ella argumentos adicionales.

Institucionalización

Por falta de tiempo, el docente se limita a enumerar algunos de los argumentos relevantes –aunque no necesariamente desde el punto de vista matemático– que los estudiantes han formulado.

Discusión

Las situaciones 1) y 2) observadas en el transcurso de la reflexión individual se pueden interpretar como indicativas de que el medio de la situación de acción se encontraría incompleto, por cuanto no logra, por sí solo y sin las intervenciones del docente, retroalimentar la calidad de los teoremas en acto que los estudiantes construyen. Así, por ejemplo, el estudiante que no está seguro de contar con la respuesta adecuada, no tiene frente a sí un medio en el que pudiera poner a prueba su hipótesis. Del mismo modo, quienes sí han anotado una respuesta, tampoco pueden ponerla a prueba y modificarla, en caso de obtener resultados insatisfactorios.

De las observaciones de la etapa de trabajo grupal se puede inferir que: i) las preguntas de devolución previamente planificadas sí tuvieron el efecto esperado, en el sentido de mostrar a los estudiantes la inconveniencia de la media y la moda como representantes del conjunto de datos, ii) algunos estudiantes –particularmente los del grupo G4–, posiblemente no habituados al enfoque de la TSD en una clase, se muestran ansiosos y esperan del docente que entregue la respuesta o, cuando menos, confirme su existencia y iii) la etapa de trabajo grupal carece, al igual que la de reflexión individual, de un medio que retroalimente los modelos ahora explícitos de acción de los estudiantes, y es el docente quien cumple ese rol mediante la devolución, limitando el progreso de los grupos.

En el plenario, se comprueba que ninguno de los grupos alcanzó la respuesta esperada (mediana) con la justificación esperada (representa a todos los datos, pero no es sensible al valor del dato atípico). El grupo que mejor se acercó a la respuesta esperada fue el que calculó la media, excluyendo el dato atípico, pero su argumento no incluyó los efectos de ese dato, ni la razón para elegir la media. Este hecho es semejante a lo observado por Martínez y Huerta (2016), en cuanto a que los estudiantes no presentan inclinación a elegir la mediana en presencia de datos atípicos. En estas condiciones, la situación de validación que se vive en el plenario se ve incompleta, en el sentido de que el grupo curso no alcanza a convencerse, desde de la argumentación, sobre la validez de un resultado en particular.

Por otra parte, también se observa que los estudiantes privilegiaron argumentos no matemáticos, como la justicia o la conveniencia desde el punto de vista del vendedor o el cliente, o bien la simplicidad de la respuesta que no contenía decimales. Se puede notar la coincidencia entre esta observación y las de Reading y Pegg (1996), en el sentido de que los estudiantes no aluden en sus respuestas a las características del conjunto de datos.

PLAN DE CLASE

Asignatura: Matemáticas	Nivel: 7º básico	Semestre: 2
Unidad didáctica: Unidad 4		Horas: 2

<table>
<tr><td>Objetivo de Aprendizaje
OA 17</td><td colspan="2">Habilidades
OA f y l</td><td>Actitudes
OA D y E</td></tr>
<tr><td>Conocimiento previo
Conocimiento intuitivo de tendencia de eventos</td><td colspan="3">Objetivo de la clase
Analizar situaciones y determinar cuál es la medida de tendencia central para efectuar las comparaciones e inferencias sobre la o las poblaciones (4º indicador de evaluación del OA 17)</td></tr>
<tr><td>Contenido
Medidas de tendencia central (media, moda y mediana)</td><td colspan="3">Indicadores de logro
- Comprenden la información presente en el problema
- Determinan que la mediana es más apropiada para representar el peso (masa) del conjunto de mallas.
- Concluyen que la mediana es más apropiada para representar datos con distribución asimétrica, mientras que la media lo sería si la distribución es simétrica</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inicio (15 minutos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acciones del (de la) docente</td><td>Acciones de los estudiantes</td><td>Material complementario</td></tr>
<tr><td colspan="2">(10 minutos)
El (la) docente aclara que, durante las tres clases de la sesión, se utilizará una metodología consistente en que los estudiantes deben hacer todo lo que puedan por llegar a una respuesta por sí mismos, idealmente sin su ayuda. En cualquier caso, el docente no les dirá la respuesta, sino que los orientará mediante nuevas preguntas, si fuera necesario.</td><td>Escuchan las instrucciones del (de la) docente.</td><td rowspan="3">Guía de trabajo con el enunciado del problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El (la) docente entrega a los estudiantes la guía de trabajo y les solicita a voluntarios que den lectura en voz alta al problema propuesto.</td><td>2 a 3 voluntarios dan lectura al problema (enunciado en la guía anexa).</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5 minutos)
Tras la lectura, el/la docente realiza, de manera dirigida y aleatoria, a los estudiantes las siguientes preguntas de verificación de la comprensión:
*¿Por qué el cliente del papá de Diego está disconforme?
*¿Qué hizo el papá de Diego para asegurarse del peso de las mallas?
*¿Qué se nos pide que hagamos, en</td><td>Responden a las preguntas de verificación de la comprensión.
Respuestas Esperadas
*Porque recibió una malla que pesa menos que lo que indicaba la etiqueta.
*Pesó distintas mallas, para ver si efectivamente contenían 3 kilogramos.
*Se nos pide que determinemos y</td></tr>
</table>

relación con este problema?	justifiquemos la MTC más adecuada para representar el peso de las distintas mallas.	
Desarrollo (60 minutos)		
Acciones del (de la) docente	Acciones de los estudiantes	Material complementario
(10 minutos) *Etapa de trabajo individual* El (la) docente les da 10 minutos para reflexionar en silencio e individualmente en torno al problema y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el primer espacio disponible en la guía.	Reflexionan y responden individualmente. *Acciones o Respuestas Esperadas* *En este punto, todavía puede haber estudiantes que no han comprendido el problema y se encuentran bloqueados. *Posibles preguntas de devolución* ¿Cómo son las mallas que pesó el papá de Diego? ¿Qué valor escribirías en la etiqueta, si no puedes hacer una etiqueta distinta para cada malla? ¿Qué utilidad pueden tener las MTCs en este contexto? ¿Cuál de estas tres MTCs será más apropiada? ¿Por qué? *Algunos pueden utilizar el registro gráfico o pictórico para representar el problema *Algunos pueden notar (ya sea en la representación gráfica o numérica del problema) que el valor 6,0 kg está particularmente apartado del resto. *Algunos pueden recalcular los valores de las MTCs omitiendo el valor 6,0 kg, concluyendo que éste tiene un efecto importante en la media.	Guía de trabajo con el enunciado del problema.
Los estudiantes se encuentran en situación de acción e interactúan con el medio adidáctico (enunciado, hoja y papel, y sus propios conocimientos previos sobre las MTCs), buscando alternativas para resolver el problema. Se espera que el docente entregue ese espacio para actuar, no intervenga a menos que resulte estrictamente necesario, y lo haga solo a través de preguntas de devolución.		

(25 minutos) *Etapa de trabajo grupal* El (la) docente les da 2 minutos para reunirse en grupos de 3 a 4 personas. Luego, les da 15 minutos para discutir en torno al problema, llegar a un consenso, y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el segundo espacio de la guía. Asimismo, uno de ellos debe trasladar su respuesta al papelógrafo que él (ella) les entregará.	Se distribuyen en grupos de 3 a 4 personas y discuten sobre el problema. Buscan llegar a un acuerdo y escriben su respuesta, con su justificación, en el papelógrafo. *Acciones o respuestas esperadas* *Algunos grupos pueden determinar que el mejor representante es la media, porque es la MTC más usada. *Posibles preguntas de devolución* ¿Dónde se ubica la media, en relación con la mayoría de los datos? (Se espera que detecten una desviación con respecto a la mayoría) ¿Por qué creen que se produce esta desviación? *Algunos grupos pueden determinar que se trata de la moda, por tener un enfoque frecuentista de la representatividad ("lo representativo es lo que más se repite"). ¿Qué ocurriría si modificamos los datos que no son moda? ¿Qué pasaría si hubiera 5 mallas cuyos pesos respectivos fueran 1.000, 1.001 … 1.005? ¿Cambiaría la moda en ese caso? ¿Qué pasaría si la balanza tuviera 2 cifras decimales de precisión y las tres mallas que ahora pesan 2,7 kg pesaran 2,69, 2,70 y 2,71 kg, respectivamente? ¿Qué ocurriría con la moda? ¿Qué tan representativo puede ser el dato de moda, en este contexto? *Algunos grupos pueden determinar que es la mediana, por encontrarse más cerca de la mayoría de los datos, pero sin comprender la causa. ¿Qué puede hacer que la media sea más alta que la mediana?	Papelógrafos o cartulinas (1 por grupo) y plumones

<table>
<tr><td></td><td>¿Qué ocurriría con los valores de las dos MTCs sin ese valor atípico? (Algunos pueden recalcular y verificar que las dos MTCs se aproximan entre sí)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">La mayoría de estudiantes se encuentra en situación de formulación y busca explicar la solución a la que llegó en la etapa individual. De vez en cuando, algunos entran nuevamente en situación de acción, y vuelven a testear con el medio adidáctico ya sea sus propias hipótesis o las que han desarrollado en la conversación grupal. Se espera que el docente realice un trabajo de orientación solo si existieran grupos en los que todos los estudiantes presentan dificultades para dar con una solución aceptable.</td><td></td></tr>
<tr><td>(25 minutos)
Plenario
El (la) docente pide a un representante de cada grupo que presente en 1 minuto las conclusiones a las que llegaron. En el transcurso de las presentaciones, el (la) docente organiza los argumentos a favor (+) y en contra (-) de cada MTC en la pizarra, de esta manera:
<table>
<tr><td colspan="2">Media</td><td colspan="2">Moda</td><td colspan="2">Mediana</td></tr>
<tr><td>(+)</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(-)</td></tr>
<tr><td>X
X</td><td>X
X</td><td>X
X</td><td>X
X</td><td>X
X</td><td>X
X</td></tr>
</table>
A continuación, pide a los estudiantes que, respetuosamente, refuercen o rebatan los argumentos presentados.</td><td>Un representante por grupo presenta al resto sus conclusiones.
Después de las presentaciones, los estudiantes complementan o rebaten los argumentos de sus compañeros. Tras la discusión, se espera que la mayoría o todos se convenza de que la mediana es mejor representante en este caso.
Respuesta Esperada
*La mediana representa mejor los datos por la asimetría de las distribuciones y presencia de un dato atípico (6,0 kg) , ya que ésta afecta a la media, alejándola de la mayoría de datos, mientras que la mediana se mantiene relativamente estable. La moda no es adecuada porque considera solo los datos más frecuentes y depende de la precisión de la medición.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes se encuentran en situación de validación y buscan convencer mediante argumentos racionales a sus compañeros de la validez de la solución a la que llegaron en la etapa grupal. Del docente se espera que intervenga para moderar la discusión, permitiendo que todos tengan la posibilidad de participar y expresar sus argumentos. También se espera, llegado el caso, que si la discusión llega a un “punto muerto”, la reactive planteando (nuevas) preguntas de devolución a los estudiantes.</td><td></td></tr>
</table>

Cierre (15 minutos)		
Acciones del (de la) docente	Acciones de los estudiantes	Material complementario
El (la) docente advierte que ahora buscarán llegar a ciertas conclusiones más generales. Les plantea las siguientes preguntas, y, luego de permitirles reflexionar por un momento, recoge respuestas de voluntarios: ¿Qué condiciones de este problema, que podrían estar presentes en otros problemas, hicieron más apropiado elegir la mediana como representante? ¿Qué habría ocurrido en ausencia de esas condiciones? Enseguida, confirma los hallazgos de los estudiantes, complementando sus respuestas si fuera necesario.	Reflexionan en torno a las preguntas que plantea el (la) docente. Voluntarios levantan la mano y las responden. *Respuestas esperadas* *La asimetría de las distribuciones y la presencia de datos atípicos hacen que la mediana, que se mantiene estable, sea mejor representante que la media. *En un problema en que las distribuciones fueran simétricas, o no existieran datos atípicos, las dos MTCs tenderían a parecerse, y la media podría ser un mejor representante del conjunto de datos.	-
Una vez que los estudiantes han llegado a las conclusiones más generales posibles, el docente realiza la institucionalización: *Llamamos “datos atípicos” a aquellos que se ubican distantes de la mayoría de datos de la muestra. *Una muestra es simétrica cuando su gráfico es simétrico o aproximadamente simétrico con respecto a un eje vertical. Una muestra es asimétrica cuando no es simétrica. *En presencia de datos atípicos y/o de una muestra asimétrica, la media aritmética suele distanciarse de la ubicación de la mayoría de los datos. Por eso, en esos casos, conviene utilizar más bien a la mediana para representar al conjunto de datos, ya que esta MTC es menos sensible a la asimetría y a la presencia de datos atípicos. El uso de la moda lo reservamos para las variables cualitativas nominales, o bien para los casos de distribuciones bi o multimodales (con 2 o más modas).		

CLASE 2

ENUNCIADO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA PROPUESTA

Nicole y Pedro son profesores de educación física del colegio Guy Brousseau. Ellos miden la cantidad de abdominales que logran realizar los alumnos del 8º A y 8º B en 30 segundos. Al principio, notan que los resultados son bastante distintos entre esos dos cursos, pero luego calculan la mediana y observan que es la misma. 12, en ambos casos.

8ºA			
9	9	10	10
10	10	11	11
11	12	12	13
13	14	14	15
15	16	17	19

8ºB			
5	6	8	8
9	9	10	10
11	12	12	14
15	16	17	18
18	20	22	26

–¡Qué extraño! –le dice Pedro a Nicole– Por más que reviso el cálculo de la mediana, me da lo mismo, pero es evidente que los dos grupos tuvieron resultados muy distintos.

Comprueba tú mismo el valor de la mediana que calculó Pedro ¿Puedes explicar a los profesores cómo es posible que la mediana sea igual, aunque los grupos tengan resultados tan distintos?

ANÁLISIS A PRIORI

Objetivo

Descubrir que distribuciones muy dispersas y distribuciones homogéneas pueden tener la misma mediana (1er indicador de evaluación del OA 17).

Respuesta experta

La mediana efectivamente es la misma para los dos grupos. Esto se debe a que la mediana no se ve afectada por cuán juntos o separados están los datos (el nivel de dispersión de la muestra).

Matemática en juego

Implícitamente, este problema involucra al concepto estadístico de *dispersión* de una distribución, entendida como el grado de distanciamiento que presentan los datos que la conforman, ya sea entre sí o con respecto a un punto que se considera centro de la distribución. Existen diversas medidas de dispersión, siendo la varianza, la desviación estándar y el rango algunos ejemplos de uso frecuente. La varianza se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$Var = \frac{\sqrt[2]{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}{n}$$

donde n es el cardinal del conjunto de datos, x_i con i de 1 a n son los datos, y $\bar{x}$ es su media aritmética. Como se observa, la sumatoria es en esencia una medida de las distancias entre los datos y la media (elevarlas al cuadrado permite que se sumen valores positivos), de modo que efectivamente la varianza aumenta cuando los datos están más dispersos.

Puesto que, como se señaló previamente, en el cálculo de la mediana solo está involucrado el dato central (o los dos datos centrales, si hay un número par de datos), la distancia con respecto a éste a la que se sitúen los demás datos no tiene efecto en su valor, de lo que se desprende que la mediana no presenta relación con el grado de dispersión de los datos.

Por cierto, esta propiedad no es una particularidad de la mediana. Si a los datos de una distribución se les aplica una homotecia con centro en la media (entendiendo a los datos como puntos en la recta numérica), la media de la distribución resultante es la media de la distribución original. En efecto, si definimos la nueva distribución como

$$y_i = \bar{x} + \alpha(x_i - \bar{x}), i = 1, \ldots, n$$

entonces su media es

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i \bar{x} + \alpha(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_i \bar{x} + \alpha\frac{1}{n}\sum_i x_i - \alpha\frac{1}{n}\sum_i \bar{x} = \bar{x} + \alpha\bar{x} - \alpha\bar{x} = \bar{x}$$

Se puede verificar fácilmente que la varianza de la nueva distribución es α veces la varianza de la anterior. Es decir, se puede aumentar ($\alpha > 1$) o disminuir ($\alpha < 1$) la dispersión sin afectar el valor de la media.

Conocimientos previos

Aunque el problema exige establecer la independencia de la mediana con respecto al grado de dispersión de la muestra, no es necesario plantear ningún argumento que haga referencia a las medidas de dispersión.

Por consiguiente, solo se requiere como conocimiento previo el procedimiento de cálculo de la mediana y una idea intuitiva del concepto de dispersión de un conjunto de datos.

Posibles estrategias

Los estudiantes pueden inicialmente desconfiar del hecho de que las medianas sean iguales para ambos grupos, y realizar la verificación recalculando sus valores. Este ejercicio no toma mayor tiempo. Basta identificar los dos valores centrales de ambas listas, que en ambos casos son 12 y 12[4], lo que permite verificar la igualdad de las medianas.

A continuación, se espera que los estudiantes propongan una explicación a la igualdad de las medianas. Para ello, pueden construir un ejemplo con menor número de datos que demuestre la estabilidad de la mediana. Por ejemplo, se puede ejemplificar con un conjunto de solo 3 datos, mostrando que la mediana es simplemente el segundo dato, al ordenarlos de menor a mayor, y argumentando que, mientras este dato se mantenga fijo, los de los extremos pueden distanciarse poco o mucho de él sin afectar el valor de la mediana.

Otra vía de argumentación posible es acudir a los datos del mismo problema y operar sobre los de un curso una transformación "uno a uno" en el archivo Excel que permita llegar a la distribución del otro curso sin haber alterado la mediana. Por ejemplo, si se parte de la distribución del 8°A, se pueden ir desplazando uno por uno los datos para construir la distribución del 8°B, comprobándose que pese a haber un cambio en la distribución, no hay alteración el en el orden ni en la posición de los datos centrales, y que por ende la mediana no se altera.

Dificultades y errores

En la tabla 2 se presentan los errores que se estima que pueden cometer los estudiantes al enfrentar el problema, así como las dificultades que podrían estar en la base de cada error. Asimismo, se presentan posibles preguntas de devolución que permitirían al (a la) estudiante reapropiarse del problema y continuar en búsqueda de la solución.

---

[4] Por cierto, el docente puede manipular esta variable didáctica para hacer más desafiante el ejercicio, y asignar otros valores centrales, siempre que su promedio (la mediana de la distribución) sea el mismo.

Tabla 2

Errores, dificultades y posibles devoluciones para la segunda clase

Error	Dificultad	Posibles preguntas de devolución
Determina que las medianas son distintas	Desconoce el procedimiento de cálculo de la mediana para número par de datos o	En este caso, el (la) docente debe hacer disponible la información, ya sea entregándola directamente o remitiendo a la explicación de otro(a) estudiante
	Selecciona de manera incorrecta los dos datos centrales de la distribución	¿Cuáles son los datos centrales? ¿Cómo los encontraste? ¿A qué distancia se ubica cada uno de los extremos?
Argumenta redundando en la definición o en el procedimiento de cálculo de la mediana	No reconoce que la dispersión de los datos no tiene efecto en el valor de la mediana	¿Cuáles son los datos que efectivamente utilizas en el cálculo de la mediana? ¿Qué efecto tiene la distancia de los demás datos, con respecto a los que identificaste? El (la) docente elige un dato ¿Qué pasa si este dato se separa de los centrales? ¿Qué pasa si varios datos se separan de los centrales?

PLAN DE CLASE

Asignatura: Matemáticas	Nivel: 7º básico	Semestre: 2
Unidad didáctica: Unidad 4		Horas: 2

<table>
<tr><td>Objetivo de Aprendizaje
OA 17</td><td>Habilidades
OA f y l</td><td colspan="2">Actitudes
OA D y E</td></tr>
<tr><td>Conocimiento previo
Conocimiento intuitivo de tendencia de eventos</td><td colspan="3">Objetivo de la clase
Descubrir que distribuciones muy dispersas y distribuciones homogéneas pueden tener la misma mediana (1er indicador de evaluación del OA 17)</td></tr>
<tr><td>Contenido
Medidas de tendencia central (media y mediana)</td><td colspan="3">Indicadores de logro
- Comprenden la información presente en el problema
- Determinan que el valor de la mediana no guarda relación con el grado de dispersión de la muestra
- Concluyen que los valores de la tabla están correctos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inicio (15 minutos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Acciones del (de la) docente</td><td>Acciones de los estudiantes</td><td>Material complementario</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5 minutos)
El (la) docente pide a voluntarios que respondan a preguntas sobre los aprendizajes de la primera sesión:
¿Por qué la mediana era más apropiada para representar la cantidad de naranjas?
Enseguida, aclara que en esta sesión y la siguiente, estudiarán algunas propiedades de la mediana que les permitirán comprender mejor esta medida de tendencia central.</td><td>Estudiantes voluntarios responden a la pregunta formulada por el (la) docente.
Respuesta Esperada
La mediana representa mejor los datos de distribuciones asimétricas, ya que los datos atípicos afectan a la media, alejándola de la mayoría de datos, mientras que la mediana se mantiene más estable.</td><td rowspan="3">Guía de trabajo con el enunciado del problema (ver anexo).</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5 minutos)
El (la) docente entrega a los estudiantes la guía de trabajo y les solicita a voluntarios que den lectura en voz alta al problema propuesto.</td><td>2 a 3 voluntarios dan lectura al problema (enunciado en la guía anexa).</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5 minutos)
Tras la lectura, el/la docente realiza, de manera dirigida y aleatoria, a los estudiantes las siguientes preguntas de verificación de la comprensión:
*¿Qué confunde a los profesores, al realizar esta comparación?
*¿Qué se nos pide que hagamos, en relación con este problema?</td><td>Responden a las preguntas de verificación de la comprensión.
Respuestas Esperadas
*Que los dos cursos tienen resultados muy distintos, pero la misma mediana.
*Que comprobemos que las medianas son iguales y, si lo son, que expliquemos por qué eso puede ocurrir.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Desarrollo (60 minutos)</td></tr>
<tr><td>Acciones del (de la) docente</td><td>Acciones de los estudiantes</td><td>Material complementario</td></tr>
<tr><td>(5 minutos)
El (la) docente pide a los estudiantes que abran el archivo Excel de la subunidad.</td><td>Abren el archivo Excel de la subunidad y seleccionan la segunda pestaña. Revisan que la tabla y los gráficos corresponden a la información de la guía.</td><td rowspan="3">Computadora con archivo Excel de la secuencia didáctica instalado (idealmente 1 por estudiante; de otro modo, pueden trabajar en parejas).
El archivo está disponible en el vínculo: https://goo.gl/BnhF9n
Papelógrafo y plumón (1 por grupo de 3 a 4 personas)</td></tr>
<tr><td>(10 minutos)
Etapa de trabajo individual
El docente les indica que podrán modificar los datos en el Excel, si lo requieren para entender el problema o argumentar, pero que su respuesta final debe estar referida a los datos iniciales.
El (la) docente les da 10 minutos para reflexionar en silencio e individualmente en torno al problema y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el primer espacio disponible en la guía.</td><td>Reflexionan y responden individual-mente
Acciones o Respuestas Esperadas
*En este punto, todavía puede haber estudiantes que no han comprendido el problema y se encuentran bloqueados.
Posibles preguntas de devolución
¿Cómo se calcula la mediana?
¿Es correcto el cálculo de los profesores?
¿Qué diferencias observas entre los registros de los dos cursos?
¿Por qué puede ocurrir que la mediana sea la misma, para dos registros tan distintos?
*Algunos pueden comprobar que la mediana es la misma, pero sin lograr dar con una explicación.
Posibles preguntas de devolución
¿Cuáles son los datos que efectivamente utilizas en el cálculo de la mediana? ¿Dónde se ubican?
¿Qué efecto tiene la distancia de los demás datos, con respecto a los que identificaste?
*Algunos pueden comprobar que la mediana es la misma y explicarlo señalando que la distancia de los otros datos a los 2 datos centrales no afecta el cálculo de la mediana.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes se encuentran en situación de acción e interactúan con el medio adidáctico (enunciado, tabla, gráfico, archivo Excel y sus propios conocimientos previos sobre la mediana), buscando alternativas para resolver el problema. Se espera que el docente entregue ese espacio para actuar, no intervenga a menos que resulte</td></tr>
</table>

estrictamente necesario, y lo haga solo a través de preguntas de devolución.	

(20 minutos) *Etapa de trabajo grupal* El (la) docente les da 2 minutos para reunirse en grupos de 3 a 4 personas. Luego, les da 15 minutos para discutir en torno al problema, llegar a un consenso, y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el segundo espacio de la guía. Asimismo, uno de ellos debe trasladar su respuesta al papelógrafo que él (ella) les entregará.	Se distribuyen en grupos de 3 a 4 personas y discuten sobre el problema. Llegan a un acuerdo y escriben su respuesta en el papelógrafo. Las *respuestas esperadas* y *posibles preguntas de devolución* se repiten con respecto a la situación de acción. Adicionalmente, a los grupos que hayan comprobado que la mediana es la misma y logrado una explicación satisfactoria, se los puede desafiar preguntando i) ¿qué propiedad de la mediana pueden enunciar, a partir de sus reflexiones? y ii) ¿cómo se podrían comparar los resultados de estos dos grupos, dado que las medianas son iguales? (esta última pregunta permite introducir las medidas de dispersión en la *institucionalización*).	
La mayoría de estudiantes se encuentra en situación de formulación y busca explicar la solución a la que llegó en la etapa individual. De vez en cuando, algunos entran nuevamente en situación de acción, y vuelven a testear con el medio adidáctico ya sea sus propias hipótesis o las que han desarrollado en la conversación grupal. Se espera que el docente realice un trabajo de orientación solo si existieran grupos en los que todos los estudiantes presentan dificultades para dar con una solución aceptable.		
(25 minutos) *Plenario* El (la) docente pide a un representante de cada grupo que presente en 1 minuto las conclusiones a las que llegaron. En el transcurso de las presentaciones, el (la) docente organiza en la pizarra las propiedades que se esbozan sobre la mediana. Por ejemplo:	Un representante por grupo presenta al resto sus conclusiones. Después de las presentaciones, los estudiantes complementan o rebaten los argumentos de sus compañeros. *Respuesta Esperada* *Pese a tener distinto nivel de dispersión, las dos distribuciones tienen los mismos valores centrales, por lo que efectivamente es razonable que tengan la misma mediana.	

<table>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes se encuentran en situación de validación y buscan convencer mediante argumentos racionales a sus compañeros de la validez de la solución a la que llegaron en la etapa grupal. Del docente se espera que intervenga para moderar la discusión, permitiendo que todos tengan la posibilidad de participar y expresar sus argumentos. También se espera, llegado el caso, que si la discusión llega a un “punto muerto”, la reactive planteando (nuevas) preguntas de devolución a los estudiantes.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Cierre (15 minutos)</td></tr>
<tr><td>Acciones del (de la) docente</td><td>Acciones de los estudiantes</td><td>Material complementario</td></tr>
<tr><td>El (la) docente advierte que ahora buscarán llegar a ciertas conclusiones más generales. Les plantea la siguiente pregunta, y, luego de permitirles reflexionar por un momento, recoge respuestas de estudiantes seleccionados al azar.
¿Qué propiedad de la mediana pueden enunciar, a partir de sus reflexiones?
Opcionalmente, el (la) docente puede preguntar :
¿Cómo se podrían comparar los resultados de estos dos grupos, dado que las medianas son iguales?
El (la) docente debe aclarar que, en este caso, se pueden utilizar las llamadas medidas de dispersión, que miden no la ubicación de los datos, sino cuán heterogéneas u homogéneas son las distribuciones, permitiendo un análisis más completo. Debe indicarles que van a abordar una de ellas, el rango, en clases posteriores, y otras, como la varianza y la desviación estándar, en cursos posteriores.</td><td>Reflexionan en torno a las preguntas que plantea el (la) docente y responden en voz alta si se los solicita.
Respuestas esperadas
*La mediana no depende del grado de dispersión de la distribución de datos, o bien
*Distribuciones homogéneas y heterogéneas pueden tener la misma mediana.
*Los resultados se podrían comparar diciendo que tienen igual mediana, pero que uno es más disperso que el otro.</td><td>-</td></tr>
</table>

Una vez que los estudiantes han llegado a las conclusiones más generales posibles, el docente realiza la institucionalización: *Llamamos dispersión al grado de separación entre los datos de una muestra. Así, diremos que una muestra es más “dispersa” si sus datos están más separados unos de otros. También se le puede decir “heterogénea” a una muestra dispersa y “homogénea” a una muestra poco dispersa. *Como hemos visto en esta clase, la mediana no depende del grado de dispersión de la muestra. Esto quiere decir que muestras heterogéneas y homogéneas pueden tener la misma mediana. Lo mismo es válido para la media.	

CLASE 3

ENUNCIADO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA PROPUESTA

Pedro cuenta a Nicole que Marcelo, uno de los estudiantes del 8ºA, ha hecho tremendos progresos en su test de abdominales. Él ya era uno de los más rápidos del curso, y ahora ha superado con creces la mejor marca del curso.

–Cuando hicimos la medición, Marcelo marcó 17, y ahora está logrando hasta 32 abdominales, en los mismos 30 segundos. Con eso, el rendimiento del 8ºA va a superar al del 8ºB en la próxima prueba.

–¡No si lo medimos con la mediana! –exclama Nicole.

Pedro no entiende a qué se refiere Nicole. ¿Qué piensas tú? ¿Es cierto que los esfuerzos de Marcelo no tendrán efecto en el rendimiento del curso, si se lo mide con la mediana? Justifica tu respuesta.

ANÁLISIS A PRIORI

Objetivo

Muestran que la mediana no se altera si hay variaciones grandes en los valores extremos (3er indicador de evaluación del OA 17).

Respuesta experta

La mejora en el desempeño de Marcelo no tiene efecto en la mediana, porque esta no presenta sensibilidad a las variaciones de los valores extremos.

Matemática en juego

Los valores extremos de una distribución son aquellos que se sitúan más lejos de un punto que se considera el centro de esta. Pueden ser mayores que la mayoría de los datos, o bien menores que esta.

En el cálculo de la mediana de un conjunto de datos, se requiere determinar qué dato o datos se sitúan al centro de la distribución, lo que exige ordenar los datos en sentido creciente y calcular el valor de la(s) posición(es) central(es) ($\frac{n+1}{2}$, si el número de datos n es impar, o bien $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$ si n es par). Esto implica que la mediana está determinada por las relaciones de orden que se establecen entre los datos, *no así por las distancias* que existen entre estos.

Otra forma de plantearlo es la siguiente: consideremos un conjunto de datos ordenados $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si suponemos que n es impar, entonces $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$. Sin pérdida de generalidad, elijamos un valor extremo $x = x_n$ y convirtámoslo en una variable, manteniendo los demás datos como constantes. Tendremos entonces que la mediana como función del valor de x es:

$$Me(x) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } x > x_{\frac{n+1}{2}} \\ x & \text{si } x_{\frac{n+1}{2}-1} \leq x \leq x_{\frac{n+1}{2}} \\ x_{\frac{n+1}{2}-1} & \text{si } x < x_{\frac{n+1}{2}-1} \end{cases}$$

Como se observa $Me(x)$ es constante en toda la recta real, a la excepción del intervalo $[x_{\frac{n+1}{2}-1}, x_{\frac{n+1}{2}}]$. A esto se refiere la propiedad de que la mediana no presenta –o presenta mínima– sensibilidad al cambio de los valores extremos.

Conocimientos previos

El (la) estudiante requiere como conocimiento previo el procedimiento de cálculo de la mediana. También debe ser capaz de reconocer los valores extremos en un conjunto de datos.

Posibles estrategias

En una primera instancia, se espera que los estudiantes realicen el ejercicio de modificar el valor extremo de la muestra del 8°A y recalcular la mediana para verificar que no ha habido variación. Algunos estudiantes pueden requerir reescribir la lista, u otros pueden realizar mentalmente la operación.

En segunda instancia, al momento de buscar una justificación para el fenómeno observado, es posible que tengan una aproximación pictórica o gráfica y representen la situación, mostrando que la modificación (en sentido positivo) de la ubicación del registro de Marcelo no afecta su relación de orden con los del centro de la distribución y, por tanto, tampoco tiene incidencia en el valor de la mediana.

También es posible que la aproximación sea algebraica, y muestren que si m es la cantidad de abdominales que realiza Marcelo, para cualquier valor de $m > 10$, los valores del centro de la distribución siguen siendo 10, por lo que la mediana no se ve afectada.

Dificultades y errores

En la tabla 3 se presentan los errores que se estima que pueden cometer los estudiantes al enfrentar el problema, así como las dificultades que podrían estar en la base de cada error. Asimismo, se presentan posibles preguntas de devolución que permitirían al (a la) estudiante reapropiarse del problema y continuar en búsqueda de la solución.

Tabla 3

Errores, dificultades y posibles devoluciones para la tercera y última clase

Error	Dificultad	Posibles preguntas de devolución
Determina que el cambio sí tiene efecto en la mediana	Atribuye a la mediana sensibilidad a la distancia a la que se sitúan los datos extremos	¿Qué ocurre si modificas el resultado que obtuvo Marcelo en la primera oportunidad, y lo aumentas a 32? ¿Cuál es la mediana de la nueva distribución?
Argumenta redundando en la definición o en el procedimiento de cálculo de la mediana	No reconoce que la distancia entre un dato extremo y el (los) dato(s) mediano(s) no tiene efecto en el valor de la mediana	¿Cuáles son los datos que efectivamente utilizas en el cálculo de la mediana? ¿Dónde se ubican? ¿Qué efecto tiene sobre esos datos la modificación de un dato extremo?

PLAN DE CLASE

Asignatura: Matemáticas	Nivel: 7º básico	Semestre: 2
Unidad didáctica: Unidad 4		Horas: 2

Objetivo de Aprendizaje OA 17	**Habilidades** OA f y l	**Actitudes** OA D y E
Conocimiento previo Conocimiento intuitivo de tendencia de eventos	**Objetivo de la clase** Muestran que la mediana no se altera si hay variaciones grandes en los valores extremos. (3er indicador de evaluación del OA 17)	
Contenido Medidas de tendencia central (media y mediana)	**Indicadores de logro** - Comprenden la información presente en el problema - Determinan que el valor de la mediana no se ve afectado por variaciones en los valores extremos - Concluyen que la modificación propuesta en el enunciado no tiene efecto en la mediana	

Inicio (15 minutos)		
Acciones del (de la) docente	Acciones de los estudiantes	Material complementario
(5 minutos) El (la) docente pide a voluntarios que respondan a una pregunta sobre los aprendizajes de la segunda sesión: ¿Qué propiedad de la mediana comprendimos en la sesión pasada? Enseguida, aclara que en esta sesión estudiarán una última propiedad de la mediana que les permitirá comprender aún mejor esta medida de tendencia central.	Estudiantes voluntarios responden a la pregunta formulada por el (la) docente. *Respuesta Esperada* *La mediana no depende del grado de dispersión de la distribución de datos y/o *Distribuciones homogéneas y heterogéneas pueden tener la misma mediana.	Guía de trabajo con el enunciado del problema (ver anexo).
(5 minutos) El (la) docente entrega a los estudiantes la guía de trabajo y les solicita a voluntarios que den lectura en voz alta al problema propuesto.	2 a 3 voluntarios dan lectura al problema (enunciado en la guía anexa).	
(5 minutos) Tras la lectura, el/la docente realiza, de manera dirigida y aleatoria, a los estudiantes las siguientes preguntas de verificación de la comprensión: *¿Qué cambios en los datos del 8°A plantea el profesor Pedro que se puede producir? *¿Cuál es el reparo que tiene la profesora Nicole?	Responden a las preguntas de verificación de la comprensión. *Respuestas Esperadas* *Que uno de los alumnos puede aumentar mucho su rendimiento, cambiando el valor de la mediana. *Que el valor de la mediana no se verá alterado al aumentar el rendimiento de los que ya son	

*¿Qué se nos pide que hagamos, en relación con este problema?	más rápidos. *Que determinemos quién tiene la razón entre los dos y justifiquemos por qué.	
Desarrollo (60 minutos)		
Acciones del (de la) docente	Acciones de los estudiantes	Material complementario
(5 minutos) El (la) docente pide a los estudiantes que abran el archivo Excel de la subunidad.	Abren el archivo Excel de la subunidad y seleccionan la primera pestaña. Revisan que la tabla y el gráfico corresponden a la información sobre el 8ºA.	Computadora con archivo Excel de la secuencia didáctica instalado (idealmente 1 por estudiante; de otro modo, pueden trabajar en parejas). El archivo está disponible en el vínculo: https://goo.gl/BnhF9n
(10 minutos) *Etapa de trabajo individual* El docente les recuerda que, al igual que en la sesión previa, pueden modificar los datos en el Excel, si lo requieren para entender el problema o argumentar, pero que su respuesta final debe estar referida a los datos iniciales. El (la) docente les da 10 minutos para reflexionar en silencio e individualmente en torno al problema y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el primer espacio disponible en la guía.	Reflexionan y responden individualmente *Acciones o Respuestas Esperadas* *En este punto, puede haber estudiantes que aún no comprenden el problema. *Posibles preguntas de devolución* ¿Qué resultado de esa tabla plantea el profesor Pedro que podría cambiar? ¿Qué le ocurre a la mediana si lo modificas? ¿Por qué crees que la mediana no cambió? *Algunos pueden comprobar que la mediana no cambia, pero sin lograr dar con una explicación. *Posibles preguntas de devolución* ¿Cuáles son los datos que efectivamente utilizas en el cálculo de la mediana? ¿Dónde se ubican? ¿Qué efecto tiene sobre esos datos la modificación de un dato extremo? *Algunos pueden comprobar que la mediana no cambia y explicarlo señalando que la distancia de los datos extremos a los datos centrales tiene efecto en el cálculo de la mediana.	

Los estudiantes se encuentran en situación de acción e interactúan con el medio adidáctico (enunciado, tabla, gráfico, archivo Excel y sus propios conocimientos previos sobre la mediana), buscando alternativas para resolver el problema. Se espera que el docente entregue ese espacio para actuar, no intervenga a menos que resulte estrictamente necesario, y lo haga solo a través de preguntas de devolución.		
(20 minutos) *Etapa de trabajo grupal* El (la) docente les da 2 minutos para reunirse en grupos de 3 a 4 personas. Luego, les da 15 minutos para discutir en torno al problema, llegar a un consenso, y anotar la respuesta que crean correcta, con su justificación, en el segundo espacio de la guía. En este caso, no utilizarán papelógrafo para presentar.	Se distribuyen en grupos de 3 a 4 personas y discuten sobre el problema. Llegan a un acuerdo y escriben su respuesta en la guía. Las *respuestas esperadas* y *posibles preguntas de devolución* se repiten con respecto a la situación de acción. Adicionalmente, a los grupos que hayan comprobado que la mediana no cambia y logrado una explicación satisfactoria, se los puede desafiar preguntando i) ¿qué ocurriría si, en cambio, disminuyera uno de los valores más pequeños de la distribución? y ii) ¿qué propiedad de la mediana pueden enunciar, a partir de sus reflexiones?	
La mayoría de estudiantes se encuentra en situación de formulación y busca explicar la solución a la que llegó en la etapa individual. De vez en cuando, algunos entran nuevamente en situación de acción, y vuelven a testear con el medio adidáctico ya sea sus propias hipótesis o las que han desarrollado en la conversación grupal. Se espera que el docente realice un trabajo de orientación solo si existieran grupos en los que todos los estudiantes presentan dificultades para dar con una solución aceptable.		
(25 minutos) *Plenario* El (la) docente pide a un representante de cada grupo que presente en 1 minuto las conclusiones a las que llegaron. En el transcurso de las presentaciones, el (la) docente organiza en la pizarra las propiedades que se esbozan sobre la mediana. Por ejemplo:	Un representante por grupo presenta al resto sus conclusiones. Después de las presentaciones, los estudiantes complementan o rebaten los argumentos de sus compañeros. *Respuesta Esperada* *El aumento en el registro del estudiante que logró una de las mejores marcas no modificará la mediana, puesto que ésta depende solamente de los valores centrales de la distribución.	

		
Los estudiantes se encuentran en situación de validación y buscan convencer mediante argumentos racionales a sus compañeros de la validez de la solución a la que llegaron en la etapa grupal. Del docente se espera que intervenga para moderar la discusión, permitiendo que todos tengan la posibilidad de participar y expresar sus argumentos. También se espera, llegado el caso, que si la discusión llega a un "punto muerto", la reactive planteando (nuevas) preguntas de devolución a los estudiantes.		
Cierre (15 minutos)		
Acciones del (de la) docente	Acciones de los estudiantes	Material complementario
El (la) docente recuerda que ahora buscarán llegar a ciertas conclusiones más generales. Les plantea las siguientes preguntas, y, luego de permitirles reflexionar por un momento, recoge respuestas de estudiantes seleccionados al azar. ¿Qué propiedad de la mediana pueden enunciar, a partir de sus reflexiones? ¿Cómo se explica esa propiedad?	Reflexionan en torno a las preguntas que plantea el (la) docente y responden en voz alta si se los solicita. *Respuestas esperadas* *La mediana no cambia si hay modificaciones en los valores extremos de la distribución, ya sea al aumentar los valores del extremo superior, o al disminuir los del inferior. Esto se debe a que dichos valores no están involucrados directamente en el cálculo de la mediana.	-
Una vez que los estudiantes han llegado a las conclusiones más generales posibles, el docente realiza la institucionalización: *Llamamos "datos extremos" a los datos que se ubican más distantes del centro de una muestra. *Como hemos visto en esta clase, la mediana no es sensible a la ubicación de los datos extremos. Es decir, un dato extremo puede estar cercano o muy distante del centro y eso no afectará el valor de la mediana. Esta característica de la mediana la distingue de la media, porque esta última sí puede ver modificado drásticamente su valor dependiendo de la ubicación de los datos extremos.		
El (la) docente completa las sesiones agradeciendo y felicitando a los estudiantes por su participación.		

CONCLUSIONES

La presente secuencia didáctica apuesta por una innovación en la manera de tratar el concepto de medida MTC, enfocándose particularmente en la mediana, por tratarse de una MTC que los estudiantes suelen conocer y ser capaces de calcular, pero no *utilizar*, como lo han mostrado los antecedentes. El estudio de las propiedades de la mediana parte, entonces, de una situación didáctica en la que el grado de representatividad de la mediana es mayor que el de la media, evidenciándose así su utilidad. Esta elección no es azarosa, sino que se funda en un estudio epistemológico que pone de relieve la conexión entre los conceptos de mediana y distribución asimétrica.

Mas la concepción de una situación didáctica, fundamentada en un marco teórico y en un estudio epistemológico, no garantiza el éxito. El contraste entre los análisis a priori y a posteriori de la clase 1 –la única que pudo ser aplicada–, muestra distancias importantes entre lo presupuestado y lo que ocurrió. Sería imprudente pensar que dichas distancias invalidan la situación didáctica. Más bien, entregan luces sobre aspectos que se pueden mejorar dentro de su planificación, para enriquecerla.

Del mismo modo, se espera que los profesores que tengan interés en implementar esta secuencia didáctica, consideren la planificación como una base a partir de la cual diferentes construcciones adaptadas a las necesidades de los estudiantes de nuestro país son posibles. La didáctica es condición necesaria, no suficiente, para el aprendizaje. La aplicación de las clases en distintos contextos no puede sino permitir que se continúe robusteciendo el conocimiento que tenemos de cómo los estudiantes interactúan y se enfrentan a distintos medios adidácticos y didácticos.

REFERENCIAS

Abril, P. S. (1918). *La Ética de Aristóteles*. Recuperado de https://www.dipualba.es/publicaciones/LibrosPapel/LibrosRed/Clasicos/Libros/EticaAris.pdf

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*, 281-308.

Bakker, A. (2003). The Early History of Average Values and Implications for Education. *Journal of Statistics Education*, *11*(1), 17-26.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 149-168.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Recuperado de http://www.pucrs.br/famat/viali/graduacao/matematica/material/referencias/didacticaestadistica.pdf

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Compostela, B. (2010). *Breve historia de la estadística y el azar.* Madrid, España: Universidad de Mayores de Experiencia Recíproca.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM, 15*, 37-61.

Gorgas, J., Cardiel, N., Zamorano, J. (2011). *Estadística básica para estudiantes de Ciencias*. Recuperado de http://webs.ucm.es/info/Astrof/users/jaz/ESTADISTICA/libro_GCZ2009.pdf

Hacking, I. (1990). *The taming of chance* (Vol. 17). Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Hacking, I. (2006). *The emergence of probability: A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2016). Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas de centralización afectadas por valores atípicos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 335-344). Málaga, España: SEIEM.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante matemática 7° básico*. Santiago de Chile: SM.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares para la Educación Básica*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_14.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2013). *Matemática: Programa de Estudio Sexto Año Básico*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18981_programa.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34960_Bases.pdf

Reading, C. & Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (v.4, pp. 187-194). Valencia, España: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 20-39.

Torretti, R. (2003). El concepto de probabilidad. *Diálogos*, *38*(81), 1-41.

Walker, H. M. (1931). *Studies in the History of Statistical Methods. With Special Reference to Certain Educational Problems*. Baltimore, USA: The Williams and Wilkins Company.