Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Propuesta Didáctica para el trabajo de Ecuaciones de Primer Grado en $\mathbb{N}$, por estudiantes de entre 10 y 11 años

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: Andrea Paz Soto C.

Profesores Guía:
Patricia Vásquez Saldías
Romina Menares Espinoza
Elisabeth Ramos Rodríguez

2017

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta monografía se elaboró en el marco el curso de Seminario de Graduación. En ella se expone la experiencia de realizada por un grupo de profesores, en el contexto de un Estudio de Clases y se propone una secuencia didáctica para el trabajo de ecuaciones de primer grado pro estudiantes de entre 10 y 11 años.

Al comienzo de este escrito, se presenta la problemática detectada respecto a la resolución de ecuaciones, para después, exponer algunos antecedentes que sustentan su existencia en la realidad. Posteriormente, y considerando que la propuesta se elabora a partir de los resultados obtenidos desde Análisis Conceptual (Rico, 2013), se da a conocer dicho marco seleccionado para guiar nuestro trabajo, para luego, desarrollar los apartados que lo conforman. De esta manera, se realiza inicialmente, un análisis conceptual del objeto ecuación, en el que se elabora una red de contenidos asociados; se define el concepto desde el ámbito erudito y escolar; se establece cuál es la distancia entre ambas; y se realiza un breve análisis histórico-epistemológico al respecto. Una vez hecho esto, se da paso al análisis de contenido, en el que se estudia el sistema de representaciones dentro del cual puede hallarse al objeto y se desarrolla un análisis fenomenológico con el objetivo de exponer en cuáles diferentes contextos podemos encontrar o debemos resolver ciertas ecuaciones.

Después, se realiza un análisis cognitivo, cuyos acápites corresponden a un análisis curricular, es decir cómo se manifiesta o propone a la ecuación en el currículum; y a un análisis de texto, para conocer cómo conceptualizan, ejemplifican, trabajan y resuelven las ecuaciones de primer grado en este material escrito. En este mismo apartado, de describen una serie de limitaciones de aprendizaje relacionados con el trabajo del objeto en cuestión, para finalmente, proponer qué se espera que logren los alumnos en términos de aprendizaje.

Luego de eso, nos adentramos más particularmente al estudio de clases, pues en el análisis de instrucción se presenta el plan de clases correspondiente a este diseño, el que es posteriormente analizado con base en el diseño metodológico que se propone para ello. Así, luego de dar a conocer el paradigma, diseño, unidades de análisis, técnicas, procedimientos y categorías de análisis, al inicio del análisis evaluativo, se procedemos a explicarle a lector cómo realizaremos dicho proceso, para luego describir los principales, a partir de los que posteriormente discutimos (análisis a posteriori).

Las conclusiones se elaboran a partir del plan de clases, la evidencia recogida y el análisis a priori; y es lo que nos permite justificar las decisiones tomadas para la elaboración de la propuesta didáctica. Cabe destacar que previo a concluir, se realiza brevemente un contraste entre el análisis a priori incorporado en el plan de clases del estudio de clase, y el análisis a posteriori, con énfasis en las dificultades y errores acerca del trabajo con ecuaciones. Consecuentemente, se presenta la propuesta didáctica que se conforma de tres planes de clase y el análisis a priori de cada uno de ellos.

Finalmente, se establecen algunas conclusiones sobre el trabajo realizado, específicamente acerca del diseño, la innovación y el aporte de este a la comunidad educativa.

PROBLEMÁTICA

La problemática que sustenta este trabajo, tiene relación con las dificultades y/o errores evidenciados por algunos estudiantes, cuando resuelven ecuaciones de primer grado, ocupando estrategias mecánicas y desprovistas de sentido, que se utilizan para determinar el valor de la incógnita. Al respecto, Hurtado y Torres (2015), señalan que los estudiantes, dado sus años de experiencia con cantidades numéricas exactas y conocidas, tienden a mantener interpretaciones aritméticas de la mayoría de las situaciones algebraicas, y no aceptan la existencia de cantidades desconocidas, de variables con múltiples significados y mucho menos, que el resultado de una expresión puede ser una letra o una expresión simbólica. Por ello, el autor afirma que la permanencia de una “cultura aritmética” en los estudios algebraicos, la carencia de conceptos, operaciones y propiedades necesarias para el estudio del álgebra, entre otras, son serias dificultades que los estudiantes deben superar para lograr darle sentido a sus estudios algebraicos (Ibíd, 2015, p. 2).

Así mismo, Booth (1984, citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2003), indica que, los estudiantes usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una nueva situación. Esto según el autor, genera errores originados como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números.

En relación a esta problemática, diversos autores han venido elaborando diversas propuestas de aprendizaje, con el fin de subsanar las dificultades que presentan los alumnos cuando resuelven ecuaciones de primer grado. Algunas de estas, utilizan la balanza como modelo para la comprensión y resolución de ecuaciones, la que se encuentra incluida también, en el currículum chileno. Esta herramienta, permitiría tratar el concepto de ecuación como igualdad, pudiéndose con esta, descubrir las propiedades de la igualdad como una relación de equivalencia en la que se basa la resolución formal de ecuaciones (Wilder y Váquiro, 2010).Así mismo, De Moreno y De Castellano (1997), señalan que el concepto de ecuación se construye a partir de igualdades como situaciones de equilibrio que pueden ser representada a través de balanzas, en las que hay un elemento desconocido (incógnita), tratándose inicialmente de encontrar el valor de dicho elemento para lograr el equilibrio propuesto.

A partir de la justificación que se da al uso de la balanza para comprender significativamente algunos métodos de resolución, así como también, el concepto de ecuación, nos preguntamos si el hecho de resolver y hallar el valor de la incógnita, se basa principalmente en el concepto de igualdad o equilibrio. Si así fuera, entonces podríamos suponer que el uso de la balanza sería la solución más eficiente y pertinente para superar los errores y dificultades que enfrentan los estudiantes. Sin embargo, existen antecedentes (Sánchez, 2014; Zambrano 2011; Abrate, Pochulu y Font, 2008, Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2003; Booth, 1984) que nos harían suponer que, durante varios años, aun cuando se utiliza la balanza como recurso de aprendizaje, estas dificultades siguen evidenciándose en el aula.

Por ello, es que la problemática planteada, trasciende al concepto de igualdad que sería relevado por el uso de la balanza, y se relaciona directamente, además, con el manejo del lenguaje algebraico, la concepción de cantidades desconocidas, las propiedades que tiene la adición y multiplicación en el sistema de los números naturales, el uso de algoritmos aritméticos en el álgebra o desprovistos de sustento matemático, entre otros. que corresponden a elementos que no necesariamente se superan con el uso de la balanza.

ANTECEDENTES

A continuación, se dan a conocer algunos antecedentes encontrados en la literatura, que sostienen la existencia de la problemática planteada.

Sánchez (2014) analiza los errores en la resolución de ecuaciones de primer grado, y cita a Caballero (2010), quien afirma que, las ecuaciones, reportan dificultades y errores en el aprendizaje de este concepto, atribuidos al uso del signo igual, uso de propiedades simétricas y el significado dado a los literales (Caballero, 2010, citado en Sánchez, 2014, p.2)

Respecto a la resolución de ecuaciones, Zambrano (2011), hace referencia a una resolución automática y afirma que, para un gran número de estudiantes, resolver ecuaciones de este tipo, se reduce a la aplicación de algoritmos de forma mecánica, que muchas veces no comprenden y se convierten en un ejercicio de memoria. Coherentemente, Chavarría (2014) concluye desde su investigación, que muchos estudiantes aprendieron de memoria determinados procesos, pero sin analizar realmente el razonamiento que cada problema conllevaba para su resolución. Y en este contexto, Chavarría (2014) cita a Skemp (1978), quien afirma que la mayoría de los alumnos tienen una comprensión instrumental de la matemática, pero presentan dificultades para comprender la matemática relacional (Chavarría, 2014, p. 29).

Quienes también se refiere al proceso mecánico de resolución, son González, Rey, Olivares y Parra (2015), agregando que el problema ocurre cuando se realiza un proceso algorítmico desprovisto de significado y que, sin embargo, conduce a una respuesta correcta. Es aquí donde según los autores, los estudiantes transponen indiscriminadamente los términos bajo estas reglas, sin notar qué es lo que debe realizar primero en una operación. En este caso, el estudiante solo realiza un proceso algorítmico mecánico, sin hacer un análisis de los procesos previos que lo llevan a utilizar esta operación matemática y como consecuencia, se evidencia que el alumno muestra una falencia de comprensión de conceptos matemáticos en la ecuación de primer grado (Ibíd, p. 2). Por ejemplo, en la ecuación $x + 2 = 5$, muchos estudiantes *utilizan la operación inversa*, restando 2 al 5 y haciendo desaparecer al 2, así: $x = 5 - 2$. Este tipo de resolución, aunque lleva a la respuesta correcta, es mecánica en tanto el estudiante, debiera sustraer el 2 a ambos lados de la igualdad, así: $x + 2 - 2 = 5 - 2$.

Por otra parte, Abrate, Pochulu y Font (2008), afirmaron que los alumnos no suelen contar con muchos recursos para resolver ecuaciones de primer grado, lo que, según los autores, podría deberse a que cuando los estudiantes creen conocer todas las técnicas básicas, terminan utilizándolas sin distinción y sin analizar que el problema podría haber sido resuelto más fácilmente, a través de otros métodos. Por lo mismo, según ellos, se tornaría evidente, que la falta de un modelo didáctico para los estudiantes, que sirva de referente adecuado para la resolución de ecuaciones, obstaculiza el proceso de desarrollo de las competencias y habilidades a lograr en esta área (Ibíd, p. 168)

De Moreno y De Castellano (1997), realizan una categorización de errores entre los que están: realizar solo las operaciones en un miembro de la igualdad sin hacer las debidas modificaciones en el otro y realizar deficientemente las operaciones de suma o resta implicadas en algunos de los miembros de la ecuación (Ibíd, p.250); proponen que utilizar en la enseñanza del tema, inicial y exclusivamente, la representación simbólica de la ecuación, impediría al estudiante la interpretación y el análisis de otras representaciones más concretas, en las que se evidencia el papel que desempeña cada uno de los elementos dentro de la igualdad. Es decir, el tratamiento puramente simbólico del objeto, haría que la resolución de ecuaciones, muchas veces se transforme en un procedimiento mecánico, más que en un análisis y significación del concepto de ecuación (Ibíd, p. 251).

En relación a lo anterior, Muñoz y Swears (2013), elaboran una Situación Didáctica, en torno a la resolución de ecuaciones y utilizan la balanza, dando paso a la búsqueda de estrategias de resolución, permitiendo hacer una transición natural entre la actividad concreta y la noción de equivalencia presente en la ecuación, así como las operaciones necesarias para resolverla (Ibíd, p. 8).

Por otra parte, Chavarría (2014), señala que hay factores afectivos, de contextualización, relacionados con conocimientos previos y de temor a lo atípico, que influyen de manera negativa en la resolución exitosa de ecuaciones y que no podrían ser enfrentados ni superados con el mero uso de la balanza. Entre las conclusiones de su investigación, se encuentra en primer lugar, que los factores de índole motivacional, en tanto mala predisposición del estudiante, perjudicaría su aprendizaje de las matemáticas, particularmente en la resolución de ecuaciones. En segundo lugar, el autor señala que tanto los libros de texto, como los ejercicios presentados por los docentes, proponen problemas ajenos al contexto en que los estudiantes se desenvuelven, asunto que también perjudicaría una buena resolución de ecuaciones, ya que contextualizar los problemas, habría demostrado no solo ser una manera de motivar al estudiante, sino también, de verificar si los análisis y respuestas efectuados eran correctos (Ibíd, p. 27). En tercer lugar, el autor logró apreciar que varios de los estudiantes no interrelacionaban los contenidos matemáticos aprendidos, por tanto, tenían vacíos conceptuales sobre aprendizajes que tendrían que haber sido asimilados con anterioridad en la escuela, así, algunos estudiantes no lograban resolver un problema, porque no conocían por ejemplo, el significado de *aumentado* o *disminuido*, demostrando un lenguaje pobre que no les permitiría trasladar una oración cotidiana a una forma algebraica (Ibíd, 30). Finalmente, los ejercicios atípicos también representaron una dificultad, puesto que, como inicial y comúnmente se trabajan ecuaciones *simples* que la gran mayoría puede resolver, una vez que se les presentan ejercicios diferentes a los vistos en clases, los estudiantes suelen demostrar inseguridad y tienden a cometer errores.

Wilder & Váquiro (2015), también elaboran una propuesta para la resolución de ecuaciones de primer grado, a través del uso de la balanza. Entre sus conclusiones, indican que este, modelo propicia un escenario en que los estudiantes logran tomar conciencia sobre la necesidad de mantener la equivalencia en las ecuaciones; reconoce también, que a pesar del uso de la balanza, muchas veces los estudiantes no logran generar ecuaciones equivalentes cuando se debe dividir en ambos lados de la igualdad para despejar finalmente la incógnita (Ibíd, 160), por ejemplo en $2x = 6$, y aunque muchos reconocen que para despejar finalmente la incógnita es necesario dividir, dicho proceso no se realiza en ambos lados de la igualdad, con lo cual se altera la producción de ecuaciones equivalentes. El autor reconoce también, que en el proceso de solución de las ecuaciones donde la incógnita se encuentra ubicada al lado derecho de la igualdad, gran parte de los estudiantes fuerzan a que esta quede al lado izquierdo, cometiendo en algunos casos procedimientos erróneos, los que los lleva a generar una solución incorrecta de la ecuación (Ibíd, p. 161). Y, además observó cómo varios estudiantes cometen errores al intentar no dejar el cero en uno de los miembros de la ecuación, lo que podría deberse según Wilder & Váquiro (2015), a que los estudiantes no reconocen la posibilidad de tener una expresión igualada a cero.

Finalmente, el mismo autor menciona algunas desventajas y/o dificultades del uso de la balanza, señalando que dicho modelo no permitiría representar ecuaciones haciendo uso de los números enteros o racionales $(x + 3 = -4)$; y no permitiría representar la resolución de ecuaciones del tipo $x + 9 = 0$, siendo esta última dificultad una de las más documentadas, es decir, la incorporación de números negativos y su operatividad a la sintaxis algebraica (Ibíd, 59). Si bien no se podrían resolver este tipo de ecuaciones con una balanza, este instrumento surge como modelo inicial para introducirse al mundo de las ecuaciones.

Por ello, aunque los racionales y enteros no son contenidos de 5º básico, curso en el que se inicia la operación de ecuaciones de primer grado, igualmente las dificultades propuestas por Chavarría (2015) podrían evidenciarse, sin ser la balanza, la herramienta que acabaría con ellos en su totalidad. Y, por otro lado, si bien este instrumento surge como modelo inicial para la comprensión y operación de ecuaciones de primer grado, no puede ser extrapolada a la resolución de ecuaciones de primer grado más complejas, propuestas en niveles de aprendizaje avanzados, en donde los errores y dificultades siguen presentándose; más aún, si estos permanecen incluso en niveles de enseñanza superior, podríamos suponer fácilmente que su utilización inicial, no eliminó los obstáculos que se manifiestan en su resolución.

MARCO CONCEPTUAL

A continuación, se presenta el marco conceptual desde el cual se desarrolla la monografía, este consiste en la realización de un Análisis Didáctico (Lupiañéz y Rico, 2008), el que aporta un método específico de abordar cuestiones didácticas, en tanto abarca un conjunto de conceptos y métodos con uso generalizado en los grupos de investigación de Didáctica de la Matemática. Dicho marco, se sustenta en las reglas generales del análisis, tal y como este se entiende desde la filosofía y la historia del pensamiento; y aborda problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares (Rico, 2013).

En cuanto a los orígenes del Análisis Didáctico, este ha venido desarrollándose desde la antigüedad. Rico (2013), señala que el método de análisis, se desarrolló desde la antigüedad, en la geometría griega bajo la influencia de Platón y Aristóteles. Luego, a comienzos de la Revolución Científica, los trabajos de Descartes utilizaron los conceptos de análisis y síntesis para la discusión de los métodos y de las ideas de la época. Actualmente, el análisis o método de invención o resolución, se completa con la síntesis o método de enseñanza, siendo esto, la vía para enseñar a otras personas, aquellas verdades descubiertas por el procedimiento del análisis. Así, la dimensión transformadora o interpretativa del análisis, viene dada porque cualquier análisis de un enunciado, supone su previa transformación […] por ello, el trabajo consiste en interpretar aquello que buscamos analizar, como parte del proceso de regresión y descomposición (Ibíd, 2013, p. 4).

Las razones por las cuales seleccionamos este marco, tienen directa relación con las bases de nuestro trabajo, el que se inició con un estudio de clases, realizado con base en la problemática planteada y para el cual, ya se habían desarrollado varios de los elementos que Rico (2013) hace parte de su análisis didáctico. Además, los errores y dificultades que incluso el mismo autor propone en relación a la resolución de ecuaciones, corresponden al motor que impulsa y promueve las decisiones tomadas para la elaboración de la unidad didáctica, a partir del aprendizaje significativo de los conceptos, contenidos y estrategias necesarios para ello. Así, podríamos decir que nuestra investigación tiene dos elementos centrales:

- La elaboración de una unidad didáctica.
- El análisis de las limitaciones de aprendizaje.

En coherencia con ello, el análisis didáctico propone converger distintos análisis, como de texto, curricular y de errores y/o dificultades, en un análisis de instrucción que corresponde justamente, al desarrollo de una propuesta didáctica. Es así como dicho análisis, resulta un marco coherente para sustentar nuestra investigación.

Como propuesta metodológica, nuestro marco conceptual se articula a su vez en cuatro tipos de análisis: conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación.
Estos sub-análisis del marco, tiene por objetivo fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, llevándose a cabo a partir de los elementos teóricos que gana el profesor cuando documenta su práctica, es decir, cuando incorpora organizadores del currículum que la fundamenten, siendo organizador, aquel conocimiento que se adopta como componente fundamental para articular el diseño, desarrollo y evaluación del currículum (Hurtado, 2013).

- Análisis Conceptual: se relaciona con los conceptos como componentes de nuestro pensamiento, fundamentales para entender e interpretar procesos mentales y psicológicos como la categorización, inferencias, memoria, etc. Así, este análisis es una herramienta metodológica para controlar la complejidad semántica, seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato teórico adecuado para la investigación educativa (Rico, 2013). Por medio de este, se controla la precisión teórica de los conceptos, examinando cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos, a la vez que contextualiza la definición dentro del área en que se inserta, usando ejemplos, contraejemplos en vez de la definición explícita; y emplea analogías y términos evocativos en vez de pruebas, axiomas y cuantificaciones. Y, además, revisa en profundidad los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sobre sus fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo; y sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje (Ibíd, p. 16).

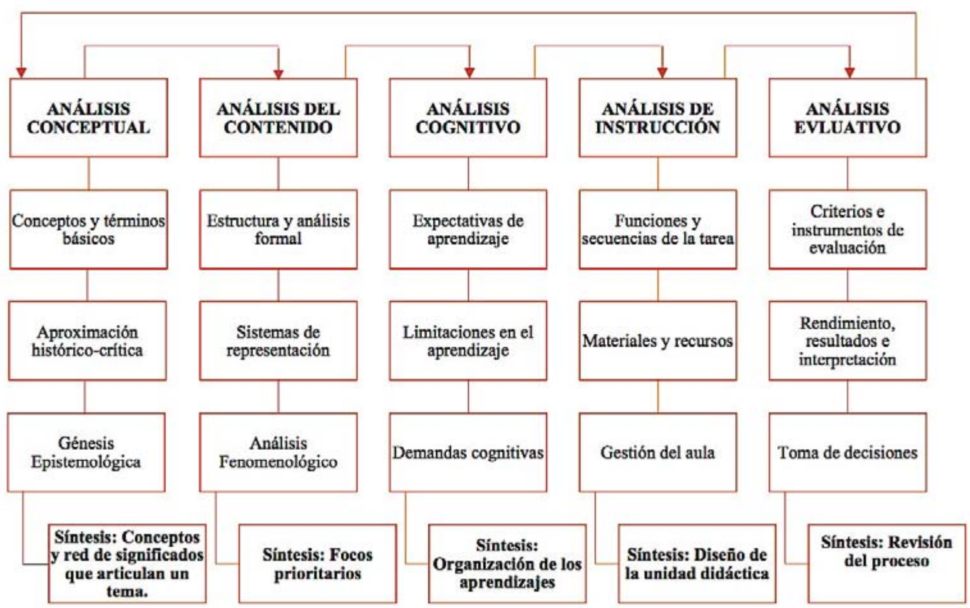
- Análisis de Contenido: corresponde a un método para el procesamiento y revisión de los contenidos de la comunicación, destinado a formular, a partir de ciertos datos, inferencias plausibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto (Krippendorff, 1990). Así, el análisis de contenido tiene por finalidad descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico, además de incorporar la dimensión reductora, descomponiendo el contenido en sus unidades más simples para lo cual utiliza de modo sistemático la determinación de temas y la identificación de categorías, estableciendo y estudiando además, la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (Rico, 2013).

- Análisis Cognitivo: se desarrolla cuando el profesor, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre las matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncia y organiza las capacidades que ellos esperan que desarrollen sus estudiantes sobre un tema específico, analizando también, las contribuciones que realizan esas capacidades al desarrollo de competencias matemáticas globales (Lupiáñez & Rico, 2008).

- Análisis de instrucción: este centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión de aula, al empleo de materiales y recursos; y a los criterios y métodos de evaluación. Cabe destacar que la separación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es analítica, sin embargo, ambos análisis son interdependientes, en tanto la selección de unas expectativas de aprendizaje concretas marcan la orientación de las tareas el profesor pondrá en juego, pero al mismo tiempo, el análisis de una tarea específica puede ampliar ese abanico de expectativas de aprendizaje (Lupiáñez, 2009).

- Análisis de Evaluación: es aquel momento en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta el momento. Así, una vez realizado el análisis de instrucción y que el docente haya observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de: comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula; establecer los logros y deficiencias de la planificación en su puesta en práctica en el aula; caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades y; producir información relevante para una nueva planificación (Gómez, 2005).

A continuación, se presenta un esquema que resume el ciclo del Análisis Didáctico (Rico, 2013).



Es importante mencionar que, para el desarrollo de nuestro trabajo, se desarrollarán los cinco análisis propuestos por Rico (2013), sin embargo, el análisis de evaluación se llevará a cabo a partir una sesión de aprendizaje y con base en las categorías de análisis que se presentarán más adelante.

Respecto de la relación teórico-didáctica, en la creación de la unidad que se encuentra al final del presente informe, se podrá identificar cómo este marco conceptual, se va concretando en las actividades de aprendizaje propuestas. Así, varios de los elementos de nuestra red de contenidos, por ejemplo: igualdad, incógnita, valor desconocido, solución, resolución de problemas, descomposición aditiva, propiedad cancelativa, entre otros.; y también, la definición escolar del concepto de ecuación, están presentes en nuestra planificación.

El sistema de representaciones del objeto ecuación, también puede evidenciarse en nuestra secuencia, en tanto la ecuación se trabaja simultánea y progresivamente, de manera concreta, pictórica y simbólica. Y como ya lo mencionamos, nuestra unidad tiene sus bases tanto en el currículum, como en los textos escolares, considerando qué se espera que aprendan y cómo se pretende que lo hagan.

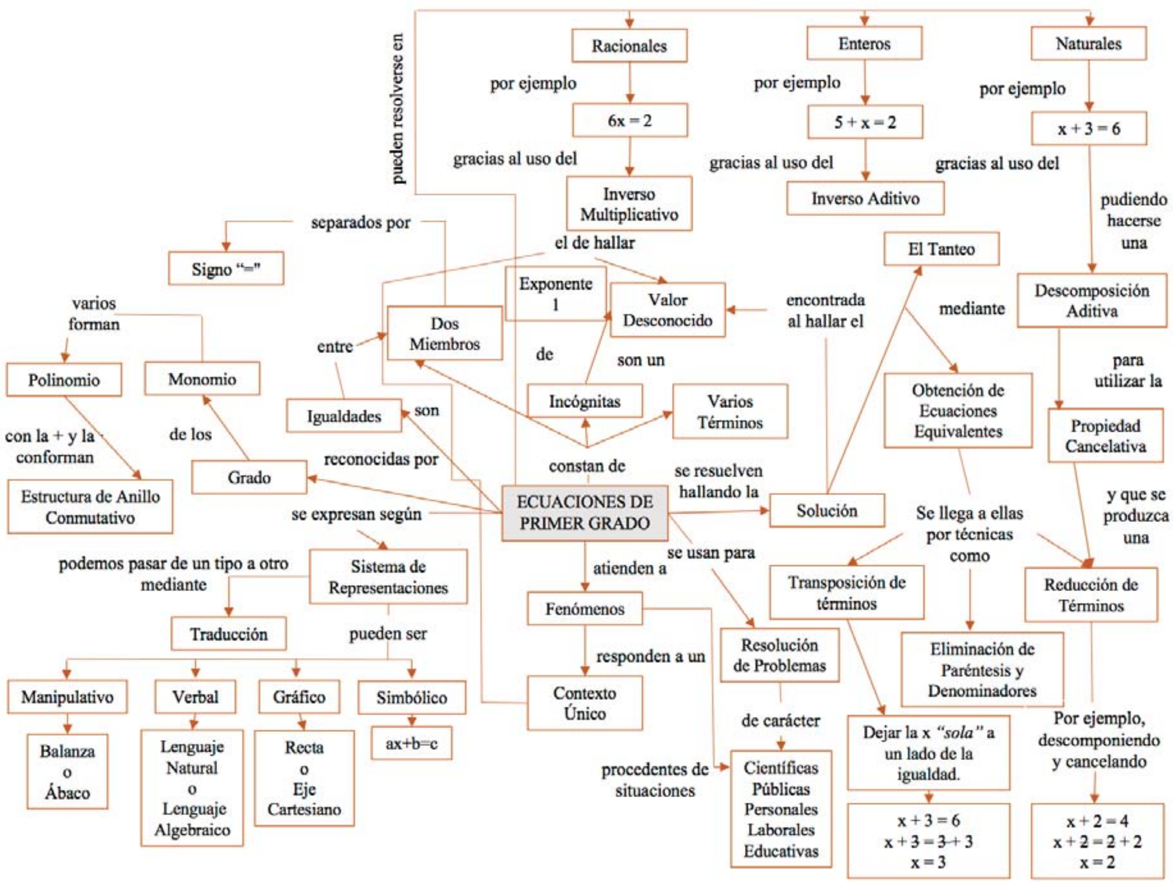
Finamente, se consideran como elemento central, las dificultades y errores que presentan los alumnos, como por ejemplo: los alumnos realizan Inferencias o asociaciones incorrectas, que se originan por la creación de nuevas "reglas" de transposición de términos, a partir de las que ya conocían; también, generan transposiciones indiscriminadas de los términos cuando están resolviendo; y tienen falencias en la comprensión de los conceptos mismos de la ecuación, variable y solución (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Además, los estudiantes tendrían tendencia a interpretar las letras como objetos en sí mismos y no como la representación de un número; también, mantienen una cultura aritmética que perjudica la comprensión de letras o soluciones no numéricas; se les dificulta además, traducir hechos escritos en lenguaje natural al algebraico, involucrando números, letras y símbolos; y finalmente, los docentes abordarían la formación matemática muy apegado a lo algebraico y poco relacionado a la resolución de problemas, lo que podría causar dificultades (Booth, 1984. Citado en Abrate, Pochulu y Vargas, 2006)

ANÁLISIS CONCEPTUAL

En esta sección, se realiza el Análisis Conceptual, que según Rico (2013), corresponde a una herramienta metodológica para controlar la complejidad semántica, seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato teórico, adecuado para la investigación educativa. Por ello, en primer lugar, se elabora una red de contenidos en la que se evidencian todos los elementos que se vinculan con nuestro objeto matemático; en segundo lugar, dicho objeto se define desde un nivel erudito y escolar, para finalmente describir cuál es la distancia que existe entre ambas definiciones.

Red de Contenidos

En esta se articulan los distintos elementos que forman parte tanto del concepto, como de la resolución de las Ecuaciones de Primer Grado. Dicha red, corresponde a una adaptación y complementación de la propuesta de Borja (2012), quien es su trabajo de fin de Máster, realiza un Análisis Didáctico, con el objetivo de disminuir las dificultades respecto a la traducción del lenguaje algebraico y la resolución de problemas.



A modo de resumen, en el esquema anterior, se define a la ecuación de primer grado como una igualdad entre dos miembros separados por un signo igual (=) y que consta de incógnitas cuyo exponente es 1, es decir de un valor desconocido, cuya solución corresponde al valor que satisface a dicha ecuación.

En cuanto a su resolución, esta depende del sistema numérico en el que se esté trabajando, puesto que, entre ellos, difieren las propiedades de adición y multiplicación que permitirían hallar el valor de la incógnita.

Por ejemplo, las ecuaciones $3 + x = 4$ y $2x = 4$, son ecuaciones que pueden ser resueltas en $\mathbb{N}$, siempre y cuando para la adición, se cumpla que si se tiene: $a + x = b$ con $a, b \in \mathbb{N}\ b \geq a$; y en el caso de la multiplicación $ax = b$, debe cumplirse que: b debe ser divisible por a y $b \neq 0$. Para el caso de números enteros $(\mathbb{Z})$, en la adición no existen restricciones como sí las hay en $\mathbb{N}$, siendo posible resolver ecuaciones como $4 + x = 3$. Sin embargo, para la multiplicación, se mantiene como limitación que, si se tiene $ax = b, b$ debe ser divisible por a y $b \neq 0$. Finalmente, en los racionales $(\mathbb{Q})$, tanto para la adición $(ax + b = c)$, como para la multiplicación $(ax = b)$, debe cumplirse que $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$

Finalmente, las ecuaciones de primer grado, además de poder encontrarse en distintos contextos, como el científico y el educativo pueden manifestarse también, a través de distintas representaciones, como la gráfica, simbólica, concreta, entre otros.

Definición Escolar

Por un lado, el actual texto ministerial de la Editorial Santillana, define a la ecuación como:

"Una igualdad entre dos expresiones en las que hay valores desconocidos llamados incógnitas" (Ho, Kee, & Ramakrishnan, 2017, p. 262).

Y por otro, la misma editorial en la licitación privada del año anterior, define al mismo objeto como:

"Una igualdad entre dos expresiones, en las que hay términos desconocidos o incógnitas. Esta igualdad satisface para uno o varios valores de la incógnita, que corresponde a la solución de la ecuación. La incógnita generalmente, se puede simbolizar con una letra" (Ávila, N. & Navarro, F. 2016, p. 160).

Finalmente, nos parece interesante también, señalar que Santillana en su proyecto Casa del Saber de licitación privada, hace cuatro años, definió a la ecuación como:

"Una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se satisface para uno o varios valores de su incógnita. Para resolverla, se debe encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad; este corresponde a la solución de la ecuación" (Ávila, J., Fuenzalida, C., Jiménez, M.J. & Ramírez, P. 2013, p. 148).

Llama la atención, que en ambos textos se indica que uno o varios valores pueden satisfacer la ecuación, sin embargo, en 5º básico no se trabaja con ecuaciones que tengan más de una solución, sino con aquellas que tienen solución única.

Definición Erudita

La ecuación $2x - 2 = x + 3$ puede escribirse como $f(x) = g(x)$ según Klein (1950), tratando a la ecuación, como una igualdad entre dos funciones, ya que a partir de la $2x - 2 = x + 3$, se obtiene $f(x) = 2x - 2$ y $g(x) = x + 3$.

Además, una ecuación siempre tiene solución (Mena, A. 2010), pues existe un axioma de especificación, que genera un nexo entre la lógica y los conjuntos, permitiendo generar un nuevo conjunto a partir de otro predefinido y una condición. Por ejemplo: el conjunto de elementos que satisfacen la ecuación $2x - 2 = x + 3$, es $S = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 2 = x + 3\} = \{5\}$. Así también, la solución obtenida de la ecuación $x - 1 = x + 3$, corresponde al conjunto solución que la satisface: $S = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 = x + 3\} = \emptyset$, es decir, la ecuación tiene solución vacía. En el caso de esta última ecuación, es importante mencionar que, aún sin resolverla, podría concluirse que tiene solución vacía, ya que no es posible que algo al que se le quita $(x - 1)$, sea igual a algo que se le agrega $(x + 3)$.

Distancia entre Definiciones

Tanto en la definición escolar, como la erudita, tratan la ecuación como una igualdad, sin embargo, los textos la reducen a la igualdad entre dos expresiones, desconociendo qué o cómo son por ejemplo si son solo números, números y letras, funciones como lo define Klein (1950) u otro tipo de símbolo. En cambio, Klein (1950), define que esta igualdad es específicamente de funciones. En el caso de $ax - b = x + c$, se obtiene la siguiente las siguientes funciones: $f(x) = ax - b$ y $g(x) = x + c$, pudiendo escribirse la ecuación como: $f(x) = g(x)$.

En cuanto a la concepción que se da de solución, los textos escolares asumen que la solución de una ecuación un número, lo que como se señaló anteriormente no necesariamente es así, ya que ésta puede ser vacía ($\emptyset$). Finalmente, se entiende desde los textos, que una ecuación es una igualdad que se satisface – siempre - para uno o varios valores, los que nos lleva a preguntarnos: ¿si la ecuación tiene solución vacía, no es una ecuación? La respuesta a esta pregunta es simple, claro que sigue siendo una ecuación, tal y como lo mostramos en el párrafo anterior.

Análisis Histórico-Epistemológico

A continuación, se hará un análisis histórico epistemológico del objeto ecuación. Para ello, tendremos a la base, la definición que Jaramillo (2013) hace del concepto epistemología, definiéndolo como un recorrido por la historia del sujeto respecto a la construcción del conocimiento científico.

La Evolución de la Ecuación

Papiro de Ahmes o Ring (1650 a.c)

Álgebra elemental para resolver problemas cotidianos.

Civilización Mesopotámica (600 a.c – 2350 a.c)

Resolución verbal de ecuaciones de primer y segundo grado, cúbicas y bicuadráticas sin reconocer números negativos.

Euclides (325-275 a.c)

Resolución verbal de ecuaciones de primer y segundo grado, cúbicas y bicuadráticas sin reconocer números negativos.

Diofanto de Alejandría (214-298 a.c)

Abreviaturas de ecuaciones y soluciones no geométricas de ecuaciones de primer grado con hasta tres incógnitas y ecuaciones de segundo y tercer grado con números negativos.

Brahmagupta (598-670 a-c)

Notaciones algebraicas para ecuaciones cuadráticas e indeterminadas. Solución general de la ecuación lineal ($ax + by = c$ con a, b, c enteros) y estudio de la ecuación diofántica cuadrática ($x^2 = 1 + py^2$).

Mohammed Ibn-Musa Al - Jwarismi (780-d.c)

Álgebra retórica. Expone más directa y elementalmente la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Bhaskara (1114-1185)

Retoma ecuación diofántica. Observaciones sobre ecuaciones lineales y cuadráticas (determinadas e indeterminadas), medidas de área, progresiones aritméticas y geométricas; y raíces.

Leonardo de Pisa (1170-1240)

Tratamiento de la ecuación cúbica y aproximación a una raíz irracional.

Luca Paccioli (1145-1517)

Solución a casos particulares de la ecuación $x^4 + px = q$ sin demostración clara.

Scipione del Ferro (1465-1526)

Solución general de la ecuación cúbica.

Gerolamo Cardano (1501-1575)

Resolución de la ecuación general de tercer grado $x^4 + px^3 + qx = r$. Llamó ecuaciones irreductibles a aquellas con radicandos negativos, publica en su obra Artis Magna un método para resolverla y la solución de la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$.

Rafael Bombelli (1526-1572)

Álgebra formal para el trabajo con $a + b\sqrt{-1}$ dando soluciones reales y aceptando la existencia de $\sqrt{-1}$ como un número.

Francoise Viete (1540-1603)

Transición del álgebra retórica a la simbólica introduciendo el uso de letras del alfabeto.

René Descartes (1595-1603)

Intenta liberar a la geometría del uso de figuras a partir del uso de métodos algebraicos.

Leonhard Euler (1707-1855)

Resolución de problemas geométrica mediante sistema de coordenadas, trabajando la ecuación curva y la ecuación de la recta.

Évariste Galois (1811-1832)

Demuestra que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. Así, sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, tiene que tener al menos una raíz compleja, demostrando que un polinomio cualquiera se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Una ecuación algebraica irreductible, es soluble por radicales, sí y solo sí, el grupo simétrico del conjunto de sus raíces es soluble. Proporciona un algoritmo para calcular las raíces de una ecuación, cuando estas son expresables por radicales. Así, la comparación del cuerpo generado por los coeficientes, con el cuerpo generado por las soluciones de la ecuación, permite decidir si las soluciones pueden expresarse en términos de sumas, productos o raíces n-ésimas de los coeficientes de la ecuación; los Cuerpos de Galois, constituyen la estructura dentro de la que se pueden resolver muchas ecuaciones.

ANÁLISIS DE CONTENIDO

A continuación, se realiza el Análisis de Contenido, con la finalidad de descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico. De esta manera, se describirá el sistema de representaciones dentro del cual puede trabajarse el objeto ecuación, y luego, se llevará a cabo un análisis fenomenológico, que tiene por objetivo evidenciar algunos contextos en los que, de alguna manera, nuestro objeto cobra vida y sentido

Sistema de Representaciones

En la red de contenidos se describe una ecuación de primer grado, que puede expresarse a partir de distintas representaciones, que corresponden a las diferentes formas mediante las cuales se puede representar un concepto y sus relaciones con otros (Rey, 2012). A continuación, se presenta la ecuación $x+3=6$, a partir de un problema escrito en lenguaje verbal, luego en registro simbólico, con material manipulativo y finalmente, en registro gráfico.

Registro Verbal

La representación verbal de una ecuación, corresponde a la forma en que cotidianamente nos referimos a una ecuación y por lo mismo, se utiliza para la resolución de problemas por medio de ecuaciones. Por ejemplo: *"Daniela tenía 3 chocolates y su hermana le regaló unos cuantos más, con los que completó un total de 6 estudiantes ¿cuántos chocolates le regalaron a Daniela?".* Este problema escrito en lenguaje natural, puede resolverse a partir del paso de dicha representación verbal, a la representación simbólica de la ecuación de la siguiente manera: $x+3=6$. Al resolver esta ecuación, se obtiene que $x=3$ y por tanto se concluye que, Daniela recibió 3 chocolates de regalo.

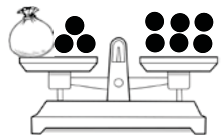
Registro Simbólico

Este tipo de representación según Ortega (2012), trata de expresar una ecuación por medio de una combinación de letras y números; y de una igualdad entre ellos. Esto es de la siguiente manera: $ax+b=cx+d$. En esta igualdad, las letras a, b, c, d son valores conocidos, y la letra x, es la incógnita de la cual se quiere conocer el valor. Así entonces, $\square+3=6$ es una ecuación escrita de manera simbólica y en ella se reconocen: el primer miembro $(x+3)$, segundo miembro (6), los términos $(x, 3, 6)$ y la incógnita (x), cuyo valor corresponde a la solución de la ecuación.

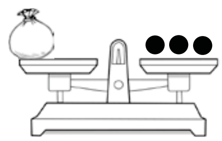
Material Manipulativo

El uso de material manipulativo, se utiliza generalmente en los niveles iniciales de enseñanza, según el currículum chileno desde 1º básico. Su uso corresponde a una vía de introducción por parte de los estudiantes a las ecuaciones, que permite asociar de manera concreta, sus elementos, con los de una ecuación escrita simbólica, lo que también simplificaría la comprensión y visualización de los procedimientos implicados para su resolución. Por ejemplo, la balanza.

Según Ortega (2012), la balanza es un instrumento que permite comprender el concepto de equivalencia entre dos ecuaciones. En el caso de $x + 3 = 6$, se puede representar cada miembro en un platillo diferente.

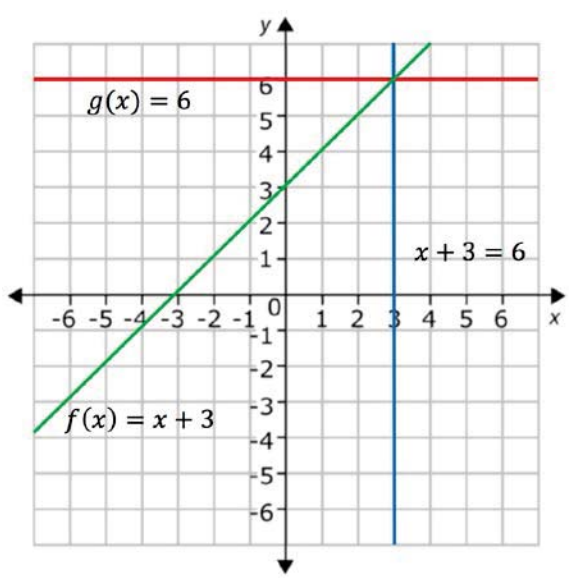


Luego, quitando la misma cantidad de bolas en cada lado de la balanza (3) para mantener su equilibrio, se obtiene el valor de la bolsa, que corresponde a la incógnita. Es decir, $x = 3$.



Representación Gráfica

Este tipo de representación, corresponde a la manifestación de la ecuación de primer grado en el plano cartesiano, la que corresponde a una recta. En este caso, nos parece pertinente retomar la definición erudita de ecuación, planteada en nuestro análisis conceptual. En ella se define a la ecuación, como una igualdad de funciones, las que están definidas en la representación gráfica. Así, la ecuación $x + 3 = 6$, puede escribirse como $f(x) = g(x)$, ya que $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 6$. El valor de x, corresponde entonces, a la intersección de la recta paralela al eje de las ordenadas, que surge de la intersección de las rectas que representan ambas funciones, con el eje de las abscisas.

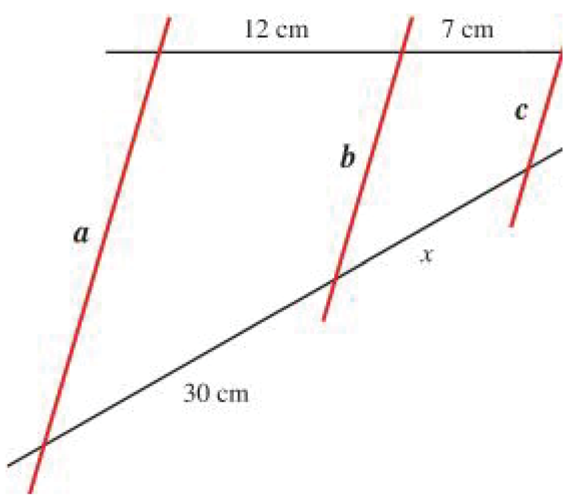


Análisis Fenomenológico

Según Rico (2013), la fenomenología aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y aplican, dotando de sentido a los contenidos en estudio. Este análisis entonces, trata de describir los fenómenos que nos encontramos en la vida cotidiana y su relación con los conceptos, procedimientos y propiedades de un tema de matemáticas, tratando de establecer una relación entre una estructura de matemáticas y los fenómenos asociados a ella (Ortega, 2012, p. 12).

A continuación, se presentan cinco diversos contextos en los que se puede identificar una ecuación, en tanto según Rincón (2007), el aprendizaje de un concepto matemático es más fácil si se basan en el contexto de la vida real en que se presentan o en situaciones que dan sentido.

Tabla 1: Análisis Fenomenológico

Área	Ejemplo
Física	*Un automóvil se demora en recorrer del punto A al B, 15 minutos y va a una velocidad de 3 km/hr. ¿Cuál es la distancia que hay desde el punto A al B?* Para resolver este problema, podemos plantear la siguiente ecuación: $$3 = \frac{x}{15}$$ Al resolverla, obtenemos $x = 45$, por lo que el automóvil recorre una distancia de 45 kilómetros.
Geometría	En la siguiente configuración, las rectas a, b, c y d son paralelas. Se pide calcular el valor de x. El teorema de Thales, nos lleva a resolver la ecuación $\frac{7}{12} = \frac{x}{30}$, cuya solución es $x = 17{,}5$.  Ya que, si dos rectas concurrentes son cortadas por dos o más rectas paralelas como a, b, c, d en este caso, los segmentos que estas determinan sobre aquellas, son proporcionales.

Estadística	Juan, para participar en las olimpiadas de matemáticas, necesita tener un 6,5 de promedio en esta asignatura. Este promedio se calcula con cuatro notas y él, hasta ahora tiene un 7,0; 6,4 y 6,2 ¿qué nota debería sacarse como mínimo para poder ir a las olimpiadas? Para hallar el valor de la nota que desconocemos, se plantea la ecuación: $$64 = \frac{70 + 62 + 64 + x}{4}$$ La solución es $x = 6{,}0$, es decir, Juan necesita sacarse un 6,0 como cuarta nota.
Química	Se sabe que cierta cantidad de un componente *A*, recién reaccionará cuando se mezcla con 50 ml de un reactivo *B*. Se sabe que 12,5 ml del reactivo *B*, reaccionan con 25 ml del componente *A* ¿Cuánto del componente A debemos mezclar con 50 ml del reactivo *B* para que este reaccione? La ecuación que podemos proponer es $12{,}5 = \frac{25 \cdot 50}{x}$. Por tanto, concluimos que son 100 ml del componente *A*, los que reaccionarán con 50 ml del reactivo *B*.

ANÁLISIS COGNITIVO

En esta sección, se llevará a cabo el Análisis Cognitivo de nuestra investigación, el que según Rico (2013), trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un objeto. En coherencia con ello, primero se realizará un análisis curricular, luego un análisis de texto, posteriormente se describirán las principales dificultades que presentan los estudiantes en el tratamiento del objeto en cuestión; y finalmente, se describirán los objetivos que pretendemos logren nuestros estudiantes a partir del análisis instruccional.
Análisis Curricular

Análisis Curricular

A continuación, se realizará un barrido curricular, que tiene por objetivo describir el tratamiento que se le da al objeto ecuación desde 1º a 8º básico. Respecto al nuestro marco conceptual, Rico (2013) señala que una reflexión curricular, resulta fundamental para diseñar tareas y elaborar textos de matemáticas escolares y, además, le permite al profesor adquirir, conocimientos y capacidades, tanto para diseñar, como para evaluar. En el Anexo 1, se podrá encontrar un cuadro con los objetivos de aprendizaje y los indicadores de evaluación presentes en el currículum y que se encuentran en directa relación, tanto con el concepto, como con la resolución de ecuaciones, lo que se constituyó como insumo para el siguiente análisis.

1º Básico

- Concepto de ecuación implícito en tareas relacionadas con igualdad y desigualdad; equilibrio y desequilibrio. Los estudiantes deben ordenar números y resolver problemas utilizando material concreto (balanza) y el signo igual (=).

2º Básico

- Se agrega el uso de los símbolos > y < para determinar desigualdades, incorporando el registro simbólico para realizar comparaciones.

3º Básico

- Resuelven ecuaciones de un paso, representando la incógnita con figuras geométricas. Las estrategias que se proponen son ensayo y error; y uso de la operación inversa. El campo numérico se extiende a 100.

4º Básico

- Se mantiene el campo numérico, se promueve la modelación, la comprobación simbólica y el uso de la operación inversa.

5º Básico

- Ahora los estudiantes expresan un problema mediante una ecuación o crean un problema a partir de una ecuación dada. Obtienen ecuaciones mediante situaciones y explican las estrategias que utilizan para su resolución.

6º Básico

- Se introduce el uso del lenguaje algebraico, generalizando algunas fórmulas, propiedades, relaciones y patrones a través de ecuaciones, promoviendo la estrategia de descomposición aditiva y multiplicativa; además de sumar o restar los mismos números a ambos lados de la igualdad.

7º Básico

- Retoman el uso del lenguaje algebraico, relacionándolo con frases escritas en lenguaje natural. Las ecuaciones que se resuelven ya no son solo de la forma $ax = b$, sino también $\frac{x}{a} = b$, para lo cual, utilizan el inverso multiplicativo de a. Y se incorpora la representación de la solución por medio de la recta numérica.

8º Básico

- Ahora las ecuaciones que se modelan y resuelven ya no son $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b$, sino que también como $ax + b = c$; $\frac{x}{a} + b = c$; $ax = b + cx$; $a(x + b) = c$ y $ax + b = cx + d$.

A modo de resumen, las ecuaciones se incorporan de manera progresiva al proceso de enseñanza y aprendizaje, incluso, los alumnos trabajan con ecuaciones sin saber que lo están haciendo. Las estrategas de resolución se *simplifican* a medida que los alumnos conocen diferentes sistemas numéricos, lo que les aporta herramientas para ajustarlas. El lenguaje algebraico se integra también lentamente, puesto que las incógnitas no siempre se expresan a través de letras. Finalmente, las ecuaciones que resuelven los estudiantes también se van complejizando, en coherencia con la conformación gradual del conocimiento de los estudiantes en otras áreas, que es justamente lo que les permitiría enfrentarse con *éxito* a nuevas ecuaciones. Sin embargo, es relevante mencionar, que si bien las ecuaciones pueden resultar *menos simples* – por decirlo de alguna manera – a medida que se conocen nuevos conjuntos numéricos, tal como lo mencionamos en el apartado de red de contenidos, disminuyen las restricciones que existen en cada uno de ellos. Así, cuando se llega al conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$), al ser un cuerpo, ya no existen estas restricciones.

Análisis de Texto

A continuación, se realizará análisis de texto que tiene por objetivo evidenciar y describir el tratamiento que se le da al objeto ecuación en cuatro diferentes textos escolares de 5º básico, uno de ellos ministerial y tres de licitación privada. En el Anexo 2, se podrá encontrar un cuadro resumen y comparativo sobre algunos elementos relacionados con el concepto y la resolución de ecuaciones.

En relación al concepto de igualdad, en los cuatro textos se define como, dos expresiones que representan lo mismo. Algunos de ellos, lo hacen a través de las propiedades de la adición y la sustracción; y otros, agregan a esto, las propiedades de la multiplicación y la división. Además, con el objetivo de definir el concepto, este se contrapone – en la mayoría de los casos – al concepto de desigualdad, es decir cuando dos expresiones no representan lo mismo.

Respecto al lenguaje algebraico, en dos de los cuatro textos se define de manera explícita, como una forma de representar con símbolos que generalmente son letras, una determinada expresión algebraica, ejemplificándolo muchas veces, con ecuaciones del tipo $ax = b$. Si bien en un texto no se define lenguaje algebraico ni expresión algebraica, los estudiantes igualmente deben relacionar enunciados escritos en leguaje natural, con la ecuación que lo representa.

Además, aquellos textos en los que se define lenguaje algebraico, proponen tareas de valorización de expresiones algebraicas, las que corresponden a determinar el valor numérico de una expresión, por ejemplo, se pide determinar el valor de: "$3x + 5$ con $x = 2$".

En cuanto a la comparación de diferentes expresiones, los cuatro textos proponen ejercicios al respecto. Dos de ellos lo hacen antes de introducir el concepto de igualdad a partir del uso de los símbolos =, > y <. Uno de los textos, utiliza la balanza, para completar la definición del concepto de igualdad, y se observa en otro, que la comparación de expresiones se realiza a modo de introducir las inecuaciones, utilizando también los símbolos =, > y <.

Solo uno de los textos presenta ejercicios relacionados con la reducción de expresiones algebraicas, en las que los estudiantes se enfrentan a cintas fraccionadas en la que cada parte equivale a x - por ejemplo – y si la cinta tiene cuatro partes, entonces la expresión se reduce a $4x$.

Los cuatro textos definen a la ecuación de manera formal como una igualdad entre dos expresiones algebraicas y en dos de ellos se indica que el valor de la incógnita que satisface a la ecuación, corresponde a la solución.

Respecto a la resolución de ecuaciones, los textos proponen la estrategia de utilizar la operación inversa en ambos lados de la igualdad, haciéndolo inicialmente a partir de la balanza. Por ejemplo: $x + 5 = 7 \rightarrow x + 5 - 5 = 7 - 5 \rightarrow x = 2$.

Sin embargo, uno de ellos da como estrategia, el dar un valor aleatorio a la incógnita; y cuando se trate de ecuaciones como $2x = 4$, dividir por 2 a ambos lados de la igualdad. Además, se propone amplificar una ecuación para igualar denominadores, por ejemplo, en la ecuación $\frac{z}{3} = \frac{10}{15}$, la fracción $\frac{z}{3}$ se amplifica por 5, obteniendo la ecuación $\frac{5z}{15} = \frac{10}{15}$ y como los dos denominadores son iguales, se puede resolver $5z = 10$, cuya solución es $z = 2$.

Todos los textos proponen resolver problemas por medio de ecuaciones y todos sugieren para ello, el uso de la balanza. Sin embargo, solo en dos de ellos se explicita una estrategia puntual que permite resolver estos problemas ("Para plantear ecuaciones que representen una situación problema es necesario identificar la incógnita del problema, y los datos que permitan comprender mejor la operación involucrada en la situación").

Finalmente, los cuatro textos proponen comprobar la resolución de una ecuación a partir del reemplazo del valor obtenido de la incógnita en la ecuación.

A modo de resumen, el tratamiento que estos textos dan al concepto y a la resolución de ecuaciones, se relaciona con los siguientes elementos: definición de igualdad, definición de lenguaje algebraico y expresiones algebraicas, valorización de expresiones algebraicas, comparación de expresiones a través de símbolos (=, <, >), definición de ecuación, estrategias de resolución de ecuaciones y resolución de ecuaciones a través de problemas. Y el uso de la balanza de forma concreta o pictórica está presente en todos ellos, tanto para introducir el concepto de equilibrio (igualdad), como para evidenciar el procedimiento que permite hallar el valor de la incógnita, dando paso a la comprobación.

Limitaciones del Aprendizaje

Conocer las limitaciones en el aprendizaje de los estudiantes, resulta fundamental en relación con los orígenes de nuestra investigación (estudio de clase), en tanto, se debió reflexionar y discutir sobre las evidencias reunidas sobre la clase, utilizándolas para mejorar la lección, la unidad de aprendizaje y la enseñanza (Estrella, Morales y Olfos, 2015, p. 3). En coherencia con ello, consideramos que las dificultades y errores cometidos por los alumnos, deben ser los elementos que estén a la base al momento de analizar la sesión implementada, y que guíen la conformación de nuestro análisis instruccional.

Por un lado, las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, son definidas por Abrate, Puchulu y Vargas (2006) como un conflicto cognitivo para lograr el progreso en el aprendizaje y, además, son potencialmente generadoras de errores. Los mismos autores realizan la siguiente clasificación de dificultades en el aprendizaje de la matemática (Ibíd, 2006, p.31) asociadas a:

- La complejidad de los objetos matemáticos: tiene relación con la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, que podría surgir de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos, ya que muchas veces se cometen abusos como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía y, sin embargo, el lenguaje matemático es preciso, está sometido a reglas exactos y comunica su significado por la interpretación exacta de sus signos.

- Los procesos de pensamiento matemático: se relaciona con la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo esta incapacidad una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje. Abandonar ciertas demostraciones no debe implicar el abandono del pensamiento lógico, sin contraponer métodos intuitivos, conjeturas, ejemplos o contraejemplos.

- Los procesos de enseñanza: surgen en relación con la institución, el currículum y los métodos de enseñanza. La organización del currículum debe disminuir posibles errores y dificultades, al igual que los métodos de enseñanza, los que deben estar en coherencia con los elementos organizativos e la institución y del currículum.

- Al desarrollo cognitivo de los alumnos: se deben conocer los estadios de desarrollo intelectual de los estudiantes, representados por una forma características de razonamiento y por tareas específicas de matemática que los estudiantes son capaces de realizar.

- Las actitudes afectivas y emocionales: actitudes negativas y emocionales hacia la matemática están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por terminar una tarea, el miedo al fracaso o a la equivocación, generan bloqueos afectivos que perjudican la actividad matemática.

Además de esta clasificación de dificultades, los autores describen algunos de los errores que más frecuentemente cometen los estudiantes cuando resuelven ecuaciones (Ibíd, 2006, p. 114).

- Un primer error surge de inferencias o asociaciones incorrectas, las que se originan por la creación de nuevas *“reglas”* de transposición de términos, a partir de las ya conocían. Por ejemplo, los estudiantes en general, apelan por despejar la x en un lado de la igualdad y operan los números para ello. En el caso de la ecuación $2 + \frac{x}{3} = 6$, los estudiantes aplican la operación inversa, multiplicando $6 \cdot 3$, ya que el 3 está dividiendo, olvidando multiplicar el 2 por el 3.

- Desde lo anterior, se afirma que los estudiantes transponen indiscriminadamente los términos para dejar sola a la x a un lado de la igualdad, no teniendo en cuenta las jerarquías de las operaciones y sin realizar un análisis retrospectivo de la solución a la que habrían llegado.

- Los alumnos tienden a sobrecargar la memoria con muchas reglas, las que aplican mecánicamente sin comprenderlas (“si está multiplicando hay que pasarlo dividiendo”, “si está sumando se pasa restando”, “si está como potencia se pasa como raíz”). Por ejemplo, en la ecuación $2x + 4 = 12$, dividen el 12 por el 2 y luego restan 4 al 6, obteniendo como solución $x = 2$, sin embargo, $2x + 4 = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

- Falencias en la comprensión de los conceptos mismos de ecuación, variable y solución.

Booth (1984) citado en Abrate, Puchulu y Vargas (2006), señala que una parte de estas dificultades podrían deberse a estrategias de enseñanza inadecuadas; y otra, por factores cognitivos de desarrollo. El autor agrega también a la lista, las siguientes dificultades.

- Hay una tendencia de los alumnos a interpretar las letras como objetos en sí mismos y no como la representación de números; y cuando lo hace, la interpreta como un número desconocido (incógnita), lo que no le permitiría aceptar que dicha letra puede tomar cualquier valor, es decir, a la letra como una variable.

- Abordar la formación matemática del estudiante muy apegado a lo algebraico y poco relacionado con la resolución de problemas, puede acarrear dificultades y errores futuros. Por ejemplo, puede que no existan dificultades en resolver $x + 3 = 6$, pero sí cuando se les presenta el problema: *“Daniela tenía 3 chocolates y su hermana le regaló unos cuantos más, con los que completó un total de 6 estudiantes ¿cuántos chocolates le regalaron a*

Daniela?" Esto, ya que podrían no reconocer la incógnita, la operación involucrada o los datos necesarios para hallar el valor pedido.

- Mantener una cultura aritmética, lleva a los estudiantes, por ejemplo, a reducir a un resultado numérico, sin variables, al valor de x, ya que el signo igual (=), desde los primeros años está asociado a un resultado concreto.

- Dificultades para traducir hechos matemáticos descritos en lenguaje natural, a otro más formal mediante expresiones que vinculaban números con letras, debido a una introducción formalista, abstracta y descontextualizada del álgebra, al presentarles problemas poco realistas o alejados de la propia experiencia.

Por otro lado, el error es definido por Rico (1995) en González (2015), como la manifestación patente de una dificultad o una consecuencia de ella. Además, Rico (1995) en Abrate, Puchulu y Vargas (2006), señala que existen cuatro vías por las que puede presentarse un error como:

- El resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
- El resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado.
- La utilización de procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas.
- La invención de propios métodos no formales por parte de los estudiantes.

A lo anterior, se agrega una clasificación de errores que realiza Rico (1995), citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2003), respecto a aprendizaje de las matemáticas, estos corresponden a errores relacionados con:

- El lenguaje: se deben al mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje.

- Obtener información espacial: dificultad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales y también errores por en la producción de representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas.

- Un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: son errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas.

- Asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado, en general, a causa de la incapacidad del pensamiento para adaptarse a nuevas situaciones.

- La aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Y finalmente Booth (1984) citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2003), realiza una clasificación de errores relacionados directamente con el álgebra y que se atribuyen a:

- La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras: son fundamentales para saber cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados, lo que, a su vez, permitirá la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra.

- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra: muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige una solución única y numérica.

- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes: los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción.

- El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”: los estudiantes usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida o la adaptan incorrectamente a una nueva situación. Es decir, provienen de falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números, pudiendo ser mal uso de la propiedad distributiva, de recíprocos, de la cancelación y de métodos informales.

Así entonces, los errores y dificultades enfrentadas por los estudiantes respecto de las ecuaciones son diversas y provienen de distintos factores, que incluso – aparentemente – no tendrían directa relación con las ecuaciones. La organización curricular e institucional son decimos a la hora de prevenir su aparición, al igual que los conocimientos previos que han adquirido los alumnos.

Expectativas

A continuación, se presenta un esquema que representa las hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática, cuando se enfrentan a las tareas que compondrá la actividad de enseñanza y aprendizaje (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 41)

"Resolver ecuaciones de primer grado, a través de la balanza"

- Identifican la balanza como una representación concreta de la ecuación.
- Relacionan los elementos de la balanza, con los de su representación algebraicas (ecuación).
- Resuelven una ecuación a partir de la balanza.

"Resolver ecuaciones de primer grado mediante 3 estrategias** (Descomposición/Cancelación, operación inversa y pregunta), **mientras arman un dominó de ecuaciones"

- Resuelven diversas ecuaciones.
- Reconocen y comprenden estrategias de resolución.
- Identifican errores presentes en la resolución de ecuaciones.

"Proponer y resolver la ecuación que permite dar solución al problema"

- Identifican la incógnita de un problema.
- Proponen una ecuación.
- Argumentan sobre la estrategia para plantear la ecuación.
- Resuelven la ecuación
- Comprueban la solución de la ecuación.

De esta manera, se espera que los estudiantes, luego de haber relacionado los elementos presentes en una representación concreta de la ecuación, con su representación simbólica; sean capaces de resolver una ecuación descomponiendo aditivamente y utilizando la propiedad cancelativa, apoyándose del uso de la balanza. Esto permitiría a los alumnos, resolver ecuaciones de manera simbólica, hallando el valor de x, además de ampliar su espectro de estrategias de resolución lo que, a su vez, permitirá que sean capaces de reconocer en la resolución de otro, un posible error o dificultad, identificando y argumentando cómo sobreponerse a él. Finalmente, una vez que el estudiante ha comprendido y significado los elementos de una ecuación, han resuelto y tiene una gama más amplia de estrategias, se espera que sea capaz de resolver un problema para lo cual, debe plantear y resolver una ecuación.

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El este apartado, corresponde presentar el análisis de instrucción, el que como ya mencionamos, se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad. Según Rico (2013), en esta sección también se evidencian aspectos relativos a la gestión de aula, al empleo de materiales y recursos; y a los criterios y métodos de evaluación.

En el Anexo 3, se presenta la clase del estudio de clases, que corresponde a la segunda implementación de dicho diseño metodológico, y por ello, fue modificada una vez previamente, respecto a los resultados obtenidos. En dicha planificación, se incorpora el análisis a priori, en el que se explicitan las respuestas expertas, las posibles dificultades y/o errores con sus correspondientes devoluciones y un apartado de evaluación. Este formato es retomado en las conclusiones, ya que creemos, influyó en los resultados obtenidos y por lo mismo, se modifica considerablemente para la elaboración del monográfico. Finalmente, se expone la tarea propuesta como recurso de aprendizaje.

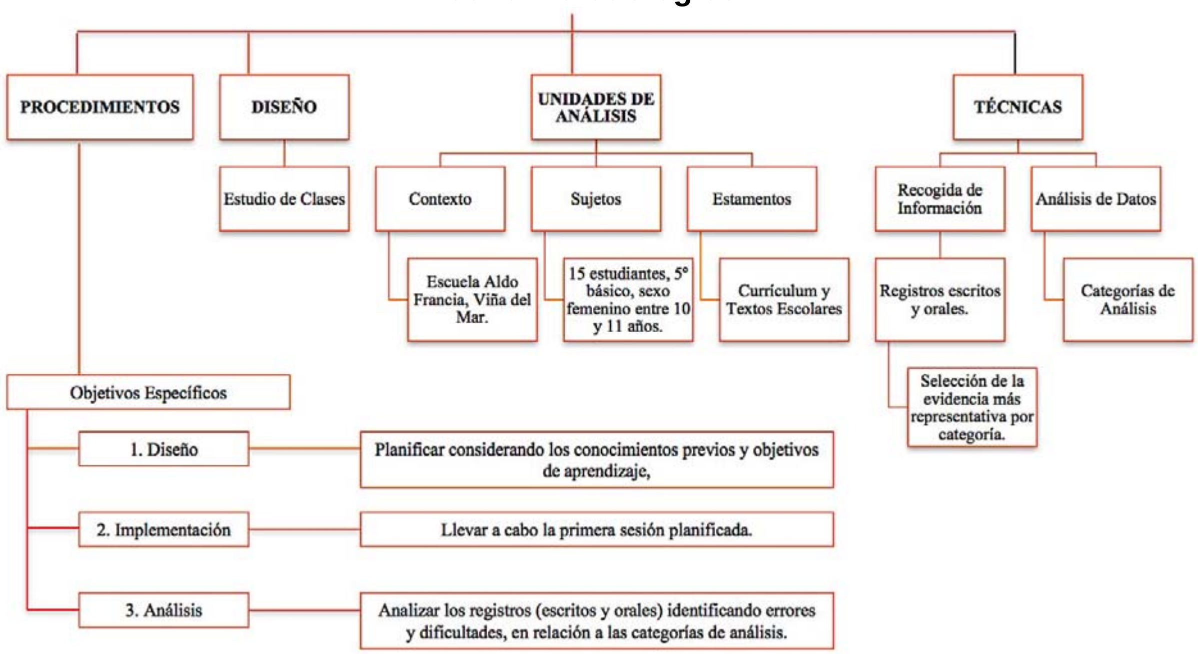
ANÁLISIS EVALUATIVO

En este momento según Gómez (2005), el docente determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pudieron haber manifestado.

Para el logro de dicha evaluación, en este apartado se propone el diseño metodológico dispuesto para el análisis, en el que se explicita el paradigma, el diseño, las unidades de análisis, las técnicas, los procedimientos y las categorías que permiten identificar específicamente, cuáles son los errores y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones de primer grado. Luego, se elabora un análisis de resultados, para finalmente generar una discusión al respecto.

Es partir de estos últimos dos elementos, que se elabora el monográfico como propuesta didáctica para el trabajo de las ecuaciones.

Diseño Metodológico



Categorías de Análisis

A continuación, se darán a conocer las categorías de análisis, a partir de las cuales se analizará la clase implementada. Respecto a la operacionalización del marco conceptual, en relación al surgimiento de estas categorías, se hizo una focalización en el análisis cognitivo, más específicamente en las limitaciones del aprendizaje que Rico (2013) propone en el contexto de la realización de un Análisis Didáctico.

En coherencia con lo anterior, se describieron algunos errores y dificultades que se encuentran registrados en la literatura (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Booth, 1984; Rico, 1995; González, 2015; y Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2003) para a partir de ahí, se consideraron aquellos que están relacionados más directamente con nuestro objeto matemático. Posteriormente, estas se adaptaron a lo que refiere específicamente la tarea que se le propone a los estudiantes. Por ello, las categorías de análisis corresponden a categorías establecidas de manera a priori, con base a la evidencia recogida en diversas investigaciones, en donde se clasifican distintos errores y dificultades, asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado

Tabla 4: Categorías de Análisis. Errores y dificultades en la resolución de ecuaciones de primer grado (C=Categoría – SC=Subcategoría)

	Categoría	Descripción
C_1	Procesos de Pensamiento Matemático.	Los estudiantes manifiestan dificultades cuando deben explicar y argumentar el procedimiento matemático realizado en la resolución de una ecuación.
C_2	Cultura Aritmética Imperante.	Cuando los alumnos resuelven una ecuación, ya sea a partir de una representación pictórica (balanza) o simbólicamente, omiten la existencia de símbolos algebraicos como la x o la incógnita.
C_3	Desarticulación de Conocimientos Previos.	Los estudiantes no dominan las herramientas (conceptuales ni procedimentales) para resolver ecuaciones de primer grado a partir del uso de la balanza. Estos conocimientos y/o habilidades, debieron haber sido trabajadas según el currículum nacional, en niveles de educación anteriores al que se encuentran los alumnos.
C_4	Uno inapropiado de normas o reglas de procedimiento.	Usan inadecuadamente una fórmula o regla de resolución, por ejemplo: generalizaciones erradas o inadecuadas como *“si está sumando, se pasa restando o si está multiplicando, se pasa dividendo”*. Estas reglas provenientes de falsas generalizaciones, son adaptadas por el alumno a nuevas situaciones, en las que, a pesar de ser inadecuadas, puede o no, concluir en resultados correctos o incorrectos.
C_5	Disociación de Registro	Los estudiantes tienen dificultades para asociar los elementos presentes en una balanza, con aquellos que están en una ecuación escrita algebraicamente. Por

	Pictórico y Simbólico	ejemplo, no relacionan la bolsa presente en la balanza, con la x en la ecuación.		
C_6	Comprensión no Significativa de los Elementos Algebraicos	SC_1	Ausencia de Reflexión ante la Solución	Los alumnos cometen errores en la resolución de ecuaciones, dando valores a la incógnita que, lógica y contextualmente no son posibles, ya que no realizan un análisis retrospectivo de la solución obtenida. Por ejemplo, cuando hay una x en la ecuación, los estudiantes afirman que $x = 1$. Luego en la resolución obtienen que $x = 3$, sin advertir que 1 no es igual a 3.
		SC_2	Yuxtaposición entre naturaleza y significado de los símbolos y letras	En el proceso de resolución, los estudiantes atribuyen un valor numérico o no numérico de manera aleatoria a la incógnita (simbólica o pictórica), interpretando las letras como objetos en sí mismos (Por ejemplo: si hay una x, entonces equivale a 1) y no como la representación de una variable que puede tomar cualquier valor.
		SC_3	Escasa Comprensión Conceptual	Los estudiantes manifiestan dificultades en la comprensión de conceptos como ecuación, variable, solución, incógnita, entre otros, lo que dificulta la asociación de una ecuación con su representación pictórica y por lo mismo, su resolución.

Dentro del análisis cognitivo propuesto por Rico (2013), se encuentra la descripción de las limitaciones del aprendizaje que presentan los estudiantes respecto al objeto matemático a la base de nuestra investigación. En relación a esto, se seleccionaron los errores y/o dificultades presentes en la literatura más representativos de nuestra problemática y entre ellas, para la elaboración de nuestras categorías, se escogieron las que están más directamente relacionadas con la resolución de ecuaciones de primer grado. A modo de ejemplo, nuestra primera categoría (C_1) surge desde una propuesta hecha por Abrate, Pochulu y Vargas (2006), quienes señalan que las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, se relacionan con la capacidad para seguir un argumento lógico, siendo esta incapacidad, una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje. En coherencia con ello, la tarea que se propuso a los estudiantes, en el marco de la sesión que se analizó, propone que los alumnos, de manera pública y oral, describan y fundamenten todos los procesos desarrollados en la resolución de una ecuación, por tanto, consideramos fundamental, la presencia de una categoría asociada a la argumentación lógica matemática. Así, todas nuestras categorías, están en conexión con las tareas que deben llevar a cabo nuestros estudiantes y por lo mismo, con el análisis a priori desarrollado para la sesión que se llevó a cabo.

Análisis de Resultados

Introducción

Con la intención de visualizar y levantar información que nos permita dar respuesta a nuestra pregunta de investigación y cumplimiento a los objetivos propuestos, el análisis de datos se realizará a continuación, estructurado en tres secciones.

La primera de ellas tiene relación con el anclaje de las categorías e instrumentos de recogida de datos. Por ello, se presentará una tabla en la que cada categoría de análisis se clasifica de acuerdo al registro desde el que pueden recogerse. Así, existen tres categorías y una subcategoría (las que se especificarán más adelante) que pueden evidenciarse únicamente de forma oral, dos subcategorías que solo pueden levantarse desde el registro escrito; y dos que pueden provenir tanto del registro escrito, como del oral. Cabe destacar que, en la tercera sección, se especifica a cuál de estos pertenece cada evidencia.

En la segunda, la información se organiza en una tabla de doble entrada, en la que se puede visualizar qué y cuántas categorías de análisis se evidenciaron en cada momento de la sesión (preguntas iniciales, y primer y segundo momento de la tarea. En esta se puede visualizar cuáles fueron las categorías que con más o menos frecuencia ocurrieron, e incluso cuál no se registró en ninguna ocasión.

Y en la tercera, se presenta la evidencia más representativa de cada categoría, explicitando, además, el contexto en el que esta información fue recogida. Esto, sumado a lo anterior, nos permite interpretar los datos y redactar los principales resultados del presente análisis.

Previo al análisis, se definió la nomenclatura P para referirnos a la docente, A_x a una estudiante, pudiendo ser x un número del 1 al 10 que diferencia a cada alumna; y As que corresponde a las respuestas corales que entregan la mayoría de las estudiantes al mismo tiempo. Es importante aclarar que, en la tercera sección, cuando se presenta evidencia por cada categoría, en la nomenclatura A_x el valor que tome x por cada categoría, distinguirá que nos referimos a alumnas distintas, sin embargo, cuando la evidencia corresponde a distintas categorías y ambas se presente una A con el mismo valor de x, no quiere decir que corresponda a la misma estudiante. Por ejemplo, en la evidencia de las categorías C_1 y C_2 se menciona la intervención de A_2, al ser distintas categorías, no necesariamente estaremos haciendo mención a la misma alumna.

Finalmente, se debe mencionar que los datos serán analizados e interpretados, con base en lo que declaran, por una parte, los autores desde los cuales levantamos las categorías de análisis (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006; Booth, 1984; Rico, 1995; González, 2015; y Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2003), y por otra, desde lo mencionado en otras investigaciones relacionadas con nuestra pregunta de investigación y objetivos (Chavarría, 2014; De Moreno y De Castellano, 1997; Hurtado y Torres, 2005; y Sánchez, 2014).

Anclaje de Categorías e Instrumentos

Debido a la naturaleza de la tarea, las categorías de análisis, pueden evidenciarse a partir de dos registros. El primero de ellos corresponde al escrito, el que refiere a lo que cada alumna anotó en sus guías de trabajo. Y el segundo, corresponde al registro oral, que deviene tanto de los argumentos que dieron algunas de las estudiantes cuando se les pidió explicar cómo habían llegado a la respuesta escrita; como también, de las intervenciones echas por estudiantes en el contexto de la puesta en común.

Es importante mencionar, que previo a la resolución de la tarea, se desarrolla un diálogo inicial entre estudiantes y docente, en el que también puede evidenciarse la presencia de algunas categorías. Por ello, las respuestas que dan las estudiantes de forma oral a las preguntas del inicio de la clase, así como también, los aportes, opiniones y/o dudas manifestadas a lo largo de la sesión, serán consideradas como evidencia para el presente análisis de resultados

En coherencia con lo anterior, a continuación, se organizan las categorías de análisis en relación al registro desde el cual se rescatan las evidencias que representan a cada una de ellas.

Tabla 5: Clasificación de las categorías, respecto al registro en el que pueden evidenciarse.

Registro	Categoría	
Oral	**C_1**	Procesos de Pensamiento Matemático.
	C_3	Desarticulación de Conocimientos Previos.
	C_4	Uso inapropiado de normas o reglas de procedimiento.

	C_6	Comprensión no significativa de los Elementos Algebraicos.	**SC_3**	Escasa comprensión conceptual.
Escrito	**C_6**	Comprensión no significativa de los Elementos Algebraicos.	**SC_1**	Ausencia de reflexión ante la solución.
			SC_2	Yuxtaposición entre naturaleza y significado de los símbolos y letras.
Oral y/o Escrito	**C_2**	Cultura Aritmética Imperante.		
	C_5	Disociación de Registro Pictórico y Simbólico		

La tabla anterior, refiere a que las categorías C_1, C_3, C_4 y SC_3, pueden evidenciarse únicamente a partir del registro oral, es decir, desde las argumentaciones que dan las alumnas respecto de las estrategias de resolución utilizadas y desde las intervenciones dan durante el inicio de la sesión o la puesta en común una vez finalizada la tarea. La categoría C_4 y subcategorías SC_1 y SC_2 pueden evidenciarse únicamente a partir del registro escrito que nos proveen las anotaciones que cada estudiante registró en sus guías. Y finalmente, las categorías C_2 y C_5, pueden evidenciarse tanto a partir del registro oral, como del escrito.

Cabe destacar que lo anterior solo indica a partir de qué registro puede evidenciarse cada categoría de análisis, lo que no quiere decir que una misma evidencia puede se encuentre en más de una categoría.

Síntesis de la Panorámica Global

Como ya se mencionó, las respuestas que dan las estudiantes de forma oral a las preguntas iniciales de la sesión implementada y las intervenciones dadas en la puesta en común, también serán consideraras para el análisis.

Por otro lado, la tarea propuesta, se divide en dos instancias. En un primer momento, las estudiantes reciben parte de la tarea y en un segundo momento, la parte final de la misma. Para cada uno de estos procesos, existe una puesta en común en donde tres estudiantes argumentan sus registros escritos, seleccionados por representar lo previsto en el análisis a priori (respuesta experta, respuesta incorrecta y respuesta experta con estrategia diferente a la primera) y, además, el resto de las alumnas también tiene la posibilidad de intervenir y aportar.

Es por lo anterior, que la síntesis de la panorámica global, se organiza de acuerdo al momento de la clase: inicio, primera parte de la tarea y segunda parte de la tarea. Es necesario mencionar también, que esta síntesis no puede organizarse por estudiante, ya que no todas tienen la posibilidad de argumentar y, además, las intervenciones son aleatorias de acuerdo a la necesidad de aportar que manifiesta cada alumna.

Así, con base en nuestra pregunta de investigación (*“¿Qué errores y dificultades emergen en la resolución de ecuaciones de primer grado, aunque se utilice la balanza como recurso de aprendizaje?”*), resulta más eficiente organizar la información de tal manera de poder visualizar cuáles son los errores que enfrentan las estudiantes, independientemente de si estos se evidencian más de una vez en la misma sesión, ya sea por el mismo estudiante o por otro distinto, ya que esto también nos permitiría reconocer cuál se estos se evidencia con mayor frecuencia.

A continuación, se presenta un cuadro en el que se resume qué categorías de análisis se evidencian en cada momento de la clase. Con la letra x, señala la presencia de una categoría y la cantidad de letras x que se indiquen, evidencia cuántas veces se presentó dicha categoría.

Tabla 6: Clasificación de las categorías de análisis, por momento de la clase y por cantidad de veces en las que se evidencian.

Categorías		**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**SC_1**	**SC_2**	**SC_3**
Preguntas Iniciales		x	x	x					x
Tarea	Primer Momento		x x			x x x		x	x x
	Segundo Momento	x	x		x x	x x			x

De la tabla anterior, se desprende, respecto a las preguntas iniciales relacionadas con las características principales de una ecuación y para qué se resuelve; que las estudiantes tuvieron dificultades para argumentar sus respuestas (C_1). Se evidencia también, que nunca habían resuelto una ecuación (C_3) y en coherencia, presentaron dificultades para comprender y/o definir conceptos como *incógnita* (SC_3). Además, asocian insistentemente la resolución, como la obtención de un resultado concreto o un número (C_2)

Respecto al primer momento de la tarea, en que las estudiantes debían representar pictórica y simbólicamente los dos primeros pasos de la resolución de una ecuación, se evidencia en dos oportunidades la omisión de la x para representar la incógnita (C_2). En la representación algebraica, omiten o agregan elementos respecto de los que están presentes en la balanza, como por ejemplo el número 0 o el 6, e incluso, operadores como la adición (C_5). También, adjudican un valor aleatorio a la incógnita representada en la balanza (CS_2). Al término de este momento, muestran dificultades con el concepto de *incógnita*, por lo que se les dificulta la asociación de la ecuación con su representación pictórica (SC_3).

Finalmente, en el segundo momento de la tarea, las estudiantes presentan dificultades para argumentar porqué un número presente en la ecuación, se descompuso aditivamente (C_1) y al igual que en el primer momento, omiten la x en la representación simbólica (C_2). Por primera vez, se devela en dos ocasiones, la utilización de estrategias mecánicas de resolución (C_4). Además, se evidencias dificultades para asociar la representación pictórica y simbólica de una ecuación, manifestando una comprensión poco significativa de la incógnita, lo que les impediría relacionar correctamente ambas representaciones (SC_3).

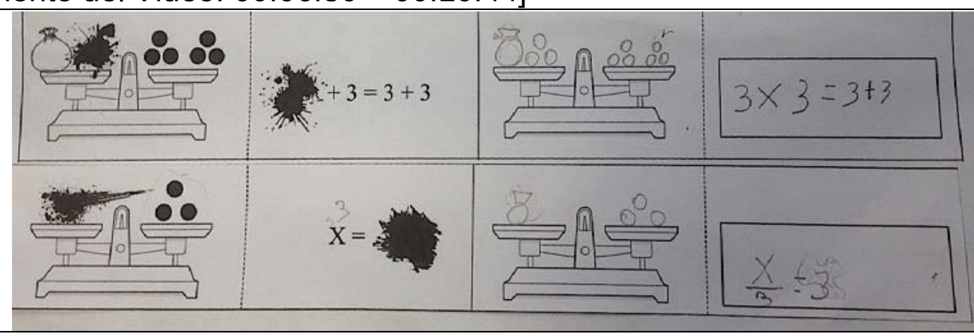
Si establecemos una relación entre esta síntesis global, que da cuenta de la presencia de las categorías en cada momento de la clase, con la clasificación de las mismas de acuerdo al registro, podemos afirmar entonces, que la mayoría de ellas, es decir, la mayor parte de errores y/o dificultades que se evidencian, surgen desde el registro oral.

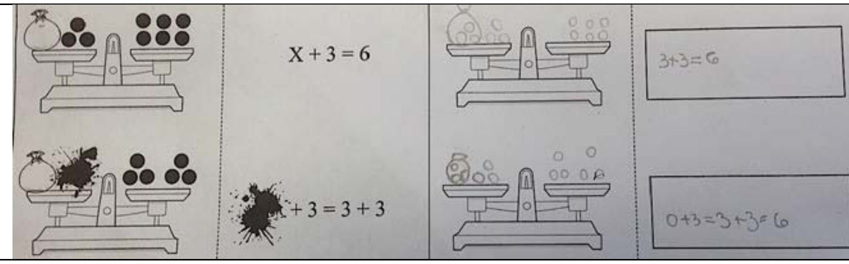
Presentación de la Evidencia

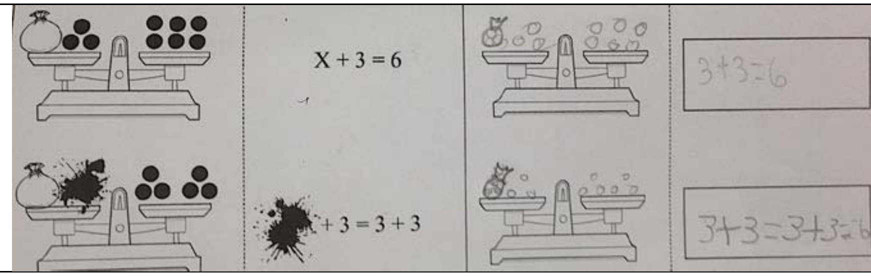
A continuación, se presenta una evidencia por cada una de las categorías de análisis. Esta, corresponde a la más representativa de cada categoría, pues como se expresa en la síntesis de la panorámica global, para ciertas categorías, se cuenta con más de una evidencia. Además de explicitar a qué categoría pertenece cada registro (oral o escrito), se describirá el contexto en el que se da cada evidencia.

Tabla 6: Evidencia por Categorías de Análisis.

Registro	Categoría	Contexto	Evidencia
Oral	**C_1**	Inicio de la sesión. Preguntas de activación de conocimientos previos.	P: *¿Qué caracteriza a una ecuación?* A_1: *Es una idea no más… Yo creo que las ecuaciones es pa`, es que no sé cómo decirlo… es pa`… ¡Ay tía! Es que no sé cómo decirlo.* [Momento del Video: 00:05:40 – 00:06:00]
	C_3		P: *¿Han resuelto una ecuación alguna vez?* As: *¡No!* [Momento del Video: 00:04:36 – 00:04:48]
	SC_3		P: *Si yo tengo, uno más algo me da dos ¿cómo se llama eso?* A_1: No contesta. A_2: *Averiguar el número.* A_3: *Ecuación.* P: *¿Qué hacemos cuando resolvemos una ecuación?* A_4: *Obtenemos un resultado* A_5: *El resultado que nos de los números correctos.* P: *¿Para qué resolvemos una ecuación?* A_6: *Para obtener un resultado* P: *¿Resultado de qué?* A_7: *De la ecuación.* P: *Pero ¿qué caracteriza la ecuación?* As: No responden. [Tiempo de Silencio] A_8: *Un cuadrito blanquito.*

			P: *Ese cuadrito blanquito, ¿qué es?* A_9: *Una ecuación* P: *No, ¿qué es ese cuadrito blanquito que está adentro de la ecuación? ¿Sabemos qué es ese cuadrito blanquito?* As: *¡Sí!* A_8: *No, porque está en blanco.* P: *¿Cómo le podemos llamar a ese cuadrito blanquito?* A_4: ¡*Resultado!* P: *No, porque no lo sabemos todavía.* A_{10}: ¡*Signo de pregunta!* P: *¿Cómo le podemos llamar si es un signo de pregunta, si no sabemos qué es? ¿Cómo llamamos a algo que estamos investigando, algo que no sabemos?* A_{10}: *Un misterio* P: *¿Cómo le podemos llamar a algo que es un misterio?* A_{10}: *Número misterioso.* P: *Ya, vamos a hacer como que se llama número misterioso, pero una palabra un poco más elegante es incógnita.* [Momento del Video: 00:06:30 – 00:10:44]
Escrito	**C_4**	Resolución del primer y segundo momento de la Tarea.	
	SC_1	NO SE OBSERVA	

	SC$_2$	Resolución del primer momento de la Tarea.	

Oral y/o Escrito	**C$_2$**	Resolución del primer momento de la Tarea.	
	C$_5$		A$_1$: *Hay que poner 3 + 3 = 3 + 3 = 6* (Lo escribe en la pizarra) P: *Acuérdate que nosotros estamos completando esto* (señala la balanza y hace una relación término a término, asociando los elementos de la balanza con los de la ecuación) *Tenemos bolsita* (señala la bolsita) *¿cómo podemos representar la bolsita?* A$_1$: No responde. P: Vuelve a hacer una relación término a término. *¿Cómo está representada la bolsita en la ecuación?* A$_1$: No responde y escribe una x (solo una x) P: *Y ese 3 ¿cómo lo podemos representar?* (señala las tres bolitas que están en la balanza). A$_1$: *¿Con un signo de pregunta?* P: *Pero si ahí están las tres pelotitas ¿cómo represento esas tres pelotitas?* A$_1$: Escribe un signo igual (=) y dice *¡Ay, no sé tía!* P: *¿Alguien la puede ayudar?* [Momento del Video: 00:43:07 - 00:48:56]

Principales Hallazgos

De las categorías de análisis que surgen directamente de algunos errores y/o dificultades documentados a partir de otras investigaciones, hay tres que se presentan con más regularidad a lo largo del desarrollo de la sesión. La primera de ellas corresponde a la categoría C_2. Esta se visualiza en el quehacer de las alumnas cuando al momento de resolver una ecuación (pictórica o simbólicamente) o explicar las estrategias utilizadas, omiten la existencia de símbolos algebraicos como la x y, además, asumen que la obtención de un resultado, siempre será un número en concreto y no que este puede corresponder a una variable.

Al inicio de la clase, las estudiantes insisten que cuando se resuelve una ecuación, lo que se quiere obtener es un número o *el resultado de la ecuación* y no el número que satisface a la ecuación o el valor de la incógnita. Además, tanto en el primer, como en el segundo momento de la tarea, algunas estudiantes omiten la x, aludiendo inmediatamente a su valor. Así, varias alumnas escriben $3 + 3 = 3 + 3$ y $3 = 3$; y no $x + 3 = 3 + 3$ y $x = 3$ respectivamente, aún cuando la incógnita estaba representa de manera explícita en la balanza y en la ecuación.

Por otro lado, otra categoría que se evidencia con igual frecuencia que la anterior, es SC_3, la que refiere a la escasa comprensión conceptual. De esta manera, los estudiantes manifiestan dificultades en la comprensión de conceptos como ecuación, variable, solución, incógnita, entre otros. lo que dificulta la asociación de una ecuación con su representación pictórica y por lo mismo, su resolución. Más concretamente, las estudiantes no sabían qué era una ecuación y cuáles eran sus características; tampoco reconocieron a la incógnita como un elemento de dicho objeto y tuvieron dificultades para referirse al equilibrio, aun cuando se utilizó la balanza como material auxiliar.

Esta última relación, se asocia con la categoría C_5, que corresponde coherentemente, a la categoría más evidenciada. Aquí, las alumnas presentaron dificultades para relacionar los elementos presentes en la balanza, con aquellos que se encontraban en la ecuación. Más específicamente, muchas de ellas no fueron capaces de relacionar la bolsa con la x; las bolas con los números 6 o 3; la división entre los platillos como el signo igual (=), e incluso les resultó complejo visualizar cuáles eran los signos de operación que estaban involucrados.

Además de las categorías antes mencionadas, hubo otras también se evidenciaron, aunque con menos frecuencia. La categoría C_1 se registró de forma oral, en aquellos momentos en donde las estudiantes tenían dificultades para explicar y argumentar. Por ejemplo, cuando se les preguntó, qué caracteriza a una ecuación o por qué un número presente en la ecuación se descompuso aditivamente. En ambos casos, las estudiantes divagan entre algunas respuestas poco concretas y simplemente desisten de responder aludiendo en ocasiones, a que no saben cómo decirlo.

Al igual que C_1, la categoría C_4 también se evidencia en dos ocasiones durante el desarrollo de la sesión. Dos estudiantes escriben y resuelven la ecuación de la siguiente manera: $3 \times 3 = 3 + 3 \rightarrow \frac{3}{x} = 3$. En este caso, registraron una multiplicación en el primer miembro de la ecuación y en conocimiento de la regla nemotécnica (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006) *"Si está multiplicando hay que pasarlo dividiendo"* (Ibíd, p. 115) y de la existencia de una x, pues se explicita en la tarea dada, las estudiantes – se presume – describen una división en el segundo miembro de la ecuación y agregan la incógnita.

Por otro lado, la categoría C_3 se manifiesta una vez de manera explícita, cuando las estudiantes afirman no haber resuelto nunca una ecuación. En este caso, las alumnas no dominan las herramientas conceptuales ni procedimentales para resolver ecuaciones, debiendo ser parte de sus conocimientos previos, ya que tal como se señala en nuestro análisis cognitivo, particularmente en el análisis curricular, las estudiantes debieron resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones en el nivel de aprendizaje anterior al actual (4º básico).

Al igual que la categoría antes mencionada, SC_2 también se evidencia solo una vez, cuando una alumna escribe la ecuación como $0 + 3 = 3 + 3 = 6$. Recordemos que esta ecuación fue escrita a partir de la representación pictórica $mancha + 3 = 3 + 3$. Aquí entonces, la estudiante atribuyó un valor aleatorio a la mancha, que en este caso fue cero.

Finalmente, es necesario mencionar que la categoría SC_1 no se evidenció en ningún momento.

Discusión de los Resultados (Análisis A Posteriori)

En cuanto a la categoría C_2 (*Cultura Aritmética Imperante*), que a lo largo de la sesión se evidenció cuatro veces, tanto en las preguntas iniciales, como en los dos momentos de la tarea, interpretamos en consecuencia a lo señalado por Booth (1984) citado en Abrate, Pochulu y Vargas (2006), que los estudiantes reducen a un resultado numérico, sin variables de por medio, al valor de x, lo que según el autor, se sustenta en el hecho que el primer encuentro que tiene el alumno con los símbolos +, -, : y ·, se produce en los primeros años de la escuela primaria y está asociado a acciones físicas sobre los objetos, reunir, quitar, repartir, entre otros. Más adelante según Booth (1984), cuando estos símbolos se liberan de este grado de concreción, siguen permaneciendo ligado a acciones, pero ahora no se trata de acciones físicas, puesto que dichos símbolos seguidos del signo igual (=), quedan asociados a un *pedido de resultado*. Es probable entonces, que, en la mente de las estudiantes, se haya afianzado este supuesto basado en su experiencia anterior: *los signos operatorios indican algo que se debe hacer y por tanto están solicitando que se halle un resultado*.

Además de lo anterior, de acuerdo a Booth (1984) ahora citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2003), se interpreta que las estudiantes mantienen una comprensión aritmética, ya que las dificultades que presentan las alumnas en el álgebra, podrían no ser tanto del álgebra, sino problemas que se quedan sin corregir en la aritmética, ya que, en la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los estudiantes reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción. El mismo autor agrega que, "*muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige una solución única y numérica*" (Ibíd, p. 27).

Así mismo, con base en lo señalado por Hurtado y Torres (2015), podríamos suponer que las estudiantes mantienen interpretaciones aritméticas, y no aceptan la existencia de cantidades desconocidas, sobre todo, que el resultado de una expresión pudiera ser simbólica. Esto se debe según los autores, a los años de experiencia aritmética con la que cuentan los alumnos, trabajando con cantidades numéricas exactas y conocidas, manteniendo interpretaciones de este tipo, aun en contextos algebraicos.

En relación a esto, Sánchez (2014), agrega que, una de las razones atribuibles a la eliminación de la incógnita en la resolución de una ecuación, puede corresponder al uso del signo igual (=), a las propiedades simétricas y al significado dado a los literales, como por ejemplo la x.

Respecto a la subcategoría SC_3 (*Escasa Comprensión Conceptual*) que, también evidenciada en cuatro ocasiones y a partir de lo declarado por Booth (1984) citado en Abrate, Pochulu y Vargas (2006), consideramos que las dificultades de las estudiantes al momento de resolver una ecuación, devienen precisamente de falencias en la comprensión de los conceptos mismos de ecuación, variable, solución, entre otros, lo que dificultaría la relación pictórica-simbólica. Esto último se asocia directamente con la evidencia obtenida de la categoría C_5 (*Disociación del Registro Pictórico y Simbólico*), la que se registra cinco veces.

Al respecto, y desde lo señalado por Rico (1995) citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2003), consideramos que la dificultad para obtener información espacial, es decir, a pensar mediante imágenes espaciales o visuales, propicia la producción de representaciones inadecuadas de situaciones matemáticas por parte de las estudiantes. Desde sus registros, cuando intentan relacionar cada elemento de la balanza con aquellos presentes en la ecuación (simbólica), se interpreta, tal como señala Skemp (1987) citado en Chavarría (2014), que las alumnas poseen una comprensión instrumental de la matemática, lo que no les permite comprender la matemática relacional.

Así mismo, De Moreno y De Castellano (1997), señalan que la utilización única y exclusiva de representaciones simbólicas para la ecuación en la enseñanza inicial – que es lo que inferimos, ocurre en este caso - les habría impedido la interpretación y el análisis de otras representaciones más concretas como la balanza, en la que se evidencia el rol de cada uno de los elementos presentes en una igualdad. Esto conllevaría posteriormente, según los autores, a una resolución mecánica, más que a una significación del concepto y resolución de la ecuación.

Lo anterior se evidencia, por la dificultad que presentan algunas estudiantes desde un comienzo, al asociar ambos registros (figural y simbólico), lo que las llevaría a descubrir inmediatamente el valor de x, resolviéndola de forma automática, sin comprender cómo se llega a dicho resultado. Esta resolución mecanizada, es mencionada por Zambrano (2011), desde el que inferimos, que el hecho de resolver ecuaciones, se redujo a la aplicación de algoritmos en forma mecánica, que no comprendían y por lo mismo, los utilizaron como ejercicios aprendidos memorísticamente.

Respecto a esta categoría, se debe agregar que, el tipo de material auxiliar utilizado (balanza pictórica) y la disposición de sus elementos, influyó en la resolución y reflexión de las estudiantes respecto al objeto matemático, como por ejemplo en el uso de la propiedad cancelativa y en la identificación de la incógnita, por tanto, no se puede desconocer que hechos como identificar cualquier mancha (registro pictórico) como una x (registro simbólico) no resulta trivial, sino que pudo ser la consecuencia del formato en el que la tarea se dispuso.

A partir de lo anterior, podemos decir que existen dos grandes dificultades relacionadas con: el concepto y la resolución de ecuaciones. La primera de ellas generaría errores por mantener comportamientos e interpretaciones aritméticas debido a la vasta experiencia que se tiene en esta área. Y la segunda, con la comprensión conceptual de los elementos involucrados en la ecuación, lo que, a su vez, dificultaría una relación eficiente y significativa entre la representación pictórica (balanza) y simbólica de la ecuación.

Aunque con menos frecuencia que las categorías antes mencionadas, C_1 también se evidencia (*Procesos de Pensamiento Matemático*). Respecto a esto, Abrate, Pochulu y Vargas (2006) señalan que existen dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático, relacionadas con la capacidad para seguir un argumento lógico. Esto, creemos que se relaciona directamente con la evidencia obtenida de SC_3, siendo las dificultades en la comprensión de conceptos como ecuación, variable, solución, incógnita, etc. lo que no permitiría a las estudiantes argumentar, ya que no contarían con los conocimientos necesarios para ello.

Con la misma repetición, surge la categoría C_4 (*Uso inapropiado de Normas o Reglas de Procedimiento*). En relación a esto, y con base en lo declarado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006), consideramos que si bien existen fundamentos teóricos que sustentan las manipulaciones que permiten resolver determinado tipo de ecuaciones; en general, son sustituidos por abundantes reglas de transformación de ecuaciones que no tienen la validez general se les asigna. Por otro lado, si bien las reglas válidas normalmente son muy pocas, posiblemente las estudiantes memorizaron muchas de ellas y las aplicaron de manera automática, sin siquiera comprenderlas e ignorando que corresponden a una simplificación de las operaciones aplicadas a igualdades, realizando transposiciones de términos innecesarias cuando deben resolver una ecuación.

La evidencia que se obtiene sobre la categoría C_3 (*Desarticulación de Conocimientos Previos*), la asociamos a que había una descoordinación, entre la organización de la institución y planificación docente; con aquello propuesto por el currículum escolar, ya que en el nivel donde se implementó la clase, deberían haber trabajado al menos, ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones el año anterior. De esta manera, algunos conceptos elementales como el de ecuación y equilibro, debieron haber sido reconocidos por las alumnas.

En relación a la subcategoría SC_2 (*Yuxtaposición entre naturaleza y significado de los símbolos y letras*), inferimos, por un lado, que la estudiante atribuyó en valor 0 a la mancha presente en la ecuación ya que *una mancha no es nada y nada es cero*, existiendo una yuxtaposición entre la naturaleza y significado de los símbolos y letras. Sin embargo y como ya lo mencionamos, con el objetivo de explicar el comportamiento de las estudiantes frente a la resolución, es importante considerar la disposición de los elementos tanto pictóricos como simbólicos de la tarea. Respecto al uso de material auxiliar en la actividad matemática, Guerrero, Mena y Morales (2017) señalan que, comprender una situación estaría mediado por la proximidad del individuo, por ejemplo, la experiencia con un problema similar y/o la forma en que se usan los modelos conceptuales para resolver una nueva situación. Por ello según los autores, comprender el modelo existente dado a las estudiantes, modificarlo para representar situaciones nuevas o crear nuevos modelos, habría implicado que formaran y aplicaran modelos mentales que pudieron no haberse asociado coherentemente con la tarea.

Y por otro, el número 6 como *resultado* de la ecuación, lo atribuimos a que, probablemente, la experiencia aritmética es extrapolada a la algebraica, ya que se insistió en hallar un resultado concreto.

Finalmente, respecto a la subcategoría SC_1 (*Ausencia de reflexión ante la solución*) que no se evidencia, creemos que esto se debería a las características de la tarea. En el segundo momento de esta, cuando las estudiantes debían hallar el valor de la incógnita, en la balanza que representaba este último paso, tenía tres pelotas en su platillo derecho, por lo que resultó muy difícil que alguna de ellas anotara como valor de x, un número descontextualizado y ajeno a la *realidad* del problema. Además, los registros figurales y simbólicos de la ecuación, explicitaban en todo momento, números como el 6 y el 3, por lo que no habría sido poco probable – creemos – que las alumnas escribieran otros números.

Contraste: Análisis A Priori v/s Análisis A Posteriori

A continuación, se realiza un contaste entre el análisis a priori incorporado en el plan de clases del estudio de clase, y los resultados obtenidos luego de la implementación. Este apartado tiene por objetivo, determinar específicamente, qué errores y dificultades previstos, ocurrieron efectivamente en la sesión de aprendizaje y cuáles emergieron sin haber estado advertidos previamente.

En el momento inicial de la clase, se suscitan varias dificultades no advertidas con anticipación. Las estudiantes no conocían el concepto de ecuación, pues según ellas, nunca habían resuelto una. Por ello, no pudieron reconocer sus características principales como la presencia de una incógnita y que su valor, es lo que se busca al resolverla. Insistieron en varias ocasiones que, al resolver una ecuación se busca el resultado, pero no pudieron asociarlo a la incógnita.

Respecto al contenido de la bolsa, efectivamente las estudiantes tuvieron dificultades para comprender que esta representaba la incógnita de la ecuación y que por tanto su contenido correspondía al número de pelotas que la satisfacen y que, por tanto, mantienen el equilibrio de la balanza. Así, luego de la primera puesta en común, de las seis dificultades o errores previstas, se evidencian tres: $0 + 3 = 3 + 3$ dando valor 0 a la bolsa; $3 + 3 = 3 + 3$, dando valor 3 a la bola, pero omitiendo la x; y $x + 5 = 3 + 3$, dando valor 1, aunque en realidad, esta última se tenía prevista como $1 + 5 = 3 + 3$.

Por otro lado, sin haberlo previsto, las estudiantes escriben ecuaciones como: $3 \times 3 = 3 + 3;\ 0 + 3 = 3 + 3 = 6;\ 3 + 3 = 3 + 3 = 6;\ 3 + 3 = 3 + 3$. Posiblemente, en la primera, multiplicaron el valor de la bolsa por las tres pelotas que la acompañaban; en la segunda, además de dar valor 0 a la incógnita, resuelven el segundo miembro de la ecuación; en la tercera, si bien descubren el valor correcto de x, al escribir la ecuación, omiten su presencia y, además, resuelven nuevamente el segundo mimbro de la ecuación; finalmente en la tercera, simplemente omiten la incógnita y escriben su valor inmediatamente.

Además de lo anterior, en el primer momento de la tarea se evidencia otra dificultad y error no contemplados. Una vez que se hace la puesta en común, una de las estudiantes manifiesta que entre la x y el 3 no puede ir ningún símbolo (debiendo ir un "+"), ya que ambos están en un mismo platillo. Además, tienen dificultades para verbalizar el concepto de equilibrio cuando se les pregunta qué pasaría si la bolsa equivale a 1 o 0 pelota.

En el segundo momento de la tarea, ninguna de las dificultades y errores previstos ocurrió. Sin embargo, emergieron errores al escribir el último paso de la ecuación como: $\frac{x}{3}$ = 3; $\frac{x}{3} = mancha$ y $3 = 3$ que, si bien no es un error ya que la igualdad es correcta, se omite la presencia de la x. Suponemos que, en las dos primeras ecuaciones, las estudiantes utilizaron la *regla "si está multiplicando, pasa* *dividiendo"*, ya que, en ambos casos para el paso anterior, las estudiantes habían escrito $3 \times 3 = 3 + 3$.

Finalmente, no se previó que las estudiantes tuvieran dificultades para identificar las razones por las cuales el 6 se había descompuesto en 3 + 3. Las alumnas aludieron a razones como: *"porque 3 + 3 = 6", "para no copiar lo mismo" o "para que la ecuación no terminara tan rápido"*. Sin embargo, no reconocieron que esta descomposición aditiva tiene por objetivo, poder utilizar la propiedad cancelativa y hallar así, el valor de la incógnita.

Conclusiones

Las siguientes conclusiones, surgen a partir del análisis a priori (principales hallazgos), discusión de resultados y contraste.

Así entonces, se concluye que el uso de la balanza podría inducir el surgimiento de algunas dificultades y/o errores respecto a la resolución de ecuaciones, en tanto las estudiantes manifiestan conflictos a la hora de relacionar los elementos que se presentan de forma pictórica y simbólica.

Se cree, esto podría ocurrir por dos factores, que a la vez corresponden a resultados de nuestra investigación. En primer lugar, porque los alumnos no contarían con la comprensión conceptual necesaria para reconocer y asociar elementos como la incógnita, los símbolos y operadores involucrados, entre otros. Y, en segundo lugar, porque harían interpretaciones aritméticas de situaciones algebraicas, lo que podría perjudicar la comprensión conceptual y la relación entre diferentes representaciones de un mismo objeto.

Además de lo anterior, las características de la tarea, particularmente cómo se disponen espacialmente sus elementos, influye en la percepción y reflexión de los alumnos frente a ella y, por tanto, determinan su resolución.

Por ello, en términos de proyección, previo a la utilización de la balanza, sería recomendable – en adecuación al nivel de enseñanza - presentar a los estudiantes el concepto de álgebra y sus características, para que así, puedan distinguirlo de la aritmética, además de reconocer algunos de sus principales elementos. Finalmente, la utilización de la balanza como modelo de ecuación, debe prever y considerar los modelos mentales previos que poseen los alumnos, pues de estos dependerá, la reflexión que los estudiantes hagan frente a ella y, por consiguiente, su aprendizaje

Respecto al análisis a priori elaborado para la clase del estudio de clases, consideramos que este no fue lo suficientemente completo y preciso, en cuando a prever de manera consiente cómo los estudiantes podrían enfrentarse a la tarea propuesta.

Así entonces, con base en los resultados obtenidos y la reflexión de la sesión planificada, esta no será considerada como parte del monográfico. Por lo tanto, la primera clase de la secuencia didáctica, corresponderá a la tercera implementación del estudio de clases, es decir, al plan reestructurado en función de la evidencia recogida. Además, el análisis a priori, se complementa en un nuevo formato, en el cual se explicitan todos los elementos necesarios para cumplir con el objetivo de una monografía, que es ser un aporte tanto a docentes, como a investigadores.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Descripción y Organización

La secuencia didáctica que conforma nuestro monográfico, está compuesta por tres planes de clases, donde la primera sesión corresponde a la reestructuración de la clase analizada en el apartado anterior y las otras dos, completan la propuesta con base en el currículum escolar

En cada plan de clases, se explicita la problemática, el objetivo, los conocimientos previos necesarios para realizar la tarea propuesta, y los materiales.

Estos planes se estructuran en tres columnas, la primera de ellas, corresponde a la tarea matemática propuesta a los estudiantes, la segunda, a la intervención del docente, en tanto da instrucciones, hace preguntas y/o devoluciones; y la tercera, a la evaluación que este realiza sobre la marcha para determinar el progreso y aprendizaje de los alumnos respecto al objetivo. Además, en cada una se explicita el tiempo dispuesto para cada momento (inicio, desarrollo y cierre) y al final, se expone tanto la tarea, como los recursos necesarios para su realización.

Objetivos y su Articulación

A continuación, se presentan los tres objetivos de aprendizaje propuestos para cada sesión de aprendizaje. Luego, se describirá el modo en que estos se articulan para desarrollar progresivamente un aprendizaje de nuestros alumnos, respecto a las ecuaciones de primer grado.

Primera Sesión

"Resolver ecuaciones de primer grado, a través del uso de la balanza"

Segunda Sesión

"Resolver ecuaciones de primer grado, mediante tres estrategias (descomposición aditiva-propiedad cancelativa, aplicación de la operación inversa y pregunta), mientras arman un dominó de ecuaciones"

Tercera Sesión

"Proponer y resolver la ecuación que permite dar solución al problema"

Se espera entonces que, los estudiantes, una vez que hayan relacionados los elementos presentes en una representación pictórica de la ecuación (balanza), con su representación simbólica, y a la vez, hayan identificado porciones significativas de la resolución de una ecuación, a partir del dibujo de balanzas; sean capaces de resolver una ecuación, descomponiendo aditivamente números naturales, lo que les permitirá aplicar la propiedad cancelativa y así, hallar el valor de la incógnita.

Lo anterior, permitiría a los estudiantes resolver una gama de ecuaciones de manera simbólica con la estrategia antes mencionada, o recurrir en caso de encontrarlo necesario, a la representación en balanza, encontrando el valor de x. En este contexto, resulta pertinente entonces, ampliar las estrategias, discriminando cuáles de ellas son más pertinentes de usar para determinadas ecuaciones o cómo estas se pueden entrelazar eficientemente en la resolución de una misma ecuación.

Finalmente, una vez que los estudiantes comprendan y reconozcan los elementos y conceptos que constituyen el objeto ecuación y hayan resuelto distintas ecuaciones a partir de diversas estrategias, se considera entonces, que cuentan con las herramientas suficientes (conocimientos previos) para resolver de manera exitosa un problema, para el cual se requiere de la elaboración y resolución de dos ecuaciones.

.

Primera Sesión de Aprendizaje

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en ℕ.
Objetivo	"Resolver ecuaciones de primer grado, a través del uso de la balanza".

Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Números naturales (ℕ) • Descomposición aditiva • Concepto de igualdad • Concepto de equilibrio	• Copia de la situación (Una por estudiante) • Lápiz grafito y goma • Cartulinas y papel kraft • Proyector y computador • Balanza

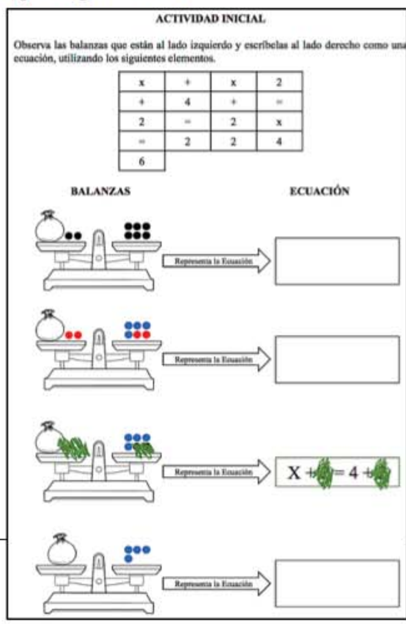
Tarea Matemática	Intervención Docente	Evaluación de la Marcha de la Clase
20 minutos		
1.- Indicaciones de la clase y posicionar a los estudiantes en parejas, frente a frente para que ambos puedan observar la pizarra.	1.- Explicitar el contrato didáctico y pedagógico. 2.- Se comunica el objetivo de la clase "Resolver ecuaciones de primer grado"	1.- Mantienen una actitud positiva y optimista frente al aprendizaje. 2.- ¿Los estudiantes se aproximan a una idea de incógnita? ¿Logran encontrar el valor de la incógnita? ¿Logran asociar algún elemento a la incógnita, cualquiera sea el (figural o literal)?
2.- Los estudiantes formulan responden a las preguntas de la docente, formulando las	3.- Se pregunta:	

ecuaciones pertinentes para conocer: la edad de la hermana, los gogos que tiene Pedro y lo que sigue debiendo Luis.

a. La edad de mi hermana más 5 años es igual a 12 ¿Qué edad tiene mi hermana?
b. Pedro gana el doble de Gogos que David, si David tiene 15 Gogos ¿Cuántos Gogos tiene Pedro?
c. Si Luis me paga $500 pesos de una deuda total de $1250 ¿Cuánto me sigue debiendo Luis?
d. ¿Cómo podríamos representar matemáticamente las situaciones anteriores?

50 minutos

3.- Planteamiento de la actividad introductoria. Paso de una ecuación a un lenguaje algebraico.


ACTIVIDAD INICIAL

Observa las balanzas que están al lado izquierdo y escríbelas al lado derecho como una ecuación, utilizando los siguientes elementos.

x	+	x	2
+	4	+	=
2	=	2	x
=	2	2	4
6			

4.- Se presenta a los estudiantes la ecuación $x + 2 = 6$ y su resolución en una balanza de modo que la puedan reescribir en lenguaje algebraico. Los 17 elementos necesarios para armar las 4 ecuaciones, estarán disponibles al costado de la pizarra para poder posicionarlos correctamente al costado de cada representación pictórica.

5.-

x	+	x	2
+	4	+	=
2	=	2	x
=	2	2	4
6			

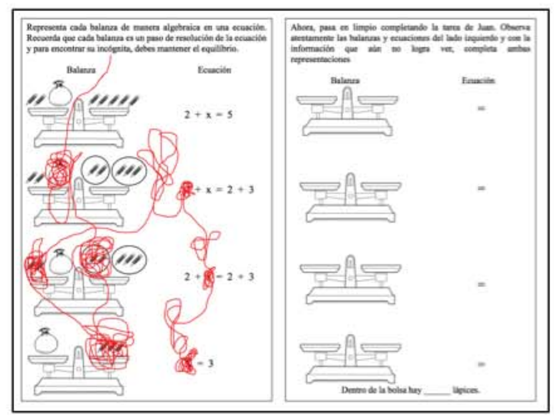
6.- Si alguno de los estudiantes comete algún error y el resto del curso no se percata

3.- ¿Los estudiantes son capaces de asociar los elementos de la balanza? ¿Logran comprender que la balanza representa una ecuación? ¿Comprenden que las distintas balanzas corresponden a los pasos de resolución de la ecuación? ¿Los estudiantes son capaces de visualizar una ecuación?

Dificultades / Devoluciones

a.-. Algunos estudiantes pueden representar la bolsa inmediatamente como un 4. Para aquellos estudiantes, la tarea se extiende y se les da las siguientes ecuaciones representadas en balanza, para que las representen al igual que sus pasos de resolución, en balanza (Ecuaciones: $x + 3 = 9$ y $2x + 2 = 12$).

b.- Algunos estudiantes pueden reconocer a la x como multiplicación y no como incógnita. Docente debe aclarar que la multiplicación se representará a través de un punto (·) y la x siempre referirá a una incógnita.

4.- Los estudiantes formulan la ecuación de manera algebraica, a partir de su representación en balanza.	de este, se pide a los alumnos que revisen nuevamente para verificar dónde se encuentra el error, esto para que sean ellos mismos quienes analicen y verifiquen los pasos realizados.	
3.- Se presenta la tarea A y se relata el contexto de la tarea. 4.- Planteamiento del problema. *Juan es el mayor de dos hermanos y cursa 5º básico en la Escuela Los Pensamientos. El domingo por la tarde, una vez que finalizó orgullosamente su tarea de matemáticas, se dirigió a lavarse los dientes. Mientras esto ocurría en el baño, el hermano menor de Juan tomó uno de sus lápices y rayó gran parte de la tarea que había hecho.* *Cuando Juan ordenó su mochila para el día lunes, no se percató de las rayas en su tarea, sino hasta el momento en que debía entregárselo a la profesora, quien entendiendo la situación le da la oportunidad de pasarla en limpio y entregarla nuevamente.*	7.- Se le pide a cada pareja de estudiantes que realicen un trabajo colaborativo. Aquellos estudiantes que están solos, se reúnen con otro que esté en la misma situación. De ser impar el número de alumnos, se podrán conformar tríos. 8.- Se les muestra el problema y se pide aleatoriamente que lo lean en voz alta. Se pregunta: a. ¿Qué se entiende del problema? b. ¿Qué es lo que se puede extraer del problema? c. ¿Qué es lo más importante del problema? 9.- Se entrega a las parejas la tarea de Juan (rayada) y una hoja en la que deben pasar la tarea en limpio.	

Juan muy molesto y nervioso, no recuerda cómo ni qué había escrito en la tarea. ¿Podríamos ayudar a Juan?	10.- Docente menciona: Si nos fijamos, al lado izquierdo de la hoja tenemos la tarea de Juan que, en ciertas partes está rayada; y al lado derecho, tenemos una balanza vacía y un espacio, en donde debemos volver a hacer la tarea, considerando los elementos que aún se pueden ver. Así, a partir de la tarea de Juan y de la información que ella nos entrega, hay que completar al lado derecho de la hoja aquello que debería tener la balanza y cómo debería escribirse la ecuación que la representa, de modo que así, podamos encontrar el valor de la incógnita.	
5.- Los estudiantes deben identificar los datos conocidos en la tarea de Juan, asociando los de la balanza con los de su representación algebraica, completando cada paso y resolviendo la ecuación. **¿Qué se espera?** Se espera que los estudiantes logren representar tanto la balanza como la ecuación de manera algebraica, a partir de los datos visibles en la tarea.	11.- Una vez que se ha observado el progreso de los estudiantes, se intenciona que algunos alumnos (uno que haya errado, otro que tenga una estrategia diferente y otro que tenga la solución ideal) pasen a la pizarra a presentar el trabajo realizado. Se espera que sean los otros compañeros quienes aporten al desarrollo o corrección	4.- ¿Son capaces de descomponer un número para cancelar términos y encontrar el valor desconocido? ¿Se cumple la intencionalidad de resolver la ecuación manteniendo la igualdad? ¿Es suficiente el tiempo planificado para la actividad? ¿Utilizan las estrategias usadas

<table>
<tr><td>6.- Puesta en Común</td><td>de las tareas que no estén correctas o detecten cuál es el error. Esta puesta en común se realiza para cada uno de los cuatro pasos de resolución de la ecuación.</td><td>inicialmente para encontrar los valores desconocidos?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dificultades / Devoluciones

a.-. La Bolsa: puede que los estudiantes no comprendan el significado de la bolsa, por ello se recomienda preguntar: ¿Sabemos qué tiene la bolsa, ¿cuánto pesa o a cuántas bolitas equivale? ¿La bolsa podría equivaler 0 o 1? ¿Por qué? ¿Qué pasaría con el equilibrio de la balanza? Cuando tenemos un elemento del que no conocemos su valor ¿Cómo podemos nombrarlo de manera algebraica?

b.- Los estudiantes pueden determinar inmediatamente que en la bolsa hay 3 lápices, sin embargo, el docente debe recordar que la resolución de ecuaciones consta de un proceso y que, en beneficio de Juan, debemos respetarlo, para que él pueda entregar su tarea completa.

c.- En caso de persistir dudas en cuanto a la resolución, se recomienda el uso de la balanza en concreto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">20 minutos</td></tr>
<tr><td>7.- Institucionalización, se pretende que los estudiantes comprendan que cuando resuelven ecuaciones de primer grado en ℕ, los números pueden descomponerse con el objetivo de “eliminarlos”, manteniendo siempre la igualdad y obteniendo el valor de la incógnita.</td><td>12.- Finalmente el docente pregunta a los estudiantes:
a. ¿Qué hicimos o qué pasos seguimos para ayudar a Juan?
b. ¿Cómo hicimos para hallar el valor de la incógnita?
c. ¿De qué me sirvió el uso de la balanza?

13.- Institucionalización</td><td>5.- ¿Los estudiantes son capaces de reflexionar sobre lo hecho en clases? ¿Comprenden la importancia de la representación de la ecuación en balanza para poder resolver ecuaciones?</td></tr>
</table>

	"Cuando se resuelven ecuaciones de primer grado con números naturales, como los que conocemos hasta ahora, los números pueden descomponerse aditivamente y así, utilizar la propiedad cancelativa, lo que nos permite conocer el valor de la incógnita. Esto, ya que $a = b$, siempre y cuando $a + c = b + c$. Por ejemplo, en la ecuación $x + 3 = 5$, el 5 se descompone en $2 + 3$, por tanto, la ecuación se escribe como $x + 3 = 2 + 3$ y así, obtenemos que $x = 2$".	

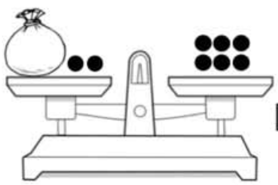
Recurso de Aprendizaje: Actividad Introductoria

ACTIVIDAD INICIAL

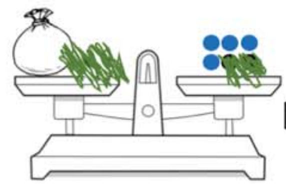
Observa las balanzas que están al lado izquierdo y escríbelas al lado derecho como una ecuación, utilizando los siguientes elementos.

x	+	x	2
+	4	+	=
2	=	2	x
=	2	2	4
6			

BALANZAS **ECUACIÓN**

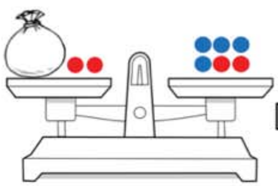


Representa la Ecuación

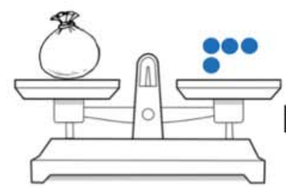


Representa la Ecuación

$X + \cancel{2} = 4 + \cancel{2}$



Representa la Ecuación

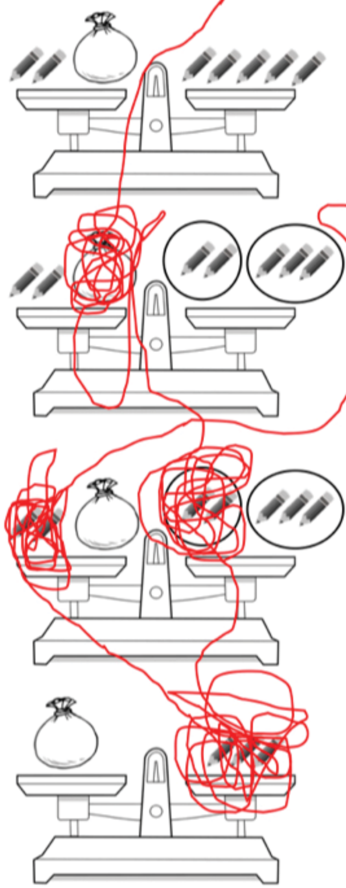


Representa la Ecuación

Actividad Central

Representa cada balanza de manera algebraica en una ecuación. Recuerda que cada balanza es un paso de resolución de la ecuación y para encontrar su incógnita, debes mantener el equilibrio.

Balanza | Ecuación



$2 + x = 5$

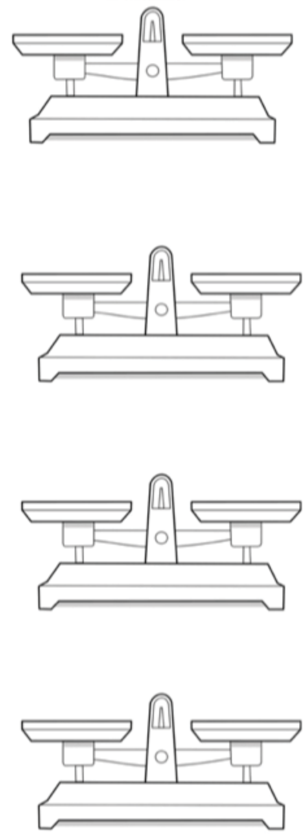
$2 + x = 2 + 3$

$2 + x = 2 + 3$

$x = 3$

Ahora, pasa en limpio completando la tarea de Juan. Observa atentamente las balanzas y ecuaciones del lado izquierdo y con la información que aún no logra ver, completa ambas representaciones

Balanza | Ecuación



=

=

=

=

Dentro de la bolsa hay ______ lápices.

Segunda Sesión de Aprendizaje

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en ℕ.
Objetivo	"Resolver ecuaciones de primer grado mediante tres estrategias (pregunta, descomposición/cancelación) y aplicar la operación inversa) más otra a elección, mientras arman un dominó de ecuaciones"

Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Multiplicación • Estrategias de Resolución - Descomposición Aditiva / Propiedad Cancelativa	• Juego Gigante Dominó de Ecuaciones (Tres Colores) • Proyector • Computador • Lápiz • Papel

Tareas Matemáticas	Intervención Docente	Evaluación de la Marcha de la Clase
15 minutos		
1.- Recuperación de conocimientos previos en relación a lo aprendido en la sesión anterior. 2.- Al menos 6 estudiantes distintos responden a las preguntas de la docente.	1.- Explicitación del contrato didáctico y pedagógico. 2.- Se pregunta aleatoriamente (estudiantes alzan la mano para responder de manera oral)	
¿Qué se espera? a.- Recordar la resolución de una ecuación a partir del uso de la balanza.	a. ¿Qué hicimos la sesión anterior? b. ¿Qué características tiene una ecuación? c. ¿Qué estrategias podemos utilizar para resolver una ecuación? d. ¿Qué elemento nos ayuda a representar una ecuación?	1.- ¿Recuerdan los elementos fundamentales de la sesión anterior? ¿Son capaces de caracterizar una ecuación? ¿Reconocen una estrategia adecuada para resolver ecuaciones? ¿Pueden asociar un elemento a una ecuación, argumentando por qué? ¿Reconocen cierto elemento

<table>
<tr>
<td>b.- Aluden a palabras como igualdad, equilibrio y/o incógnita para caracterizar a una ecuación.

c.- Refieren que la descomposición aditiva y cancelación les permite resolver una ecuación.
d.- Identifican la balanza como representación de una ecuación.
e.- Distinguen al concepto de equilibrio o igualdad aquello que permite relacionar a la balanza con una ecuación
f.- Deben reconocer que el equilibrio es fundamental cuando se resuelve una ecuación.</td>
<td>e. ¿Por qué la balanza nos permite representar una ecuación?
f. ¿Qué debemos cuidar siempre cuando resolvemos una ecuación?

Dificultades / Devoluciones

En caso de que los alumnos no puedan responder, se retoma la tarea de Juan. Esto se realiza de manera progresiva, es decir, se hace recordar lo suficiente para que puedan seguir respondiendo las preguntas. En caso de que dicho “recordatorio” no sea suficiente, se entrega más información. Así sucesivamente.</td>
<td>fundamental a la hora de resolver una ecuación?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">55 minutos</td>
</tr>
<tr>
<td>3.- Resolver ecuaciones, para encontrar el valor de x. Por ejemplo:

| - | x = 2 | | x + 4 = 6 | - |
| - | x + 4 = 6 | | x = 2 | |</td>
<td>3.- Se explican las instrucciones del juego.</td>
<td>Dominó de Ecuaciones
Instrucciones

1).- El curso deberá dividirse en tres grupos (Las 3 filas, por ejemplo).
2).- Cada grupo tendrá un color que los representará (rojo, azul y verde)
3).- Cada grupo recibirá las mismas 24 piezas del dominó.
4).- Grupo Rojo juega primero, después azul y luego verde.</td>
</tr>
</table>

4.- Reconocer la estrategia mediante la cual está resuelta determinada ecuación. Por ejemplo:

-	x + 4 = 6

¿Cuánto debo sumarle a cuatro para que me de 6?	-

-	x + 4 – 4 = 6 – 4 x = ¿?

x + 4 = 6	-

5.- Resolver ecuaciones, encontrando el valor de x, para identificar dos ecuaciones que tangan la misma solución. Por ejemplo:

-	x + 4 = 6

x + 1 = 3	-

6.- Identificar errores en la resolución de ecuaciones.

Un representante por grupo escoge un papel de cada color para saber el orden en que jugarán.

5).- Grupo Rojo pone la primera pieza (la que ellos prefieran o les convenga).
6).- Grupo Azul continúa poniendo la pieza que corresponde (esto depende de la pieza que Rojo haya puesto).
7).- Verde revisa la jugada de Azul. Si es pertinente la cuestiona.
8).- Azul argumenta la postura de su pieza (oral o escrito).
9).- Verde debe identificar el error si es que lo hay.
10).- Si Azul comete error y Verde identifica, Azul pierde turno, juaga Verde.
11).- Si Azul comete error y Verde no identifica, Rojo puede hacerlo, pero igualmente Azul pierde turno y Verde Juega.
12).- Y Así sucesivamente.
13).- Gana quien haya puesto más pizas en el dominó.

¿Qué se espera?

a.- Que los estudiantes resuelvan ecuaciones, encontrando el valor de x para asociar correctamente las piezas solución-ecuación, ecuación-solución o ecuación-ecuación. A partir de una estrategia a su elección.
b.- Reconocer la estrategia que permite resolver determinada ecuación, para asociar las piezas estrategia-ecuación y ecuación-estrategia.
c.- Comprobar la resolución de una ecuación, para cuestionar la postura de una pieza e identificar un error cometido en la resolución.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>2.- ¿Los estudiantes han comprendido las instrucciones del Dominó? ¿Son capaces de resolver ecuaciones hallando el valor de x? ¿Identifican la estrategia a partir de la cual se resuelve determinada ecuación ¿Mantienen una actitud de competencia con respeto y compañerismo? ¿Trabajan de maneta grupal y colaborativamente?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dificultades / Devoluciones

a.- Se espera que todas las posibles dificultades o errores, sean subsanados a partir de la argumentación e identificación de errores por parte del equipo contrario. Cada pieza deberá ser revisada por los otros dos equipos y cuestionada, en caso de hallar un error. Cuando el equipo que puso la pieza cuestionada argumente, posiblemente se dé cuenta de su error, si no es así, los otros dos equipos deberán hacerlo, explicando posteriormente cuál es el error y luego, al poner la pieza que corresponde, se dará la solución.

b.- ¿Si no se cuestiona habiendo error?: Docente cuestiona, equipo argumenta (defiende postura) y los otros dos pueden identificar error.
c.- ¿Si no se identifica error?: Docente puede hacer preguntas como ¿Esto está correcto, por qué? ¿El valor de x es correcto, por qué? También se recomienda comprobar sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación o resolverla con otra estrategia para contrastar resultados.
d.- ¿Si no se puede resolver una ecuación?: Se propone la utilización de las estrategias descomposición/cancelación, restar el opuesto o pregunta (dependiendo de la pertinencia de cada una respecto de la ecuación que se está resolviendo). Se puede recurrir a la balanza pictórica o concreta en caso de ser necesario.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">20 minutos</td></tr>
<tr><td>7.- Verbalizan o representan estrategias de resolución de ecuaciones.</td><td>4.- Docente pregunta a los estudiantes que hayan demostrado más dificultades:

a. ¿Qué les pareció más fácil?</td><td></td></tr>
</table>

8.- Verbalizan y representan las estrategias que ellos reconocen que están presentes en el juego. - Descomposición Aditiva / Propiedad Cancelativa - Utilizar la operación inversa (resta) a ambos lados de la igualdad. - Pregunta. Y resuelven respectivamente para cada una de ellas, las siguientes ecuaciones. a).- $x + 4 = 8$ b).- $x + 3 = 7$ c).- $x - 2 = 3$ 9.- Reconocer que algunas estrategias son más adecuadas para resolver algunas ecuaciones en especial.	b. ¿Qué les pareció más difícil? c. Cuando no estaba explícita la estrategia de resolución ¿Qué estrategias escogieron ustedes para resolver? Muestre. d. ¿Qué estrategias se pueden reconocer en el juego? e. ¿Todas las ecuaciones del juego se pueden resolver o son pertinentes de resolver con cualquiera de las tres estrategias? ¿Por qué? Muestre. 5.- Institucionalización: "Cuando resolvemos ecuaciones, podemos recurrir a diferentes estrategias, como, por ejemplo: Descomponer aditivamente para luego cancelar términos a ambos lados de la igualdad y así obtener el valor de x, se la siguiente manera: $x + 4 = 8$ $x + 4 = 4 + 4$ $x = 4$ También podemos utilizar la operación inversa, por ejemplo: $x + 3 = 7/-3$ $x + 3 - 3 = 7 - 3$ $x = 4$ O, preguntarnos ¿Qué número menos dos es igual a 3?	3.- ¿Los estudiantes mantienen una actitud participativa en el cierre de la clase? ¿Verbalizan dificultades y facilidades que el juego les proporcionó? ¿Verbalizan estrategias de resolución de ecuaciones? ¿Reconocen las tres estrategias presentes en el juego? ¿Reconocen que hay estrategias más adecuadas que otras para resolver ciertas ecuaciones?

Recurso de Aprendizaje

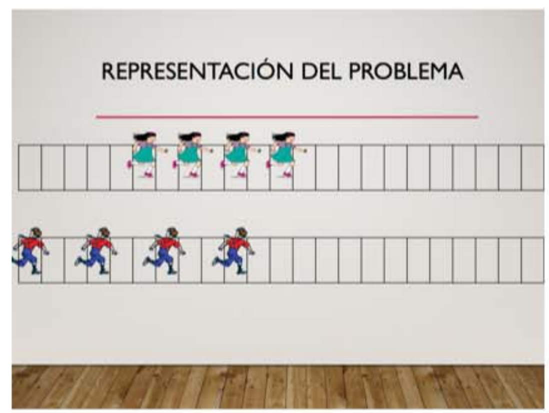
$x+3=8$	$x+5=11$	$x=6$	$x-1=2$	$x=3$	$x+2=6$
$x+2-2=6-2$ $x=¿?$	$x-3=8$	$x=11$	$x+9=19$	$x+9=10+9$ $x=¿?$	$x+18=27$
$x=9$	$x+x=26$	$x=13$	$x-9=3$	$x=12$	$x+3=4$
¿Qué número más tres es cuatro?	$x-7=9$	$x=16$	$x+4=23$	$x+4-4=23-4$ $x=¿?$	$x+4=21$
$x=17$	$x+x=16$	$x=8$	$x+9=3$	$x=12$	$x+2=17$
$x=15$	$x+7=14$	$x+\cancel{7}=\cancel{7}+7$ $x=¿?$	$x-4=14$	$x=18$	$x+1=25$
$x=24$	$x-20=1$	$x=21$	$x+4=18$	¿Qué número sumado a cuatro da dieciocho?	$x+x=44$
$x=22$	$x+5=7$	$x=2$	$x-3=20$	$x=23$	$x-2=3$

Tercera Sesión de Aprendizaje

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$.
Objetivo	"Proponer y resolver la ecuación que permite dar solución a un problema"

Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Multiplicación • Resolución de Ecuaciones • Secuencias Numéricas • Patrones	• Presentación (ppt.) del problema. • Proyector • Computador • Papel • Lápiz

Tareas Matemáticas	**Intervención Docente**	**Evaluación de la Marcha de la Clase**
15 minutos		
1.- Recordar las estrategias de resolución de ecuaciones vistas en la sesión anterior. - Descomposición Aditiva / Propiedad Cancelativa. - Utilizar la operación inversa (resta) a ambos lados de la igualdad. - Pregunta	1.- Explicitación del contrato didáctico y pedagógico. 2.- Preguntas alusivas a la clase anterior, que responden los estudiantes aleatoriamente alzando la mano. a. ¿Qué estrategias de resolución de ecuaciones revisamos la sesión anterior? b. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x + 5 = 10$ a través de la descomposición aditiva y la utilización de la propiedad cancelativa? c. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x + 6 = 9$	1.- ¿Los estudiantes recuerdan las estrategias revisadas en la sesión anterior? ¿Son capaces de resolver las ecuaciones dadas a través de las estrategias señaladas por la docente?

	utilizando la operación inversa a ambos lados de la igualdad? d. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x - 7 = 9$ a través de la estrategia de pregunta?	
	50 minutos	
	3.- Se observa y lee el problema a resolver: *"Roberto y Carla son hermanos. Roberto es mayor que Carla y más alto. Un día, camino a la plaza, decidieron hacerlo saltando los pastelones de la vereda. Roberto comenzó en el en el pastelón 1 y para darla ventaja a Carla que era más pequeña, ella comenzó desde el pastelón 6. A la vez comenzaron a saltar, Roberto saltó del 1 al 4, luego al 7, después al 10. Pero como Carla era más pequeña del 6 saltó del 8, luego al 10 y después al 12. Pedro y Ana, los papás de Roberto y Carla, los observan desde la vereda del frente. Ana le comenta a Pedro que luego del quinto salto, Roberto alcanzará a Carla. Roberto le responde que encontrando los patrones de salto de Carla y Roberto se podría saber si eso es verdad. ¿Tienen razón los papás de Roberto y Carla?* 4.- Se observa la representación del problema para facilitar la comprensión del mismo. 5.- Se plantean una a una las preguntas relativas al problema (después de cada	2.- ¿Los estudiantes han comprendido el problema? 

<table>
<tr><td></td><td>pregunta hay un espacio de reflexión, puesta en común y validación).</td><td></td></tr>
<tr><td>2.- Reconocen los patrones de dos progresiones aritméticas distintas: +3 para Roberto y +2 para Carla.</td><td>a.- Pregunta: ¿Cuál es el patrón con el que salta Carta? ¿Cuál es el patrón con el que salta Roberto?</td><td>3.- ¿Reconocen el patrón de la progresión de Carla y Roberto?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Reflexión: Los estudiantes cuentan con 2 minutos para reconocer el patrón.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Puesta en Común: 3 estudiantes, ojalá con diferentes soluciones, exponen de manera oral sus respuestas argumentándolas (primero las soluciones incorrectas) El curso escucha y contra argumenta en caso de ser pertinente, a modo de ir descubriendo y construyendo la respuesta correcta.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Validación: Estudiante con respuesta correcta expone y argumenta. Se comprueba si el patrón está correcto, continuando la progresión respecto a él.</td></tr>
<tr><td>3.- Elaboran la ecuación que les permite saber en qué pastelón estará Carla y Roberto cuando ellos se encuentren en la séptima posición (luego del sexo salto): $(3 \cdot 6) - 2 = y$ para Roberto y $(2 \cdot 6) + 4 = y$ para Carla. Identificando la incógnita, como la posición de ambos.</td><td>b.- ¿Cuál es la ecuación que me permite saber en qué número de pastelón caerá Carla luego del quinto salto? ¿Cuál es la ecuación que me permite saber en qué número de pastelón caerá Roberto luego del quinto salto?</td><td>4.- ¿Son capaces de elaborar la ecuación que permite conocer el número de pastelón en que estará Carla y Roberto, según su posición?</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Reflexión: Los estudiantes cuentan con 10 a 15 minutos para elaborar ambas ecuaciones.</td></tr>
</table>

	Puesta en Común: 3 estudiantes (respuesta incorrecta, estrategia diferente y respuesta correcta) exponen y argumentan sus respuestas. Curso escucha y contra argumenta a modo de construir en conjunto las ecuaciones correctas. Se puede ir comprobar que la respuesta está incorrecta de manera pictórica.	
	Validación: Estudiante con respuesta correcta expone y argumenta. Se comprueba la validez de la ecuación a partir de la representación del problema, es decir, de manera pictórica.	
4.- Reconocen que cuando al resolver $3x - 2$ y $2x + 4$ reemplazando la x por una posición cualquiera, ese será el número del pastelón en que estará Roberto y Carla respectivamente.	c.- ¿Qué significa la x en ambas ecuaciones?	5.- ¿Reconocen que la x es la posición en la que está Carla y Roberto?
	Reflexión: Los estudiantes cuentan con 2 minutos para elaborar la respuesta.	
	Puesta en Común: 3 estudiantes, ojalá con respuestas distintas, exponen y argumentan sus respuestas. Curso escucha y contra argumenta de ser necesario.	
	Validación: Se verifica pictóricamente a partir de la representación del problema.	
5.- Reconocen que cuando reemplazan la x de $3x - 2$ y $2x + 4$ por la misma posición de ambos personajes y el resultado luego de reemplazar sea el mismo, ese será el número del pastelón en	d.- ¿Es cierto lo que dicen los papás de Carla y Roberto? Explica.	6.- ¿Reconocen que cuando x, es decir la posición de ambos sea la misma y arroje el mismo resultado, este será el pastelón en el que Roberto alcanzará a Carla?

donde los hermanos se encuentren. Por tanto, afirman que luego del quinto sato los hermanos sí se encontrarán en el pastelón número 16. Por ello, afirman que, efectivamente reconociendo los patrones de salto de ambos hermanos, sí se puede saber cuándo y dónde se encontrarán Carta y Roberto.	**Reflexión:** Los estudiantes cuentan con 15 minutos para elaborar la respuesta. **Puesta en Común:** 3 estudiantes (respuesta incorrecta, estrategia diferente y respuesta correcta) exponen y argumentan sus respuestas. Se puede comprobar la respuesta incorrecta, a partir de la representación del problema. **Validación:** Estudiante con respuesta correcta, expone su respuesta y defiende argumentando. Se comprueba de manera pictórica utilizando la representación del problema, si al reemplazar la x por una determinada posición, el resultado es el número del pastelón en el que debería encontrarse Roberto y Carla.	

¿Qué se espera?

Se espera que los estudiantes sean capaces de identificar un patrón y de elaborar y resolver una ecuación a partir de una progresión dada, reconociendo las incógnitas que participan del problema y cómo obtener su valor.

Dificultades / Devoluciones

a.- Posiblemente, los estudiantes no elaboren la ecuación que les permite saber en qué pastelón estará Carla y Roberto cuando ellos se encuentren en la sexta posición. En este caso, se recomienda el uso de una tabla en la que se explicite la posición versus el número del pastelón, por ejemplo, en el caso de Carla:

Posición	Nº Pastelón
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14
6	

¿Cómo podemos conocer sin sumar 2, el Nº del pastelón en el que estará Carla cuando se encuentre en la sexta posición?

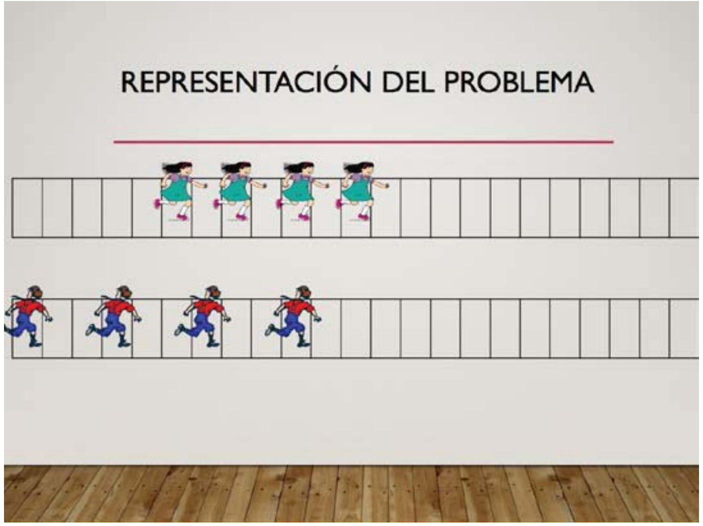
El número del pastelón en el que estará Carla es una incógnita, pues no lo conocemos, ¿qué podemos plantear para hallar el valor de una incógnita?

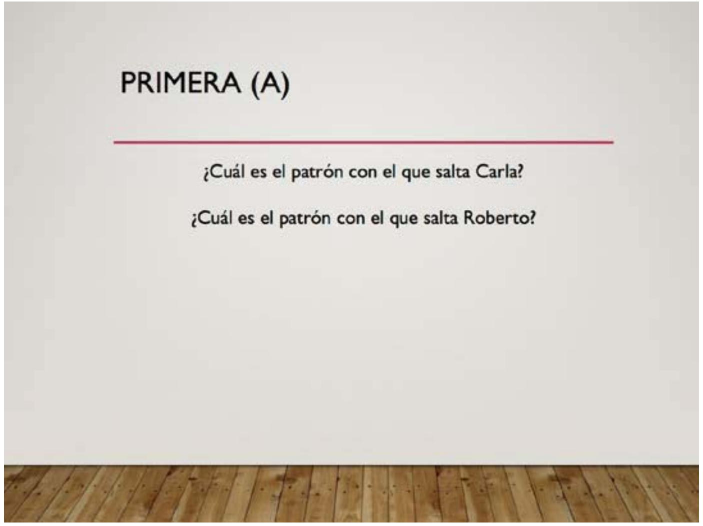
Intentémoslo con la segunda posición, ya que conocemos el número del pastelón en el que está Carla. En este caso tenemos tres datos conocidos: Posición (2) NºPastelón (8) y patrón (2).

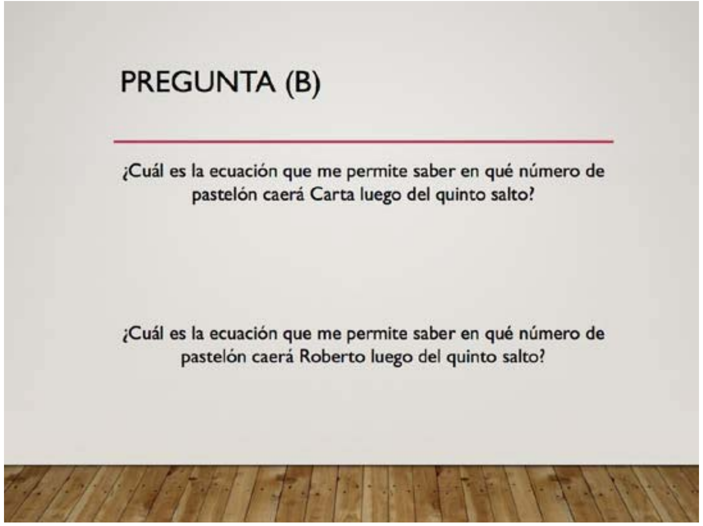
Sabemos que 8 es nuestro resultado, pues es lo que andamos buscando, por tanto, podemos escribir: algo = 8. ¿Qué podemos hacer con el 2 (posición) y 2 (patrón) para llegar al 8? Aquí impera el ensayo y error, y la comprobación con datos diferentes para verificar si la ecuación elaborada es la correcta.

25 minutos		
7.- Identificar los pasos generales y necesarios para resolver un problema a través de una ecuación.	6.- Docente pregunta: a. ¿Qué debemos hacer cuando resolvemos un problema? b. ¿Qué hicimos para resolver el problema planteado en la clase? 7.- Institucionalización: "Cuando resolvemos un problema, debemos identificar los datos conocidos, en este caso las posiciones y los números de pastelones en que se encontraban los hermanos respecto a la posición. Además, debemos identificar qué se nos está pidiendo como nuestra(s) incógnita(s). y elaboramos la ecuación que nos permita resolver el problema, manipulando los datos conocidos y la incógnita. Además, podemos ayudarnos de representaciones que nos permitan comprobar nuestras hipótesis (ecuaciones o formulaciones. Finalmente, recordemos que existen distintas estrategias para resolver ecuaciones y que las soluciones las podemos comprobar reemplazando el valor de x en la ecuación".	8.- ¿Los estudiantes reconocen los pasos más importantes que permiten la resolución de un problema a través de una ecuación?

Recurso de Aprendizaje







PREGUNTA (C)

¿Qué significa la x en las ecuaciones que planteaste en la pregunta anterior?

PREGUNTA (D)

¿Es cierto lo que dicen los papás de Carla y Roberto? Explica.

ANÁLISIS A PRIORI DE LA SECUENCIA

A continuación, se presenta el análisis a priori de la secuencia didáctica propuesta, que se organiza de la siguiente manera, por cada sesión e aprendizaje.

Primero, se explicita el objetivo, los conocimientos previos y los conocimientos a desarrollar. Luego, el análisis de divide de acuerdo a los momentos de la clase (inicio, desarrollo y cierre). Para cada uno de ellos se hace una descripción de la actividad; se presenta la respuesta experta; las posibles estrategias que podrían llevar a cabo los estudiantes; y las dificultades y/o errores que podrían enfrentar, a partir de los cuales se describen las devoluciones que el docente podría realizar frente a estos.

Es importante mencionar, que previo a la descripción de dificultades y errores, se presenta un cuadro en el que se intenta explicar desde algunos argumentos teóricos, porqué ocurren las dificultades a describir y por qué estas conllevarían la aparición de un(os) error(es).

Finalmente, se mencionan devoluciones generales en cuanto al plan de clases en su globalidad, así como también la matemática involucrada en dicho plan.

PRIMERA SESIÓN

Objetivo:	“Resolver ecuaciones de primer grado, a través del uso de la balanza”
Conocimientos Previos	**Aprendizajes Esperados**
- Adición - Sustracción - Números Naturales - Descomposición Aditiva - Concepto de Igualdad - Concepto de Incógnita	- Ecuaciones de primer grado. - Resolución de ecuaciones - Propiedad Cancelativa - Concepto de Equilibrio

INICIO

Descripción de la Actividad

Preguntas Iniciales

1. La edad de mi hermana, más 5 años es igual a 12. ¿Qué edad tiene mi hermana?
2. Pedro gana el doble de Gogos que David, si David tiene 15 Gogos ¿cuántos Gogos tiene Pedro?
3. Si Luis me paga \$500 pesos de una deuda total de \$1.250 ¿cuánto me sigue debiendo Luis?
4. ¿Cómo podríamos representar las situaciones anteriores?

Se espera que los estudiantes sean capaces de traducir las preguntas propuestas, del lenguaje natural al lenguaje algebraico (de manera mental o escrita), con el objetivo de encontrar el valor pedido. Por ello, se pretende que los alumnos identifiquen la incógnita en cada pregunta y los datos conocidos que forman la ecuación.

Respuesta Experta

1. Sea x la edad de mi hermana, $\therefore x + 5 = 12$. Así, $x = 7$ valor que corresponde a la edad de mi hermana.
2. Sea x la cantidad de Gogos que tiene Pedro, $\therefore x = 15 \cdot 2$. Así, $x = 30$ valor que corresponde a la cantidad de Gogos que tiene Pedro.
3. Sea x el dinero que me sigue debiendo Luis, $\therefore 1250 - 500 = x$. Así, $x = 750$ valor que corresponde a lo que me sigue debiendo Pedro.
4. Las preguntas pueden ser representadas a partir de una ecuación, es decir, en lenguaje algebraico, o de manera concreta o pictórica a través de una balanza.

Posibles Estrategias

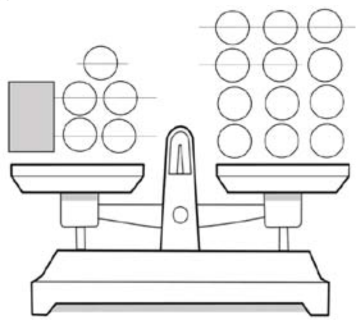
1.a. Presentar las ecuaciones:

- $x = 12 - 5$
- $12 = x + 5$
- $12 - 5 = x$
- $5 - 12 = -x$

1.b. Calcular la ecuación, identificando a la incógnita con un símbolo diferente a x. Por ejemplo: $\blacksquare = 12 - 5$.

1.c. Preguntarse ¿qué número más 5 es igual a 12? y calcular el valor de la incógnita.

1.d. Utilizar la balanza.



2.a. Plantear ecuaciones diferentes, como $\frac{x}{2} = 15$.

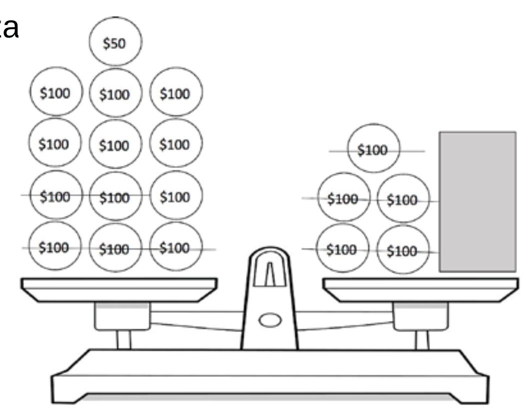
2.b. Preguntarse *¿cuál es el doble de 15?* o *¿cuánto es 15·2?* Y calcular el valor de la incógnita.

3.a. Plantear las ecuaciones:

- $1250 = x + 500$
- $-500 = x + 1250$

3.b. Preguntarse *¿qué número más 500, es igual a 1250?* o *¿cuánto es 1250 menos 500?* para calcular el valor de la incógnita.

3.c. Utilizar la balanza



Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

De acuerdo a Booth (1984) citado en Abrate, Pochulu y Vargas (2016), los estudiantes tienen dificultades para traducir hechos matemáticos escritos en lenguaje natural, a otro más formal mediante expresiones que vinculan números con letras; lo que podría conducir a cometer errores como los que acá se presentan.

1. Sumar los números conocidos: $5 + 12 = 17$

   Devolución: Docente pregunta ¿cuál es mi incógnita? ¿qué es lo que me están preguntando? ¿si debo conocer la edad de mi hermana y ella más 5 es igual a 12, cuántos años tendrá? Se puede utilizar la balanza pictórica o concreta.

2. Plantear la ecuación: $2x = 15$ obteniendo como resultado $\frac{15}{2}$ o 7,5.

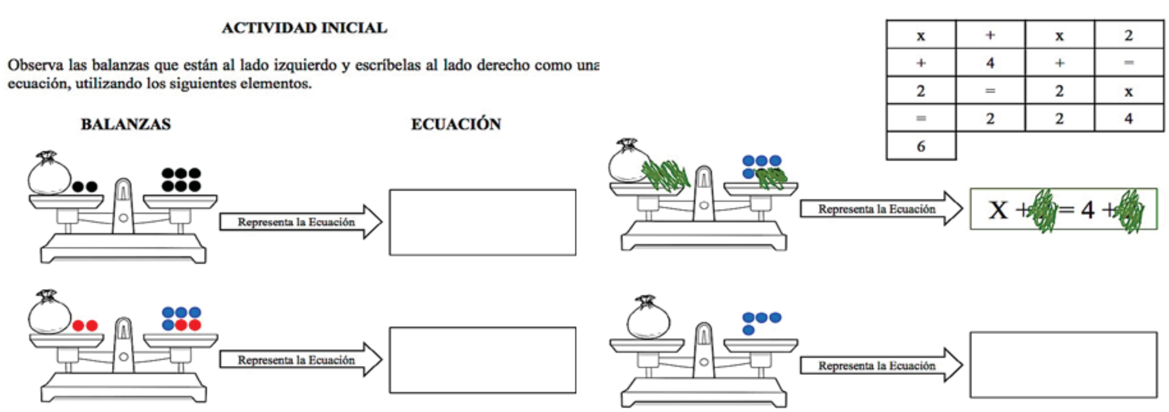
   Devolución: Docente pregunta ¿Se puede tener 7,5 Gogos? ¿Cuántos Gogos tiene David? ¿Cuántos Gogos debería tener Pedro entonces?

3. Sumar los números conocidos, $1250 + 500$, obteniendo como resultado 1750.

   Devolución: Docente pregunta ¿Cuál es el monto total de la deuda? ¿Si Luis le paga $500, disminuye o aumenta la deuda? ¿Qué debo responder? ¿Los $500 que pasó Luis, hay que restarlos o sumarlos a la deuda total?
4. Si los estudiantes tienen dificultades para visualizar una representación, podría preguntarse: ¿cómo respondiste a las preguntas? ¿qué escribiste o imaginaste? la ecuación que planteaste a qué elemento podría asociarse?

DESARROLLO

Descripción de la Actividad (Introductoria)

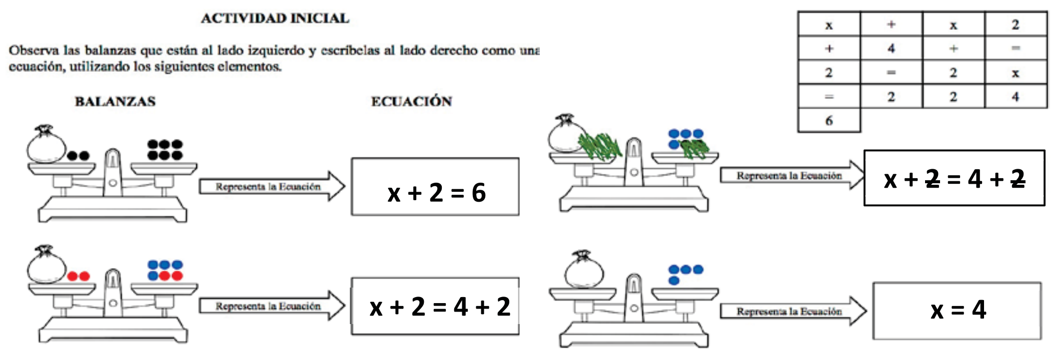

ACTIVIDAD INICIAL

Observa las balanzas que están al lado izquierdo y escríbelas al lado derecho como una ecuación, utilizando los siguientes elementos.

x	+	x	2
+	4	+	=
2	=	2	x
=	2	2	4
6			

En esta actividad se presentan balanzas que representan cuatro pasos de la resolución de la ecuación $x + 2 = 6$, y una tabla con los elementos necesarios para escribir dichos pasos de manera simbólica. Las bolas de la segunda balanza son de diferentes colores con el objetivo de evidenciar una descomposición aditiva. Y, por lo mismo, en la tercera balanza, hay algunas de ellas tachadas para explicitar el uso de la propiedad cancelativa. Se espera que los estudiantes puedan traducir dicha representación, al lenguaje algebraico, reconociendo para ello, los elementos presentes en la balanza,

Respuesta Experta



Posibles Estrategias

a. Dar su respuesta a partir de la balanza, y no considerar los números y símbolos de la tabla
b. Los estudiantes podrían primero, tomar los números y elementos de la tabla, y sobreponerlos en la representación de la balanza para luego escribir la ecuación.

Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

Según Booth (1984) citado en Abrate, Pochulu y Vargas (2006), los estudiantes tienen dificultades frente al uso de símbolos como x y/o el signo igual (=) por mantener una cultura aritmética. Además, según Rico (1995) citado en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2003), los alumnos tienen dificultades para pensar mediante imágenes o representaciones icónicas. Por ello, podrían surgir los siguientes errores.

a. Resolver la ecuación sin considerar los elementos pictóricos de las balanzas que representan los pasos de resolución.

   Devolución: Recordar que la ecuación a escribir, debe estar en correspondencia con su representación en balanza.

b. Escribir la misma ecuación en el paso 1 y 2; y 3 y 4 ($x + 2 = 5$ y $x = 4$ respectivamente), sin distinguir porqué las bolitas en el paso 2 están pintadas de distintos colores o tachadas en el paso 3.

   Devolución: Preguntar ¿por qué crees que las bolitas están pintadas de distinto color? ¿si están agrupadas, cómo podríamos escribir dicha agrupación? ¿por qué crees que las bolitas están tachadas? ¿cómo podemos evidenciar a través de una ecuación que determinadas bolitas se están eliminando o cancelando?

c. No identificar que la bolsa corresponde a la incógnita, es decir a la x.

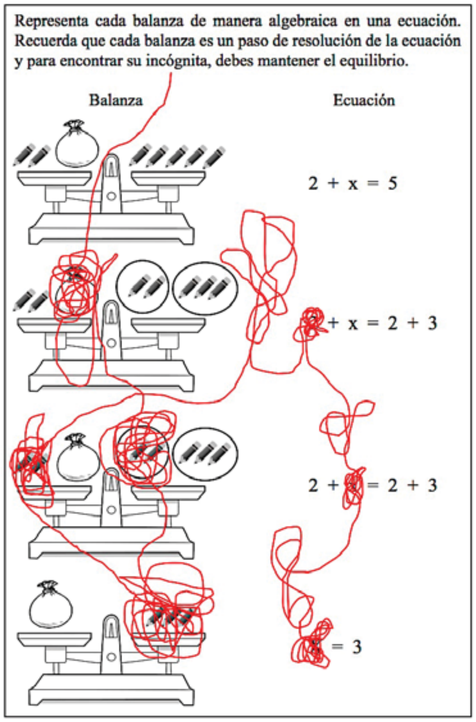
   Devolución: Preguntar ¿conoces el valor o cuántas bolitas hay en la bolsa? ¿cómo podemos llamar a algo que no conocemos?

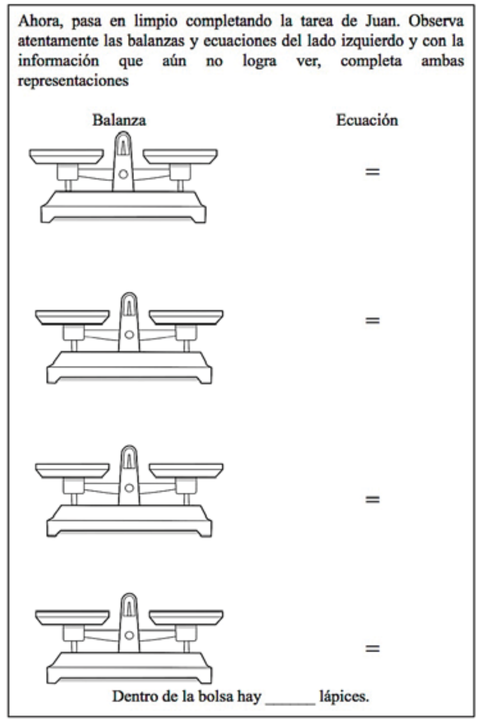
d. No visualizar que en medio de la balanza existe un signo igual (=).

   Devolución: Preguntar ¿la balanza está en equilibrio? ¿qué significa que la balanza está en equilibrio? ¿lo que está en el platillo derecho pesa lo mismo que lo que está en el platillo izquierdo? ¿qué signo podríamos poner en medio de los platillos?

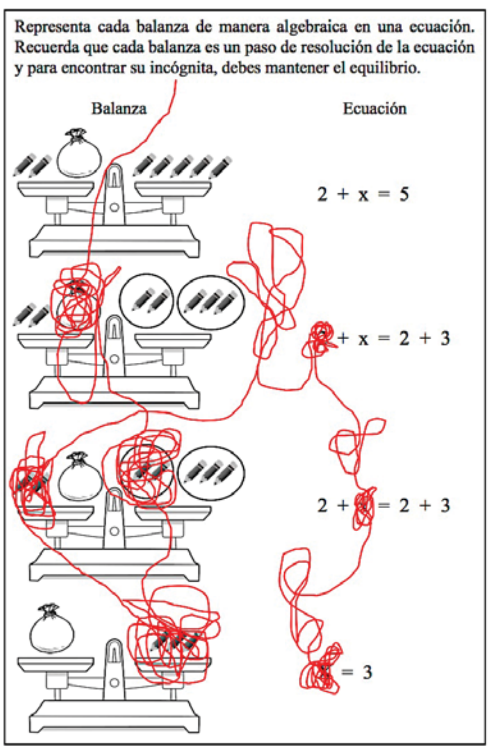
Descripción de la Actividad (Central)

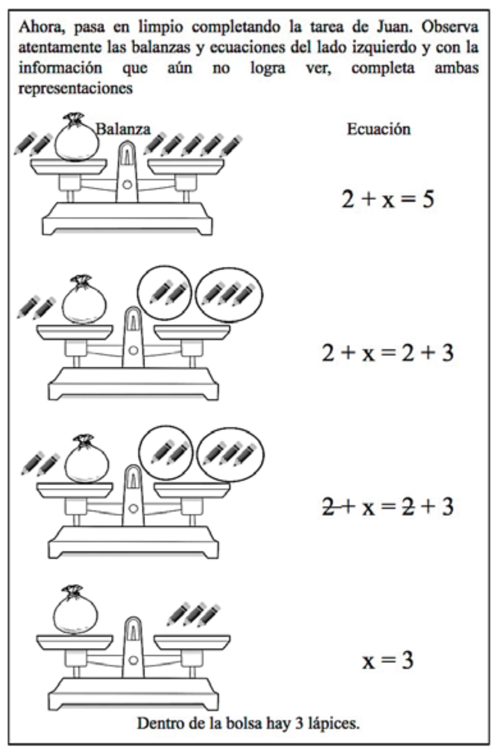
El insumo entregado a los alumnos corresponde – supuestamente – a una tarea rayada, realizada por un estudiante de 5º básico. El estudiante debe observar los elementos presentes tanto en la balanza, como en la ecuación, para poder pasar en limpio dicha actividad. Cada balanza y ecuación corresponden a los pasos de resolución de la ecuación $2 + x = 5$, donde $x = 3$.





Respuesta Experta





Posibles Estrategias

a. Reconocer inmediatamente que $x = 3$ y, por tanto, construir tanto las balanzas, como las ecuaciones con base en esa información y no en la que le entrega el insumo.
b. Resolver la tarea con base en la ecuación $2 + x = 5$, construyendo otras balanzas a partir del lenguaje algebraico.
c. Observar ambas representaciones comparando, por ejemplo, qué elementos están en la balanza y no en la ecuación, agregándolos a esta última o viceversa.

Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

Según Wilder y Váquiro (2015), existen dificultades en relación al uso de la balanza, ya que muchas veces los estudiantes no lograrían generar ecuaciones equivalentes con base en una representación pictórica. Además, Abrate, Pochulu y Vargas (2006), agregan que, hay dificultades en la comprensión de algunos conceptos como ecuación, variable y/o solución. Por otra parte, Booth (1984) citado en Abrate, Pochulu y Vargas (2006), agrega que la tendencia de los alumnos a interpretar las letras como objetos en sí mismos y no como la representación de números, conduciría a errores en la resolución de ecuaciones. Finalmente, el mismo autor agrega que, dificultades en relación a símbolos algebraicos, podría conllevar el error de reducir a un resultado numérico, sin variables, al valor de x, ya que, el signo igual (=), desde los primeros años está asociado a un resultado concreto.

a. No comprender qué representa la bolsa (incógnita)

   Devolución: Preguntar ¿sabes el valor de la bolsa o cuántos lápices tiene? ¿si no conoces el valor de la bolsa, entonces qué es eso para ti? ¿cómo podemos llamar a un número o valor desconocido en lenguaje algebraico?

b. No asociar los elementos de la balanza con los de la ecuación

   Devolución: Relacionar término a término ¿dónde está la bolsa en la ecuación? ¿dónde están los 2 lápices en la ecuación? ¿dónde están los 5 lápices en la ecuación? Se puede recurrir también, al uso concreto de la balanza.

c. No visualizar el concepto de equilibrio en la balanza.

   Devolución: ¿qué hace una balanza? ¿cómo mide el peso una balanza? ¿las balanzas de la tarea, están equilibradas? ¿qué significa que la balanza esté en equilibrio? ¿si la balanza está en equilibrio, ambos platillos pesan lo mismo?

d. Asignar un número aleatorio a la bolsa (0 o 1 por ejemplo).

   Devolución: Preguntar ¿Las balanzas están en equilibrio? ¿Qué pasa con el equilibrio de las balanzas si la bolsa equivale a 0 o 1 lápices?

e. Que todo aquello que esté oculto tras las rayas sea una incógnita, por tanto, se represente a través de una bolsa o una x.

   Devolución: Advertir que las rayas no son incógnitas y que bajo ellas, puede haber un número, un símbolo o una letra. Además, preguntar ¿en el primer paso que no está rayado, cuántas incógnitas hay? ¿es posible que al resolver la ecuación estas incógnitas aumenten? ¿sería posible entonces tener en algún paso una ecuación con dos x?

f. No comprender las agrupaciones como descomposiciones aditivas y escribir, por ejemplo, en el segundo y tercer paso $2 + x = 5$.

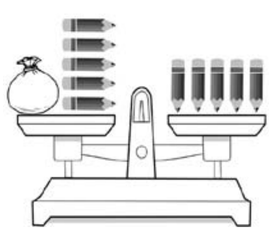
   Devolución: Preguntar ¿por qué crees que los lápices están encerrados en círculos? Advertir en cómo están escritos algebraicamente los platillos derechos de la segunda y tercera balanza, en relación a la agrupación de los lápices.

g. Que tanto la balanza, como la ecuación del tercer paso, representen $2 + 3 = 2 + 3$ sin explicitar la presencia de una incógnita porque reconoce la igualdad o conoce previamente el valor de x y/o de la bolsa.

   Devolución: Preguntar ¿qué ocurrió con la incógnita y/o la bolsa? ¿qué representa la bolsa en lenguaje algebraico? ¿está presente la bolsa en la balanza? ¿si está la bolsa en la balanza, por qué no está en la ecuación? ¿cómo reconoces cuál es tu incógnita y su valor si esta no está escrita?

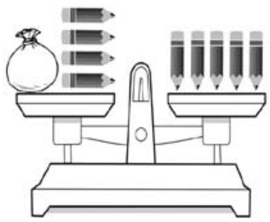
h. Construir balanzas y ecuaciones atribuyendo un valor aleatorio a la bolsa y/o sin considerar los elementos que aún pueden verse en la tarea de Juan (Se utilizará la primera balanza y ecuación para ejemplificar esta dificultad).

   - Si la bolsa y/o $x = 0$



$0 + 5 = 5$
$x + 5 = 5$
$2 + 0 = 5$
$5 = 5$

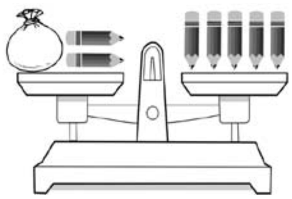
- Si la bolsa y/o $x = 1$



$$1 + 4 = 5$$
$$x + 4 = 5$$
$$2 + 1 = 5$$
$$5 = 5$$

Devolución: Preguntar ¿cómo sabes que la bolsa equivale a 0 o 1? ¿qué pasa con el equilibrio de la balanza si en ella hay 0 o 1 lápices? ¿cómo está representada la bolsa en la ecuación? ¿conoces el valor de la bolsa? ¿cómo podemos escribir un número que no conocemos?

- Si la bolsa $= x$ (Como incógnita solo para la balanza).



$$3 + 2 = 5$$
$$3 + 2 = 3 + 2$$

Devolución: ¿qué pasó con la incógnita en la ecuación? ¿la incógnita está en la balanza? ¿por qué no está en la ecuación?

CIERRE

Descripción de la Actividad

Preguntas Finales
1. ¿Qué hicimos o qué pasos seguimos para ayudar a Juan? 2. ¿Cómo hicimos para hallar el valor de la incógnita? 3. ¿De qué nos sirvió el uso de la balanza?

Se espera que los estudiantes retomen aquello que hicieron en clases y reflexionen sobre qué, cómo y porqué hicieron determinada tarea. Esto, con el objetivo de institucionalizar conceptos como Descomposición Aditiva y Propiedad Cancelativa.

Respuestas Esperadas

1. Observamos los elementos que aún estaban visibles tanto en las balanzas, como en las ecuaciones, y a partir de ellos, fuimos pasando en limpio la tarea de Juan.

2. El valor de la incógnita lo encontramos ya que, al descomponer números, pudimos cancelar términos a ambos lados de la igualdad, manteniendo el equilibrio de la ecuación.
3. La balanza permite representar una ecuación y este caso, nos permitió reconocer cuáles eran los elementos que faltaban en cada ecuación que se encontraba al costado.

Consideraciones Generales para el Cierre

Sin embargo, puede que los estudiantes no reconozcan el valor del uso de la balanza, por ello puede preguntarse, ¿cómo podrías realizar la tarea si la balanza no estuviera presente? ¿sería más simple o más complejo? ¿si alguna vez observaste la balanza para realizar la tarea, por qué lo hiciste? ¿en qué te aportó entonces que la balanza estuviera presente?

Se recomienda el uso de la balanza como material concreto que permita manipular los elementos presenten en las balanzas de la tarea, de tal forma que el estudiante pueda experimentar con el equilibrio de las mismas y comprobar qué ocurre con este cuando se altera aleatoriamente el valor de la incógnita. Su uso también permite asociar los elementos presenten en la balanza, con los elementos de la ecuación, relacionando término a término (incluso uniendo con una línea) para determinar qué son los lápices y la bolsa en la ecuación; y/o qué son los números, la x y el signo igual (=) en la balanza.

La puesta en común y la escucha activa del estudiante respecto de los comentarios, aportes o inquietudes de sus compañeros, también pueden resultar en una devolución, en tanto podría permitir a quien presta atención, solucionar sus propias dudas.

Matemática Involucrada

- Ecuaciones de Primer Grado: Resuelven ecuaciones de primer grado a partir de problemas escritos en lenguaje natural y de su representación en balanza. Estas ecuaciones son aquellas cuyo exponente de la incógnita es 1.

- Adición y Sustracción: Utilizan la adición y sustracción como operaciones que les permiten manipular los números presentes en la ecuación o los elementos de una balanza para encontrar el valor de la incógnita.

- Descomposición Aditiva: Como estrategia de resolución de ecuaciones, los estudiantes descomponen aditivamente números (o los agrupan en el caso de la balanza) para luego utilizar la propiedad cancelativa y así hallar el valor de x. Esto es,

$$x + b = c, \text{ con } b, c \in \mathbb{N}; c \geq b \text{ y } c = b + a \longrightarrow x + b = b + a \Leftrightarrow x = a.$$

- Concepto de Igualdad y/o Equilibrio: Visualizan estos conceptos tanto en la ecuación a partir de los platillos, como en la ecuación gracias al signo igual (=). Este concepto es trabajado en las tres actividades, ya que en general se utiliza la propiedad cancelativa para resolver las ecuaciones, para lo que es imprescindible mantener el equilibrio de las ecuaciones.

- Propiedad Cancelativa: Los estudiantes descomponen aditivamente determinados números y luego eliminan el mismo valor (o cantidad en el caso de la balanza) para hallar el valor de x. Corresponde entonces, a la estrategia que está de por medio en la resolución de las ecuaciones del tipo:

  i. $ax = b$, con b múltiplo de a. Por ejemplo: $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
  ii. $a + x = b$, con $b \geq a$. Por ejemplo: $x + 5 = 7 \Leftrightarrow x + 5 = x + 5 + 2 \Leftrightarrow x = 2$

SEGUNDA SESIÓN

<table>
<tr><td>Objetivo:</td><td colspan="2">“Resolver ecuaciones de primer grado mediante tres estrategias (descomposición aditiva-propiedad cancelativa, aplicar la operación inversa y pregunta), más otras a elección, mientras arman un dominó de ecuaciones”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conocimientos Previos</td><td>Aprendizajes Esperados</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Adición
- Sustracción
- Multiplicación
- Resolución de Ecuaciones
- Estrategias de Resolución (Descomposición Aditiva y Propiedad Cancelativa)</td><td>- Conocer, comprender y aplicar, diferentes estrategias de resolución de ecuaciones, como descomposición aditiva-propiedad cancelativa; aplicar la operación inversa y pregunta.
- Reconocer la estrategia más propicia para resolver determinadas ecuaciones.</td></tr>
</table>

INICIO

Descripción de la Actividad

Preguntas Iniciales

1. ¿Qué hicimos la sesión anterior?
2. ¿Qué características tiene una ecuación?
3. ¿Qué estrategias podemos utilizar para resolver una ecuación?
4. ¿Qué elementos nos ayudan para resolver una ecuación?
5. ¿Por qué la balanza nos permite representar una ecuación?
6. ¿Qué debemos cuidar siempre cuando resolvemos una ecuación?

Cada pregunta debiera ser respondida de manera oral por un estudiante diferente, estos alzan la mano ofreciendo su respuesta y la docente selecciona considerando ojalá, a los alumnos que hayan tenido dificultades la clase anterior. Con ellas, se pretende evaluar de manera diagnóstica, los aprendizajes referidos al concepto de ecuación y a las estrategias de resolución.

Respuesta Esperada

1. Resolver una ecuación, a partir del uso de la balanza.
2. Aludir a conceptos como: igualdad, equilibrio, incógnita, entre otros, con el objetivo de caracterizar a la ecuación.
3. Referir a la propiedad cancelativa y descomposición aditiva como método para hallar el valor de la incógnita.
4. Identifican la balanza como una representación de la ecuación y como un elemento que apoya a su resolución.
5. Reconocer que el equilibrio o la igualdad son conceptos presentes en la balanza y que la constituyen como una buena representación de la ecuación.
6. Advertir que el cuidado del equilibrio en la resolución de una ecuación, es fundamental para hallar el valor de la incógnita

Consideraciones Generales para el Inicio

Las preguntas iniciales tienen directa relación con lo trabajado en la sesión anterior, abarcando tanto lo conceptual, como lo procedimental. Sin embargo, es posible que los estudiantes no hayan logrado un aprendizaje significativo de aquello y no puedan dar respuesta a dichas preguntas.

Por ello, se recomienda retomar la actividad e ir avanzando conforme a cada pregunta. Por ejemplo: En primer lugar, simplemente mostrar la guía trabajada y retomar la primera pregunta. En segundo lugar, a partir de la misma guía, se pone el foco en la ecuación resuelta (se muestra o se escribe nuevamente en la pizarra) para reiterar la segunda pregunta. Y, en tercer lugar, se puede tomar la actividad de un estudiante quien haya desarrollado la respuesta experta y traspasarla a la pizarra, para que, a partir de esta información, los alumnos puedan reconocer estrategias de resolución (tercera pregunta).

DESARROLLO

Descripción de la Actividad

(*) Imagen referencial, las piezas del dominó se encuentran visibles en la Secuencia Didáctica

El curso es dividido en tres grupos, los cuales competirán por poner la mayor cantidad de piezas posibles, mientras se arma un dominó de ecuaciones.

Las posibles uniones del dominó son las siguientes:

a. Solución – Ecuación y Ecuación – Solución

-	x = 2	x + 4 = 6	-
-	x + 4 = 6	x = 2	

b. Ecuación – Estrategia y Estrategia Ecuación

-	x + 4 = 6	¿Cuánto debo sumarte a 4, para que me de 6?	-
-	x + 4 – 4 = 6 – 4 x = ¿?	x +4 = 6	

c. Ecuaciones con la misma solución

-	x + 4 = 6	x + 1 = 3	-

Los estudiantes, deberán resolver ecuaciones a partir de diversas estrategias, que les permitan encontrar el valor de x, asociando correctamente las piezas ecuación-solución, solución-ecuación y ecuación-ecuación. También, deberán reconocer estrategias de resolución, relacionando una determinada estrategia con una ecuación en particular. Finalmente, también es relevante que los alumnos sean capaces de evaluar el trabajo de otro, reconociendo errores y dificultades. Las instrucciones del juego están disponibles en la Secuencia didáctica.

Respuesta Experta

$x+3=8$	$x+5=11$	$x=6$	$x-1=2$	$x=3$	$x+2=6$
$x+2-2=6-2$ $x=¿?$	$x-3=8$	$x=11$	$x+9=19$	$x+9=10+9$ $x=¿?$	$x+18=27$
$x=9$	$x+x=26$	$x=13$	$x-9=3$	$x=12$	$x+3=4$
¿Qué número más tres es cuatro?	$x-7=9$	$x=16$	$x+4=23$	$x+4-4=23-4$ $x=¿?$	$x+4=21$
$x=17$	$x+x=16$	$x=8$	$x+9=3$	$x=12$	$x+2=17$
$x=15$	$x+7=14$	$x+7=7+7$ $x=¿?$	$x-4=14$	$x=18$	$x+1=25$
$x=24$	$x-20=1$	$x=21$	$x+4=18$	¿Qué número sumado a cuatro da dieciocho?	$x+x=44$
$x=22$	$x+5=7$	$x=2$	$x-3=20$	$x=23$	$x-2=3$

Posibles Estrategias

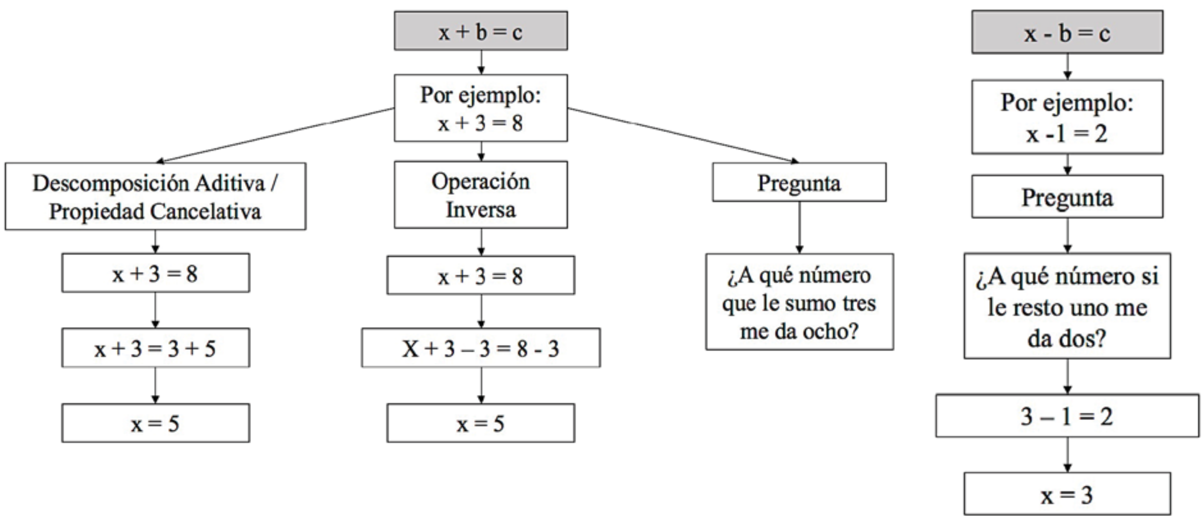
1. Para asociar piezas que requieren hallar el valor de la incógnita (solución-ecuación, ecuación-solución y ecuación-ecuación)

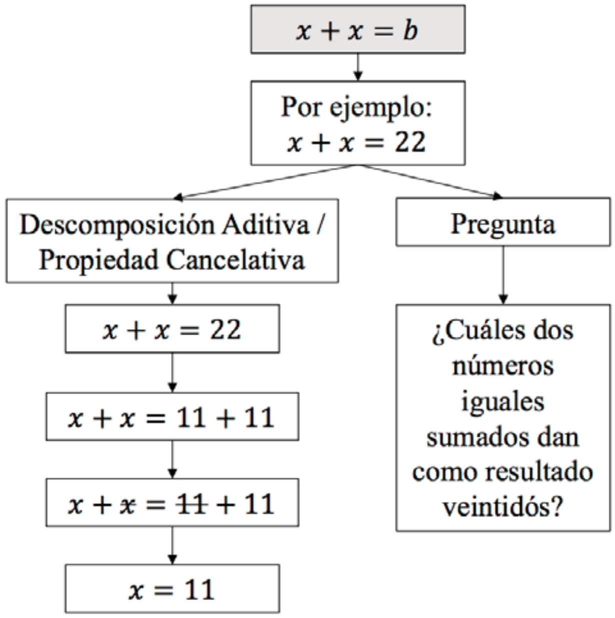
   Con el objetivo de describir las posibles estrategias que podrían desarrollar los estudiantes, para encontrar el valor de x, hemos decidido clasificar las 24 ecuaciones presentes en el juego, de acuerdo a sus principales características, y tomar un representante de cada grupo, que nos permita ejemplificar cada una de ellas.

$\boldsymbol{x+b=c}$	$\boldsymbol{x-b=c}$	$\boldsymbol{x+x=b}$
$x+3=8$	$x-1=2$	$x+x=26$
$x+5=11$	$x-3=8$	$x+x=16$
$x+2=6$	$x-9=3$	$x+x=44$
$x+9=19$	$x-7=9$	
$x+18=27$	$x-4=14$	
$x+3=4$	$x-20=1$	
$x+4=23$	$x-3=20$	

$x+4=21$ $x+9=3$ $x+2=17$ $x+7=14$ $x+1=25$ $x+4=18$ $x+5=7$	$x-2=3$	

De esta manera, los estudiantes podrían resolver las ecuaciones de cada *tipo*, según se indica en los siguientes esquemas, los que evidencian los posibles recorridos, seguidos por los alumnos para hallar el valor de la incógnita.





2. Para asociar piezas que requieren la identificación de una estrategia de resolución.

a. Para las ecuaciones que se muestran en la tabla, las estrategias son:

Ecuación	$x + 2 = 6$	$x + 9 = 19$	$x + 4 = 23$	$x + 7 = 14$
Estrategia	$x + 2 - 2 = 6 - 2$ $x = ¿?$	$x + \cancel{9} = 10 + \cancel{9}$ $x = ¿?$	$x + 4 = 23 - 4$ $x = ¿?$	$x + \cancel{7} = \cancel{7} + 7$ $x = ¿?$

- Buscar seleccionar las ecuaciones que tengan los mismos números y letras que aparecen en las estrategias. Una vez hecho esto, discriminar a qué ecuación corresponde la estrategia.
- Resolver las ecuaciones a partir de diferentes estrategias para comprobar si una de ellas calza con las estrategias descritas.

b. Para las estrategias que se muestran en la tabla, las estrategias son:

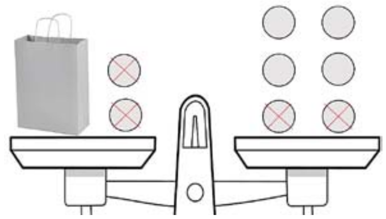
Ecuación	$x + 3 = 4$	$x + 4 = 18$
Estrategia	¿Qué número más tres es cuatro?	¿Qué número sumado a cuatro da dieciocho?

- Transformar la estrategia, que corresponde a la ecuación escrita en lenguaje natural, al lenguaje algebraico.
- Reconocer qué números están escritos en lenguaje natural y buscar qué ecuación tiene los mismos, discriminando así, cuál es la que se resuelve de la forma descrita por las estrategias.

3. Para hallar el valor de la incógnita, utilización de la balanza pictórica.

    Dibujar las ecuaciones a resolver en una balanza y comenzar a sacar elementos en ambos platillos. Esto siempre y cuando, las ecuaciones estén conformadas por números suficientemente pequeños como para representarlos pictóricamente y, que las operaciones en juego, sean adiciones. Por ejemplo:

$\boldsymbol{x+b=c}$
$x+2=6$



4. Para la identificación de errores y/o dificultades.

    Los estudiantes pueden identificar errores en la jugada del otro equipo:

a. Resolviendo por ellos mismos la ecuación en juego, obteniendo un valor distinto de la incógnita.
b. Observando y/o oyendo atentamente la argumentación del equipo contrario en defensa de la postura de su pieza e identificando un error específico en el proceso de resolución.
c. Habiendo armado parte del dominó y que la pieza cuestionada no sea la misma que el equipo contrario puso.

Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

Según Abrate, Pochulu y Vargas (2006), los estudiantes tendrían dificultades para hacer inferencias y asociaciones, las que se originan por la creación de nuevas *“reglas”* de transposición de términos, a partir de las que ya conocían. Los mismos autores agregan, que los alumnos tienden a sobrecargar la memoria con muchas reglas que aplican de manera mecánica sin comprenderlas.

Por otro lado, Gustin y Avirama (2014), señalan que los alumnos tienen dificultades en cuanto a la inversión de las operaciones, debido a la falta de comprensión de las nociones del opuesto, el inverso, las propiedades de la igualdad y operaciones entre números. Estas dificultades impedirían que el estudiante comprenda y halle el significado de la ecuación; y mucho menos que logre llegar a la solución correcta.

Lo anterior, facilitaría entonces, la presencia de errores como los que se describen a continuación, considerando, además, que estos, podrían provenir de dificultades en el manejo de símbolos algebraicos como la x, la que en muchas ocasiones omiten (Booth, 1984. Citado en Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

1. Pasar sumando, pasar restando, pasar multiplicando o pasar dividiendo.

   Uno de los errores más frecuentes que cometen los estudiantes cuando resuelven una ecuación es utilizar el *“pasa”*. Cuando los alumnos ya conocen los números enteros, es decir ya trabajan con números negativos, esta estrategia resulta como el método informal del uso del inverso aditivo, sin embargo, en este caso, los estudiantes trabajan únicamente con números naturales y, así y todo, resuelven ecuaciones restando el número que está sumando; sumando el que está restando; multiplicando el que está dividiendo y dividiendo el que está multiplicando. Por ejemplo:

$\boldsymbol{x+b=c}$	$\boldsymbol{x-b=c}$
$x+9=19$ $x=19-9$ $x=10$	$x-7=9$ $x=9+7$ $x=16$

   En relación a esto, y aunque obtengan el valor que satisface la ecuación, los estudiantes difícilmente podrían reconocer en el dominó, cuál es la estrategia que se asocia a la ecuación de una pieza.

   Devolución: se recomienda explicar, que la supuesta base matemática para la utilización de esta estrategia, es la existencia del inverso aditivo y en qué consiste su aplicación con el objetivo de aclarar que el sistema numérico que ellos conocen, no les permite el desarrollo de esta estrategia.

2. Errores diversos de resolución-operación

   a. Utilizar la operación inversa a un solo lado de la igualdad.

      Cuando se utiliza la operación inversa, como lo señalamos en el apartado de las posibles estrategias, la adición o sustracción a realizar, debe hacerse a ambos lados de la igualdad, respetando el equilibrio de la ecuación. Un posible error, consiste en agregar o restar un número a un solo lado de la ecuación.

      Devolución: docente pregunta ¿qué es lo que debíamos cuidar siempre cuando resolvíamos una ecuación? ¿por qué la balanza era una buena representación de una ecuación? ¿qué características tiene la balanza que la hacen ser una representación de una ecuación? ¿podemos entonces quitar o agregar algo a un solo lado de la igualdad? ¿qué pasa ahí con el equilibrio?

   b. Descomposición aditiva con error en la adición.

      Este error se relaciona directamente con la adición, ya que el estudiante puede descomponer cualquier número de manera incorrecta, sumando mal ambos miembros, por ejemplo: $23 = 9 + 15$, siendo que $9 + 15 = 24$.

      Devolución: docente advierte que cuando se descompongan números para aplicar la propiedad cancelativa, deben tener especial cuidado en ello, y comprobar si los dos números obtenidos de la descomposición, sumados, efectivamente dan como resultado el número descompuesto.

CIERRE

Descripción de la Actividad

Preguntas Finales
1. ¿Qué les pareció más fácil? 2. ¿Qué les pareció más difícil? 3. Cuando no estaba explícita la estrategia de resolución ¿Qué estrategias escogieron para resolver las ecuaciones? Muestre. 4. ¿Qué estrategias se pueden reconocer en el juego? 5. ¿Todas las ecuaciones del juego se pueden resolver o son pertinentes de resolver con cualquiera de las tres estrategias? ¿Por qué? Muestre.

Estas preguntas finales se disponen para que los estudiantes reconozcan cuáles son sus fortalezas y debilidades en relación a la resolución de ecuaciones, para retomar el objetivo de aprendizaje de la clase.

Respuestas Esperadas

Para las primeras tres preguntas, se espera que el estudiante efectivamente reflexione sobre el trabajo realizado. Respecto a la segunda pregunta, los estudiantes deben reconocer las estrategias de: descomposición aditiva y propiedad cancelativa, utilización de la operación inversa a ambos lados de la igualdad y la pregunta ($x+1=2$, ¿qué número, sumado con uno, me da dos?). Y finalmente, para la última pregunta, es importante que los estudiantes reconozcan por ejemplo que, la estrategia de la pregunta, no es eficiente utilizarla en un comienzo con la ecuación $2x+1=x+25$, pero sí con la ecuación $x+9=19$.

Consideraciones Finales para el Cierre

Es relevante que los alumnos reconozcan que, si bien las estrategias de resolución pueden utilizarse para todas las ecuaciones, hay algunas que resultan más eficientes para resolver determinadas ecuaciones y que por ello, es positivo conocer, comprender y manejar, más de un tipo de estrategia de resolución.

Como ya lo mencionamos, en las primeras tres preguntas, no se debieran evidenciar dificultades, ya que consisten en una apreciación personal. Sin embargo, para los estudiantes, podría ser complejo reconocer sus propias habilidades o dificultades; e incluso, cuáles fueron las estrategias que ocuparon. Por ello, se recomienda que el docente pregunte ¿cómo resolviste la tarea? ¿en el proceso que describes, algo te costó? ¿qué fue fácil dentro de este proceso? Para la cuarta pregunta, puede que los alumnos no reconozcan las tres estrategias propuestas. En este caso, se puede recurrir a las piezas donde está descrita cada estrategia y preguntar ¿estos métodos de resolución son los mismos? ¿en qué se diferencian? ¿cuántas estrategias distintas pueden identificar?

Respecto a la última pregunta, los estudiantes podrían afirmar que no importa la estrategia a utilizar para resolver, que todas son igualmente eficientes. Por el contrario, podría apropiarse de una en particular y señalar que es esa la mejor para resolver cualquier tipo de ecuaciones. Ante esta situación se recomienda pedirle al estudiante que resuelva la ecuación $2x + 1 = x + 25$ a partir de las tres estrategias y preguntar ¿cómo la resolviste? ¿alguna de ellas fue más fácil o difícil de usar? ¿por qué? ¿cuál de ellas utilizarías en una ecuación similar? ¿por qué? ¿Entonces, todas las estrategias son igualmente útiles?

Finalmente, respecto a la resolución de ecuaciones, se puede utilizar la balanza pictórica o concreta como devolución, para representar los pasos involucrados en la búsqueda del valor de x. Además, la comprobación de la solución de la ecuación, resulta una buena estrategia, reemplazando el valor obtenido de x en la ecuación inicial.

Matemática Involucrada

- Ecuaciones de Primer Grado: a lo largo de toda la actividad, con el objetivo de poner correctamente las piezas del dominó, los estudiantes resuelven ecuaciones de primer grado, denominadas así cuando el exponente de la incógnita es 1.

- Adición y Sustracción: para cualquiera de las tres estrategias de resolución que se proponen en esta actividad, los alumnos suman y restan números o incógnitas.

- Descomposición Aditiva: Los estudiantes descomponen aditivamente números como estrategia de resolución. Esto para las ecuaciones del tipo: $x + b = c$, con $b, c \in \mathbb{N}; c \geq b$ y $c = b + a \longrightarrow x + b = b + a \Leftrightarrow x = a$.

- Propiedad Cancelativa: los alumnos descomponen aditivamente números como método de resolución, para luego aplicar la propiedad cancelativa que les permite hallar el valor de x.

  i. $ax = b,$ con b múltiplo de a. Por ejemplo: $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$
  ii. $a + x = b$, con $b \geq a$. Por ejemplo: $x + 5 = 7 \Leftrightarrow x + 5 = x + 5 + 2 \Leftrightarrow x = 2$

- Estrategia *"Aplicar la operación inversa"*: Tanto para resolver, como para hallar la ecuación que se resuelve con esta estrategia, los estudiantes pueden aplicar la operación inversa a ambos lados de la igualdad, sumando o restando números, lo que les permite encontrar el valor de la incógnita. Esta estrategia se utiliza con base en:
  i. $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$ con $a \geq b$. Por ejemplo, $x - 3 = 8 \Leftrightarrow x = 3 + 8$
  ii. $a : b = c \Leftrightarrow a = bc$ con a múltiplo de b. Por ejemplo, $\frac{x}{2} = 6 \Leftrightarrow x = 2 + 6$

- Estrategia *"Pregunta"*: Al inicio de una ecuación del tipo $x + b = c;\ x - b = c$, los estudiantes pueden hacerse una pregunta que les permite conocer el valor de x.

TERCERA CLASE

Objetivo:	"Proponer y resolver las ecuaciones que permite dar solución a un problema"
Conocimientos Previos	**Aprendizajes Esperados**
- Adición - Sustracción - Ecuaciones de Primer Grado - Resolución de Ecuaciones - Estrategias de Resolución - Secuencias Numéricas - Patrones	- Resolver un problema a partir de ecuaciones. - Identificar los *pasos* que forman parte del proceso de resolución de problemas, a partir de los cuales, debe proponerse una ecuación para resolverlos.

INICIO

Descripción de la Actividad

Preguntas Iniciales

1. ¿Qué estrategias de resolución de ecuaciones revisamos la sesión anterior?
2. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x + 5 = 10$ a través de la descomposición aditiva y la utilización de la propiedad cancelativa?
3. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x + 6 = 9$ utilizando la operación inversa a ambos lados de la igualdad?
4. ¿Cómo podemos resolver la ecuación $x - 7 = 9$ a través de la estrategia de pregunta?

Estas son preguntas elaboradas como una evaluación diagnóstica en relación a los objetivos de aprendizaje propuestos para la sesión anterior. De esta manera, se espera que los estudiantes reconozcan, verbalicen y apliquen las estrategias aprendidas. Estas preguntas deben ser respondidas de manera oral por los alumnos seleccionados por el profesor, considerando a aquellos que presentaron mayor dificultad.

Respuesta Experta

1. Descomposición aditiva – propiedad cancelativa, aplicación de la operación inversa y pregunta.

2.

$$x + 5 = 10$$
$$x + 5 = 5 + 5$$
$$x + \cancel{5} = \cancel{5} + 5$$
$$x = 5$$

3.

$$x + 6 = 9$$
$$x + 6 = 9/-6$$
$$x + 6 - 6 = 9 - 6$$
$$x = 3$$

4. *¿A qué número si le resto siete, me da como resultado nueve?* $16 - 7 = 9$, por tanto, $x = 16$.

Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

Si bien no se vislumbran posibles estrategias para la parte inicial de la clase, pues se indica específicamente cuál deben utilizar para resolver las ecuaciones dadas, sí se prevé el surgimiento de algunas dificultades y errores.

Las dificultades reportadas por Gustin y Avirama (2014), respecto a la comprensión de las nociones del opuesto, el inverso, las propiedades de la igualdad y operación entre números, podrían llevar a producir errores como los siguientes.

Las dificultades o errores que pueden cometer los estudiantes al resolver las tres ecuaciones, están en directa relación con las ya mencionadas en el mismo apartado de la sesión anterior. Las devoluciones son las ya señaladas para cada uno de ellos.

a. Pasar sumando, pasar restando, pasar multiplicando o pasar dividiendo para las tres ecuaciones propuestas.

b. Errores diversos de resolución:

   - Utilizar la operación inversa a un solo lado de la igualdad.
   - Descomposición aditiva con error en la adición.

DESARROLLO

Descripción de la Actividad

Saltando Pastelones

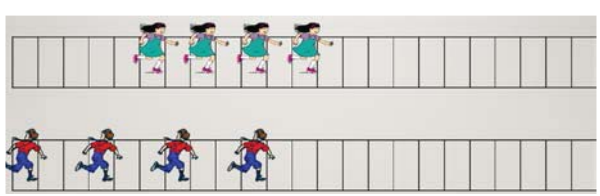
Roberto y Carla son hermanos. Roberto es mayor que Carla y más alto. Un día, camino a la plaza, decidieron hacerlo saltando los pastelones de la vereda. Roberto comenzó en el en el pastelón 1 y para darla ventaja a Carla que era más pequeña, ella comenzó desde el pastelón 6. A la vez comenzaron a saltar, Roberto saltó del 1 al 4, luego al 7 y después al 10. Pero como Carla era más pequeña del 6 saltó al 8, luego al 10 y después al 12.

Pedro y Ana, los papás de Roberto y Carla, los observan desde la vereda del frente. Ana le comenta a Pedro que luego del quinto salto, Roberto alcanzará a Carla. Roberto le responde que encontrando los patrones de salto de Carla y Roberto se podría saber si eso es verdad ¿Tienen razón los papás de Roberto y Carla?

La actividad se enmarca en el contexto de resolución de problemas que requieren la elaboración de ecuaciones, pero, además, con los contenidos de patrones y secuencias numéricas. Por otra parte, si bien se espera que los estudiantes puedan explicar por qué los padres de Roberto y Carla tienen o no la razón; con el objetivo de ir evaluando el proceso y para que lleguen a la respuesta esperada, se plantean una a una, las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el patrón con que salta Carla? ¿Cuál es el patrón con que salta Roberto?
b. ¿Cuál es la ecuación que permite saber en qué número de pastelón caerá Carla luego del quinto salto? ¿Cuál es la ecuación que permite saber en qué número de pastelón caerá Roberto luego del quinto salto?
c. ¿Qué significa la x en las ecuaciones que planteaste en la pregunta anterior?
d. ¿Es cierto lo que dicen los papás de Carla y Roberto? Explica.

Luego de hacer cada pregunta, hay para cada una de ellas, un tiempo de reflexión en que los estudiantes de manera individual resuelven, otro de puesta en común, donde tres alumnos (repuesta experta, respuesta incorrecta y estrategia diferente) exponen sus procesos de resolución y finalmente uno de validación, en donde se comprueba la respuesta correcta. Cabe mencionar, que luego de dar a conocer el enunciado, se debe mostrar una representación del problema, por ejemplo:



Respuesta Experta

Carla		Roberto	
Posición	Nº Pastelón	Posición	Nº Pastelón
1	6	1	1
2	8	2	4
3	10	3	7
4	12	4	10
5		5	
6		6	
7		7	
8		8	
9		9	
10		10	
11		11	

a. Carla salta los pastelones con un patrón +2 y Roberto con un patrón +3.

b.

	Ecuación para cualquier número de pastelón	Justificación	Para conocer el número de pastelón después del sexto salto.
Carla	$2x + 4 = y$	Si el patrón de salto (+3), se multiplica por x, que corresponde a una posición de Carla y a esto, se le suma 8, da como resultado y, que corresponde al número de pastelón en que estará Carla, cuando se encuentre en la posición x.	$(2 \cdot 6) + 4 = y$ $16 = y$ Después del quinto salto, es decir en la posición 6, Carla estará en el pastelón 16.
Roberto	$3x - 2 = y$	Si el patrón de salto (+4), se multiplica por x, que corresponde a una posición de Roberto y a esto, se le resta 4, da como resultado y, que corresponde al número de pastelón en que estará Roberto, cuando se encuentre en la posición x.	$(3 \cdot 6) - 2 = y$ $16 = y$ Después del quinto salto, es decir en la posición 6, Roberto estará en el pastelón 16.

c. La x, tanto en el caso de Carla, como de Roberto, corresponde a la posición en la que se encontrarán ambos, luego del sexto salto. Esto, considerando que incluso antes de saltar, ya se encuentran en la posición 1.

d. Por un lado, lo que dice la mamá de Carla y Roberto es cierto ya que luego del quinto salto, ambos estarán en la sexta posición y tanto Carla como Roberto estarán en el pastelón número 16. Y por otro, Pedro el papá, sí tiene razón, ya que, al encontrar los patrones de salto, se pueden construir las ecuaciones que permiten comprobar o anterior.

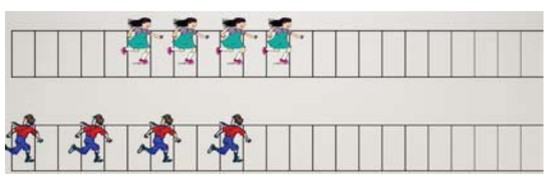
Posibles Estrategias

Cabe mencionar que, si la pregunta que surge del problema fuera únicamente *¿Roberto alcanza a Carla? ¿En qué número de pastelón lo hace?* o las cinco preguntas fueran hechas de manera simultánea al estudiante, este habría hecho una representación tabular o pictórica del problema, para así conocer en qué pastelón se habrían encontrado los hermanos, sin proponer ninguna ecuación para ello. Por lo mismo es que las preguntas son entregadas una a una, promoviendo la elaboración de ecuaciones para resolver el problema.

a.1. contar del 6 al 8, del 8 al 10 y del 10 al 12; y del 1 al 4, del 4 al 7 y del 7 al 10; en el caso de Carla y Roberto respectivamente, identificando cuántos números hay entre ellos.

a.2. Restar $8-6, 10-8, 12-10$ y $4-1, 7-4, 10-7$. El resultado de estas sustracciones corresponde al patrón de salto de Carla y Roberto respectivamente.

a.3. Representar pictóricamente el problema y contar los espacios.



b.1. Representar en problema en una tabla y completar sumando 2 y 3, el número de pastelón en que estaría Carla y Roberto luego del quinto salto respectivamente.

	Carla		Roberto		
Nº Salto	Posición	Nº Pastelón	Posición	Nº Pastelón	Nº de Salto
	1	6	1	1	
1		+2		+3	1
	2	8	2	4	
2		+2		+3	2
	3	10	3	7	
3		+2		+3	3
	4	12	4	10	
4		+2		+3	4
	5	14	5	13	
5		+2		+3	5
	6	16	6	16	
6		+2		+3	6
	7	18	7	19	

Luego de elaborar la tabla, y conociendo el número de pastelón en el que los hermanos se encuentran (16), el estudiante podría comenzar a *jugar,* u operar con los números, hasta darle cuenta que (2 · 6) + 4 = 18 y (3 · 6) – 2 = 19, comprobándolo con los números de la quinta posición.

Una vez hecho esto, el estudiante identificará cuáles son las variables, que en ambos casos es 6 (la posición). Por tanto, las ecuaciones podrían escribirse como $2x + 4 = y$ y $3x - 2 = y$ siendo y el número del pastelón en que estará Carla y Roberto respectivamente.

b.2. Hacer lo mismo que se describió anteriormente, pero con los números dados en el enunciado del problema, dándose cuenta de que: (2 · 1) + 4 = 6, (2 · 2) + 4 = 8, etc. y que (3 · 1) – 2 = 1, (3 · 2) – 2 = 4, etc. elaborando las ecuaciones antes mencionadas.

	Carla		Roberto		
Nº Salto	Posición	Nº Pastelón	Posición	Nº Pastelón	Nº de Salto
	1	6	1	1	
1		+2		+3	1
	2	8	2	4	
2		+2		+3	2
	3	10	3	7	
3		+2		+3	3
	4	12	4	10	

c.1. Reconocer que x corresponde a la variable. Así, si lo que se quiere es conocer el pastelón en el que estarán ambos hermanos, lo que varía es la posición en la que se encuentren, la que corresponde entonces, a la x planteada en la ecuación.

d.1. Los estudiantes pueden recurrir a la respuesta dada en la pregunta b e identificar inmediatamente que luego del quinto salto, en la posición 6, los hermanos sí estarán en el mismo número de pastelón. Por lo tanto, podrían reconocer que el patrón de salto sí permite comprobar si los hermanos se encuentran o no, ya que es fundamental para la elaboración de la ecuación.

d.2. Podrían también utilizar las ecuaciones elaboradas para la pregunta b, calculando los pastelones en los que ambos hermanos estarán luego del sexto salto, es decir, $(2 \cdot 6) + 4 = 18$ y $(3 \cdot 6) - 2 = 19$ para Carla y Roberto respectivamente. Así, al estar el patrón involucrado en las ecuaciones, el estudiante afirmaría que Pedro tiene la razón.

Posibles Dificultades-Errores y Devoluciones

Velásquez, L (2012), señala que existen dificultades en la solución de sucesiones, al no identificar patrones y regularidades, las que se enmarcan dentro del desarrollo del pensamiento variacional. En relación a lo anterior, Velásquez, F (2012) señala que la comprensión del concepto de variable – fundamental en el tema de sucesiones y progresiones – es poco significativa por parte de los estudiantes, por ello, manifestarían dificultades para solucionar problemas, reconocer elementos asociados a situaciones de variación (establecer regularidades y patrones de comportamiento), usar distintas formas de representación (recodificar) y llevar a cabo procesos de generalización. Esto podría favorecer la ocurrencia de los siguientes errores relacionados con patrones y sucesiones.

Por otra parte, Booth, 1984. Citado en Abrate, Puchulu y Vargas, 2006, reporta dificultades para traducir hechos matemáticos descritos en lenguaje natural, a otros más formales, a través de expresiones que relacionan números con letras. Esto, podría producir los errores que se describen a continuación y que están relacionados con la construcción de ecuaciones a partir de un problema.

a.1. Reconocer como patrón, la cantidad de números que hay entre cada número de pastelón.

Carla	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Roberto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Así, entre el 6 y el 8, el 8 y el 10 y el 10 y 12, hay 1 número. En el caso de Roberto, entre el 1 y el 4; y el 4 y el 7 hay 2 números. Por ello, el estudiante podría afirmar que los patrones de Carla y Roberto son +1 y +2 respectivamente.

a.2. Muy similar a lo anterior, los estudiantes a estos 1 y 2 números que hay entre cada pastelón, podrían agregar el pastelón inicial y el pastelón final, afirmando que Carla y Roberto saltan con un patrón de +3 y +4 respectivamente.

Devolución: Docente define brevemente qué es un patrón (*"en este caso, el patrón corresponde a la regla que nos permite continuar con la secuencia""*). A partir de la definición anterior, comenta: Supongamos que el patrón es +1 y +2, por tanto, según esta regla deberíamos poder seguir construyendo la sucesión de números, pero 6 + 1 = 7 y en realidad, debiera ser 8; y 1 + 2 = 3 y en realidad debiera ser 4 (según la sucesión que describe Carla y Roberto). ¿Puede ser entonces +1 y +2? ¿se contemplan solos los números centrales para determinar el patrón? Ahora intentemos con +3 y +4, 6 + 3 = 9, pero debiera der 8 y 1 + 4 = 5, cuando debiera obtener 4, ¿contemplo entonces el número inicial, final y los centrales para obtener el patrón? ¿cómo puedo entonces reconocer el patrón, es decir la regla con la que puedo seguir construyendo la sucesión?

b.1. Elaborar las ecuaciones no generalizables como $x + 2 = y$ y $x + 3 = y$, con x igual a un determinado número de pastelón e y como el número del pastelón siguiente a x.

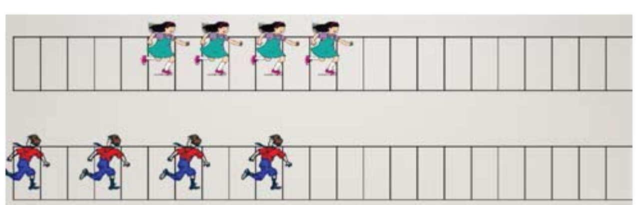
Devolución: Docente pregunta ¿las ecuaciones planteadas te sirven para conocer en qué pastelón estará cada hermano luego del salto número 124? ¿Podrías utilizar estas ecuaciones sin conocer en qué número de pastelón están los hermanos luego del salto 123? Se debe advertir que las ecuaciones a elaborar, deben ser útiles para conocer en qué pastelón estarán los hermanos luego de cualquier salto y sin que sea necesario conocer el número de pastelón en el que estarán previamente.

b.2. Generar una tabla como las ya expuestas, y operar con los primeros números conocidos de ambos hermanos (patrón, primera posición y primer número de pastelón, generando ecuaciones como: (patrón + posición) + 3 = número de pastelón [(2 + 1) + 3 = 6] en el caso de Carla y (patrón + posición) – 3 = número de pastelón [(3 + 1) – 3 = 1] en el caso de Roberto.

Devolución: Docente pide a estudiantes comprobar si estas ecuaciones sirven para todas las posiciones y números de pastelones conocidos por ellos, es decir, que están en el enunciado de la tarea. Luego pregunta ¿funcionan las ecuaciones para conocer en qué número de pastelón están los hermanos luego del quinto salto?

b.3. Imposibilidad de generar ecuaciones. Es posible que los estudiantes no tengan ninguna idea sobre cómo elaborar una ecuación a partir de los datos dados y, por tanto, tampoco para hallar en qué número de pastelón de encuentra Carla y Roberto. Con esto nos referimos a que ni siquiera elaboren ecuaciones incorrectas.

Devolución: Para la siguiente devolución, consideramos pertinente la utilización de la representación pictórica del problema.



Docente pregunta ¿En qué posiciones está el primer dibujo de cada hermano? ¿sabemos que Carla está en el pastelón 6 y Roberto en el 1, pero se posicionaron antes en un pastelón anterior? Entonces, ¿cuál será la posición de ambos?

Comenzar a organizar la información en una tabla, incrementando los números de posiciones y pastelones a partir de lo que puedan señalar los estudiantes.

Carla		Roberto	
Posición	Nº Pastelón	Posición	Nº Pastelón
1	6	1	1
2	8	2	4
⋮	⋮	⋮	⋮

Una vez que la tabla anterior sea completada por los alumnos hasta al menos la cuarta posición, docente pregunta ¿cuál es el patrón con el que salta Carla y Roberto? ¿cómo o dónde podríamos anotar dicho patrón en la tabla para tenerlo siempre presente? En este caso, los estudiantes pueden representarlo de diversas formas, por ejemplo, con flechas, en este caso, ejemplificaremos de la siguiente manera:

Carla		Roberto	
Posición	Nº Pastelón	Posición	Nº Pastelón
1	6	1	1
	+2		+3
2	8	2	4
	+2		+3
3	10	3	7
	+2		+3
4	12	4	10

Una vez construida la tabla, o la representación que cada estudiante haya considerado más apropiada para organizar la información, gracias a la participación y observación de todos, se pregunta: ¿Qué información nos dan los números que conocemos? Entre los números de la posición, pastelón y patrón, ¿cuál de ellos es siempre el mismo? Si el patrón (+2 y +3) son siempre el mismo, entonces ¿la posición y el número de pastelón varían? ¿conocemos todos los valores de las posiciones y el pastelón en el que estará cada hermano respecto de la posición? ¿recuerdan cómo podíamos representar de manera algebraica un número del que no conocemos su valor? ¿la letra con la que identificamos la posición y el número de pastelón puede ser la misma? ¿por qué? Se recomienda ir registrando la siguiente información en la pizarra: patrones fijos que no varían +2 y +3, posición variable es igual a x, número de pastelón variable igual a y (o cualquier otra letra).

Dar un tiempo a los estudiantes para que jueguen o, mejor dicho, operen con estos números y con los de la tabla, para que tengan la posibilidad de elaborar una ecuación. Luego de ese tiempo, proponer una puesta en común con lo realizado por al menos 3 estudiantes.

Si a pesar de las devoluciones anteriormente realizadas, aún ningún estudiante ha logrado generar la ecuación, docente propone operar con los números conocidos (patrón, posición y pastelón). Luego hacer una puesta en común con las propuestas de los estudiantes para reemplazar los valores de posición y pastelón por incógnitas, conformando una ecuación. Esto debe realizarse solo para uno de los hermanos, para así permitir que los alumnos trabajen y elaboren de manera independiente para la elaboración de la segunda ecuación.

c.1. Es posible que los estudiantes no hayan puesto x e y para nombrar a la posición y al número de pastelón respectivamente, y hallan escrito y y x, o w y z, por tanto, no sepan reconocer que se está preguntando por la posición.

Devolución: tomar las ecuaciones propuestas por los alumnos e identificar qué letra representa a la posición, preguntando por ella específicamente.

c.2. Aun cuando el estudiante haya construido las ecuaciones $2x + 4 = y$ y $3x - 2 = y$, no identifica qué representa la x.

Devolución: retomar la devolución que consiste en la elaboración de la ecuación, poniendo énfasis en el momento en que se escribe la x en las ecuaciones.

d.1. Aunque las ecuaciones estén correctamente elaboradas, los estudiantes pueden igualarlas, afirmando que los estudiantes no se encontrarán luego del quinto salto, pero sí después del sexto. Esto sería de la siguiente manera:

$$2x + 4 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 6$$

Devolución: Preguntar ¿a qué corresponde la x? ¿qué dato conocemos si resolvemos la ecuación $2x + 4 = 3x - 2$, la posición en que estarán ambos hermanos o el número de pastelón? Si lo que estamos identificando es la posición ¿a qué pastelón corresponde? Entonces ¿se encuentran los hermanos luego del quinto salto?

CIERRE

Preguntas Finales

1. ¿Qué debemos hacer para resolver un problema?
2. ¿Qué hicimos para resolver el problema planteado en la clase?

Descripción de la Actividad

Estas preguntas son hechas y contestadas de manera oral en el cierre de la clase. Con ellas se espera que los estudiantes reconozcan los *pasos* generales que se deben llevar a cabo para resolver cualquier problema que involucra la elaboración de una ecuación para resolverlo. Además, se pretende que identifique los *pasos* específicos que permitieron el desarrollo del problema planteado.

Respuesta Esperada

Para la primera pregunta, se espera que el estudiante reconozca que cuando se resuelve un problema, hay que identificar los datos conocidos y desconocidos (aquellos que nos piden hallar). Diferenciar entre ellos, los valores fijos y variables, además de asignar un símbolo a los valores que no se conocen. Reconocer qué se nos está preguntando específicamente, y manipular los datos de tal manera de conformar una ecuación que nos permita dar solución al problema.

Para la segunda pregunta, el estudiante debe señalar que reconoció el patrón, ordenó los datos para visualizar la información que tenemos (por ejemplo, en una tabla), reconoció qué nos están preguntando, y conformó ecuaciones para responder a dicha pregunta.

Consideraciones Finales para el Cierre

Si bien los estudiantes pueden haber resuelto el problema exitosamente, existe la posibilidad de que no puedan o se les dificulte verbalizar qué es lo que hicieron para ello. Ante esta situación, se recomienda retomar con el aporte de los alumnos, cada paso realizado; preguntar a un estudiante qué fue lo que hizo primero, preguntarle a otro si hizo lo mismo o cómo lo hizo. Debe registrarse todo esto en la pizarra para que, una vez que se llegue al paso final, se puedan retomar y reorganizarlos de ser necesario.

Para la puesta en común de la última pregunta, se sugiere comprobar a partir de los datos obtenidos en la tabla, demostrando que las ecuaciones funcionan, independientemente de las posiciones o números de pastelón.

Matemática Involucrada

- Secuencia Numérica y Patrón: los pastelones en los que se encuentran ambos hermanos y que corresponden a la información dada por el enunciado, conforman una secuencia numérica de la forma $a; a+n; a+2n; a+3n\ldots$ donde n corresponde al patrón que puede ser entendido en este contexto, como la regla que permite continuar la secuencia.

- Ecuaciones de Primer Grado: Para encontrar la solución a la última pregunta propuesta, los estudiantes deben elaborar dos ecuaciones de primer grado, definidas así cuando el exponente de la incógnita es 1.

- Adición y Sustracción: Para hallar los patrones de las secuencias, elaborar las ecuaciones y resolverlas, los estudiantes deben aplicar las operaciones de adición y sustracción.

- Estrategias de Resolución: Para resolver las ecuaciones, los estudiantes pueden utilizar la estrategia de descomposición aditiva-propiedad cancelativa o aplicar la operación inversa.

i. Descomposición Aditiva: $x + b = c$, con $b, c \in \mathbb{N}$; $c \geq b$ y

$$c = b + a \longrightarrow x + b = b + a \Leftrightarrow x = a$$

ii. Propiedad Cancelativa: $a + x = b$ con $b \geq a$ y $a, c \in \mathbb{N}$ y $ax = b$ con b múltiplo de a.

iii. Aplicar la Operación Inversa: $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$ con $a \geq b;$ y $a{:}b = c \Leftrightarrow a = bc$ con a múltiplo de b.

- Resolución de Problema: Los estudiantes deben resolver un problema, elaborando y resolviendo dos ecuaciones. Al respecto, también se espera que identifiquen el proceso que implica la resolución de un problema.

CONCLUSIONES

La propuesta didáctica, cumple con el objetivo de convertirse en una monografía, en tanto se construye con base en la experiencia de un Estudio de Clases realizado por un grupo de tres docentes, en el marco del curso Seminario de Avance de Investigación. La reflexión que conlleva este diseño metodológico, permite obtener elementos a considerar, para poner a disposición de investigadores y docentes, una secuencia de clases que puede ser desarrollada y adaptada en diferentes contextos educativos e investigativos.

El análisis realizado acerca de la clase implementada, a partir del diseño metodológico propuesto, nos provee de algunos resultados que fueron considerados a la hora de tomar decisiones acerca de cómo diseñar nuevos planes de clases, que permitan favorecer no solo el aprendizaje de los estudiantes respecto al objeto matemático, sino también la enseñanza por parte de maestro.

La evidencia recogida, más la discusión acerca de ella, se constituyen como los principales elementos que justifican tanto los objetivos, como las tareas de aprendizaje presentes en cada planificación. Además, el análisis cognitivo desarrollado con base en el marco conceptual Análisis Didáctico (Rico, 2013), nos llevó a adentrarnos en el currículum, en relación a cómo se presenta el objeto ecuación dentro de él.

Así, los objetivos fueron elaborados y articulados, considerando que, *el tránsito hacia la representación simbólica, es más sólido si luego se permite una etapa en que lo concreto se presenta icónicamente, con imágenes o representaciones pictóricas, para más tarde avanzar progresivamente hacia un pensamiento simbólico-abstracto* (Mineduc, 2012, p. 2). Y, además, *la resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la matemática, en tanto busca promover el desarrollo de formas de pensamiento y de acción que posibiliten a los estudiantes procesar la información proveniente de la realidad y así profundizar en su comprensión acerca de ella y de los conceptos aprendidos* (Ibíd, p. 3).

En relación a lo anterior, si bien la balanza se utiliza como introducción al concepto de ecuación en la primera sesión, se promueve, además, la comprensión y conceptualización de elementos propios del algebra, así como también, la traducción el lenguaje natural al lenguaje algebraico, ya que ambos procesos se consideran como necesarios para enfrentar la resolución de ecuaciones con éxito.

En la misma línea, para la segunda sesión, se deja a un lado la representación pictórica de la ecuación, para dar paso, al aprendizaje significativo de diferentes estrategias de resolución adecuadas al nivel de aprendizaje de los estudiantes y, sobre todo, a los conocimientos previos y actuales que poseen. En este caso, los alumnos desarrollan un álgebra dentro del sistema de los números naturales y, por tanto, las estrategias que pueden usar para resolver ecuaciones, deben ser coherentes con dicho marco, y ceñirse a las características de éste.

Finalmente, la última clase, implica la resolución de un problema a partir de la elaboración de ecuaciones, que corresponde al desarrollo de competencias de orden superior, en comparación con los objetivos antes mencionados.

Respecto a la innovación, Domínguez, Medina y Sánchez (2011) señalan que la tarea de innovar consiste en trabajar en un horizonte de mejora continua para cuantos intervienen en el acto formativo y, demostrar que los implicados en tal acción, logran los objetivos y dominan las competencias básicas que se estiman más valiosas. Así, *innovar es aportar líneas de reflexión y transformación cada vez más relevantes que atañen a la institución y a los procesos de enseñanza-aprendizaje alcanzados en el aula* (Ibíd, p. 7).

Considerando lo expuesto en el párrafo anterior, la secuencia didáctica que se propone en este documento, se constituye como una innovación, en tanto surge a partir de la reflexión acerca de la acción docente (enseñanza) y el comportamiento de los estudiantes (aprendizaje). De esta manera, se consideran elementos que han estado presentes en el aula durante años, como por ejemplo la balanza y la resolución de ecuaciones, para analizar cómo interactúan los alumnos con dichos elementos, y así, poder mejorar un plan de clases que los incorpora, agregando otros dos, enlazados coherentemente y que aportan progresivamente en el aprendizaje significativo del estudiante respecto al objeto.

Más específicamente, la primera clase resulta innovadora, en tanto busca consolidar el paso de la aritmética al álgebra, lo que a su vez se transforma en un medio o resguardo para incorporar la balanza de manera exitosa, disipando las dificultades y/o errores que esta podría propiciar, ya que fue precisamente este, uno de los resultados obtenidos a partir del análisis realizado en el Estudio de Clase.

Respecto a la segunda sesión, la innovación está presente en el juego como medio para conocer, comprender y aplicar diversas estrategias de resolución de ecuaciones, ya que el juego es rechazado por muchos docentes al ser visto como una actividad frívola y poco significativa (Gardner, 1980. Citado en López, 2014). Sin embargo, el juego sirve para lograr el aprendizaje de contenidos conceptuales matemáticos, y el desarrollo de contenidos procedimentales y actitudinales (López, 2014).

El aspecto innovador de la última sesión, está en propiciar la evaluación respecto a la pertinencia de la solución, ya que como se señaló en el análisis a priori de esta clase, aunque los estudiantes elaboren ecuaciones correctas y las resuelvan exitosamente, podrían equivocar la respuesta al problema.

En relación al aporte que significa la presente monografía para la comunidad educativa, reiteramos que el proceso cíclico-reflexivo presente en su elaboración, puede ser el mayor aporte, no tan solo a profesores, sino a investigadores relacionados con la educación, la didáctica, la matemática, entre otros. Por ello, hay que considerar, además, que este documento no se comprende únicamente de una secuencia de tres clases, sino que también, se explicitan y desarrollan todos los otros apartados en los que se trabajó previa y necesariamente para la elaboración de la propuesta didáctica. De esta manera, además de las tres sesiones planificadas, el análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación, que en conjunto van construyendo nuestro marco conceptual, son también un gran aporte, pues permiten conocer, por ejemplo, cómo se trabaja nuestro objeto, tanto en el currículum como en los textos escolares; así como también, cuáles son las limitaciones de aprendizajes reportadas por otras investigaciones respecto a la resolución de ecuaciones. Por ello, no solo se podrá implementar la secuencia, sino que también, adaptarla a diferentes contextos, realidades y necesidades; o incluso, elaborar una nueva, a partir de los elementos que en este documento se proponen.

REFERENCIAS

Abrate, R., Font., V., & Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. En L. Díaz (Presidencia), *La Problemática de la enseñanza-aprendizaje de la matemática*. Comunicación Breve en II Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa, La Pampa, Argentina.

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María. Recuperado desde http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

Albendea, P. (2011). *La historia del álgebra en las aulas de secundaria* (Maestría). Universidad de Cantabria, Cantabria, España.

Ávila, J; Fuenzalida, C; Jiménez; MJ y Ramírez, P. (2013). *Matemática 5º Básico. Tomo I*. Santiago, Chile: Santillana.

Ávila, N y Navarro, F. (2016). *Matemática 5º Básico.* Santiago, Chile: Santillana.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children`s Strategies and Errors. A report of the Strategies and Errors in Secondary Marhematics Proyect*. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.

Borja, R (2012). *Ecuaciones de primer grado en 2º ESO* (tesis de master). Universidad de Granada, Granada, España.

Boyer, C. (2013). Historia de la Matemática. Madrid, España: Alianza Editorial.

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: el caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Revista Uniciencia, 28*(*2*), 15-44.

De Moreno, I., & De Castellano, L. (1997). Secuencias de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA, 2*(3), 247-258.

Domínguez, Mª.C., Medina, A., y Sánchez. C. (2011). La innovación en el aula: referente para el diseño y desarrollo curricular. *Perspectiva Educacional 50*(1), 61-86.

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2003). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

Estrella, S., Morales, S., & Olfos, R. (2015). Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. *Revista Electrónica Educare*, *19*(3), 1-17.

Fernández, A. (2012). *Una revisión histórica de la ecuación cúbica como reflexión para su enseñanza* (Tesis de Pregrado). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Guerrero, C; Mena, J; & Morales, A. (2017). Fostering Transit between Real World and Mathematical World: Some Phases on the Modelling Cycle*. International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(3), 1-24. doi: 10.1007/s10763-017-9856-9

Gómez, P. (2005). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*.* Comunicación presentada en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática.

González, P. (2008). Euler y la Geometría Analítica. *Quaderns d`Històra de l`Enginyeria,* (IX), 83- 117.

González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* (Tesis de Grado). Universidad de Cantabria, España.

González, V., Rey, S., Olivares, P., & Parra, Y. (2015). Errores de estudiantes de primer año medio en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado. En C. Vásquez (Presidencia), *Perspectivas actuales de la educación matemática en una sociedad de cambio*. Comunicación Breve llevada a cabo en las XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Villarrica, Chile.

Gustin, J. y Avimara, L. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo* (tesis de grado no publicada). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. DF, México: Mc Graw Hill.

Ho, F., Kee, G. & Ramakrishnan, C. (2017). *Matemática 5º Básico. Santiago*, Chile: Santillana.

Hurtado, L., & Torres,C. (2015). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real. En A. Ruiz (Presidencia). Comunicación llevada a cabo en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México.

Hurtado, L., Y Torres, C. (2013). Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en la escuela. Una propuesta desde lo variacional y la resolución de problemas. En E. Rodríguez (Presidencia), *Pensamiento Algebraico*. Comunicación Breve en VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

Hurtado, L. (2013). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica. En A. Ruiz (Presidencia), *Enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar; Formación de profesores*. Comunicación Breve llevada a cabo en las VII Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Cali, Colombia.

Iturra, F; Mardones, O; Martínez, P; Romero, D y Pinto, E. (2016). *Matemática para Quinto año de Educación Básica*. Santiago, Chile: Ediciones SM.

Jaramillo, L. (2003). ¿Qué es Epistemología? Mi mirar epistemológico y el progreso de la ciencia. *Cinta de Moebio,* (8), 1-7.

Klein, F. (1950), *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Barcelona, España: Paidós.

López, Mª.F. (2014). *El juego y las Matemáticas* (tesis de grado). Universidad de la Rioja, La Rioja, Argentina.

Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemática de secundaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Lupiáñez, J.L., & Rico, L. (2008). Análisis Didáctico y Formación Inicial de Profesores: Competencias y Capacidades en el Aprendizaje de los Escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

Mena, A. (2002). *Elemento de Matemáticas: Las Relaciones*. Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://netlizama.usach.cl/avcapituloII.pdf

Mena, A. (2007). El estudio de clase japonés en perspectiva. En M. Díaz (Presidencia). Informe de investigación presentado en XIII Jornada de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, Valparaíso, Chile.

Ministerio de Educación. (2012). *Matemática Educación Básica. Bases Curriculares*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Primer Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Segundo Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Tercer Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Cuarto Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Quinto Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2013). *Matemática. Programa de Estudio. Sexto Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática. Programa de Estudio. Séptimo Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática. Programa de Estudio. Octavo Año Básico*. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Panamá. (2011). *Problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/12342132.pdf

Muñoz, L., & Swears, Y. (2013). Micro-Ingeniería didáctica adecuando una balanza para enseñar a los estudiantes a descubrir y desarrollar estrategias que les permita resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros. En E. Rodríguez (Presidencia), *Pensamiento Algebraico*. Comunicación Breve en VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

Ortega, A. (2012). *Ecuaciones de Primer Grado* (fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Rey, L. (2012). *Unidad didáctica sobre ecuaciones de primer grado en 2º de E.S.O* (fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69-108.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 11-27.

Rincón, L. (2007). *Curso elemental de probabilidad y estadística*. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

Ruíz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las %20matematicas.pdf

Sánchez, J.A. (2005). *La Matemática en la India 500 d.c a 1200 d.c.* Recuperado de http://matematicas.uclm.es/itacr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próximo. En P. Montero (Presidencia), *Proyectando enfoques, sentidos y experiencias de la educación matemática para una sociedad participativa e inclusiva*. Comunicación Breve llevada a cabo en XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Santiago, Chile.

Vargas, J. (2013). *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela* (Magíster). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Velásquez, F. (2012). *El estudio de las ecuaciones y series desde la teoría del aprendizaje significativo* (tesis de grado no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Velásquez, L. (2012). *Enseñanza de sucesiones numéricas para potenciar el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de cuarto grado de básica primaria* (tesis de grado no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Wilder, G., & Váquiro, L. (2015). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza* (tesis de grado no publicada). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Zambrano, L. (2011). *Planteamiento y solución de problemas de ecuaciones, usando estrategias y métodos propuestos en el desarrollo histórico de la teoría de ecuaciones* (tesis de grado no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Anexo 1: Objetivos de Aprendizaje e Indicadores de Evaluación de 1º a 8º Básico

Curso	Objetivo de Aprendizaje	Indicadores de Evaluación
1º	Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=). O.A 12	- Determinan igualdades o desigualdades entre cantidades, usando una balanza y registran el proceso de manera pictórica. - Explican igualdades o desigualdades usando balanza. - Ordenan cantidades, empleando una balanza. - Resuelven problemas que involucran igualdades y/o desigualdades, usando una balanza.
2º	Demostrar, explicar y registrar la igualdad y desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo (=) y los símbolos no igual (>, <). O.A 13	- Determinan y registran dos igualdades o desigualdades dadas, con el uso de una balanza para verificar su resultado. - Comparan y registran igualdades o desigualdades con el uso de símbolos (=, <, >) en forma pictórica y simbólica.
3º	Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forme pictórica y simbólica del 0 al 100. O.A 13	- Describen y explican una operación inversa con ayuda de las relaciones numéricas en una “Familia de Operaciones”, por ejemplo: 6, 7 y 13 en forma concreta, pictórica y simbólica. $13 – 7 = 6 \leftarrow 6 + 7 = 13 \rightarrow 7 + 6 = 13 \rightarrow 13 – 6 = 7$ - Resuelven una ecuación, aplicando estrategias como: Ensayo y error, “utilizar la operación inversa” en forma concreta y pictórica.
4º	Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100, aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción. O.A 14	- Modelan ecuaciones con una balanza, real o pictóricamente, por ejemplo: $x + 2 = 4$ - Modelan ecuaciones e inecuaciones de un paso, concreta o pictóricamente, con una balanza y además con software educativo. - Resuelven adivinanzas de números que involucran adiciones y sustracciones.
5º	Resolver problemas, usando ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones en forma pictórica y simbólica. O.A 15	- Expresan un problema mediante una ecuación donde la incógnita está representada por una letra. - Crean un problema para la ecuación dada. - Obtienen ecuaciones de situaciones imaginadas sin resolver la ecuación - Resuelven una ecuación simple de primer grado con una incógnita que involucre adiciones y sustracciones. - Evalúan la solución obtenida de un problema en términos del enunciado del problema. - Explican estrategias para resolver problemas, utilizando ecuaciones.
6º	Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones. O.A 10	- Escriben y explican la fórmula para encontrar el perímetro de un rectángulo. - Escriben y explican la fórmula para encontrar el área de un rectángulo. - Usan letras para generalizar la propiedad conmutativa de la adición y la multiplicación - Describen la relación entre los valores en una tabla, usando una expresión en que intervienen letras. - Representan la regla de un patrón, usando una expresión en que intervienen letras.
	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: - Usar balanza - Usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la	- Determinar soluciones de ecuaciones que involucran sumas, agregando objetos hasta equilibrar la balanza. - Expresan números en una forma que involucre adiciones o sustracciones con números. Por ejemplo: expresan 17 en la forma $2 \cdot 8 + 1$, o 25 en la forma $3 \cdot 9 – 2$. - Expresan números en una forma que involucre adiciones o sustracciones con números y con incógnitas. Por ejemplo: expresan 19 en la forma $4 \cdot x + 3$.

	ecuación, aplicando procedimientos formales de resolución. O.A 11	- Resuelven ecuaciones descomponiendo de acuerdo a una forma dada y haciendo una correspondencia 1 a 1. Por ejemplo: resuelven la ecuación $5 \cdot x + 4 = 39$, expresando 39 en la forma $5 \cdot x + 4$, y mediante correspondencia 1 a 1 determinan el valor de x. - Aplican procedimientos formales, como sumar o restar números a ambos lados de una ecuación para resolver ecuaciones.
7º	Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades; y construir ecuaciones. O.A 6	- Representan patrones de manera pictórica y simbólica. - Relacionan expresiones algebraicas con patrones dados. - Expresan patrones geométricos con términos algebraicos; por ejemplo: "Tres unidades al norte (n) y dos unidades al este (e)" con $3n + 2e$, relacionando con puntos y gráficas en el plano cartesiano. - Relacionan expresiones del lenguaje natural con términos algebraicos; por ejemplo: "el doble de…" o "la mitad de…" con $2x$ o $\frac{x}{2}$, etc. - Representan expresiones algebraicas sencillas de manera concreta (metáfora de máquinas), pictórica (medidas de figuras) y simbólica. - Resuelven problemas de la vida cotidiana que pueden ser resueltos con ecuaciones.
	Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucren ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: $ax = b; \frac{x}{a} = b \ (a, b \text{ y} c \ \in \mathbb{Z}; \ a \neq 0)$ $ax < b; \ ax > b \frac{x}{a} > b(a, b \ y \ c \ \in \mathbb{N}; a \neq 0)$ O.A 9	- Representan transformaciones equivalentes mediante modelos concretos de balanzas: agregar o sacar objetos. - Resuelven ecuaciones e inecuaciones de la vida diaria con ecuaciones de la forma $ax = b$ o $\frac{x}{a} = b, a \neq 0$. - Modelan situaciones de la vida diaria con inecuaciones de la forma $ax < b; \ ax > b; \frac{x}{a} < b; \frac{x}{a} > b, a \neq b, a \neq 0$. - Representan la solución de las ecuaciones o inecuaciones en la recta numérica.
8º	Modelar situaciones de la vida diaria y otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma O.A 8: $ax = b; \frac{x}{a} = b;$ $a \neq 0; ax + b = c;$ $\frac{x}{a} + b = c;$ $ax = b + cx;$ $a(x + b) = c;$ $ax + b = cx + d$	- Representan pictóricamente, mediante balanzas, ecuaciones de la forma: $ax = b; \frac{x}{a} = b; \ a \neq 0; ax + b = c; \frac{x}{a} + b = c; ax = b + cx; a(x + b) = c; ax + b = cx + d$. - Identifican las actividades "agregar a la balanza" con la adición y "sacar de la balanza" con la sustracción. - Modelan transformaciones equivalentes con actividades que mantienen el equilibrio de la balanza. - Modelan situaciones que requieren de una ecuación o inecuación para responder a un problema. - Resuelven ecuaciones de la forma: $ax = b; \frac{x}{a} = b; \ a \neq 0; ax + b = c; \frac{x}{a} + b = c; ax = b + cx; a(x + b) = c; ax + b = cx + d$. En ejercicios rutinarios. - Resuelven problemas cotidianos, utilizando ecuaciones e inecuaciones.

Anexo 2: Tratamiento del Concepto y la Resolución de Ecuaciones en cuatro Textos Escolares

Criterio	Santillana (2017) Ministerial	Santillana (2013) Licitación Privada Proyecto Casa del Saber	Editorial SM (2016) Licitación Privada Proyecto Savia	Santillana (2016) Licitación Privada Proyecto Todos Juntos
Concepto de Igualdad	Se define como: "Cuando se suma, resta, divide o multiplica el mismo número en ambos lados de la igualdad, esta se mantiene" a partir de sus propiedades.	Se define a partir de un ejemplo como: "Una igualdad (=) entre expresiones significa que ambas representan lo mismo. En caso contrario se dice que no son iguales o que son distintas (≠)" Luego se enuncian propiedades (+ y -)	Se define como: "Dos expresiones iguales o distintas, que denotan el mismo objeto, reciben el nombre de igualdad, por ejemplo: 2 + 2 = 4".	Se define como: "Una igualdad (=) entre dos expresiones, significa que ambos representan lo mismo, en caso contrario, puedes decir que no son iguales o que son distintas (≠)". Luego, se enuncian propiedades (+ y -)
Expresiones Algebraicas	Se define una expresión algebraica a través de un ejemplo: "Las expresiones $x + 30, x - 3, x - 1, x + 1, x + 2$ son ejemplos de expresiones algebraicas, ya que combinan números, letras y operaciones $(+, -, \cdot, :)$".	Se define Lenguaje Algebraico como: "La información escrita en lenguaje natural, puede ser representado en lenguaje algebraico, que está formado por números y símbolos, los que se relacionan para formar las expresiones algebraicas. En general, se usa una letra minúscula para representar un número cualquiera".	Se define Lenguaje Algebraico como: "El lenguaje algebraico es una forma de representar con símbolos y números lo que normalmente expresas en relación con la matemática o los números en general. De esta forma puedes manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que ayuda a resolver problemas matemáticos o a mostrar generalizaciones". También se define Expresión Algebraica como: "Son un conjunto de números y símbolos (letras) ligados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas"	Alumnos relacionan un enunciado dado, con la ecuación que lo representa.
Valorizar Expresiones Algebraicas	Se presentan ejercicios como "Halla el valor de $x + 5$ si $x = 9$"			No presenta.
Comparación de Expresiones.	Uso de =, > y < para comparar expresiones.	Uso de =, > y < para comparar expresiones y de la balanza pictórica para comparar expresiones.	Uso de =, > y < para comparar expresiones.	Uso de =, > y < para comparar expresiones y de la balanza pictórica para comparar expresiones.

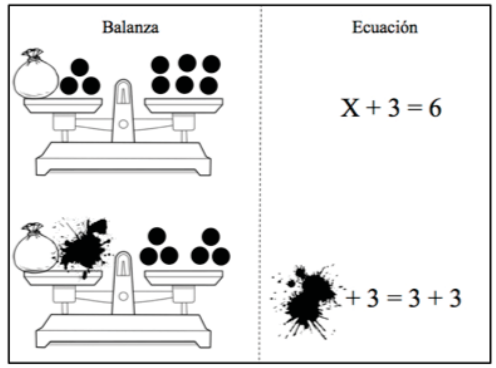
Reducción de Expresiones Algebraicas	Lo hacen utilizando cintas fraccionadas. Cuando se tiene un *todo* que mide $a, a, a,$ entonces ese *todo* medirá $3a$.		No presentan.	
Definición de ecuación	"Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones en las que hay valores desconocidos llamados incógnitas"	"Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se satisface para uno o varios valores de su incógnita. Para resolverla, se debe encontrar el valor de la incógnita que satisface la igualdad; este corresponde a la solución de la ecuación".	"Una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en donde existen una o más incógnitas representadas por una letra. Para resolver una ecuación puedes puede representarla en una balanza o realizar operaciones inversas a las que contenga la igualdad".	"Una entre dos expresiones, en las que hay términos desconocidos o incógnitas. Esta igualdad satisface para uno o varios valores de la incógnita, que corresponde a la solución de la ecuación. La incógnita generalmente, se puede simbolizar con una letra".
Estrategias de Resolución	Uso de la balanza. Utilizar la operación inversa en ambos lados de la igualdad. Dividir a ambos lados de la igualdad, por el número que acompaña a la incógnita y amplificar la fracción para igualar denominadores.	Uso de la balanza. Utilizar la operación inversa en ambos lados de la igualdad.	Uso de la balanza. Utilizar la operación inversa en ambos lados de la igualdad.	Uso de la balanza. Utilizar la operación inversa en ambos lados de la igualdad.
Resolución de Problemas	Presenta problemas que se resuelven a través de una ecuación	Explicita estrategia: "Para plantear ecuaciones que representen una situación problema es necesario identificar la incógnita del problema, y los datos que permitan comprender mejor la operación involucrada en la situación". Propone problemas.	Presenta problemas que se resuelven a través de una ecuación y propone uso de la balanza.	Explicita estrategia: "Para plantear ecuaciones que representen una situación problema es necesario identificar la incógnita del problema, y los datos que permitan comprender mejor la operación involucrada en la situación". Propone problemas.
Comprobación	Sugieren la comprobación a partir del reemplazo del valor obtenido, por la incógnita en la ecuación.			

Anexo 3: Plan de Clases del Estudio de Clase

Problemática	Dificultades de estudiantes en resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$, aplicando la Propiedad Cancelativa.
Objetivo	"Resolver ecuaciones de primer grado en $\mathbb{N}$.

Conocimientos Previos	**Materiales**
• Adición • Sustracción • Concepto de Multiplicación • Descomposición de Números Naturales • Nociones básicas de ecuaciones (igualdad e incógnita)	• Copias de la situación para cada estudiante • Lápiz grafito y goma • Paneles de cartulina • Proyector y computador (si se cuenta con ellos) • Balanza (si es necesario)

Actividad de Aprendizaje	**Intervención Docente**	**Evaluación de la Marcha de la Clase**
	15 minutos	
1.- Indicaciones de la clase 2.- Planteamiento del problema a la clase. *"Les cuento que Juan, es un estudiante de 5° básico de la Escuela Los Pensamientos. Cuando volvió del recreo, olvidó que su mamá, le había enviado de colación un yogurt que estaba en su mochila, ante este olvido, Juan tiró su mochila al suelo y pasó a llevarla con los pies. Luego, cuando abrió su mochila, se dio cuenta que el yogurt había estallado y su tarea de matemáticas se había manchado. La profesora de matemática, le dio una oportunidad a Juan para que pasara en limpio su tarea y pudiera entregarla. Sin embargo, Juan no recuerda cómo hizo la tarea, es decir, no recuerda qué es lo que había puesto debajo de cada mancha de yogur. ¿Puedes ayudar a Juan a completar su tarea para que la pueda a entregar?"*	1.- Explicitar el contrato didáctico y pedagógico. 2.- Se explicita el objetivo de la clase y se pregunta ¿Qué queremos hacer cuando resolvemos una ecuación? Esto para promover una aproximación a la idea de "incógnita" que, una vez que la ecuación es resuelta, se conoce su valor. 3.- Les pide a los estudiantes que se reúnan en parejas, pues se hará un trabajo colaborativo. Aquellos alumnos que están sentados solos se cambian de lugar para trabajar con otro compañero que esté en la misma condición. De ser impar el total de estudiantes, se podrá conformar un trío. 4.- Se les muestra a los alumnos, el primer y el segundo paso de la primera ecuación y se explica la mecánica de la tarea:	1.- ¿Los estudiantes comprenden el problema entregado? 2.- Se les pregunta más de una vez ¿Qué debemos hacer hoy?

	 	
	Al lado izquierdo de la hoja, tenemos la tarea de Juan que en algunas partes está manchada con yogur, y al lado derecho de la hoja, tenemos una balanza vacía y un espacio en blanco. A partir de la tarea de Juan y de la información que aún se logra ver, deben completar al lado derecho, con lo que debería tener la balanza y cómo debería estar planteada la ecuación".	3.- ¿Han comprendido la mecánica de la tarea? ¿Logran comprender que cada elemento de la balanza está representado también en la ecuación? ¿Están completando la tarea o persisten las dudas?
	5.- Les solicita que continúan trabajando colaborativamente en parejas.	4.- ¿Son capaces de descomponer un número para cancelar términos y encontrar el valor desconocido? ¿Se cumple la intencionalidad de resolver la ecuación manteniendo la igualdad? ¿Es suficiente el tiempo planificado?

Posibles preguntas ante la observación del ejercicio:

Ao: ¿Qué hay en la bolsa?
Pa: Eso es lo que tenemos que descubrir.

Ao: ¿Las manchas valen lo mismo?
Pa: No lo sé, pero eso lo podemos averiguar resolviendo la ecuación.

Devolución

Si los estudiantes no logran ver que cada elemento en la balanza, se representa también en la ecuación entonces se puede:

1º Relacionar término a término (¿Dónde está la bolsa en la ecuación? ¿Dónde están las 3 bolitas en la ecuación? ¿Dónde están las 6 bolitas en la ecuación?)

2º Recurrir al uso concreto de una balanza.

3º Recurrir a al Pensamiento Hablado (Decir en voz alta: *"Si la balanza es lo mismo que la ecuación y yo a un lado tengo un término que no conozco, entonces en la ecuación también debe estar. Si ese valor que no conozco está acompañando al 3 en la balanza, entonces en la ecuación mi valor desconocido que nombraré x debiera ser quien sume al 3. En la ecuación tengo un = 6, ah, entonces si tengo x + 3 que corresponde a un platillo de la balanza, y eso en la ecuación es igual a 6, entonces detrás de la mancha en la balanza, debiera haber un 6"*).

Devoluciones
(En caso de persistir dudas)

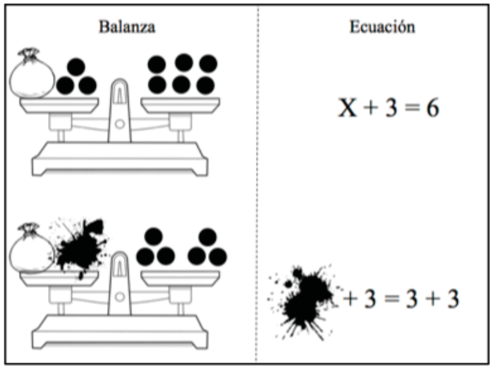
Pa: ¿Qué hace la balanza? ¿Para qué sirve?
Re: Para pesar.
Pa: ¿Cómo pesa?
Re: Comparando. En un platillo se pone un peso conocido y en el otro, ponemos aquello sobre el que queremos conocer su valor. Si la balanza está en equilibrio (dar énfasis a este concepto), quiere decir que el objeto desconocido pesa lo mismo que el valor que conocemos.

En caso de no comprender el funcionamiento de una balanza, para poder establecer una relación con la ecuación. Se recurre a la balanza (material concreto) representando la siguiente ecuación $x + 1 = 3$

¿Qué se espera?

Se espera que los estudiantes comprendan que la balanza mide la masa de un objeto a partir de la comparación de dos masas iguales, una conocida y otra desconocida.
Visualizando que al centro de la balanza hay un signo " = ".

3.- Puesta en común de la resolución de la primera parte de la tarea.



6.- Se solicita que sigan trabajando colaborativamente en parejas.

"LA BOLSA"

Suponiendo que los estudiantes aún no comprenden que la bolsa, o el contenido de ella, es el valor desconocido de la ecuación que puede ser nombrado como "X".

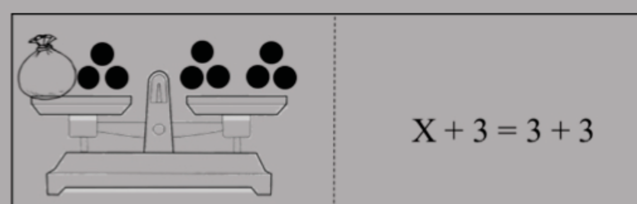
7.- Una vez que ha observado el progreso de los estudiantes, intenciona que pase la pizarra a presentar el trabajo realizado, al menos a tres parejas, una de ellas debe estar en lo correcto y otra errada, pero lo importante es que hayan desarrollado distintas estrategias. Esto con la intención de que sea el resto de sus compañeros quienes aporten al desarrollo o corrección de las tareas presentadas.

Devolución

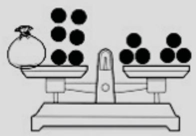
Pa: ¿Sabemos qué tiene la bolsa cuánto pesa o a cuánto equivale?
Pa: ¿La bolsa podría equivaler a 0 o 1? ¿Qué pasaría con el equilibrio de la balanza?
Pa: Cuando tenemos un elemento del que no conocemos su valor ¿Cómo podemos nombrarlo?

5.- ¿Los estudiantes realmente comprendieron la resolución de la ecuación, estableciendo la relación entre ésta y la balanza?

Respuesta Experta

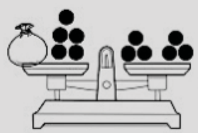


Posibles Estrategias
Dificultades y Errores



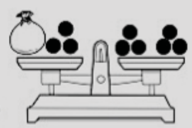
a).- Si  = 0

i. $6 + 3 = 3 + 3$



b.- Si  = 1

i. $1 + 5 = 3 + 3$



c. Si  = X
(solo para la balanza)

i. $0 + 3 = 3 + 3$

ii. $1 + 3 = 3 + 3$

iii. $3 + 3 = 3 + 3$

iv. $X + 3 = 3 + 3$

Devoluciones

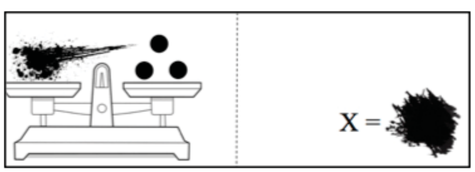
¿Cómo sabes que la bolsa vale 0? ¿Cómo se identifica la bolsa en la representación de la primera ecuación (x)? Si la bolsa valiera 0 ¿Qué pasa con el equilibrio de la ecuación? Porque al lado derecho tendrías $6 + 3 = 3 + 3$ ¿Se mantiene el equilibrio? ¿Dónde está la bolsa en la ecuación? ¿Dónde está la mancha en la ecuación? ¿Cuántas bolitas debiese haber al lado de la bolsa?

¿Por qué la bolsa es 1? ¿Qué pasa con la ecuación si la bolsa es igual a 1? ¿$5 + 3 = 3 + 3$? ¿Mantiene el equilibrio? ¿Cómo se representa la bolsa en la ecuación anterior (x)?

¿$0 + 3$ es igual a $3 + 3$? ¿$1 + 3$ es igual a $3 + 3$? ¿Conoces el valor de la bolsa? Entonces ¿Cómo se puede representar la bolsa?

Podríamos suponer que $3 + 3 = 3 + 3$ ¿verdad?, pero ¿Qué pasó con la x? Hay que completar la tarea de Juan.

4.- Una vez que se alcanza y comprende la respuesta experta, se entrega a los estudiantes la última parte del ejercicio A.



7. Se pide a los estudiantes que vuelvan a trabajar colaborativamente en parejas para resolver la ecuación.

Posibles Preguntas

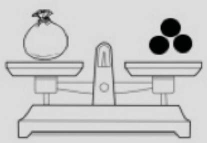
Ao: ¿Qué pasó con el saco y las bolitas que había en la balanza?
Pa: ¿Qué crees tú que pasó? Fíjate que en la ecuación de arriba teníamos $x + 3 = 3 + 3$ y ahora tenemos solo x = (mancha) ¿Qué crees que pasó con las 3 bolitas que acompañaban a la bolsa si ahora en la ecuación solo tenemos x y no $x + 3$?

8. Al igual que la vez anterior, Una vez que ha observado el progreso de los estudiantes, intenciona que pase la pizarra a presentar el trabajo realizado, al menos a tres parejas, una de ellas debe estar en lo correcto y otra errada, pero lo importante es que hayan desarrollado distintas estrategias. Esto con la intención de que sea el resto de sus compañeros quienes aporten al desarrollo o corrección de las tareas presentadas.

Respuesta Experta

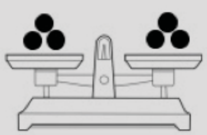
X = 3

Posibles Estrategias
Dificultades y Errores

a). 

i. X = 3 +3

ii. X = 3

b). 

i. X + 3 = 3

ii. X + 3 = 3 + 3

iii. X + 3 = 3

iv. X = 3 + 3

v. X = 3

Devoluciones

¿Por qué 3 + 3? ¿Qué hay en el plato izquierdo de la balanza (bolsa)? ¿Cómo se representa eso en la ecuación (x)? ¿Qué hay en el plato derecho de la balanza (3 bolitas)? ¿Y cómo se representa eso en la ecuación?

¿Por qué pusiste 3 bolitas en el platillo izquierdo? Es verdad, 3 = 3, pero ¿qué paso con mi incógnita x? ¿Recuerda el objetivo de la clase? ¿Qué es lo que queremos hacer? ¿Por qué 3 + 3? ¿Qué hay en el plato izquierdo de la balanza (bolsa)? ¿Cómo se representa eso en la ecuación (x)? ¿Qué hay en el plato derecho de la balanza (3 bolitas)? ¿Y cómo se representa eso en la ecuación?

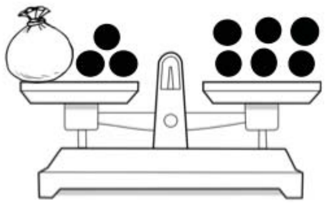
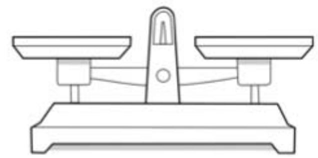
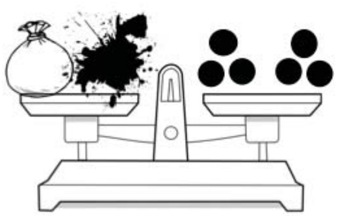
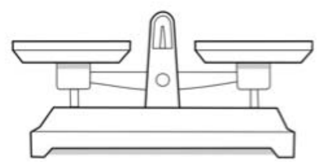
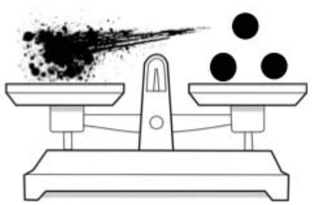
	Persistencia de la Duda Si los estudiantes aún no comprenden la resolución de la ecuación a través de la balanza, se debe utilizar la balanza en concreto, resolviendo la ecuación nuevamente y haciendo el nexo entre lo concreto y lo simbólico.	6.- ¿Los estudiantes realmente comprendieron la resolución de la ecuación, estableciendo la relación entre ésta y la balanza?
5.- Institucionalización Se pretende que los estudiantes comprendan que cuando se resuelven ecuaciones de primer grado en ℕ, los números pueden descomponerse con el objetivo de cancelaros, manteniendo la igualdad y logrando despejar la incógnita y obteniendo su valor.	9. En el segundo paso se tiene: ¿Por qué las 6 bolitas que en el paso anterior estaban todas juntas, aquí se agrupan de a 3? Y ¿Para qué el 6 se escribió como 3 + 3? ¿Qué cambios pueden observar del segundo al tercer paso? ¿Qué pasó con las 3 bolitas que acompañaban al saco? ¿Qué paso son uno de los 3 que estaban al lado derecho de la ecuación? ¿Para qué *desaparecieron*? ¿Qué nos permite hacer eso? Si queremos hacer eso ¿Qué debemos mantener siempre? Finalmente, el docente dice: *"Cuando se resuelven ecuaciones de primer grado con números naturales, como ustedes conocen. Se pueden descomponer números convenientemente, para eliminarlos a ambos lados de la ecuación, y así, mantener su equilibrio"*.	

TAREA

A Juan se le ha manchado su tarea de matemáticas. ¡Ayudémoslo a completarla!

Instrucciones: Al lado izquierdo usted tiene la tarea de Juan y como ve está manchada. Pase en limpio la tarea de Juan al lado derecho de la hoja, completando la balanza y la ecuación, con la información que aún puede verse en la tarea de Juan.

EJERCICIO A

TAREA DE JUAN		COMPLETAR	
Balanza	Ecuación	Balanza	Ecuación
	$X + 3 = 6$		
	[illegible] $+ 3 = 3 + 3$		
	$X =$ [illegible]