

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS



Circunferencia y elipse desde la teoría de la Teoría de Situaciones Didácticas

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA

Por: Camila García Piffault

Profesoras Guías: Romina Menares Espinoza
Elisabeth Ramos Rodríguez
Patricia Vásquez Saldías

2017

Contenido

RESUMEN	4
INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES	7
Preguntas PSU.....	11
¿Por qué es importante que la secuencia didáctica esté contextualizada?.....	12
¿Qué importancia tiene representar de otra manera la circunferencia?	13
CAPÍTULO 2: OBJETO MATEMATICO.....	16
Análisis histórico epistemológico.....	16
Saber erudito	18
Cónicas.....	18
Circunferencia	19
Elipse	19
Saber escolar.....	19
Cónica.....	20
Circunferencia	20
Elipse	20
Barrido Curricular.....	20
CAPÍTULO 3: SECUENCIA DIDÁCTICA.....	22
CLASE 1	23
Actividad: “Un nuevo planeta”	23
Plan General de la clase 1	24

Plan de Clase 1 en relación al marco teórico.....	25
CLASE 2.....	32
Plan General de la clase 2.....	33
Plan de Clase 2 en relación al marco teórico.....	34
CLASE 3.....	39
En la playa.....	39
Plan General de la clase 3.....	40
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS A POSTERIORI.....	46
Análisis de resultados.....	46
CAPITULO 5: CONCLUSIONES.....	51
Bibliografía.....	53
ANEXOS 1:.....	55

RESUMEN

En la presente investigación muestra la implementación del Estudio de Clases Japonés, que es abordar la definición de dos lugares geométricos (circunferencia y elipse) con estudiantes de secundaria de un liceo técnico profesional. Para lograr el estudio, se utiliza el diseño de una secuencia didáctica elaborada bajo el enfoque teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1998) y se implementa una de las clases de la secuencia, en la cual se realiza un análisis posteriori. Los resultados obtenidos muestran los alumnos son capaces de comprender la definición de circunferencia al articular la geometría del taxista con la geometría euclidiana, al transitar por las distintas fases de la teoría. Este hallazgo es relevante, porque al utilizar una nueva geometría es visible que los estudiantes pueden desprenderse de lo figural de la circunferencia y enfocarse en la definición de esta como lugar geométrico.

INTRODUCCIÓN

La geometría es uno de los ejes matemáticos más complejos y problemáticos en nuestra actual educación chilena, por ello, y buscando ser un aporte a su mejora, es que la propuesta didáctica que se propone en el siguiente trabajo quiere contribuir a la comprensión de la circunferencia y de la elipse como lugares geométricos.

Esta problemática también la identifican Abrate, Delgado y Pochulu (2006) quienes señalan que “los aprendizajes de geometría se han basado, casi exclusivamente, en un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas” (p. 2).

La investigación sigue la siguiente estructura:

Capítulo 1: Se presenta la problemática de la investigación, la cual se centra en la comprensión de dos lugares geométricos, a decir la circunferencia y elipse. También se presentan los antecedentes que fundamentan la investigación, los cuales son trabajos existentes que se relacionan con nuestro objeto de estudio.

Capítulo 2: En esta sección se estudia en profundidad los objetos matemáticos de circunferencia y elipse desde varias miradas, es decir, desde el saber sabio hasta el saber escolar, haciendo una comparación entre estos, para finalizar con un barrido curricular.

Capítulo 3: Se presenta la secuencia didáctica, y se realiza un análisis a priori de la secuencia didáctica, donde se presentan los objetivos de cada clase, los errores,

dificultades y devoluciones pertinentes. Todo este análisis a priori es articulado desde la Teoría de Situaciones Didáctica.

Capítulo 4: En este capítulo se realiza el análisis a posteriori de una de las clases de la secuencia, donde se presentan las evidencias de la implementación, los cuales son analizados a partir del análisis a priori. Estos resultados permiten establecer las conclusiones de la investigación.

Capítulo 5: Finalmente se aborda las conclusiones, contraste entre el análisis a priori y a posteriori, como también se desarrollan las proyecciones del trabajo realizado, de acuerdo a los objetivos planteados.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

La problemática a abordar está centrada en la deficiente comprensión de la definición de circunferencia como lugar geométrico que tienen los alumnos de enseñanza media. Esta situación se evidencia de dos maneras, por un lado, se encuentra el trato que dicho contenido tiene en los programas de estudio, y, por otro los resultados obtenidos por los alumnos de un preuniversitario frente a una pregunta tipo PSU que involucraba la definición, ambas evidencias se explican a continuación:

En cuanto a los programas de estudio, es interesante notar que, por un lado, abundan los teoremas referidos a la circunferencia y el cálculo empleando fórmulas, ya sea aplicado a contexto o no. Pero, por otro lado, escasea el énfasis en la comprensión de la definición de circunferencia, y también escasean los cursos que abordan este contenido, ya que es propio de 1°, 2° y 8° básico, y en la enseñanza media es contenido sólo de 2° medio. Al introducirnos en los programas podemos notar que, por ejemplo, en primer año básico se enseña la circunferencia como una “línea curva”, de tal manera que el niño sea capaz de “identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto” (Minedu, 2015) Ya, en séptimo año básico se aborda la circunferencia, el círculo y sus elementos. Al revisar los programas de estudio se constata que el objetivo de aprendizaje consiste en “mostrar que comprenden el círculo identificándolo como lugar geométrico” (Mineduc, 2012), pero al observar los indicadores de evaluación, estos se remiten a medir

diámetro y perímetro de objetos redondos, calcular cociente entre perímetro y diámetro, aplicar la fórmula de perímetro y área, y resolver problemas cotidianos que involucren el cálculo de área de círculo, dejando en evidencia que el énfasis está en el círculo, y, que además los indicadores de evaluación no insisten en la comprensión de lugar geométrico sino en su aplicación.

En cuanto a Segundo medio, se busca principalmente la identificación de los elementos de la circunferencia y la aplicación de teoremas, siendo prácticamente indiferente la definición de circunferencia como lugar geométrico.

Por tanto, la circunferencia como lugar geométrico es mencionada en los programas de estudio, pero en lo “concreto” no se ve su aplicación, ni su importancia. Podríamos preguntarnos ¿De qué manera evoluciona la definición de circunferencia en los alumnos? ¿Cómo y cuándo ocurre el cambio de “línea curva” a “conjunto de puntos o lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan a un punto fijo en el mismo plano”? ¿Los programas facilitan esta definición?

Todo lo anterior, puede afectar resultados como los obtenidos por preuniversitario Cepech Sede Valparaíso al proponer la siguiente pregunta tipo PSU:

En la figura adjunta, los puntos P, Q y R pertenecen a la circunferencia de centro O. Si el ángulo OPR mide el doble del ángulo RQO, entonces el arco RP mide

- A) 80°
- B) 90°
- C) 100°
- D) 120°
- E) 140°

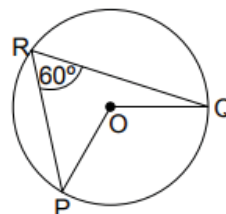


Imagen 1: Pregunta 45 ensayo 034, (Cepech, 2017)

Esta pregunta tipo PSU aplica la definición de circunferencia como lugar geométrico, pues al trazar el radio OR se forman los $\triangle OPR$ y $\triangle ORQ$ ambos isósceles en O . Esta conclusión se puede obtener gracias a la comprensión de circunferencia como “el conjunto de los puntos del plano que equidistan a un punto fijo en el mismo plano”.

En cuanto a los resultados obtenidos, solo un 22,57% de los alumnos respondió correctamente la alternativa C, mientras que el mayor porcentaje (27,8%) se concentró en la alternativa D.

De todo lo anterior, podemos concluir que la definición de circunferencia como lugar geométrico no es potenciada por los programas de estudio y, por tanto, la comprensión por parte de los alumnos es escasa y confusa, e incluso pareciera que está limitada a la aplicación de teoremas.

Así mismo, ocurre con la elipse, cuyo contenido no se trabaja en profundidad, tanto en establecimientos escolares como en instituciones de educación superior. Esto se puede evidenciar ya que al revisar el Programa Diferenciado de Tercero medio (Mineduc, 2001), se encuentra una unidad llamada “Lugares geométricos”, donde se trabaja la elipse, en los aprendizajes esperados siguientes:

- “1. Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas
2. Reconocen la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan.

3. Resuelven problemas que involucran intersecciones y/o posiciones relativas de lugares geométricos”. (Mineduc, 2001, P.41)

Cabe destacar que en la Prueba de Selección Universitaria¹ (PSU), la elipse, no se encuentra como contenido a evaluar, ya sea como intersección de plano con un cono recto, como ecuación cartesiana ni como lugar geométrico.

A continuación (imagen 2), se presenta una de las actividades propuestas en relación a la elipse. Donde podemos evidenciar que el estudio de esta queda reducido a las ecuaciones cartesianas que la representan, sin una real comprensión de su definición o contextualización con la cotidianidad.

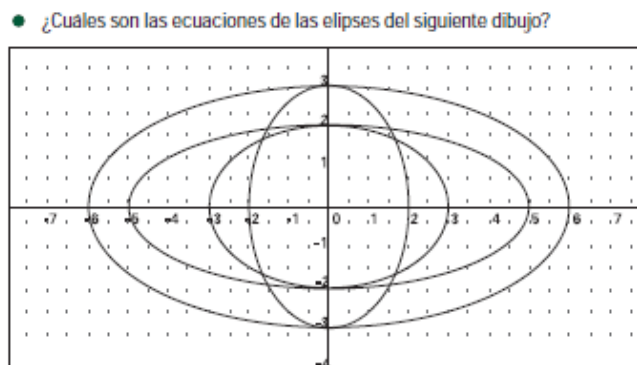


Imagen 2: Programa de estudio diferenciado tercero medio, 2001 (p.49)

¹ Prueba estandarizada, cuyo propósito es la selección de postulantes para la continuación de estudios universitarios.

Preguntas PSU

Comparando las pruebas PSU Admisión 2016 y 2017 se puede indicar que de las 80 preguntas 22 corresponden al contenido de geometría. Contenido que a su vez se distribuye en diferentes unidades temáticas como lo muestra la siguiente tabla:

Tabla: Demre, Unidad de geometría

Geometría	Cantidad de preguntas	
	Admisión 2016	Admisión 2017
Contenidos evaluados		
Geometría de proporción	8	7
Transformaciones isométricas	4	5
Circunferencia	1	1
Geometría analítica	7	7
Cuerpos geométricos	2	2
Total preguntas	22	22

De acuerdo a la tabla adjunta, se puede constatar que la cantidad de preguntas referidas al contenido de circunferencia es mínima, pero que a su vez el tipo de preguntas y el contenido a preguntar es muy amplio.

Como la secuencia didáctica busca que los alumnos comprendan más profundamente la definición de circunferencia y elipse como lugares geométricos, es que se propone articular la definición de circunferencia con la geometría del taxista, cuya representación ayudará que los alumnos se desprendan de la “figura tradicional” asociada a estos contenidos.

¿Por qué es importante que la secuencia didáctica esté contextualizada?

Vigostky (1988) ha desarrollado a partir de la década de 1920 el paradigma histórico social, en el cual sostiene que “el individuo, aunque importante, no es la única variable en el aprendizaje. Su historia personal, su clase social y consecuentemente sus oportunidades sociales, su época histórica, las herramientas que tenga a su disposición, son variables que no sólo apoyan el aprendizaje, sino que son parte integral de él” (p. 87). De tal manera, que el aprendizaje no se da en una esfera aislada, sin vínculo con la experiencia personal de cada alumno, muy por el contrario, Vigostky sostiene que se da en y a partir de la realidad sociocultural del alumno.

En la investigación de Rioseco, M y Romero, R. (1997), quienes citan a Gadanidis (1994) el cual sostiene que las actividades propuestas a los alumnos deben permitir que el alumno explore, justifique, y transmita argumentativamente lo que sabe. Para ello, el docente debe proponer actividad que no constituyan explicaciones, sino que sean una contribución al aprendizaje, realizando diferentes preguntas que permitan al alumno expresar sus ideas y ofrecer explicaciones a determinados temas.

Heckman y Weissglass (1994) han sostenido que el contexto y las circunstancias sociales influyen en el aprendizaje de los alumnos, de tal manera que “la elección del contexto contribuiría a que la actividad sea auténtica” (p. 29), por tanto, el proceso enseñanza-aprendizaje se ve beneficiado por la incorporación del contexto de cada alumno.

Considerando todo lo anterior, la secuencia didáctica propuesta está enmarcadas en contextos cercanos a los alumnos, de tal manera que despierten el interés y la motivación. A la vez proponen desafíos nuevos que instan al alumno a la reflexión y

la argumentación autónoma, además, de generar el vínculo crítico con los contenidos ya adquiridos.

¿Qué importancia tiene representar de otra manera la circunferencia?

Duval (1998) afirma que “no puede haber comprensión en matemática si no se distingue un objeto de su representación...pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy distintas” (p, 13). Es muy importante para la comprensión de objetos matemáticos la presencia de diferentes registros de representación semiótica que favorezcan el aprendizaje de objetos matemáticos, en donde el alumno pueda reflexionar y comparar con otros registros, de tal manera de que pueda comprender el fondo más que la forma. Si bien las nuevas representaciones son distintas para el alumno, es porque se está trabajando con una geometría nueva, es decir la geometría del taxista, permiten que el alumno se desprenda de la “línea curva”, y provocará en él una actitud crítica y reflexiva, que le permita mejorar su comprensión no sólo de dicho lugar geométrico, sino que implícitamente contribuirá a la reflexión de otras figuras geométricas.

Hernández (2009) realiza una investigación en México para estudiar la forma como los alumnos aprenden sobre cónicas. Las actividades que implementó se realizaron en dos cursos de 5° y 6° semestre del año 2006 de CCH Plantel Sur, cursos que corresponden a 3° año de enseñanza media. Una de las actividades consistía en que los alumnos con sus propias palabras explicaran la definición de algunas cónicas. De los resultados obtenidos, la tendencia fue dirigida hacia la circunferencia, mostrando una precariedad respecto a las demás cónicas. Solo un 40% de los alumnos intentó balbucear algunas ideas sobre la elipse, por ejemplo: “línea que se adelgaza en los

lados”, “como un círculo achatado” etc. Al respecto, Hernández sostiene que “quizás esta tendencia se deba a que les resulte más familiar la circunferencia porque probablemente tienen más referentes que la elipse” (p.45). En otra actividad les solicitó que dibujaran una circunferencia y una elipse, y el resultado fue muy positivo, ya que todos los alumnos pudieron realizar exitosamente la actividad.

Por lo tanto, a partir de dicha investigación se deja en evidencia que los alumnos tienen claramente asociado un “dibujo específico” para diferentes cónicas, pero no una definición de las mismas. Al respecto, proponer otro “dibujo” para las cónicas, consideramos que fomentará una reflexión crítica de la definición de dichos lugares geométricos y a la vez promueve que se refuerce la definición misma, porque el dibujo ya no sirve.

Ricaldi, M. (2017) realizó una propuesta didáctica a un grupo de estudiantes de un programa especial de mujeres con experiencia laboral de una universidad de la ciudad de Lima. Esta propuesta tenía como finalidad posibilitar la articulación entre geometría y álgebra, específicamente entre la ecuación algebraica de elipse y su representación gráfica, utilizando el programa Geogebra. La secuencia didáctica planteada comprendió actividades de exploración y comprensión, de análisis, resolución de problemas y aplicación, y tuvo como primera instancia un trabajo personal, y luego una instancia dual. Una de las propuestas fue generar la elipse a partir de dobleces de papel, y se proponen preguntas como “¿Qué figura queda limitada por los dobleces?” “¿Cuál es el valor de la suma de distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos?”. (p, 82)

De las conclusiones obtenidas en dicha investigación se menciona que en la sala de clase es “posible desarrollar experiencias de aprendizaje que permitan a las estudiantes transitar de sus creencias personales a concepciones válidas con el fin de eliminar ambigüedades y generar el cambio conceptual necesario en el proceso aprendizaje de la elipse” (p. 1477), además se menciona la importancia de actividades que “permitan la independencia de pensamiento” (p.1477).

Por tanto, esta investigación contribuye a la importancia de generar instancias de trabajo reflexivo personal, y a la vez momentos de intercambio de conclusiones con otros, lo cual se ve reflejado en la estructura de cada clase, las cuales fueron diseñadas desde la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1998) Además, es importante para el proceso enseñanza-aprendizaje la propuesta de actividades que insten la curiosidad y la búsqueda, en donde el alumno pueda ampliar y enriquecer los conocimientos que ya posee.

CAPÍTULO 2: OBJETO MATEMATICO

Análisis histórico epistemológico

Boyer (1999) relata que Heródoto y Aristóteles sostenían dos posturas opuestas en relación al origen de la geometría. Ya que Heródoto afirmaba que la geometría se había originado en Egipto debido a la necesidad práctica, es decir, por motivo de trazar límites en la tierra. Mientras que Aristóteles sostenía que el inicio de la geometría fue por la clase sacerdotal de la época. Sin embargo, se conoce que en el periodo Neolítico aparecen las primeras nociones de objetos geométricos, en la alfarería, telar y divisiones de tierras.

Boyer (1999), señala que para los egipcios “resulta haber sido casi exclusivamente una rama de la aritmética aplicada, y donde aparecen relaciones elementales de congruencia, su finalidad parece ser la de proporcionar nuevos recursos de medición más que la de un conocimiento más profundo” (p, 43), es decir era considerada predominantemente empírica.

Pero no es hasta el siglo IV a. C en la Grecia Clásica, donde se introduce lo que actualmente conocemos como Geometría. Fue a Menecmo, de la academia platónica a quien se le atribuye el descubrimiento de las secciones cónicas, las cuales hoy conocemos como parábola, elipse e hipérbola, las cuales son obtenidas como sección de un plano perpendicular a una generatriz de un cono circular recto.

Fue Apolonio de Perga (262-190 a .C), quien escribió en su obra *Cónicas*, que se obtienen las curvas, si mediante una superficie plana se corta un cono circular recto en diversas posiciones, las cuales resultaban ser: circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.

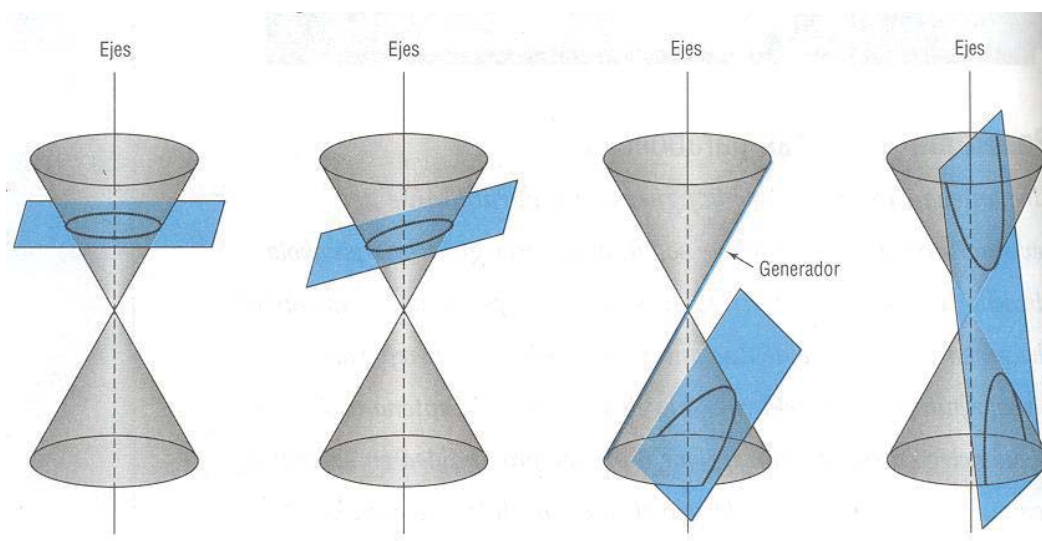


Imagen 1: Conicas de Apolonio

Siglos después Rene Descartes (1596), en su obra plantea que “Dada una ecuación, se podía hallar el lugar geométrico que representa”, es decir Descartes logra el quiebre de curva a lugar geométrico. Posteriormente se logra un nuevo quiebre ya que se comienzan a ver la circunferencia como una ecuación matemática, ya que “dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, se podía hallar su ecuación matemática”.

Finalmente, Pierre Fermat (1601) en su obra *Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos*, emplea una geometría analítica, en donde sugiere un método para estudiar algebraicamente los lugares geométricos, lo cual permite ser más breve y

completo respecto al estudio de los antiguos. Sin embargo, fue Euler (1748), quien sistematizó la geometría de una manera formal.

Saber erudito

Nos basaremos en el libro de Geometría Analítica de Lehman C (1987) para entregar una definición erudita de los objetos matemáticos relacionados con nuestra investigación, los cuales son: cónicas, circunferencia y elipse, tratados en los capítulos IX, IV y VII respectivamente.

Cónicas

Dada una recta fija l y un punto fijo F no contenido en esa recta, se llama cónica al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y P de manera tal que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva.

La recta fija l se llama directriz, y el punto fijo F , foco, y la constante positiva, a la que designaremos por e , excentricidad de la cónica, es decir:

$$\frac{|PF|}{|PA|} = e$$

Donde A es la proyección ortogonal de P sobre l . (p. 220)

Circunferencia

“La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y a la distancia constante se le llama radio”. (p. 99)

Notación

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r , tiene por ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r , se denota por

$$C(O, r) = \{X \in \pi / OX = r, O, X \in \pi\}.$$

Elipse

“Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil este sobre el segmento que une los focos.” (p. 173)

Saber escolar

Para analizar el saber escolar, utilizaremos el libro de Blanco, S., De las Heras, R., Fuenzalida, G., y Riveros, J. (1995), los cuales en el capítulo III, definen los objetos matemáticos estudiados como:

Cónica

“Curva que se obtiene al intersectar un plano y un cono de revolución, según la inclinación del plano respecto al eje del cono, se obtiene una circunferencia, elipse, parábola o hipérbola. (p. 113)

Circunferencia

La circunferencia se define como una curva cerrada y plana cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro punto llamado centro

Elipse

“El lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ cuya ubicación en el plano es tal, que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de él es constante.” (p. 114)

Barrido Curricular

El objeto matemático estudiado tiene un tratamiento progresivo a lo largo del actual currículum chileno. Por lo anterior, para realizar una propuesta acorde, fue necesaria una revisión detallada de cada programa de estudio.

A continuación, se presenta un resumen del tratamiento del objeto matemático a lo largo de la escolaridad chilena, y luego un breve análisis

Tabla 1: Aprendizajes esperados en directa relación con los objetos matemáticos

CURSO	APRENDIZAJE ESPERADO ²
1° Básico	OA 14 Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D relacionarlas, usando material concreto.
2° Básico	OA 15 Describir, comparar y construir figuras 2D (triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto.

² Extracto de los Objetivos de Aprendizajes, de acuerdo a las Bases Curriculares vigentes. Fuente: www.curriculumenlinea.cl

7° Básico	<p>OA 11 Mostrar que comprenden el círculo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo. - Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo. - Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria. - Identificándolo como lugar geométrico.
------------------	--

2° Medio	<p>AE 07 Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.</p> <p>AE 08 Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.</p>
-----------------	--

3° Medio	<p>En plan diferenciado:</p> <p>Reconocen la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan.</p>
-----------------	---

A partir de la tabla generada se puede apreciar que los aprendizajes esperados están progresivamente ordenados, sin embargo, existen años de la escolaridad que abandonan el estudio continuo de la circunferencia, cabe señalar que en un comienzo de la escolaridad no se especifica la diferencia entre círculo y circunferencia, sólo se enseña de manera concreta, mientras que en 7° básico se establece dicha diferencia. Luego solo en tercero medio electivo es donde se observa el objeto matemático de la elipse y solo desde un enfoque analítico.

Respecto a diferentes textos escolares seleccionados se observó que las definiciones de circunferencia son muy similares entre sí, pues la consideran como el conjunto de puntos o lugar geométrico que equidistan de un punto fijo llamado centro. Al observar los textos se apreció un privilegio de la ejercitación de los contenidos enseñados.

CAPÍTULO 3: SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia didáctica está diseñada para tres clases. Cada clase cuenta con su propio objetivo, pero son objetivos continuadores, por tanto, debe realizarse la actividad en el orden que allí se propone.

Las planificaciones están siendo pensadas desde la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1998). A continuación, se presentan los objetivos de cada clase

Clase 1: Comprender y articular la definición de circunferencia utilizando la distancia del taxista y la distancia de la geometría euclidiana

Clase 2: Comprender la definición del lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos es constante, utilizando la distancia del taxista

Clase 3: Comprender la definición de la elipse en la geometría euclidiana

A continuación, se describen los tres planes de clases en relación con el marco teórico, de tal manera de evidenciar la justificación y pertinencia de la TSD escogida. Por tal razón, se detalla cada fase, sus actividades, el rol del docente y criterios de evaluación que le permitirán ir corroborando que la propuesta didáctica se está desarrollando de manera adecuada y que se cumplen los objetivos planteados.

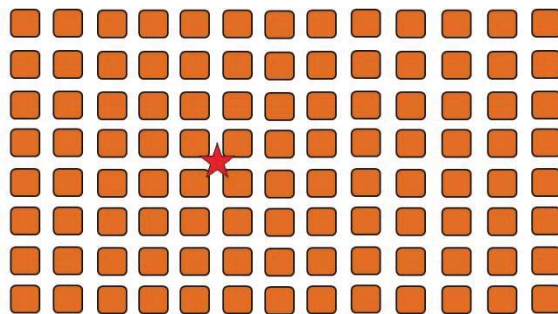
Previo a adentrarse en los planes de clase, consideramos apropiado proponer un esquema base del desarrollo de la clase.

CLASE 1

Para esta primera clase, estructuraremos el análisis a priori de la siguiente manera: en primer lugar, se expondrá el problema, luego las respuestas expertas de cada pregunta, donde posteriormente se mostrará la matemática en juego existente, es decir, los conocimientos previos que debe de tener el alumno y los conocimientos emergentes en la actividad, para finalizar con las posibles estrategias que pueden utilizar y, los errores, dificultades y devoluciones asociadas.

Actividad: “Un nuevo planeta”

El planeta Cabbie, que se encuentra a 179 millones de años luz de la Tierra, posee una gran particularidad, ya que la superficie de su terreno se encuentra lleno de microorganismos que le proveen oxígeno a todo el planeta (recuadros cafés). Y, en la intersección de las cuadras hay solo una casa. Por esta razón, los habitantes de Cabbie han debido idear una estrategia para movilizarse por el territorio sin dañar a los microorganismos. A continuación, se presenta un plano aproximado del territorio de Cabbie.



Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar
2. ¿Cuántos puntos son?
3. ¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Plan General de la clase 1

Tiempos	Actividad a realizar Alumno-Profesor
INICIO 10 minutos	Leer la actividad de manera individual, a modo de generar la participación de los alumnos y posteriormente se responde dudas generales del enunciado, por ejemplo: ¿Qué es una cuadra? ¿Dónde se ubican las casas? ¿Dónde se encuentra el centro de censo?, etc.
DESARROLLO 30 minutos	Se desarrolla las preguntas de la guía de manera individual y después grupalmente. Se exponen los resultados y conclusiones
CIERRE 15 minutos	Se realiza lluvia de idea por parte de los alumnos y sus apreciaciones de la actividad, y el profesor realiza el cierre incorporando las ideas y el objetivo de la actividad. También realiza preguntas dirigidas y globales, de manera de corroborar los aprendizajes esperados.

Materiales:

- Hoja con Copia de la situación para cada uno de los estudiantes
- Lápices grafito
- Goma
- Data/Notebook
- Dibujos de casas en cartulina.

Plan de Clase 1 en relación al marco teórico.

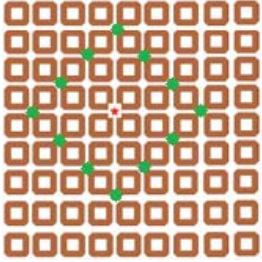
Momentos	Actividad de aprendizaje / Tarea Matemática	Gestión de Aula	
		Intervención docente	Evaluación de la marcha de clase.
Inicio 5 min	<p>Se lee la actividad de manera individual y, posteriormente un alumno la lee en voz alta para todo el curso.</p> <p>Una vez que la actividad ha sido leída, se elige otro alumno que explique el lugar donde están ubicadas las casas en general.</p> <p>Se ha de tener presente, que la situación está planteada en otro planeta, por tanto, las casas no están ubicadas como en nuestra ciudad. Por eso, es necesario que el contexto de la actividad quede claro.</p>	<p>Se entrega a cada alumno la actividad a trabajar.</p> <p>Se pregunta, de acuerdo a la ciudad creada, ¿Dónde se encuentran las casas?</p> <p>Además, se proyecta la imagen de la ciudad creada, para que los alumnos puedan ubicar algunas casas.</p>	<p>¿Los estudiantes se interesan por participar?</p> <p>¿La actividad activó la curiosidad y la motivación?</p> <p>¿Los alumnos son capaces de identificar las casas según el enunciado?</p>

	<p>Fase de Acción: El alumno trabaja con un medio al responder la pregunta 1. (Marca todas casas que Muff debe censar), ya sea dejando explícitos los caminos o por ensayo y error</p> <p>Fase de Formulación Esta etapa se aplica en dos momentos al ser expuesta, tanto para la pregunta 2 (¿Cuántas casas son?), como la pregunta 3. (¿Qué característica tienen en común todas estas casas?). Ya que los grupos formulan un mensaje explícitamente al responder las preguntas y enunciarlas a sus compañeros.</p>	<p>El docente monitorea la ubicación de casas a los alumnos que presentan errores o dificultades, haciendo consultas como ¿Esta casa será censada? ¿Qué camino recorriste? ¿Existe otro?</p>	<p>¿Los alumnos son capaces de ubicar una casa?</p> <p>¿El alumno trabaja de manera individual?</p>
--	---	--	---

<p style="text-align: center;">Desarrollo 30 min</p>	<p>Fase de Validación Esta fase surge en dos momentos, tanto para la pregunta 2 (¿Cuántas casas son?), como la pregunta 3. (¿Qué característica tienen en común todas estas casas?). Ya que a medida que los alumnos exponen sus respuestas, el resto del curso somete a veracidad dichas aseveraciones. Como la participación de este momento es elegida intencionalmente, se espera que surja un debate, donde los alumnos expongan y argumente sus respuestas.</p> <p><i>Se sugiere que el profesor previamente haya observado las estrategias de los alumnos, de tal manera de seleccionar para el final la más "completa". Es importante tener presente esto, porque a medida que van surgiendo estrategias incompletas o incorrectas, los alumnos pueden irse retroalimentando, provocando que la respuesta experta surja de un debate y no impuesta y asumida por un solo grupo de alumnos</i></p>	<p>Una vez que los alumnos responden la primera pregunta se comienza con trabajo grupal, donde entre ellos debaten y proponen respuestas a las preguntas posteriores, es decir, ¿Cuántas casas son? Y ¿Qué características tienen en común?</p> <p>Si los alumnos caracterizan respecto a las otras casas, se recuerda que la característica pedida es respecto al centro del censo.</p> <p>El docente pide a un representante por grupo que exponga los resultados de su equipo, donde son sometidos a la fase de validación.</p>	<p>¿Se trabaja con el(los) compañero(s) más cercano(s)?</p> <p>¿Los grupos exponen a sus compañeros?</p> <p>Se escuchan con atención y se genera debate.</p> <p>¿Se cumplen con los tiempos planificados?</p>
--	--	--	---

	<p>Fase de institucionalización el profesor generaliza la situación problemática.</p> <p>Considera todos los elementos surgidos en la fase de formulación, y validación y concluye con la definición de circunferencia.</p> <p>Para esto, insiste en que la circunferencia es más que un dibujo, que tras esa imagen habitual hay una definición que al momento de trasponerla en otra situación se puede transformar completamente la imagen adquirida.</p>	<p>El profesor pregunta a los estudiantes. ¿Cuál es la definición de circunferencia?, ¿Tiene algo en común con lo que han desarrollado?</p> <p>Explicita el objetivo de la clase.</p>	<p>¿Qué es una circunferencia? ¿Cuál es su definición?</p>
<p>Cierre 10 min</p>	<p>Conclusión de la actividad:</p> <p>Se pregunta a los alumnos sus apreciaciones de la actividad, y el profesor redondea la idea surgida en la fase de institucionalización diciendo que:</p> <p>Lo que han construido es una circunferencia, aun cuando no lo parezca, en este caso han trabajado en la geometría del taxista y en la escuela construyen circunferencias en la geometría euclidiana.</p>	<p>El profesor pregunta apreciaciones de la actividad, y solicita que los alumnos den a conocer ideas fuerzas que aprendieron de la actividad.</p>	<p>¿Sabían que hay otro tipo de geometría? ¿Qué les parece la actividad? ¿Qué aprendieron?</p>

Respuestas Expertas

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar	2. ¿Cuántos puntos son?	3. ¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?
	<p>Son 12 puntos</p>	<p>Es la definición de circunferencia, es decir, todos los puntos que están a una misma distancia de un punto fijo.</p>

Podemos justificar que son solo esas casas (12), ni más ni menos. Al tener las siguientes consideraciones:

Sean

N: Movimientos hacia el Norte

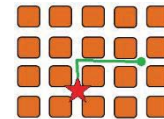
S: Movimientos hacia el Sur

E: Movimientos hacia el Este

O: Movimientos hacia el Oeste

Todo movimiento lo resumiremos por ejemplo:

$N - E - E$: Código que significa que el primero movimiento es una cuadra hacia el norte, luego dos movimientos al este.



1. Utilizar el camino mínimo, es decir, no existen movimientos del tipo $N - S$ o $E - O$, ya que esos movimientos nos mantienen en el punto inicial.

2. No consideraremos el orden, ya que por ejemplo $N - E - E$ nos lleva a la misma casa que $E - N - E$, y ya que consideramos las casas y no los caminos, no importa por donde nos vamos, llegamos a la misma casa.

Consideramos una circunferencia de radio 3, y tenemos solo movimientos del tipo $E - N$, $E - S$, $O - N$, $O - S$, podemos decir que

$$E^n - N^m$$

$$E^n - S^m$$

$$O^n - N^m$$

$$O^n - S^m$$

Donde $n, m = \{0, 1, 2 \dots r\}$; $n + m = r$, entonces podemos tomarnos los casos particulares de $3 + 0 = 3$; $1 + 2 = 3$; $2 + 1 = 3$ y $0 + 3 = 3$ lo que resulta por ejemplo $E^1 - S^2$, es decir la casa que esta por el camino $E - S - S$, y de esta manera y haciendo todos los cálculos resulta un total de 12 casas

Conocimientos previos

Lugar geométrico, como el conjunto de puntos que cumplen una o varias condiciones geométricas.

Cuadras como unidad de medida, ya que los alumnos deben conocer la distancia que estamos utilizando y sus unidades.

Conocimientos emergentes

Circunferencia como lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de un cierto punto fijo, llamado centro en la geometría del taxista

Estrategias

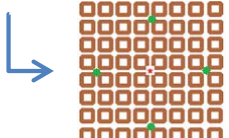
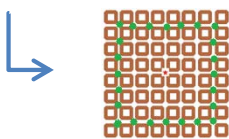
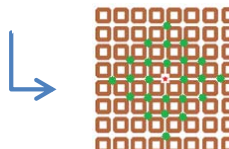
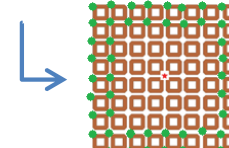
Las siguientes estrategias utilizadas para ser analizadas como categorías de análisis

1. Marcar las casas por ensayo y error, y luego realiza mentalmente los caminos y/o ubica casas que cumplan las condiciones necesarias
2. Marca cada camino hacia las casas, dejando explícitos cada camino trazado

Dificultades, errores y devoluciones

En todos los momentos de la clase, pueden ir surgiendo diversas dificultades y/o errores, los cuales son resumidos en la siguiente tabla, donde se recomiendan posibles devoluciones por parte del profesor.

Tabla 2: Errores, dificultades y Devoluciones

Dificultad	Errores	Devoluciones
Dificultad en comprender el concepto de distancia en esta geometría	Calcular la distancia de manera incorrecta 	¿Cuál es el punto inicial? Identifica las cuadradas recorridas ¿Cuántas cuadradas son?
Dificultad en comprender la métrica discreta	Atravesar de manera diagonal  Utilizar la geometría euclidiana.	¿Puedes pisar los terrenos donde se encuentran los microorganismos?
Traduce el enunciado a una desigualdad	Ubica puntos a distancia menor o igual a tres cuadradas  Ubica puntos a mayor o igual a tres cuadradas. 	Releer el enunciado y preguntar ¿A cuánta distancia se pedía que estuvieran las casas?

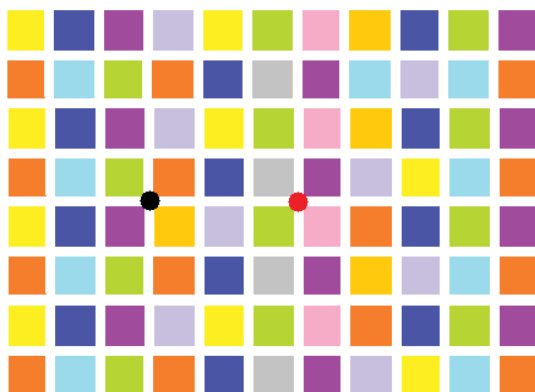
CLASE 2

La segunda clase, se relaciona con el objeto matemático de la elipse, y al igual que la clase uno, estructuraremos el análisis a priori de la siguiente manera: en primer lugar se expondrá el problema, luego las respuestas expertas de cada pregunta, donde posteriormente se mostrará la matemática en juego existente, es decir, los conocimientos previos que debe de tener el alumno y los conocimientos emergentes en la actividad, para finalizar con las posibles estrategias que pueden utilizar y, los errores, dificultades y devoluciones asociadas.

Carro de completos

La señora Claudia es dueña de un carro de completos, el cual se ubica cada semana en esquinas diferentes de la ciudad, Alejandro le encantan los completos, y de vez en cuando después de clases pasa a comprarse uno.

El Liceo de Alejandro se ubica en el punto negro, mientras que su casa se ubica a tres cuadras de este, es decir en el punto rojo.



Alejandro compra los completos de la señora Claudia solo si en total recorre 7 cuadras desde el Liceo a su Casa, es decir, realiza el recorrido Liceo-Carro-Casa.

1. ¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?
2. ¿Qué característica tienen en común las diferentes ubicaciones del carro?

Plan General de la clase 2

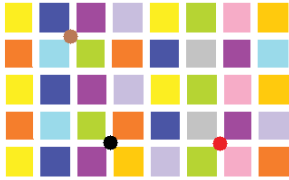
Tiempos	Actividad a realizar Alumno-Profesor
INICIO 10 minutos	Leer la actividad de manera individual, a modo de generar la participación de los alumnos y posteriormente se responde dudas generales del enunciado, por ejemplo. ¿Dónde se encuentra el liceo? ¿Dónde se encuentra la casa de Alejandro? ¿Dónde se puede ubicar el carro de completo? ¿Cuál es la condición que se debe cumplir?
DESARROLLO 30 minutos	Se desarrolla las preguntas de manera individual y después grupalmente. Se exponen los resultados y conclusiones
CIERRE 15 minutos	Se realiza lluvia de idea por parte de los alumnos y sus apreciaciones de la actividad, y el profesor realiza el cierre incorporando las ideas y el objetivo de la actividad. También realiza preguntas dirigidas y globales, de manera de corroborar los aprendizajes esperados.

Materiales:

- Copia de la situación para cada uno de los estudiantes
- Lápices grafito, Goma
- Data/Notebook

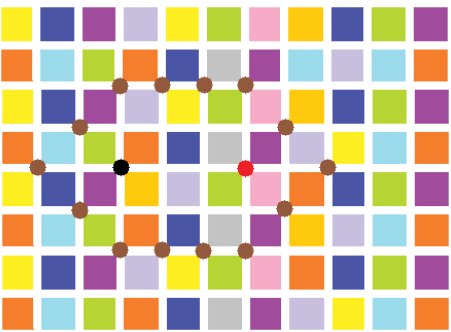
Plan de Clase 2 en relación al marco teórico.

Momentos	Actividad de aprendizaje / Tarea Matemática	Gestión de Aula	
		Intervención docente	Evaluación de la marcha de clase.
Inicio 5 min	<p>Se lee la actividad de manera individual y posteriormente un alumno la lee en voz alta para todo el curso.</p> <p>Un alumno explica con sus propias palabras el problema y se propone una esquina donde pueda estar el carro de completos</p>	<p>Se comienza recordando la actividad de un nuevo planeta, para que de esta manera se active el concepto de distancia (cuadras).</p> <p>Se entrega a cada alumno una copia del problema. Se pregunta ¿Dónde se encuentra Alejandro y donde desea llegar?</p>	<p>¿Los estudiantes se interesan por participar?</p> <p>¿Los alumnos son capaces de identificar alguna posición del carro según el enunciado?</p>
	<p>Fase de Acción: El alumno trabaja con un medio al responder la pregunta 1. (¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?), para esto puede utilizar diversas estrategias, entre estas el alumno puede dejar explícitos los caminos o por ensayo y error</p>	<p>El docente incentiva a la ubicación de diferentes esquinas para el carro. Si hay alumnos complicados, con el enunciado se relee el problema y se propone una esquina cualquiera y se pide que el alumno cuente la cantidad de cuadras recorridas en total.</p>	<p>¿Los alumnos son capaces de ubicar al menos una esquina donde se puede ubicar el carro?</p> <p>¿El alumno trabaja de manera individual?</p>

<p style="text-align: center;">Desarrollo 30 min</p>	<p>Fase de Formulación Esta etapa surge en dos momentos al ser expuesta, tanto para la pregunta 1 (¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?), como la pregunta 2. (¿Qué característica tienen en común las diferentes ubicaciones del carro?). Ya que los grupos formulan un mensaje explícitamente al responder las preguntas y enunciarlas a sus compañeros.</p> <p>Fase de Validación Esta fase surge en dos momentos a medida que avanza la clase, tanto para la pregunta 1 (¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?), como la pregunta 2 (¿Qué característica tienen en común las diferentes ubicaciones del carro?). Ya que a medida que los alumnos exponen sus respuestas, el resto del curso somete a veracidad dichas aseveraciones. Como son expuestas de manera creciente en cuanto a la completitud de la respuesta, se espera que existan debates.</p>	<p>Como muestra el Ej:</p>  <p>Una vez que los alumnos responden la primera pregunta se comienza con trabajo grupal, donde entre ellos debaten y proponen respuestas a las preguntas posteriores</p> <p>El docente pide a un representante por grupo que exponga los resultados de su equipo, donde son sometidos a la fase de validación. Esta exposición es de manera creciente.</p> <p>El profesor pregunta a los estudiantes. ¿cuál es la característica de todas las esquinas, respecto a colegio y la casa de Alejandro?</p>	<p>¿Se trabaja con el(los) compañero(s) más cercano(s)?</p> <p>¿Los grupos exponen a sus compañeros? Desde la estrategia más básica a la experta. Se escuchan con atención y se genera debate.</p> <p>¿Se cumplen con los tiempos planificados?</p> <p>¿Todos los grupos exponen sus respuestas?</p>
--	---	--	--

	<p>Fase de institucionalización</p> <p>El profesor generaliza la situación problemática, comentando, que han realizado el lugar geométrico de todos los <u>puntos</u> de un <u>plano</u>, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos es constante, utilizando la distancia del taxista</p>	Se explicita el objetivo de la clase.	¿Se cumplen los tiempos de la clase?
Cierre 10 min	<p>Conclusión de la actividad:</p> <p>Se pregunta a los alumnos sus apreciaciones de la actividad, y el profesor redondea la idea surgida en la fase de institucionalización diciendo que:</p> <p>Lo que han construido es una elipse, que si bien visualmente no tiene ninguna relación con la imagen que se ha enseñado, lo importante es la definición que está detrás, y que la imagen visual es solo un recurso para el estudio de objetos matemáticos.</p>	El profesor pregunta apreciaciones de la actividad, y solicita que los alumnos den a conocer ideas fuerzas que aprendieron de la actividad.	<p>¿Qué les parece la actividad?</p> <p>¿Qué han aprendido de estas dos clases?</p>

Respuestas Expertas

1. ¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?	2. ¿Qué característica tienen en común las diferentes ubicaciones del carro?
Existen 14 posiciones distintas para el carro de la señora Claudia 	Son todos los puntos tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos (casa y colegio) es constante. Esta es la definición de elipse

Conocimientos previos

Lugar geométrico, como el conjunto de puntos cumplen una o varias condiciones geométricas.

Cuadras como unidad de medida, ya que los alumnos deben conocer la distancia que estamos utilizando y sus unidades.

Suma de enteros, para que sumen las cuadras, es decir valores discretos, cuya suma sea siete.

Conocimientos emergentes

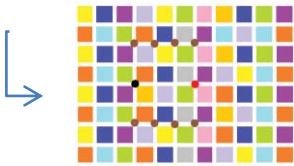
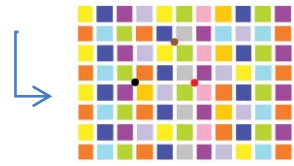
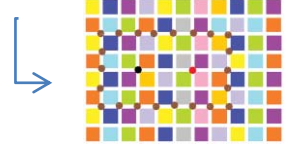
El lugar geométrico de todos los puntos tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos (casa y colegio) es constante en la geometría del taxista

Estrategias

Las siguientes estrategias utilizadas para ser analizadas como categorías de análisis

1. Marcar las esquinas por ensayo y error, es decir realiza mentalmente los caminos y/o ubica las posiciones del carro de completo que cumplan las condiciones necesarias
2. Marca cada esquina, dejando explícitos cada camino trazado

Dificultades, errores y devoluciones

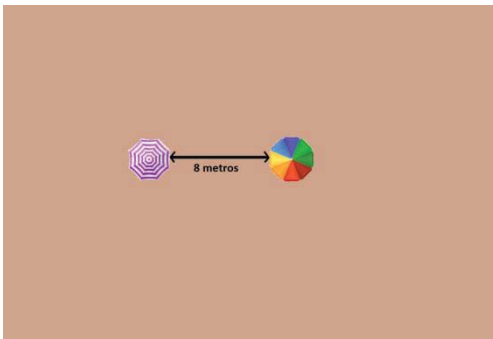
Dificultad	Errores	Devoluciones
<p>Dificultad en comprender el concepto de distancia en esta geometría</p>	<p>Considera que puede atravesar en diagonal</p> <p>No considera todos los puntos</p> 	<p>¿se puede atravesar las manzanas? Solo se puede caminar por las calles, es decir los sectores blancos</p> <p>¿Comprobaste contando las cuadras?</p>
<p>Dificultad en ubicar todos los puntos</p>	<p>Ubica menos puntos de los pedidos</p>  <p>Ubica más puntos de los pedidos</p> 	<p>¿Existirá otro?</p> <p>¿Comprobaste contando las cuadras?</p>

CLASE 3

El análisis a priori de la última clase, será igual que las clases previas, es decir tendrá la siguiente estructura: en primer lugar se expondrá el problema, luego el plan de clases general, las respuestas expertas de cada pregunta, donde posteriormente se mostrará la matemática en juego existente, es decir, los conocimientos previos que debe de tener el alumno y los conocimientos emergentes en la actividad, para finalizar con las posibles estrategias que pueden utilizar y, los errores, dificultades y devoluciones asociadas.

En la playa

Ahora la Señora Claudia se pone a vender completos con su carrito en la playa.



La madre de Alejandro se encuentra en el quitasol rayado y desea comprar completos para su hijo y sus amigos, los cuales están en el quitasol de colores. Si la distancia entre ambos quitasoles es de 8 metros y la madre de Alejandro desea caminar solo 16 metros para comprar los completos y llevarlos a los jóvenes

1. ¿Cuántas posiciones distintas para el carro existen?
2. ¿Conoces el nombre de la figura que se forma?

Plan General de la clase 3

Tiempos	Actividad a realizar Alumno-Profesor
INICIO 10 minutos	Se recuerda la clase 2, es decir, de parte de un alumno se pide que realice una síntesis de la actividad. Se espera que el alumno sea capaz de destacar los puntos en relación al liceo y la casa, como también destacar el contexto en el cual se situaba la problemática.
DESARROLLO 30 minutos	Se desarrolla las preguntas de manera individual y después grupalmente. Se exponen los resultados y conclusiones
CIERRE 15 minutos	Se utiliza Software Geogebra, con el objetivo de clarificar la forma euclidiana del objeto de la elipse.

Materiales:

- Copia de la situación para cada uno de los estudiantes
- Lápices grafito, Goma, Regla
- Data / Notebook / Software Geogebra

Plan de la clase 3 en relación al Marco Teórico

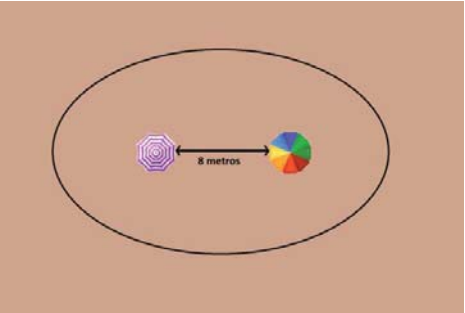
Momentos	Actividad de aprendizaje / Tarea Matemática	Gestión de Aula	
		Intervención docente	Evaluación de la marcha de clase.
Inicio 15 min	<p>Se presenta la cuadrícula de las calles de la ciudad de Alejandro y se recuerda el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos es constante, utilizando la distancia del taxista</p> <p>Se lee la actividad de manera individual y posteriormente un alumno la lee en voz alta para todo el curso.</p>	<p>Con ayuda de los alumnos se recuerda el problema del “Carro de completos y Alejandro”, donde se pone énfasis en la característica que poseían las esquinas respecto al colegio y la casa.</p> <p>Se proyecta con Data la ciudad, a modo de ayuda para los estudiantes.</p>	<p>¿Los estudiantes se interesan por participar?</p> <p>¿Los alumnos son capaces recordar la clase anterior y la característica de los puntos?</p>

	<p>Fase de Acción: El alumno trabaja individualmente con un medio al responder la pregunta 1. (¿Cuántas posiciones distintas para el carro existen?). En este momento el alumno debiera organizar la estrategia a utilizar, por ejemplo, puede emplear regla, lápices, que le permitan ir dando respuesta a la pregunta planteada.</p>	<p>El docente incentiva a la ubicación de los carros, recordando que están en una playa por lo que no hay cuadras que contabilizar.</p>	<p>¿Los alumnos son capaces de ubicar un punto para el carro de comidas?</p> <p>¿El alumno trabaja de manera individual?</p>
--	---	---	--

<p style="text-align: center;">Desarrollo 20 min</p>	<p>Fase de Formulación En esta etapa, el alumno expone a otros compañeros sus reflexiones, intercambian estrategias, se plantean preguntas, aclaran dudas, y complementan sus respuestas. De tal manera, que colaborativamente pueden formular un mensaje claro, ordenado y coherente que puedan exponer a lo demás grupos.</p> <p>Fase de Validación Esta fase surge a medida que los alumnos exponen sus respuestas. El resto del curso somete a veracidad dichas aseveraciones.</p> <p>Fase de institucionalización generaliza la situación problemática, comentando: Lo que han construido es una elipse, ya que es lugar geométrico de todos los <u>puntos</u> de un <u>plano</u>, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos (quitasoles) es constante</p>	<p>El docente pide a un representante por grupo que exponga los resultados de su equipo, donde son sometidos a la fase de validación. Esta exposición es de manera creciente.</p> <p>El profesor relaciona la actividad de la playa con la del carro de completos, de manera que hace explícito ambas geometrías (taxista y euclidiana). Se clarifica la definición de elipse en ambas geometrías</p> <p>Se presenta Software Geogebra con una elipse prepara y el cálculo de las distancias</p>	<p>¿Se trabaja con el(los) compañero(s) más cercano(s)?</p> <p>¿Los grupos exponen a sus compañeros? Desde la estrategia más básica a la experta. Se escuchan con atención y se genera debate.</p> <p>¿Se cumplen con los tiempos planificados?</p> <p>¿Todos los alumnos muestran interés por la institucionalización?</p> <p>¿Los alumnos comprenden la definición de elipse en la geometría euclidiana?</p>
--	---	--	--

<p>Cierre 10 min</p>	<p>Conclusión de la actividad: Se pregunta a los alumnos sus apreciaciones de la actividad, y se comentan aprendizajes adquiridos, reflexiones surgidas, etc.</p>	<p>El profesor pregunta apreciaciones de la actividad, y solicita que algunos alumnos expliciten la definición de elipse.</p>	<p>¿Cuál es la definición de elipse?</p>
--------------------------	---	---	--

Respuestas Expertas

<p>1. ¿Cuántas posiciones distintas para el carro existen?</p>	<p>2. ¿Conoces el nombre de la figura que se forma?</p>
<p>Existen infinitos puntos</p>  <p>The diagram shows a brown background with a black ellipse. Inside the ellipse, there are two foci: a purple square on the left and a colorful circle on the right. A double-headed arrow between them is labeled '8 metros'.</p>	<p>Elipse, y es el lugar geométrico de todos los puntos cuya ubicación en el plano es tal, que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de él es constante</p>

Estrategias

1. Marcar las posiciones del carro a de ensayo y error, y luego realiza mentalmente los movimientos y/o ubica las posiciones del carro de completo que cumplan las condiciones necesarias.
2. Utilizar algún elemento de referencia, por ejemplo: cuerda, reglas, lápiz, etc.
3. Realiza triángulos que cumplan con que el perímetro sea 24 metros y uno de sus lados sea 8 metros.

Dificultades, errores y devoluciones

Dificultad	Error	Devoluciones
No considerar la geometría en la que se está trabajando, ya que considera la geometría del taxista	Considera una cantidad finita de puntos	¿Existirá otra posición del carro? ¿Qué diferencia existe en relación a la actividad del carro de completo? ¿Qué similitud existe con respecto a la actividad del carro de completo?

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS A POSTERIORI

Análisis de resultados

Para poder realizar el análisis a posteriori se establecerán categorías a la luz de las fases de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986). Cabe destacar que las fases de la teoría se entenderán de la siguiente manera:

- Fase de acción: Proceso en el cual el alumno trabaja de manera individual y exploran las preguntas 1 y 2
- Fase de formulación: Se entenderá esta fase al proceso en el cual los alumnos trabajan y comparten sus respuestas en grupo de tres alumnos las preguntas 1, 2 y 3
- Fase de validación: Proceso en el cual un representante exponen los resultados obtenidos y son sometidos a un proceso de aceptación o rechazo.

A continuación, se presenta una tabla de las categorías, las cuales surgen a la luz de las posibles estrategias resolutivas que pueden decidir los alumnos.

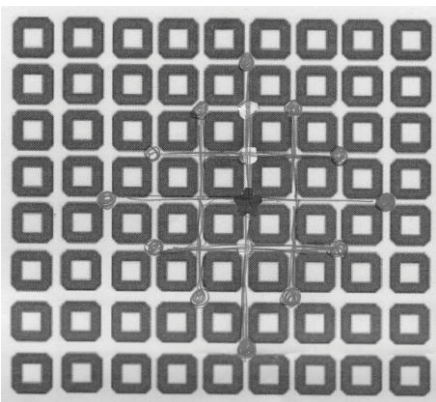
Tabla 3: Categorías

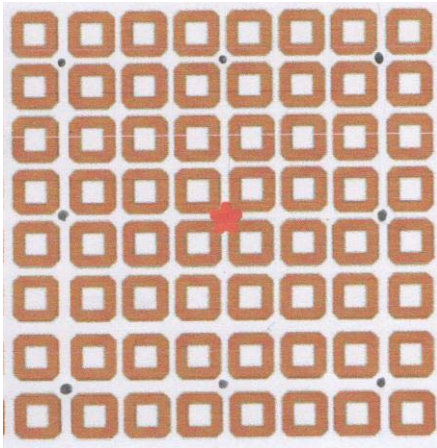
Fase	Categoría	Descripción
Acción	C₁ : Casas por tanteo	Realiza mentalmente los caminos y/o ubica casas que cumplan las condiciones necesarias
	C₂ : Marcando las casas	Deja explicito los caminos trazados a cada casa.

Formulación	C₃: Caracteriza de acuerdo al centro	Caracteriza las casas de acuerdo a la distancia respecto del centro de censo
	C₄: Caracteriza de acuerdo a las casas	Caracteriza las casas de acuerdo a las otras casas y sus ubicaciones
	C₅: Rombo	Argumenta que la figura es un rombo
	C₆: Cuadrado	Argumenta que la figura es un cuadrado
	C₇: Circunferencia	Argumenta que la figura es una circunferencia
Validación	C₈: Característica	Argumentan de acuerdo a las características de las casas
	C₉: Unión de puntos	Unen puntos y argumenta de acuerdo a la figura formada

A continuación, se presentan una tabla con algunas producciones escritas de los estudiantes, las que se clasifican de acuerdo a la estrategia seleccionada y la categoría de análisis.

Tabla 4: Producciones

Pregunta y reproducción de alumnos	Descripción
	<p>Se evidencia que E_{22} explicita de los caminos, lo cual muestra, una respuesta correcta. Cabe destacar que solo dos de los alumnos que realizan esta estrategia cometen errores en explicitar lo puntos. La categoría asociada a esta primera producción es C_1.</p> <p>Esto hace que encuentren las características de las casas respecto al lugar del censo.</p>



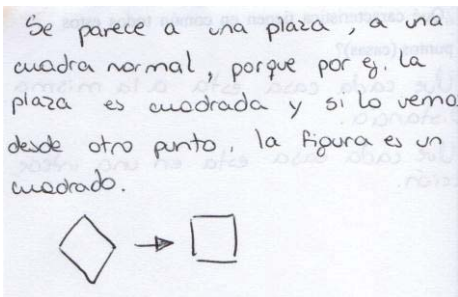
E_{22} evidencia que los puntos ubicados son ubicados con una estrategia visual, es decir, mentalmente dispone los puntos que están a tres cuadras de distancia.

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Todos los puntos están a 3 cuadras del punto de origen, independiente del recorrido.

Casi todos los alumnos explicitan la característica de que las casas se encuentran a tres cuadras de distancia del centro de censo. Lo que muestra una comprensión en cuanto a los puntos en relación con el centro.

E_9 explicita la característica de los puntos respecto al centro del censo, y la categoría asociada es C_3



Los alumnos relacionan la figura generada a un cuadrado a un rombo ya que unen los puntos, es decir prevalece el registro figural ya que unen los puntos en línea recta (utilizando geometría euclidiana) y no la característica de estos respecto al lugar del censo. Esta categoría asociada sería C_9

Forman un cuadrado porque la distancia en las 4 casas de una línea es ~~igu~~ igual a los demás lados.

Ningún alumno explicita que la figura formada es una circunferencia, es decir, C_7

Luego de realizar el análisis particular de las respuestas, se pueden evidenciar los siguientes resultados, los cuales podemos contrastar con el marco teórico y los antecedentes recopilados para la investigación y el análisis a priori.

En contraste con el análisis a priori 77% de los alumnos del curso realizaron mentalmente los caminos, (utilizando la estrategia dos) y ubicación de las casas, de los cuales solo un 17% lo hizo de forma correcta. Por otra parte, un 23% explicitó los caminos realizados para encontrar las casas solicitadas (estrategia 2, asociada a la categoría 2) y de estos el 72% da una respuesta correcta, por lo que podemos verificar respecto al análisis a priori que la mayoría de los alumnos utiliza la estrategia de ensayo y error.

Es importante destacar que el 90% de los alumnos logra caracterizar los puntos (casas) respecto al centro del censo, es decir, explicitar que la característica que tienen en común es que se encuentran a tres cuadras de distancia del lugar del censo, y el otro 10% indica que las casas están en paralelo entre sí o se encuentran en esquinas.

Luego que se explicita la característica común de las casas, los alumnos relacionan los puntos encontrados con alguna figura que cumpla con dicha condición. El 83% de los alumnos expresan que la figura formada es un cuadrado y/o rombo, ya que al justificarlo lo realizan uniendo los puntos, es decir, se centran en la representación figural, en vez de la propiedad matemática que poseen estos puntos. Un 13% no responde a la pregunta, y un alumno justifica que “no es una figura, que no se puede unir, y son solo puntos”

Ningún alumno logra identificar los puntos en la geometría del taxista como una circunferencia, por lo que se hace necesario que en la fase de institucionalización se recalque la característica de las casas, y se provoque el nexo con la geometría euclidiana, para finalmente definir la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de un centro fijo y no solo de su figura/visual.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

A partir de todo lo expuesto podemos concluir que:

Primero, si bien la actividad puede ser implementada en diferentes niveles, tanto alumnos de séptimo básico, segundo o tercero medio, pues utiliza una geometría no usual (taxista), y el conocimiento previo que utilizan los alumnos es la distancia euclidiana, de esta manera, todos los alumnos presentados anteriormente se encuentran en condiciones de poder en el tránsito de las fases de la TSD de Brousseau (2007), quien plantea que “el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.” (p. 2), generar la situación adidactica para que el alumno cree su propio aprendizaje.

En segundo lugar, se consideran indispensable las fases de las TSD, pues contribuye a la búsqueda personal y creativa de la actividad propuesta, además de generar un espacio de intercambio de posturas con otros compañeros, y por tanto de argumentación de sus propias reflexiones; para ser un aporte significativo la etapa de institucionalización donde el profesor logrará dar a conocer el objetivo y, en interacción con los alumnos gestionar la relación/articulación entre las geometrías euclidiana y del taxista,

También es importante destacar que, en la interacción entre el docente y los alumnos, las devoluciones deben de lograr que el alumno se responsabilice de dar

una respuesta al problema, es por eso los problemas deben ser elegidos “de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que se produce su respuesta el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer” (Brousseau, 2007, p. 31).

En tercer la secuencia es innovadora porque aborda la definición de circunferencia y elipse como lugares geométricos, objetos matemáticos muy escasos, y no solo los aborda, sino que, además, las actividades propuestas suscitan interés y motivación por parte de los alumnos, pues son un medio contextualizado y generador de desequilibrios cognitivos

La clase implementada dio cuenta que los alumnos aprende la definición de circunferencia como lugares geométricos, ya que, al usar la geometría del taxista, esta permite que el alumno se desprenda del aspecto figural y se centre en la definición misma; bien los alumnos por si solos no logran asociar la figura formada a una circunferencia, en la fase de institucionalización emerge el objeto matemático.

Como proyecciones de la actividad se sugiere que se pueda ampliar a otros lugares geométricos, como también incorporar nuevas geometrías accesibles para el alumno, como lo es la geometría del máximo.

Bibliografía

- Abrate, R., Delgado, G., & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 39(1), 1-9.
- Blanco Molleda, S., De las Heras Karl, R., Fuenzalida Correa, G., y Riveros Rojas, J. (1995). *Matemática Plan Electivo III y IV medio*. Santiago: Santillana.
- Boyer, C. (1999) *Historia de la matemática. Versión de Mariano Martínez Pérez*. Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Brousseau, G. (1994). La memoria del Sistema Educativo y la Memoria del Docente. *Publicación conjunta de la Facultad de Ciencias Exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires y del Servicio de Cooperación Lingüística y Educativa de la Embajada de Francia en la Argentina*. Argentina.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Escobar, J. (1992). *Elementos de Geometría. Colombia: Universidad de Antioquia Departamento de Matemáticas*. Recuperado de: <http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/Geometria/pdf/elementos%20de%20geometria1.pdf>
- Heckmann, P. y Weissglass, J. (1994). Contextualized Mathematics Instruction: Moving beyond recent proposals. *For the learning of Mathematics*.
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Lehmann, C. (2002). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa S. A, México.
- Mena-Lorca, A. (2007). El estudio de clases japonés en perspectiva. Conferencia llevada a cabo en el XIII Jornadas de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, Chile.

- Mineduc (2001). Programa de estudio Tercer Año Medio Formación Diferenciada. Gobierno de Chile Ministerio de Educación, Chile.
- Mineduc (2015). *Bases Curriculares - Matemática - 7º básico a 2º medio*. Recuperado de: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-37136_bases.pdf
- Mineduc (2012). *Bases Curriculares - Matemática - 1º básico a 6º básico*. Recuperado de: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-21321_programa.pdf
- Puig, L. y Calderón, J. (1996). Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-CIDE.
- Ricaldi, M. (2017). Secuencia didáctica para el cambio conceptual en el tratamiento de la elipse. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol (30). P. 1468-1478
- Rioseco, M., y Romero, R. (1997). La contextualización de la enseñanza como elemento facilitador del aprendizaje significativo. *Actas Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo*.
- Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw Hill; Interamericana de España.
- Vigotsky, L. (1988) “Cap. IV: Internalización de las funciones psicológicas superiores”, y “Cap. VI: Interacción entre aprendizaje y desarrollo” en: El desarrollo de los procesos psicológicos superiores, Crítica, Grijalbo, México.

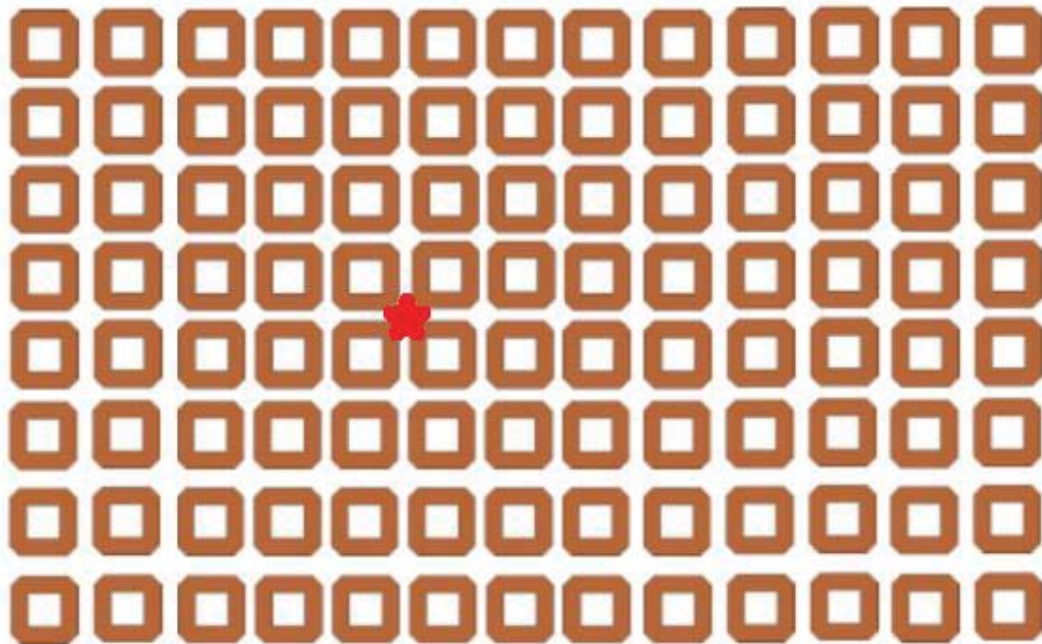
ANEXOS 1:

SECUENCIA DIDACTICA

Material para el estudiante

UN NUEVO PLANETA

El planeta Cabbie, que se encuentra a 179 millones de años luz de la Tierra, posee una gran particularidad, ya que la superficie de su terreno se encuentra lleno de microorganismos que le proveen oxígeno a todo el planeta (recuadros cafes). Y, en la intersección de las cuadras hay solo una casa. Por esta razón, los habitantes de Cabbie han debido idear una estrategia para movilizarse por el territorio sin dañar a los microorganismos. A continuación, se presenta un plano aproximado del territorio de Cabbie.



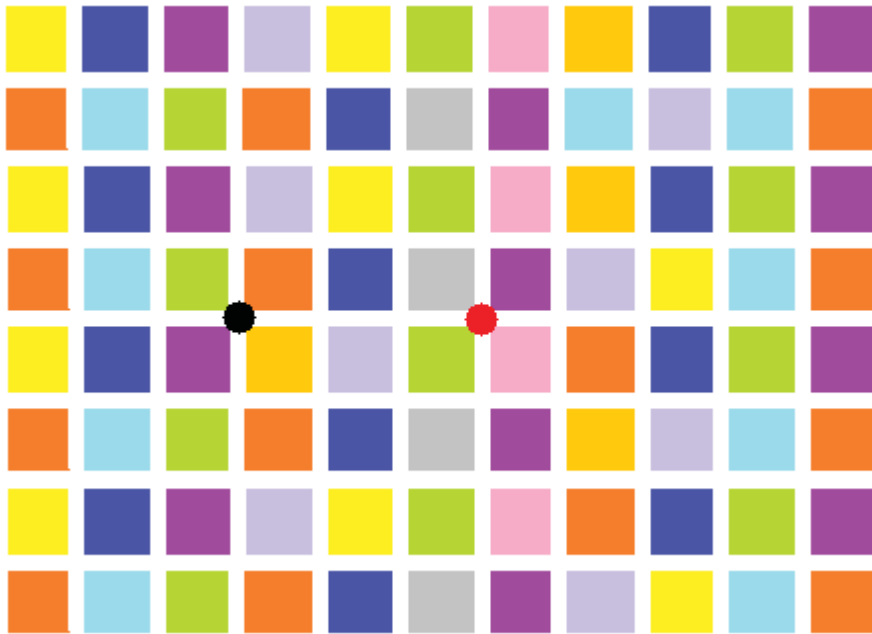
Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar
2. ¿Cuántos puntos son?
3. ¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

CARRO DE COMPLETOS

La señora Claudia es dueña de un carro de completos, el cual se ubica cada semana en esquinas diferentes de la ciudad, Alejandro le encantan los completos, y de vez en cuando después de clases pasa a comprarse uno.

El Liceo de Alejandro se ubica en el punto negro, mientras que su casa se ubica a tres cuadras de este, es decir en el punto rojo.

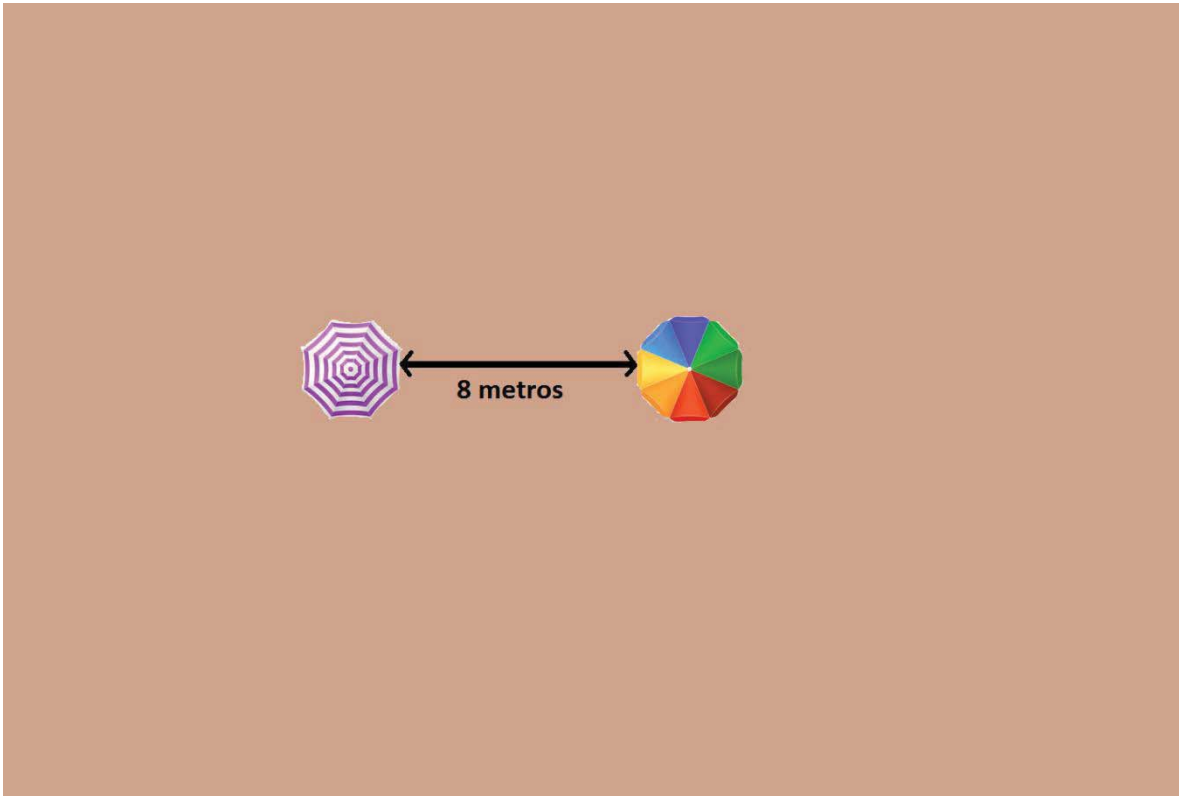


Alejandro compra los completos de la señora Claudia solo si en total recorre 7 cuadras desde el Liceo a su Casa, es decir, realiza el recorrido Liceo-Carro-Casa.

1. ¿Cuántas posiciones distintas existen para el carro de la señora Claudia para que Alejandro pueda comprar?
2. ¿Qué característica tienen en común las diferentes ubicaciones del carro?

En la playa

Ahora la Señora Claudia se pone a vender completos con su carrito en la playa.



La madre de Alejandro se encuentra en el quitasol rayado y desea comprar completos para su hijo y sus amigos, los cuales están en el quitasol de colores. Si la distancia entre ambos quitasoles es de 8 metros y la madre de Alejandro desea caminar solo 16 metros para comprar los completos y llevarlos a los jóvenes

1. ¿Cuántas posiciones distintas para el carro existen?
2. ¿Conoces el nombre de la figura que se forma?

Producciones de alumnos

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Todas están a la misma distancia

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

- todas están a tres cuadras
- todas deben ser cercadas

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Que todas están a tres cuadras.
Que todas están entre las intersecciones
no forma ninguna figura porque los círculos no están unidos

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Que todas están a 3 cuadras la misma distancia.

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Están a la misma cantidad de cuadras de distancia

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Las casas están frente o atrás

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Forman todos unidos un cuadrado con el local en el centro

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Las casas están en paralelo

puntos (casas)?

los puntos las casas están en paralelo

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Todos se encuentran a la misma distancia con respecto al local.

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Todos los puntos están a 3 cuadras del punto de origen, independiente del recorrido

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

todas están a tres cuadras. Están en el mismo planeta. Juntas forman un rombo

enonimado 20

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

todos están a 3 cuadras.

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

- Que cada casa está a la misma distancia.
- Que cada casa está en una intersección.



¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

Están a 3 cuadras.

¿Qué característica tienen en común todos estos puntos (casas)?

- Todos se encuentran a 3 cuadras rodeando el local

Cuadrilátero.

cuadrado o rombo.

Un cuadrado porque todos los lados tienen la misma cantidad de cosas.

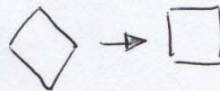
Forma un rombo



Es un cuadrado rotado (rombo).
porque

Rombo, ya que tiene las mismas distancias en todos sus lados, y es un Cuadrado Invertido

Se parece a una plaza, a una cuadra normal, porque por ej. la plaza es cuadrada y si lo vemos desde otro punto, la figura es un cuadrado.



Un cuadrado, porque tiene 4 lados pero esto de lado.

Se parece a una plaza con las calles que la rodean.

Un cuadrado porque divide dos cuadrados en sus diagonales teniendo por ende 90° en cada vértice.

Un cuadrado, porque en todos los lados hay 4 cosas.

Es un cuadrado, tiene la misma distancia en todos sus lados.

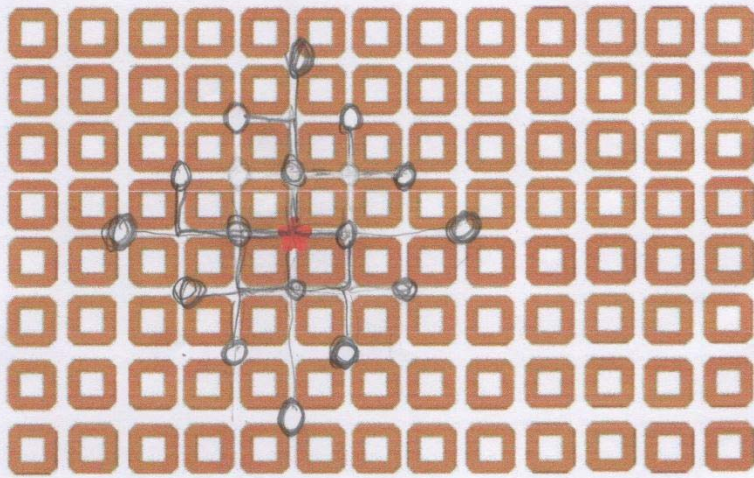
Forman un cuadrado porque la distancia en las 4 cosas de una línea es ~~ig~~ igual a los demás lados.

es un cuadrilátero

cuadrado

es un cuadrilátero

Un rombo, por que es un cuadrado cuadrado

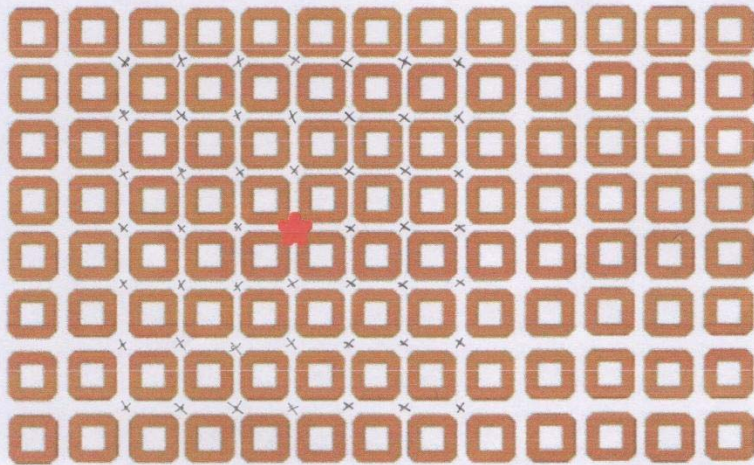


Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar

2. ¿Cuántos puntos son?

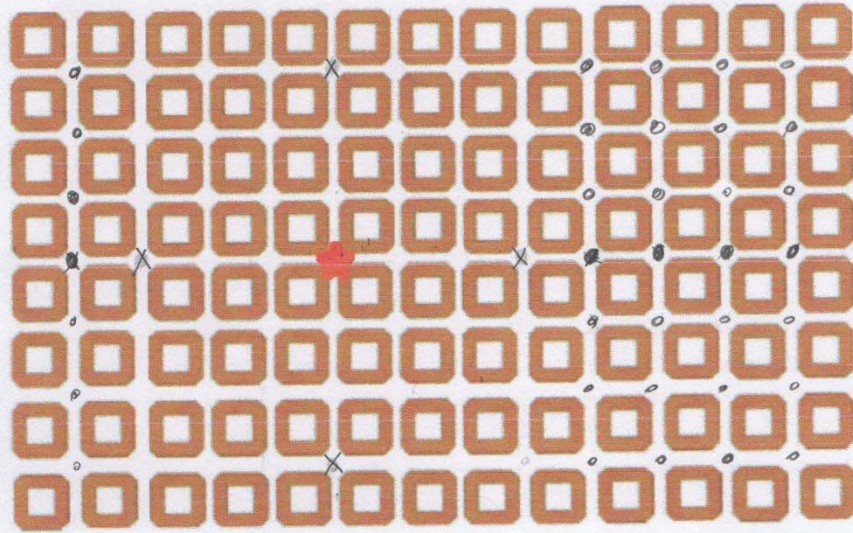
16



Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar
2. ¿Cuántos puntos son?

48 puntos

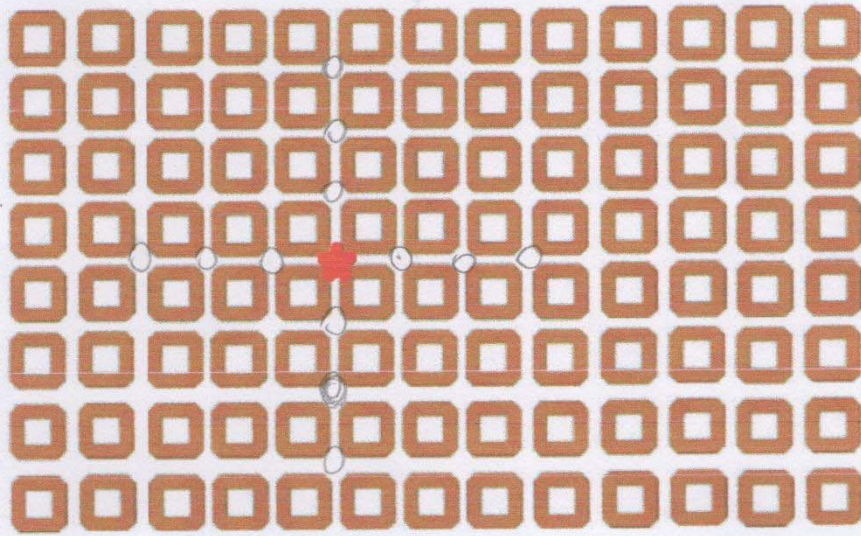


Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar

2. ¿Cuántos puntos son?

36



Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff (habitante del planeta) no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a exactamente tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.

1. Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar
2. ¿Cuántos puntos son?

12