Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

# Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica

**Tesis para optar al grado de**
**Doctor en Didáctica de la Matemática**

**Jaime Antonio Huincahue Arcos**

Tesis dirigida por:
Dr. Jaime Mena Lorca
Co-dirigida por: Dra. Rita Borromeo Ferri

Valparaíso – CHILE
2017

# Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica

de

*Jaime Antonio Huincahue Arcos*

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 16 de agosto de 2017 ante la comisión de tesis integrada por:

- Dr. Francisco Cordero Osorio, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México. Profesor externo.
- Dra. Astrid Morales Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor interno.
- Dr. Arturo Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor interno.
- Dra. Rita Borromeo Ferri, Universidad de Kassel, Alemania. Co-director de tesis.
- Dr. Jaime Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Director de tesis.

Año 2017

CHILE

# Agradecimientos

Agradezco a las siguientes instituciones que ayudaron en la realización de este trabajo doctoral:

- Al Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, IMA-PUCV. Más allá de ser mi *alma matter*, es la casa de estudios que me permitió ser quien soy, tanto en el punto de vista profesional como en lo personal. Imposible olvidar a las personas del IMA, a las que pasaron por éste y su Cº Barón. Para mí, Valparaíso inicia en el Cº Barón. En el IMA.
- A la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, PUCV. Principalmente por el uso de sus espacios físicos y haberme otorgado la beca de exención de arancel 2013, beca de manutención el año 2014 y aportes para mi asistencia a RELME 27 el año 2013.
- A CONICYT, por haberme otorgado la “Beca de Doctorado en Chile - Año Académico 2015”. Esto significó financiar tanto el programa de estudios como mi persona y poder asistir a ICTMA 17 en Nottingham, UK; y realizar una estancia doctoral en CINVESTAV-IPN en Ciudad de México, México; ambas en el año 2015. ¡Muy agradecido!

También personas que de una u otra manera, permitieron que este trabajo se desarrolle y finalice:

- Al doctor Jaime Mena-Lorca, Su constante apoyo y discusión durante todo el transcurso del doctorado me ayudaron a terminar esta fase inicial en la formación de ser un investigador en la Didáctica de la Matemática. Sin dudas, hay un sello de su forma de trabajar en la formación que me ofreció. Además, en todo momento tuve su apoyo para las actividades del programa, por ejemplo asistencia a congresos, postulación a proyectos y confección de artículos de investigación. Me siento un agradecido de su formación y por toparme con personas como él en la vida.
- Al doctor Francisco Cordero Osorio. Sus reflexiones y discusiones han sido un aporte desde su calidad como matemático educativo y como persona. Además, el Dr. Cordero fue el que aceptó que yo hiciera estancia doctoral en México (CINVESTAV-IPN) el año 2015, lo que en muchos sentidos fue un aporte para este trabajo, en especial el capítulo 4 de esta tesis.
- A la doctora Rita Borromeo Ferri. En momentos en donde necesitaba de manera urgente una orientación para tomar un rumbo en este trabajo, sus precisos comentarios me facilitaron la toma de decisiones en el devenir de la tesis y de lo que actualmente pretendo ser como investigador.
- A Mónica. Estuvo lleno de momentos en donde te transformaste en el único apoyo cercano que tuve. Fuiste la persona que me ha dado el regalo más hermoso de mi vida y aunque tempestades de todo tipo nos han golpeado de las formas más duras, no te quita crédito alguno en que parte de esta tesis es tuya.
- A mis padres, *la maggyta*, Daniel y la alegría que siempre me dieron Diego y Franco. Muchas veces me han apoyado en todos los caminos y rumbos que he tomado, nada hubiera sido posible sin ustedes. Faltan las palabras para agradecerles todo lo que me han ofrecido ☺.
- Sin querer especificar para no tener opción de olvidar personas, agradezco a todos los que alguna vez quisieron -aceptaron o tuvieron- discutir –o escuchar- mis temas de tesis, entre ellos a varios profesores y estudiantes del programa, mi Amaru, amigos, familiares, desconocidos e incluso mi querido “Sabbath, Black Sabbath”.

A todos les digo, ¡Muchas gracias!

# Índice

# Resumen

La relación entre la realidad y el conocimiento matemático sugiere, desde una visión educativa, estudios que planteen maneras sobre cómo generar otros significados del conocimiento matemático, sin soslayar los múltiples marcos que se han formulado y utilizado al respecto. En ese sentido, desde una aproximación cualitativa, se construye una experimentación en la formación del profesor de Matemática en Chile. Para tal fin, se plantea un marco conceptual de la modelación matemática, el cual consiste en: constructos teóricos respecto a la concepción de modelación matemática, ciclo de modelación desde una aproximación individualizada del conocimiento, competencias de modelación y niveles de modelación. Con esto, se propone un curso que estudie la enseñanza de modelación matemática dirigido a la formación inicial del profesor de matemáticas; compuesto de 15 sesiones, las cuales emergen desde el marco conceptual enunciado y planificado a partir de experiencias teóricas validadas -como es el marco teórico de Borromeo-Ferri para la enseñanza de la modelación-. Mediante un análisis metodológico con el modelo MTSK, se destacan resultados hacia el desarrollo reflexivo de los estudiantes en el transcurso de la experiencia, hacia el conocimiento que tienen ellos como estudiantes y como futuros profesores, evidenciado desde la comprensión del conocimiento en todos los subdominios del dominio MK y el subdominio KMT. Uno de los resultados, refleja el cuestionamiento de la separación de la realidad y la matemática, el que efectivamente asume el marco conceptual utilizado. Esto, motiva desde los datos y la reflexión, la tarea de hacer explícito *una modelación* que se distinga de la visión tradicional que acuña el curriculum; para esto, se plantea una diferencia basal respecto a la unidad que define la modelación matemática, la que es denominada una variedad teórica de la modelación matemática, que es iniciada con el cuestionamiento de la separación mencionada. Con la Teoría Socioepistemológica se presenta una aproximación a dicha variedad: reconociendo el principio que se distingue de la unidad que repercute en la transformación de la concepción de modelación y la forma de articular los conocimientos que se ponen en juego, para generar instrumentos teóricos que promuevan la resignificación del

conocimiento matemático a partir de los usos. Luego de clarificar las distinciones entre ambas posiciones, se plantea una categoría de modelación desde el programa socioepistemológico para analizar el uso del conocimiento matemático de una comunidad de arquitectos y establecer las relaciones de los saberes que entran en juego con esa categoría.

# Abstract

The relationship between reality and mathematical knowledge suggests, from an educational perspective, studies that present ways on how to generate other meanings of mathematical knowledge, without ignoring the multiple frameworks that have been formulated and used in this regard. In that sense, from a qualitative approach, an experimentation in the formation of the Mathematics teacher in Chile is constructed. To this end, a conceptual framework of mathematical modeling is proposed, which consists of: theoretical constructs regarding the conception of mathematical modelling, modelling cycle from an individualized approach to knowledge, modelling competencies and modelling levels. With this, a course is proposed that studies the teaching of mathematical modelling directed to the initial formation of the professor of mathematics; Composed of 15 sessions, which emerge from the conceptual framework enunciated and planned from validated theoretical experiences -as is the theoretical framework of Borromeo-Ferri for the teaching of modelling-. Through a methodological analysis with the MTSK model, results are highlighted for the reflective development of the students in the course of the experience, towards the knowledge they have as students and as future teachers, evidenced from the understanding of knowledge in all subdomains of the Domain MK and the subdomain KMT. One of the results reflects the questioning of the separation of reality and mathematics, which effectively assumes the conceptual framework used. This motivates from the data and the reflection, the task of making explicit a modeling that is distinguished from the traditional vision that coined the curriculum; For this, a basal difference is presented with respect to the unit that defines the mathematical modeling, which is called a theoretical variety of mathematical modeling, which is initiated with the questioning of the aforementioned separation. With the Socioepistemological Theory an approximation to this variety is presented: recognizing the principle that distinguishes itself from the unit that has repercussions in the transformation of the modeling conception and the way of articulating the knowledge that is put in play, to generate theoretical instruments that propitiate the mathematical knowledge resignification from the

uses. After clarifying the distinctions between the two positions, a category of modeling is proposed from the socioepistemological program to analyze the use of the mathematical knowledge of a community of architects and to establish the relations of the knowledge that come into play with that category.

# Prólogo

Necesariamente, las investigaciones en modelación matemática consideran focos de estudio, que acuñan matices filosóficos, permitiendo cimentar ideas para la actividad natural de la investigación. Sin embargo, el estudio de la relación entre la realidad y la matemática es algo insoslayable en su entender. Sin dudas, es un aspecto que requiere clarificación, ya que repercute en las interpretaciones teóricas y prácticas del investigador en Didáctica de la Matemática y en el sujeto de investigación, por ejemplo, el profesor de matemáticas.

Como una indagación inicial, una proximidad hacia la modelación matemática proviene –desde mi experiencia- de trabajos de investigación en el área de la Matemática y en Modelación Matemática en Ecología y Biomatemática. En estos nichos, es donde se puede reconocer cómo la matemática no solamente se mantiene con un significado abstracto y puro, sino que es posible desarrollar el conocimiento de otras áreas del saber (como por ejemplo en la Bioeconomía, el manejo de plagas y recursos marinos) desde las aplicaciones de resultados matemáticos, planteando situaciones matemáticas que eran posibles de reconocer en situaciones biológicas, para así, generar respuestas desde el conocimiento matemático de las problemáticas biológicas, o bien, que la problemática ajena a la matemática fuera posible de abordar desde la construcción de modelos.

Esto conllevó sin dudas a apreciar a las matemáticas desde otros horizontes, reconociendo cómo ha sido limitada la matemática de la escuela[1], variantes de cómo podría ser posible apreciar a la matemática con fines educativos y cómo lograr resultados desde la Didáctica de la Matemática de tal manera que surjan otros significados, que muchas veces, se mantienen en un ambiente abstracto, o bien, ajenos a su aprendizaje y enseñanza en los niveles de escolarización de la sociedad. Necesariamente, para el profesor de matemáticas le es insuficiente manipular una matemática en base a modelos abstractos, ya que una esencia de la matemática para su aprendizaje, debe ser el significado que ésta posee no solamente como un modelo abstracto del conocimiento, sino que en la vida del estudiante. Dicho esto, es que la Didáctica de la Matemática -como una base disciplinar- posee resultados de interés para el abordaje y lineamiento de las problemáticas fundamentales relacionadas con el conocimiento y cómo es posible que impacte en la formación inicial del profesor de matemáticas, estableciendo una directriz desde la modelación matemática, y en general, desde la modelación.

En esta posición, nos ubicaremos para la investigación de la enseñanza de la modelación matemática en la formación inicial del profesor.

En el primer capítulo, se plantea una visión desde las ideas de corrientes anglosajonas de la modelación matemática, dejando en relieve sus relaciones existentes frente al curriculum nacional chileno en el marco de antecedentes de la investigación, todo esto con el objeto de evidenciar o saber qué se espera sobre el modelar en un aula chilena, y más aún, qué elementos son posibles de reformular en una formación inicial para que tales procesos adquieran continuamente mejor calidad. Además, se definirá la problemática que dará inicio a la investigación, abordando previamente preguntas referidas a ¿cómo es caracterizada la modelación en el curriculum chileno? ¿Qué es modelación matemática en el espectro internacional (por ejemplo en pruebas estandarizadas)? ¿Qué relación tiene la visión curricular con los posicionamientos teóricos que se han desarrollado o que están en desarrollo? ¿qué fundamentos filosóficos son los que sustentan a las posiciones y qué diferencias poseen?.

Se plantea un estado del arte de modelación matemática según la literatura que sirve como soporte para el curriculum chileno, mostrando un análisis y reflexión sobre la posición de modelar según las

[1] En este documento, el concepto matemática de la escuela lo acuñaré para referirme a matemática escolar, la matemática que posee como fin, la enseñanza y su aprendizaje en cualquier nivel escolar.

necesidades curriculares como una habilidad demandada en las aulas chilenas. Posterior a eso, se fundamenta por qué la relación entre las matemáticas y la realidad es el sostén para el desarrollo teórico y práctico de la modelación en el aula desde la propia visión curricular, lo que naturalmente plantea la discusión sobre qué es la realidad, la creación de modelos desde diversas posiciones, y en general, por qué un estudiante modela en su día a día y su relevancia para la enseñanza de la matemática.

Desde una aproximación educacional, se reconocen en el curriculum nacional principios de la Teoría Sociocultural de Vigotsky, destacando sus implicaciones educativas y una visión ontológica respecto al aprendizaje para el uso de la modelación matemática como una herramienta didáctica. Además, se establece una reflexión sobre ciertos patrones que hacen que un estudiante modele, patrones reconocidos en el quehacer social de una persona, caracterizando así, situaciones en donde la actividad de modelar es un proceso que construye conocimiento matemático, como son la descripción, la explicación o la predicción de fenómenos. En este sentido, emerge una postura asociada a los significados del conocimiento matemático y cómo la modelación matemática puede transformarse en un aporte significativo educacionalmente. Finalmente, se sintetizan los puntos en una problemática asociada a la enseñanza de la modelación matemática, definiendo la pregunta de investigación y objetivos de la primera parte de esta tesis doctoral.

El capítulo 2, adquiere un rol más específico, el cual describe y articula el marco conceptual construido para el abordaje de los objetivos de investigación y cómo la experiencia cualitativa que se propone será creada y analizada. Para ello, se reconoce a la modelación matemática en términos de Blum y Leiß (2005) y Borromeo (2006); se describen las perspectivas de modelación, explicando cada una de ellas en torno a los trabajos de Blomhøj (2008) y Kaiser y Sriraman (2006). Luego, se continúa describiendo las competencias de modelación, las cuales pueden ser percibidas como las competencias que son encontradas en el tránsito que realiza el estudiante mediante el ciclo de Blum (Blum et al., 2005). Como una herramienta educativa, se analizan la existencia de niveles de competencias de modelación, teniendo como principal atractivo en este trabajo, el uso como instrumento evaluativo de tareas de modelación, lo que conlleva a articular niveles de competencia (Henning & Keune, 2005), para ser indicadores de aprendizaje en un currículum basado en competencias.

También en el capítulo 2, se presenta y describe el modelo MTSK, que tendrá un uso metodológico en la investigación, generando una relación de análisis del modelo MTSK con la experiencia creada e implementada (ver figura 1). Se considera necesario describir los principios y la naturaleza del modelo MTSK, diferencias respecto al modelo MKT de Ball y finalmente explicar de una manera más bien pragmática el modelo en sí, principalmente, para la obtención de la coherencia articuladora que se realza en la investigación.


*Figura 1.* Etapas generales de la investigación que son desarrolladas en los capítulos 2 y 3.

El capítulo 3 está centrado en la experimentación de la propuesta en la formación inicial y los resultados de ésta. Desde la búsqueda de un marco que sirva para el ordenamiento de una propuesta de curso de modelación en formación inicial o continua, es que se considera el trabajo de Borromeo-Ferri (2014), clarificando que a causa de un contexto latinoamericano y consistencia de la investigación desde un carácter situacional con un tono más bien pragmático, se realizan variaciones a tal marco, aunque siempre considerándolo como un referente para la propuesta didáctica.
Además de describir la experimentación, se analizan los datos según los instrumentos confeccionados y se establecen los resultados, conclusiones y una discusión respecto a cómo generar posibilidades para la inclusión de la modelación matemática en la formación inicial de profesores mediante la propuesta y los instrumentos utilizados. De esta forma, los tres primeros capítulos conforman lo que es la propuesta para la formación inicial. Esto no significa que se requiere incorporar todos

estos saberes en la agenda curricular, ya que tal labor la debe realizar de alguna manera el formador de profesores de matemáticas (generar un planteamiento didáctico respecto a la modelación matemática para la formación inicial del profesor). Esto significa que una aproximación para la inclusión es la que se propone en el capítulo 3, la que entrega resultados respecto al impacto que tuvieron los instrumentos utilizados, siendo posible extrapolar tales instrumentos hacia la propuesta descrita u otras instancias que propicien el éxito del aprendizaje en los estudiantes.

El capítulo 4, adquiere un ribete distinto respecto a los capítulos anteriores, ya que más allá de continuar con la visión de modelación matemática, se construye una variedad teórica de ésta, para construir una "modelación" como una categoría de conocimiento matemático. Desde los fundamentos de la Teoría Socioepistemológica, y específicamente, desde el programa socioepistemológico de Cordero (1998, 2001, 2008, 2016), Buendía y Cordero (2005), Cordero y Flores (2007) y Cordero, Mena-Lorca y Huincahue (en arbitraje), es que la modelación se caracteriza, generando a partir del principio de funcionalidad y su reciprocidad entre la matemática y el cotidiano, una caracterización de modelación, reflejada en los conocimientos que son puestos en uso desde otros dominios del saber, para favorecer la resignificación de los usos del conocimiento matemático. Finalmente, mediante la búsqueda de un ejemplo que explicite la categoría de modelación, es que se reconoce el uso del conocimiento matemático de la comunidad de arquitectos, para llevar a cabo una construcción epistemológica del saber de tal manera que se aborde de manera íntegra la labor fundamental, que es el rediseño del discurso matemático escolar.

En el capítulo 5, se plantean directrices respecto a la continuidad del trabajo de investigación que genera tanto esta etapa de formación, como el devenir del programa de investigación que pretendo desarrollar, estableciendo directrices en ambos sentidos: desde la modelación matemática y su inclusión en la formación inicial o continua y la modelación desde una aproximación socioepistemológica.

Finalmente, declaro que a partir de la naturaleza que tuvo este trabajo, no necesariamente existe una única ruta de lectura para la persona que pretenda estudiar este documento. En este caso, si el centro es la modelación matemática en la formación inicial del profesor, se le recomienda al lector abordar los capítulos 1, 2 y 3. Ellos, conforman una base clara y coherente para el entendimiento de la propuesta y sus resultados. En cambio, si el centro es la variedad teórica de modelación, significa leer elementos del capítulo 1 y 2, además de todo el capítulo 4, ya que surgen directrices significativas en los dos primeros capítulos para entender el término variedad[2], la concepción de modelación matemática de Blum y su eventual interés en la ubicación curricular del concepto. Se recomienda clarificar los fundamentos filosóficos y epistemológicos de modelación matemática desde las secciones 2.1, 2.2 y 2.3.

El capítulo 5, más allá de funcionar de manera independiente, surge como una consecuencia global de la etapa de doctorado, y no solamente como una conclusión del trabajo de tesis. Es por esto, que los capítulos precedentes son lineamientos de mis intereses personales, y en este capítulo, se espera explicitar cómo pretendo que sean desarrollados. Es decir, explicitar de cierta manera lineamientos de un futuro programa de investigación.

[2]Por un lado, desde la RAE, se entenderá variedad como la diferencia dentro de la unidad, reconociendo a la unidad como las relaciones existentes entre la realidad y las matemáticas. Y por otro, desde una discusión más amplia, considerando la síntesis de tres experiencias: la funcionalidad del conocimiento matemático, la modelación matemática y la formación inicial de docente de matemáticas (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017).

# Capítulo 1
# Antecedentes y Problemática

En este capítulo, se pretende explicar un estado de la modelación matemática en el contexto chileno, lo que necesariamente genera una discusión respecto a la literatura en la cual se sustenta los términos curriculares en relación con los antecedentes internacionales; Así, esperando clarificar la visión nacional, se plantea la reflexión sobre cómo ha adquirido distintas concepciones la modelación matemática desde distintas comunidades, social e históricamente hablando; por ejemplo, la comunidad de los matemáticos aplicados, las comunidades de cada ingeniería o más generalmente las civilizaciones humanas en las cuales el conocimiento matemático hasta ahora ha sido reconocido. Todas ellas instrumentalizan o bien constituyen como objeto de estudio el conocimiento matemático para el desarrollo de una problemática que no necesariamente ha cumplido fines educacionales o de divulgación de la matemática. Esto es de relevancia, ya que visiones de la modelación matemática con enfoque educacional acuña tales estructuras como focos de estudio, persiguiendo así, una amplitud respecto a la visión didáctica de la modelación matemática. Finalmente, se plantea la problemática desde el futuro profesor de matemáticas, sobre cómo formarlos para que sus futuros estudiantes realicen tareas de modelación matemática como un medio para el aprendizaje del conocimiento matemático y valoración de este.

### *1.1. Modelación matemática en el curriculum*

Una interrogante abierta y sin fundamentos unánimes desde la comunidad de interés, es saber qué contenidos son los que se deben tratar en la clase de matemáticas, y más aún, qué significados matemáticos se espera que aprenda el estudiante. Esta pluralidad es la que permite la riqueza del conocimiento en sí, y por lo tanto, toda posible normalización respecto a los contenidos y por consiguiente, el modelo educativo, conlleva a problemáticas lo suficientemente complejas como para asumir que el "enseñar matemáticas" posee una estructura sistémica, limitada, e incluso, no cuestionable; en esta posición, es que *se separa a la persona de la actividad educativa*. Un ejemplo de este síntoma, es el considerar erróneamente el curriculum nacional y su puesta en práctica como un ente normativo y no como una propuesta que emerge del estado y que permanece en estudio para su constante reformulación (entendiendo la flexibilidad que requiere y el ajuste según el desarrollo científico en términos didácticos, disciplinares y en general, educacionales).

Para el caso del curriculum chileno en matemáticas, se propone una esquematización respecto a contenidos, habilidades y actitudes. Bajo tal esquema, es que la modelación matemática es reconocida como una de las habilidades que son propuestas: el modelar. No asume una definición exacta según los marcos conceptuales que se caracterizan en la literatura, pero si hay una clara relación desde corrientes occidentales del conocimiento, mencionando a trabajos como Blum (1993, 2015), Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007), Kaiser (2005), Borromeo (2006), Blum & Borromeo-Ferri (2009), generando ciertas articulaciones con elementos de Teoría de Metáforas como tratamiento didáctico (Soto-Andrade, 2007; Soto-Andrade & Reyes-Santander 2011; Chiu, 2000) y en términos representacionales por tratamientos concretos, pictóricos y simbólicos. En este sentido, la modelación matemática adquiere el rol de traducción entre el mundo real y las matemáticas (MINEDUC, 2016b; Blum et al., 2009), estableciendo un significado de los entes matemáticos en la realidad de una situación específica. Esta característica es destacada en MINEDUC (2016b) en el curriculum escolar:

> Modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Así, los alumnos aprenden a usar variadas formas para representar datos, y a seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas. De este modo, las ecuaciones, las funciones y la geometría cobran un sentido significativo para ellos. (p.108)

El curriculum chileno, evidencia la necesidad de que el estudiante sea capaz de obtener modelos algebraicos, geométricos o funcionales para el reconocimiento de la habilidad de modelar, asumiendo una concepción de la realidad cercana al conocimiento de la persona y la sociedad en donde pertenece, siendo capaz de reconocer o descubrir el conocimiento matemático (MINEDUC, 2016b). Este antecedente es respaldado según la declaración de la visión ontogenética vigotskiana del curriculum (MINEDUC, 2016b), separando al conocimiento matemático de la realidad de la persona, asumiendo implícitamente que la realidad no posee conocimiento matemático en sí, y que la acción de modelar o el modelamiento *conecta* a la realidad (todo el conocimiento de la persona fuera de las matemáticas) con las matemáticas. En la sección 1.3, se explica con una profundidad adecuada a la investigación la aproximación vigotskiana.

Se entiende, además, que el estudiante requiere encontrar significados en la matemática tanto en un contexto abstracto como también en su uso en la realidad, argumentando la importancia de aprender matemática "para comprender el medio en el que se desenvuelve; un medio en que la cultura, la tecnología y las ciencias se están redefiniendo y haciendo más complejas permanentemente" (Mineduc, 2016b, p.104). Sin dudas, un aspecto relevante en el planteamiento curricular, aunque la reflexión recae en este caso en la forma didáctica que se espera que actúe la acción de modelar (el modelamiento matemático), ya que el centro es el objeto matemático, reconocido en la realidad presentada de la vida cotidiana. Esta reflexión toma fuerza cuando hace uso de la alfabetización matemática, para lo que Mineduc (2016b) afirma:

> Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos. (p.8)

En este sentido, el currículum propone como logro de aprendizaje la articulación entre el desarrollo de los contenidos, las habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática, reconociendo que -en general-, las habilidades matemáticas son parte del logro de aprendizaje, sin necesariamente explicitar la demanda de cada una de ellas en todos los tópicos matemáticos. Esto no se fomenta como una crítica (pensando en que en todos los logros de aprendizaje no requieren que se modele), sino que la habilidad de modelar es establecida para ciertos conocimientos matemáticos, principalmente aludiendo a que los estudiantes construyan versiones simplificadas y abstractas de un sistema que opera en la realidad, capturando los patrones clave para su expresión en símbolos matemáticos.
Como veremos en el siguiente capítulo, la acción de modelar es vista como un proceso, en el cual el estudiante transita por momentos para el desarrollo de la habilidad de modelar. El curriculum describe tales momentos como los siguientes (MINEDUC, 2016b):

- Expresar acciones o situaciones con lenguaje matemático.
- Aplicar, seleccionar y evaluar modelos que involucren operatoria.
- Identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático.
- Aplicar, seleccionar y evaluar modelos que involucren patrones y regularidades.
- Traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa.

Además, plantea una visión cognitiva respecto al significado de la acción matemática cuando un estudiante modela, como se aprecia en la figura 2:


*Figura 2.* Pensamiento y acción matemática cuando una tarea de modelación desafía al estudiante en un contexto del mundo real (MINEDUC, 2016b).

Para la literatura de modelación matemática, no es desconocida tal visión cognitiva, la cual será profundizada en el capítulo 2 desde el aspecto científico (y no desde el curriculum). Este esquema o ciclo caracteriza al modelar como “resolver problemas complejos del mundo real y de la propia matemática a través del lenguaje matemático” (MINEDUC, 2016, p.14), guiando la simplificación del contexto del mundo real mediante un modelo matemático a partir del problema que se plantea en tal contexto.

El curriculum caracteriza al modelamiento matemático como un tipo de resolución de problemas, ya que plantea que el modelamiento matemático busca que los estudiantes analicen, razonen y transmitan ideas matemáticas; planteando, resolviendo e interpretando efectivamente en situaciones cotidianas. Además, clarifica cinco etapas que exige este tipo de resolución de problemas cuando un estudiante resuelve:

1. Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
2. Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
3. Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos tales como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello revela los rasgos matemáticos de la situación cotidiana y transforma el problema real en un problema matemático.

4. Se resuelve el problema matemático.
5. Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

Estas cinco etapas, son diagramadas en la figura 3:

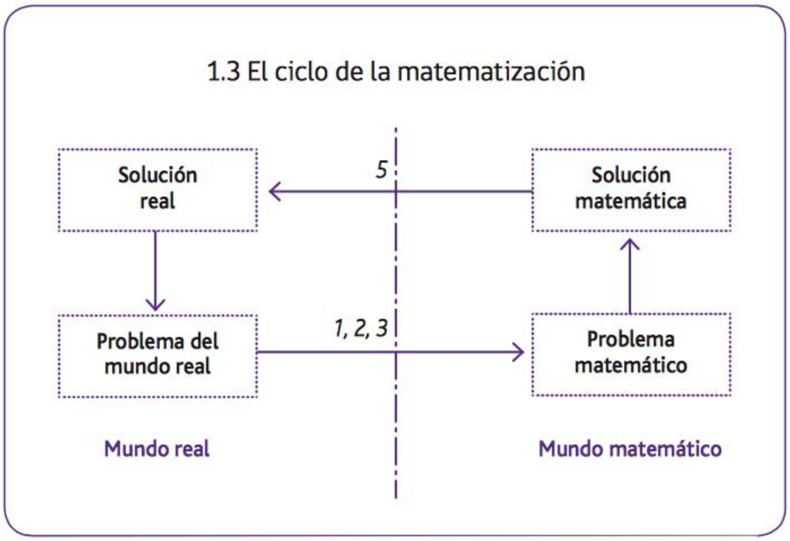



*Figura 3.* Caracterización de las 5 etapas del modelamiento matemático según el currículum chileno (MINEDUC, 2016b, p.15)

Es posible de observar que el esquema presentado en la figura 3 tiene mucha similitud con la esquematización de los ciclos de Kaiser (1995), Blum (1996) o Blum et al. (2005), en donde el concepto de matematización es utilizado de distintas formas, ya que la matematización para Blum no permanece por todo el proceso de modelación (como se verá más adelante en el capítulo 2). Seguramente, la figura 3 muestra que la etapa 4 se encuentra en todo el tránsito de la resolución de la tarea.

En síntesis, la habilidad de modelamiento matemático surge y se mantiene con visiones similares a la concepción de Blum, considera una didáctica inherente en ella, específicamente a centrar su potencia en el aprendizaje del objeto matemático, separando la realidad del conocimiento matemático para la interpretación de éste en el cotidiano del estudiante. Tal interpretación se acerca lo suficiente a la concepción de modelar que también proponen ciertas pruebas estandarizadas.

En esta investigación, la Modelación o el Modelamiento Matemático no es visualizado como un ente que forma parte de la Resolución de Problemas, ya que cada uno de los campos de investigación adquieren y se han desarrollado en los últimos treinta años como robustos instrumentos teóricos autónomos, generando marcos conceptuales y teóricos que por sí solos, permiten llevar a cabo distintos objetivos, distintas concepciones filosóficas desde ámbitos educativos y que actualmente sostienen problemáticas que pueden eventualmente ser analizadas paralelamente, pero que actualmente no se necesitan entre sí para su autónomo desarrollo.

### *1.1.1. PISA y su relación con el currículum*

Un antecedente significativo del curriculum, son las pruebas estandarizadas y cómo su impacto ha permeado su estructura, esquematización y dirección respecto al conocimiento matemático y sus prácticas de enseñanza y aprendizaje, que sin dudas hay una intención de mejorar la calidad educativa, aunque sea cuestionable el método. En el caso específico de esta investigación, un foco es evidenciar qué significa el modelar para el curriculum. PISA (por sus siglas en inglés de Programme for International Student Assessment) declara evaluar hasta qué punto los estudiantes de 15 años han adquirido los conocimientos y habilidades fundamentales para la participación en sociedades modernas; desde aquí, es que el enseñar matemáticas es reformulado hacia una visión del conocimiento que es aplicado tanto dentro como fuera de la escuela, en línea con el hecho de que las economías modernas recompensan a los individuos no por lo que saben, sino por lo que pueden hacer con lo que saben (OCDE, 2016a). El enseñar matemáticas, adquiere una inclusión respecto a una visión de sociedad presente desde la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos), estableciendo un trazado sobre el conocimiento que requiere una sociedad moderna estándar, en el caso de interés, de matemáticas.

Claramente, esto no significa que el curriculum chileno pretenda demandar exactamente lo que propone PISA, pero el último ajuste curricular en Chile (MINEDUC, 2016b) hace la inclusión explícita de elementos que se relacionan con el tema central de esta parte de la investigación, que es la modelación matemática y la enseñanza de ésta desde la concepción de alfabetización matemática que propone el curriculum y el concepto de mathematical literacy. Respecto a éste último, no basta con sintetizar en una frase su significado, ya que para ello, se requiere entender el significado de la matemática (y su aprendizaje) en una sociedad que perfila. Desde tal postura, PISA declara la existencia de problemas de la vida real y profesional en donde es requerido niveles de entendimiento de la matemática, razonamiento matemático y herramientas matemáticas, utilizando la matemática como un conocimiento crítico frente a las situaciones que les depara la vida a los jóvenes (OCDE, 2016a). Desde tal supuesto, es que adquiere validez la pregunta ¿Qué es importante que los ciudadanos sepan y sean capaces de hacer en situaciones que involucran matemáticas?, o ¿cuáles son las competencias matemáticas requeridas para un estudiante de 15 años que egresa del colegio o se prepara para el ingreso a la formación universitaria? (preguntas que realiza PISA y que el curriculum las considera de cierta manera desde el protagonismo que adquieren las habilidades en éste). En este sentido, es que el concepto de mathematical literacy emerge, caracterizándose de la siguiente manera por PISA (OECD, 2013):

> [mathematical literacy es usado] ...para denotar la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos, no es percibida como sinónimo de un mínimo o un nivel bajo de conocimiento o habilidades. Más aún, es entendida para describir las capacidades de los individuos para razonar matemáticamente y usar conceptos matemáticos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar o predecir fenómenos. Esta concepción de mathematical literacy respalda la importancia de que los estudiantes desarrollen una sólida comprensión de los conceptos matemáticos puros y los beneficios de estar involucrados en exploraciones en el mundo abstracto de las matemáticas. El constructo de mathematical literacy como es definido por PISA, enfatiza en la necesidad de desarrollar la capacidad de los estudiantes de usar matemáticas en contexto, siendo importante que posean ricas experiencias en sus clases de matemáticas para lograr esto. [...] Además, se puede argumentar que para casi todos los estudiantes la motivación de aprender matemáticas aumenta cuando ven la relevancia de lo que ellos aprenden del mundo que está fuera de la sala de clases y en otras materias. (p. 5, traducción personal)

No es difícil reconocer aspectos que el curriculum acuña desde su concepción de alfabetización matemática respecto a la visión que propone PISA, aunque se vislumbran diferencias en el tratamiento didáctico, ya que el curriculum genera propuestas didácticas centradas en las habilidades y estándares, una postura más amplia que la de competencias (entendiendo la noción de estándar desde el National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2000). Sin embargo, PISA enuncia una visión epistemológica del conocimiento matemático, sin

necesariamente profundizar en el tratamiento didáctico que debería poseer tal conocimiento.
Mathematical Literacy no es una concepción que el sujeto posee o no, sino que se desarrolla en un continuo, reconociendo individuos más alfabetizados matemáticamente que otros, encontrándose siempre con la posibilidad de acrecentar el conocimiento del individuo.
Naturalmente, la caracterización que propone PISA sobre mathematical literacy, admite observar al estudiante con un rol activo para resolver problemas. En la figura 4, se modela cómo es la acción de mathematical literacy según el programa PISA. Se observa que inicialmente existe un contexto en donde la problemática emerge, es decir, lo situacional de la problemática es el contexto real en donde surge el concepto y su acción, lo que PISA observa en una situación individualizada, grupal, natural de la persona, contexto científico, laboral o natural de una sociedad. Tales contextos pueden ser la base en donde se desarrollan las categorías del contenido matemático de PISA (Cantidad, Incertidumbre y Datos, Cambios y Relaciones y Espacio y Forma), los que son observables en el cuadro exterior de la figura 4.

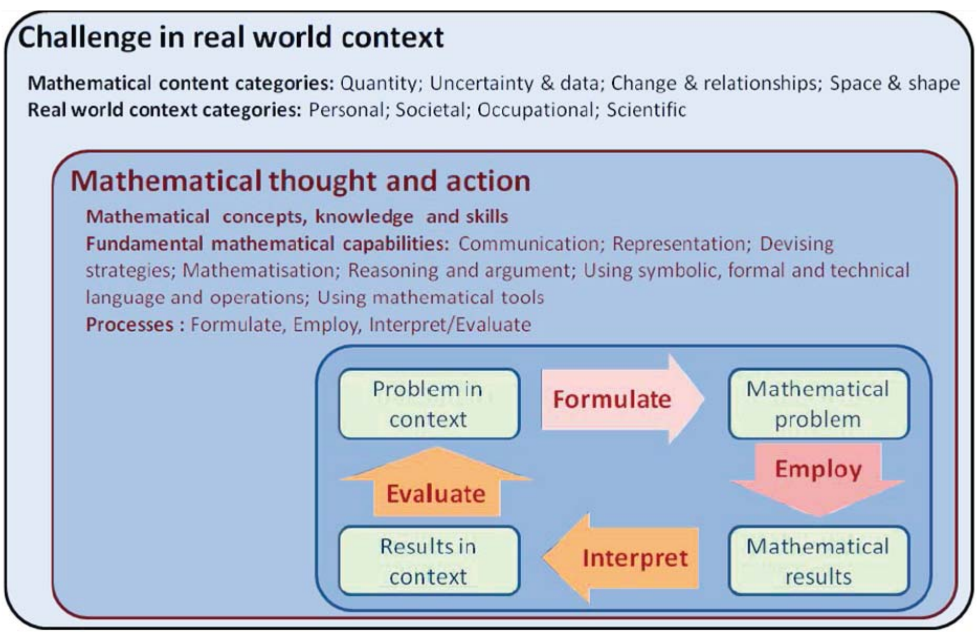



*Figura 4.* El modelo de Mathematical literacy en la práctica (OCDE, 2016a). Elementos del saber en su concepción.

Los estudiantes hacen uso de un ciclo de modelación acorde a lo demandado por PISA. En este sentido, actúa con un rol principal en el aprendizaje de la matemática, por lo que permanece en el centro de la figura 4, aunque no necesariamente significa que los estudiantes transiten por cada una de las fases, pero si se puede afirmar que PISA centra sus tareas en el ciclo o en partes de éste.

El ciclo se inicia con un problema en contexto, el cual es entendido por el estudiante de alguna manera, para lo cual, PISA reconoce una respuesta estándar desde una visión social específica. Esto, conlleva la formulación del problema en términos matemáticos, lo que implica la simplificación de variables que pueden afectar al problema original de una u otra manera. El empleo de las matemáticas permite resultados matemáticos, los que son necesariamente interpretados para contextualizar tales resultados en la pregunta del problema, permitiendo al estudiante evaluar su propia respuesta a partir del problema en contexto[3].

Existe una cercanía entre las posturas del curriculum escolar chileno y PISA. Sin embargo, un rasgo que las diferencia es relacionada con el simbolismo y el lenguaje matemático, según la importancia que le otorga cada una. Esto no significa que -en este caso- la prueba PISA no valorice la simbología matemática, sino que la importancia trasciende del lenguaje matemático, teniendo como objetivo que la matemática que aprenda una persona deba ser puesta en uso para la vida, en el sentido de ser partícipe de un modelo de sociedad que requiere una matemática que posea cierta funcionalidad en una sociedad moderna. En cambio, el curriculum escolar argumenta desde la necesidad científica de la matemática en la matemática y hacia otras disciplinas su relevancia del simbolismo y lenguaje.

Las implicancias de la práctica del currículum, repercuten en las limitaciones o amplitudes (depende del punto de vista) de las habilidades que lo caracterizan en todo punto de vista, refiriéndose tanto a la práctica docente como a su formación inicial. En el caso particular del modelar, no adquiere necesariamente la significación de una construcción de conocimiento matemático, sino que adquiere con un mayor protagonismo a la característica de relacionar la realidad con las matemáticas; desde tal visión, la matemática es ejemplificada o introducida desde la función de la matemática en el entorno de la persona (por ejemplo en el sentido OCDE), quedando para el docente en un estatus de “herramienta didáctica” para las prácticas en el aula, siendo puesta en uso para la introducción de un concepto matemático o en una ejemplificación o simplemente un uso desconocido del conocimiento matemático. En este sentido, es que la amplitud del mencionado conocimiento es desarrollado en un abanico de situaciones.

---

[3]En caso de que el lector quisiera profundizar en el marco teórico de PISA, puede consultar el documento “Draft Mathematics Framework” de OCDE (2013).

Actualmente, el horizonte del modelar en el sistema educativo chileno actúa como un complemento para el entendimiento de un objeto matemático con incipiente relevancia hacia el *hacer y entender* con matemáticas la vida. Se evidencia que muchos (no todos) objetos matemáticos que propone el curriculum chileno son ejemplificados o introducidos desde situaciones en donde el estudiante modela, o bien, permite la amplitud en el significado del objeto pero centrado en éste. Sin embargo, tal amplitud (o limitación) de significados, logra remitir a la construcción del conocimiento matemático en un estatus distinto y superior lo que permite hacer el modelar, clarificando que la posibilidad de amplitud conceptual de un contenido matemático a partir de sus usos en el mundo real es gracias a la modelación matemática, pero la construcción del conocimiento matemático como tal es un proceso más allá de éste, ya que obedece a las estructura matemática que lo constituye.

### *1.2. Concepciones de la Modelación Matemática.*

En términos del desarrollo científico de las disciplinas, cada una de las distintas concepciones de modelación matemática genera producciones teóricas y prácticas, ya sea de los matemáticos, los didactas de la matemática, los modeladores matemáticos o historiadores de la matemática, en donde muchos de ellos, afirman escribir producciones dirigidos al estudiante, teniendo como fin la enseñanza de cierto tópico de interés de éstos y su aprendizaje.

El matemático aplicado J. N. Kapur (Kapur, Sahoo & Wong, 1985; Kapur, 1988) considera la modelación matemática como una técnica, asumiendo que es un uso de la matemática clásica, sin asumir una socialización del conocimiento en la Matemática, estableciendo que la Matemática es una disciplina preexistente, en donde la persona que pretende utilizar la técnica debe tener un conocimiento axiomático de la matemática, estableciendo que es posible reconocer tipos de modelos matemáticos según las técnicas matemáticas, incluso son enunciadas que las comunes aplicaciones de esta técnica son posibles de reconocer en el álgebra clásica, álgebra lineal y matrices, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones en diferencias, ecuaciones integro-diferenciales, ecuaciones funcionales, grafos, programación matemática lineal y no lineal, cálculo de variaciones, principio del máximo de Pontryagin, entre otros. La visión de la clasificación propuesta por Kapur (1988), es en base a la naturaleza matemática del modelo matemático percibido; esto hace asumir una hipótesis, que una situación de modelación matemática necesariamente tiene una manera esperada de ser resuelta con constructos clásicos matemáticos a utilizar. Esto último, fue una de las primeras críticas al clásico ciclo de modelación de Pollak (1979), cuando deja ver en su ciclo que existe matemática que no es aplicable. Desde su visión didáctica, lo que se pretende es enseñar un objeto matemático preexistente, representado desde una situación real predeterminada.

Como se puede ver en gran parte de la literatura de modelación, la modelación matemática es caracterizada como un cúmulo de estrategias a utilizar desde una matemática en una que ya debe ser dominada por el estudiante.

Kapur (1988) especifica la necesidad de crear una traducción a un lenguaje matemático cuando uno aborda un problema de modelación matemática. Sugiere que tenga la siguiente forma:

$$f_j\left(x_i, a_n, \frac{d}{dx_i}, \int \quad \ldots dx_i, d\right) \leq 0; \quad i, j = 1, \ldots, n$$

La necesidad desde esta postura, radica en obtener una representación analítica de una situación. Este tipo de caracterizaciones en cuanto a conceptos y/o usos no son difíciles de encontrar en textos de estudio de enseñanza superior (Marsden y Tromba, 2004; Zill, 2002; Leithold, 1998; Stewart, 2008), en donde se describe una situación desde alguna realidad, que es soluble con ciertas herramientas matemáticas ya conocidas por el estudiante en su rol de modelador y que debe usar vía la interpretación de la semiótica conocida en la matemática.

El matemático C. Dym describe en el año 2004 lo que para él significa modelación matemática, asignando usos, concepciones y clarificando que la modelación es una herramienta casi del diario vivir profesional algunos tipos de ingeniería. Según Dym (2004), un modelo es visto como una actividad de la persona, la cual puede ser interpretada desde múltiples “lenguajes”, ya sea en términos físicos, biológicos, coloquiales e incluso en lenguajes simultáneos. Sin embargo, cuando se pronuncia al utilizar un lenguaje matemático, declara que un modelo matemático es una representación en términos matemáticos del comportamiento de artefactos reales u objetos). Desde este punto de vista, la importancia radica en cómo generar representaciones matemáticas o modelos (matemáticos), en cómo es posible su validación, uso y limitantes (Dym e Ivey, 1980; Dym, 2004). Destaca en la descripción dada la analogía propuesta entre el significado de una representación matemática y un modelo matemático. En este caso, una representación matemática es concebida como cierta representación desde un lenguaje matemático de un comportamiento determinado de algo.

Dym (2004) genera una caracterización de modelación matemática. Para ello, se posiciona en el método científico, identificando un mundo real y un mundo conceptual al querer dar a entender lo que significa modelación matemática (ver figura 5), estableciendo su diferencia entre lo interno y externo de la persona, ya que el mundo real lo asocia a lo fáctico de una situación, mientras que el conceptual queda en un plano cognitivo, como un entendimiento de lo que ocurre en el mundo real.

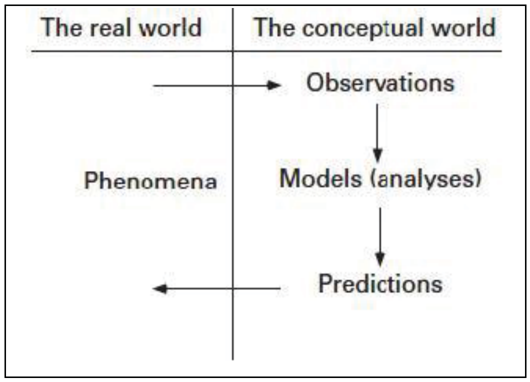



*Figura 5.* Representación elemental del método científico que muestra cómo nuestro modelos conceptuales del mundo son relacionados a observaciones realizadas del mundo real (Dym & Ivey, 1980).

La manipulación en el mundo conceptual, es caracterizada por tres etapas. La primera es de observación, relacionada con la medición de lo que sucede en el mundo real, fuertemente cercano al método científico en cuanto a cómo son percibidas y puestas en acción las mediciones. Una segunda etapa la llama modelación[4], que la describe como el análisis de las observaciones hechas previamente, dirigidas por al menos uno de los siguientes tres motivos de estudio de un fenómeno: descripción, explicación y predicción de un comportamiento[5]. La tercera etapa es llamada predicción, en donde el modelo se pronuncia con respecto a lo que ocurrirá anticipadamente según un conjunto de características situadas en el mundo real; generalmente, las

[4]En la figura 5 se hace alusión a "modelo" y no "modelación". Sin embargo, Dym (2004) clarifica esta situación, afirmando que la modelación es vista como una acción del modelo.

[5]Estos tres conceptos serán retomados más adelante, ya que desde una visión didáctica de las matemáticas, permanecen en el desarrollo teórico, siendo reforzados por autores y por quien escribe.

predicciones son seguidas de observaciones para generar procesos de validación en el modelo o de ajustes.

Existen múltiples estudios que consideran al contexto ingenieril como fuente de estudio. Desde una aproximación de la Educación Matemática y en un sentido específico del sujeto, Gainsburg (2006) caracteriza el rango de ambientes matemáticos de los ingenieros estructurales y su relación con las matemáticas escolares, permitiendo una caracterización sobre qué ambientes matemáticos deben ser utilizados en la práctica de enseñanza. Por otro lado, con respecto a las características del aula de estudio, se muestra que las tareas de modelación son cercanas a lo propuesto por el NCTM (Gainsburg, 2006), en donde las características de las tareas son descritas como tareas simples, consistentes, coherentes y comprobable. Concluye, además, de que existen dos características que surgen en comunidades de ingenieros estructurales cuando modelan y que no están presentes en las tareas de modelación de aula:

1. Encadenamiento de modelos. Las situaciones que consideran las comunidades de ingenieros son lo suficientemente complejas, ya que pueden incluir simultáneamente varios niveles y tipos de modelos, creados de tanto de forma externa como conceptual, ya que el objetivo es modelar el comportamiento físico de un sistema y no concentrarse en detalles de la matemática (Bissell y Dillon, 2000). Esto hace que el ingeniero realice más de un modelo para responder a una situación, en donde el resultado es el seguimiento de modelos.
2. Comprensión de fenómenos inaccesibles. Generalmente, las tareas que realizan los estudiantes tienen suficiencia de datos como para que puedan ser realizadas, ya sea una tabla de datos, o un fenómeno accesible para medir. Sin embargo, los ingenieros abordan problemas metafóricamente similares al problema del huevo y la gallina: un diseño propuesto debe ser informado por un análisis de comportamiento, pero el análisis no puede ocurrir hasta que haya un diseño que analizar.

En la práctica de investigaciones de otras áreas también podemos ver claramente estas ideas, por ejemplo Huincahue (2011) estudia modelos ecológicos con fines entomológicos; en ellos, se estudia el ciclo de vida del ácaro*Brevipalpus chilensis* para establecer políticas de control de la plaga, obteniendo resultados relevantes en cuanto a cómo es posible predecir momentos de control. Sin embargo, existe una suficiente complejidad meteorológica para poner en acción las políticas de control, las cuales necesariamente acuña otros modelos para su realización. Por

otro lado, al estudiar el ciclo de vida del ácaro, idealmente podría haber sido a partir de medir lo biológico por sobre las causas de los efectos biológicos, lo cual hasta ahora es inaccesible para el investigador cuando los objetivos de investigación son hacia el control de plagas. Otros problemas en el área de Bioprocesos y conservación de especies poseen problemáticas similares (González-Olivares & Huincahue, 2014; Rojas-Palma & González-Olivares, 2012; Espejo, Vilches & Conca, 2013).
Dicho esto, se observan tendencias o comportamientos que no son considerados en términos curriculares chilenos de matemáticas, que la comunidad de ingenieros si considera y que el conocimiento demanda a los futuros ciudadanos, ya sea por el encadenamiento de modelos como un fenómeno en la construcción de modelos. Tal visión es de interés para los programas curriculares que sean de nivel medio, ya que -por ejemplo- ambas características dichas anteriormente, pueden ser consideraciones para la generación de significados tanto del conocimiento matemático en un amplio sentido del lenguaje o específico hacia el objeto matemático, lo que dependerá de la visión del investigador o de las necesidades de la sociedad y el conocimiento, tal como Arrieta y Díaz (2015) reportan:

> Biembengut (2012), al referirse a los orígenes del movimiento de la modelación matemática en los años setenta, menciona que las primeras propuestas responden al cuestionamiento de los estudiantes de ingeniería, sobre la utilidad de las matemáticas que se les enseñan, y a la crítica de los empresarios, sobre la formación matemática de los estudiantes. (p.29)

Esta afirmación, deja entrever de que existe una necesitar de generar significados del conocimiento matemático acorde a las utilidades que son requeridas por las personas, que no solo evidencie cómo el objeto matemático es usado en el aprendizaje de la matemática, sino que los usos del conocimiento matemático emanado desde la actividad humana es un foco de interés alternativo para la concepción de la matemática con fines educativos.
Cambiando de foco, desde un punto de vista de la Historia de las Matemáticas, las primeras evidencias del conocimiento matemático han sido determinadas por hallazgos descritos en la vida cotidiana de las personas, intentando explicar fenómenos, regularidades, algoritmos e incluso actividades recreacionales, actividades de este tipo se ven reflejadas claramente en el curriculum de educación básica de Chile, pero no con tanto énfasis en la modelación como -construcción de la

matemática- sino más bien como antecedentes motivacionales del contenido.

Para Robins y Shute (1987), las primeras evidencias del conocimiento matemático tienen aproximaciones hacia la Teoría de Números, Geometría, progresiones geométricas, función lineal y álgebra de fracciones. Sobre esta senda, el conocimiento matemático no es construido únicamente cuando el problema es netamente matemático, sino que existe construcción del conocimiento matemático con un lenguaje que no necesariamente es el que utiliza una comunidad de matemáticos, un lenguaje que le es funcional a una comunidad, en donde la matemática es evidenciada desde su uso, no desde el objetivo centrado en el objeto matemático de un problema, sino como un instrumento; es decir, es conocimiento que ha surgido desde las interacciones humanas, encontrándose la matemática como un ente mediador de soluciones de situaciones y resoluciones permeadas por elementos naturales, sociales, históricos y culturales, existiendo evidencias como el uso de los dedos, el antebrazo o los pies para su utilización como unidades de medida en construcciones arquitectónicas y construcciones matemáticas. Esto permite observar una hipótesis, y es que la matemática es reconocida como tal no desde que es utilizada como un lenguaje o un contenido de enseñanza preexistente y eventualmente ajeno al estudiante, sino que es reconocida desde un uso dentro de las situaciones de la persona mediadas por el entorno. En torno a esta reflexión, surgen visiones de naturaleza distinta a la modelación matemática que corrientes anglosajonas sostienen, concibiendo al conocimiento matemático como una construcción social, ligado a la actividad humana como una persona perteneciente a una comunidad social y cultural y por lo tanto, no son referidas a modelación matemática como tal, sino que a una modelación de otra naturaleza (Cordero, 2001, 2016). Esta aproximación será detallada en el capítulo 4.

En términos generales, la *modelación matemática* es entendida por líneas de investigación en la Didáctica de la Matemática en un amplio espectro, a partir de los usos y significados del conocimiento matemático, o específicamente, del objeto matemático en cuestión para el estudiante.

Al modelar, el estudiante es posicionado en una situación en donde deba reconocer cierta problemática y ser capaz de relacionar ideas que no necesariamente son comunes a su actividad, eventualmente inserta en su rutinaria, pues se espera que emerja su entendimiento desde la realidad y el contexto sociocultural situado de la persona, desde su conocimiento. Aquí, es en donde el estudiante es responsable de sentir tal desafío propuesto por la misma situación.

Los estudiantes abordando una tarea o situación de modelación matemática, se constituyen en los constructores del conocimiento de los usos de éste, por lo que *la modelación matemática puede lograr ser un agente constructor de conocimiento matemático*, que permite la movilidad del saber hacia escenarios en donde el uso del conocimiento es no conocido por la persona, creando conexiones de un saber antes no construido y dando un nuevo estatus al saber o conocimiento previo a la situación de modelación, estableciendo un nuevo plano de conocimiento en uso y asignándole al conocimiento de la persona un carácter sinérgico, que repercute en las relaciones que el estudiante pueda realizar, en la concepción de los objetos matemáticos y en general, en el conocimiento matemático.

Si se asume un caso en que una problematización sea resuelta mediante un conocimiento ya construido por el estudiante y recae la tarea en una acción rutinaria, entonces el problema para el estudiante no sería concebido como una tarea de modelación matemática (en concordancia con Blum, 1993), ya que repite un uso que es sabido que desde el contexto de la problemática responde a la situación, la problematización situada se transforma en una "trivialidad" para la persona; no así para un estudiante en donde la problemática es no rutinaria, teniendo que ampliar su conocimiento para ser abordada, desde el robustecimiento de concepciones de un saber o generando nuevas relaciones entre conocimientos que en un principio estaban aislados, implicando el nuevo estatus de un concepto específico y/o forjando elementos para nuevas concepciones de un saber matemático. Esto implica una característica: es posible que la concepción de modelación matemática por sí, permita la construcción de conocimiento matemático, y por lo tanto, se solventa en una epistemología del conocimiento que hace mantener a la situación una coherencia relacional de la construcción matemática, pero puede suceder que tal situación para una persona no le genere la movilidad que supuestamente se espera. Tal escenario no significa que la situación de modelación deje de serlo, en este sentido, el investigador en Didáctica de la Matemática debe situar tal evaluación, reflejando una variabilidad en el sujeto para someter juicios de valor en cuanto a las situaciones que promueven cierta problematización, y por lo tanto, predecir si a una persona específica será un problema de modelación o no.

Al posicionarse en la Matemática, es posible establecer ejemplos de situaciones de modelación matemática. Un matemático en su comunidad modela, establece relaciones entre conceptos matemáticos (que pertenecen en alguna medida a su conocimiento y por ende a su realidad) para la creación de modelos que en su comunidad son aceptados, interpretados para el uso matemático y, validado desde sus propios constructos. Un ejemplo de ello es en el uso de un lema. El matemático utiliza un modelo teórico para reconocer no solamente este modelo como resultado, sino que en el uso del modelo (el lema) surge la solución que el matemático construye. En este sentido, es que se reconoce un lema como un modelo matemático.

Según lo anteriormente descrito, podemos observar en términos generales que el modelar hace un uso de un conocimiento para construir otro, pudiendo ser el robustecimiento de un significado o no; pareciera que hasta el momento hay una visión general, amplia y difusa respecto a lo que es llamado Modelación Matemática, entendiéndola cuando la modelación pone en juego el conocimiento matemático, respecto a que en la acción cognitiva o práctica del modelar (el modelamiento) exista el uso de “una matemática” conocida para lograr construir por parte de la persona de la que está abordando una tarea una práctica que le sea común: el abordaje de tareas no tradicionales mediante las matemáticas.

Con respecto a lo anterior, es posible enunciar que la concepción de modelación es más amplia que la de Modelación Matemática, debiéndose al conocimiento que la tarea pone en juego para abordar una situación que el individuo o un grupo de utilizó, impactando en una amplitud multidisciplinar (conocimiento de la ingeniería o ciencias básicas) y no necesariamente acaparando una visión tan sistémica y específica como la que se utiliza en Blum y Leiß (2005) (definición que es ampliamente considerada al referirse a mathematical modelling), en este caso, no significa necesariamente que no exista conocimiento matemático, sino que la matemática no es el centro de la problemática ni tampoco la respuesta esperada, ya que el adquiere un rol mediante un uso instrumental, necesario y prudente como para la resolución del problema en cuestión.

Naturalmente, las diferencias recaen en todas las dimensiones de la problemática educativa, no siendo el lenguaje una excepción, adquiriendo otra complejidad, y es que puede existir desarrollo del conocimiento matemático desde un lenguaje de las comunidades de conocimiento específico, significando que el lenguaje no es un agente decidor si acaso se considera o no como matemática, sino que su uso debería evidenciarlo.

### 1.2.1. ¿Por qué el estudiante modela?

Las múltiples concepciones de modelación matemática recaen desde el hecho de realizar actividades en el cotidiano de las personas hacia una matemática discursiva y estática (Blum y Niss, 1991; Blum, 2002), hasta visiones cercanas a la actividad humana (Cordero, 2016), lo que en la literatura es llamado modelación. Sin embargo, las intenciones por las que una persona o una comunidad modela recae en la descripción, explicación o predicción.

Cuando un estudiante aborda una tarea de modelación matemática, puede pretender dilucidar un fenómeno que permanece ambiguo para su entendimiento, mostrando en la problemática de la tarea una necesidad de esclarecer la situación con elementos de la matemática (conceptos, o procedimientos). Desde tal situación, es que el estudiante busca describir la situación propuesta por la tarea para la resolución de la problemática desde fundamentos matemáticos, mediante un lenguaje que para cada estudiante haciendo uso tanto de representaciones (en el amplio sentido de la palabra) como profundizando hacia el detalle de la situación. Tanto la representación como el detalle de la situación, son influenciadas directamente por el uso del lenguaje de la persona y el contexto en donde se realiza la situación de modelación matemática, ya que la validación de la descripción será realizada según como el detalle o la representación sea realizada. Me refiero específicamente a contextos específicos, es decir, una situación de modelación matemática fuera de la escuela, permitirá un lineamiento del lenguaje distinto al mencionado anteriormente, lo que en términos de pensamiento incluso podrían coincidir, pero en general, esto último es falso, ya que el medio sociocultural y el lenguaje que la persona utiliza, puede permitir desarrollos de pensamiento distintos.

Cuando existe una descripción por parte del estudiante, la tarea puede guiar eventualmente a una explicación de lo que sucede, en donde ésta acción (la de explicar) requiere de otro sujeto aparte del que construye, en donde el sujeto puede ser un par, todo el curso, el profesor o incluso la tarea misma. La emergencia de un sujeto en la tarea para la acción de explicar, genera una diferencia en la acción de describir.

Una tarea de modelación, también puede perseguir que la persona que resuelve explique un fenómeno o situación que ésta demande. Naturalmente, una tarea de modelación, plantea una pregunta, la que eventualmente puede recaer en una situación difusa, de tal manera que un objetivo previo para el estudiante sea definir cuál es la pregunta específica que posee la tarea. Esto, significa que el estudiante requiere clarificar la situación para hacerla más perceptible, avalado desde un contexto socialmente aceptado, declarando o manifestando uno o más argumentos que dan respuesta a la tarea de modelación.

Tales descripciones o explicaciones que surgen, pueden tener un fin asociado a las consecuencias de un fenómeno frente a la situación dada. Esto, repercute en que la acción que guía al estudiante a abordar la tarea tenga fines predictivos, es decir, el estudiante y la motivación real que estaba asociada a la tarea es identificada con las perspectivas de un fenómeno caracterizado por la tarea o sus consecuencias, y para que sea respondido, el estudiante tuvo que haber -eventualmente- descrito y/o explicado el fenómeno para establecer posibles predicciones a partir de un conocimiento fundado, tanto por el conocimiento matemático como por el conocimiento sociocultural que trae consigo la tarea, y por lo tanto, el estudiante. Visto de esta manera, el foco predictivo es posterior a los focos descriptivos y/o explicativos. La actividad predictiva surge como una derivada de las otras dos anteriores.

Cabe destacar las relaciones entre la descripción, la explicación y la predicción, no necesariamente se deben dar, ya que por sí solas, son capaces de plantearse frente a la acción de resolver una tarea de modelación matemática, como un motor para el desarrollo de ésta, independiente entre ellas. Sin embargo, pareciera que la predicción conllevó en algún momento de la actividad predictiva a la descripción o explicación de la tarea.

### *1.3. La realidad y el lenguaje.*

Desde el punto de vista ontológico, corrientes vigotskiana (Vigotsky, 2012; Rosas y Sebastián, 2001) sostienen teorías referentes al pensamiento y el lenguaje, a partir de su desarrollo mediado por el entorno en una persona desde dimensiones histórico culturales, las que influyen en el conocimiento de la persona, explicado desde Vigotsky (2012) a partir de la Zona de Desarrollo Próximo. Vigotsky describe que la relación entre el pensamiento y el lenguaje no es directa, ya que ellas se desarrollan de manera distinta, no van a la par; sin embargo, se unen y separan continuamente durante el transcurso del aprendizaje de la persona con su entorno, teniendo como variables de tal desarrollo, el medio en donde habita la persona -y cómo el medio genera desafíos que permitan desenvolverse tanto al pensamiento como al lenguaje- y el conocimiento que posee la persona, ambas variables situadas social, histórico y culturalmente. Desde tal visión, es posible visualizar un símil de lo que explica Vigotsky sobre la relación entre pensamiento y lenguaje y cómo el componente cognitivo al construir conocimiento (o resolver tareas de modelación matemática), es afectada mediante el conocimiento de la realidad de una persona. Es decir, el supuesto de cómo aprende el estudiante tanto las matemáticas como la realidad entendiendo que el pensamiento y lenguaje no se desarrollan bajo una misma intensidad, incide en los conocimientos matemáticos y extramatemáticos que tiene el estudiante al realizar una tarea de modelación (adquiriendo coherencia que estudiantes de Chile muestren maneras distintas de resolver una tarea que estudiantes de otras latitudes).

La realidad finalmente es posicionada en la mente de la persona, construida desde sus conocimientos, los cuales son el resultado de una mediación entre su entorno histórico cultural y el conocimiento personal. Por lo tanto, caracteriza el pensamiento desde las múltiples maneras en que se va desarrollando, refiriéndome al conocimiento (que pudiese ser correcto o incorrecto), sus relaciones, la experiencia de la persona y significados y conceptos que se van desarrollando, asumiendo una constante reformulación de éstos. Este supuesto, permite reconocer al conocimiento matemático como un conocimiento con un lenguaje específico, técnico y que la escuela exige el uso y dominio de tal lenguaje para el aprendizaje de las matemáticas y no otro, un lenguaje que puede ser considerado ajeno a las personas que no aspiran a desarrollarse como matemáticos, que es sustentado por una lógica aristotélica e hipotética en su desarrollo y que adquiere previamente un formalismo que le es útil al matemático; En esta problemática, el medio es el lenguaje del matemático, siendo no natural para el estudiante y resulta ser un medio desconocido (y por lo tanto un nuevo reto) para el que aprende. Este fenómeno, genera una complejidad del lenguaje para el aprendizaje de las matemáticas, emergiendo implícitamente supuestos referidos a que la matemática no puede ser concebida por otro lenguaje más que no sea el del matemático, refiriéndome a que los significados que resultan de un lenguaje algebraico pueden ser remitidos únicamente al sentido de objeto matemático algebraico, coincidiendo con el concepto que el estudiante tenga de éste. Tradicionalmente, se establecen rutas didácticas para más allá de evitar el lenguaje, permitir que el aprendizaje del conocimiento matemático no recaiga en el lenguaje, sino en que el pensamiento matemático sea capaz de ser construído desde situaciones que posean otros significados del objeto matemático hacia la vida cotidiana del estudiante, hacia su realidad.

El lenguaje de las personas en situaciones escolarizadas pero sin un formal lenguaje matemático, se va creando desde la identidad que adquiere la comunidad misma, en donde ese lenguaje le es funcional para su desarrollo del conocimiento. Por este motivo es que es esperable que existan dificultades cuando la matemática pretende ser enseñada como un conjunto de constructos inamovibles y desde lenguajes ajenos. Desde tal posición, existen mayores razonamientos para explicar el por qué a los estudiantes de Chile "le cuestan las matemáticas". El lenguaje en este sentido, adquiere un rol que fortalece la construcción de conceptos con los significados que puede tener la persona mediante los signos (en el sentido de Vigotsky), principalmente relacionados con el uso del conocimiento matemático. Sin embargo, cuando el lenguaje es ajeno a la persona, es esperable que la construcción de conceptos se vea afectada por nuevas complejidades para relacionar el pensamiento con el lenguaje de la persona bajo un conocimiento específico.

Desde una postura vigotskiana, el conocimiento matemático y la realidad (conocimiento personal) de la persona, no necesariamente utiliza el lenguaje matemático común que posee la matemática como disciplina, sino que es un lenguaje más próximo a la persona, a una realidad sociocultural conocida en donde la persona pertenezca y en donde el conocimiento puede ser puesto en uso, sin necesariamente mediar desde el lenguaje de una sociedad o un grupo de personas que usan la matemática para sus fines específicos. Esto no significa que la persona no sepa matemáticas, sino todo lo contrario, la persona a través de un lenguaje que le es funcional pone en uso el conocimiento matemático, de forma tal que el lenguaje no genere un nuevo obstáculo, sino que propicie alternativas para realzar la funcionalidad del conocimiento.

Esto deja abierto las posibles relaciones que existan entre el lenguaje matemático y el conocimiento matemático (asumiendo que son muchas las matemáticas existentes, desde un enfoque situacional del conocimiento), ya que dependerá únicamente de la persona y su relación con el entorno el cómo son realizadas tales relaciones, significando que no necesariamente existe un solo entendimiento del conocimiento matemático y por ende, un único lenguaje, ya que cada persona describirá con un lenguaje propio un conocimiento (el que admite la posibilidad de que sea común, pero no como una necesidad), y éste traerá necesariamente significados y conceptos que en términos de lenguaje no son de un dominio general, sino que pertenecen a lo sumo, a un conjunto de personas que a partir de un fin, dominan un lenguaje común, un conjunto de personas que usan un lenguaje y entendimiento de una realidad sociocultural común entre ellos (por ejemplo los albañiles, los ingenieros o los médicos). Sin embargo, la funcionalidad de tal conocimiento matemático es lo que prima desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, la realidad y el conocimiento matemático pueden tener relaciones más complejas de lo esperado, aceptando que “marchan a pasos” distintos en su desarrollo y asumiendo que sus conexiones no son para nada triviales, sino que es necesario ser capaces de relacionar tales polos según la persona y con quien esa persona hace uso del conocimiento. Construyendo conocimiento por internalización de las actividades sociales del que aprende, mediante la apropiación de herramientas culturales que culminan en la internalización del mediador en una realidad sociocultural e históricamente situada.

Desde la enseñanza de las Matemáticas, debe existir una dialéctica entre el lenguaje socialmente funcional de una comunidad y el tradicional de la matemática escolar. Sin embargo, tal dialéctica ha sido desvalidada por múltiples actores del sistema didáctico, ya sea por los profesores, los textos escolares, el currículum e incluso el mismo estudiante. Sin embargo, el aspecto “tradicional” de cómo se desarrollan las matemáticas en términos del lenguaje ha tenido un fuerte impacto en el supuesto de cómo se aprende, y por lo tanto, en la forma de enseñanza. Por ello, es que la modelación matemática, más allá de ser una herramienta didáctica, es un fenómeno que pareciera ser natural en la persona para el enfrentamiento de problemas (cercano a un proceso paramatemático), más que las clases tradicionales de matemática apegadas a un lenguaje que no es natural del estudiante, sino dela actividad matemática. Por lo tanto, la modelación es una actividad que no es restringida a situaciones puramente escolares, sino que es un actuar de la persona con su entorno social y cultural.

Un ejemplo documentado por Vigotsky, es la historia del desarrollo del gesto indicativo: supongamos que un niño hace el gesto que querer alcanzar algo que no lo alcanza, cuando una persona ve el acto, le puede entregar lo querido, en este caso, existe la transformación del gesto a indicativo. En este caso, el niño es el último en tomar conciencia del gesto indicativo (plano social, intersicológico); aquí, el niño ya no fija su atención al objeto, sino que a la persona (plano interno, intrasicológico). El signo es lo que hace al niño estirar las manos.

Sin embargo, Vigotsky clarifica las limitaciones de realizar procedimientos de internalización, mencionando que hay elementos que no todas las personas son capaces de internalizar, principalmente por rasgos sociales y cognitivos. Tal ambiente teórico es llamado la Zona de Desarrollo Próximo, ZDP, definida "…como la diferencia entre lo que un niño es capaz de hacer sin ayuda y lo que es capaz de hacer con la ayuda de un adulto" (extraído de Adey, 1999, p.5). Tal caracterización deja entrever la relación entre el desarrollo cognitivo y el aprendizaje, ya que el desarrollo es el que remolca al aprendizaje, y es la palabra (en el sentido del lenguaje fonético, corporal u otro) el inicio del proceso del desarrollo de significados de los conceptos; además, la concepción de adulto no es solo una relación etaria, sino que es la persona que posee un dominio de un conocimiento, el cual la persona, a partir de su ZDP, pretende obtener.

La modelación matemática genera actividades psicológicas, las que desde un marco como Vigotsky, se debería apuntar a hacer uso de la ZDP, para el desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores, PPS, tanto rudimentarios como avanzados, en donde el aprendizaje del conocimiento genera un tránsito que necesariamente debe ser explicitado. Más allá de que las curvas del pensamiento y el lenguaje son independientes, los PPS son desarrollados en forma paralela y a distinta "velocidad" por cada una de estas curvas. Por lo tanto, la modelación matemática es una actividad que puede demandar el tránsito entre la reflexión del estudiante y la comunicación de lo que se mantiene en reflexión, permitiendo un desarrollo de la curva del pensamiento y del lenguaje. Esto, permite reflexionar respecto a qué tipo de elementos desde una visión vigotskyana son productivos para el desarrollo del conocimiento de un estudiante. Específicamente, me refiero a:

- Medio sociohistórico-cultural. Una tarea de modelación, requeriría que sea conocida en términos contextuales por el estudiante. En este caso, todo lo relacionado con el conocimiento extramatemático flexibilizaría hasta cierto punto la tensión entre la traducción de la matemática con la realidad (siendo una dimensión en el estudio de la modelación, como será detallado en la sección 2.3), ya que el reconocimiento de patrones para el uso de la matemática en la realidad del estudiante, permitiría generar una amplitud de conocimiento para el favorecimiento de las fases del proceso de modelación matemática que describen autores como Blum et al. (2005), Blum & Leiß (2007) o Borromeo-Ferri (2006, 2010)[6].

[6] Tal proceso será descrito en el siguiente capítulo.

- Signos. Desde la postura Vigotskiana, el uso de signos es un "anclaje" dentro del desarrollo cognitivo del sujeto (en este caso de interés, del estudiante), por lo que una tarea de modelación matemática debe asumir que los signos potencian la resolución de tareas de modelación matemática, ya que lograrían la interacción entre la problemática subyacente de la tarea y el conocimiento de la persona a partir del desarrollo de los procesos psicológicos.
- ZDP. La realización de tareas de modelación matemática, permite al estudiante reconocer maneras en cuanto a cómo el uso del conocimiento matemático es relacionado con la realidad del estudiante, o más específicamente, con el conocimiento del estudiante; lo que necesariamente permite el tránsito entre PSS rudimentarios y avanzados. Sin embargo, debería ser progresivamente más amplio el ZDP a medida de que el estudiante realiza cada vez más tareas y que ciertos PSS avanzados pasan a ser rudimentarios, ya que cada vez que realiza una tarea el estudiante, clarifica que existe un uso del conocimiento y reconoce de manera implícita o no, patrones de construcción de modelos. Respecto al acto continuo del aprendizaje mediante situaciones de modelación matemática, se desarrolla en el estudiante un conocimiento asociado a esas tareas.

### *1.4. El conocimiento, la modelación matemática y el profesor de matemáticas*

El aspecto epistemológico respecto a la modelación matemática, es significativo para la tipología de tareas, principalmente respecto hacia los objetivos, cómo se pretende que sean tratadas y qué fin adquiere desde una dimensión educativa. Por lo tanto, el sujeto desde tal problemática recae en el profesor de matemáticas, ya que éste debe poseer conocimientos y creencias en cuanto a las matemáticas, hacia cómo es construida, cómo debe ser enseñada y cómo la aprende el estudiante, validando y refutando posturas, estableciendo implicancias didácticas en su práctica docente en cuanto a cómo la matemática es percibida y finalmente aprendida. Todo este conocimiento no significa que permanece en un proceso consciente del pensamiento, sino que al describir el conocimiento que pone en uso, se vuelve posible caracterizarlo. Es en este sentido, que la visión epistemológica que se trate en la formación de profesores de matemáticas es esencial para el tratamiento didáctico requerido en la sala de clase y específicamente para el tratamiento de la modelación matemática en el aula, significando el aspecto epistemológico y didáctico un binomio indisoluble para la práctica del profesor de matemáticas (cómo logro que alguien aprenda algo cuando yo no conozco ese algo). Este efecto radica en que los antecedentes epistemológicos son capaces de evidenciar "huellas" que vislumbran ciertas construcciones de conocimiento matemático, las que reflejan usos del conocimiento matemático que en el aula son omitidos, incluso desvalidados.

Cuando son perseguidas las problemáticas de porqué a un estudiante en nivel secundario obtiene bajos resultados, las causas son muchas veces dirigidas al profesor, pero no es común encontrar cuestionamientos hacia el conocimiento matemático, hacia su transformación según la funcionalidad que el conocimiento posea. Tal construcción "tradicional" de conocimiento matemático, y que repercute directamente en el aula en la actualidad, muestra su surgimiento a partir de las problemáticas existentes en la primera mitad del siglo XX, referidas a los muchos lenguajes y escrituras en donde la matemática se ha desarrollado, reflejando naturalmente dificultades en la difusión y desarrollo del conocimiento matemático para la comunidad científica que crea y desarrolla la Matemática como disciplina de estudio. De aquí, es que se formula un objetivo entre matemáticos prestigiosos de la época: escribir la matemática sobre una amplia base general, que abarcase todo lo que se había producido hasta la fecha en matemáticas. Al abordar el objetivo, surge una forma sobre la escritura de la matemática con un fin de unificar el desarrollo del presente conocimiento matemático, tal desarrollo es también conocido como la obra bourbakiana. Esta, es cimentada como una convención que regula la forma en que se organiza el contenido del discurso matemático, basada en la obra euclidiana, esquematizada en definiciones, lemas, proposiciones, teoremas y corolarios. Tal manera de reconocer la matemática, estatiza de cierta manera la construcción del conocimiento matemático, lo que para fines educativos, presenta dificultades al momento de situarlo unificadamente, y por ende, conlleva naturalmente hacia el desarrollo disciplinar de la Didáctica de la Matemática, Matemática Educativa o Educación Matemática en múltiples sentidos.

Tal posición en cuanto al significado de las matemáticas, ha producido en los inicios una creencia general sobre qué es la matemática, cómo ha sido construida y cómo debe ser aprendida. Esto arrastra un problema que se mantiene hasta el presente: que el método bourbakiano se haya extrapolado en su funcionalidad no solo a la difusión, sino que también a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Actualmente, es fácil encontrar literatura matemática utilizada en la formación de profesores de matemática que aún mantiene un tipo de ordenamiento tradicional y exitoso para la divulgación de la obra matemática (lo que llamaremos la matemática tradicional del discurso matemático): definición, lema, proposición, teorema, corolarios. Actualmente, existe un claro discurso de la matemática próximo al método Bourbakí, que trae consigo una epistemología implícita del conocimiento, que generalmente, los matemáticos que dictan clases en la formación de profesores de matemática la validan, no es cuestionada, y que repercute en los profesores formados de tales universidades, adquiriendo una limitación o incluso una tergiversación en cuanto a la episteme de la matemática cuando se pretende intencionar hacia la educación, al discurso impuesto y su significado como objeto de enseñanza y aprendizaje. Este fenómeno desde una visión didáctica, deja implicancias referidas hacia un conocimiento matemático estático y preexistente que es reconocido en el aula de matemáticas, emergiendo cada vez más, ciertos elementos que distancian la construcción del conocimiento del estudiante (como persona y no como matemático) a la del profesor ("dueño" de un conocimiento matemático escolarizado y funcional en términos educativos) y la funcionalidad que reconoce y usa el matemático (que propiamente le es funcional, sin fines educativos; un ejemplo de ello es la función exponencial percibida como un homomorfismo entre un grupo aditivo y multiplicativo y que además cumple con que $f(0)=1$, una funcionalidad para el matemático que no es extrapolada con intereses educacionales) a medida que el pensamiento matemático del estudiante puede ser formado hacia una matemática que en su aprendizaje, dista de una epistemología estática.

Esta problemática es un factor que direcciona un desarrollo didáctico, y por lo tanto, existe la necesidad de ampliar a la comunidad de personas interesadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, otras construcciones epistemológicas que escapen del actual discurso metodológico (y cabe decir que exitoso para la difusión de la matemática, mas no lo suficiente para la enseñanza y aprendizaje), ya que solo a ciertas comunidades si les brinda el éxito pretendido (por ejemplo a las comunidades de matemáticos, pero en niveles básicos y medios, no se están formando matemáticos, sino ciudadanos).

Sin embargo, repercutir con epistemologías alternativas en el aula, es una tarea que ha sido reflejada al menos en trabajos de corte socioepistemológico (Cantoral, 2013; Cordero, 1998, 2001, Mendoza, 2017; Pérez-Oxté, 2015), quedando pendiente innumerables trabajos a descubrir para conocer cómo debería ser el impacto en el rol y saber del

profesor de matemáticas, y necesariamente, en su formación. Desde tal situación, es que el conocimiento matemático que puede emerger de situaciones reales cobra relevancia, al iniciar desde el conocimiento del estudiante la problematización de las tareas, la matemática es posible de ser entendida para la construcción de conocimiento matemático, generando una amplitud en el abordaje de la tarea, ya sea para establecer nuevas aplicaciones de una matemática que es conocida, o bien, para el reconocimiento de otros significados de los objetos matemáticos en cuestión. La formación del futuro profesor de matemáticas, requiere una reflexión en torno a cómo la matemática es entendida y no solo por las metodologías que a la Matemática le ha sido exitosa, ya que en su enseñanza y aprendizaje, las construcciones de conocimiento matemático pueden ser propuestas a partir de otras realidades o disciplinas.
Lo último descrito define dos aristas en la investigación; una de ellas es más bien cercana a lo demandado curricularmente respecto al aprendizaje de las matemáticas y por ende, una posición epistemológica tradicional de la matemática, por lo que una manera de describir tal arista es mediante la formación del profesor de matemática y cómo es posible generar procesos de enseñanza de la modelación matemática. Esta primera arista es la que será descrita en esta primera parte. La segunda arista, que va más relacionada con la reformulación epistemológica y la generación de una visión más amplia del conocimiento matemático, será desarrollada en la segunda parte, la que posee una diferencia basal respecto a la matemática tradicional desde una aproximación de la modelación matemática, más que una diferencia es una variedad. Considero necesario no omitir tal diferenciación en esta parte del escrito únicamente por el protagonismo que adquirió la reflexión en torno al conocimiento matemático.

### *1.5. Visión didáctica y paradigmas*

Continuando, podemos observar que desde el punto de vista didáctico, el rol del profesor ha evolucionado en su visión y qué significa ser un buen profesor, lo que adquiere posiciones distintas tanto temporalmente como situacionalmente. En un inicio, existe un rol de ser el protagonista de una clase, siendo un instructor de sus estudiantes y aplicando constantemente estrategias que eventualmente sirven instructivamente, aproximándose a corrientes pertenecientes al conductismo desde el sentido educacional (por ejemplo Pavlov, 1927). Actualmente, existe tanto en el curriculum chileno como en tendencias educativas en la Didáctica de la Matemática, una visión mediadora del profesor entre el conocimiento matemático y el estudiante, algo más bien cercano al espíritu constructivista, permitiendo al estudiante ser el protagonista de la clase a través de actividades didácticas para que el estudiante sea el constructor de su propio conocimiento (MINEDUC, 2016a). Tales posiciones son posibles de vislumbrar a través de dos paradigmas (en el sentido de Kuhn, 2015), uno centrado en la enseñanza y otro en el aprendizaje del conocimiento matemático.

En general, es posible observar los paradigmas mencionados sobre las prácticas que se generan entre el profesor y el estudiante en un ambiente de aula de matemáticas. Así, las prácticas son caracterizadas a través de la triangulación con el profesor, el estudiante y el conocimiento matemático, brindando una sinergia que se traduce en los conocimientos que finalmente posee el estudiante, es decir, la constante conducción hacia el objetivo principal: que el estudiante aprenda matemáticas.

Un primer paradigma es vislumbrado desde la enseñanza, en donde el centro de estudio es el profesor que posee el conocimiento matemático en la práctica docente, concibiendo al estudiante como un agente pasivo en el aprendizaje, en donde la preocupación es conocer cuáles son las prácticas que el docente debe concebir para lograr una buena enseñanza, por sobre la preocupación del aprendizaje (que sería dirigida hacia el estudiante). En esta situación, el profesor es el actor principal del sistema didáctico en el aula, normalizando los conocimientos hacia su propio saber matemático y estableciendo cánones pedagógicos y didácticos que permiten -en general-, que el estudiante logre un conocimiento matemático según la dirección que pretenda el docente, sin evidenciar mayor libertad de construcción de conocimiento matemático más que la conocida y dirigida por el profesor.

El paradigma del aprendizaje, es cuando el centro de estudio es el estudiante, en donde la prácticas docentes son dirigidas hacia la problemática del aprendizaje por sobre las problemáticas de la enseñanza, permitiendo al estudiante el rol de protagonista del sistema didáctico y a la vez, que las propuestas didácticas que son propuestas en el aula, sean dirigidas hacia cómo el estudiante aprende matemáticas.

En términos de Kuhn (2015; Gentile, 2013), los paradigmas suelen mostrar estados de relativa quietud, refiriéndome a que los científicos continúan y articulan ideas, problemas e interrogantes con una naturaleza común. Kuhn les llama en este estado la ciencia normal. Sin embargo, el fenómeno del surgimiento de un nuevo paradigma, produce una tensión en la actividad científica. Es el inicio de lo que caracteriza como una revolución científica. Bajo esta situación, Kuhn enuncia que el éxito de un paradigma es en principio una promesa de éxito, concibiendo a la ciencia normal como la realización de esa promesa; aunque esto no significa que los paradigmas sean contradictorios, sino que la comunidad científica es la que determina cuál es el predominante para ella, pudiendo ser desarrolladas en paralelo. Más aún, los paradigmas y las visiones de la enseñanza y aprendizaje son “la completa constelación de creencias, valores, técnicas (…) compartidos por los miembros de una comunidad dada” y por otra parte, “una especie de elemento (…) que empleado como modelo (…) puede reemplazar a reglas explícitas como base para la solución de los enigmas restantes de la ciencia normal” (Kuhn, 2015, p.).

Un símil podría ser observado en lo que respecta a la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas, ya que científicos de la Didáctica de la Matemática han focalizado sus problemas hacia cómo el profesor debe mejorar sus prácticas de enseñanza, mientras que otras comunidades están centradas en cómo el estudiante aprende. En este caso, no se espera que exista un paradigma por sobre otro, ya que las problemáticas de la enseñanza y aprendizaje adquieren múltiples naturalezas, y con suficientes problemáticas como para que cada paradigma se desarrolle, incluso, en ciertos estudios, son paradigmas inseparables en la labor de investigación.

## 1.6. Problemática

Destacando la relevancia que posee la modelación matemática desde los antecedentes propuestos, es que plantea la problemática de cómo son formados los profesores de matemática en Chile respecto a la modelación matemática, ya que su inclusión curricular es transversal con un carácter integrador del conocimiento en todos los niveles escolares, mostrando, aplicando o creando uso en múltiples conceptos matemáticos, teniendo como uno de sus objetivos, el desarrollo y la construcción del conocimiento matemático. Sin embargo, las actuales visiones del curriculum en cuanto a modelación matemática, no ha tenido el suficiente impacto en las universidades que se preocupan de la formación inicial del profesor de matemáticas. Tapia (2016) muestra un estado de la modelación en las estructuras curriculares de la FIPM en dos universidades chilenas, y describe que las concepciones de los formadores de profesores varían entre un uso de la modelación en un estatus de aplicación de algún concepto matemático, construcción matemática como lo es en la práctica del matemático, o bien una ejemplificación de algún contenido en ambientes extra matemáticos. Esto no significa que los profesores universitarios no modelen, ya que en las entrevistas explicitan que realizan actividades de modelación matemática, pero no existe dentro de la estructura curricular la preocupación por cómo guiar ciertas prácticas de enseñanza vía modelación.

Existen aproximaciones teóricas respecto al uso de la modelación en la formación de profesores. Julie & Mudaly (2007) han establecido dos polos dentro de un continuo, uno de ellos es el uso de la modelación como vehículo cuando la matemática es presentada en un contexto, pero teniendo en cuenta de que el objetivo no es la construcción de modelos matemáticos, sino que desde el uso del contexto y de modelos matemáticos se caractericen mecanismos para el aprendizaje de conceptos matemáticos, procedimientos y/o conjetura; el otro extremo es la modelación como contenido, lo que conlleva a la construcción de modelos matemáticos sobre fenómenos naturales y sociales, sin la prescripción de conceptos matemáticos, procedimientos o conjeturas. En este sentido, es que el uso de la modelación es promovido en el sistema educacional chileno como un agente integrador, visto más como un vehículo que como contenido.

Una pregunta natural, entonces, es si tales prácticas serán suficientes en la FIPM para que los estudiantes de esos académicos sean capaces de liderar procesos de modelación en sus futuros alumnos. Esta pregunta es basal en términos motivacionales para la investigación, planteando la problemática hacia el fortalecimiento de los conocimientos de los futuros profesores para que tengan cierta preparación respecto a la modelación matemática y su enseñanza en su quehacer al momento de que logren su certificación. Para la formación de profesores de matemáticas, el amplio espectro teórico y práctico en cuanto a los usos de la modelación, generará las herramientas para abordar tal problemática. Existen varias maneras de abordar tal inclusión en la FIPM; una ruta clara y directa para abordar la problemática, es mediante la introducción explícita de la modelación. En esta situación, los profesores de matemática chilenos deben ser capaces de generar prácticas de modelación, manteniendo claridad, por ejemplo, acerca de qué es modelación matemática, cómo abordar situaciones de modelación (resolución y reconocimiento de complejidades al modelar) y cómo se promueve la modelación en un ambiente escolar (crear actividades, conocer qué competencias desarrolla y cómo se evalúan).

## 1.7. Pregunta de Investigación

Tanto por la implementación del curriculum en Chile como por el aprendizaje de conocimientos que genera la práctica de modelar, es que esta investigación se direcciona hacia la función del profesor de matemáticas en torno a la práctica de modelación matemática. Desde lo mencionado anteriormente, es que se inicia desde el paradigma de la enseñanza, y por lo tanto, el sujeto a considerar es el profesor de matemáticas. Sin embargo, se aborda la inclusión de la modelación matemática en las escuelas desde la formación inicial del profesor y no desde el desarrollo profesional o la formación continua, significando que la investigación se posiciona en un paradigma de enseñanza, pero centrado en el aprendizaje. Específicamente, esta investigación pretende generar la importancia en que el profesor de matemáticas en su formación inicial tenga las posibilidades de aprender modelación matemática, refiriéndome a las características que posee, complejidades, virtudes y cómo desde la Didáctica de la Matemática es posible que el futuro profesor adquiera una práctica de aula tal que posea los conocimiento didácticos y matemáticos para que sea capaz de incluir en su futura práctica como profesor situaciones de modelación matemática, y que por sobre todo fomente en sus estudiantes la habilidad de modelar.

Las preguntas que guiarán nuestra investigación serán: **¿Cuáles son los alcances de los instrumentos utilizados en la experimentación para propiciar prácticas de enseñanza de modelación matemática?, ¿Cómo evoluciona el conocimiento de la enseñanza de la modelación desde ciclos reflexivos a lo largo de un curso de FIPM?**

Estas preguntas requieren de un marco conceptual, el que será descrito en el siguiente capítulo. Tal marco permite generar una o más concepciones de modelación matemática, aproximaciones desde el punto de vista cognitivo, un reconocimiento de la diversidad en las tareas de modelación, dificultades según la persona que se enfrenta a una tarea de modelación y competencias de modelación en donde las tareas respectivas se alinean a los requerimientos del docente.

Para responder a la pregunta de investigación, se han planteado los siguientes objetivos:

1. Crear una planificación (un modelo) para un curso de modelación matemática en la formación inicial de profesores en Chile.

2. Recopilar y analizar datos respecto a los conocimientos que se ponen en evidencia por parte de los estudiantes durante la implementación del curso.
3. Generar propuestas respecto a la optimización del modelo de enseñanza realizado.

Además, la planificación de un curso de modelación no adquiere por ningún motivo cierta trivialidad, siendo una problemática que desde la literatura ha sido abordada, según experiencias en otras latitudes referente a problemáticas similares con variaciones según el contexto socio-cultural y demandas naturales que existen en el país. Estas temáticas serán desarrolladas y explicitadas previo a la experimentación, específicamente en los inicios del capítulo siguiente.

A continuación, se presenta el marco metodológico asociado a cómo será analizado el caso en cuestión. Entendiendo que el marco debe perseguir de forma cabal con la pregunta de investigación, es que se ha decidido hacer uso del modelo MTSK, en donde se ha considerado sus alcances limitaciones y posibles aportes que pueda ofrecer. Muchos artículos han sido estudiados para su entendimiento, por ejemplo, Escudero-Ávila, Gomes Moriel, Muñoz-Catalán, Flores-Medrano, Flores, Rojas y Aguilar (2016), pero en general se sintetiza en este documento mediante el apodo de “el grupo de Huelva” y sus descendientes.

# Capítulo 2
# Marco Conceptual y Metodológico

La aproximación desde corrientes anglosajonas, proviene desde trabajos que en su época requirieron plantear una reflexión hacia cómo la matemática puede ser transformada en un ambiente escolar. Esto, lleva a generar una visión de las matemáticas de forma parcelada, ya que inicialmente se reconoce una matemática pura y otra que es aplicada. Sin embargo, Pollak (1969, 1979) presenta un fenómeno, el que antes no se había hecho explícito, siendo propuesto y posicionado en el centro de la problemática educacional, tal fenómeno se refiere en términos generales a la variabilidad del conocimiento del estudiante y cómo éste transforma las formas de modelar una tarea de matemáticas situada en una realidad, en la realidad.

Este inicio, genera en la comunidad científica, un impacto suficiente como para generar ecos de tal postura, algunos se mantienen hasta la actualidad, mientras que otros han sido reformulados y naturalmente, promocionando la amplitud del conocimiento en la Didáctica de la Matemática, los cuales serán explicitados en el transcurso del capítulo.

En la figura 6, se plantea cómo el desarrollo del marco de referencia fue conectado y ciertas profundizaciones personales realizadas durante su estudio. Específicamente, las líneas verticales muestran indagaciones en el estudio para la búsqueda del entendimiento del conocimiento, tanto desde la Psicología Cognitiva (Sternberg, 1997, 1999a) como de la modelación matemática desde una visión cognitiva (Borromeo-Ferri, 2006, 2010).

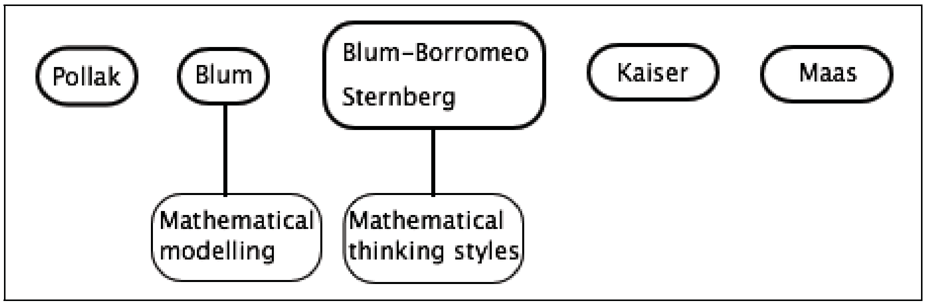



*Figura 6.* Esquema general del Marco de Conceptual construido a partir de los requerimientos de la propuesta. La continuidad es definida desde el abordaje de las preguntas de investigación y los objetivos definidos.

## *2.1. Posición de la realidad y las matemáticas*

Inicialmente, la modelación matemática, es caracterizada por un fuerte supuesto, el cual es determinante al momento de enriquecer el desarrollo disciplinar frente a este tema, y es que el conocimiento matemático preexiste frente al aprendizaje. Esto repercute en las maneras de cómo se percibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que una consecuencia de esto es la dirección del objetivo de enseñanza, focalizado hacia el objeto matemático. Es así, como Henry Pollak (1969) caracteriza el sentido a la pregunta ¿cómo puedo enseñar aplicaciones de las matemáticas? o aproximarse a caracterizar lo que significa aplicaciones de las matemáticas. Inicialmente, no existe una frase por lo que se entiende por esto, pero clarifica algunos aspectos, por ejemplo que las aplicaciones de las matemáticas son "...una conexión entre las matemáticas y algo más" (Pollak, 1969). Desde tal posición, es que crea una clasificación de problemas que se presentan en la enseñanza de las matemáticas como aplicación de las matemáticas:

1. Problemas que usan palabras de la vida diaria y pretenden en grados variables ser aplicaciones. Tal variabilidad la asocia a los grados de validez empírica de los resultados según el contexto real, ya que la declaración de tales problemas rara vez cuestiona

la honestidad y autenticidad de la conexión con el mundo real, pero la conexión es a menudo falsa en uno o más formas. Por ejemplo: un avión que ayuda a apagar incendios es capaz de apagar 30 metros cuadrados por cada carga de agua. ¿cuántas veces cargará para lograr apagar 200 metros cuadrados?. Claramente las variables para apagar un incendio no pueden ser tan deterministas como la hipótesis que plantea el problema, por lo que al contrastar con la realidad es cuestionado.

2. Problemas que usan palabras de otras disciplinas, refiriéndose a la negligencia de la aplicación de la realidad según el conocimiento intrínseco de alguna disciplina, cayendo en ser una traducción de ejercicios de una disciplina científica o ingenieril, cuestionando la realidad de la aplicación a partir de lo racional de la realidad; y por lo tanto, cuestionando el problema. Por ejemplo: La ecuación $f(t) = 2e^{0.03t}$ determina el porcentaje de desarrollo de una infección en el humano, siendo t el tiempo en días. Sabiendo que hay un cambio de tratamiento cuando llega al 70%, ¿en cuantos días ocurre tal situación?. En este caso, la realidad de la medicina clarifica que son datos estimativos, y por lo tanto, al representar tal fenómeno con una función determinista, es poco probable que algún médico haga caso sin exámenes (toma empírica) que clarifiquen la situación.
3. Problemas de capricho. Situaciones forzadas que en la realidad no ocurren, principalmente apuntan a un problema matemático forzándolo a una realidad ficticia. Ejemplo: Una hormiga que transita por las aristas de un cubo, y en uno de los vértices hay veneno. ¿qué tan probable es que la hormiga muera?.
4. Aplicaciones genuinas en la vida real. Como lo dice, son situaciones extraídas del cotidiano. Ejemplo: ¿Cuál es la mejor ruta para llegar desde aquí al aeropuerto? Primero habría que preguntarse qué significa “mejor”, lo cual puede ir asociado al tiempo, a una mínima trayectoria o la facilidad del camino para no perderse en el trayecto.
5. Aplicaciones genuinas de otras disciplinas. Ejemplos clásicos para ello son la ecuación del péndulo y la igualdad $sin\,(a) = a$ bajo unsentido físico. Otro ejemplo es documentado en Huincahue (2011), relacionado al estudio del ciclo de vida de un ácaro considerado como plaga: *brevipalpus chilensis*, en donde se pretende analizar el ciclo de vida y cómo éste se desarrolla según las variables “posiblemente conocidas”, como en ese estudio fue el caso de la temperatura. Para ello, se tomaron datos de campo, y

con ello, se permitió generar un modelo para lograr la predicción del ciclo de vida y encontrar el “mejor” momento para la aplicación del químico y liberar a los frutos de la plaga.

Cada uno de ellos propone situaciones que para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, Pollak, realza las problemáticas y obstáculos implícitos que conllevan tales problemas mencionados en su entendimiento, desarrollo y confrontación con la realidad, lo que implica considerar con mayor potencia cuál es el conocimiento que el estudiante posee y el conocimiento que demanda el problema. Tal sensibilidad ha sido el germen para generar direccionamientos en base a lo que es una aplicación de las matemáticas, o bien, lo que en adelante se identificará como una tarea de modelación matemática.

Diez años más tarde, Pollak aborda la problemática de caracterizar lo que son las matemáticas aplicadas desde la interacción entre las matemáticas y otros temas escolares, éstos últimos son descritos teóricamente como “el resto del mundo” (1979, p. 234). Esto, repercute en cómo la dinámica escolar concibe a las aplicaciones, por lo que no puede ser asumida una caracterización, sino una gama de interacciones (permitiendo una clasificación) que dependerán de las maneras que demanda el problema para ser resuelto:

1. Las matemáticas aplicadas significan las matemáticas clásicas aplicadas. En este caso se consideran ciertos tópicos de la matemática, como son el cálculo, las ecuaciones diferenciales, la trigonometría, la geometría o la teoría de funciones. Muchas de ellas son reconocidas en áreas de la Física, pero no necesariamente significa que las matemáticas aplicadas se complementen con la Física.
2. Las matemáticas aplicadas significan las matemáticas que tienen aplicaciones prácticas significativas. Todos los conocimientos matemáticos de nivel primario y secundario tienen aplicaciones prácticas significativas. Las funciones, las desigualdades, la teoría de conjuntos, la estadística, probabilidad, álgebra moderna, álgebra lineal, ciencia computacional son conocimientos de esta clasificación, además de muchos conocimientos matemáticos de nivel de pregrado y posgrado. Los campos de aplicabilidad potencial incluyen más que la Física, pero, una vez más, sólo se considera la matemática misma.
3. Las matemáticas aplicadas significan la iniciación con una situación en algún otro campo o en la vida real. Construyendo un

modelo, realizando trabajo matemático con el modelo y aplicando los resultados a la situación original. Áreas como las ciencias biológicas y ciencias sociales son reconocidas como muy activas en las matemáticas.

4. Las matemáticas aplicadas significan que las personas que aplican actualmente las matemáticas en su medio de vida en realidad. Es inicialmente como la definición 3, pero mantiene *loops* entre el resto del mundo y las matemáticas muchas veces.

Las 4 definiciones se presentan en la figura 7. La definición 1 es la Matemática Aplicada Clásica, MAC, la definición 2. es la matemática aplicable. Entre ellas no hay inclusión para ningún lado. Una evidencia es que pueden haber resultado teóricos de las EDO que no se conocen aplicaciones, por lo que correspondería en MAC. Al otro lado también es posible encontrar ejemplos.

Con respecto los dos polos de la figura 7, Pollak hace alusión al resto del mundo como todo el conocimiento que está fuera de las matemáticas, observando al conocimiento matemático aislado de la gente y existiendo por sí solo. En este sentido, la visión aristotélica asociada al mundo inteligible, es la que predomina en tal visualización del conocimiento, no solo matemático, sino que en general, la preexistencia del conocimiento, por lo que desde un aspecto educacional impacta en el descubrimiento del conocimiento matemático del estudiante por sobre la construcción de éste y principalmente sobre la concepción del aprendizaje y enseñanza. Pollak (1979) se refiere implícitamente a este fenómeno cuando define esa realidad o "resto del mundo":

> The rest of the world includes all other disciplines of human endeavour as well as everyday life. An effort beginning in the rest of the world, going into mathematics and coming back again to the outside discipline belongs in definition (3). Definition (4) involves (…) going around the loop many times. (p.234)

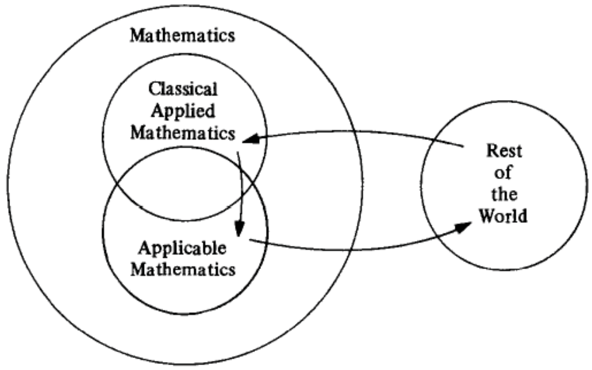



*Figura 7.* Posibilidades sobre cómo se generan las relaciones entre las matemáticas y el resto del mundo (Pollak, 1979).

El polo matemático de la figura 7, asume un dinamismo en sus particiones, explicado mediante los tipos de situaciones de modelación que plantea Pollak (1979).

Con respecto al proceso de construcción del modelo (no refiriéndome al conocimiento matemático), Pollak (1979) distingue ciertos pasos del proceso de modelación. Esencialmente destaca la necesidad del entendimiento de la situación, un intento de formular la situación en términos matemáticos precisos, frecuentemente un trabajo matemático del modelo derivado, un trabajo numérico en términos del entendimiento de los resultados y una evaluación según lo aprendido según la situación externa original. Durante las siguientes décadas, serán muchas las investigaciones que se posicionan en Pollak para plantear la descripción del proceso de construcción de un modelo, sintetizando posteriormente en lo que es un ciclo de modelación matemática o mathematical modelling.

Esta y otras reflexiones, son las que Pollak declara que deben impactar en la formación del profesor de matemáticas. Principalmente establece la necesidad de generar una visión multidisciplinar de la matemática a través de sus aplicaciones o procesos de modelación. Tal necesidad debe ser explicitada desde la formación, no solamente en el curriculum escolar cuando estas personas ya sean profesores, sino que en la formación se explicite la necesidad de transitar por los pasos del proceso de modelación, la multiplicidad disciplinar en donde se pueden efectuar procesos de modelación y en el diario vivir.

La obra de Henry Pollak cimenta una discusión, y es sobre el cambio de paradigma en los años sesenta sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cómo varía la forma que es posible de aplicar las matemáticas (matemáticas aplicadas) en contextos ajenos a la matemática y sobre la posibilidad de generar conocimiento matemático desde tales contextos, una visión incipiente a lo que considera como modelación matemática. Tal visión es pueda en discusión por muchos investigadores que han desarrollado el conocimiento disciplinar de la Didáctica de la Matemática hacia distintas perspectivas, lo que ha inducido una riqueza en el conocimiento que no recae necesariamente en la desvalidación, sino en la complementariedad de constructos teóricos. Un caso referencial es el de Werner Blum.

### *2.2. Aproximación individualizada*

Tal aproximación se iniciará caracterizando elementos basales para la generación de una visión más bien pragmática de la modelación matemática. Por un *problema*, nos referimos a una situación que lleva consigo ciertas preguntas abiertas, que desafían a alguien intelectualmente, que no está en posesión inmediata de métodos/procedimientos/algoritmos directos, etc. suficiente para responder a las preguntas. En este sentido, es que un problema es relativo a la persona. Se conciben dos tipos de problemas matemáticos: un *problema matemático aplicado* se caracteriza porque la situación y las preguntas que la definen, pertenecen a algún segmento del mundo real (en el sentido de Pollak (1979))[7] y permiten que se involucren algunos conceptos matemáticos, métodos y resultados. Otro tipo es cuando es un *problema matemático puro*, caracterizándose por poseer la definición de la situación es completamente incrustada en algún universo matemático. Pudiese suceder que desde un problema aplicado, surja un problema puro, pero al suceder, deja de ser aplicado, y viceversa (Blum et al., 1991).
Blum describe el tránsito de la persona por el modelo del Ciclo de Resolución de Problemas de Matemáticas Aplicadas (1993) cuando resuelve una tarea de modelación. Un modelo de similares características muestra Pollak en 1979. Sin embargo, Blum acuña los elementos teóricos que propone Pollak (1979) para caracterizar de manera más descriptiva el ciclo desde lo individual.
Todo inicia en una situación real que pertenece en el resto del mundo, para que después la persona que resuelve el problema lo simplifica, estructura y lo precisa, limitando a partir de condiciones adecuadas y

[7]Por mundo real nos referimos al "resto del mundo" fuera de las matemáticas, es decir, materias escolares o universitarias o disciplinas diferentes de la matemática, o la vida cotidiana y el mundo que nos rodea

supuestos, lo que conduce (por los intereses de la persona que resuelve) hacia un modelo real de la situación, que es más que una imagen simplificada y verdadera de alguna parte de una realidad objetiva (preexistente), ya que además crea una pieza de la realidad, dependiente de las intenciones y los intereses de la persona, manteniendo características esenciales de la situación real. Entonces, si es posible (si hay alguna matemática en él), el modelo real es matemático, que se traduce en matemáticas, resultando en un modelo matemático de la situación original, el que claramente no posee la propiedad de unicidad en la persona. Para la obtención del modelo matemático, es necesario realizar una matematización del modelo real: la traducción de los datos, conceptos, relaciones, condiciones y supuestos en la matemática. En un sentido simplificado, un modelo matemático es una tripleta (S, M, R), una situación con un problema real, S, alguna colección M de entidades matemáticas y alguna relación R en la cual objetos y relaciones de S son relacionadas con objetos y relaciones de M. Desde la obtención del modelo matemático, se escogen métodos adecuados dentro de la matemática, obteniendo resultado matemáticos, los que deben ser retraducidos al mundo real bajo una coherencia interpretativa de la situación original, debiendo validar el modelo matemático realizado. Si ocurren discrepancias (lo que no es visto como raro en un proceso de aprendizaje), entonces el ciclo debe volver a comenzar.

Blum en el año 1993, considera la existencia de problemas matemáticos que son vestidos como problemas aplicados, los que no serían “realmente reales”, en este caso, la persona sólo transitaría una vez por el ciclo del *problemas de palabras* que realmente se ha propuesto. Sin embargo, esto no significa que no puedan poseer cierto valor didáctico.

El término aplicación de matemáticas puede ser usado para diferentes partes de este ciclo. Una situación del mundo real puede ser llamada una aplicación, se puede denotar aplicación de las matemáticas cuando se utilizan matemáticas para investigar situaciones reales, o cualquier forma de conectar el mundo real con las matemáticas se puede ver como una aplicación de las matemáticas. Del mismo modo, el término matemático modelación, puede significar el proceso de construir modelos, que conduce de una situación real a un modelo matemático, o todo el ciclo de resolución de problemas aplicado, o de nuevo cualquier forma de conectar el mundo real con las matemáticas. En los últimos años, el término *aplicaciones y modelación* (o viceversa) se utiliza con frecuencia como expresión global de las diversas interrelaciones que se acaban de mencionar. A continuación, con el fin de simplificar las cosas, utilizaré el término *modelación (matemática)* en su mayoría en este amplio y extenso sentido. Esta terminología se justifica también por el hecho de que existe una tendencia internacional hacia la ampliación de los puntos de vista sobre las aplicaciones, los modelos, la matemática, la modelización, los vínculos entre la matemática y otros temas, etc.

En los trabajo de Blum & Niss (1989), Blum et al. (1991) y Blum (1993) se aprecia, además de posicionar teóricamente su visión en cuanto a la modelación matemática, las aplicaciones y el ciclo de resolución de problemas de matemáticas aplicadas, una visión hacia la instrucción de la modelación matemática, estableciendo cánones en curriculum, identificando su importancia, argumentaciones del porqué debe incluirse en los sistemas educaciones, obstáculos por parte del profesor, el estudiante y la instrucción y evaluación; además del rol que puede cumplir ambientes computacionales en la enseñanza y el aprendizaje al considerar la modelación matemática en las prácticas de aula y cómo existe una comunidad científica que crece para continuar el desarrollo del conocimiento de la modelación matemática desde un aspecto educacional. Estas y otras posiciones, se han ido desarrollando hasta el presente con éstos autores y muchos otros, por lo cual solo me referiré a lo que es de interés en este trabajo.

Al inicio del siglo XXI, se aprecia de manera explícita una visión sobre la importancia de la modelación en la enseñanza de la matemática. Tal importancia se desarrolló en paralelo en la instauración del concepto de competencias en pruebas estandarizadas, como por ejemplo la prueba PISA y en el desarrollo científico plasmado desde la comunidad ICMI (International Comission on Mathematical Instruction) en el trabajo de Blum (2002). Dicho esto, es que la reflexión alude a su influencia, ya que es conocido que personas que trabajaron en PISA (algunos hasta el día de hoy) pertenecen a la comunidad de investigadores en modelación y aplicaciones ICTMA.

PISA declara que es enfocado hacia el contenido o estructura, los procesos y situaciones de un conocimiento, en este caso, matemático. Para esto necesariamente se alude al principio básico que inicia Pollak y continúa Blum, que es la relación entre las matemáticas y el resto del mundo. Como ya se había enunciado anteriormente, en ambas posiciones se considera a la Matemática como un conocimiento apartado de la persona, en donde por si solo preexiste. Esta visión, hace necesariamente generar focos hacia un conocimiento situado, en donde prime lo epistemológico de lo matemático del matemático por sobre lo epistemológico de la gente. Tal discusión de mucho interés, será abordada en el capítulo 4.

PISA (Informe PISA, 2003) considera una competencia matemática como:

> ...una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de estos individuos como ciudadanos constructivos, responsables y reflexivos. (p.37)

Siendo tal postura una declaración normativa para medir los conocimientos (según la funcionalidad de la prueba estandarizada). Además, en PISA se considera como una base del conocimiento el concepto de *Mathematical Literacy*, algo así como el proceso de alfabetización matemática. Tanto el concepto de competencia matemática como mathematical literacy aluden a la cercanía del conocimiento con la persona y su realidad, en donde el conocimiento pueda ser re-conocido tanto en ambientes matemáticos como en ambientes de la persona. Inicialmente, PISA se refiere el año 1999 por primera vez a Mathematical literacy:

> [Mathematical literacy es] la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que las matemáticas juegan en el mundo, para hacer juicios bien fundados y para involucrarse en matemáticas, de manera que satisfagan las necesidades de la vida de ese individuo como un ciudadano constructivo, preocupado y reflexivo. (p.12)

Generalmente, los problemas en PISA, son presentados a partir de situaciones de la vida real, para identificar si tales problemas activan en el estudiante sus conocimientos y competencias matemáticas para resolverlos con éxito. En adelante, PISA ha desarrollado su posición, pero siempre centrado en la variedad de situaciones, para llegar al concepto de cultura matemática, pero refiriéndose a la visión de la matemática en un abanico de situaciones, más allá de caer en la abstracción misma del conocimiento:

> la prueba PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos

> cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos. (OCDE, 2014, p.37)

Esto significa que los elementos basales del ciclo son esenciales para generar el desarrollo de la alfabetización matemática, como son el proceso de matematización, interpretación y validación (Blum, 2002). Este motivo, agrega una importancia curricular e instructiva a la modelación matemática, más allá de la que por sí misma tiene. En este sentido, se generan directrices hacia la mejoría de los resultados de PISA, por lo que impacta naturalmente en todo el sistema educativo de un país. En el caso de Chile, luego de que han salido los primeros e insuficientes resultados, existe una modificación del curriculum chileno que se mantiene hasta hoy, considerando el modelar como una de las cuatro habilidades, en donde el conocimiento matemático debe ser tratado (MINEDUC, 2016b). Esto significa muchas modificaciones instruccionales, por ejemplo la capacitación a los profesores del sistema escolar, modificaciones curriculares en las escuelas formadoras de profesores de matemáticas, y por supuesto, investigación que emane desde el país, lo que considero que es donde nuestro país requiere mayor desarrollo. Hay muchas causas con respecto a lo último, las cuales no vienen al caso en este documento, pero sin dudas, el desarrollo de la educación de un país, requiere no solamente el desarrollo de la investigación, sino que el desarrollo de todos los actores que directa o indirectamente puedan aportar.

El año 2002, Blum nuevamente caracteriza lo que es modelación matemática, problemas de palabras y aplicación.

Modelación matemática es el proceso que conduce desde una situación problema hacia un modelo matemático. Blum (2002) declara que la comunidad también le llama modelación matemática a todo el ciclo, es decir, estructurar, matematizar, trabajar matemáticamente e interpretar/validar, tal como el ciclo lo describe. Se declara que existen otros tipo de problemas, lo que ya vienen pre estructurados matemáticamente, observando un disfraz de un problema puramente matemático; en este caso, el proceso de modelación consiste en “desvestir” el problema, el uso de la matemática y la simple interpretación, los que denomina problemas de palabras. Por una aplicación se entenderá el uso de la matemática para resolver problemas del mundo real o una situación real que puede ser resuelta mediante solo el uso de la matemática; en ambos sentidos, el centro es la matemática, siento el conocimiento al cual se le da un uso.

En la literatura ICTMA, se ha utilizado el concepto o término "Aplicaciones y Modelación", el cual recae sobre las direcciones del significado de modelación y aplicación entre las relaciones de la realidad y las matemáticas. Se entiende modelar cuando se dirige desde la realidad a las matemáticas y en el sentido opuesto cuando se habla de aplicaciones como lo muestra la figura 8.

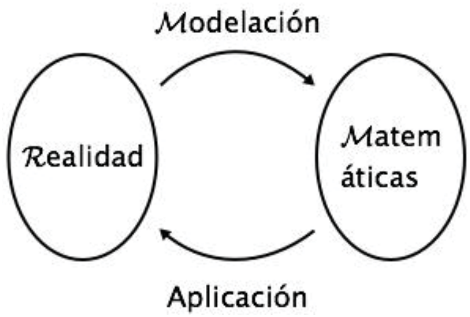



*Figura 8.* Concepto de modelación y aplicación desde el término "Aplicaciones y Modelación".

Blum et al. (2005, 2007) generan una aproximación mas precisa respecto al significado de modelación matemática, el cual emerge desde concepciones que llaman "criterios de calidad" para la enseñanza de las matemáticas. Estas son: 1) una orquestación del contenido matemático para la enseñanza (principalmente relacionado con la adquisición de competencias); 2) activación cognitiva de los aprendices (relacionado con la permanente estimulación cognitiva, incluyendo actividades metacognitivas, fomentación de la autorregulación e independencia de los estudiantes); y 3) Gestión de aula eficaz y orientada a los estudiantes (ejemplo: separación del aprendizaje con la evaluación y dar uso a los errores de los estudiantes como oportunidades de aprendizaje).

Desde tales supuestos, es que crean un análisis cognitivo de manera global, el que es descrito en la figura 10. Éste, será explicado a partir de la siguiente tarea de modelación matemática dada en la figura 9:

Imagina que un "ula-ula", además de jugar con él, puede ser el anillo de un gigante... ¿qué tan largo es el zapato el gigante?

*Figura 9.* Tarea de modelación matemática.

La situación real no significa que realmente suceda, sino que es real en el sentido de que el estudiante entiende el significado de la problemática (el estudiante tiene una idea de gigante, de un anillo, de un ula-ula y de la situación que es planteada). Cuanto el estudiante está en la fase de entendimiento del problema, se construye un modelo de la situación, la cual correspondería a una mano que le corresponda al ula-ula como anillo. Entonces, la situación debe ser simplificada, estructurada y hecha más precisa, permitiendo un modelo real de la situación. Esta fase es cuando ya se identifica el problema (de forma correcta o no), y genera indicios sobre cómo podría ser resuelto. En este caso, el modelo real de la situación permanece en un ambiente cognitivo, como en muchos otros casos (Huincahue, 2015), y por lo tanto, no se hace explícito (para esta tarea).

Luego, viene el proceso de matematización, el cual corresponde a declarar cierta regla proporcional entre el anillo y la persona, la cual puede provenir del ancho del dedo y la altura de la persona o del largo del zapato. Por ejemplo, si un anillo para mi tiene un diámetro de 2,2 cms. y mi zapato mide 31 cms., entonces tal proporcionalidad debería mantenerse, es decir: 2,2 es a 80 (que es el diámetro del ula-ula), como 31 es a x. Esto, es el modelo matemático. El trabajo matemático que se genera a continuación de formular el modelo, es en base a las propiedades básicas de los números reales, resultando que x=1127 aproximadamente, lo que es un resultado matemático. Al interpretar, se reconoce que el zapato del gigante debe medir aproximadamente 11.2 metros. El proceso de validación puede ser llevado a cabo magnificando los valores que hayan resultado, entendiendo que si el resultado le hubiera dado 100 metros o 1 metro, algo malo hubiera sucedido.

Las fases son descritas en el ciclo de modelación de Blum et al. (2005) (figura 10).

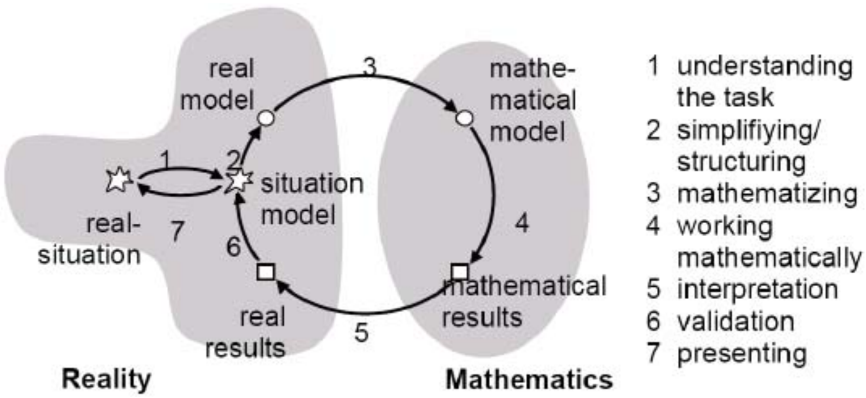



*Figura 10.* Ciclo de modelación de Blum et al. (2005).

Hasta el momento, existen variadas maneras de abordar el conocimiento de la modelación matemática como un área científica. Sin embargo, Borromeo-Ferri (2003, 2004, 2006, 2010) propone una manera de estudiar y posicionar a la modelación matemática, pero desde una variedad de Blum et al. (2005, 2007), más bien asociada a la cognición, a lo que sucede con el estudiante al resolver una situación de modelación matemática. Para ello, es necesario establecer un diálogo entre marcos teóricos, en donde, la Teoría del Autogobierno Mental de Sternberg (1997, 1999) se sitúa para la emergencia de otro constructo teórico: los Estilos de Pensamiento Matemático.

### 2.3. Perspectiva cognitiva de la modelación matemática

Mediante la utilización del marco metodológico de la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002), es que Borromeo-Ferri (2003, 2004) caracteriza lo que son los Estilos de Pensamiento Matemático.
Desde el necesario conocimiento del investigador en Didáctica de la Matemática, es que las preferencias que tiene una persona al realizar una tarea de modelación son importantes de conocer, ya que se transforman en una herramienta predictiva para el investigador y el profesor de las posibles rutas a considerar en el abordaje de la tarea. De esta manera, el estatus de las preferencias de las personas y/o los gustos dentro del proceso de modelación deben tener cierta significancia en el fortalecimiento del aprendizaje de las Matemáticas. La Teoría del Autogobierno Mental (Sternberg, 1997, 1999) genera directrices para conocer las preferencias y gustos de los estudiantes, clarificando diferencias entre los gustos y aptitudes para definir los estilos de pensamiento de las personas. Un estilo para Sternberg (1999) es:

> ...una manera de pensar. No es una aptitud, sino más bien una forma preferida de emplear las aptitudes que uno posee... Aptitud se refiere a lo bien que alguien puede hacer algo. Estilo se refiere a cómo le gusta a alguien hacer algo. (p. 24)

Estos estilos de pensamiento incluyen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género, en donde todas ellas podrán definir un lineamiento en las rutas del pensamiento de un estudiante. La Teoría del Autogobierno Mental (Sternberg, 1999) asume como idea básica que:

> ...las formas de gobierno que tenemos en el mundo no son fortuitas, sino que son reflejos externos de lo que piensan las personas. Representan sistemas alternativos de organizar nuestro pensamiento. Por tanto, las formas de gobierno que vemos son reflejos de nuestra mente. (p.39)

Esto podría indicar por qué un estudiante hace o no hace alguna actividad a partir de una metodología específica de enseñanza dada por el profesor, pero por otro lado, también deja ver que se puede formar un gusto con procesos sociales, es decir, los estilos de pensamientos son dinámicos a través del tiempo, tienen múltiples variables que producen el desarrollo y evolución de éstos, que pueden inferir en las actividades internas y externas de un proceso educativo. Sin embargo, es una definición no lo suficientemente cercana para estimar lo que sucede en el aula cuando un alumno aborda una tarea, ya que el conocimiento previo, y la preferencia en la construcción de conocimiento personal forman parte en la decisión del estudiante al abordar una tarea de modelación. En este sentido, es que se propuso estudiar los estilos de pensamiento de una forma paralela al trabajo de tesis, destacando estudios que actualmente permanece en preparación para su publicación sobre los estudiantes de Ingeniería. El detalle de este estudio está en el anexo 1.

Borromeo-Ferri (2006) define los Estilos de Pensamiento Matemático: “El término estilo de pensamiento matemático denota el camino en el cual un individuo prefiere presentar, entender y pensar a través de hechos matemáticos y conexiones usando ciertas imaginaciones internas y/o representaciones externalizadas” (p. 105, traducción personal). De esta postura, la clasificación de estilos permite mostrar las preferencias de cómo son usadas las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Borromeo-Ferri (2010) define tres estilos de pensamiento matemático para estudiantes de 9º y 10º grado:

- Estilo de pensamiento visual: Los pensadores visuales muestran preferencias para distintivas imaginaciones pictóricas internas y representaciones pictóricas externalizadas, así como las preferencias para el entendimiento de hechos matemáticos y conexiones a través de representaciones holísticas. Las imaginaciones internas son principalmente afectadas por fuertes asociaciones con situaciones vividas.
- Estilo de pensamiento analítico: Los pensadores analíticos muestran preferencias por imaginaciones formales internas y por representaciones formales externalizadas. Son viables a comprender hechos matemáticos preferiblemente a través del simbolismo existente o representaciones verbales y prefieren proceder a través de una sucesión de pasos.
- Estilo de pensamiento integrado: Estas personas combinan caminos de pensamiento visual y analítico y son viables a cambiar con flexibilidad entre diferentes representaciones o caminos de proceder.

Al tomar conocimiento el profesor de los distintos estilos de pensamiento matemático en sus estudiantes (estilo predominante y/o singularidades en un curso), permitiría una mejor comunicación en el aula y sería una potente herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Borromeo-Ferri (2006) integra aspectos cognitivos al ciclo de Blum et al. (2005, 2007), estableciendo un tipo de validación en la fase representación mental de la situación. En su trabajo (Borromeo-Ferri, 2010) incluye una doble validación hacia la fase modelo real, como es descrito en la figura 11:

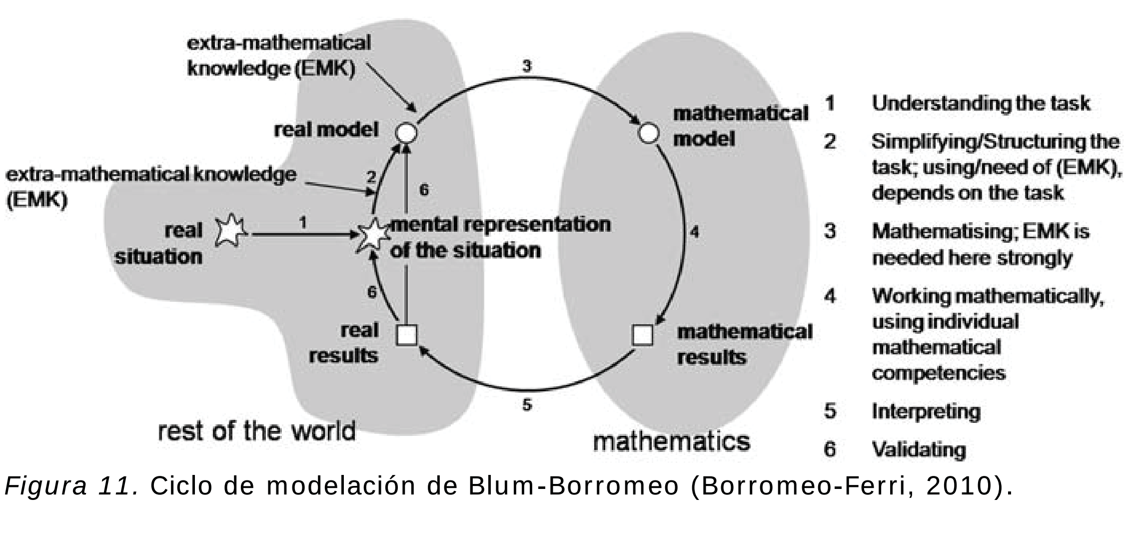



*Figura 11.* Ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010).

El ciclo es iniciado con una situación dada en el mundo real (RS), la que puede ser dada por una imagen, un texto o ambos, luego existe una transición, que es el entendimiento parcial del problema, el cual puede ser a nivel implícito e inconsciente para el modelador, la siguiente fase es la representación mental de la situación (MRS), en donde toma decisiones y filtra información del problema, acá depende el estilo de pensamiento matemático del individuo ya que en esta fase es en donde se define cómo tratar el problema en los próximos procesos de modelamiento, la siguiente transición es la idealización y simplificación del problema, siendo un proceso mucho más consciente que los anteriores. La próxima fase es el modelo real (RM), el que muestra cómo es construido el modelo, dibujos o fórmulas pueden representar el modelo real, aunque depende de las declaraciones verbales el sustento de las representaciones externas, además, es incluido el conocimiento extramatemático que posea la persona y que relacione con el modelo real construido. La siguiente transición es la matematización, en donde también es utilizado y requerido el conocimiento extramatemático para la construcción del modelo matemático (MM), en éste, aparecen representaciones externas por dibujos o fórmulas, pero las declaraciones son en un nivel matemático, luego hay que hacer trabajo matemático, necesitando las competencias matemáticas del modelador, para obtener los resultados matemáticos (MR), ellos después son interpretados, incluso de manera inconsciente, para obtener los resultados reales (RR), los cuales deben ser validados, discutiendo la correspondencia entre los resultados reales y la representación mental de la situación. Existen dos tipos de validación, la primera es una validación intuitiva, el modelador enuncia que el resultado es o no el correcto sin ser capaz de justificar su respuesta, es una validación que no encaja en el marco de asociaciones; y la validación basada en el conocimiento, el cual se apoya fuertemente en la correspondencia del problema basado en su representación. Generalmente, estos tipos de validación son inconscientes y conscientes, respectivamente.

### 2.3.1. Rutas

Desde una visión cognitiva de la investigación, es de interés establecer rutas en donde la persona que realiza una tarea de modelación matemática según el ciclo de modelación de Blum-Borromeo. En este sentido, es que el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) amplía y profundiza el campo de investigación, generando a través de evidencia empírica directrices en torno a la situación. Estas rutas, pretenden identificar ciertos modelos teóricos y plantea un tratamiento de generalización del modelo de Blum-Borromeo en los otros modelos.

Borromeo-Ferri (2006) considera que para el ámbito de la investigación, se visualizan maneras de diferenciar las fases del ciclo de modelación matemática de Blum-Borromeo y el ciclo de Blum (para esta situación, se considerará de manera análoga el modelo de la situación y la representación mental de la situación). En la figura 12, se diagraman los 4 grupos. Primeramente, describe cuando existen diferencias entre RS, SM/MRS, RM y MM, teniendo como investigadores interesados en esta visión, los que estudian los procesos cognitivos de los individuos. Un segundo grupo, es cuando existe una relación entre RM y SM/MRS que conlleva a MM, en este sentido, las tareas de modelación son más bien asociadas a problemas de palabras, en donde pareciera que existe una semiestructura del problema, encontrando preguntas de investigación asociadas por ejemplo a ¿cómo es reconocida la información del texto del problema en el entendimiento del individuo?. Un tercer grupo es cuando la RS conlleva un RM y luego un MM; aquí, no existe una diferencia entre MRS y RM, ya que ambas dimensiones son consideradas parte de un todo. Un ejemplo de interés es el ciclo de modelación desarrollado por Kaiser (1995) y Blum (1996), ya que el modelo del mundo real (figura 13) acuña el modelo de situación y el modelo real mismo.

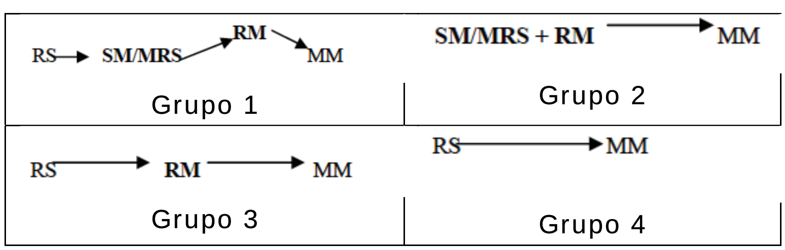



*Figura 12*. Rutas de modelación matemática.

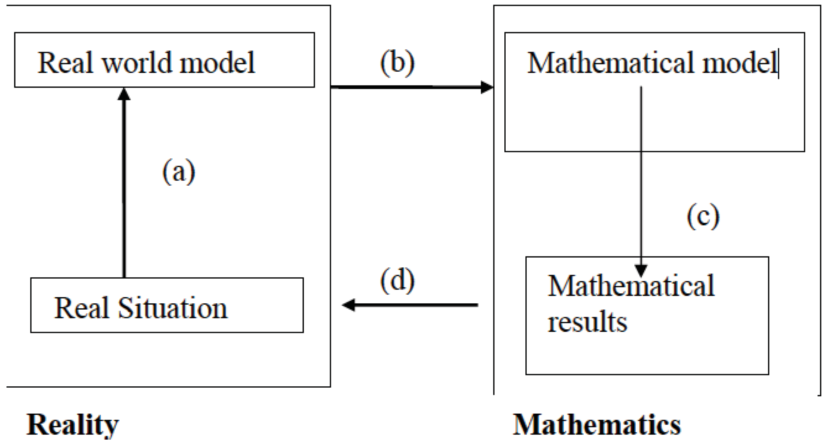



*Figura 13.* Ciclo de modelación de Kaiser (1995) y Blum (1996).

Un cuarto grupo describe un tránsito desde la RS hacia el MM. En éste, no necesariamente se vislumbra desde un ámbito educativo, ya que modeladores matemáticos o matemático aplicados también son capaces de percibir una práctica de modelación matemática de esta manera. Un clásico ejemplo de este grupo, es el ciclo de modelación de Pollak (1979), siendo claro (desde su concepción de Aplicaciones y Modelación) que el uso de este modelo acapara más allá de la comunidad de didactas de la matemática, por ejemplo los matemáticos aplicados. Esto último es entendido, ya que tal grupo no tiene como centro cómo construye el modelo un individuo.

### *2.3.2. Un uso del ciclo Blum-Borromeo: Indagación en las representaciones externalizadas*

Entendiendo que el constructo teórico de mathematical modelling proviene de corrientes anglosajonas, una eventual extensión cultural puede ser criticada y válidamente cuestionada, en el sentido de preguntarse si el posicionamiento educacional latinoamericano es articulable con un posicionamiento anglosajón, entendiendo la existencia de currículos distintos, problemáticas distintas, y por supuesto, conocimientos culturales distintos. Una validez para ello, requiere de evidencia empírica como prueba de tal extensión; desde tal situación, es que se plantea un estudio que indague en lo siguiente:

- Limitaciones y alcances de la línea teórica en otro ambiente cultural.
- Profundización en las representaciones externalizadas durante el tránsito en el ciclo de Blum-Borromeo.

El primer punto no se ve mayormente trastocado, ya que el componente cultural en el aspecto teórico apunta hacia el sujeto que resuelve la tarea, específicamente hacia su entendimiento del conocimiento extramatemático, de la tarea y formas de validación, siendo variables cognitivas que son posibles de estudiar en otras situaciones. Eventualmente, es de interés generar comparaciones entre diversas culturas para conocer si existen otros argumentos para resolver una tarea de modelación matemática, sin embargo, este estudio no apunta a eso. Tal cuestionamiento puede emerger desde un futuro trabajo. Este punto será vuelto a ser tratado en el capítulo 4. En lo que sigue, se explicará el segundo punto.

Un problema a considerar en el apoyo de la investigación desde una perspectiva cognitiva de modelación (Kaiser et al., 2006), es el reconocimiento de representaciones externalizadas en el tránsito del ciclo de modelación y saber si el tipo de tarea influye según los estilos de pensamiento matemático que puede tener el modelador para explicitar tal representación externalizada en un papel, de esta forma se pueden establecer diversidad de posturas y complejidades del modelador durante la tarea de modelación, además de las posibles elecciones en las rutas existentes. El objeto de investigación es la fase de modelo real y validación, y bajo qué tipo de representación existe, ya que en Borromeo-Ferri (2010) es documentado que la validación puede ser como se muestra en la figura 11, es decir, hacia la representación mental de la situación, o bien, hacia el modelo real. Sin embargo, cuando es realizada la validación en esta última, no es claro para el profesor que evalúa observe tal validación, ya que para encontrar evidencia del fenómeno, es necesario crear alguna representación externalizada durante el desarrollo de la tarea que de alguna manera quede alguna representación externalizada, que no necesariamente se remita hacia acciones gesticulares o en la inclusión de procesos metacognitivos. Borromeo-Ferri indica la vaga representación externalizada existente en esta fase (2010). Generalmente, estas representaciones son evidenciadas al entrevistar a los estudiantes o cuando son filmados, emanando representaciones gesticulares o pictóricas con rasgos de metacognición mediante el proceso de extracción de antecedentes para la investigación y no necesariamente dentro de una práctica docente.

*Experimentación*

Se ha realizado una actividad a estudiantes de 2º medio (10º grado) del colegio chileno en la ciudad de Rancagua, región de O'Higgins, para tomar evidencias acerca de qué representaciones externalizadas escritas son evidenciadas bajo el ciclo de modelación Blum-Borromeo (Borromeo, 2006). Se les ha pedido a los estudiantes que se agrupen de 3 a 4 personas, de tal forma que la colectiva utilización del conocimiento extramatemático sea utilizada en la construcción de la solución a la tarea y como un facilitador del características metacognitivas al emerger discusiones con respecto al desarrollo de la tarea. Se les entrega a cada integrante la siguiente tarea de modelación, teniendo cercanía hacia la perspectiva cognitiva y educacional-conceptual en el sentido de Kaiser et al. (2006):

El Campeonato de Fútbol.

En el primer trimestre, el Colegio Oscar Castro ha realizado un torneo de futbol interno, en el cual cada curso tiene su propia selección. En este campeonato, el equipo de segundo medio tiene solo 10 aguerridos hinchas. Al finalizar el torneo el primero medio sorprendió quedándose con el primer lugar, esto llama la atención de los demás, consiguiendo así triplicar su barra y volviéndose el equipo sensación del colegio, por esto, han participado en otros tres torneos que se realizaron en cada trimestre; en el primero, obtienen el cuarto lugar quedándose con la mitad de lo que ya tenían; en el segundo, logran el tercer puesto, manteniendo sus seguidores; y en el tercer campeonato pierde la final, duplicando su barra. Realicen representaciones con la situación planteada. ¿Qué pasa si el equipo siempre sale primero, segundo, tercero o cuarto? ¿Existen regularidades en las representaciones? ¿puede el equipo quedar sin hinchas? Explica tus respuestas.

En el transcurso se aprecia que los estudiantes discuten la actividad y empiezan a realizar propuestas a nivel grupal, y evidenciando que muchos transitan por el ciclo de modelación bajo distintos estilos de pensamiento matemático. En la figura 14 hay evidencia de un desarrollo estructurado de la actividad, luego representan de dos formas, las que permanecen dentro de la matemática que ellos conocen desde el colegio, sin evidenciar el interés por otras representaciones; además muestran que la validación es basada en el conocimiento de la representación mental de la situación.

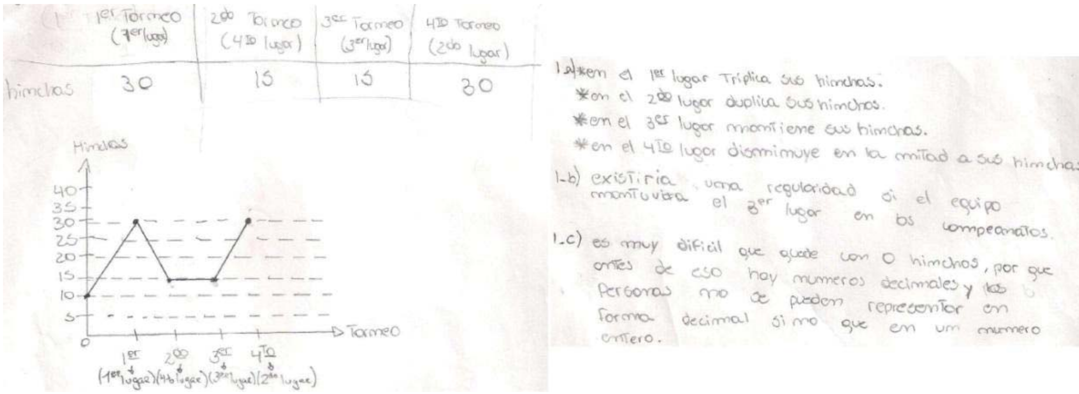



*Figura 14.* Estilo de pensamiento matemático analítico. Validación lógica hacia la representación mental de la situación.

En la figura 15, observamos que no utiliza los datos para responder, es en base a la experiencia del grupo la respuesta emanada, los estudiantes han preferido responder a través de la realidad, sin incluir a la matemática en su desarrollo.


*Figura 15.* Validación intuitiva.

En la figura 16 existe una representación pictórica fuera de la matemática tradicional, en donde la validación ha sido realizada a través de la representación mental de la situación, ya que los resultados son validados hacia el entendimiento de la tarea, sin incluir características propias de la fase de modelo real. Existe evidencia para decir que es un estilo de pensamiento visual desde las representaciones externalizadas que el estudiante ha creado.

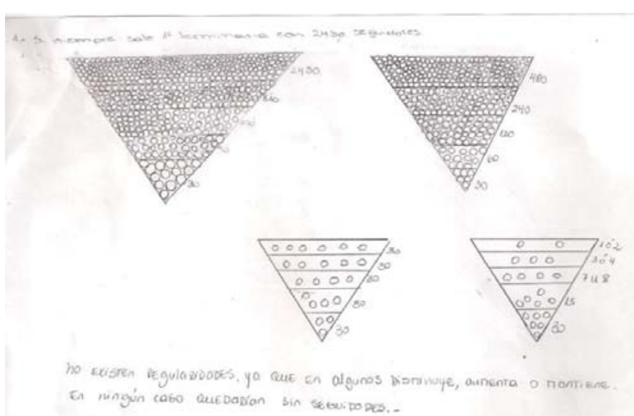



*Figura 16.* Estilo de pensamiento matemático visual. Validación intuitiva a través de la representación mental de la situación

*Conclusiones de la experimentación*

La indagación en los procesos que realizan los estudiantes al estar frente a una tarea de modelación evidenció la mayoría de las fases que describe el ciclo de modelación Blum-Borromeo en el papel. Sin embargo, no existen evidencias reflejadas en el papel del tránsito por la fase de “modelo real”. Desde la literatura citada, es posible decir que la tarea del Campeonato de Fútbol promueve tipos de representaciones externalizadas hacia un registro en papel, sin ser posible vislumbrar una relación con la fase “modelo real”. Esto conlleva a reforzar la idea de que la fase de “modelo real” permanece fuertemente en un ambiente metacognitivo del ciclo de modelación de Blum-Borromeo, siendo la única fase del ciclo que ha quedado sin un registro gráfico en este trabajo. Las consecuencias en el aula son variadas, ya que un profesor al evaluar una tarea de modelación le será más complejo establecer si el estudiante valida o no su respuesta cuando utilice la fase “modelo real” para tal propósito, debiendo conducir de manera más explícita la validación en la tarea si es que tiene como objetivo de aprendizaje el tránsito desde la matemática hacia la realidad en tareas de modelación.

Es sabido que no es suficiente conocer únicamente las representaciones externalizadas en papel para definir el Estilo de Pensamiento Matemático de un estudiante, ya que también se requiere el conocimiento de las imaginaciones internas, implicando otro tipo de estrategias metodológicas. Sin embargo, la creación de ciertas tareas, como la creada para este trabajo, facilita la visualización para el investigador en la búsqueda de evidencias del proceso de modelación, especialmente cuando la investigación indaga en funciones cognitivas, que surgen al transitar durante el ciclo de modelación Blum-Borromeo y que las evidencia serán únicamente de las representaciones en papel.

Los aspectos motivacionales intrínsecos de la tarea pueden ser lo suficientemente potentes para el estudiante como para que sus validaciones se mantengan en una realidad que no necesita de Matemáticas para el desarrollo de las tareas. Lo último es también reportado en el sentido de Competencias de Modelación (Maaß, 2006), cuando las características motivacionales logran distraer al estudiante de la tarea matemática que se pretende provocar.

## 2.4. Perspectivas de Modelación Matemática

Al considerar la Modelación Matemática como una actividad que conecta la realidad con la matemática, implica la obtención de cierta amplitud en lo que se considera como Modelación, ya que muchas veces dependerá de los objetivos que se tengan en mente como profesor, los que pueden tener como foco de importancia el desarrollo, el resultado, interpretación, validación, asignación de hipótesis, barreras cognitivas, entre otros. Además, las múltiples características que son posibles encontrar en una tarea empuja hacia una natural categorización. Es aquí en donde emergen las perspectivas de modelación, como una acción natural de clasificación teórica, las que pretenden establecer tal categoría que considera ciertas características asociadas a la percepción de la realidad, desarrollo de los proceso, fines de las tareas y evolución de líneas de investigadores en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

Kaiser et al. (2006) señalan que en el desarrollo de la modelación matemática en la educación se han generado diferentes perspectivas; cada una expresa sus objetivos para la matemática, la realidad y la educación: Realista, Contextual, Educacional, Socio-critica, Epistemológica y Cognitiva. Los estudiantes deben aprender modelación para usar las matemáticas en su vida cotidiana, como ciudadanos y como fuerza de trabajo. Además, describen en términos históricos el desarrollo científico que ha surgido respecto a las categorías de modelación matemática, caracterizándose por una fuerte utilidad en el ámbito de la investigación. Sin embargo, es posible generar una inclusión práctica para su enseñanza en las aulas, la que puede ser reflejada como un desafío para el currículum nacional, al establecer los conocimientos que la investigación produce, lo propuesto por el MINEDUC y las propuestas educativas de las instituciones educativas.

Cabe destacar que aparte del trabajo de Kaiser et al. (2006), se ha considerado el trabajo de Blomhøj (2008) para la elaboración de la descripción de las perspectivas de modelación. Este último, genera una categorización de todos los trabajos de modelación de ICME 2008, hecho en Monterrey, México.

A continuación, se expondrán las perspectivas en el sentido de Kaiser et al. (2006) y Blomhøj (2008), determinando una categorización de usos de la modelación, concepciones y realzar las diferencias que éstas tienen.

### 2.4.1. Perspectiva Realista

El punto de partida para esta perspectiva es el hecho en que los modelos matemáticos son fuertemente usados en disciplinas científicas y tecnológicas y en variados contextos sociales. Las tareas de modelación matemática son vistas como un problema aplicado a resolver, teniendo un fuerte énfasis en las situaciones de la vida real y en los enfoques interdisciplinarios. Éstas tareas no son solo situaciones que deben ser matematizadas para la creación de un modelo, sino que son abordadas con el suficiente rigor para resolver el problema, sin ser de interés el desarrollo de la teoría matemática. El centro es el problema auténtico. A modo de ejemplo y de conexión con las competencias de modelación, se propone que los estudiantes resuelvan tareas con el uso de tecnología en el análisis de problemas matemáticos, implicando que surjan aspectos valóricos del modelo creado en instancias de validación con datos reales. En esta perspectiva, es importante estudiar en profundidad procesos de modelación matemática en diferentes profesiones y áreas de aplicaciones sociales de modelos matemáticos.

Es posible entender una tarea de modelación matemática ligada a la física como una "modelación física", o incluso solo "física" (lo mismo para cualquier otra área disciplinaria, digamos Biología, Química, Ingeniería, etc.). Sin embargo, desde la visión de perspectivas, y en específico, en perspectiva realista, tales problemas si tienen como centro el desarrollo teórico de la disciplina, entonces quedarían excluidas en la categoría. A partir de esta perspectiva es en donde el rol interdisciplinario es tomado seriamente en cuenta, considerando como una característica basal que se logra el aprendizaje mediante modelo de situaciones de la vida real.

### *2.4.2. Perspectiva Epistemológica*

Contrariamente a la perspectiva anterior, la perspectiva epistemológica es centrada en el desarrollo teórico de la situación planteada. Es decir, existe un objetivo teórico (que puede ser ligado a cualquier disciplina) que es inherente a la tarea de modelación matemática, la cual ya posee una situación desde la realidad, y es en donde es requerido matematizar, pero lo medular de la situación es lo epistemológico que trasciende de la tarea. En este caso, la situación es subordinada por otras teorías relacionadas con la Didáctica de la Matemática, o incluso por otras áreas de las ciencias. Es decir, existen investigaciones relacionadas al manejo de software que requieren procesos de algoritmia que el usuario debe conocer para su correcto funcionamiento (por ejemplo el caso de MatLab o incluso Excel), de tal forma de construir un modelo matemático a partir de la epistemología dada por algún software. En forma recíproca, también queda afecto a esta perspectiva, es decir, si la tarea de modelación genera la promoción del desarrollo teórico.

Claramente, independiente de la teoría general en la que uno se posiciona (o es posicionado), la perspectiva epistemológica tiene elementos de interés: el entendimiento y la descripción de la naturaleza de las actividades matemáticas, y la reflexión generada por la modelación matemática; las que, en general, tienen un funcionamiento y forma según la epistemología en donde la persona se ha posicionado, en donde la construcción del conocimiento es delineado no solamente hacia la matemática, sino que hacia las teorías en donde la situación de modelación posicione al individuo.

Acá, queda en manifiesto la polaridad entre las perspectivas epistemológica y realista, justamente se contraponen y sus diferencias son claras respecto al objetivo de la tarea. En este sentido de polaridad, es que surgen matices de otro tipo de tareas, en donde el tránsito de tal polaridad existe, pero el objetivo no necesariamente es alguno de tales polos. Además, observemos que a priori, no existe una finalidad educativa en tales perspectivas (lo que no significa que no la haya).

### 2.4.3. Perspectiva Educacional

Bajo esta perspectiva, se considera a la modelación matemática como una importante competencia específica, pretendiendo integrar modelos y la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva se consideran por ejemplo las rutas para organizar actividades de modelación matemática en diferentes tipos de currículos matemáticos, problemas relacionados con la implementación de modelación en la cultura del colegio y prácticas de enseñanza y problemas relacionados con la evaluación de actividades de modelación de los estudiantes, pero posee como objetivo general la educación matemática. Naturalmente, los niveles educacionales adquieren una particular importancia y los objetivos específicos de las tareas, ya que se priorizan las estructuras de los procesos de aprendizaje y de los conceptos. Existen tres argumentos principales para la enseñanza de la modelación matemática como un elemento integrado en la matemática y en la educación general bajo la perspectiva educacional:

1. La modelación matemática fomenta el diálogo entre las matemáticas y las experiencias de la vida real de los estudiantes, generando un directo soporte cognitivo, motivando el aprendizaje de los estudiantes y dando un significado de matemática como

una disciplina que ayuda al entendimiento de la vida real.

2. Para desarrollar modelación matemática, se requieren competencias de creatividad, análisis y crítica a los modelos matemáticos propuestos. Esta característica permite una fuerza de trabajo adecuadamente educada para la sociedad.
3. Los modelos y el resultado de los modelos se utilizan para la toma de decisiones, lo que influye en funcionamiento y forma de las sociedades. Esta característica es también encontrada en la *perspectiva socio-crítica*.

En el uso de esta perspectiva, hay que considerar que la autenticidad y conexión con la vida real no asegura la ocurrencia de reflexiones relevantes y críticas sobre los estudiantes, pero características como la motivación que genera la tarea ayudan a mantener una reflexión en torno a la actividad de modelar y la reflexión. Existen otros relieves, pero no significa que tales características no existan en otras tareas de modelación.

### 2.4.4. Perspectiva Socio-Crítica

Dentro del funcionamiento de las sociedades, existen variables históricas y culturales, las cuales forman la identidad de una sociedad. Un individuo al ser parte de una sociedad, trae consigo valores, una ética, moral y principios que más allá de ser individualizados, algunos son socialmente aceptados. Desde tal hipótesis, es que tal individuo al resolver una situación de modelación toma decisiones en el desarrollo de la situación a partir de tales principios (considerando que la tarea permite tal variabilidad y libertad en la toma de decisiones). Tales modelos describen rasgos de pobreza, desigualdad, corrupción y protección de la naturaleza, solo por mencionar ciertos aspectos; estos en un micro y macro nivel, y todos ellos son una fuente para la construcción de modelos matemáticos con el fin de poder emitir juicios de valor según el individuo como persona perteneciente a una sociedad. es decir, desde esta perspectiva, la matemática adquiere una potencia de lenguaje distinta a lo visto sólo en el mundo de la matemática. Esta perspectiva enfatiza el rol de las matemáticas en sociedad y reclama la necesidad de soportar un pensamiento crítico sobre el rol de las matemáticas en sociedad, sobre el rol de la naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática en sociedad. Además, queda claro que bajo esta perspectiva, la reflexión y la crítica juegan un rol suficientemente relevante.

Bajo esta perspectiva, es posible reconocer tres focos en el ámbito de la investigación, los cuales se pueden presentar por separado o no:

1. El proceso de modelación o el subproceso seleccionado.
2. Las aplicaciones actuales de un modelo matemático.
3. Las cuestiones sociales en donde la modelación matemática y los modelos son usados como medio para análisis y crítica de decisiones políticas o fenómenos sociales.

En los trabajos de Barbosa (2003, 2008), es posible reconocer incluso una discriminación entre los modeladores profesionales y las prácticas de modelación que son efectuadas fuera de las escuelas. Este es un motivo para que adquiera un rol fundamental la reflexión en este tipo de tareas.

### *2.4.5. Perspectiva Contextual*

El foco de estudio de esta perspectiva es principalmente el desarrollo y diseño de tareas (o situación-problema) para modelar actividades, los que comúnmente se les podría etiquetar como "problemas de palabras". Estas, son guiadas por 6 principios:

1. Principio de realidad. La situación debe ser cercana a los estudiantes.
2. Principio de la construcción del modelo. La situación debe crear una necesidad en los estudiantes para crear una construcción matemática significativa.
3. Principio de autoevaluación. La situación debería permitir a los estudiantes evaluar sus modelos.
4. Principio de la construcción de documentación. La situación permite que el estudiante exprese sus pensamientos mientras resuelve el problema.
5. Principio de generalización de construcción. Que sea posible generalizar el modelo "provocado".
6. Principio de simplicidad. La situación-problema debe ser simple.

Tiene un claro foco en el diseño didáctico de provocar actividades de modelación (Lesh and Doerr, 2003) con situaciones cuidadosamente estructuradas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, siendo ésta una distinción entre la perspectiva contextual y la perspectiva realista; a partir de esto, es posible relacionarla con la *perspectiva educacional*.

Esta perspectiva se enmarca en aspectos filosóficos cercanos a corrientes vigotskianas del pensamiento. Entre sus fundamentos se destacan que: 1) Los sistemas conceptuales son constructos humanos, y por lo tanto también son fundamentalmente sociales en su naturaleza;

2) los significados de esos constructos son representados en lenguaje escrito, hablado, corporizado, diagramas e incluso metáforas; 3) El conocimiento es relacionado a través de la experiencia, por lo que es necesario integrar a más de una disciplina o conocimiento que posea el estudiante, para que logre relacionar con su propio conocimiento; 4) el mundo de las experiencias que la persona necesita entender y explicar no es estático, y tal dinamismo viene por parte de la creatividad humana. Así, es necesario que la persona se sienta capaz de mantener ese dinamismo.

En esta perspectiva, la modelación matemática no es concebida como una competencia específica, tal como si ocurre en la *perspectiva educacional*.

### 2.4.6. Perspectiva Cognitiva

El interés principal en esta perspectiva es entender cuáles funciones cognitivas son activadas en una situación de modelación para un individuo. Es común que a los estudiantes se les analice mientras realizan actividades de MM y después sean entrevistados con el propósito de reconstruir sus rutas individuales de pensamiento. El objetivo es encontrar tipos de barreras cognitivas en el proceso de modelación y ser capaces de reconstruir todo el proceso cognitivo del individuo en el transcurso que modela.

Es algo cercana a la *perspectiva educacional*, ya que a ambas le interesa el desarrollo de las competencias de modelación, pero la cognitiva desde otra "perspectiva", ya que los fines directos son únicamente de investigación. En este sentido, esta perspectiva no solamente acapara a un tipo de tareas o un solo sector de una población, sino que dependerá de los objetivos cognitivos, los datos a analizar. Este motivo es el argumento para mencionar a esta postura más bien como una metaperspectiva, ya que es capaz de analizar otra naturaleza de trabajo, pero manteniendo la dimensión cognitiva de la investigación.

Un buen ejemplo es el trabajo de Borromeo-Ferri (2006), que muestra cuáles son los niveles y fases de la MM en el individuo, destacando los Estilos de Pensamiento Matemático que tiene una persona al realizar una tarea de modelación.

En el trabajo de Camarena (2009) es otro ejemplo de investigación desde una perspectiva cognitiva. En tal trabajo, el objetivo de investigación es conocer la percepción de los estudiantes de la competencia de MM como una parte importante en la ciencia e ingeniería (notemos que calza perfecto en la perspectiva educacional), en donde los elementos cognitivos de estudio son:

1. Concepciones matemáticas que se requieren para el proceso de matematización.
2. Habilidades cognitivas generales en ingeniería, diferenciando procesos en el de MM.
3. Elementos cognitivos específicos, asociados a modelos y problemas de la ingeniería.

### *2.5. Competencias de Modelación*

Es importante saber la conceptualización del concepto de Competencia para un mejor entendimiento de las competencias y subcompetencias de Modelación Matemática, sobre todo cuando es un aspecto a considerar cuando se establecen perspectivas de modelación.

Desde la definición de Frey (1999, citado en Jäger, 2001), una competencia "es la capacidad de una persona… de verificar y juzgar personalmente la corrección fáctica con respecto a la adecuación de enunciados y tareas, respectivamente, para transferirlos a la acción" (traducción personal). Luis Rico (2006), conceptualiza una competencia para la Matemática desde el estudio PISA, declarando que la competencia matemática es: "…la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano". Para Niss (2004) una competencia matemática es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemática en una variedad de intra y extra contextos matemáticos y situaciones en las cuales la matemática juega o podría jugar un rol (citado en Maaß, 2006).

Niss (2004) acepta la fuerza de un ambiente matemático puro, en el cual se incluyan habilidades y destrezas, junto con la voluntad para ponerlas en acción desde evidencias cognitivas o de hechos. Para Rico, una competencia es desarrollada en su plenitud en la vida individual de ciudadano, además de tener mayor cercanía con la definición de Frey, ya que los hechos pueden ser mejor observados en la vida cotidiana, aceptando que los fundamentos teóricos de la resolución de una tarea son de un ambiente matemático. Necesariamente, la Modelación Matemática posee características cognitivas que trascienden de elementos fácticos y que son desarrollados en ambientes tanto matemáticos como del cotidiano, en donde no son suficientemente abordados por los conceptos de competencia y competencia matemática de Frey y Rico respectivamente; no así en la definición de Niss, ya que existe una valoración en cuanto a las actividades que son realizadas en un ambiente puramente matemático.

Para Maaß (2006), las Competencias y subcompetencias de Modelación (Blum y Kaiser 1997, citado en Maaß, (2006)) incluyen destrezas y habilidades para realizar procesos de modelación apropiadamente, orientado a objetivos y poseer la voluntad de poner éstos en acción. Es decir, *las competencias de modelación dependerán de lo que entienda por un ciclo de modelación y su respectivo proceso*. En el caso de Blum et. al (2007) es la habilidad de construir modelos realizando adecuadamente distintos pasos, así como para analizar y/o comparar modelos dados; tal aproximación, permite analizar no solo con el ciclo de modelación de Blum las competencias, sino que deja el espectro un poco más amplio hacia otros esquemas de modelación. Tal entendimiento tiene que ver con múltiples factores, desde saber cuál es el ciclo de modelación a considerar por el investigador hasta si las tareas utilizadas fueron o no consideradas complejas por los estudiantes, pudiéndose describir distintos procesos de modelación a partir de estos supuestos (Borromeo-Ferri, 2006). Desde este supuesto, es que consideraremos la visión de Blum (Blum et al., 2007) en cuanto a la modelación matemática y el ciclo de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2006) para la aproximación cognitiva.

Desde tal discusión y posicionamiento, es que Kaiser (1995) hace la diferencia entre los problemas simples de palabras, las tareas matemáticas incrustadas en lenguaje cotidiano, la aplicación de la matemática rutinaria estándar (en el sentido de una algoritmia) y modelación (entendida como procesos complejos de resolución de problemas). Esta posición, se diferencia en torno a los tipos de competencias de modelación, que propondría.

Según autores como Blum (1996) o Maaß (2006), el proceso de modelación comienza con un problema del mundo real. Al simplificar, estructurar e idealizar se obtiene un modelo real, el cual es influenciado por el conocimiento matemático y extramatemático que se posea. Al matematizar el modelo real se obtiene lo que se conoce como modelo matemático, trabajando en éste y utilizando los conocimiento matemáticos que el alumno ya conoce es en donde se obtienen los resultados matemáticos, siendo necesarios interpretar en la realidad y validar, ya sea en la tarea misma o en el modelo real.

Este proceso no debe ser visto como un algoritmo, sino como un complejo y simplificado esquema, en donde el uso que le da el estudiante es no lineal, es decir, dentro del esquema no necesariamente sigue el orden en el uso, ya que a medida que el alumno desarrolla su proceso de modelación avanza y retrocede continuamente por el esquema.

Para Maaß (2006), las *competencias de modelación* incluyen destrezas y habilidades para realizar procesos de modelación apropiadamente y orientado a objetivos, así como la voluntad de poner éstos en acción. Desde esta forma, es posible considerar las competencias y subcompetencias de modelación que definen Blum et al. (1997, p.9):

1. Competencias relacionadas a comprender el problema real y la creación de un modelo basado en la realidad.
    a. Hacer supuestos para el problema y simplificar la situación.
    b. Reconocer cantidades que influencian a la situación, nombrarlas e identificarlas como variables claves.
    c. Construir relaciones entre las variables.
    d. Mirar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.
2. Competencia para construir un modelo matemático desde el modelo real.
    a. Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones.
    b. Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad.
    c. Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente.
3. Competencia para resolver preguntas matemáticas con este modelo matemático.
    a. Uso de estrategias heurísticas tal como división del problema en partes, establecer relaciones a problemas similares o análogos, reformulación del problema, viendo el problema de una forma diferente, variando las cantidades o los datos de las variables, etc.
    b. Uso del conocimiento matemático para resolver el problema.
4. Competencia para interpretar el resultado matemático en una situación real.
    a. Interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos.
    b. Generalizar situaciones que fueron desarrolladas para una situación especial.
    c. Ver soluciones a un problema usando lenguaje matemático apropiado y/o comunicar sobre las soluciones.
5. Competencia para validar la solución.

a. Reflexionar y chequear críticamente en las soluciones encontradas.
b. Revisar algunas partes del modelo o ir de nuevo a través del proceso de modelación si las soluciones no encajan en la situación.
c. Reflexionar el problema bajo otras rutas de modelación o si las soluciones pueden ser desarrolladas de forma distinta.
d. Generalizar las preguntas del modelo.

Es posible relacionar la gran mayoría de las competencias y subcompetencias con las descripciones de las diversas fases y transiciones que describen el ciclo de modelación Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010).

Dentro de los múltiples problemas de incluir en aulas tareas de modelación es el cómo logro un proceso evaluativo de éstas. De aquí, Ikeda & Stephens (1998, p.27) dan un esquema para analizar la valoración de los logros de los estudiantes (citado en Maaß (2006, p. 117)) en torno a ciertas preguntas a responder por el evaluador. Entre ellas son: 1)¿El estudiante identificó el foco matemático clave del problema?; 2) ¿Las variables relevantes fueron correctamente identificadas?; 3) ¿El estudiante idealizó o simplificó las condiciones y supuestos?; 4) ¿El estudiante identificó una variable principal para analizar?; 5) ¿El estudiante analiza satisfactoriamente la variable principal y llega a conclusiones matemáticas apropiadas?; 6) ¿El estudiante interpreta conclusiones matemáticas en términos de la presente situación modelada?

Existen muchas otras maneras de evaluar tareas de modelación, las que son cercanas a la visión de modelación matemática para Blum. Para este trabajo, se considera que tales preguntas son un buen enfoque para el entendimiento inherente de la modelación matemática.

### 2.5.1. Niveles de Competencia de Modelación

Henning et al. (2005), que definen los niveles de competencias de modelación, utilizan la siguiente definición de competencia, dada por Weinert (2001): “es la suma de habilidades y destrezas disponibles o posibles de aprender, así como la voluntad de un estudiante de resolver problemas próximos y actuar de forma crítica y responsable con respecto a la solución”.

Los siguientes *niveles* son cercanos a elementos cognitivos que genera la modelación como habilidad, por ende, las construcciones de competencias no son observables de manera directa, quedan en un entorno cercano al curriculum nacional chileno y además, cercano a la concepción de modelación de Blum, por mantener de relieve una dimensión cognitiva de la investigación.

N1. Reconocer y comprender la modelación. Es caracterizado por la habilidad:

a. De reconocer y
b. De describir el proceso de modelación
c. De caracterizar, distinguir y localizar las fases de modelación

N2. Modelación independiente. Es caracterizado por la habilidad:

a. Analizar y estructurar problemas y cantidades abstractas.
b. Adoptar diferentes perspectivas.
c. Levantar modelos matemáticos.
d. Trabajar en modelos.
e. Interpretar resultados o afirmaciones de modelos.
f. Validar modelos y el proceso completo.

N3. Metareflexión en modelación. Es caracterizado por la habilidad:

a. Criticar y analizar la modelización.
b. Caracterizar el criterio de evaluación del modelo.
c. Reflexionar sobre la causa de la modelación.
d. Reflexionar en la aplicación de las matemáticas.

Este modelo de nivelación puede ser usado como descriptivo, normativo y metacognitivo, por ejemplo en evaluación de desempeño de estudiantes, planificación de clases y selección de contenidos de enseñanza.

### *2.6. Marco Metodológico: MTSK*

Considerando la experimentación a realizar, es de interés tener claridad desde el punto de vista del investigador, para reconocer los datos a analizar y cómo ver esos datos. Para ello y a partir de la naturaleza de la investigación, se decide utilizar como marco metodológico MTSK (por sus siglas en inglés del conocimiento especializado del profesor de matemáticas).

La experimentación al ser realizada en un curso de formación de profesores de matemáticas, se espera reconocer qué conocimientos matemáticos y pedagógicos (en el sentido de Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) surgen al momento de que los estudiantes participan de las actividades que propone la experiencia. Esto, reflejará el conocimiento especializado que se evidencia en la formación inicial del profesor de matemáticas en el futuro profesor.

### *2.6.1. La naturaleza del marco*

Desde la toma de datos de una experimentación, es de suma importancia la concepción de los supuestos para la realización de la investigación. Esto significa tener claridad en cuanto a los aspectos filosóficos y la naturaleza del marco metodológico

Un marco teórico a utilizar como instrumento metodológico en la investigación, será el modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge, MTSK (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Mendrano y Montes, 2016), el cual pretende comprender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas; en este estudio, especificado hacia el conocimiento de la modelación matemática. Sin embargo, es necesario establecer una postura respecto a la naturaleza del conocimiento y un posicionamiento epistemológico.

En principio, se entenderá el *conocimiento* como algo dinámico, en el sentido de variación a partir de un contexto social, histórico y cultural. Este, no tan solo variará en su concepción (como una información estática), sino también en cómo es utilizado tal conocimiento, desde el momento de abordar un problema típico para la persona, hasta la comprensión y abordaje de un problema no típico. Desde tal supuesto, es que Schoenfeld (2010. Extraído de Carrillo et al., 2016) brinda una aproximación sobre conocimiento:

> Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!. (p.25)

La definición se refiere a *información disponible* en términos relacional, instrumental, lógico o simbólico, evidenciada en acciones, en la comprensión de diferentes tipos y la adaptabilidad a diferentes situaciones. El uso es asociado a la información que únicamente tenga sentido ser utilizada en la situación; es decir, si un profesor posee conocimientos de Sistemas Dinámicos, no corresponde tal conocimiento al conocimiento especializado del profesor de matemáticas según el nivel donde imparta clases el profesor.

El conocimiento es permeado por las creencias y concepciones. Una postura que es próxima a la del marco es la de Ponte (1994), la cual Carrillo et al. (2016) explicita:

> Utilizo conocimiento para referirme a la amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos. Las creencias son las "verdades" personales incontrovertible que tiene cada uno, derivadas de la experiencia o fantasía, que tienen una fuerte componente afectiva y evaluativa (Pajares, 1992). Las concepciones son los esquemas subyacentes de organización de los conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva. Creencias y concepciones son parte del conocimiento (p.11).

Sin embargo, surgen cuestionamientos por el carácter incontrovertible de las creencias, generando un tratamiento integral entre lo propuesto por Ponte (1994, p.199) y el interés por diferenciar entre creencias y concepciones; es decir, es poco útil tal diferenciación explícita cuando el foco es el conocimiento. A partir de tales reflexiones, es que se utiliza la de Pajares (1992) en cuanto al conocimiento: "Red amplia de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por el ser humano… la red abarca concepciones y creencias y construidas mediante éstas" (Pajares, 1992,. Extraído de Carrillo et al., 2016). En términos de compatibilidad, Schoenfeld se expresa en la utilidad del conocimiento y Pajares en la posesión, siendo equiparable los términos *posesión útil* e *información disponible*.

El posicionamiento epistemológico del conocimiento emerge a partir de la noción de ciencia, desde una perspectiva epistemológica socioconstructivista, con raíces desde lo pedagógico y socio-histórico. El socioconstructivismo reconoce un rol que juega el sujeto en la construcción de conocimiento de forma individual. Sin embargo, al momento de pensar en la construcción de saberes, se hace necesario tomar en cuenta los intereses sociales, por lo que asume importancia las interacciones sociales para la construcción de los conocimientos individuales, reconociendo a la ciencia como un producto social generado por el humano.

En cuanto al significado de observar, se entenderá que "…es la construcción de una representación o de un modelo de la situación" (Fourez, 1997, p.64; extraído de Carrillo et al., 2016, p.15), ya que el observador es una persona que modela una situación en base a su conocimiento, intereses y visiones, los cuales contextualizan al observador. En este sentido, ser objetivo significa respetar las reglas de una subjetividad compartida, ya sean personas o instituciones con intereses en común; por ejemplo una comunidad científica.

El concepto de modelizar, es utilizado para el desarrollo y la puesta en escena de una situación de modelación. Cuando la persona describe de alguna manera una situación, está modelizando, pudiendo dar uso a su conocimiento de modelos ya estandarizados o no, por ejemplo, los modelos estandarizados de constitución del conocimiento científico son modelos, desarrollados del trabajo colectivo de reflexión y constante refinamiento, permitiendo la facilidad de comunicación entre personas o grupos que utilizan los mismos estándares. En este sentido, para la consideración de un modelo se basan en Schoenfeld (2010), específicamente a sus criterios, que posean "…poder descriptivo, poder explicativo, alcance, poder predictivo, rigor y especificidad, falseabilidad, replicabilidad y triangulación" (p.646). Cabe considerar que todo modelo es limitado, al igual que su campo de aplicación, por lo que la adecuación de un modelo dependerá de lo que se pretenda extraer de éste, incluso su validez.

Desde una visión sobre la naturaleza del conocimiento, que en nuestro interés sobre la matemática se pueden mapear dos vertientes, la del formalismo y la del constructivismo. La primera tiene una relación con la escritura bourbakiana, la cual es la que socioculturalmente se ha transformado y llegado al ambiente de la educación en la matemática. Esta, brinda éxitos en el desarrollo de la matemática, logrando múltiples situaciones que permiten un mejor desarrollo, aunque deja de lado significados de los objetos y se remite a una forma de ellos, lo cual es una limitación cuando uno se refiere a la educación. La segunda, desde un punto de vista cognitivo (específicamente desde la epistemología genética de Piaget), pone el acento en el proceso y no solo en los conceptos conseguidos, concibiendo al conocimiento matemático "el resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas (abstracción reflexiva). La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos (así como la lengua no es el texto de su enseñanza) sino, esencialmente, una actividad" (Moreno y Waldegg, 1992, p.31; extraído de Carrillo et al., 2016, p.19).

El marco desde su posición ontológica y epistemológica, caracteriza un centro en el desarrollo didáctico que éste plantea, el cual es el objeto matemático. Esto surge al momento de describir las influencias de las actividades educativas cuando se considera la vertiente del formalismo para una modelación: "se trata de modelos que toman como punto de partida definiciones que son, en realidad, el punto de llegada de un largo proceso de conocimiento” (Carrillo et al., 2016, p.19). Aunque se establece que la matemática también posee una dimensión menos abstracta, más funcional en el sentido de la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada. En este marco, la matemática es más bien ejemplificada y puesta en uso, pero desde el objeto o con el fin de llegar al objeto.

Desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas, se asume que debe ir más allá que procesos de memorización y comprensión, más bien dirigido hacia el éxito en su aplicación, y pensar y actuar ante situaciones diversas con base en lo que se sabe. Desde aquí, que las situaciones de enseñanza a proponer adquieren un corte constructivista, desde una articulación de la construcción del conocimiento y su propia naturaleza. Además, en este marco adquiere sentido la pregunta ¿cómo se aprende matemáticas?, abordándola en términos cognitivos desde corrientes piagetanas, como conocimientos en equilibrio y desequilibrio, reorganización de conocimientos y finalmente modificados. Esto, es promovido a través de la promoción de instancias de investigación en el aula por parte de los estudiantes para que respondan a sus propias inquietudes, que asuman cierta responsabilidad en su aprendizaje y que el profesor adquiera un rol de corresponsabilidad del aprendizaje. Es esta línea, se concibe a la evaluación como un sensor que permite la reconducción del aprendizaje en cada momento a partir de las acciones de los procesos de enseñanza.

### *2.6.2. El conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza*

Se considera que la formación inicial del futuro profesor pertenece al desarrollo profesional del profesor. Desde tal postura, se observa el MTSK como un marco analítico para mejorar la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas, observando el conocimiento profesional como un sustento del desarrollo del profesor y como producto de dicho desarrollo. Aquí, el profesor es visto como un agente reflexivo, pudiendo “mirar con sentido” las prácticas docentes respecto a qué contenidos matemáticos enseña, para qué tales contenidos, cómo son tratados los conocimientos pedagógicos y matemáticos, cuestionamiento de su práctica, entre otras cosas. En este marco se considera como referente del profesor de matemáticas al profesional que resuelve los problemas naturales que son de interés para el profesor de matemáticas, incluyendo como parte fundamental la formulación y refinamiento de éstos (por ejemplo el matemático). El modelo y el marco no persigue la organización del conocimiento del profesor, sino que se asume un modelo ficticio de organización (analítico) para indagar en cómo es posible focalizar tal conocimiento; esto, emerge desde la problemática planteada por Shulman (1986, 1987), en donde clarifica que una cosa es poseer el conocimiento del contenido matemático (MK), pero otra distinta es poseer el conocimiento del contenido didáctico (PCK) de éste, incluso, se clarifica que el contenido matemático que requiere el profesor es distinto al necesario por otro profesional o el requerido para la vida, ya que para el profesor va ligado a la comprensión de su aprendizaje y enseñanza, por este motivo adquiere el carácter de especializado. Esto último hace una diferencia respecto al modelo de inspiración del MTSK, refiriéndome al modelo de Ball, el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este trabajo no se pretende describir el modelo MKT, pero sí, se expondrán los relieves que generan ciertas limitantes del modelo MKT, según Flores-Medrano, Sosa y Ribeiro (2016), y que el modelo MTSK enfrenta:

1. Problemas de delimitación. En el MKT, un conocimiento puede ser interpretado como especializado o común, incluso el conocimiento didáctico del contenido no es percibido como un ente especializado. El MTSK asume el conocimiento común con quién y especializado con quién. Es decir, sitúa una situación en donde el conocimiento es interpretable para clarificar la delimitación y el estudio analítico. Así, la definición de horizonte para Ball et al. (2008) es reformulada hacia cómo ese conocimiento se estructura con otros objetos y cuál es su forma de proceder en matemáticas. Además, el MTSK asume un sentido individualizado del profesor de matemáticas del cuerpo de conocimiento matemático, el que no necesariamente es percibido de naturaleza únicamente matemática o didáctica matemática. “Se considera que es el conjunto de los seis subdominios que componen al modelo lo que es especializado para el profesor de matemáticas (no elemento a elemento, sino el conjunto)” (Flores-Medrano et al., 2016).
2. Elementos de conocimiento didáctico general. Es bastante valorable que el profesor conozca individualmente a sus estudiantes, pero surge la pregunta de que si acaso este conocimiento es especializado o no. A modo de ejemplo, las decisiones de conformación de trabajos (grupal o individual) pueden o no poseer fundamentos asociados al aprendizaje de la matemática, ya que si existe un argumento relacionado con las bondades de trabajar en términos grupales no es un conocimiento

especializado, pero si se prefiere trabajar grupalmente porque existirán resultados matemáticos que generan contraste y sinérgicamente propician construcción de conocimiento matemático, entonces si es considerado en el MTSK como un conocimiento especializado.

3. Del conocimiento curricular al conocimiento de los estándares. El MTSK se refiere a los estándares en términos del NCTM y el MKT en al curriculum, argumentando la variabilidad de este último tanto culturalmente como temporalmente.
4. Creencias del profesor como núcleo del modelo. Se plantea su potencia en términos metodológicos de investigación, estudiando las creencias, concepciones y conocimiento.

Un estudio sobre la comparación de un caso se describe en Montes, Contreras y Carrillo (2013), clarificando los distintos enfoques que posee el MKT y MTSK en cuando a la interpretación en los casos de estudio, ya que el conocimiento que usa el profesor en ese caso es una analogía referente a la complejidad en un contexto de curso superior: se plantea buscar los puntos críticos de una función racional, en donde la expresión resulta a simple vista engorroso (ver figura 17.a), el estudiante no sabe qué hacer y el profesor pregunta al estudiante si sabe resolver una operatoria simple (figura 17.b). Luego el profesor pregunta, ¿no es lo mismo?

$$\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}+\frac{(x-1)-3(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}$$

*Figura 17.a*

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{7}$$

*Figura 17.b*

En tal situación, el MKT presenta indefiniciones en los subdominios al asignar una interpretación estrictamente coherente en términos de Ball et al. (2008); mientras que desde el análisis del MTSK no ocurre tal indefinición. Para mayor detalle, revisar Montes et al. (2013).

### *2.6.3. Sobre el conocimiento profesional del profesor*

Existen caracterizaciones que el "grupo de Huelva" ha declarado en Carrillo et al. (2016) en cuanto al conocimiento profesional del profesor. Primeramente, asume que es un conocimiento propio del individuo, que es dependiente de la experiencia, concepciones, valores y actitudes, por lo tanto, es ligado a contextos profesionales situados, los cuales son parte del conocimiento. Es integrador en múltiples saberes, por lo tanto no analítico o más bien, sinérgico. En este sentido, es que la práctica es parte de cómo se va plasmando lo sinérgico, y por lo tanto, ésta es parte del conocimiento cuando vaya acompañada de una reflexión teórica que sustente la reflexión emanada de la experiencia. Carrillo caracteriza tres pilares fundamentales: experiencia, reflexión y respaldo teórico. Por la misma importancia que adquiere la práctica, es que el conocimiento es dinámico y parcialmente tácito, refiriéndose al saber desde la acción.

El conocimiento profesional es el perseguido por el MTSK, tanto para saber qué conocimiento tiene el profesor, como para describir el que necesita. Este, en términos metodológicos, es posible de ser recogido en imágenes o en casos, luego diseccionar lo percibido (y por eso lo analítico del modelo), para luego generar una comprensión. Lo último es de relevancia al utilizar el MTSK, ya que como se ha dicho antes, el modelo asume que el conocimiento es integral, por lo tanto, el uso del modelo es dirigido hacia la comprensión desde una disección impuesta y detallada, es decir, es requerido que el investigador sea capaz de integrar la información que entrega el modelo para generar una interpretación.

### 2.6.4. El Modelo desde el caso: Formación inicial de profesores

En el modelo MTSK, el conocimiento es separado en dos dominios de conocimiento, los que a su vez, son separados cada uno de ellos en tres subdominios (ver figura 18). El dominio llamado Conocimiento Matemático (MK), es el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar. Sus tres subdominios son el conocimiento de los temas matemáticos, KoT; el conocimiento de la estructura matemática, KSM; y el conocimiento de la práctica matemática, KPM, por sus siglas en inglés. En el último subdominio, se reconoce a la modelación matemática, pero no desde un punto de vista conjuntista, sino que la naturaleza de la actividad de modelación es también observada en la práctica del matemático, entendiendo que el matemático en un ambiente paramatemático modela cuando crea y hace uso de las matemáticas, en un ambiente intramatemático o no, por ejemplo en una demostración.

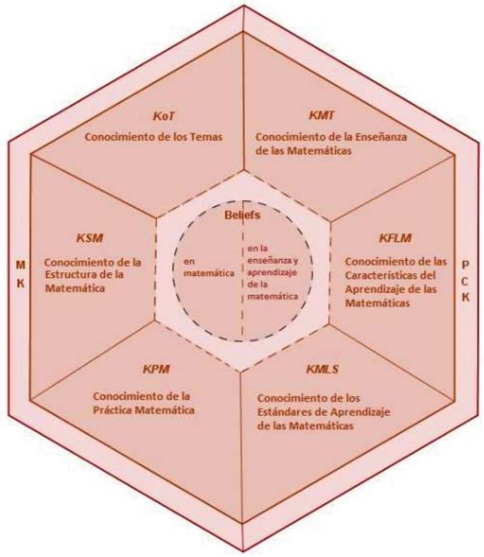



*Figura 18*. El Modelo MTSK sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2016).

El KoT incluye aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos; que caractericen aspectos del tema matemático abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos. El KSM es el conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distinto contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Son específicamente conexiones entre temas matemáticos. El KPM es el conocimiento sobre las formas de proceder a resultados matemáticos, asociado al cómo se explora y genera conocimiento por las matemáticas, cómo se establecen relaciones, desde lo argumentativo, el razonamiento o la generalización.

El segundo dominio de conocimiento del modelo MTSK es el PCK, el Conocimiento Pedagógico del Contenido. Un dominio característico del desarrollo profesional del profesor de matemáticas, fecundado por la necesidad de las prácticas de enseñanza que posee naturalmente la profesión y su relación con la disciplina (Carrillo et al., 2016). Es separado en tres subdominios de conocimiento, el conocimiento de las características del aprendizaje, KFLM; el conocimiento de la enseñanza de la matemática, KMT; y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, KMLS

El KFLM es el conocimiento basado en las características del aprendizaje inherentes al conocimiento matemático; en este caso, no son consideradas las características del estudiante en sí mismo, sino las características del aprendizaje derivadas de su interacción con el conocimiento matemático. Es el conocimiento en donde la matemática condiciona el aprendizaje. El KMT, de manera similar al KFLM, es un conocimiento tal que el conocimiento matemático condiciona el aprendizaje, en donde se incluyen recursos, materiales, modos de representar el contenido o ejemplos adecuados según el propósito que se persiga. El KMLS es no tan solo el conocimiento de los materiales y programas que son una herramienta para la labor docente del profesor de matemáticas, sino que los aspectos que tienen sentido sólo para el profesor de matemáticas; por ejemplo, niveles de capacidad de estudiantes para entender construir y saber matemáticas en un determinado momento escolar, lo que puede ser información extraída de fuentes de estudio o no.

El modelo no considera una visión del conocimiento como una partición del conocimiento en el profesor, sino que desde una investigación analítica, es que se pretende realizar una comprensión del conocimiento. En este sentido, es de interés las relaciones existentes que se den entre los subdominios. Algunas de ellas son documentadas en Carrillo et al. (2016), reflejando que el conocimiento del profesor de matemáticas es integral. Además, las creencias con ubicadas al centro del modelo para reflejar la naturalidad de éstas en las concepciones que poseen los profesores, o futuros profesores de matemáticas.

En este trabajo se asume cierta flexibilidad del modelo en cuanto al uso investigativo, en el sentido de que al querer comprender el conocimiento del futuro profesor de matemáticas con respecto a un concepto matemático y/o didáctico específico (por ejemplo modelación matemática), los dominios y subdominios son focalizados hacia éste desde una descripción basal, la que ha sido descrita.

# Capítulo 3
# La Investigación

La Modelación Matemática y su aprendizaje y enseñanza en todos los niveles escolares, ha sido un tópico que ha adquirido cada vez una mayor relevancia en los sistemas educativos tanto a nivel nacional como internacional. El uso que ha tenido la modelación en el aula ha sido desde una herramienta didáctica centrada en un objeto matemático, hasta ser el motor de una construcción social del conocimiento matemático, pero sin dudas, ha sido puesto en uso para que el aprendizaje sea desde los conocimientos próximos al estudiante, haciendo uso de su propio conocimiento. Desde esta parte de la investigación, la última frase alude a la traducción entre la realidad y las matemáticas

Grupos de investigación pertenecientes al ICMI, el grupo ICTMA o grupos principalmente latinoamericanos que adquieren visibilidad en RELME, son ejemplos de la comunidad científica que existe en torno a la modelación o modelación matemática. Desde tales comunidades, es que se han propuesto concepciones de modelación desde saberes sociales, culturales, cognitivos, matemáticos y/o didácticos, posicionando a la modelación matemática como un elemento puesto en uso en las prácticas docentes por todos los niveles escolares, y por lo tanto, una actual fuente de investigación. Tal situación, genera un trabajo sistémico que busca estudiar los estados del saber de modelación

matemática, en esta investigación, en la formación inicial de los profesores de matemática (FIPM).
Desde el marco conceptual trazado, es que existe la posibilidad de generar una propuesta que impacte en la formación inicial de profesores para la enseñanza de la modelación matemática. Esto, es construido desde la bibliografía utilizada por autores que también adquieren una sensibilidad en cómo hacer que los profesores de matemática aprendan de una manera amplia y profunda lo que es modelación matemática, cómo es utilizada en las tareas que demanda el curriculum nacional y la generación de reflexiones que apunten hacia la viabilidad de optimizar propuestas que generen más significados de los conocimientos matemáticos que los que comúnmente entrega una matemática escolar, logrando una amplitud conceptual en el conocimiento matemático que emerge desde la relación entre realidad y matemática.

## *3.1. Enseñanza de la Modelación Matemática*

Esta problemática ha sido abordada desde hace casi 30 años, aunque con distintos matices respecto a cómo afrontarla, en donde tales matices dependen del contexto teórico que use la persona que aborda la problemática. Me refiero específicamente a lo que se entienda por modelación matemática, modelación y aplicaciones, además respecto al *alma matter* de la persona que propone una postura referente a la problemática. Desde aquí, que las concepciones y ambientes en donde se practica la enseñanza de la modelación matemática son amplias.
Las instituciones formadoras de profesores de matemáticas, mantienen una vigilancia disciplinar en innovaciones y cambios educativos, específicamente, en cuanto a la existencia de prácticas de enseñanza para la modelación en sus estudiantes y su transposición en los futuros estudiantes de éstos.
Kapur (1982) describe en forma general su visión respecto a la “modelación matemática siendo [considerada como] un arte”, refiriéndose, en términos generales, a que la manera de estudio debe ser considerada fuera del método científico de la investigación, ya que casos de prácticas de modelación matemática en estudiantes no necesariamente cumplirán con principios como por ejemplo, la reproducibilidad (entendiendo la reproducibilidad como la capacidad de repetir un determinado experimento, en cualquier lugar y por cualquier persona). Específicamente, Kapur hace alusión a los siguientes puntos:

1. Debe ser aprendida y enseñada como un arte. Aludiendo a que la

pedagogía de la modelación matemática debe ser inspirada desde la pedagogía de las artes o de la música, las allá de la Química o Biología.

2. El estudio de exitosos modeladores matemáticos es de relevancia, por ejemplo a Newton, Maxwell, Pitágoras, Euler, La Grange, Liapunov, entre otros, ellos son una fuente de inspiración para el aprendizaje de la modelación matemática. Además, clarifica la necesidad de la época de generar un desarrollo científico por la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática.
3. Destaca la necesaria dedicación requerida para cultivar este arte, teniendo como motivación principal, el rol que juega la matemática en los problemas del mundo real. Sin embargo, clarifica que para el profesor en servicio o en formación, requiere que posea un conocimiento de la matemática alto, para que sea capaz de aplicar las matemáticas en problemas del mundo real. En este sentido, Kapur declara de forma implícita su visión sobre la modelación matemática, estableciendo un rol ejemplificador desde problemas reales, sin realzar un uso de la modelación matemática como un agente constructor de conocimiento; tal postura cobra sentido desde la visión de un matemático sobre la modelación matemática y la necesidad del objeto matemático preexistiendo a la práctica de modelación. Sin embargo, hay que destacar que tal investigación ya posee 35 años, permitiendo actualmente un desarrollo disciplinar desde otros científicos interesados en el tema.

De una manera alternativa, Cheng (2001) deja la responsabilidad del aprendizaje del profesor de la modelación matemática, a la experiencia que posea éste, ejemplificando que el alumno y el profesor aprenden al mismo tiempo. Esto no significa que no funcione, incluso, considero que la experiencia es clave para el desarrollo del conocimiento tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de la modelación matemática. Sin embargo, la no inclusión explícita en la formación inicial de profesores, permea los posibles resultados hacia su desvanecimiento, ya que lo experiencial es lo suficientemente subjetivo como para asumir cualquier caracterización sobre el aprendizaje de la modelación matemática, transformando las creencias en verdades, por lo que el conocimiento didáctico queda en un estatus no científico. Contrariamente, existe en otros casos, una inclusión explícita de actividades, seminarios o situaciones en donde los estudiantes desarrollan la modelación matemática en nivel superior. Esto, no ha sido documentado únicamente para profesores en formación, sino que también es posible encontrar literatura para futuros profesionales en las áreas de Bachillerato o Ingeniería (una fuente de información de esto, son los compendios ICTMA o ALME).

Blomhøj y Kjeldsen (2006) proponen seminarios dirigidos a profesores que ya son parte del sistema, mediante un proyecto de trabajo que deban tener repercusión en los establecimientos educacionales de donde son parte estos profesores participantes, mediante el modelo de competencias de modelación[8]. Esta propuesta, logra una dirección conjunta entre el profesor participante del seminario y el investigador, para los objetivos propuestos en los estudiantes de enseñanza media desde pequeños proyectos de modelación. Una de las ventajas que posee el trabajar con profesores del sistema, es que ellos tienen la posibilidad de poner a prueba los conocimientos que son tratados en el seminario, pudiendo obtener retroalimentación tanto de la experiencia como del seminario a posteriori.

Correa, Martín, Gómez, Mesa y Villa-Ochoa (2015), estudian un caso colombiano, refiriéndose a la construcción de modelos a partir de un enunciado que generalmente provienen de la matemática, con el fin de reforzar conceptos que provienen de los cursos de matemática (Lingefjärd, 2007); en este sentido, es que el modelar es dirigido desde lo intramatemático, focalizado hacia la profundidad matemática de un concepto, y no necesariamente a relaciones extramatemáticas, sino que una integridad entre conceptos matemáticos. Este estudio, evidencia la opacidad de la construcción del conocimiento matemático desde contextos extramatemáticos conocidos por la persona, existiendo una prevalencia sobre el conocimiento matemático ya institucionalizado, ejemplificado desde la realidad, pudiendo ser observado como una aplicación de las matemáticas. Además, ambas interpretaciones de la modelación no abordan la problemática situada en la formación de profesores, refiriéndonos a la preocupación por la enseñanza de la modelación en el quehacer del profesor.

Una ruta clara y directa para abordar la problemática antes expuesta, es mediante la introducción explícita de la modelación matemática en las estructuras curriculares, ya que la propuesta del ministerio de educación chileno es que la matemática es posible ser construida o ser aplicada cuando el estudiante usa y construye modelos a partir de la vida real. Por lo tanto, los profesores de matemática deben propiciar el desarrollo de este tipo tareas posicionados en el binomio enseñanza-aprendizaje. El profesor de matemática debe tener claridad en: qué puede ser

---

[8] En caso de querer profundizar en este modelo, se recomienda recurrir al trabajo de Blomhøj y Jensen (2006).

considerado como modelación matemática, abordaje de situaciones de modelación (resolución y reconocimiento de complejidades al modelar) y cómo se promueve la modelación desde un ambiente escolar (crear actividades, conocer qué competencias desarrolla y cómo las evalúa).

Las demandas del porqué es necesario generar una propuesta para la enseñanza de la modelación matemática para los profesores, tiene variados fundamentos, algunos que ya han quedado más explícitos que otros. Ellos son:

1. Competencias y Curriculum. Desde una visión constructivista de la educación, el modelo basado en competencias provoca el desarrollo teórico en todas las áreas de la enseñanza de la matemática. En este caso, la modelación matemática no es la excepción, debiendo el profesorado continuar con su desarrollo profesional para acaparar las exigencias que demanda el sistema educacional. Actualmente, el curriculum chileno considera el modelar como una habilidad, significando que los profesores y futuros profesores requieren conocimiento didácticos en cuanto al modelar: qué dificultades deben ser abordadas, qué significa modelar y cómo resolver y construir tareas de modelación.
2. Significados de la matemática desde la experiencia. Las tareas de modelación matemática, repercuten en los significados que pueden adquirir los conceptos matemáticos desde la conexión entre el conocimiento de la realidad que posee el estudiante y el conocimiento matemático. Esto genera otros significados, lo que posibilita el replanteamiento del discurso educativo de la matemática, para así, desarrollar el enriquecimiento del conocimiento didáctico y disciplinar (matemático) para el profesor y el estudiante.
3. Amplitud y profundización. Actualmente, el desarrollo didáctico de la modelación matemática en Latinoamérica y en el mundo es incipiente, con resultados y documentación científica que requiere que impacte en los sistemas educacionales. Para ello, la inclusión implícita es en parte efectiva, aunque pueden existir mayores esfuerzos, estableciendo una necesidad para ampliar el conocimiento que no quede en un estatus de creencias, sino que exista un conocimiento científico que respalde prácticas del docente que promuevan la enseñanza de la modelación matemática. Esto, significa que existirá una amplitud y una profundización en el conocimiento disciplinar de la Didáctica de la Matemática en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la modelación, que mediante un marco conceptual es posible de

sintetizar para la generación de una propuesta pensada en el futuro profesor, que se integre con el conocimiento teórico y práctico.

4. Construcción de conocimiento. La construcción teórica del conocimiento (matemático y no matemático) tiene un factor común, y es que cada desarrollo es mediante la construcción de uno o más modelos, que pretenden representar mediante posicionamientos filosóficos, ontológicos y culturales una situación o un fenómeno determinado. Esta característica es natural del aspecto epistemológico del desarrollo científico. Sin embargo, este *fenómeno* no puede ser confundido al momento de transponerlo hacia un paradigma de enseñanza, es decir, no se puede pretender tratar a todas las personas como científicos, y por lo tanto que deban hacer uso de un lenguaje y un método que es próximo a una comunidad específica –por ejemplo matemáticos y el método bourbakiano- (en este sentido, Blum (2002) caracteriza este error en el paradigma de la enseñanza de la matemática). Este fenómeno debe ser observado como una práctica natural del humano al construir conocimiento tanto mediante cánones de conocimiento estandarizados como otros; por lo tanto, al querer promover el aprendizaje de la matemática en niveles medios, el profesor requiere que la construcción de modelos no deba ser normado por el rigor del lenguaje matemático o su logicismo (entendiéndose como aplicar métodos de la lógica en dominios que no necesariamente le son propios), sino que lo que norma es el conocimiento que genera la situación de modelación matemática (la tarea) y las características que sean capaces de percibir por el estudiante para que aprenda conocimiento matemático. Este conocimiento se nutre de un lenguaje y otros conocimientos (conocimiento extramatemático) que el estudiante acuña para la obtención de un modelo, el que será un modelo matemático (en términos de Blum) al reconocer o hacer uso de ciertos objetos matemáticos en la situación (o específicamente del modelo real).

   Este cambio de paradigma en la visión sobre cómo es visualizado el aprendizaje de la matemática, no puede ser trivializado como para no hacerlo explícito en la formación de profesores de matemáticas. Requiere de un tratamiento que relaciona lo teórico y lo práctico, para que el futuro profesor adquiera una postura desde una propuesta que pretenda no sólo una nueva visión paradigmática sobre cómo es la enseñanza de la matemáticas, sino cómo la modelación matemática es capaz de construir conocimiento matemático.

### 3.2. El caso

En el curriculum escolar chileno, ha sido prominente una aproximación del modelar como una habilidad que permite la comprensión del conocimiento y diversas situaciones en las que los estudiantes se ven expuestos (MINEDUC, 2016b), ligado más bien al "saber hacer" para la integración del conocimiento en situaciones conocidas por el estudiante, en su realidad. El Ministerio de Educación de Chile, recomienda que las estrategias de enseñanza estén centradas en el aprendizaje para el desarrollo de habilidades, como es el modelar. Esto implica crear una visión más cercana al corazón de PISA, Mathematical Literacy (OECD, 2013), entendiendo el uso de la matemática en un contexto cercano al estudiante.

Un planteamiento respecto al tratamiento del curriculum es mediante los *estándares* pedagógicos y estándares disciplinares. MINEDUC define lo que es un estándar pedagógico como "los conocimientos, habilidades y actitudes profesionales necesarias para el desarrollo del proceso de enseñanza, que debe poseer un egresado de pedagogía" (2012, p.31). Es decir, son estándares que pretenden ser abordados por todas las escuelas de formación de profesores del país, sin diferencia disciplinar y por ende, separados del conocimiento específico, un paradigma que genera suficiente tensión desde el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática, ya que parte de las problemáticas académicas del profesor de matemáticas, son de una naturaleza más bien epistemológica del conocimiento matemático, más allá del conocimiento pedagógico (sin desmerecer su relevancia en la formación). Con respecto al conocimiento específico del profesor de matemáticas, el curriculum chileno propone los estándares disciplinares, los que adquieren una organización en dos dimensiones, primero en términos de áreas temáticas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar; y una segunda dimensión asociada al funcionamiento sistémico y transversal de tales temas, mediante el desarrollo de habilidades, siendo una de ellas el modelar. Esto indica que en todos los tópicos y en todos los niveles es posible modelar, la que es descrita como "una habilidad que permite resolver problemas reales mediante la construcción de modelos, que pueden ser físicos, computacionales o simbólicos, y que sirven para poner a prueba el objeto real y ver cómo responde frente a diferentes factores o variantes" (MINEDUC, 2016b, p.38).

Con respecto a la formación del profesor de matemáticas en Chile, lo general, es que deba cursar una preparación de 9 a 10 semestres, teniendo prácticas en colegios en distintos momentos (dependiendo de la escuela de formación la extensión de la carrera y la inclusión de las prácticas) y quedando titulado y certificado para ejercer su profesión. Actualmente, existe una prueba que se rinde el modelo para la enseñanza de la modelación de Borromeo-Ferri (2014) (ver figura 20). Tal propuesta teórica, es un resultado que considera las competencias requeridas por un profesor de matemáticas, el que ha sido puesto en uso para formación inicial y formación continua de profesores de matemática (Borromeo-Ferri y Blum, 2010) y permanece en un constante refinamiento según el contexto social en donde se han realizado las investigaciones y ajustes metodológicos, teniendo lugar principalmente en Alemania en el marco de cursos y seminarios (Borromeo-Ferri, 2014). Se espera del modelo que aporte para evidenciar una adecuada o efectiva enseñanza de la modelación en clases y cómo es posible aportar en la formación inicial del profesor de matemática respecto a la enseñanza y aprendizaje de la modelación.

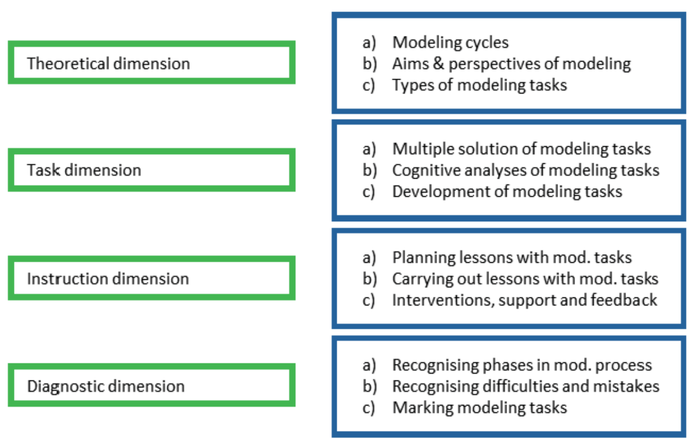



*Figura 20*. Modelo para la enseñanza de la modelación matemática de Borromeo-Ferri (2014).

A continuación, se describirán brevemente las dimensiones de este modelo en el sentido de Borromeo-Ferri (2014).

- Dimensión teórica. Es focalizado en la pregunta "¿Qué entiendes por modelación matemática?" y cómo es interpretada internacionalmente mediante a) ciclos de modelación; b) objetivos y perspectivas de modelación; y c) tipos de tareas de modelación.

Toda esta dimensión requiere que sea aprendida por el profesor o futuro profesor en la práctica, clarificando que no es suficiente el recorrido teórico de los tópicos.

- Dimensión de tarea. Se focaliza en el trabajo y discusión con los profesores sobre los criterios de las tareas de modelación: ¿qué es una buena tarea de modelación?; desde una descripción desde lo cognitivo, es que se caracteriza qué pretende hacer una tarea específica de modelación, pudiendo reconocer fases en el proceso y permitiendo crear tareas de modelación en grupos.
- Dimensión de instrucción. El foco es la planificación de clases, en donde el profesor o futuro profesor crea y presenta una tarea de modelación en la escuela y reflexiona frente a ella. A partir de esta situación, es que se genera un equilibrio entre teoría y práctica en la enseñanza de la modelación.
- Dimensión diagnóstica. Se focaliza en la habilidad del profesor en reconocer las dificultades y errores durante el proceso de modelación, obteniendo el conocimiento para la generación de instrumentos evaluativos respecto a la modelación.

Este modelo para la enseñanza de la modelación, se mantiene en un proceso de revisión, principalmente respecto a aspectos psicométricos, el que ha ido evolucionando a partir de su aplicación en distintos ambientes, lo que refleja un permanente perfeccionamiento del modelo. Sin embargo, la contextualización del modelo según donde se ha aplicado genera variantes que son consideradas necesarias para este trabajo, tanto en el ordenamiento de la planificación, como en la inclusión de momentos requeridos para el aprendizaje de la modelación matemática en el aula con futuros profesores, lo cual emana desde una visión institucional del profesor de matemáticas, lo requerido por éste en el sistema educacional donde ejerza y por supuesto, una demanda curricular; concluyendo que no es tan razonable un modelo general, cosmopolita culturalmente hablando, que pretenda el mejor resultado. Por lo mismo, la variación realizada en esta investigación ha sido permeada por las variables descritas anteriormente, aunque no significa que se haya desechado el modelo original, todo lo contrario, fue una fuente de inspiración, tanto para la planificación teórica como práctica, llegando a que la propuesta de esta investigación aborde de forma íntegra todos los conceptos teóricos que propone éste desde una postura alternativa, latinoamericana y con problemáticas de distinta naturaleza.

En la investigación, los constructos teóricos-didácticos tienen principalmente dos focos. El primero, es el conocimiento disciplinar de la modelación matemática que ha sido usado para la planificación en un curso de formación inicial, el que ha sido descrito en el capítulo dos. Principalmente, es cimentado desde una concepción de modelación matemática en el sentido de Blum (Blum, 2002; Blum et al., 1991), profundización del ciclo de Blum desde una visión cognitiva (Borromeo-Ferri, 2006, 2010), tipificación de tareas desde perspectivas de modelación (Kaiser et al., 2006) y elementos evaluativos a partir de Competencias de Modelación (Blum et al., 1997; Maaß, 2006). De esta manera, el participante del curso tiene una visión sobre el significado de modelar, descripción cognitiva de las tareas de modelación desde el estudiante, posibilidades de ampliar objetivos de aprendizaje y herramientas sobre el cómo evaluar las tareas de modelación. El diseño de los elementos teóricos de la experimentación del marco es el modelo de competencias requeridas para la enseñanza de la modelación (Borromeo-Ferri, 2014), aunque con variaciones en la experimentación documentada por Borromeo-Ferri et al. (2010).

### 3.3. El curso de modelación

Los objetivos del curso propuesto son los siguientes:

- Educar a los futuros profesores de matemáticas sobre el conocimiento de la modelación matemática para sus futuras prácticas docentes.
- Reflexionar y crear prácticas didácticas sobre cómo el uso del conocimiento matemático es aprendido vía modelación matemática.

La planificación teórica, acapara 4 grandes dimensiones. Dos desde el conocimiento, emanado desde creencias y concepciones teóricas y experienciales; y otras dos dimensiones desde las acciones del estudiante, estableciendo la necesidad en el estudiante del “saber hacer”. Tales dimensiones son distribuidas en 14 sesiones de 90 minutos semanalmente y son retroalimentadas constantemente a través del curso, algunas de ellas están en constante uso en cada sesión, pero adquiere el estatus de dimensión en la planificación porque se explicita un tratamiento más allá del implícito. Las dimensiones son:

- D1: Creencias y concepciones de la modelación matemática. Considera el conocimiento que posee el estudiante relativo a la modelación matemática desde su formación antes de la propuesta así como lo que dicta el currículo nacional. Principalmente formado por las creencias y concepciones de lo que es modelación matemática, sus usos e implicaciones tanto en la vida cotidiana, como en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tales conocimientos evolucionan constantemente a través de las sesiones ya sea por prácticas directas o indirectas del curso.

- D2: Elementos de la investigación en modelación matemática. Conocimiento desde el marco teórico presentado. Principalmente referido al ciclo de modelación de Blum, visión epistemológica del ciclo de modelación (Pollak, 1979), visión cognitiva del ciclo de modelación matemática (Borromeo-Ferri, 2006), perspectivas de modelación (Kaiser et al., 2006), competencias de modelación (Maaß, 2006) y evaluación en modelación (Borromeo-Ferri et al., 2010).
- D3: Resolución de tareas de modelación matemática. Confrontación y análisis de tareas de modelación provenientes investigaciones atinentes y de la producción del grupo de investigación MyT-IMA (Borromeo-Ferri et al., 2009; Borromeo-Ferri, 2006; Mena, Mena, Montoya, Morales, Parraguez, 2015; Guerrero-Ortiz, Mena-Lorca, 2015; Huincahue, Morales y Mena-Lorca, 2015; Huincahue, 2015, entre otros), siendo el grupo de expertos MyT considerados para la ejecución de criterio de validación científica de las tareas propuestas.
- D4: Creación de tareas de modelación. Instancia para que los estudiantes propongan situaciones de modelación que puedan ser analizadas y puestas en práctica desde cierto objetivo; además, es una ruta para evaluar conceptos vistos en el curso, generar un enriquecimiento teórico de las tareas y su perfeccionamiento frente a la interacción intra e intergrupal.

Las dos primeras dimensiones pretenden ser confrontadas y complementadas, de tal manera que el conocimiento que trae el estudiante actúe como puente para el conocimiento que aprenda el estudiante al finalizar el curso. Las otras dos dimensiones son incorporadas, al establecer como desarrollo del aprendizaje del conocimiento del curso la resolución de tareas de modelación (el estudiante como estudiante) y su creación (el estudiante como profesor).

### 3.3.1 El rol del participante en el curso

El tratamiento de las cuatro dimensiones es de forma transversal en la planificación, es decir, el análisis de la implementación piloto de cada sesión, ajusta tanto el protagonismo de cada dimensión puesta en escena como la forma a implementar hacia los sujetos informantes, con el fin de facilitar el tránsito y reflexión hacia las prácticas de modelación. De esta forma, los estudiantes desarrollan primeramente competencias de modelación y posteriormente son enfrentados a la pregunta de cómo desarrollar en sus futuros estudiantes las competencias de modelación, nuevamente los roles como estudiante y como profesor son puestos en uso.

Cuando el estudiante adquiere el rol de estudiante, la modelación es un conocimiento de la práctica de un matemático con su quehacer, por lo que el estudiante resuelve tareas de modelación, reconoce tipos de resolución y fenómenos o situaciones que una persona realiza, por ejemplo, uso de estrategias heurísticas, matematización de las tareas, resolución, interpretación y validación. El estudiante desde el rol de profesor, el conocimiento de la modelación es un conocimiento para la práctica pedagógica y didáctica, por lo que se replica en todo lo relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas vía modelación.

Las preguntas que guiarán nuestra investigación serán: ¿Cuáles son los alcances de los instrumentos utilizados en la experimentación para propiciar prácticas de enseñanza de modelación matemática en el aula?, ¿Cómo evoluciona el conocimiento de la enseñanza de la modelación desde ciclos reflexivos a lo largo de un curso de FIPM?. Para esto, se propone estudiar una forma concreta de plantear la modelación matemática en la formación inicial docente mediante un curso para estudiantes de Pedagogía en Matemáticas, cuyo objetivo es desarrollar la reflexión y el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación.

## 3.4. La experiencia

Esta investigación propone para el estudio del conocimiento el Análisis Cualitativo del Contenido (Varguillas, 2006) para establecer una descripción del conocimiento de la modelación y de su enseñanza según el caso elegido en el transcurso de la experimentación. Al estar interesado en la descripción y comprensión del conocimiento de la modelación y las experiencias en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, se ha seleccionado un estudio de corte cualitativo para su pesquisa.

El curso es dirigido a estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, programado desde el marco teórico de modelación matemática (Borromeo-Ferri, 2014) con las modificaciones de las dimensiones antes descritas, indagación del objeto matemático como centro de la construcción del conocimiento para su respectivo aprendizaje, y finalmente, elementos de teorías asociadas a la Didáctica de la Matemática. Los datos son recopilados de forma individual, indagando las reflexiones de los estudiantes y concepciones en cuanto a la práctica, su enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática, tanto en el rol de estudiante como de futuro profesor.

La propuesta tuvo un pilotaje sesión a sesión con estudiantes de Pedagogía en Matemáticas de otra universidad chilena, manteniendo diferencia de una semana entre el pilotaje y la experimentación, logrando establecer ajustes a la planificación y reformulaciones sobre las prácticas a realizar didácticamente, los cuales fueron menores según la planificación original.

El acceso a la información de la pesquisa es de naturaleza audiovisual y documentaria. Se toman datos de campo en cada sesión, focalizados principalmente en las ideas que emergen de los estudiantes con respecto a los tópicos abordados en el curso, de tal manera de comprender cómo el conocimiento teórico es entendido para poner en práctica y también, cómo ciertas prácticas son reconocidas en elementos teóricos. Además, se solicita a los estudiantes que registren sus reflexiones de manera semanal, para lograr una descripción evolutiva de la comprensión del conocimiento que es producido. Asimismo, con el fin de evidenciar el conocimiento de los estudiantes propuesto por el curso, se realiza un trabajo experimental con elementos indagatorios e investigativos, planificando una tarea de modelación que emerge de la creación o de la modificación de alguna propuesta e el currículum nacional, experimentarla en un aula del sistema educacional y reportar dando uso al conocimiento dispuesto por el curso.

La experimentación es realizada en la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación en una universidad pública y estatal de Chile, entre los meses de marzo y julio del año 2015. Existieron 13 participantes del séptimo semestre, de un total de la carrera de nueve semestres. Paralelamente, los estudiantes del curso realizaban su práctica profesional, cada uno en distintos colegios del sistema educacional, significando que semanalmente asisten como veedores y/o practicantes en un ambiente que ha sido utilizado como laboratorio para las experimentaciones creadas según las prácticas y conocimientos desarrollados en el curso, además de observar comparativamente el sistema educativo. Esto responde al carácter bivalente del profesor de matemáticas como profesional, ya que tal competencia es desarrollada desde elementos teóricos y prácticos (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001).

El curso en donde fue pilotada la propuesta, son estudiantes de tercer semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, los que realizaban paralelamente una práctica profesional de observación.

Los datos a pesquisar son 4:1) Diario de Reflexión (DR). Un instrumento virtual, en donde el estudiante debe evidenciar su conocimiento de los temas tratados en clase. Tanto el estudiante como el profesor pueden visualizar y editar las reflexiones, en donde la función del profesor es incitar que el estudiante forme el ciclo reflexivo (Mcduffie, 2004) en base a preguntas al estudiante o puntos de discusión de la reflexión. En este no se espera que el estudiante escriba un resumen del conocimiento desarrollado en las actividades presenciales sino que las reflexiones del estudiante hayan tenido su génesis en las problemáticas o en las ideas desarrolladas en el curso. El rol del profesor en tal instrumento no es hacer un juicio de valor sobre las reflexiones, sino generar lineamientos hacia qué tipo de preguntas o problemáticas el estudiante puede abordar en sus próximas reflexiones mediante la devolución de preguntas y/o sugerencias. Es un documento que se solicita al estudiante que desarrolle al menos una vez entre sesiones. 2) Reporte de Investigación (RI). Se trata de un instrumento a través del cual el estudiante construye y perfecciona una propuesta didáctica preliminar que articule los conocimientos de la modelación matemática tratados en el curso, experimente en el aula y analice esta como tal. Se solicita realizar el reporte en instancias finales, según planificación. El reporte es centrado en un objeto matemático tratado en el currículo escolar chileno abordado mediante un proceso de modelación matemática, y en esta propuesta se deben identificar las competencias de modelación en la experimentación de éste en un ambiente real. 3) Portafolio (PO). Instrumento en donde el estudiante documenta y reflexiona las actividades realizadas en el curso, considerando además, la resolución y creación de tareas de modelación matemática realizadas en todas las sesiones. 4) Entrevista individual (EI). El caso elegido, Diego, fue entrevistado cuando el curso ya había terminado. Mediante una entrevista semiestructurada, se plantean preguntas sobre la relevancia de la modelación para un profesor de matemáticas, el uso que haría de ella y los conocimientos que pone en juego un profesor en aula cuando se ponen en práctica tareas de modelación. La EI fue transcrita y utilizada como documento a analizar.

Todas estas actividades pedagógicas quedan articuladas a través de un ordenamiento teórico, que privilegia lo didáctico en la propuesta a través de las dimensiones teóricas que esta investigación ha definido. Es detalle del tratamiento de las dimensiones es mapeado en la figura 21:

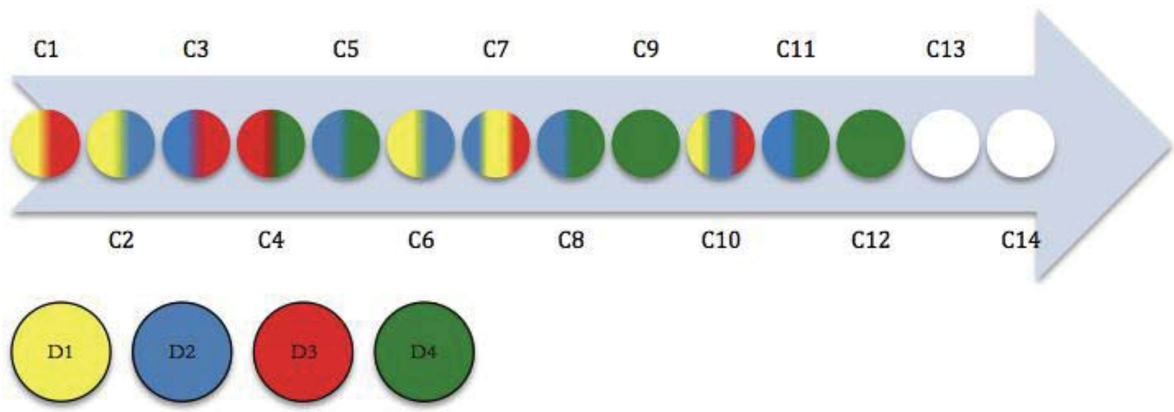



*Figura 21.* Plan teórico-dimensional del clase a clase de la propuesta.

Cabe recalcar que el trazado de la figura 21 no adquiere una forma rígida en su práctica, sino que es una propuesta inicial para la experimentación, ya que al entender cada dimensión, no es fácil abordar de cierta manera las cuatro en cada sesión. Por lo tanto, el trazado refleja el foco inicial en términos de planificación, pudiendo verse afectado en duración o inclusión de otras dimensiones no estipuladas previamente. Desde la figura 21, se observa que las últimas dos clases no han sido definidas por alguna dimensión, ya que en la C13 es el momento de la presentación de los RI, lo que conlleva a tener una visión transversal en las cuatro dimensiones. De forma análoga, la C14 es el momento del Focus Group, espacio en donde se sintetizan las reflexiones y los centros del cuestionamiento en torno a la modelación matemática y el curriculum escolar de Chile cuando trata el modelar como una habilidad.

Una esquematización de cada sesión es descrito en la tabla 1:

| | T | Planificación | Estrategia |
|---|---|---|---|
| C1 | 10' | Presentación del seminario. Procesos evaluativos. El estudiante como agente crítico del conocimiento. | Expositiva |
| | 40' | La Matemática como una disciplina no estática. ¿Qué es el 1? ¿Cuál es la matemática del matemático, del profesor, del estudiante, del cotidiano? Tipos de realidades en el proceso de ella. | Conversatorio |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 25' | Resolver una tarea de modelación: El ula-ula. *“Imagina que un “ula-ula”, además de jugar con él, puede ser el anillo de un gigante… ¿cuál es el número que calza de zapato el gigante?”* | Trabajo grupal |
| C2 | 25' | Creencias desde la enseñanza de las Matemáticas: ¿Considero el gusto por la matemática del estudiante? ¿Las matemáticas son difíciles? Concepciones de lo que se entiende por modelación matemática desde: el curriculum nacional, OCDE, RAE, Blum & Borromeo (2009). | Exposición – discusión |
| | 10' | Muestra de ejemplos de Modelación Matemática. “Las mañanas matemáticas” (Blomhøj, 2009). Opiniones y dimensionalización de la conducción del aprendizaje en Matemáticas. | Conversatorio y trabajo grupal |
| | 40' | Ciclos de modelación desde la literatura. Descripción general, críticas, similitudes y diferencias en y entre los ciclos: Pollak (1979); Blum & Leiss (1995); OCDE (2001); Doerr & Lesh (2002); Blum & Leiss (2007); Blomhøj (2009); Rodríguez (2008). Blum & Borromeo (2010). | Trabajo grupal. Grupos de 4 o 5 personas |
| C3 | 25' | Descripción específica del ciclo de modelación Blum & Borromeo (2010). Visión cognitiva del proceso de modelación. | Exposición-discusión |
| | 30' | Se presenta a realizar el problema del faro (Borromeo, 2006). | Trabajo individual |
| | 20' | Muestra de resultados y opiniones de los estudiantes sobre el proceso de modelación que realizó. | Conversatorio |
| C4 | 50' | El perro de la compañía. *“Una compañía de 400 soldados está lista para marchar. Forman un cuadrado de 20 metros por 20 metros, y tienen por mascota un perro, que está con ellos justo en el centro de la primera fila. La compañía empieza la marcha, con una velocidad constante y la mascota empieza al mismo tiempo a marchar siguiendo el perímetro de la compañía en el sentido de las agujas del reloj, también a una velocidad constante. El perro ha sido entrenado (muy bien entrenado, aclaro) de tal forma que cuando la compañía avanza 20 metros, él recorre el perímetro completo de la compañía y vuelve a su posición del centro de la primera fila. Los soldados han avanzado 20 metros pero… ¿qué distancia ha recorrido el perro? ¿cuál es la trayectoria que sigue el perro?”* | Trabajo grupal. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 25' | Resultados y exposición de representaciones del desarrollo de la tarea al curso. Análisis según los Estilos de Pensamiento Matemático. | Conversatorio |
| C5 | 40’ | Introducción a las perspectivas de modelación matemática desde Kaiser & Sriraman (2006). Tipos, similitudes y diferencias. Consideraciones sobre posibles usos desde la docencia e investigación. | Exposición – discusión |
| | 35’ | Creación de tareas de modelación desde las perspectivas de modelación. Se les envía de tarea que realicen la siguiente tarea de modelación: *“La actual discusión de la ANFP es cuál es el campeonato para los siguientes años en el fútbol chileno. ¿Qué tipo de campeonato nacional de fútbol generaría mayores recursos?”* | Trabajo grupal. |
| C6 | 30’ | Identificación de elementos que debe tener una buena tarea de modelación matemática. | Mesa redonda |
| | 40’ | Ajustes a la tarea de modelación creada la sesión anterior; identificación teórica del proceso de modelación Blum et al. (2007) y perspectivas de modelación (Kaiser, 2005). | Trabajo grupal. |
| | 5’ | Síntesis de los elementos necesarios de una tarea de modelación. | Conversatorio |
| C7 | 45’ | Currículum chileno. Síntesis de las bases curriculares y el estado de la Modelación Matemática en ella. | Exposición – discusión. |
| | 30’ | Opiniones referente al currículum, uso del currículum. | Mesa redonda |
| C8 | 45' | Competencias de Modelación Matemática (Mass, 2006). Descripción, significado e impacto en el currículum. Relación con el ciclo de modelación de Blum et al. (2007). | Exposición - discusión |
| | 30' | Ejemplo de la casa del perro. "*Me han regalado un perro de mascota!, mide alrededor de 40 cms. Cuando está en sus 4 patas y pesa como 10 kilos, pero para construirle una casa de madera, necesito saber cuál es la dimensión de la hoja/plancha de madera que debo comprar. ¿Cuáles son las medidas?*" | Grupal |
| C9 | 40' | Creación de tareas de modelación desde las competencias de modelación. Identificar cómo fomentar las competencias ligadas al proceso de modelación desde una tarea. | Trabajo grupal |
| | 35' | Reporte de los resultados al seminario | Exposición - discusión |

| | | | |
|---|---|---|---|
| C10 | 25’ | Tipos de intervención del profesor cuando los estudiantes realizan tareas de modelación (Blum et al., 2009). | Exposición – discusión. |
| | 40’ | Uso de tareas creadas: Un grupo aleatorio presenta su última tarea realizada a los demás, considerando los tipos de intervención del profesor. | Trabajo grupal. |
| | 10’ | Síntesis de los elementos necesarios de una tarea de modelación. | Exposición – discusión. |
| C11 | 40' | Necesidad de la evaluación. Evaluación de tareas en Modelación Matemática desde Niss (2004) | Exposición – discusión. |
| | 35' | Propuesta de evaluación desde el proceso de modelación y competencias. | Trabajo grupal |
| C12 | 75' | Apoyo en su trabajo de investigación: Retroalimentación sobre propuesta, elementos de la microingeniería didáctica, análisis de datos, inferencias y conclusiones. | Trabajo individual y grupal |
| C13 | 75' | Exposición y entrega de reporte del trabajo de investigación. | Exposición - discusión. |
| C14 | 75' | Focus group. | Conversatorio |

*Tabla 1.* Planificación propuesta de modelación para la formación inicial del profesor.

Cabe mencionar, que con el fin de clarificar y posicionar el rol del profesor al momento de que el estudiante realiza una tarea de modelación, se acuñan principios del Aprendizaje Colaborativo, con la idea de que el profesor permita al estudiante realizar la propuesta de la forma más autónoma posible, ayudando al estudiante a hacerlo por sí mismo.

El curso propuesto, también considera un proceso evaluativo de sus participantes, el que fue significativo para el establecimiento de los resultados, ya que ha funcionado como un impulso para el saber que se pretende gestionar y los intereses que la investigación poseía y cómo los estudiantes debían explicitarlo. Este procedimiento es detallado en la tabla 2:

| | | |
|---|---|---|
| Diario de reflexión | 45% | Documento virtual, en donde solo el estudiante y el profesor tienen acceso. En él, debe poner en evidencia su posicionamiento conceptual de los tópicos tratados en clases. No se espera que sea un resumen de las clases, sino de elementos significativos para el estudiante que han surgido en las clases. Tiene 6 revisiones durante todo el seminario. La rúbrica de evaluación final es dada en el anexo 1a. |
| Portafolio | 20% | Cada grupo de trabajo deberá crear un portafolio, el que evidenciará la reflexión, evolución y logros adquiridos de manera grupal. El portafolio tuvo 2 calificaciones durante el semestre. |
| Actividades | 10% | Existirán actividades individuales y grupales a través del seminario del tipo: resolución de tareas de modelación, ensayos, confección de tareas desde ciertos elementos conceptuales, uso de la microingeniería didáctica en propuesta de tareas, etc. |
| Trabajo de investigación | 10% | Cada grupo de estudiante debe crear una tarea de modelación desde un objetivo determinado por ellos. Esta tarea debe ser presentada primero en el seminario para ser retroalimentada por sus pares y el profesor guía. La actividad será puesta en práctica en un colegio en donde alguno de los estudiantes esté realizando su práctica profesional. Finalmente, cada grupo realizará un reporte (anexo 1b) asociado a su investigación, cuyos resultados serán expuestos frente al seminario. |
| Prueba global | 15% | Todos los contenidos. |

*Tabla 2*. Proceso evaluativo puesto en práctica en el seminario de modelación

El proceso de evaluación del Diario de Reflexión se entiende bajo una rúbrica dinámica, en donde en el transcurso de las 4 primeras semanas del seminarios, se les solicitó a los estudiantes que reflexionaran sobre algún tema -no especificado por el investigador- tratado en las clases, ya sea por el profesor o por sus pares, que haya sido discutido en clases y que sea del interés personal del estudiante. Tal actividad proviene de fomentar la autonomía conceptual, coherencia didáctica y pedagógica y propuestas de innovación de sus ideas, permitiendo una suficiente libertad para profundizar en los temas de interés de cada uno de ellos. En los procesos de revisión existe un constante lineamiento hacia lo que es la rúbrica final del seminario (Anexo 2a), la cual fue utilizada después de la sesión 4 (quedando cuatro evaluaciones). En la rúbrica final, se les evalúa a los estudiantes reflexiones complementadas con documentos científicos y que la innovación fuera una característica en sus escritos, tanto sobre diseños de aprendizaje, opiniones teóricas, prácticas docentes, entre otros. Se asumió un dinamismo en la rúbrica por la inexperiencia de los estudiantes para reflexionar, ya que son muy pocas las instancias que se les solicita hacerlo en las asignaturas que conforman su formación inicial. Además, el estudiante se empodera progresivamente del uso del Diario de Reflexión, ya que existe una confianza mayor al escribir, existen cambios de creencias que son reflejadas en el diario y posturas hacia la construcción de su propio conocimiento.

El Portafolio contiene la resolución de todas las actividades que son solicitadas en el transcurso del seminario, junto con las reflexiones que se han podido consensuar en el grupo de trabajo. Un fin del portafolio es la recopilación de información para su futura labor docente para destacar logros y errores que tengan los estudiantes. En éste, existen procesos coevaluativos y autoevaluativos, esperando reflejar el trabajo colaborativo existente al construirlo.

Las actividades son dadas en las clases, consistiendo en tareas o ensayos a realizar dentro o fuera del horario de seminario, dependiendo de la importancia de la tarea según la planificación realizada. Una tarea que los estudiantes debieron realizar muchas veces fue la resolución de tareas de modelación matemática, considerando una mejor evaluación la riqueza en las múltiples maneras de resolver las tareas (lo que es explicitado en las instrucciones de las tareas), fomentando las competencias de modelación propias del futuro profesor desde sus capacidades, para posteriormente generar mayor cantidad de visualizaciones de desarrollo de cada una de las tareas que ellos deberán dirigir en sus futuras prácticas (análisis a priori). En total, existieron 8 actividades ponderadas igualitariamente, siendo 4 de ellas, resolución de tareas de modelación[9].

El Trabajo de Investigación, consiste en la elaboración de una tarea de modelación, usando gran parte de los fundamentos teóricos tratados en el seminario, buscando evidenciar: 1) una actitud crítica con respecto a la práctica docente presente en las aulas chilenas; 2) La manipulación de herramientas teóricas que abordan problemáticas educacionales en Modelación Matemática; refiriéndose a la capacidad de fomentar competencias de Modelación Matemática en su propuesta de innovación y reconocer elementos basales en la realización de tareas; y 3) innovación en las tareas de modelación creadas.

La Prueba Global considera elementos teóricos y prácticos en similar proporción cada uno.

### *3.5. Análisis y Resultados*

Ahora veremos cuáles son los alcances de los instrumentos utilizados en la experimentación para propiciar prácticas de enseñanza de modelación matemática y haremos un análisis de ellos para ver cómo evoluciona el conocimiento de la enseñanza de la modelación desde ciclos reflexivos a lo largo de un curso de FIPM.

El proceso es combinado con el software ATLAS.ti para el favorecimiento de la práctica analítica del proceso. Se han codificado el DR, el PO y el RI, logrando la identificación de los ciclos reflexivos, para a continuación realizar una codificación específica con un dinamismo recursivo en todos los datos respecto a los dominios y subdominios del modelo MTSK, siendo éste utilizado como modelo conceptual del análisis (Noguero, 2002). Esto, permite trazar para cada estudiante (en particular para Diego), qué dominios o subdominios fueron reconocidos y cómo fue la evolución del conocimiento de la enseñanza de la modelación en el DR según lo ofrecido por la experiencia. Es lo que Noguero (2002) denomina un “análisis externo” (p. 172), es decir, el análisis de los documentos en un contexto específico (en este caso el curso propuesto) que permita su explicación. En general, todos los estudiantes tuvieron una evolución significativa; esta se manifestó inicialmente en Portafolio y posteriormente (y con mayor fuerza) en el RI, destacándose el caso de Diego.

[9] En la planificación clase a clase, es posible saber qué tareas fueron resueltas en las sesiones de la propuesta.

Diego, en el RI, utiliza la tarea que ha modificado desde Mineduc (2012b) para explicar el ciclo de modelación de Blum et al. (2006), mostrando las implicancias del ciclo de modelación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destacando las demandas curriculares y visiones sobre su utilización en distintos niveles escolares del sistema educacional chileno: "... además, el problema podría ser abordado en diferentes cursos, modificando las preguntas y exigiendo diferentes cosas a los alumnos... " (Diego). Lo anterior, corresponde a la categoría "secuenciación con temas anteriores y posteriores" del subdominio KMLS[10].

En el RI es reportada la siguiente tarea de modelación (recuadro 1):

Las preguntas 1 y 2 del recuadro, evidencian una actividad tradicional en el quehacer matemático, como es el generalizar a partir de casos particulares, identificando como la categoría "jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos" del subdominio KPM del dominio MK. Sin duda, la secuencia de preguntas 1 a 6, es una planificación didáctica que guía al estudiante a enfrentar una situación que aumenta paulatinamente en su complejidad, identificado en la categoría "formas de interacción con un contenido matemático", en este caso, el modelo visto como objeto matemático (subdominio KFLM del dominio PCK). El recuadro en su forma íntegra nos dice que la modelación es un recurso que utiliza Diego para la construcción del conocimiento matemático.

Diego afirma en su implementación (rol de profesor) que "un elemento clave para fomentar el acercamiento entre el mundo matemático y el mundo real fueron los cubos de madera utilizados". Es decir, los cubos de madera se transforman en recursos materiales que como registro de representación, son utilizados simbólicamente para la práctica matemática, fomentando la construcción del modelo perseguido según los objetivos de aprendizaje, reconocido en los subdominios KMT, KoT y KPM respectivamente.

Una constructora tiene un diseño para un tipo de edificio, en el cual cada piso, al mirarlo desde arriba, tiene forma cuadrada y en cada pared hay un gran ventanal, para que los trabajadores cuenten con la iluminación natural apropiada. Además, en el diseño se incluye que en el último piso, al mismo tiempo de los cuatro ventanales, se coloque un tragaluz,

[10] Ningún otro estudiante presentó una situación didáctica adaptable a distintos niveles. En general lo trabajado fueron adaptaciones de situaciones presentadas en el curso o que se encuentran en la literatura.

para dar una sensación de amplitud a quienes allí trabajen. Dado que la constructora tiene diferentes demandas, debe tener una forma rápida de calcular cuántos ventanales debe mandar a fabricar según la cantidad de pisos que sus clientes le exijan.

1. ¿Qué estrategia podría usar la empresa para determinar la cantidad de ventanales a utilizar en diferentes casos (un piso, dos pisos, tres pisos,…)?
2. ¿Puedes proponer una forma general de calcular una cantidad cualquiera de ventanas, dado los pisos que un cliente requiera?
3. Si se dispone de una cierta cantidad de ventanas en stock ¿se puede anticipar para cuantos pisos alcanzará?
4. ¿Qué pasará si quiero hacer un edificio de 1000 pisos? (analizar en un contexto real).
5. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la expresión que modela la situación?
6. ¿Cuál será la variable dependiente y la variable independiente en la situación de los edificios y las ventanas? ¿se pueden invertir?

Recuadro 1. La tarea de modelación propuesta en el RI. Es una tarea modificada de otra que propone el currículo nacional (MINEDUC, 2012b).

Por otra parte, Diego reconoce además un elemento que no fue considerado en su análisis a priori, "…como por ejemplo determinar la función inversa de la expresión que calcula el número de ventanales, definiéndola de la siguiente manera [figura 4]":

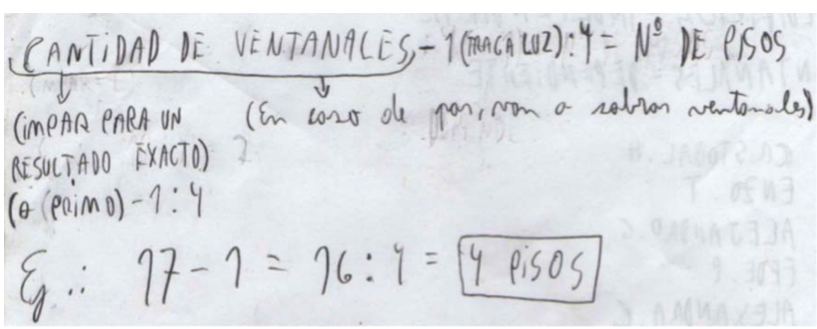



Figura 4. Resolución hecha por un alumno de Diego en su práctica en aula. Dice: ((Cantidad de ventanales) – 1 (traga luz)):4 = Nº de Pisos.

Diego entiende esta información como un objeto matemático (la función inversa, ya que Diego esperaba como respuesta $4n + 1 = v$), pero por otro lado, lo valida como un modelo de la situación. Esto evidencia el uso de conocimiento de Diego respecto a las dificultades y fortalezas que aborda un estudiante al modelar y los tipos de modelos, reconociendo que el profesor de matemáticas debe reconocer los modelos en las múltiples formas que construye el estudiante. Esto es identificado en el subdominio KFLM.

En el DR, Diego establece constantemente comparaciones respecto al conocimiento generado en el curso y a las prácticas profesionales en que participa, describiendo fuertes diferencias con el tratamiento pedagógico de las clases de matemática y generando reflexiones que emergen a partir de la inclusión de prácticas de modelación matemática en el aula cuando el estudiante es un profesor en formación.

> ...los chicos eran desordenados y no hacían caso, que no participaban en las clases y se distraían con mucha facilidad, que no tenían la capacidad de trabajar en algo en conjunto [...] ¿Qué vi hoy [día de la experimentación]? Un grupo de niños enfocados en una tarea, motivados, inmersos en ese mundo matemático.

En este contexto, Diego inicia una reflexión sobre qué conocimientos permiten al profesor de matemáticas tener una mayor facilidad sobre la construcción del conocimiento matemático:

> Pienso que conocer la historia de un concepto puede servir de varias maneras a la ejecución de una clase: que se puede mezclar la historia con las matemáticas, para ver el cómo un concepto matemático ha llegado a ser lo que es actualmente, ejemplificar el uso histórico de dicho concepto como la utilización elemental de las fracciones por parte de los egipcios y babilónicos, ver con qué herramientas contaban en la antigüedad para resolver sus problemas cotidianos, etc.

Impulsando a Diego en la EI que se refiera a las virtudes de la modelación matemática (para esclarecer su comentario anterior), enuncia algo que llama la-matemática-real, resaltando la funcionalidad del conocimiento matemático, su protagonismo en el desarrollo del conocimiento de la gente y cómo éstos pueden impactar en la ejecución de una clase. En el DR se aprecia lo siguiente: “me he preguntado, ¿cuál es el objetivo de la matemática en el nivel escolar? Simplemente entregar una maleta con herramientas y que el alumno diga ¿cuál me sirve? o ¿para qué sirven esas herramientas? [...] la-matemática-real”;

refiriéndose a una construcción epistemológica de la matemática centrada en el uso, asignando un sentido al conocimiento matemático para que sea aprendido. Diego sintetiza su reflexión desde la EI, como un rompimiento de la separación entre la realidad y las matemáticas: "en el ciclo de modelación [de Blum et al. (2006)] está diferenciado [realidad y matemáticas], pero yo no sé… no sé si la matemática es un mundo aparte, ajeno al mundo real". Diego se posiciona desde un conocimiento sobre la práctica docente que repercute en ambas dimensiones del MTSK. No obstante, en la última cita hace alusión a la modelación como contenido matemático, en particular en la categoría de "definición, propiedades y fundamentos" del subdominio KoT.

En el PO se reconocen múltiples subdominios y relaciones entre ellos. Este instrumento a la vez, brinda información sobre la evolución del conocimiento de la enseñanza de la modelación. En la resolución de tareas de modelación propuestas en el curso, Diego desarrolla de distintas maneras cada una de ellas, surgiendo en las últimas tareas propuestas en el curso el uso de objetos matemáticos, un ordenamiento del planteamiento matemático de los problemas, y una práctica matemática que suele poner en evidencia el uso de estrategias heurísticas o validaciones de resultados vía demostraciones matemáticas. Tales características no eran visibles, ya que en la resolución de las primeras tareas, Diego se remite a una descripción de ésta y las variables que influyen, sin generar un desarrollo.

El proceso de pilotaje del curso, en general, tuvo regularidad en su transcurso, reconociendo ajustes menores asociados a la naturaleza cualitativa de la investigación (principalmente el ajuste de tiempos en la planificación del clase a clase, cuyos detalles están en autor (2017). Ambos cursos (el pilotaje y la experimentación) esperaban una clase frontal, en donde se presenten y expliquen resultados matemáticos, esperando preguntas matemáticas claras y tradicionales, que el contenido matemático sea explícito. Sin embargo, hubo una mayor reticencia a esa modalidad de trabajo en el pilotaje. Generalmente, cuando los estudiantes obtienen un modelo real de una tarea de modelación, existe paulatinamente mayor comodidad, lo cual permite matematizar y así transitar por el ciclo de modelación. La incomodidad en la experimentación se desvanece al transcurrir la experiencia, ya que desde la sesión cuatro o cinco, existió un proceso de adaptación a la propuesta, logrando asumir las problemáticas planteadas por la planificación generada. En el pilotaje, la experimentación, resultó una incomodidad para los estudiantes, ya que algunos no lograron adaptarse tanto, a la modalidad de trabajo, como al proceso evaluativo propuesto.

Esto, provocó la reducción del 20% del número de estudiantes luego de la cuarta sesión y los que continuaron, se adaptaron en parte al sistema. Esto se debió a que los estudiantes estaban más preocupados de aprender matemática (muchos de ellos estaban atrasado de cursos previos de matemáticas) ya que la estructura curricular le indica que es mas importante ser matemático primeramente y después deberán preocuparse de su formación en didáctica y ramos de educación. En la experimentación no hubo disminución de asistencia a clase ni deserción.
Cerca del 50% de estudiantes evidenciaron aumento progresivo de la valoración del DR, incluyendo en sus reflexiones elementos que trascienden los tópicos abordados en la planificación de la propuesta, siempre relacionados con las prácticas docentes y la importancia del contexto del estudiante, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas vía modelación matemática.

### *3.6. Conclusiones y Discusión*

Si bien se documenta sólo el trabajo de Diego, podemos afirmar que los instrumentos creados para estudiar la evolución de la inducción de la modelación matemática en el curso (DR, RI, PO) fueron apropiados para pesquisar las reflexiones de los estudiantes y su evolución. Asimismo la metodología utilizada para comprender el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas mediante el modelo MTSK, nos permitió trazar y comprender un proceso reflexivo, el conocimiento de un profesor en formación sobre modelación matemática. El MTSK nos permite ver la evolución de las reflexiones de los alumnos, quienes inicialmente evidencian elementos del MK principalmente fortaleciendo progresivamente los elementos de PCK.

#### *3.6.1 El caso de Diego*

- Diego está en permanente oscilación entre su rol de estudiante y rol de profesor, al momento de resolver tareas y construirlas, y el requerimiento del conocimiento matemático y didáctico en ellas, respectivamente.
- El cuestionamiento de la separación entre la realidad y la matemática, es posible de entender al momento en que Diego reconoce la funcionalidad del conocimiento en su realidad. Sin embargo, no desconoce que el modelar construye conocimiento matemático, ya que reconoce que un modelo matemático es

matemática. Desde tal situación, genera dos usos del modelar, ya sea como "modelación matemática" o modelación.

- El conocimiento didáctico -en el uso de la modelación- mostradas por Diego fueron reconocidas al realizar su experimentación en su práctica final de Pedagogía en Matemáticas, pudiendo reconocer y crear distintos tipos de tareas, evolucionando desde una ejercitación algorítmica hasta la preocupación por generar procesos de modelación desde la construcción del conocimiento matemático (autor y Guerra-Silva, 2016).
- La propuesta tuvo un impacto significativo en el Conocimiento Pedagógico del Contenido, PCK. Las actividades planificadas en el curso muestran relaciones de los conocimientos matemáticos (específicamente KPM) con todos los subdominios del PCK, estableciendo un conocimiento sobre cómo la actividad de crear modelos permite que el estudiante logre objetivos de aprendizaje. Además, la codificación en el RI y en el DA, permitió la visualización de elementos que podrían guiar la confección de una tarea de modelación, su dependencia con los objetivos como profesor y qué herramientas evaluativas son reconocidas y puestas en uso.

### *3.6.2 La experimentación*

La propuesta de formación inicial resultó positiva en términos prácticos y teóricos. Consideramos que un factor relevante en la propuesta es el momento adecuado en la formación inicial para su implementación y, si es utilizado el modelo MTSK, cuándo considerar que un estudiante de Pedagogía en Matemáticas es un profesor en formación, ya que los estudiantes del pilotaje no tuvieron la misma participación que en la experimentación. Esto se puede deber a múltiples factores:

- Los estudiantes del pilotaje pertenecen al tercer semestre de la carrera, por lo que la sensibilidad del rol profesional al que aspiran no ha sido desarrollada suficientemente para los objetivos que pretende el curso, particularmente, la necesidad de crear y diseñar propuestas de enseñanza basadas en el aprendizaje.
- Los estudiantes del pilotaje no son conscientes de las competencias fomentadas por el curso, lo que puede deberse a poco conocimiento del ejercicio profesional del profesor de matemáticas y las competencias que demanda.
- 52 estudiantes participaron en el pilotaje, mientras que en la experimentación lo hicieron 13 estudiantes. Esto podría haber

complicado la logística del trabajo que se desarrolló en la experiencia,pero realmente la participación en la reflexión fue mucho más débil.

Una hipótesis que propone la investigación dice relación con clarificar la ubicación de una vinculación de la modelación matemática de forma explícita en la FIPM en el sistema educacional chileno, la cual debería ocurrir cuando el profesor en formación ya desarrolle cierta sensibilidad en el aula, y no conozca únicamente el conocimiento matemático, como sucedió en el caso del pilotaje, sino que posea experiencia en prácticas profesionales como actividad en paralelo y las problemáticas que surgen en cuanto a la construcción del conocimiento matemático cuando está intencionado hacia el aprendizaje.

En general, la evolución y calidad de la reflexión y el desarrollo del PCK dependen fuertemente de la cercanía con la práctica y responsabilidad como profesor del curso del profesor en formación. Esto nos permite concluir un programa de formación inicial con una práctica pedagógica más fuerte, potenciando más la formación en todas las dimensiones en la matemática y en el PCK; en este estudio, se desprende que el concepto “seminario de modelación matemática” es posible de ser replicado fácilmente según las demandas que surjan en la escuela formadora. También nos da indicios de que una política apropiada para ser implementada es que los profesores nóveles deberían tener un acompañamiento que les permitiera desarrollar competencias profesionales que la formación inicial no ha logrado fortalecer de forma suficiente.

La metodología utilizada para comprender el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas, permitió describir y comprender el conocimiento de Diego y estimar conclusiones y reflexiones respecto a la propuesta del curso analizada.

# Capítulo 4
# Una Variedad

En este capítulo, se pretende generar una variedad respecto a la concepción de modelación matemática que se ha definido en el capítulo 2 y puesta en uso desde la formación de profesores en el capítulo 3. Tal variedad emerge desde el marco teórico de la Teoría Socioepistemológica, TSE, el que concibe principios que en parte se contraponen a los supuestos dados en el marco conceptual del capítulo 2, por lo que la concepción de modelación matemática como tal, no adquiere el significado que se le había otorgado en los capítulos precedentes. Esta variedad es el resultado de una discusión amplia considerando la síntesis de tres experiencias de investigación: la funcionalidad del conocimiento matemático, la modelación matemática y la formación inicial de docente de matemáticas (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017)

Para lograr concebir una concepción de la modelación desde la TSE, iniciaremos en 4.1 con explicar de una manera breve y sintética el marco teórico desde un programa de investigación específico asociado a la construcción social del conocimiento matemático, reconociendo la funcionalidad del conocimiento matemático como centro de estudio. En la sección 4.2 se brindan aspectos medulares que diferencian la modelación matemática y la modelación desde la TSE. Finalmente en la sección 4.3, en el marco de la TSE, se caracteriza la modelación como una categoría, para lo cual se explicará su función dentro de la construcción social del conocimiento matemático y cómo esta concepción de modelación impacta didácticamente reconociendo nuevos usos para el concepto matemático.

En este sentido, el interés educativo de la variedad, amplía la visión hacia los fines que pueda tener la modelación, pudiendo trazar en ésta dos grandes posturas: una primera centrada en el significado, en donde sea requerido el objeto matemático como un modelo abstracto, para luego, generar las posibilidades de resignificación del conocimiento hacia su función en cierto escenario; una segunda postura se preocupa inicialmente del uso del concepto matemático, sin necesariamente pretender construir el objeto matemático (como lo haría una visión tradicionalista de la matemática escolar), pretendiendo ubicar en relieve su función a partir del uso.

## *4.1. Marco Teórico*

Estableciendo un desarrollo hacia la equidad de las construcciones del saber matemático, es que la TSE se forja con una naturaleza sistémica, centrando su atención en los contextos y en las prácticas más que en los objetos matemáticos, para así, este conocimiento transforme la vida de los ciudadanos (Cordero y Silva-Crocci, 2012). La naturaleza sistémica es trazada en cuatro dimensiones, a saber, las dimensiones epistemológica, sociocultural, cognitiva y didáctica (Cantoral, 2004), las que posicionan un cambio de paradigma frente al aprendizaje, respecto a cómo afectan las prácticas de la gente en la construcción *social* de conocimiento matemático y la función que puede cumplir tal construcción, reconociendo como el centro de estudio la funcionalidad del conocimiento en el cotidiano del estudiante, de tal manera que genere un direccionamiento de la práctica del didacta de la matemática (o del matemático educativo) hacia la transversalidad del saber y no hacia el objeto matemático. En este trabajo, entenderemos lo funcional como el conocimiento incorporado orgánicamente en el humano de tal manera que lo transforma a él y su realidad, siendo un conocimiento que le es útil al humano (Cordero et al., 2015).

Desde una visión socioepistemológica (Cantoral, 2013; Cordero, 2001, 2008, 2016), es que la construcción social del conocimiento matemático ha sido excluida y opacada cuando el ámbito disciplinar de la matemática predomina al ser problematizado con fines educativos, estableciendo una adherencia a tal epistemología dominante del saber matemático que no es necesariamente funcional (Cordero, Silva-Crocci, Gómez y Soto, 2015) para la comunidad de conocimiento en la cual se centra. En Cordero et al. (2015) se caracteriza la exclusión, opacidad y adherencia como fenómenos del discurso Matemático Escolar, dME, siendo una problemática fundamental, el rediseño de éste a partir de la inclusión de otras “naturalezas del conocimiento matemático” que pueden ser evidenciadas a partir del uso del conocimiento matemático en distintos escenarios de la gente (Cordero, 2016). Esto implica que desde la matemática escolar se es capaz de reconocer múltiples naturalezas cuando se trata desde las problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje a partir del cuestionamiento del objeto matemático. Esto último es lo que se enfoca como un cambio de paradigma.

La base del conocimiento para la TSE, emerge a partir de las prácticas sociales, las que pueden ser entendidas inicialmente como lo que te hace hacer lo que haces, desde esto, la práctica social no es lo que visiblemente hace el individuo (esta sería la práctica ejecutada), ya que la práctica social no es filmable, pero si inferida (Cantoral, 2013). En este aspecto, la práctica social genera conocimiento matemático que es metodológicamente visible a partir de los usos del conocimiento matemático **U**(CM), lo que conlleva otros significados, procedimientos e instrumentos que le son útil al humano y que han quedado excluidos del dME (Cordero, 2016)

La adherencia como fenómeno del dME, es lo que tiene que ser abordado para la permanente búsqueda del rediseño del dME, RdME; así, podrá dejar de ser excluido y opacado el conocimiento de la gente, el conocimiento que no proviene desde una institucionalización axiomática y racional, sino que desde cómo la gente hace uso del conocimiento en su entorno. La formulación de esta tarea, permite asumir por ahora el RdME como una tarea permanente en la matemática escolar, ya que se nutrirá de otros usos y significados del conocimiento matemático que en el presente han estado excluidos, formalizando lo situacional del conocimiento y el reconocimiento de significados funcionales para la gente (resignificación en el amplio sentido del concepto) hacia los conceptos matemáticos.

### *4.1.1. El Saber y su pluralidad*

El saber desde un carácter situacional del conocimiento matemático, redefine el conocimiento hacia tipos de conocimientos afectados por la gente, acuñando sus características sociales y culturales. Para ello, describimos el saber que hace uso el dME mediante una dualidad de la matemática escolar, considerando el dinamismo del modelo de dualidad hacia el RdME, en el sentido de que existe una matemática que es natural del matemático, la cual rinde tributos a una comunidad que no está necesariamente interesada en los procesos educacionales, generando un direccionamiento al desarrollo de la disciplina misma de la matemática, siendo un éxito en su lenguaje y desarrollo. Otra matemática en el contexto de la dualidad, es cuando el conocimiento matemático es puesto en uso desde un carácter instrumental, en donde se consideren aspectos relacionado no con la formalidad del conocimiento matemático, sino con los usos de tal conocimiento en una parte de una sociedad afectada sociocultural e históricamente. Esta última visión, no significa que el estudiante deba conocer la matemática y luego saber aplicarla en determinados contextos, ya que desde tal dirección, el proceso de aprendizaje carece del carácter constructivo del significado. Esta caracterización, posiciona una necesidad en el cambio de paradigma (Kuhn, 2015) sobre la funcionalidad del conocimiento matemático por sobre establecerlo como significados de modelos abstractos y naturales de la matemática.

En la figura 22, se traza la dualidad de la matemática escolar, describiendo la distancia entre los cotidianos que existen entre un especialista de la matemática (una comunidad de matemáticos) y una persona que le es útil un conocimiento matemático. En este sentido, cabe destacar que los objetos de estudio también son distintos y que para cada naturaleza del conocimiento matemático, existe una comunidad de conocimiento matemático que le es funcional tal conocimiento en un escenario específico (a modo de ejemplo, el número áureo, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puede tener un significado a partir de su construcción mediante fracciones continuas para el matemático, pero para el arquitecto toma el significado de un patrón de optimización entre la obra, la persona y el entorno[11]). Para el pensamiento y lenguaje del matemático que afecta al dME (el paradigma del aprendizaje tradicional o la matemática como un objeto de conocimiento), el centro de estudio es el objeto matemático, para así, poder establecer cualquier uso del objeto como aplicaciones de éste. Sin embargo, para la persona que hace uso de un conocimiento matemático (paradigma alternativo), el centro es la funcionalidad del conocimiento por sobre el objeto, lo que para este estudio, merece toda la aceptación e impulso.
La figura 22 no pretende en ningún sentido menospreciar el

[11] Tal ejemplo será desarrollado en el apartado 4.4.1. de este capítulo.

conocimiento matemático de la matemática escolar tradicional, sino que plantea la ausencia de otros significados del conocimiento matemático que emergen desde la instrumentalización del conocimiento matemático, los que establecen otros mecanismos de institucionalización, que quedan fuera de la matemática escolar. Desde tal situación, impera transformar esta matemática, la cual trastoca los conocimientos de la realidad de la persona en su cotidiano, transformando su realidad. Por ello, se afirma que en la dualidad ambos conocimiento matemáticos son funcionales, pero no significa que ambos le sean funcionales al estudiante.

En un sentido más amplio, es posible de entender a la matemática escolar bajo un fenómeno plural del saber matemático, lo que entenderemos por Cordero (2001) la pluralidad epistemológica del saber matemático. Este, es visible desde la caracterización situacional del conocimiento, y por ende, por la funcionalidad que posee el conocimiento matemático en la gente en una situación específica del cotidiano de la gente. Ambas epistemologías (la de la vida y la de la matemática escolar) no dialogan, teniendo como consecuencia la legitimación de la epistemología de la matemática escolar, evidenciando como fenómeno la opacidad de la vida en la matemática escolar (Cordero, 2016; Gómez, 2015).

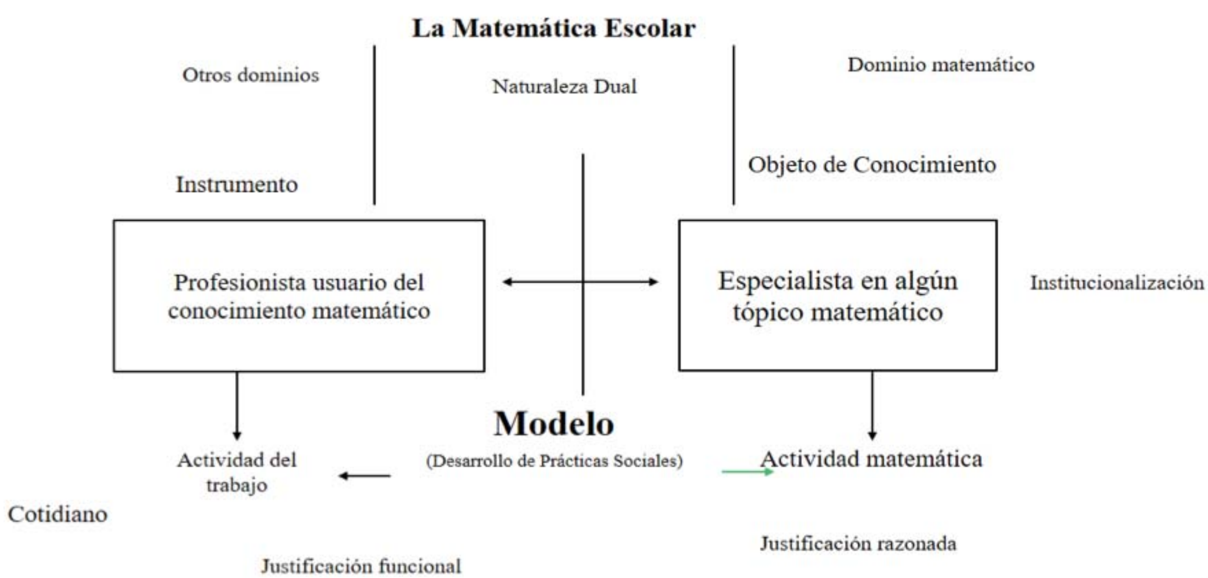



Figura 22. La dualidad de la matemática escolar (Cordero 2016).

### *4.1.2. Funcionalidad y cotidiano*

La funcionalidad del conocimiento matemático es vislumbrada desde los antecedentes epistemológicos que ha construido la ciencia, a partir de los usos que ciertas comunidades de conocimiento han generado (Cordero, 2016); en este sentido la funcionalidad no se remite a qué aplicación de la matemática es posible de encontrar en alguna comunidad específica, sino que la funcionalidad es reconocida al serle útil (y no utilitario) el conocimiento matemático a una comunidad de conocimiento, en una situación específica enmarcada por su cotidiano. Este último concepto no solo considera vivir en una sociedad, sino que dependerá de la comunidad de interés de estudiar. A modo de ejemplo, si consideramos una comunidad específica, por ejemplo, la comunidad de ingenieros agrónomos, su cotidiano puede ser vislumbrado en escenarios escolares, laborales o en la ciudad. Sin embargo, ha sido estudiado que en escenarios laborales el conocimiento matemático, y específicamente, el uso de las gráficas se caracteriza por la distinción de cualidades locales que adquieren los fenómenos entomológicos (Gómez, 2015). En este sentido, el cotidiano del Ingeniero Agrónomo requiere tal uso de las gráficas, estableciendo un significado distinto a las gráficas en comparación con lo comúnmente realizado en el dME.

Al considerar dentro de la problemática educativa tales **U**(CM), la transversalidad de los saberes permite la emergencia de nuevos significados en la matemática escolar. Esto permite pensar en el rediseño de dME y la permanente renovación como una práctica natural y continua de Matemática Educativa como una ciencia social.

En el amplio sentido, la Teoría Socioepistemológica se basa en el reconocimiento de lo matemático a partir de los usos de comunidades de conocimiento normado por las prácticas sociales (Cantoral, 2013). Este trabajo considera como objeto de estudio los usos del conocimiento matemático y cómo la modelación es trazada desde un carácter funcional. Así, la concepción de pluralidad epistemológica y transversalidad de los saberes, impide que la pregunta ¿qué matemática? adquiera algún sentido, reformulando tal pregunta hacia ¿qué es lo matemático? (Cordero, 2016). Desde tal visión, se reconoce una pluralidad epistemológica en el conocimiento matemático, la que puede ser reconocida en el cotidiano de la gente, suponiendo múltiples funcionamientos y formas del conocimiento matemático, permitiendo diversos tipos de justificaciones, significados, procedimientos e instrumentos que le son útiles al humano. Esto, naturalmente posee la propiedad de transversalidad, en el sentido de que una construcción social específica de un conocimiento matemático reconocida a partir de un estudio histórico-epistemológico, posibilita nuevas rutas de aprendizaje del uso de las matemáticas para comunidades específicas de interés. No solo a niveles superiores, sino que se amplía hacia una matemática escolar que alude hacia una matemática centrada en el aprendizaje. En la búsqueda de la resignificación de lo matemático, es que la modelación actúa en un ambiente del saber de tal manera que realza el uso del conocimiento matemático. En este marco teórico, es necesario clarificar que resignificación "*…no es establecer un significado en un contexto, para que posteriormente se busque en otro contexto, y de esta manera, se resignifique lo ya significado. Sino es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano"* (Cordero, 2008, p.268); es decir, es el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde a lo que organizan los participantes (Cordero, 2001; Cordero, Cen Chen y Suárez, 2010). Esto establece que el prefijo re-, alude a potenciar o intensificar el significado desde la práctica que socialmente la gente hace con el conocimiento matemático, concibiendo el principio de lo funcional del conocimiento en la gente, ya sea en la obra matemática, en la matemática escolar o en el cotidiano.

### *4.1.3. El modelo de comunidad de conocimiento*

Dentro del paradigma propuesto, se niega la construcción individual del conocimiento para aceptar la construcción del individuo en comunidad. Para ello, debemos clarificar qué entenderemos por comunidades que sean de interés para la investigación.

Una Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) es aquella que a través de un conjunto de personas poseen intereses, ideales o trabajos en común, en la cual hacen uso y construyen socialmente conocimiento matemático que le es funcional a la comunidad. El conocimiento matemático se genera gracias a que existe una responsabilidad recíproca dentro de la comunidad, siendo el uso del conocimiento matemático propio y privado para sus propios fines (Cordero, 2016). Esto es lo que nos permite identificar, en términos generales, a una CCM.

Las comunidades de conocimiento requieren diferenciarse de otras, destacando en ellas su *identidad*, donde la legitimidad frente a la sociedad, la resistencia a defender sus conocimientos, y la necesidad de crear y poseer proyectos pasan a ser aspectos basales en su identidad como comunidad (Cordero et al., 2012). De una manera similar, cada comunidad posee su propia manera de generar *institucionalización*, la que es asumida y validad por ellos y no necesariamente validadas por otras comunidades Estos conceptos iniciales, son los que en conjunto idean un modelo desde el marco socioepistemológico, que ayude a analizar los usos del conocimiento matemático que son propios de cierta comunidad de conocimiento.

En la figura 23, se reconocen los elementos mencionados anteriormente como ejes que caracterizan a toda CCM, que es la institucionalización y la identidad. Cada CCM posee características en donde se construye el conocimiento: 1) reciprocidad; se refiere a que las personas de la comunidad generan acciones recíprocas entre sí desde las propias necesidades de la comunidad para su desarrollo y fortalecimiento. 2) intimidad; la que alude a la existencia de un desarrollo y uso en el conocimiento de la comunidad que es orgánico de ésta. 3) localidad; toda CCM es situada socioculturalmente, esto quiere decir que una CCM se construye a partir de la localidad en donde pertenezca, con sus características y necesidades.

Tales características de una comunidad se contraponen a una visión estandarizada o individualizada del conocimiento matemático, respectivamente a lo individual, público y cosmopolita.

En síntesis, se espera que la figura 23 permita caracterizar de una manera más específica lo que entenderemos por una comunidad de conocimiento matemático. Esto, no significa que la comunidad sea de matemáticos, ya que el foco permanece en la funcionalidad del conocimiento, por lo que puede ser cualquier comunidad que afecte y defina un cotidiano en diversos escenarios, tal que exista un uso del conocimiento matemático (y por ende, un significado) que permita guiar el RdME en el aula.

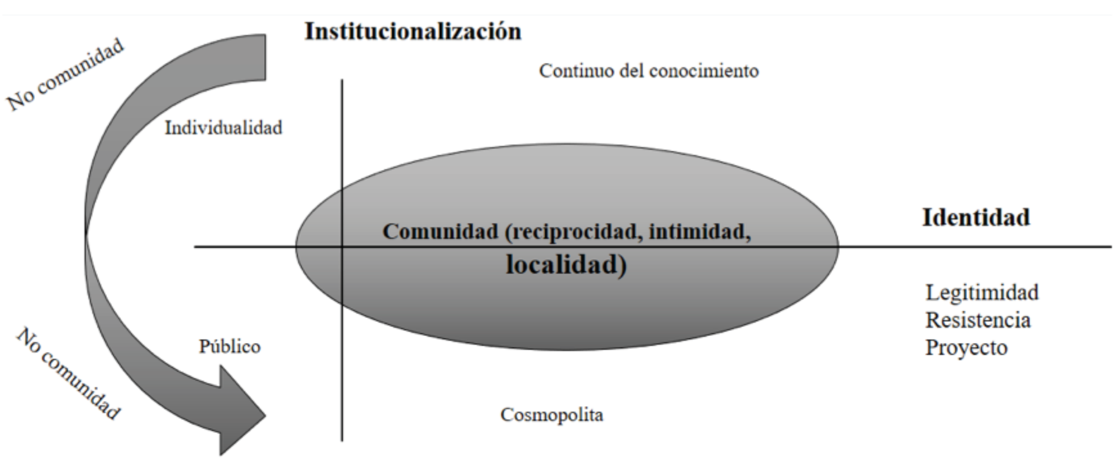



*Figura 23.* Comunidad de Conocimiento como un constructo en la Teoría

Socioepistemológica (Cordero, 2016).

Las CCM como fuente de estudio, se enmarcan en escenarios en donde sea posible analizar cómo hacen uso del conocimiento matemático, además de ser el momento en donde se pone en evidencia rasgos epistemológicos para su construcción. Los escenarios, como ya lo hemos dichos en reiteradas ocasiones, sucede en ambientes académicos, laborales o en la vida, en donde se muestra intrínsecamente el uso del conocimiento matemático. Tales escenarios resaltan desde Dominios de conocimiento que han sido parte en momentos históricos de la CCM. A modo de ejemplo: si consideramos el número áureo como un concepto matemático, y lo reconocemos por su funcionalidad, entonces es posible reconocer en el dominio de la matemática mediante el uso de las fracciones continuas, o bien, su relación con la sucesión de Fibonacci. Sin embargo, es también posible destacar la función de la razón del número áureo para la optimización en la construcción de obras arquitectónicas, entonces el dominio de conocimiento en este caso sería la arquitectura. Tales significados y usos del conocimiento en este ejemplo, son percibidas como un producto de las características del modelo de Comunidad de Conocimiento.

### *4.2. Hacia una categoría de modelación.*

A partir de los capítulos precedentes, hubo una principal concepción de modelación matemática que predominó desde la obra de Blum y su uso en sistemas educativos, se plantean ciertas reflexiones en cuanto a sus virtudes y limitaciones, tanto de los fundamentos teóricos, implicancias educativas, el conocimiento matemático y sus efectos en el aspecto curricular de Chile. Con respecto a lo último, se refleja un potente estatus dentro del curriculum del país y un impacto en la investigación y sus aplicaciones en el ámbito nacional como en el internacional. Pero también, reconociendo ciertos fenómenos que no parecieran ser parte de situaciones de modelación matemática desde Blum y que requiere por lo menos, la generación de una reflexión sobre cuándo una persona modela, ya sea por intereses didáctico-cognitivos u otros. Recíprocamente, también es posible considerar una tarea de modelación matemática en donde la reflexión sobre el marco conceptual hacia un aspecto social del conocimiento matemático, genera reflexiones hacia ciertos elementos teóricos, tal que al variar, es posible generar una aproximación alternativa a la de modelación matemática, hacia una concepción de modelación. En este caso, se realiza desde el marco conceptual de Blum un cimiento en donde la variedad tomará lugar, pero se requiere especificar algún principio de donde surja tal variedad. En esta parte del trabajo de tesis, tal variedad poseerá como principio la funcionalidad del conocimiento matemático en el cotidiano de la gente (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017). Esta frase contextualizada en el Programa Socioepistemológico de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013; Cordero, 2001, 2015, 2016), es una visión alternativa del paradigma educativo, que al estudiarla se observan los alcances y las limitaciones que pueda tener si se pretende generar una concepción de modelación en ella, que emerja como una variedad del marco conceptual dado en el capítulo 2. Además, tal principio trastoca la relación entre realidad y matemáticas, la cual, pareciera ser una problemática basal del estudio de la modelación o modelación matemática, generando direccionamientos hacia qué debemos enseñar, qué conocimientos y qué significados son los que los estudiantes –en especial de nivel medio y nivel superior- deben aprender para su futuro quehacer.

Tal variedad desde el principio formulado, necesariamente replantea aspectos filosóficos, epistemológicos, sociales y didácticos de la modelación matemática, sobre qué cualidades posee y cuáles otras podrían ser de interés, con el fin de concebir *una modelación* que no posea como estudio las *traducciones entre la realidad y las matemáticas*, ya que desde el punto de vista de la función social del conocimiento matemático, no adquiere sentido la separación entre éstas, sino que el conocimiento matemático se va construyendo a partir de la realidad, ya que también la transforma.

### *4.2.1. El conocimiento (matemático) y la realidad.*

Desde visiones filosóficas, es posible clarificar y poner de relieve ciertas concepciones respecto al uso de la modelación matemática. Para ello, se presenta en la figura 24 el problema del faro del trabajo de Blum et al. (2009), por supuesto, bajo el marco conceptual de modelación matemática descrito en el capítulo 2. Este problema de modelación matemática, evidencia el enriquecimiento de elementos que desde lo cognitivo son reconocidos, por ejemplo el proceso de pensamiento de los estudiantes bajo el ciclo de modelación Blum-Borromeo, sus obstáculos y diferencias entre los pensamientos de dos estudiantes, clarificando sus rutas de modelación (a partir de una metodología de investigación adecuada a un estudio de corte cognitivo), diferenciándolos según sus preferencias, haciendo hincapié en cómo el pensamiento de los estudiante varía y cómo en un ambiente de aula es determinante conocer tales fenómenos. Sin dudas el aporte es significativo, puntualizando en la caracterización, por ejemplo, de las fases del ciclo de modelación, los obstáculos que los estudiantes enfrentan o las transiciones que hacen los estudiantes durante la tarea. Este conocimiento, sin dudas, permitirá al profesor de matemáticas ser más consciente de las problemáticas intrínsecas que trae una tarea de modelación matemática, cómo hacer que el estudiante resuelva los obstáculos que surgen y cómo lograr que el estudiante realice exitosamente una tarea de tales características mediante la explicitación de tales características.

En la costa de la bahía de Bremen hay un faro llamado “Roter Sand” que fue construido en 1884, el que mide 30,7 metros de altura con la intención de advertir a los barcos que se acercan a la costa. ¿a qué distancia aproximadamente está un barco de la costa cuando ve la luz del faro por primera vez? Explica tu solución.

*Figura 24*. Tarea de modelación matemática. El Faro (Blum et al., 2009).

Una información de interés en la investigación reportada, es que ambos estudiantes analizados surge un patrón común: uno de ellos resuelve el problema haciendo uso del teorema de Pitágoras y el otro con el uso de funciones trigonométricas. Esto significa que abordan la tarea mediante la re-presentación de un conocimiento matemático. Es decir, los estudiantes previamente conocen el concepto matemático para que sea utilizado en su resolución, requiriendo su identificación en algún modelo real la situación y trabajar matemáticamente a partir del modelo realizado. Desde aquí, es que surge una problemática: si desde un sentido educacional, el aprendizaje del conocimiento matemático, a partir de este ejemplo, proviene desde el conocimiento preestablecido de conceptos matemáticos por parte del estudiante (modelos abstractos del conocimiento matemático), entonces, ¿la práctica de modelación del estudiante necesariamente existe gracias al uso de un conocimiento matemático que él ya usa? ¿Un problema de modelación puede generar un significado propio del concepto matemático que no provenga de la matemática, sino de su conocimiento, de su realidad? ¿cómo el estudiante hubiera podido resolver el problema del faro si no hubiera sabido el teorema de Pitágoras o elementos de la trigonometría previamente?. Para ambos casos de la investigación de Blum et al. (2009), existió el planteamiento de la necesidad del conocimiento del objeto matemático por parte del estudiante, y el desarrollo del uso del objeto matemático en contextos que sea identificado; una cierta horizontalidad frente a la construcción del conocimiento matemático si el foco es puesto en el objeto matemático y no en la función de éste, que requiera su resignificación. En este sentido, la realidad actúa como una noosfera de *lo matemático*, en una coherente percepción al "resto del mundo". En este caso, la tarea es centrada en el objeto matemático, no refiriéndome a solo uno, sino que al objeto matemático que conozca desde modelos abstractos, para así mediante la realización de la tarea construir conocimiento matemático *horizontalmente* a través del objeto matemático.

Una visión filosófica respecto a este fenómeno, es la preexistencia del conocimiento en la perspectiva educativa, mediante una aproximación de la filosofía realista con bases platónicas. En esta concepción, el conocimiento preexiste independiente del humano, siendo descubierto un conocimiento que permanece en el *mundo de las ideas*; esta posición se alinea a los comentarios que subyacen al ejemplo de la figura 24. Sin embargo, la variedad recae en una aproximación a la filosofía pragmática de la educación, sosteniendo que el conocimiento matemático no preexiste, sino que existe a la par cuando se construye (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017); además, la visión sobre quién construye conocimiento matemático, cambia el foco desde el sujeto, hacia las comunidades que hacen uso de un conocimiento matemático que le es funcional, siendo el campo de dinamismo de la práctica de modelación. Ésta, actúa frente a la hegemonía del conocimiento matemático tradicional, reconociendo otros significados del conocimiento matemático mediante la acción humana y cultural (Radford, 2004. Extraído de Cantoral, 2013).

El aspecto sintético de esta observación y que conlleva hacia una posición alternativa, es la separación entre la realidad y las matemáticas que asume Pollak en su propuesta y que prevalece en el modelo de Blum (Blum et al., 2005) y Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2006; 2010). Al asumir una filosofía pragmática, necesariamente el conocimiento tanto matemático como de la gente, se construye mediante la interacción social y cultural de éstas con otras y con su entorno, lo que al enfocar y privilegiar la funcionalidad del conocimiento matemático desde los intereses educacionales de la matemática, es posible concebir al cotidiano de la persona como un ambiente de investigación para el conocimiento funcional de la matemática, el cual modela y transforma su realidad desde el cotidiano.

La modelación, desde tal visión, no puede regirse a partir de una matemática apartada de la realidad de la persona, impactando tal supuesto en la diferencia que es evidenciada en la postura del ciclo de modelación de Blum, lo que generaría una "variación topológica en el sentido de Hausdorff", un "rompimiento topológico", es decir, dejar de considerar que la realidad y la matemática son conocimientos islas, para perfilar la visión hacia la Construcción *Social* del Conocimiento Matemático, CSCM. Actualmente, la Teoría Socioepistemológica, posee múltiples trabajos que evidencian cómo ciertas comunidades de conocimiento matemático construyen, instrumentalizan y/o hacen uso de lo matemático, como por ejemplo el uso de gráficas en la comunidad de ingenieros químicos (Pérez-Oxte, 2015), la estabilidad desde las ecuaciones diferenciales en ingenieros eléctricos (Mendoza, 2017), y la optimización en mecatrónica (Del Valle, 2015); y en general, comunidades que posean un uso del conocimiento matemático y que les sea funcional, es lo que se entiende como *lo matemático* de la comunidad, engendrado por la pluralidad epistemológica. Sin perder la brújula de la discusión, la modelación dialoga y practica su dinamismo en una realidad que convive en la dualidad de la matemática escolar, desde la funcionalidad del conocimiento matemático hacia la resignificación de sus usos.

### *4.2.2. Desde la componente social hacia la dimensión social*

La componente social en la obra de Blum adquiere un rol crucial para lo que es modelación matemática, ya que permite afectar a la construcción de modelos, las hipótesis que definen características del pensamiento matemático, el entendimiento y validación de la tarea al momento de resolverla. Sin embargo, tal línea de investigación clarifica que el enfoque es individualizado por su carácter cognitivo, no siendo afecto el conocimiento matemático por el componente social, ya que al transitar por el ciclo, se "corta" la componente social cuando el estudiante logra construir el modelo matemático, sin cuestionar la

matemática cuando se realiza una tarea de modelación matemática, lo que da paso a significados y usos a objetos matemáticos provenientes del modelo abstracto del conocimiento matemático, el que ha sido validado por el discurso matemático escolar.
Al considerar lo social como una dimensión en la concepción de una práctica de modelación, un constante cuestionamiento a la matemática, ya que los funcionamientos y formas que se dan en el cotidiano, establecen una *función* que es social cuando el sujeto son las comunidades de conocimiento.
Desde este punto de vista, la pluralidad epistemológica es un efecto del programa socioepistemológico, que repercute directamente en la modelación y concebido por la dimensión social que posee.

### *4.2.3. Modelación y herramienta didáctica*

La modelación matemática, es posible de ser utilizada en el aula como una herramienta didáctica, aunque no significa que sus alcances sean acotados de esta manera, ya que es posible de ser concebida como un patrón de construcción de conocimiento matemático, implicando que puede ser una función de la modelación matemática en el aula. Desde la aproximación del capítulo dos, propone modelar cognitivamente lo que sucede al momento de realizar una tarea de modelación matemática, estableciendo un mapeo sobre las posibles virtudes y dificultades que existen cuando un estudiante transita por tales tareas. De este punto de vista, el profesor de matemáticas concibe como una información que proporciona la obra de Blum los suficientes antecedentes como para la toma de decisiones, impactando hacia la labor docente, es decir, la instrumentalización de la modelación matemática como una herramienta didáctica válida y exitosa en su quehacer.
Sin embargo, el acto de modelar en un amplio sentido, no solamente es posible de apreciar en escenarios específicos de escolaridad, sino que el acto de modelar sucede al momento de que las personas hacen uso del conocimiento matemático en cualquier tipo de escenarios, ya sean hechos para propiciar el aprendizaje o no. En este sentido, existen estudios que han evidenciado que el escenario y una concepción epistemológica específica que se considera para el aprendizaje, llega a ser contraproducente si se elimina la variabilidad *social* en la construcción de conocimiento matemático. Hacia este punto profundizan los estudios de Carraher, Carraher y Schliemann (1985, 1991)

relacionado al conocimiento cotidiano y escolar de jóvenes. El ambiente de estudio son niños de 11 a 12 años que trabajan en ferias libres de Recife, Brasil, donde su función laboral es el comercio de productos principalmente alimenticios. Se le proponen problemas desde la compra y venta de productos, definiendo tal situación como una prueba informal. Luego, a los niños se les realizó una prueba formal (como es denominado en ambos trabajos), en donde se les preguntaba por el mismo problema pero con simbología matemática. Los resultados arrojan que el 98% responde de forma correcta en la prueba informal y un 37% a la prueba formal. Este resultado, Cordero (2016) afirma demostrar una lejanía entre lo enseñado en la escuela y el uso que se le da a la matemática en el cotidiano. Es más, enuncia que "…el conocimiento del cotidiano no se parece nada al de la escuela" (Cordero, 2016, p. 65). Desde los resultados del estudio brasileño, la matemática adquiere un estatus y significado (y también sus funcionamientos y formas) distinto al concebido previamente por la escuela, ya que ahora la matemática le es útil para su vida (en este caso laboral), no como permanece en la actualidad, como un conocimiento que prescinde de algún uso que le pueda dar en el cotidiano del que aprende, es decir, el actual tratamiento escolar desde lo que autores como Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto lo abordan desde el discurso Matemático Escolar, dME, (2015), esto implica la generación en un amplio sentido la problematización del saber (Cantoral, 2013), para así, reconocer el estatus del conocimiento matemático en ambos escenarios y otros, y no solamente que en un escenario específico pueda llamarse modelación matemática y lo otro no, sino que en el escenario de ferias libres, también se establece un uso de un conocimiento matemático, una función de éste, reconociendo una *práctica de modelación* entre las personas, las cuales logran construir conocimiento matemático, clarificando que no necesariamente es la matemática que el dME espera que se trate, sino una matemática que es reconocida no por su lenguaje o su representación, sino por su funcionalidad en escenarios variables definidos socialmente. Tal caracterización de la práctica de modelación, no es interpretado directamente como una herramienta didáctica, es más, se afirma que tal práctica no emerge desde una intención de herramienta didáctica, sino que es una actividad que responde a las demandas del conocimiento, gustos y necesidades de la persona con el otro. En ese sentido, la práctica de modelación no es una herramienta didáctica, pero sí es posible, asumir que *lo matemático* en múltiples escenarios, amplía la concepción de una matemática escolar, refiriéndome a que la modelación (y no modelación matemática) acapara lo matemático de múltiples escenarios, pudiendo transformar la manera en cómo es percibida la matemática escolar (mediante la transversalidad de los saberes) y finalmente inferir desde la práctica de modelación a una herramienta didáctica, pero no como una finalidad, sino como uno de los usos que posee la práctica de modelación vía transposiciones, siendo capaz de fundar estudios epistemológicos que impactan tanto en la teoría como en la práctica de la Didáctica de la Matemática. En este sentido, la modelación no es una herramienta didáctica, pero gracias a ésta, es posible de concebir situaciones de aula que funcionan como una herramienta para el profesor de matemáticas.

Desde tal aproximación, se clarifica que la modelación es más bien una práctica que socialmente se desarrolla en escenarios específicos, no es solo una situación, ya que no proviene desde la posición ajena a la persona al construir conocimiento matemático, sino que proviene desde las prácticas que se definen en escenarios socialmente predeterminados. En este sentido, un escenario de los posibles existentes, proviene desde la matemática que le es funcional a los matemáticos, con el sentido representacional y axiomático que predomina en la matemática escolar y que acuña el dME. Sin embargo, es necesaria la permanente reformulación al dME, para la generación de una matemática escolar que permanentemente se problematice desde distintos escenarios, no solamente desde el escenario de la matemática escolar tradicional, desde donde la matemática puede ser funcional, refiriéndome conceptualmente a la escuela, el trabajo y la vida (Cordero, 2016).

### *4.2.4. El objeto matemático*

Desde la obra de Blum, como se ha mencionado en 4.1, el objeto matemático pasa a ser el centro de lo que se entiende modelación matemática, ya que el uso del objeto matemático es lo que genera la acción de modelar matemáticamente una situación. En línea con lo anterior, en la CSCM el objeto matemático también emerge desde la construcción lógico-matemática (Cantoral, 2013), como se ha dicho antes, mediante la emergencia de modelos abstractos del conocimiento matemático. Sin embargo, se reconoce el foco de la Teoría Socioepistemológica en la función del conocimiento matemático por sobre el objeto en sí, entendiendo al objeto matemático como una faceta del conocimiento matemático que le es funcional a la comunidad científica de los matemáticos, estableciendo para tal comunidad, que saber matemáticas, es saber del objeto matemático y de sus relaciones (Cantoral, Reyes-Gasperini, Montiel, 2014). Por esto, Cantoral et. al (2014) plantean la necesidad de una reflexión en cuanto a cómo esta visión impacta en el aula y en sus naturales procesos evaluativos, proponiendo un punto de vista crítico respecto a lo normativo de la matemática escolar, gracias al acotado y hegemónico reconocimiento funcional que adquiere lo matemático.

El objeto matemático no desaparece del estudio desde el punto de vista del investigador, sino que no es su centro para la construcción de conocimiento, permitiendo en su práctica reconocer la funcionalidad de los usos del conocimiento matemático con aspectos del modelo abstracto del conocimiento matemático. Bajo esta situación, la re-significación del conocimiento matemático es lo que una práctica de modelación plantea; ésta se descentra del objeto matemático para enfocarse en la función del conocimiento en comunidades específicas (Cordero, 2016), siendo una manera de establecer los usos del conocimiento matemático en el aula.

Este capítulo, propone una visión alternativa respecto a la modelación matemática y que las dudas que quedan en éste, serán esclarecidas en el momento de explicar el marco teórico del programa Socioepistemológico. Sin embargo, se propuso la relación dicotómica en este apartado, que su síntesis, queda expresada en la tabla 3.

| **Modelación Matemática** | **Modelación** |
|---|---|
| Basado en objetos matemáticos | Basado en la funcionalidad del conocimiento matemático |
| Discurso matemático escolar fijo | Rediseño del discurso matemático escolar |
| Centrado en el sujeto | Centrado en las comunidades |
| Herramienta didáctica | Construcción social del conocimiento matemático |
| Realidad separada de la matemática | La realidad es en donde se construye el conocimiento matemático |

*Tabla 3*. Contrastes entre modelación matemática y la práctica de modelación

### *4.2.5. Prospectiva de Investigación*

En esta parte del trabajo, se precisa una categoría de modelación, de tal manera que incorpore los principios funcionales del conocimiento que se han discutido en este capítulo y se logre una variedad teórica (Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, 2017) del marco conceptual del capítulo 2. Entendiendo que es posible construir tal variedad pero de forma autónoma (sin el requerimiento de hacer un contraste), se plantea como variedad principalmente por la ruta que las indagaciones, reflexiones y cuestionamientos surgieron en el transcurso del estudio iniciado el año 2013 y fuertemente discutido el año 2015 en la estancia con el Dr. Francisco Cordero Osorio en CINVESTAV. Dicho esto, conduzco en adelante los siguientes capítulos a partir del objetivo de la investigación en esta segunda parte: Crear una variedad del ciclo de modelación matemática a partir de la función social del conocimiento matemático (Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, 2017) .

### *4.3. La Categoría de Modelación*

En general, hablar de modelación matemática, o el modelar, se refiere al estudio de las relaciones entre la realidad y las matemáticas, desarrollando un cuerpo disciplinar que expresa inclinaciones sobre cómo abordar tales estudios, acuñando posicionamientos filosóficos, epistemológicos y ontológicos para una aproximación didáctica del concepto. Un ejemplo a destacar es la obra de Blum. En este sentido, entenderemos que el principio P que considera Blum es *el ciclo que conecta la realidad y la matemática*. La variedad presentada, mantiene el foco en la realidad y las matemáticas, aunque no necesariamente son vistas como objetos de conocimiento separados, sino que se inicia desde el supuesto que el conocimiento es construido a la par con la realidad, y como un caso particular, el conocimiento matemático funcional actúa como un desarrollo recíproco de la realidad de la persona y viceversa. Dado tal paradigma, el principio de la modelación desde el programa socioepistemológico descrito, que llamaremos P’, es *lo funcional de la relación recíproca entre la matemática y el cotidiano*. Este principio es capaz de formular una actividad de construcción social de conocimiento matemático, persiguiendo la resignificación del conocimiento matemático (Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, 2017) .

El concebir la modelación como una categoría, hace alusión a establecer e identificar en un marco de referencia todas las relaciones del conocimiento matemático, mediante los procedimientos y representaciones que son derivados de éstas (Cordero, 1998). Tales relaciones provienen del entendimiento del conocimiento matemático a partir de lo experiencial, mediante los procesos y objetos desde las herramientas y los significados. Las categorías son un instrumento teórico que puede ser utilizado para la organización de contenidos, conceptos e ideas, las cuales han sido reconocidas en los últimos 20 años, lo que permitiría el rediseño del discurso matemático escolar; algunos ejemplos de categorías del conocimiento matemático desde el marco socioepistemológico han sido la noción de predicción (Cantoral, 1990), noción de acumulación (Cordero, 1994), noción de estado permanente (Farfán, 1997), el comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 1998), la modelación-graficación (Suárez y Cordero, 2010); y en general, la categoría de conocimiento matemático (Cordero, 2016). Esta última es descrita a partir del marco de referencia dado en la figura 25 y puede ser percibida como si las demás categorías fueran parte de esta última. En ella, se considera el conocimiento matemático institucional desde sus usos, considerando el concepto de institucionalización en términos de Durkheim (1982); en donde los usos son reconocidos en la matemática escolar, en otros dominios y el cotidiano, siendo resignificados (**Res**), como se había dicho, al debatir entre sus funcionamientos (Fu) y sus formas (Fo) (Cordero, 2001; Cordero y Flores, 2007; Suárez et al., 2010) en escenarios como la escuela, el trabajo o la ciudad.

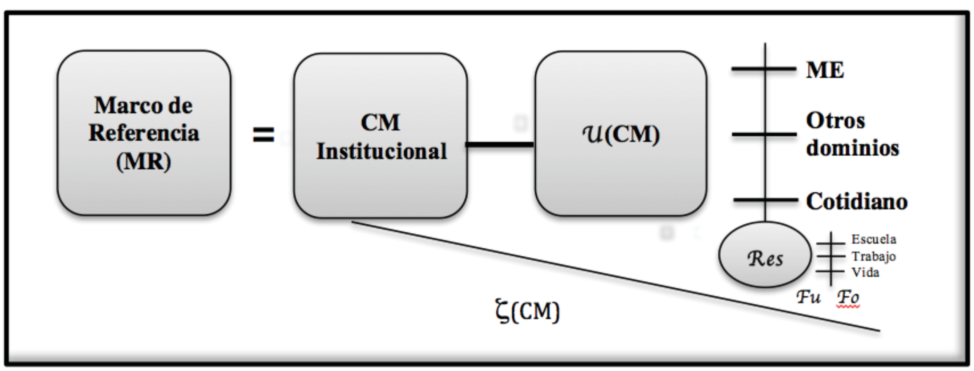



*Figura 25.* Descripción del Marco de Referencia de la $\zeta(CM)$ (Cordero, 2016).

La categoría de modelación es de cierta manera similar a la categoría de conocimiento matemático, aunque el sutil relieve es puesto en manifiesto en la realidad del que aprende y la funcionalidad del conocimiento matemático en esa realidad. En esta dirección, es que la modelación pretende la resignificación de los usos del conocimiento matemático, $\boldsymbol{Res}(U(CM))$.

Como se había descrito anteriormente, la categoría de modelación emerge desde un principio P’, el cual generará un dinamismo en el esquema del saber dado en la figura 26. El principio evoca a la funcionalidad del conocimiento matemático, el cual posee dos ejes que en todo momento son posibles de reconocer: la transversalidad y la institucionalidad. El primer eje denota la fenomenología del saber en distintas situaciones, tanto desde dominios del saber cómo en situaciones específicas, pudiendo generar guías para considerar que el conocimiento funcional que permanece fuera del aula, ingrese en ésta. El eje de la institucionalidad permanece implícitamente en todo el conocimiento, y por lo tanto, en todo el marco del saber, ya que el uso de éste en una CCM específica, desde su localidad, posee su propia estructura de validación y sus maneras de construir el conocimiento, por lo cual, en todo momento existe una institucionalización en donde se observe lo social del conocimiento, y por ende, un diálogo entre las institucionalizaciones que pueden existir en las CCM.

El marco del saber (Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, 2017), en donde transita la práctica de modelación, propone dejar de relieve los **U**(CM) que son reconocidos en algún Dominio del saber, $D_i$, y a su vez, tales usos pueden ser reflejados en una $n$-ésima Situación específica correspondiente al $i$-ésimo Dominio, $S_{in}$. Esta situación es orgánica de $D_i$, en donde subyace una construcción epistemológica del conocimiento matemático que puede ser evidenciada en $S_{in}$, por lo tanto, es afecto a un eje epistemológico entre el dominio y su situación específica asociada. Trazada tal situación, es que mediante una aproximación teórico-didáctica e intrínseca del marco se puede propiciar la **Res**(U(CM)).

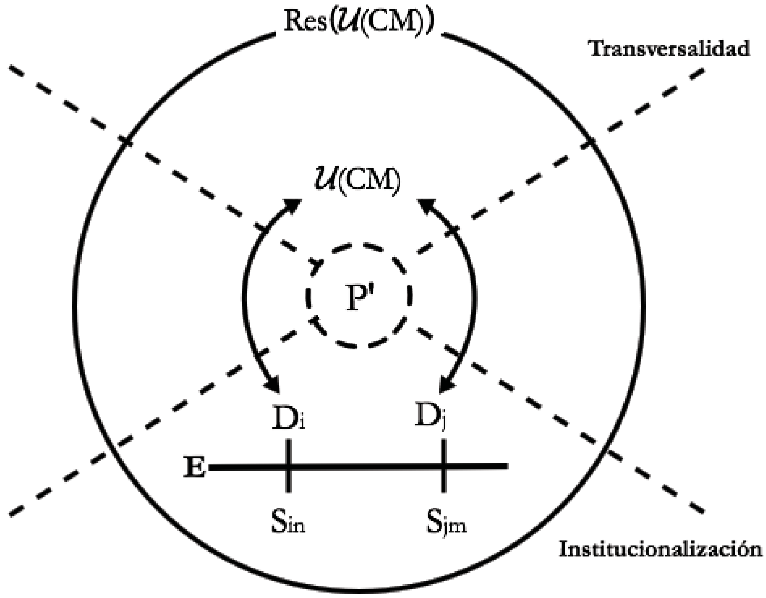



*Figura 26*. Marco del saber de la categoría de modelación.

La figura 26 asume la existencia de otro dominio $D_j$, el que puede o no ser el dominio $D_i$. Sin embargo, esto no sugiere la necesidad de otro dominio para propiciar la **Res**(U(CM)), sino que se dispone el planteamiento de la problemática fundamental del programa socioepistemológico, que es el RdME; en este sentido, es que se puede trazar los usos del conocimiento en el dominio del saber de la matemática escolar y reconocer una situación específica que provenga de la acción del dME. Otra situación en donde se puede reconocer el uso del marco del saber, es cuando desde un objeto matemático (el que no ha sido negado, sino que no es nuestro centro) se reconocen usos de éste en dominios distintos, pudiendo o no, tener distintos usos. En general, el marco admite toda la diversidad cuando se destaca la pluralidad en los U(CM).

# Capítulo 5
# Discusión y Perspectivas

El trabajo de tesis ha tenido dos focos, uno desde una visión situada en el uso curricular de la modelación matemática en Chile desde la formación del profesor de matemáticas, generando una propuesta en el programa de estudio, y el otro foco se refiere a una posición alternativa respecto al conocimiento matemático y cómo es plasmado en su desarrollo epistemológico con fines educativos. Para ambos focos, es posible vislumbrar tendencias de investigación según la labor de un investigador en Didáctica de la Matemática, refiriéndome a ello en este apartado.

## *5.1. Modelación matemática en la Formación Inicial de Profesores de Matemática (FIPM)*

A continuación, se presenta una discusión y posibles perspectivas sobre el trabajo realizado en los tres primeros capítulos. Para ello, se ha esquematizado desde dos vertientes para proseguir un trabajo cercano a lo que es un programa de investigación, lo que acuña como referente principal la experimentación realizada y todos los constructos teóricos utilizados. Se plantean reflexiones que surgen de ella, sus implicancias, complicaciones existentes respecto a la enseñanza de la modelación matemática, para así, focalizar hacia su desarrollo, perfeccionamiento y en general, otros horizontes.

### 5.1.1. Incorporación de la propuesta

Desde la formación del profesor de matemáticas, la experimentación descrita en el capítulo 3 mostró instancias comparativas respecto al momento en donde fue implementada, ya sea al inicio o al final de la formación inicial. En el caso experimental se propuso en una etapa final a diferencia del pilotaje, existiendo ya en el estudiantado una preocupación desde un interés disciplinar sobre el quehacer del profesor, desde las problemáticas basales de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (en el sentido en cómo las escuelas formadoras acuñan y desarrollan tales problemáticas), lo cual impactaba en la importancia del conocimiento que el estudiante percibía en el curso propuesto. Por el contrario, el pilotaje realizado en estudiantes de tercer semestre evidenció un menor grado de éxito que la experimentación (como fue especificado en la sección 3.5). Una de las maneras de explicar esta problemática es desde el *desarrollo profesional del profesor de matemáticas*, lo cual va mucho más allá del conocimiento matemático (o decir qué “tan matemático” es el estudiante) o del conocimiento didáctico que posea el estudiante, sino que apunta hacia cómo tales conocimientos permiten mejores prácticas en su futuro quehacer, no es solo el conocimiento, es el conocimiento consciente de su uso en el futuro ámbito profesional. Al haber realizado la experimentación en ambas situaciones, en el pilotaje no existía un desarrollo palpable de este rol en los participantes, ya que la formación durante dos semestres que poseían de manera efectiva, había tenido un mayor énfasis en lo matemático.

Esta comparación se acerca a problemáticas pedagógicas, que son de interés para el complemento de trabajos que pretendan abordar preguntas de investigación similares a las desarrolladas en los tres primeros capítulos.

Un segundo punto a considerar entre ambas situaciones, son los tipos de práctica que realizaban. En el caso del pilotaje, fue paralelamente la primera vez que los estudiantes asistían a un aula del sistema, en donde la función desempeñada era únicamente de observación (ligado a corrientes de Estudio de Clases), no teniendo espacios para la experimentación sobre los conocimientos que desarrolla la propuesta. No así en la experimentación, ya que el complemento práctico que realizaban, tenían la posibilidad de implementar sus propuestas en el aula, permitiendo al estudiante reconocer, reforzar y utilizar el conocimiento de la propuesta.

Una indagación válida para la comparación, son las características académicas de las instituciones en donde fueron realizadas la experimentación y el pilotaje. Ellas son comparablemente distintas, ya que por ranking universitario nacional, está mejor posicionada la universidad donde fue realizado el pilotaje por sobre donde fue la experimentación, por lo que tampoco es posible realizar una inferencia respecto a la calidad del estudiante, no siendo correlativo según los resultados de la experimentación. La respuesta claramente no es por la calidad del estudiante, tampoco por la institución; podría ser cuestionable la ejecución de la propuesta en ambas situaciones, pero son lo suficiente menores las variaciones previas respecto a lo hecho (tiempos de ejecución de tareas de modelación, preguntas de discusión respecto a tópicos de interés, ajustes menores en la dirección de las discusiones).

Esto brinda mayor coherencia a la elección del momento en donde se realiza la implementación, debiendo ser coherente en un sentido sinérgico la implementación local con la formación inicial global. Pasa a ser una variable de relevancia al querer que un futuro profesor aprenda conocimientos didácticos específicos (como es en este caso la modelación matemática), ya que la responsabilidad docente debería perfilar en todo momento tales conocimientos hacia el quehacer del profesor en el aula. Como una perspectiva futura, es de real interés esclarecer qué es necesario para que el estudiante en formación valore, aprenda y use el conocimiento propuesto en este trabajo, y en general, de una implementación en la formación inicial del profesorado en matemáticas que emerja desde el desarrollo científico de la Didáctica de la Matemática. Variables de tal problemática pueden ser las siguientes:

1. Los momentos de prácticas o de instancias de intervención en el aula del sistema escolar, son lo suficientemente significativos como para el desarrollo de un conocimiento didáctico específico. Fue una instancia ideal el poder experimentar en el aula, pudiendo establecer mecanismos de trabajo en la implementación. Esto no significa que sea una necesidad, pero sin dudas, un trabajo sinérgico permite propiciar resultados significativos para el futuro profesor de matemáticas.
2. El desarrollo profesional del profesor de matemáticas debe ser cultivado desde el inicio de la carrera y no solamente en cursos específicos y aislados de una estructura curricular. En este caso, el sentido de ver al profesor de matemáticas más cercano a un matemático, puede incidir en la valorización e interés del

conocimiento didáctico propuesto, y a la vez, no cultiva desde el inicio el tratamiento de la matemática que *usa* el profesor de matemáticas; es decir, el profesor de matemáticas debe tener un horizonte desde un inicio hacia su futura labor, para así, reflexione y aprenda conocimientos hacia su futura función, por ejemplo, a la matemática que es reconocida más allá de la formalización del conocimiento matemático, sino que desde alternativas que puede brindar la modelación matemática hacia los usos del conocimiento en la realidad. Esta variable, generaría transformaciones significativas en la formación del profesor de matemáticas.

3. Ligado al punto precedente, se destaca un aspecto que es una realidad en escuelas formadoras, que es la generación de planes de estudio común, conducentes hacia una Licenciatura en Matemáticas o hacia la Pedagogía en Matemáticas, teniendo en un lugar determinado una separación hacia tales carreras. Esta postura puede debilitar la formación de profesionales o licenciados de cada carrera, ya que el rol profesional docente o el desarrollo de un futuro matemático, puede no ser cultivado de manera óptima en el periodo de plan común. Para ambos no es su mejor ruta.

### 5.1.2. Variedades de la inclusión. Espacio y forma

Una manera de abordar las complejidades del momento de la inclusión didáctica de la modelación matemática en la FIPM, es mediante la variación de la inclusión dentro de una estructura curricular, ya que puede ser como es propuesta en el capítulo tres (a través de un curso formal en la estructura curricular), o bien, de una manera transversal desde el tratamiento didáctico de la modelación matemática a través de toda la formación inicial. Este punto es claramente un foco de discusión, ya que es necesaria la proliferación investigativa sobre cómo debe ser una implementación y cómo no debe ser, para así, clarificar el horizonte. El caso desarrollado en este trabajo se clarifica como una experiencia, lo cual no descarta otras posturas que aborden alternativamente el mismo objetivo: la enseñanza de la modelación matemática en la formación inicial del profesor. Actualmente, existen en universidades chilenas la inclusión transversal de la modelación matemática, aunque no es claro su tratamiento didáctico, ya que puede acaparar la modelación matemática en el amplio sentido que se ha discutido en la sección 1.2, es decir, desde aproximaciones de matemáticos aplicados. Esto no significa un menoscabo en la formación inicial, sino que seguiría faltando el tratamiento requerido para que los futuros estudiantes de esos futuros profesores puedan modelar. No hay dudas, de que es posible generar un tratamiento amplio y transversal de la modelación matemática, pero requiere un potente esfuerzo en cambios curriculares de la formación inicial. Más aún, el cuerpo académico requiere transversalmente adquirir cierta preocupación en este tema, lo que hace aún más complejo su posicionamiento.

Por otro lado, es posible ampliar la visión hacia otros grupos de personas, como son por ejemplo la formación continua del profesor de matemáticas, ya que permitiría al profesor experimentar continuamente en el aula, simplificando la situación planteada en la sección 5.1.1. Claramente, para este grupo humano es requerida una reorganización teórica, ya que no es posible trivializar los escenarios que ya conocen los profesores que son fortalecidas a partir de la experiencia, ya sean obstáculos de distinta naturaleza o sensibilidad frente a las características sociales y culturales de los estudiantes en torno al aprendizaje del conocimiento matemático. Es otro foco de estudio a desarrollar.

En términos de forma, el planteamiento de la propuesta adquiere posibles variaciones respecto al protagonismo de los aspectos teóricos de cada dimensión, ya sea en cuanto la inclusión o exclusión de algunos tópicos, o bien, el aumento o disminución de los tiempos de alguno de ellos. Para tal discusión, evoco a las competencias de modelación, ya que éstas poseen un uso para el investigador y no para el futuro profesor de matemáticas, por lo que más allá de eliminar el tópico, generaría ciertas transposiciones para un perfeccionamiento en la implementación, como por ejemplo la búsqueda de ciertos intencionalidades con el apoyo de las perspectivas. Otro aspecto de interés y de complejidad para el futuro profesor, son los aspectos evaluativos de las tareas de modelación; en este sentido, el tiempo asignado podría haber sido mayor, ya que existen múltiples aproximaciones desde autores extranjeros y chilenos que abordan la situación. Sin dudas, una mayor profundización en esta área, habría sido de mayor productividad para el conocimiento tratado en el curso.

Un aspecto de relevancia que aborda el curso y considero que debería ser optimizado (en su tratamiento), es el carácter de la aproximación cognitiva. Considero que para lograr este tipo de tareas, se requiere un esfuerzo mayor a lo realizado en la experimentación, ya que el análisis es más lento y arduo que lo supuesto en la propuesta, sin embargo, desde mi punto de vista, la aproximación cognitiva es más bien cercana a la labor que genera un investigador en el área por sobre el propio profesor de matemáticas, ya que no se espera que el profesor realice análisis cognitivos de sus estudiantes para el establecimiento de conclusiones y reflexiones respecto a su práctica (lo que desde un punto de vista utópico, sería bastante esperanzador). En este sentido, la propuesta más allá de querer que los futuros profesores cumplan funciones investigativas con inclinaciones cognitivas, la propuesta debe generar formas de plasmar los resultados desde las actuales investigaciones que posean inclinaciones cognitivas, para que puedan ser difundidas, aprehendidas y lo más importante: que los resultados sean utilizados o desarrollados en su futuro quehacer.

## 5.2. La categoría de modelación

Ya formalizando una posición respecto a cómo puede ser la visión de la modelación desde una aproximación socioepistemológica, es posible reconocer como continuar este nicho de desarrollo disciplinar. Actualmente, esta visión paradigmática sigue siendo innovadora para enfrentar las problemáticas de la Didáctica de la Matemática, por lo tanto, se percibe de la misma manera que el delineamiento de la modelación impacte en tal comunidad. Específicamente, el capítulo 4 fue capaz de formular una categoría de modelación que no necesariamente se reconoce como terminado, es más, dentro de las muchas prospectivas que se encuentran en tal capítulo, se detallarán algunas para poner en discusión frente a la comunidad de interés.

### 5.2.1. Tratamiento didáctico

El marco del saber estipulado en la sección 4.3. brinda elementos basales sobre el conocimiento que se pone en juego al momento de focalizar cómo los usos del conocimiento matemático son posibles de transformar a partir de un énfasis epistemológico. Actualmente, la obra principalmente de Cordero y Cantoral, y referenciada al momento de describir el marco del saber de la modelación esclarece cómo la aproximación didáctica se articula y complementa. Sin embargo, pareciera que esta visión de la dimensión didáctica debe ser abordada desde el constructo teórico construido, para así, simplificar y ayudar al uso del marco teórico, en pro de su uso en la comunidad de interés, la que recae no solo en el investigador, sino en el impacto que puede tener en el aula y todo lo que esto significa; me refiero a profesores del sistema, a la inclusión en el curriculum, o bien, en la formación inicial y continua del profesor de matemáticas. Esto no significa que en parte no esté desarrollado, ya que existe un impacto –al menos latinoamericano- sobre la teoría socioepistemológica y en las escuelas especializadas en Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa que ha recaído en todos los actores anteriormente mencionados, significa que la categoría de modelación es justamente un modelo que articula el conocimiento en juego al querer trazar la resignificación de los usos del conocimiento matemático, por lo tanto, desde tal trazado, es posible también desarrollar los complejos aspectos didácticos que conlleva realizar una tarea de modelación.

¿Cómo los momentos de las situaciones de socialización escolar son construidas para crear una situación de modelación? ¿Cómo tales momentos de la situación se ocupan del conocimiento que emerge para que un estudiante modele?. Estas preguntas si tienen respuestas a partir de los numerosos resultados teóricos con la concepción de categoría de modelación; sin embargo, no están respondidas en ninguna parte. En este sentido es a que me refiero que es necesario focalizar cierta importancia en cómo el resultado teórico que se plasma en este escrito se articula con los actuales resultados de naturaleza más didáctica. Se vislumbra que en este trabajo futuro –que ya sería un resultado- , emergerían otros resultados, naturales de la reflexión y que sin dudas, promueven la emergencia de la corriente socioepistemológica desde espacios no centralizados, por ejemplo en Chile.

### *5.2.2 Usos del modelo*

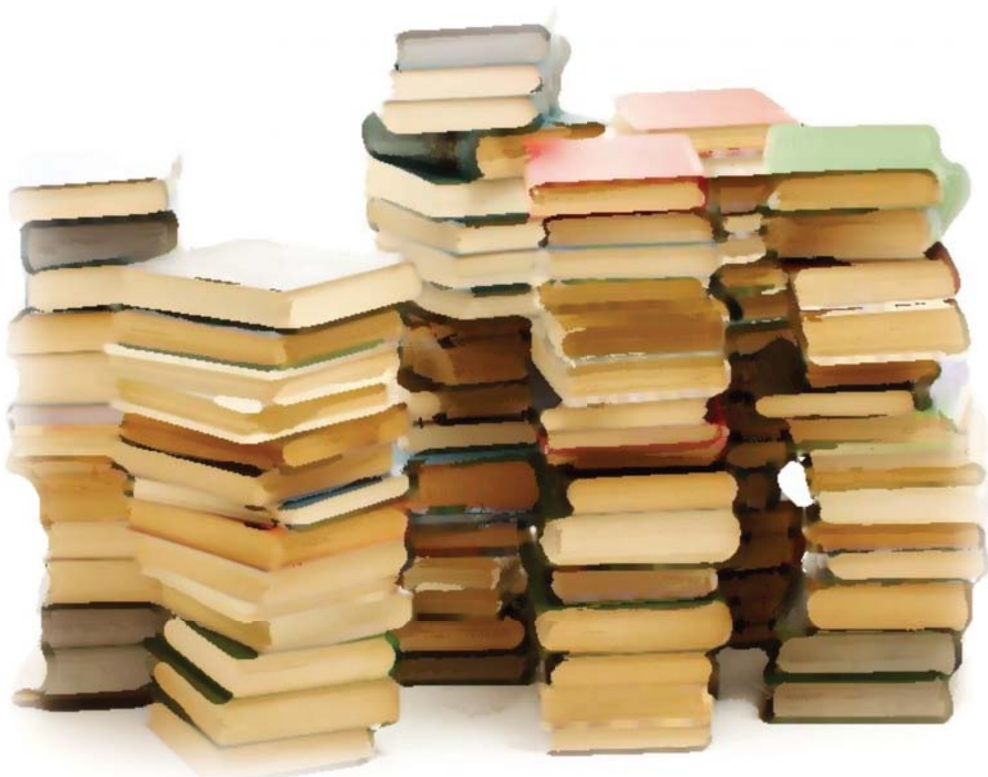
En general, no me ha sido simple encontrar un ejemplo en donde se reconozca la construcción social del conocimiento matemático y no sea posible de reconocer como una práctica de modelación. Esta situación, la considero un factor de indagación para la claridad teórica y su respectiva difusión y el fundamento motivacional basal para el trabajo posterior. Un aspecto inicial en ello, es conocer el estado y la magnitud de la categoría de modelación, lo que podría significar en:

1. Generar un reconocimiento de trabajos realizados como parte de situaciones de modelación, para así, establecer –si es que existe- diferencias respecto a la categoría de conocimiento matemático. Esta indagación no es simple en muchos aspectos; primero que todo, existen diferencias en los programas socioepistemológicos que actualmente se desarrollan en el mundo, por lo cual, habría que preguntarse cuáles son los estudios que pueden ser

comparables. Luego, habría que reconocer los patrones basales que posee la categoría de modelación, para así, esclarecer qué situación no es de modelación y lograr un factor diferenciador en la teoría.

2. Establecer un estatus dentro de las categorías existentes. Me refiero a que ciertas categorías son posibles de dilucidar dentro de otras categorías (como por ejemplo las categorías de acumulación u optimización). Desde mi punto de vista, esto no ayuda a la teoría, ya que se represente en un mismo estatus desde el nombre, pero que actúe acaparando a otros constructos teóricos que inicialmente parecían en un mismo estatus, debilita el robustecimiento teórico. Sin embargo, entendiendo la juventud de la teoría, es imperante reflexionar y estudiar los estatus de las categorías y continuar con su perfeccionamiento.
3. Generación de estudios respecto a la modelación desde la teoría socioepistemológica. Actualmente, este producto teórico fue pensado para que el investigador lo utilice, por lo que se espera que la comunidad considere que actualmente existe un trazado socioepistemológico de la modelación, el cual concibe y articula los elementos teóricos que son utilizados al modelar, y que sin dudas, es una vía para la construcción social del conocimiento matemático. Apoyando este último punto, Cordero, Mena-Lorca y Huincahue (2017) presentan insipientemente la relación entre la categoría del conocimiento matemático y la categoría de modelación como una inclusión. Sin embargo, por el primer punto en este apartado, es necesario establecer qué ocurre con la otra inclusión (entre las categorías de Conocimiento Matemático y Modelación), y para ello, la proliferación de investigaciones es lo que permite tal esclarecimiento.

En general, existen otras aproximaciones sobre cómo proyectar el trabajo, pero las demás, pueden ser posteriores a las enunciadas. Esto, solo es un pequeño preámbulo de una labor que inicia, que será cultivada y espero con ansias, brindar resultados sobre modelación o modelación matemática para la educación.



# Referencias


Adey, P. (1999). *Monogafías Innodata - 2. La Ciencia del Pensamiento, y las Ciencias para el Pensamiento: la Aceleración Cognitiva Mediante la Educación Científica*. Ginebra: Oficina Internacional de Educación.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Barbosa, J. (2003). What is mathematical modelling? En S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a way of life*, 227-234. Chichester: Ellis Horwood.

Barbosa, J. (2008) Mathematical modelling, the socio-critical perspective and the reflexive discussions. En *11 International congress on mathematical education* ICME 11, 1-9. Chichester: Ellis Horwood.

Biembengut, M y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática* 16(2),105-125.

Biembengut, M. (2012). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. *Cuadernos de Investigación* *y Formación en Educación Matemática*. XIII CIAEM, Recife,195-204.

Bissell, C., & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the learning of mathematics*, 20(3), 3-11.

Blomhøj, M. &Kjeldsen, T. (2006) Teaching mathematical modeling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2),163-177.

Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competencies. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*, 45–56. New York: Springer.

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling—categorising the TSG21 papers. In *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey,* 1–17. Mexico.

Blum, W. y Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving: Teaching mathematics in a real context*, 1-21. Londres: Ellis Horwood.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.

Blum, W. (1993) Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En Breiteig, T.; Huntley, I.; Kaiser-Messmer, G. (Eds.) *Teaching and Learning Mathematics in Context*, 3-14. Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Trends und Perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, 23, 15-38.

Blum, W., & Kaiser, G. (1997). *Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden*. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149-171.

Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, W-H., y Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer.

Blum, W. y Leiß, D. (2005). "Filling Up"- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.). *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1623-1633. Chichester: Horwood.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do teachers deal with modeling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): education, engineering and economics*, 222–231. Chichester: Horwood.

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 73-96. New York: Springer International Publishing.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Borromeo-Ferri, R. (2003). Mathematical thinking styles - An empirical study. *European Research in Mathematics Education III, CERME-3, Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1-9. Bellaria.

Borromeo-Ferri, R. (2004). Mathematical thinking styles and word problems. En *Pre-conference proceedings of the ICMI study* (14), 47-52.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *J. Math Didakt* 31, 99–118

Borromeo-Ferri, R. y Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. En: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. y Arzarello, F. (Eds.), *CERME-6 – Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2046-2055. Lyon: INRP.

Borromeo-Ferri, R. (2014). Mathematical Modeling—The Teacher's Responsibility. En Dickman, B. & Sanfratello, A. (Eds.). *Proceddings Conference on mathematical modeling*, 26-31. New York: Columbia University.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics* 58, 299-333.

Camarena, G. P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, (461), 117-132.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*, tesis doctoral, Sección de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En Díaz, L. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1-9). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Ciudad de México: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Cardeñoso, J., Flores, P. y Azcárate, P. (2001) El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. En Gómez, P. & Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro,* 233-244. Granada: Universidad de Granada.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8*, 2985-2994, Antalya: Middle East Technical University.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2016). *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones.

Cheng, A. K. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. *The Mathematics Educator*, 6(1), 1-10.

Chiu, M. M. (2000). Metaphorical reasoning: Origins, uses, development and interactions in mathematics. *Education Journal*, 28(1), 13-46.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1985). Mathematics in the streets and in the schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1), 21–29.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: editorial melo S.A.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2(1), 56–74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), pp. 7-38.

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En Cantoral, R., Covian, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*, 285-309. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, AC y Ediciones Díaz de Santos.

Cordero, F., Cen Chen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2), pp.87-214

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En Arrieta, J. y Díaz, L. (Eds.). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación. Matemática Educativa*. México: Gedisa.

Cordero, F., Mena-Lorca, J. y Huincahue, J. (2017). A category of modeling: functional mathematics of other domains of knowledge and the learning of mathematics. Manuscrito enviado para publicación.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoameticana de Investigación en Matemática Educativa* 15(3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Ciudad de México: Gedisa.

Correa, M., Marín, A., Gómez, P., Mesa, Y. y Villa-Ochoa, J. (2015). Concepciones de formadores de profesores sobre la modelación matemática y la relación con sus prácticas de enseñanza. En *actas de la 9na. Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*, Brasil.

Del Valle, T. (2015). *Los usos de la optimización: un marco de referencia y la teoría socioepistemológica*. (Tesis de doctorado no publicada). Instituto de Matemáticas, IMA-PUCV, Chile.

Durkheim, E. (1982). *The Rules of Sociological Method and Selected Texts on Sociology and its Method*. The Free Press.

Dym, C. & Ivey, E. (1980). *Principles of Mathematical Modeling*, 1ª Ed. New York: Academic Press.

Dym, C. (2004). *Principles of mathematical modeling*. 2º Ed. New York: Elsevier Academic press.

Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 60-68. Huelva: SGSE.

Espejo, E., Vilches, K. y Conca, C. (2013). Sharp condition for blow-up and global existence in a two species chemotactic Keller-Segel system in $\mathbb{R}^2$. *European Journal Applicated Mathemaitcs*. 24, 297-313.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores-Medrano, E., Sosa, L., Ribeiro, C.M. (2016). Tránsito del MKT al MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*, 7 -11. Huelva: SGSE.

Fourez, G. (1997). *Alfabetización científica y tecnológica*. Buenos Aires: Colihue.

Gainsburg, J., (2006). The mathematical modeling of structural engineers. *Mathematical Thinking and Learning*, 8:1, 3-36.

Gentile, N (2013). *La tesis de la Inconmensurabilidad. A 50 años de La Estructura de las Revoluciones Científicas*. Buenos Aires: Eudeba.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma*. (Tesis de doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

González-Olivares, E. y Huincahue, J. (2014). Double allee effects on prey in a modified Rosenzweig-MacArthur predator-prey model. En Mastorakis, N., & Mladenov, V. (Eds.). *Computational problems in engineering*, 105-119. New York: Springer International Publishing.

Guerrero-Ortiz, C. y Mena-Lorca, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, julio, 1-14.

Henning, H. & Keune, M. (2005). Levels of Modelling Competence. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, 225-232. New York: Springer.

Huincahue, J. (2011). *Dinámica de modelos de depredación continuos e impulsivos y estudio fenológico del Brevipalpus chilensis*. tesis no publicada para optar al grado de Magíster en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Huincahue, J. (2015). Tipos de representaciones externalizadas durante el proceso de modelación: el caso del ciclo de modelación Blum-Borromeo. *Premisa*, 17(67), 29-40.

Huincahue, J., Morales, A. y Mena-Lorca, J. (2015). Postura científica de la modelación matemática y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje. En *Memoria de la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Oaxaca: CIMATES.

Huincahue, J. y Guerra-Silva, G. (2016). Propuesta didáctica en patrones: visión desde las competencias en modelación matemática. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*, 378-382. Villarrica: SOCHIEM.

INFORME PISA (2003). *Aprender para el Mundo de Mañana*. Madrid: Santillana.

Jäger, R. (2001). *Von der Beobachtung zur Notengebung*. Ein Lehrbuch. Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, Y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in* *mathematics education: the 14th ICMI study*, 503–510. New York: Springer.

Kaiser, G. (1995). Realit.tsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick üver die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann et al. (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht,* 66-84. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group "Applications and modelling" (G14) *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, 1613-1622.

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school. Examples and experiences. En H-W. Henn, G, Kaiser (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum*, 99-108. Hildesheim: Franzbecker.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R. and Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in Teaching and Learning in Mathematical Modelling ICTMA 14*. New York: Springer.

Kapur, J. N. (1982). The art of teaching the art of mathematical modelling, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 13(2), 185-192.

Kapur, J. N., Sahoo, P. K., & Wong, A. K. (1985). A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Computer vision, graphics, and image processing*, 29(3), 273-285.

Kapur, J. N. (1988). *Mathematical Modelling*. Nueva Delhi: Wisley Earsten Limited.

Kuhn, T. (2015). *La Estructura de las Revoluciones Científicas. Ensayo preliminar de Ian Hacking.* Distrito Federal de México: Fondo de Cultura Económica.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. 7º ed. México DF: Oxford University Press.

Lesh R. And Doerr H. (eds.) (2003). *Beyond constructivism - Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Doerr, H. M., Carmona, G., y Hjalmarson, M. (2003). Beyond Constructivism, Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 35(6), 325-329.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education - necessity or unnecessity. En *Modelling and applications in mathematics education. New ICMI study series*, 475-482. New York: Springer.

Maaß K. (2006). What are modelling competences?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* Vol. 38 (2) 113-142.

Mardsen J. y Tromba A. (2004). *Cálculo Vectorial*. 5º ed. Madrid: Pearson Educación S. A. MINEDUC. (2012).

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya, E., Morales, A. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigaciones en Matemática Educativa* 18(3), 329-358.

Mendoza, E. (2017). *La matemática funcional de una comunidad de conocimiento de ingenieros. El caso de la estabilidad en la electrónica*. Predoctoral no publicado. CINVESTAV-IPN. México, DF.

MINEDUC (2016a). *Matemática. Programa de Estudio de Octavo Básico*. Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC (2016b). *Curriculum en línea.* Recuperado el 1 de marzo de 2017 de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-article-20852.html#i__w3_ar_articuloCompleto_1_20852_1.20Habilidades

Montes, M., Contreras, L. y Carrillo, J. (2013). Conocimientos del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En Alcaraz, A., Gutiérrez, G., Estepa, A. y Climents, N. (eds.), 2013. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 404-410. Bilbao: Universidad del País Vasco.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds). *3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003*, 115-124. Athens: The Hellenic mathematical society.

OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, París: OECD Publishing.

OECD (2013). *PISA 2015. Draft Mathematics Framework*, París: OECD. Disponible en https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf

OECD (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014)*, PISA. OECD Publishing.

OECD (2016a), *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*, PISA, París: OECD Publishing.

OCDE (2016b). *PISA 2015. Resultados claves*. OCDE. Madrid: OECD Publishing. Disponible en https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*. 62 (39), 307-332.

Pavlov, I. (1927). *Conditioned Reflexes*. Oxford: Oxford University Press.

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una comunidad de ingenieros químicos industriales en formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México, DF.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2, 393-404

Pollak H. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. *New Trends in Mathematic Teaching IV*, 232-248. Paris: UNESCO.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte, &J.F. Matos (Eds.). *Actas del PME 18*, Vol 1, 195-210. Lisboa.

Radford, L. (2004). *Semiótica, Cultura y Cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. México: Clame.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.

Robins, G. y Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egypcian tex*t. London: British Museum Publications.

Rojas-Palma, A. y González-Olivares, E. (2012). Optimal harvesting in a predator–prey model with Allee effect and sigmoid functional response. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5), 1864-1874.

Rosas, R y Sebastián, C. (2001). *Constructivismo a tres voces: Piaget, Vigotski y Maturana*. Buenos Aires: Aique.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Nueva York: Routledge.

Schön, D. (1987). *Educating the reflexive practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Soon, T. & Cheng, A. (2013). Pre-service Secondary School Teachers' Knowledge in Mathematical Modelling – A Case Study. En *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to research & practice*, 373-383. New York: Springer Science & Business Media.

Soto-Andrade, J. (2007). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. En D. Pitta-Pantazi, y J. Philippou (Eds.). *Proceedings CERME 5*, 191-200.

Soto-Andrade, J. y Reyes-Santander, P. (2011). Conceptual metaphors and "Grundvorstellungen". A case of convergence. En M. Pytlak, T. Rowland y Ewa Swoboda (Eds.). *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1625-1635. Rzeszów: University of Rzeszów.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Casos*. Segunda edición, Madrid: Ediciones Morata.

Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. (1999). *Estilos de Pensamiento*, Barcelon: Paidós

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. 6º ed. México DF: Cengage Learning.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la Investigación Cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar ºla Teoría Fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación. Una categoría para la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 13 4-II, pp. 319-333.

Tapia, M. (2016). *Evidencias de la modelación en la formación inicial docente*. Tesis de pregrado no publicada. Campus San Felipe. Universidad de Playa Ancha, Chile.

Varguillas, C. (2006). El uso de ATLAS. ti y la creatividad del investigador en el análisis cualitativo de contenido UPEL. Instituto Pedagógico Rural El Mácaro. *Laurus. Revista de Educación*, 12-(Ext)., pp. 73-87.

Vigotsky, L. (2012). *Pensamiento y Habla. Introducción histórica: Marcelo Caruso.* Buenos Aires: Colihue.

Villa-Ochoa, J. y Jaramillo, C. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R. and Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in Teaching and Learning in Mathematical Modelling ICTMA 14*, 701-711. New York: Springer.

Weinert, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (eds.). *Leistungsmessung in Schulen*, 17-31. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, pp. 17-31.

Zill, D. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 7º ed. México DF: International Thomson Learning.

# Anexo 1
# Estilos de Pensamiento en Ingeniería

## ESTILOS DE PENSAMIENTO COMO HERRAMIENTA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA[12]


**Resumen**

Este trabajo discute la relación entre las actividades en clases de matemática en una universidad chilena que forma ingenieros civiles industriales y los estilos de pensamiento que desean ser fomentados por la institución formadora. A partir de una metodología mixta de investigación, es que se describe la evolución de los estilos de pensamiento -según la teoría del Autogobierno Mental- desde un contexto profesional con estudiantes de la carrera y cómo son relacionados con lo esperado por la universidad. Se concluye la evolución de los estilos de pensamiento desarrollada por la carrera, similitudes y diferencias con lo esperado y cómo las actividades de Matemática logran ser un *puente* para el fortalecimiento no solo del conocimiento matemático, sino que de los estilos de pensamiento esperados.



**Palabras clave:***ESTILOS DE PENSAMIENTO, EDUCACIÓN SUPERIOR, INGENIERÍA, COGNICIÓN, MATEMÁTICAS.*


## 1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, ha sido motivo de especial preocupación para investigadores de múltiples áreas, educadores, profesores, directivos, familia y especialmente, para los propios estudiantes. Hoy, la Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa ha acuñado por más de 40 años esta fuente de estudio. Sin embargo, la Pedagogía y la Psicología Educacional también han generado aportes (Sternberg, 1997; Kolb, 2014), que pueden ser relacionados según la consistencia de posicionamientos epistemológicos u ontológicos, sobre el significado de la persona, el de la matemática, entre otros (D'Amore, 2005). En este sentido, es que las problemáticas adquieren distinta naturaleza y muchas veces evidencian aún más, la complejidad de que el estudiante aprenda Matemáticas. En esta investigación, se propone una amplitud, dirigida hacia cómo ciertos "diseños de aprendizaje" son capaces de que no solamente el estudiante amplíe su conocimiento, sino que logre poner en práctica elementos cognitivos requeridos por un sistema educacional determinado.

Actualmente en Chile, los resultados en pruebas nacionales e internacionales, establecidos por el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (2015), muestran que el ingreso de estudiantes a la educación superior, se ve relacionado por el tipo de colegio de procedencia, ya sea municipal, subvencionado o privado. Esto crea múltiples diferencias de conocimiento entre estudiantes al inicio de su educación superior, por lo que las instituciones adquieren el desafío de generar un sistema educacional interno idóneo según los estudiantes que reciben y hacia donde se pretende dirigir su conocimiento y pensamiento profesional.

[12] Este trabajo se realizó en conjunto con el Dr. © Claudio Gaete Peralta en el marco del IX Concurso de Apoyo a la Docencia de la Universidad Bernardo O'Higgins.

Aquí, se reflejan dos grandes fuentes de estudio e investigación: el conocimiento matemático requerido por los estudiantes de una carrera específica y los estilos de pensamiento que se necesitan fomentar a partir de dicho conocimiento matemático. En el caso particular de la formación profesional de un ingeniero, consideramos que ambas fuentes de estudio deben ser guiadas en base a las diferentes prácticas que dicho profesional pondrá en ejercicio en las tareas que naturalmente formarán parte de su rol como profesional.

En cuanto al conocimiento matemático, Trejo, Camarena y Trejo (2013) destacan la importancia de llevar el aprendizaje en estudiantes de ingeniería hacia el contexto de las ciencias, con el fin de fomentar la interdisciplinariedad; mientras que el Proyecto Tuning Latinoamérica (2007) establece que aplicar conocimientos de las ciencias básicas forma parte de las competencias específicas que un Ingeniero Civil debe desarrollar.

Enfocándonos de ahora en adelante en la perspectiva del pensamiento, por prácticas, nos referiremos a diferentes características y habilidades cognitivas que deben de estar presentes en todo ingeniero al momento de ejercer su profesión. Bajo esta mirada, el aprendizaje de la matemática también debe estar orientado a desarrollar ciertas prácticas deseables en todo ingeniero.

Muchas veces, la intencionalidad cognitiva que tienen las tareas de un curso, derivadas implícitamente del perfil de egreso que declare la institución formadora, no existe o es desconocida por parte del docente que planifica una determinada clase, lo cual se puede deber a múltiples factores. Uno de ellos, es la estructura que llevan a cabo las instituciones para dictar y normalizar sus clases; por ejemplo, que la clase de matemática trivialice la interdisciplinariedad. Esto genera que el profesor considere generalmente un discurso puramente matemático, sin ver la necesidad de evidenciar el uso que adquiere tal conocimiento matemático en el tópico que sus estudiantes requieren, es decir, la fuente interdisciplinaria desaparece, no existe un cuestionamiento del currículum y la intención cognitiva no es considerada.

**Figura No. 1**
**Una tarea de los números reales que cognitivamente fomenta un estilo de pensamiento judicial.**

Observe el siguiente desarrollo:

$$
\begin{aligned}
a &= b\\
a^2 &= ab\\
a^2 - b^2 &= ab - b^2\\
(a+b)(a-b) &= b(a-b)\\
a+b &= b\\
b+b &= b\\
2b &= b\\
2 &= 1
\end{aligned}
$$

¿dónde se encuentra el error?

**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

Si los docentes conocieran cuáles son las habilidades cognitivas que deben ser desarrolladas en sus estudiantes, para contribuir a la obtención del perfil de egreso, podrían ayudar al desarrollo de dichas habilidades a partir de la inclusión de prácticas en determinadas tareas o diseños de aprendizajes. Un ejemplo, desde la dimensión cognitiva en el sentido de Sternberg (1997), es el explicitado en las figuras 1a y 1b. En ellas, observamos dos tareas de matemática que pretenden evaluar si acaso el estudiante tiene conocimientos frente a una propiedad específica de los números reales (asumiendo que existe un motivo para que ese conocimiento esté incluido en la estructura curricular). Sin embargo, existen diferencias sustantivas: si una característica cognitiva que pretende ser desarrollada es que el estudiante tenga altas capacidades para juzgar la validez de afirmaciones, por sobre el ejecutar algo mecánicamente, entonces es necesario diseñar tareas que contribuyan al desarrollo del llamado estilo de pensamiento judicial (ver figura 1), un estilo que puede ser aprendido desde un rol profesional de la persona (Sternberg, 1999). Si acaso, se busca desarrollar características creativas o características relacionadas a seguir reglas, es necesario realizar tareas en donde se desarrolle el estilo de pensamiento legislativo o judicial[13], respectivamente (ver figura 2).

**Figura No. 2**
**La tarea 1) fomenta un estilo de pensamiento legislativo. La tarea 2) un estilo de pensamiento ejecutivo.**

1) ¿Cuántas veces cabe el cero en el uno? ¿por cuanto multiplicamos cero para que de uno? ¿qué pasa? En general, reflexione y discuta sobre la expresión 1/0.
2) Valorice las siguientes expresiones algebraicas cuando a=1, b=-3, c=-1 y d=0 para:

   1. $\frac{3a-5}{a+2}$
   2. $\frac{3}{c+1}$
   3. $\frac{2b+6}{b-3}$
   4. $\frac{6d-6}{d+2}$

¿qué sucedió, todos los ejercicios tuvieron resultado?

**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

## 1.1 La dimensión cognitiva en la formación profesional de un ingeniero

Desde la cognición, la Ingeniería tiene diferentes caracterizaciones. Según Boccardo (2006), uno de los roles de la Ingeniería es resolver problemas de índole técnico, aplicando conocimientos de las ciencias puras, utilizando procesos mentales con el fin de generar nuevos productos, procesos o servicios que sean necesarios para mejorar la calidad de vida. Vázquez (2012) señala que "un ingeniero es quien, con los recursos disponibles y sus conocimientos, brinda creaciones útiles a la sociedad" (p. 399); Lanza (2004, p. 7), establece que "la Ingeniería es indisociable de la innovación, porque ésta forma parte de los valores que inspiran al ingeniero". Es más, el Proyecto Tuning Latinoamérica (2007) establece como una de las competencias específicas, en particular, de un Ingeniero Civil Industrial el "crear, innovar y emprender para contribuir al desarrollo tecnológico" (p. 217). De esta manera, resulta indudable que conceptos como la inteligencia, la creatividad y la innovación, deban ser parte esencial en la formación de cualquier ingeniero.

Salazar (2000) establece que durante la formación de los ingenieros en necesario educar ingenieros que puedan pensar. En particular, Ghersi y Miralles (2014) establecen la necesidad de desarrollar el pensamiento creativo en estudiantes de ingeniería, abordando problemáticas actuales, interdisciplinares, entre otras.

Tanto inteligencia como creatividad, deseables en todo ingeniero, son conceptos cuyo significados resultan ser polisémicos. Más aún, "como ocurre con muchos conceptos en las teorías psicológicas, existe un considerable desacuerdo con respecto al concepto y definición de lo que es inteligencia o capacidad mental." (Esteban, Molero y Saiz, 1998; p.12). Sternberg y O´Hara (1999; citado en Krumm, Arán y Bustos, 2014), establecen que la relación entre creatividad e inteligencia ha sido estudiado desde cinco perspectivas: (1) la creatividad como subconjunto de la inteligencia, (2) la inteligencia como subconjunto de la creatividad, (3) la creatividad y la inteligencia son dos constructos que se superponen, (4) la inteligencia y la creatividad son lo mismo, (5) la creatividad y la inteligencia no tienen relación.

Estudiar los procesos cognitivos en estudiantes de ingeniería, para contribuir a su proceso de formación, resulta importante, pues a partir del pensamiento, el ingeniero debe ser capaz de crear e innovar. Más aún, Boccardo (2006, p.9) establece que "con el conocimiento de las potencialidades del uso del cerebro y los procesos del pensamiento, es posible optimizar las soluciones buscadas para la resolución de problemas en el campo de la ingeniería". López y Martín (2010) exploran la relación entre la teoría de los estilos de pensamiento de Sternberg (1997) con la creatividad. Además, López y

[13] Los estilos de pensamiento legislativo, ejecutivo, judicial y otros , serán próximamente descritos en la sección 2.

Martín (2010, p. 254) señalan que "...tanto la creatividad, como la inteligencia, es algo que cualquiera posee en mayor o menor medida, que no es un calificativo fijo sino por el contrario es un talento que cada uno puede desarrollar en grados variables".

### 1.1.1 Sobre la formación cognitiva del ingeniero en Chile

Los instrumentos evaluativos de mayor uso en Chile, han sido la prueba SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) aplicada en primaria y secundaria y la PSU (Prueba de Selección Universitaria), ambas son a nivel nacional. Sin embargo, tales pruebas promocionan generalmente un pensamiento convergente en su resolución, implicando que establecimientos educacionales en nivel primario y secundario apunten hacia tal pensamiento. Tal situación, es contradictoria con lo que se espera de un ingeniero en Chile, ya que la innovación y la creatividad, por ejemplo, no son focos primarios en las pruebas nacionales SIMCE o PSU. A partir de esto, surge la necesidad de diseñar y establecer, durante el proceso formativo del ingeniero, mecanismos que permitan desarrollar el pensamiento divergente, cambiando el paradigma que prima en la educación secundaria chilena. Para nosotros, la matemática, además de ser una ciencia que indudablemente se aplica en diversas tareas de la ingeniería, también contribuye, a partir de la enseñanza de dicha ciencia, al desarrollo de diferentes habilidades cognitivas requeridas en las carreras de ingeniería; en particular, Ingeniería Civil Industrial (ICI). De esta manera, resulta importante destacar el interés de esta investigación no es el determinar cuál debe ser la matemática que debe ser tratada en el aula para resolver situaciones relativas a las ciencias de la ingeniería; sino que se enfocará en determinar - sin dejar de lado la importancia del uso de la matemática en ingeniería- qué prácticas desarrollan aspectos cognitivos deseables, en este caso, en la formación inicial de un Ingeniero Civil Industrial.

Finalmente, es importante señalar que no se han encontrado estudios que aborden el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la ingeniería desde elementos de la cognición educacional, siendo este trabajo una innovación dentro de la investigación.

## 2. REFERENTE TEÓRICO: LOS ESTILOS DE PENSAMIENTO

El contexto establecido anteriormente formula la pregunta sobre cómo poder generar una dirección formativa idónea de los estudiantes en el aula, para desarrollar determinadas características cognitivas. Para ello, la Psicología Educacional tiene a referentes que hasta el presente han sido capaces de generar propuestas. Gardner (1998) es un referente con la "Teoría de las Inteligencias Múltiples", aunque con dificultades no menores cuando el ámbito educacional es en nivel superior. Además, un estudio desde la inteligencia acota en demasía la problemática de la educación por -al menos- un motivo: la influencia cultural es significativamente potente en la enseñanza de la ciencias cuando las exigencias mínimas consideran la habilidad de modelar, siendo necesario complementar el estudio de la inteligencia con características socioculturales, que sean dinámicas y que ofrezcan un mapeo del ser humano como un agente social, en lo posible, alejándose de la individualidad, sino más bien dirigida hacia las comunidades sociales existentes. En este caso, los estudiantes de ICI.

La Teoría del Autogobierno Mental (TAM) de Sternberg (1997) define los estilos como "…"una ruta del pensamiento". No es una habilidad, más bien, es una ruta preferida para usar las habilidades que uno tiene. Un estilo se refiere a cómo a alguien le gusta hacer algo" (Sternberg, 1999, p. 8). Estos estilos de pensamiento incluyen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género, en donde todas ellas podrán definir un lineamiento en las rutas del pensamiento de un estudiante. Existen investigaciones en la Didáctica de la Matemática que han utilizado esta teoría como fuente epistemológica hacia la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Borromeo-Ferri; 2006) y otros que han hecho un uso más bien práctico de ella en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemática (Spangenberg, 2012; Gaete 2015; Huincahue, 2014).

La TAM asume como hipótesis que:

> "…*La forma que gobernar que tenemos en el mundo no es coincidencia. Más aún, ellas son reflexiones externas de lo que ocurre en la mente de las persona. Así, las formas de gobernar que vemos son espejos de nuestras mentes*" (Sternberg, 1999, p. 19).

Esto podría indicar por qué un estudiante hace o no hace alguna actividad a partir de sólo una forma de enseñanza mostrada en clases, pero por otro lado, también deja ver que se puede formar un gusto con procesos sociales, es decir, los estilos de pensamientos son dinámicos a través del tiempo, tienen múltiples variables que producen el desarrollo y evolución de éstos, que pueden influir en las actividades internas y externas de la profesión.

Los estilos de pensamiento permiten la caracterización de funciones y formas de pensamiento y niveles, alcances e inclinaciones del autogobierno mental. Según Sternberg (1997), las funciones son legislativas, ejecutivas y judiciales; las formas son monárquicas, jerárquicas, oligárquicas y anárquicas; los niveles son globales y locales; los alcances son internos y externos, y las inclinaciones son liberales y conservadoras.

Gaete (2015) explica que las funciones de los estilos "se refieren al tipo de labor que los individuos desempeñan en alguna actividad diaria, como por ejemplo, preferencias por realizar algunas tareas, proyectos o situaciones, con la finalidad de adaptarse a su medio socio-cultural" (p. 31), mientras que las formas "se refieren a la forma de abordar el mundo y sus problemas, ya sea desde una sola perspectiva, desde varias perspectivas o de manera aleatoria." (p. 31). Los niveles de los estilos "hacen referencia a la línea de planteamientos de un problema para llegar a su solución, o bien de manera general o particular." (p. 32). Los alcances de los estilos se refieren "…al tipo de interacción de las personas, ya sea consigo mismas o con los demás (mundo externo)" (p. 33). Finalmente, las inclinaciones de los estilos "se refieren a las tendencias que existen a la hora de buscar o a evitar el cambio, cuando se abordan diferentes problemas o cuestiones" (p. 33).

Cada estilo de pensamiento, es resumido por Gaete (2015) a partir de lo establecido por Sternberg (1999). En cuanto a las funciones, decimos que una persona prefiere el estilo Legislativo, cuando tiende a inventar fórmulas y planear cómo debe solucionar los problemas o tareas que enfrenta a su manera y siguiendo sus propias reglas. Prefieren las actividades en las que puedan poner en juego toda su capacidad creativa. El estilo Ejecutivo es preferido por las personas que tienden a seguir reglas, y que prefieren completar las estructuras que ya existen, en vez de ser ellos quienes las creen. Además, prefieren realizar actividades en donde se les diga qué es y cómo deben hacer las cosas. Las personas que prefieren el estilo Judicial tienen la característica de analizar, comparar, contrastar, evaluar, corregir y juzgar ideas, reglas, procedimientos, estructuras, contenidos y problemas existentes. Además, prefieren criticar la manera de hacer las cosas del resto de las personas y les gusta dar opiniones y tomar decisiones sobre cuál es la manera correcta de hacer algo.

En cuanto a las formas, las personas que prefieren el estilo Monárquico son aquellas que abordan los problemas desde una sola perspectiva, es decir, que toman en cuenta un solo objetivo a la vez, por lo que tienen un sentido limitado de las prioridades y alternativas. Esto los conduce a ver las cosas desde un solo punto de vista, siendo motivados por una sola meta o necesidad a la vez, colocando atención solamente a aspectos que les resulten interesantes, considerando sin importancia todo aquello que no tenga relación con sus preferencias. Al hablar o escribir, se guían por una idea principal, prefiriendo tratar problemas o cuestiones generales en vez de detalles. Las personas que prefieren el estilo Jerárquico son aquellas que abordan los problemas desde varios puntos de vista, estableciendo un conjunto de jerarquías y necesidades, siendo conscientes de que no pueden alcanzar todas las metas por igual, teniendo claro que unas son más importantes que otras. Las personas que se enfrentan a los problemas desde múltiples puntos de vista, o perspectivas, tomando en consideración un conjunto de objetivos y metas igualmente importantes, son aquellas que prefieren el estilo Oligárquico. Estas personas se motivan por varias metas que consideran de igual importancia y que con frecuencia son contradictorias entre sí, dificultándoles la decisión de establecer qué metas son prioritarias. No siempre están seguras de lo que deben realizar primero o de cuánto tiempo deben dedicar a cada tarea que deben realizar. El estilo Anárquico alude a la forma aleatoria de abordar los problemas, utilizando varios procedimientos para su solución. Estas personas tratan de abordar las situaciones de forma asistemática y aleatoria, tratando de abarcar casi todos los aspectos de un problema no pudiendo centrarse en un punto específico. Pueden llegar a ser muy creativas y a ver soluciones que otros pasan por alto, sin embargo requieren dominar, disciplinar y organizar adecuadamente su potencial creativo.

En relaciones a los niveles, las personas que prefieren el estilo Global abordan los problemas tomando en cuenta cuestiones más amplias y abstractas, ignorando o simplemente rechazando los detalles. Además, tienden a destacar los aspectos generales o los efectos globales; prefieren conceptualizar y trabajar en un mundo de ideas, ser pensadores abstractos y a veces difusos.Por otro lado, las personas que prefieren el estilo Local, al enfrentarse a los problemas se centran en cuestiones específicas y concretas, trabajando con los detalles. Los aspectos pragmáticos de una situación llaman su atención, siendo muy realistas. Tienden a descomponer un problema en problemas menores que puedan resolver sin trabajar con la totalidad.

En cuanto al alcance de los estilos, el estilo Interno es preferido por aquellas personas que son introvertidas, las cuales tienden a centrarse en las tareas o trabajos de manera individual y en ocasiones son distantes. Por lo general son distraídos, les gusta trabajar en solitario y prefieren aplicar su inteligencia a cosas o ideas prescindiendo de las personas. Prefieren situaciones en las que puedan llevar a cabo sus propias ideas sin la necesidad de acudir a alguien. Por otra parte, las personas que prefieren el estilo de pensamiento Externo son personas extrovertidas. Por lo general, les agrada trabajar en equipo, en actividades en las que pueden interactuar con el resto de sus compañeros, prefiriendo intercambiar ideas con los demás. Además, les gusta tomar decisiones teniendo en cuenta las opiniones de los demás.

Finalmente, dentro de las inclinaciones de los estilos, el estilo Liberal es preferido por personas que tienden a ir más allá de los procedimientos y reglas existentes y que buscan situaciones que sean algo ambiguas, sintiéndose cómodas en ellas. Son personas a las cuales les gusta trabajar en proyectos que les permiten probar nuevas formas de hacer las cosas, les gusta cambiar de rutina para mejorar la manera de trabajar y tienden a poner en duda antiguas formas de hacer las cosas tratando de buscar nuevas ideas y métodos mejores. El estilo Conservador es preferido por las personas que tratan de evitar el cambio y buscan antiguas formas de hacer las cosas. Son personas a las cuales les gusta seguir procedimientos establecidos y reglas ya existentes. Se sienten mejor en ambientes estructurados y relativamente predecibles, y cuando esta estructura no existe intentan crearla. Prefieren seguir reglas fijas y métodos utilizados anteriormente, les gusta seguir una rutina y resolver problemas de manera tradicional.

## 3. METODOLOGÍA

Este trabajo asume una premisa, y es que la matemática que se incluye en las estructuras curriculares de la formación de ingenieros civiles industriales, está presente por su uso en diversas ciencias relacionadas con la ingeniería (lo que requiere estudios epistemológicos con respecto a la funcionalidad y uso del conocimiento en la comunidad de ingenieros); pero además, tales tópicos pueden ser tratados didácticamente como un conductor de diferentes habilidades y estilos de pensamientos que favorecen unas prácticas mas que otras. En este sentido, es que el rol de la matemática trasciende del contenido.

La compleja naturaleza de la fuente de estudio, implica hacer uso de una metodología mixta de la investigación, ya que los objetivos serán abordados considerando como informantes, a las comunidades de administrativos, estudiantes y académicos de la carrera de ICI de una determinada universidad chilena. Considerar una metodología mixta permite una mayor solidez de resultados por sobre el empleo aislado, además de una mayor exploración e integridad de antecedentes para la robustez de resultados esperados.

Un primer objetivo de investigación, es formular un perfil de estilos de pensamiento que sea acorde a las características que pretende desarrollar la universidad en los estudiantes de ICI. Para ello, se estudiará información de naturaleza mixta que incluye documentación interna de la institución, referida a elementos socioeconómicos, a puntajes PSU, al Departamento de Formación Integral (DFI) de la institución e información asociada a la carrera de ICI. Se consideró como un ente articulador, la información obtenida mediante entrevistas semiestructuradas con el director de la carrera de ICI y con un profesor de matemáticas que realiza docencia en dicha carrera. Todos estos antecedentes caracterizan, junto con una categorización realizada por medio del instrumento llamado MSG Sternberg-Wagner Thinking Styles Inventory (Sternberg, 1997), un perfil de estilos de pensamiento esperado por la universidad, para la carrera de ICI.

Un segundo objetivo de investigación será analizar la evolución de los estilos de pensamiento en el tránsito de estudiantes por la carrera de ICI de esta universidad chilena.Finalmente, y como tercer objetivo, se mostrará un ejemplo de actividad matemática que, junto con el proceso de enseñanza y aprendizaje, logra evidenciar preferencias por algunos de los diferentes estilos de pensamiento requeridos por la carrera de ICI, los cuales fueron formulados en el primer objetivo.

### 3.1 Descripción del instrumento

Sternberg (1997) crea el instrumento cuantitativo llamado MSG Sternberg-Wagner Thinking Style Inventory, el que mide psicométricamente cada función, forma, niveles, alcances e inclinaciones del pensamiento. Dicho cuestionario consta de 104 preguntas, 8 por cada uno de los 13 estilos: legislativo, judicial, ejecutivo, monárquico, jerárquico, oligárquico, anárquico, global, local, interno, externo, liberal y conservador. Cabe señalar que este instrumento ha sido utilizado en diversas investigaciones, como las realizadas por Bishop y Foster, 2011; Gaete y Mena, 2015; López y Martín, 2010; Huincahue, 2014; González-Pienda, Núñez, González-Pumariega, Álvarez, Roces, González, Bernardo, Valle, Cabanach, Rodríguez y Sales, 2004; Bernardo, Fernández, Cerezo, Rodríguez y Bernardo I., 2011; Gutiérrez y Krumm, 2012; Saxena y Aggarwal, 2011; entre otras.

### 3.2 Participantes

Este instrumento fue aplicado al 43%, 44% y 33% de los estudiantes hombres en etapas inicial, intermedio y final de la carrera de ICI, respectivamente, de una universidad chilena en un periodo de dos meses, solicitando que respondan según el ejercicio profesional que demanda la carrera que estudian y no en otro ambiente (personal o académico). El motivo por el cual se consideraron hombres, fue porque el 68% de los estudiantes son hombres, en etapa final existe solo una mujer y el instrumento cuantitativo crea distinción de evaluación en cuanto al género del entrevistado.

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 Perfil esperado por la Universidad

Las funciones de los estilos del pensamiento que se pretenden desarrollar en la carrera de ICI, son el legislativo y judicial. En el primer caso, se debe a que la creación es demandada en el perfil de egreso; específicamente, al declarar que se desea que el egresado use y cree sistemas complejos, relacionado con la creación, uso y gestión de una empresa. Además, se prefiere que el egresado busque crear por sobre ejecutar. En el segundo caso, es necesario desarrollar el estilo de pensamiento judicial, pues la preferencia por dicho estilo contribuye a mejorar los aspectos relacionados, por ejemplo, con la gestión empresarial. La preferencia por ambas funciones de estilos han sido robustecidas en la entrevista con el director de carrera, quien afirma:

> *"[el egresado requiere] …comprender el sistema completo de la empresa. Desde la parte productiva, gestión y financiera …que tenga una visión completa y pueda participar activamente en decisiones de alta gerencia en todas las áreas".*

Las formas del pensamiento, requeridas en esta carrera, son la jerárquica y la monárquica. El primer estilo es debido a que el ejercicio de la profesión demanda la realización o conocimiento de múltiples tareas dentro del uso continuo de sistemas complejos empresariales, implicando una jerarquía en la realización de tareas dentro de una empresa. El estilo monárquico es requerido, ya que cuando se realiza la jerarquización, la tarea con prioridad debe ser resuelta para continuar con la siguiente. De esta manera, se infiere que en el desarrollo de las tareas son requeridas ambas formas del pensamiento. El componente ético que se ha extraído de la entrevista al director, hace entender que las preferencias anárquicas deben ser poco preferidas, al igual que la forma oligárquica del pensamiento en la elección de múltiples tareas:

> *"los empleadores se dan cuenta de que son personas [los egresados] de una línea… la ética es un sello, fue ratificado por los empleadores".*

El emprendimiento es caracterizado como una necesidad del egresado. Se espera que el egresado prefiera tareas, en donde se les permita innovar en el abordaje de problemáticas propias de su profesión, pudiendo buscar la optimización en tal quehacer. Estas son características de una inclinación liberal del pensamiento. Sin embargo, actualmente es un perfil que se pretende y no se ha logrado en la carrera. En relación a esto, el director de carrera afirma:

*"lo ideal sería lograr creación, pero yo creo que es una segunda derivada todavía. La idea es apuntar en una visión de futuro en la creación de sistemas complejos… el emprendimiento va relacionado con la creación. Está detectado en este minuto [en sus estudiantes] como una debilidad".*

## 4.2 Evolución de los Estilos de Pensamiento durante la formación

La variación de los estilos de pensamiento es analizada a partir de las gráficas dadas en el anexo 1. En los gráficos 1, 2 y 3, notamos que los estudiantes de ICI ingresan a la universidad con algunas características de preferencias ligadas a la función Legislativa. Sin embargo, a medida que finalizan su carrera, terminan no prefiriendo dicho estilo. Por el contrario, se evidencia que los estudiantes, parten sus estudios no prefiriendo características ligadas al estilo ejecutivo, pero al final de sus estudios, evidencian tener algunas preferencias por este. En relación con el estilo de pensamiento judicial, podemos decir que no existe una variación significativa, al momento de comparar el estado inicial y final de sus estudios.

Existen dos variaciones significativas en las formas del pensamiento, la función jerárquica (aumento de preferencias) y la función anárquica (disminución de preferencias), no así con la función monárquica y oligárquica del pensamiento durante el transcurso de la formación inicial (ver gráficos 4, 5, 6 y 7). Esto significa que los estudiantes aceptan las reglas que la profesión naturalmente establece, además de ser capaces de priorizar en la importancia de tareas que demanda la profesión.

En el gráfico 8 se percibe una disminución de las preferencias por el estilo de pensamiento global. En cambio, el estilo de pensamiento local (gráfico 9) presenta un aumento. Aunque en ambos se muestran preferencias (local más que global), no necesariamente se cae en una contradicción, ya que la naturaleza de la profesión demanda múltiples tareas en donde ambos pensamientos poseen un adecuado uso.

En el caso de los alcances de los estilos de pensamiento, el gráfico 10 evidencia preferencias por un alcance interno, es decir, preferencias a ser personas más individualistas e introvertidas en su ejercicio profesional. Mientras tanto, el gráfico 11 nos muestra que inicialmente existe una preferencia por el estilo externo, pero al final de su carrera, dicha preferencia se pierde.

Finalmente, los gráficos 12 y 13 evidencian que los estudiantes, durante el transcurso de su carrera, manifiestan pocas características en cuanto al estilo liberal, prefiriendo un estilo conservador.

# 5. CONCLUSIONES

Es posible relacionar entre sí, los estilos de pensamiento preferidos por los estudiantes. En este sentido, se puede asumir que los estudiantes socioculturalmente tienen cierta identidad, que conjuntamente con la praxis de la formación, formula perfiles de preferencia por estilos de pensamiento cuando son abordadas tareas de la profesión.

Existen fortalezas y debilidades hacia las tendencias cognitivas preferidas por los egresados de la carrera de ICI, según lo que implícitamente persigue la institución formadora. En este sentido, es que se destacan las siguientes:

- La forma jerárquica del pensamiento al abordar múltiples tareas pertenecientes a la profesión y la no preferencia de formas anárquicas, son tendencias esperadas por la formación.
- La carrera influye en el aprendizaje del estilo liberal, pero débilmente. El estilo liberal puede ser representado mediante la preferencia por ser un innovador y emprendedor. Sin embargo, el estudio muestra márgenes insuficientes para tales características, y por ende, para lo que espera la carrera.
- El estilo legislativo y judicial no es preferido por los estudiantes. Esto se relaciona con que los actuales egresado cumplan roles más bien operativos al estar insertos en el ámbito laboral. Esto se reafirma con la detección de debilidades que asume la institución. Por otro lado, el estilo ejecutivo es preferido con inclinaciones conservadoras del pensamiento. Ambos antecedentes indican que no existen preferencias por tareas creativas o de innovación, siendo una dirección contraria a lo perseguido por la carrera.

## 5.1 Propuesta: un ejemplo desde la Matemática

Sabiendo que los estilos de pensamiento se pueden fomentar y aprender (Sternberg, 1997), afirmamos que en todos los cursos que forman parte de la formación profesional, es posible promover ciertas características cognitivas, según lo esperado en el perfil de egreso de una determinada carrera. En el caso de ICI, un ejemplo desde la matemática, es lo realizado por Gaete (2015), en donde una actividad de modelación matemática (ver figura 15), relacionada con el concepto de función cuadrática, permitió fomentar algunos de los estilos de pensamiento requeridos para el futuro profesional de los estudiantes. La creatividad (ligada al estilo legislativo), fue posible de promover mediante los diferentes argumentos entregados por los estudiantes, utilizando razonamientos lejanos a una matemática formal y, válidos para el contexto del problema.

El estilo liberal surgió por medio del proceso de evaluación de la actividad, que consideró válida, por parte del docente, la graficación de la parábola sin conocer explícitamente la función cuadrática, lo que evidenció que los estudiantes fueron más allá de las reglas usuales establecidas en el actual sistema escolar chileno: graficar la parábola a partir de una función cuadrática dada. Finalmente, el trabajo en grupos les permitió analizar, comparar, contrastar, evaluar, corregir y juzgar ideas, lo que claramente contribuyó a fomentar el estilo de pensamiento judicial.

**Figura No. 3**
**Tarea de modelación que fomenta los estilos legislativo, judicial y liberal del pensamiento.**

¿LOS INGRESOS DE LA EMPRESA, AUMENTAN O DISMINUYEN?

En el gimnasio Roys Gym hay 150 socios que pagan una cuota mensual de 60 dólares mensuales. El dueño del gimnasio desea incrementar sus ingresos, por lo que ordena un estudio de mercado, en el cual se recomienda reducir la cuota, ya que por cada dólar que ésta disminuya, se inscribirán cinco nuevos socios. ¿En cuántos dólares debe reducirse la tarifa para obtener la máxima ganancia mensual?

¿Cómo varia el ingreso al reducir la cuota?

¿Qué ocurre con el número de socios al reducir la cuota?

¿Se reportara más ganancias el hecho de que se inscriban más socios?

De manera grupal, establecer la gráfica de esta situación.

**Fuente:** Actividad diseñada por Hupaya (2012)

Finalmente, esta investigación muestra la necesidad de desarrollar otras investigaciones en áreas de la formación de profesionales desde la cognición, siendo válido hacer constantes cuestionamientos a las prácticas docentes y en general, a la labor de la escuela formadora, para la continua optimización del mejoramiento educacional. Específicamente, se espera que la articulación de la Psicología Educacional con la Didáctica de la Matemática genere resultados incipientes hacia la formación de profesionales que usen la Matemática en su quehacer profesional. Lo último, implica un cuestionamiento curricular de la matemática en la formación profesional y un tratamiento didáctico de lo matemático según direccionamientos dados desde los Estilos de Pensamiento.

## 6. REFERENCIAS


Bishop, C. Foster, C. (2011). Thinking Styles: Maximizing Online Supported Learning. *Journal of Educational Computing Reserch*, 44(2), 121-139.

Boccardo, R. (2006). *Creatividad en la ingeniería de diseño.* Caracas: Equinoccio.

Borromeo-Ferri, Rita. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86–95.

Chile, Departamento de Medición, Medición y Registro Educacional. (2015). *Compendio Estadístico Proceso de Admisión Año Académico 2015*. Santiago, Chile.

Doerr, H. M., y Lesh, R. A. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, (pp. 247-268). New York: Springer.

Escurra L., Delgado A. y Quezada R. (2001). Estilos de pensamiento en estudiantes de la U.N.M.S.M. *Revista de Investigación en Psicología*, 4(1), 9-34.

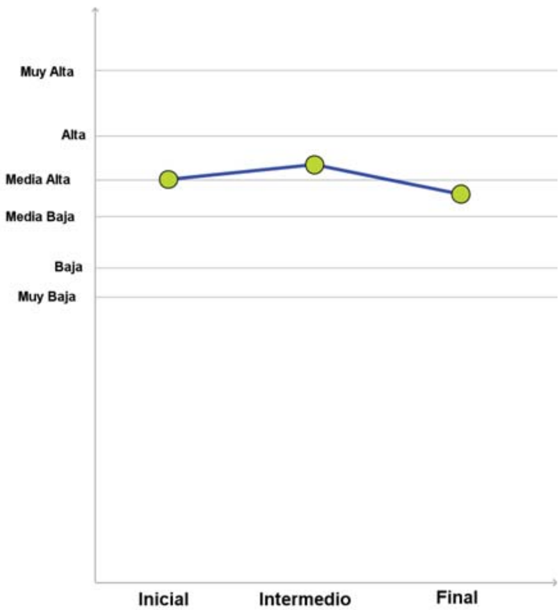
Gaete, Claudio. (2015) *Evaluación en Matemática bajo una perspectiva Socioepistemológica a través del estudio de los Estilos de Pensamiento en estudiantes de Ingeniería.* (Tesis para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
Gardner, Howard. (1998). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica.* Paidós: Barcelona.
Ghersi, I., Miralles, M. (noviembre, 2014). *El desarrollo del pensamiento creativo en estudiantes de ingeniería ¿formados para crear?.* Trabajo presentado en el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires, Argentina.
González-Pienda, J., Núñez, J., González- Pumariega, S., Álvarez, L., Roces, C., González, P., Bernardo, A., Valle, A., Cabanach, R., Rodríguez, S., Sales, P. (2004). Estilos de pensamiento: análisis de su validez estructural a través de las respuestas de adolescentes al Thinking Styles Inventory. *Psicothema* 16(1), 139-148.
Huincahue, J. (septiembre, 2014). Estilos de Pensamiento para la Enseñanza en la Formación Inicial de Profesores de Matemática. Trabajo presentado en el VI Congreso Iberoamericano de Pedagogía, Santiago.
Hupaya, E. (2012) *Modelación usando Función Cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* (Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas), Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.
Kolb, D. A. (2014). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development.* [versión digital pdf].
Krumm, G., Arán Filippetti, V., Bustos, D. (2014). Inteligencia y creatividad: correlatos entre los constructos a través de dos estudios empíricos. *Universitas Psychologica*, 13(4), 1531-2143.
Krumm, G; Gutierrez, M; (2012). Adaptación y validación del Inventario de Estilos de Pensamiento de Sternberg (TSI) en la Provincia de Entre Ríos - Argentina. *Interdisciplinaria,* 29 (1), 43-62.
Lanza, C. (2004). Innovación es Ingeniería pura. La creatividad de los ingenieros españoles entre el siglo de las Luces y la era Internet. *Revista Obras públicas*, (3449), 7-16.
López, O., Martín, R. (2010). Estilos de pensamiento y creatividad. *Anales de psicología* 26(2), 254-258.
Morales A, Mena J., Vera F. y Rivera R. El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 237-256.
Proyecto Tuning Latinoamérica (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina.* Bilbao: Universidad de Deusto.
Saiz Vicente, E; Esteban Martínez, C; Molero Moreno, C; (1998). Revisión histórica del concepto de inteligencia: una aproximación a la inteligencia emocional . *Revista Latinoamericana de Psicología,* 30 (1), 11-30.
Salazar, C. (junio, 2000). Formación socio humanística del Ingeniero en Iberoamérica. Caso: Colombia. Trabajo presentado en la XXVII Conferencia Nacional de Ingeniería, México.
Saxena, M., Aggarwal, S. (2011). Thinking Styles of Prospective Teachers: An Empirical Study. *Brics Journal of Educational Research*,1(2), 94-101.
Spangenberg, E. (2012) Thinking styles of Mathematics and Mathematical Literacy learners: Implications for subject choice. *Pythagoras*, 33(3), 1-12.
Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. New York: Cambridge University Press.
Sternberg, R. (1999). *Estilos de Pensamiento*, Barcelon: Paidós
Sternberg, R. (2006). The nature of creativity. *Creativity Research Journal*, 18(1), 87-98.
Sternberg, R., O`Hara, L. (1999). Creativity and intelligence. En R. J. Sternberg (Ed.). *Handbook of creativity* (pp. 251-272). Cambridge: Cambridge University Press.
Trejo Trejo, E.; Camarena Gallardo, P; Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, 11 (número especial), 397-424.
Universidad Bernardo O´Higgins. *Perfil de Egreso.* Santiago, Chile. Recuperado de http://www.ubo.cl/facultad-detalle/3/18/ingeniera-civil-industrial/

## METAANEXO. RESULTADOS DE LAS FUNCIONES, FORMAS, NIVELES, ALCANCES E INCLINACIONES DE LOS ESTILOS DE PENSAMIENTO EN PERIODO INICIAL, INTERMEDIO Y FINAL EN ESTUDIANTES DE ICI

La categoría "muy alto" significa que se tienen todas o casi todas las características, la categoría "alto" significa que se tienen muchas de tales características, la categoría "medio alto" significa que se tienen algunas de las características. Las demás categorías dicen que no prefieren tales características. En la lectura de gráficos, si el indicador en las ordenadas está, por ejemplo, entre media alta y alta, significa que la preferencia es alta.

Gráfico No. 1

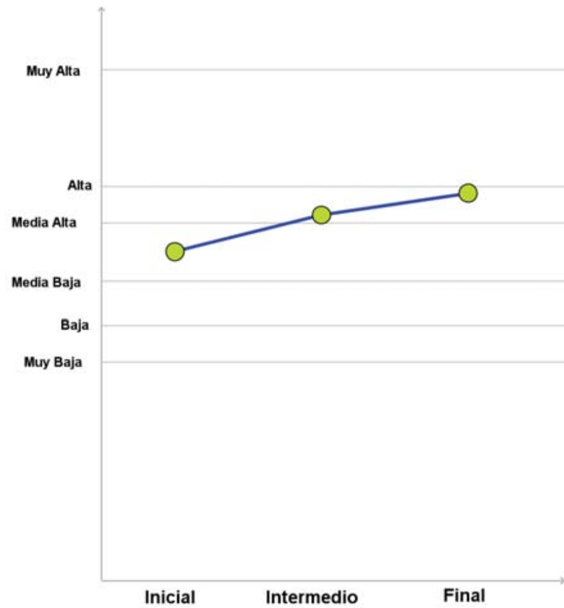
Estilo de pensamiento legislativo




Fuente: Elaboración propia del autor (2016)

Gráfico No. 2

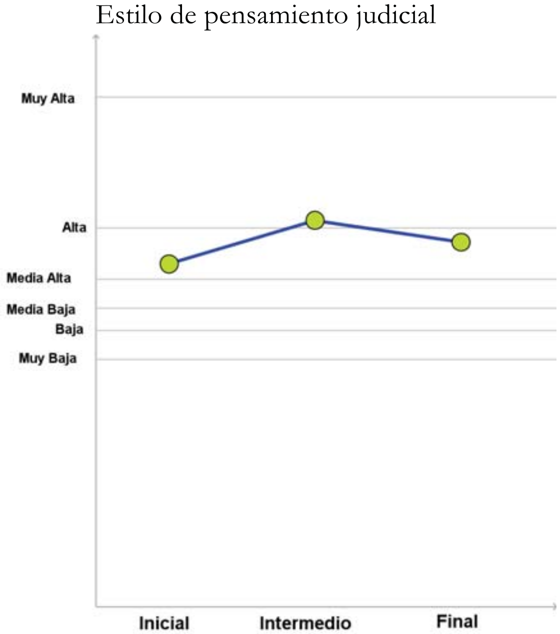
Estilo de pensamiento ejecutivo




Fuente: Elaboración propia del autor (2016)

Gráfico No. 3

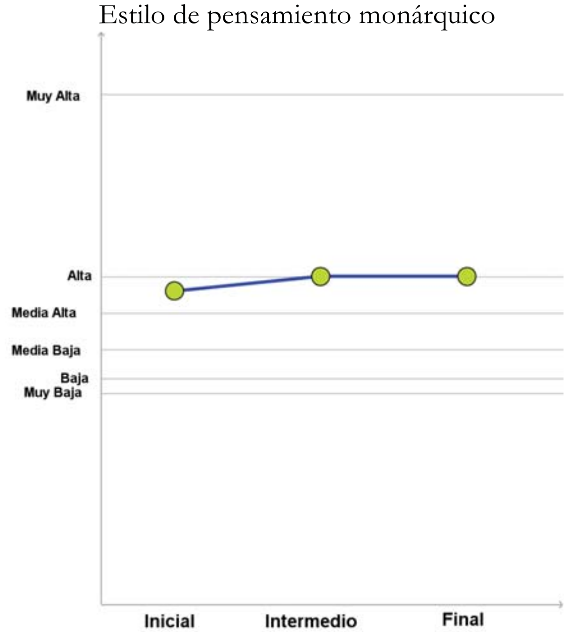
Estilo de pensamiento judicial




Fuente: Elaboración propia del autor (2016)

Gráfico No. 4

Estilo de pensamiento monárquico



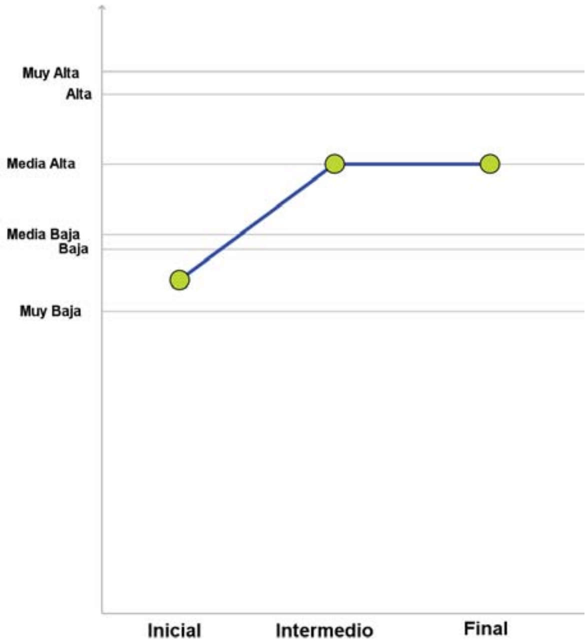

Fuente: Elaboración propia del autor (2

Gráfico No. 5

Estilo de pensamiento jerárquico

Gráfico No. 6

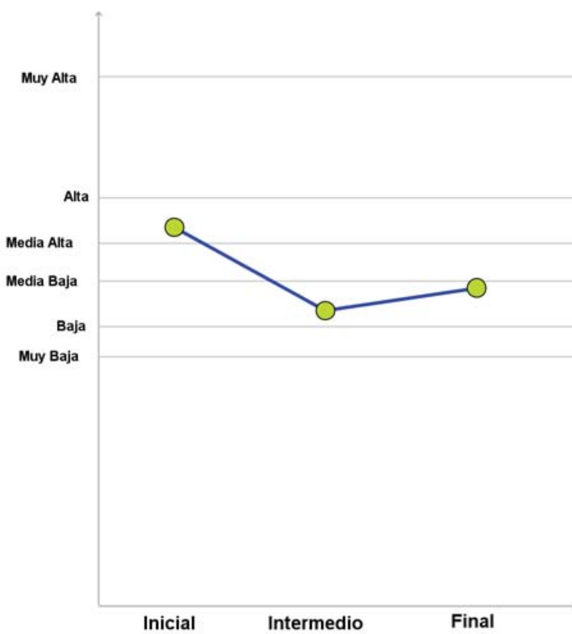
Estilo de pensamiento oligárquico




Fuente: Elaboración propia del autor (2016)

Gráfico No. 7

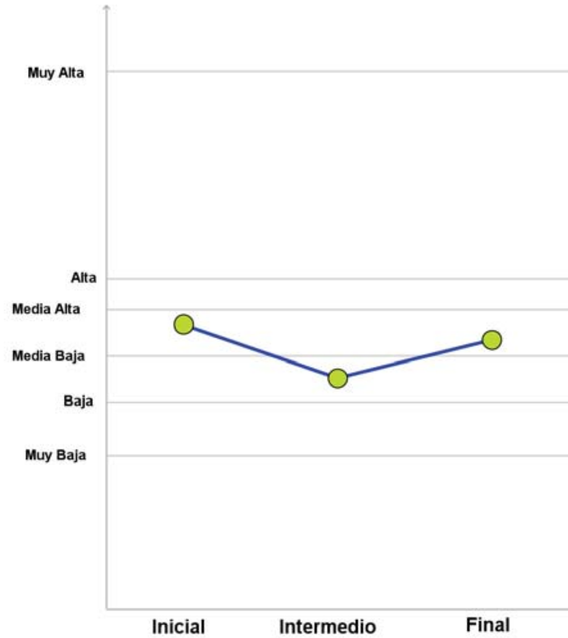
Estilo de pensamiento anárquico




**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

**Gráfico No. 9**

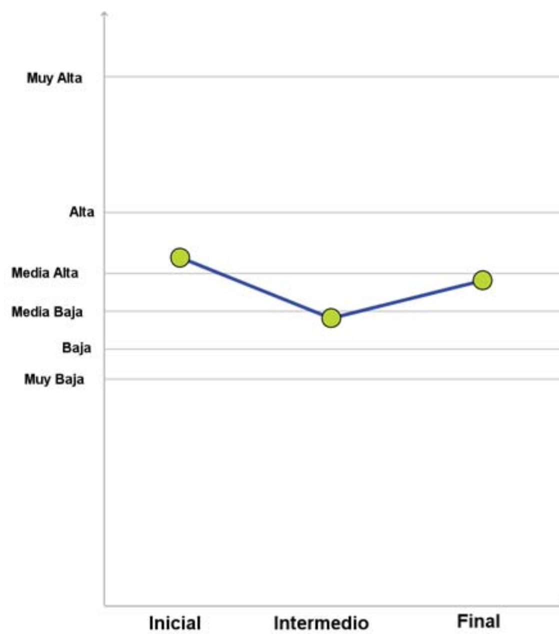
**Estilo de pensamiento local**




Fuente: Elaboración propia del autor (2016)

Gráfico No. 8

Estilo de pensamiento global

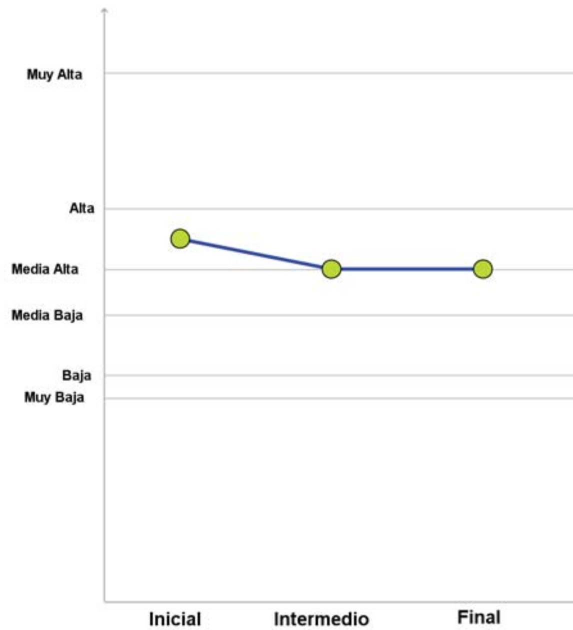



**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

**Gráfico No. 10**

**Estilo de pensamiento interno**

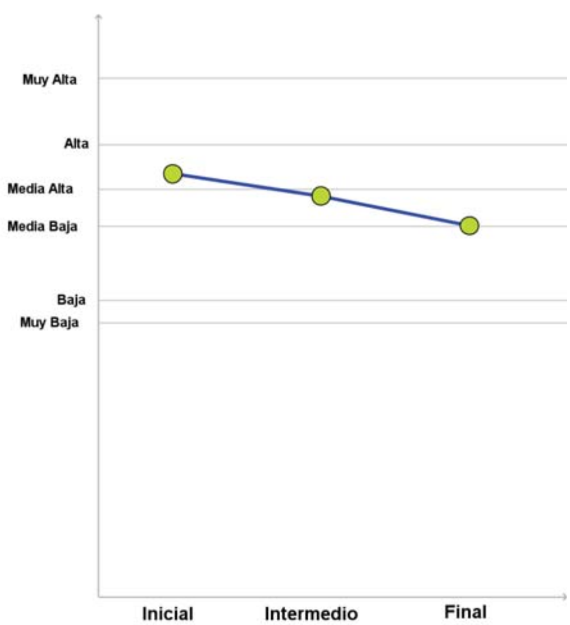

**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)




**Fuente:** Elaboración propia del autor (201

**Gráfico No. 11**

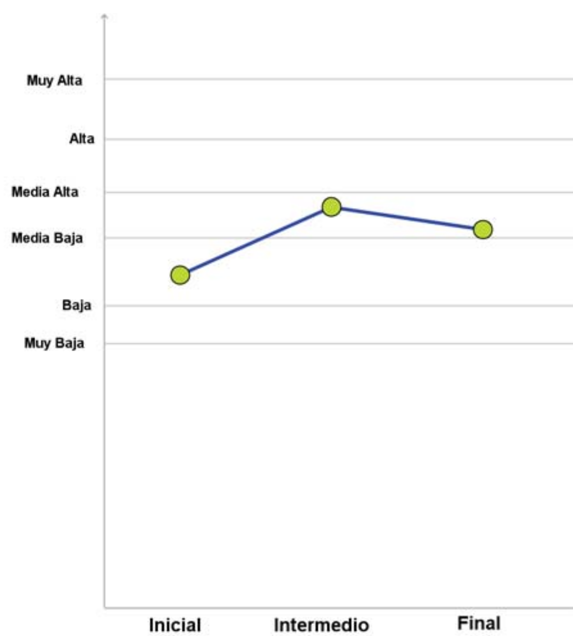
**Estilo de pensamiento externo**




**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

**Gráfico No. 12**

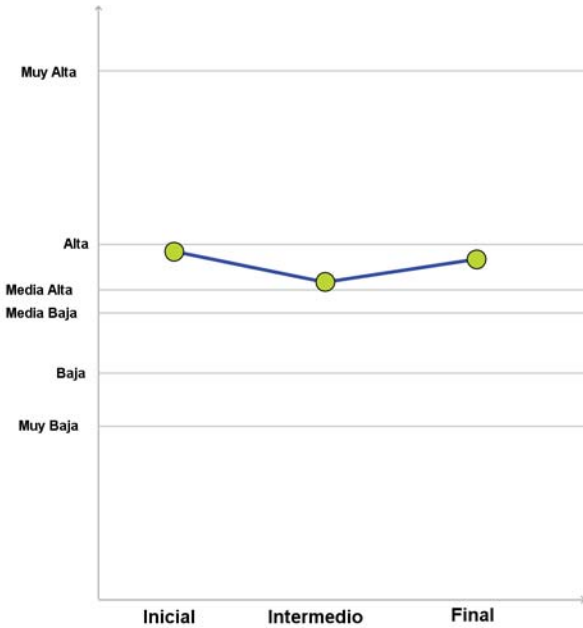
**Estilo de pensamiento liberal**




**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

**Gráfico No. 13**

**Estilo de pensamiento conservador**




**Fuente:** Elaboración propia del autor (2016)

# Anexo 2a

# Rúbrica del Diario de Aprendizaje

| Escala / Indicadores | Excepcional (5) | Cumple (3) | Debe mejorar (2) | Insuficiente (1) | Puntaje |
|---|---|---|---|---|---|
| **Comprensión y redacción global** | Elige correctamente conceptos vistos en clases para ser utilizadas como fundamento de reflexiones y/o razonamientos, sin caer en escritos netamente descriptivos. Respeta el uso gramatical y ortográfico a través de toda su reflexión. Generalmete indaga en bibliografía. | Conceptos vistos en clases para ser utilizadas algunas veces como fundamento de reflexiones y/o razonamientos. Generalmente respeta el uso gramatical y ortográfico. Ocasionalmente indaga en bibliografía. | Presenta contenidos de cada clase, siendo estos sencillos y poco significante, ocasionalmente evidencia errores conceptuales. Evidencia errores gramaticales u ortográficos. No indaga en bibliografía. | No presenta elementos de la clase, o bien, muestra constantes errores conceptuales, o bien, presenta errores gramaticales o ortográficos ajenos a una formación profesional. No indaga en bibliografía. | |
| **Didáctica de la Matemática, DM** | Analiza y reflexiona fenómenos de la DM desde una visión macro y micro nivel. Evidencia uso y dominio correcto de conceptos. Existe una permanente reflexión entre la MM y las DM. Ejemplifica fenómenos teóricos, genera propuestas teóricas y prácticas para la EyA. | Analiza y reflexiona fenómenos de la DM desde una visión macro y micro nivel. Evidencia uso y dominio correcto de conceptos. Ejemplifica fenómenos teóricos, genera propuestas prácticas para la EyA. Indaga en bibliografía. | Describe fenómenos de la DM. Evidencia uso o dominio incorrecto de conceptos. Ejemplifica fenómenos teóricos. | Describe fenómenos de la DM. | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Indaga en bibliografía. | | | | |
| **La Modelación en Matemática (MM)** | Destaca elementos basales de la MM sin caer en la simple descripción. Reflexiona y ejemplifica tópicos de la MM y repercusiones en la EyA, creando tareas de modelación relacionadas. Investiga de fuentes bibliográficas. | Destaca elementos basales de MM. Ejemplifica conceptos mencionando tareas de modelación. Ocasionalmente utiliza fuentes bibliográficas. | Describe elementos basales de MM. Ejemplifica conceptos mencionando tareas de modelación sin evidencia de creación personal. No utiliza fuentes bibliográficas. | Describe elementos basales de MM. No utiliza fuentes bibliográficas. | |
| **Enseñanza y aprendizaje** | Reflexiona y argumenta sobre la repercusión en la EyA de los tópicos vistos en clases, ejemplifica, propone y crea propuestas para la práctica docente. Establece relaciones según las bases curriculares. | Reflexiona sobre la repercusión en la EyA de los tópicos vistos en clases, ejemplifica propuestas para la práctica docente. Establece ocasionalmente relaciones según las bases curriculares. | Describe repercusiones vistas en clases en la EyA de los tópicos vistos en clases, ejemplifica propuestas para la práctica docente. No establece ocasionalmente relaciones según las bases curriculares. | No demuestra reflexión sobre la EyA. | |
| **Total** | | | | | |

Tabla 1. Rúbrica final del Diario de Aprendizaje.

# Anexo 2b
# Rúbrica y formato Reporte de Investigación

RÚBRICA
TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Acontinuaciónsepresentanloscriteriosaconsiderarenlaevaluacióndelatareade investigación.Laexposicióndebetenerunaduraciónde35minutosaproximadamente.Al finalizar, se debe permitir un tiempo para el planteamiento de preguntas, comentarios y en general cualquier intervención de los participantes del curso (incluido el profesor), en relación
Al tema expuesto, con el propósito de complementar y/o aclarar la temática presentada para su máxima comprensión. Cada grupo expositor debe extremar recursos educativos y tecnológicos, de modo que la audiencia quede los más compenetrada del tema posible, toda vez que estos tienen acceso al documento que se expone.
Para efectos de la calificación, se asignará puntuación a cada uno de los siguientes indicadores, considerando la escala: 0 = deficiente; 1 = regular; 2 = suficiente; 3 = buena; 4 = sobresaliente.

| PRESENTACIÓN LECTURAS | | Ptje. |
|---|---|---|
| CONTENID OS (45%) | Utiliza fundamentos claves sobre las sesiones de clase. Se refleja en la propuesta. | |
| | Expone el objeto matemático desde fundamentos teóricos didácticos y matemáticos. | |
| | Establece elementos teóricos de su propuesta: Competencias de modelación matemática. | |
| | Establece elementos teóricos de su propuesta: Perspectivas de modelación matemática. | |
| | Establece elementos teóricos de su propuesta: Evaluación en modelación matemática. | |
| PRESENTA CIÓN (25%) | La presentación es precisa, respecto de la temática y no se explaya con argumentos que más que aportar, entorpecen la explicación. | |
| | Verifica que la audiencia recibe lo que comunica, de acuerdo al núcleo del planteamiento. | |
| | Describe sintéticamente lo ocurrido en la experiencia. Destaca fenómenos que influyeron positiva o negativamente para laexperiencia. | |
| | Es dinámica y motivadora para la audiencia. | |
| | La presentación es clara y es posible leer desde cualquier lugar de la sala. | |
| | El material de apoyo, cumple con el propósito específico de este. | |
| | Hace uso del tiempo asignado en forma eficiente. | |
| REPORTE (Anexo 1) (30%) | Utiliza formato APA, editor de ecuaciones, etc. según el anexo 1. | |
| | Uso de redacción y ortografía. | |
| | Establece conclusiones relacionadas con el impacto de la actividad al curso. Levantan posicionamientos desde el qué significa ser un profesor de matemáticas hasta cómo es posible realizar las prácticas dentro del aula vía Modelación Matemática sin caer en la utopía. | |

# FORMATO
# TÍTULODEL TRABAJO

Nombre de los
Expositores Fecha

**Resumen**

(ENTRE 100 Y 150 PALABRAS)

Cuerpo del documento. En él, es una necesidad cumplir con formato APA, indicando claramente la referencia desde documentación validada por algún comité de edición científico. Por ejemplo: en Wikipedia o Slideshare cualquier persona puede subir algo, y nadie vela si lo que dice está bien o no. Sin embargo, un libro o un paper si son sometidos a algún filtro científico.

Existen distintas herramientas de ecuación en los programas como Word. Se recomienda utilizar alguno en caso de incluir simbología matemática. Es necesario utilizar el siguiente esquema para el cuerpo del reporte:

1. INTRODUCCIÓN, PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES
2. ELEMENTOS TEÓRICOS
3. PROPUESTA DE INNOVACIÓN
4. RESULTADOS
5. CONCLUSIONES
6. REFERENCIAS

Debe existir un planeamiento conciso y pertinente en cada uno de los puntos anteriores. Se espera que el escrito tenga mínimo 6000 palabras.

# Anexo 3
# Resultados Experimentación de Diego

## PROPUESTA DIDÁCTICA EN PATRONES: VISIÓN DESDE LAS COMPETENCIAS EN MODELACIÓN MATEMÁTICAS[14]

Resumen

La necesaria inclusión de la Modelación Matemática en las aulas chilenas, requiere de esfuerzos de toda la comunidad educacional para instaurarla en las prácticas docentes. En este trabajo, se crea una tarea de modelación matemática para abordar el concepto de patrones y fomentar las competencias de modelación; además, es construido un instrumento para evaluar tales competencias. A partir de la experiencia, se observó la autonomía de los estudiantes en la resolución de la tarea en ambientes conductistas y fuertes aspectos motivacionales generados.

**Palabras clave**: *modelación matemática, competencias, situaciones didácticas, constructivismo.*

### ANTECEDENTES DESDE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

La creación de modelos matemáticos para el aprendizaje de las Matemáticas es un tema complejo en todo nivel escolar y profesional, suficiente como para que se haya desarrollado como campo disciplinar, con resultados que evidencien elementos sustanciales en tareas de modelación matemática y la emergencia de constructos teóricos, que hoy conducen investigaciones en todo el mundo (Kaiser, Blum, Borromeo-Ferri y Stillman, 2011; Stillman, Kaiser, Blum y Brown, 2013).

En los últimos 30 años, la Modelación Matemática ha adquirido un rol cada vez más protagónico en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el desarrollo del conocimiento educacional e investigativo. El progreso teórico ha llevado a enriquecer las metodologías de enseñanza, líneas de investigación y desarrollo de múltiples programas de estudio en todos los niveles educacionales. En 1979, Henry Pollak (Borromeo-Ferri, 2006) considera a la Modelación Matemática como una manera de enlazar a la Matemática con "el resto del mundo", estableciendo un primer significado del devenir de progresivas posturas asociadas a la Modelación Matemática, entendimientos diferenciados dependientes del uso y contexto disciplinar que se le pueda asignar a una tarea de modelación (Barbosa, 2003); a partir de esto es que investigadores en el área han definido distintos ciclos de modelación que describen los procesos de modelación. En el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) se reportan algunos ciclos, destacando sus diferencias y similitudes epistemológicas.

[14]Este trabajo se realizó en conjunto con "Diego", una vez que la experimentación de la investigación finalizó.

En Chile, los Objetivos de Aprendizaje desde el año 2012 consideran transversalmente cuatro habilidades para Matemáticas: modelar, representar, resolver problemas y argumentar y comunicar; quedando como un constante desafío su inclusión en las prácticas docentes de las instituciones escolares del país y que conjuntamente se integren con los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC, 2012).

Actualmente, los resultados OCDE de Chile (2012) reflejan que es necesario fomentar e incluir de una manera más generalizada la Modelación Matemática en las aulas chilenas, para ser utilizada como herramienta generadora de competencias y habilidades "blandas". Actividades mecanicistas priman en el proceso de aprendizaje, descontextualizando la matemática, sin establecer una relación directa entre el mundo matemático y el mundo real. Visto de esta manera, ciclos de modelación como el de Blum-Borromeo (2006) permiten estructurar actividades que fomenten el desarrollo de las competencias solicitadas tanto por el currículum nacional como por pruebas internacionales.

## PROBLEMATIZACIÓN

Cuando se practican tareas de modelación matemática en el aula, una opción es enmarcarla desde la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007), pudiendo esclarecer dificultades y obstáculos que los estudiantes afrontan al modelar. ¿Cómo fomentar la capacidad de hacer inferencias, experimentar, crear hipótesis, debatir, compartir ideas, trabajar colaborativamente, y además permitir la conducción del aprendizaje de los contenidos requeridos?

El trabajo se sustenta en el supuesto del dominio de al menos los dos primeros niveles de las habilidades de pensamiento de la taxonomía de Bloom, para una apropiada realización de la actividad (Bloom, 1986) ¿cuáles son esos dos primeros niveles?. Además, se evaluarán las competencias de modelación (en el sentido de Blum y Kaiser, 1997, citado en Maaß, 2006) evidenciadas por los estudiantes de octavo año básico de un colegio determinado; en el desarrollo de una actividad de modelamiento matemático, será necesario establecer algunos parámetros que nos permitan comprender el desarrollo de este para generar una rúbrica de evaluación, una clara innovación en el estudio de la Modelación Matemática.

Considerando los antecedentes mencionados, nos enfocamos en el siguiente objetivo: evaluar las competencias y subcompetencias de Modelación Matemáticas de Blum y Kaiser (1997) desde la creación de una tarea de modelación y el instrumento de evaluación.

## EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

La actividad fue realizada en un colegio Municipal de la ciudad de San Felipe en alumnos de 8º año de Enseñanza Básica. El día de la actividad asistieron 17 alumnos, quienes formaron grupos de trabajos; 3 grupos de 4 y 1 grupo de 5 integrantes. Ellos contaron con aproximadamente 1 hora para realizar la tarea de modelación. En la sala había dos evaluadores que les entregaron material didáctico, ver figura 1.

La profesora que comúnmente hace clases en el curso, tiene prohibición de trabajar grupalmente, aludiendo a que es perjudicial por el desorden que se genera. Generalmente trabaja enfocada en la ejercitación sistemática y repetitiva, dicta y enumera los pasos para resolver los ejercicios desde un paradigma conductista. Por lo tanto, los estudiantes no habían tenido experiencias de modelación en la clase.

Figura 1. Material didáctico implementado. A cada grupo de trabajo se le entregaron 7 cubos iguales de madera, de 1 pulgada de arista aproximadamente como material didáctico.

La actividad propuesta es la siguiente: "Una constructora tiene un diseño para un tipo de edificio, en el cual cada piso, al mirarlo desde arriba, tiene forma cuadrada y en cada pared hay un gran ventanal, con tal de que los trabajadores cuenten con la iluminación natural apropiada. Además, en el diseño se incluye que en el último piso, al mismo tiempo de los cuatro ventanales, se coloque un tragaluz, con tal de dar una sensación de amplitud a quienes allí trabajen. Dado que la constructora tiene diferentes demandas, debe tener una forma rápida de calcular cuántos ventanales debe mandar a fabricar según la cantidad de pisos que sus clientes le exijan.

1. ¿Qué estrategia podría usar la empresa para determinar la cantidad de ventanales a utilizar en diferentes casos (un piso, dos pisos, tres pisos,…)?

2. ¿Puedes proponer una forma general de calcular una cantidad cualquiera de ventanas, dado los pisos que un cliente requiera?

3. Si se dispone de una cierta cantidad de ventanas en stock ¿se puede anticipar para cuantos pisos alcanzará?

4. ¿Qué pasará si quiero hacer un edificio de 1000 pisos? (analizar en un contexto real).

5. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la expresión que modela la situación?

6. ¿Cuál será la variable dependiente y la variable independiente en la situación de los edificios y ventanas?

El instrumento de evaluación de la tarea de modelación es una escala de estimación creada a partir de las Competencias de la Modelación Matemática de Blum & Kaiser (1997).

Tabla 1. Instrumento de evaluación por competencias de modelación.

| Subcompetencias | Muy baja | Baja | Medio | Alta | Muy alta |
|---|---|---|---|---|---|
| **1 Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones** | No matematiza cantidades ni sus relaciones | Escasamente logra matematizar cantidades o lo hace inadecuadamente | Es capaz de matematizar cantidades, sin distinguir las relevantes de las irrelevantes | Es capaz de matematizar cantidades relevantes o bien sus relaciones | Es capaz de matematizar cantidades relevantes y sus relaciones |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **2 Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario reducir su número y complejidad** | No simplifica cantidades relevantes ni sus relaciones. Tampoco reduce su número y complejidad | Escasamente logra simplificar cantidades relevantes o sus relaciones, o lo hace inadecuadamente | Es capaz de simplificar cantidades relevantes o sus relaciones si es necesario sin reducir la complejidad | Es capaz de simplificar cantidades relevantes o sus relaciones o bien Reducir su número | Es capaz de Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario Reducir su número y complejidad |
| **3. Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente** | La competencia en cuestión no se encuentra evidenciada | Escasamente logra escoger apropiadamente notaciones matemáticas o representar situaciones gráficamente o lo hace inadecuadamente | Es capaz de Escoger notaciones matemáticas | Escoger apropiadamente notaciones matemáticas o bien representar situaciones gráficamente | Es capaz de Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente |
| **4. Uso de estrategias heurísticas** | La competencia en cuestión no se encuentra evidenciada | logra usar estrategias heurísticas pero lo hace inadecuadamente | Escasamente logra usar estrategias heurísticas | Es capaz de hacer Uso de estrategias heurísticas | Es capaz de hacer Uso de estrategias heurísticas y realizar la conexión al trabajo matemático realizado |
| **5. Uso del conocimiento matemático para resolver el problema** | La competencia en cuestión no se encuentra evidenciada | hace uso del conocimiento matemático para resolver el problema pero lo hace inadecuadamente | Escasamente Hace Uso del conocimiento matemático para resolver el problema | Con dificultad Hace Uso del conocimiento matemático para resolver el problema | Es capaz de hacer Uso del conocimiento matemático para resolver el problema. |

En la siguiente tabla observamos los resultados del análisis de datos y de la aplicación del instrumento de evaluación, donde tan solo 1 grupo consiguió desarrollar la subcompetencia 1 en un nivel muy alto.

Tabla 2. Resultados generales de los 4 grupos del curso según el nivel de desarrollo de competencia.

| **Subcompetencias** | **Muy baja** | **Baja** | **Media** | **Alta** | **Muy Alta** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 |
| **2** | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| **3** | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| **4** | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| **5** | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| **Total** | 0 | 8 | 8 | 3 | 1 |

Todos los grupos llegaron a determinar el objeto matemático necesario para resolver la tarea. Algunos grupos pudieron dar respuestas "intuitivas" a la pregunta 3, pero un grupo logró determinar una expresión que determina el número de pisos, dando muestras de un incipiente uso de la función inversa asociada a la respuesta esperada, como lo evidencia la figura 2a.

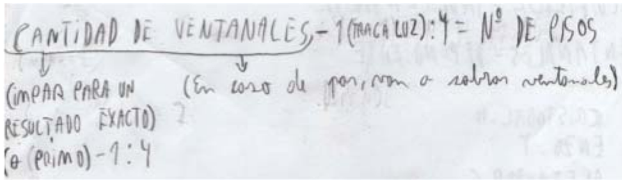


Figura 2a. Tipo de respuesta, desde la función inversa de la esperada.

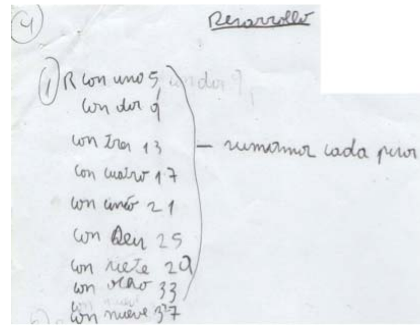


Figura 2b. Tipo de respuesta según lo esperado.

En la Figura 2b se muestra el proceso usual por el que el resto de grupos determinaron la cantidad de ventanales de acuerdo al número de pisos. Esta tabulación de datos permitió dar respuesta a la misma pregunta que respondieron en la figura 2a (pregunta 3 de la actividad). Solo un grupo creó un segundo objeto matemático para dar respuesta a esta pregunta.

## CONCLUSIONES

Todos los grupos fueron capaces de crear el objeto matemático en base a la experimentación con material concreto, formulación de hipótesis y validación de las mismas, evidenciando las fases de la Actividad Adidáctica, pudiéndose generar enriquecedores debates entre los alumnos, quienes defendían sus creaciones apelando a recursos matemáticos y a la manipulación de los recursos concretos.

Las competencias de modelación de Blum y Kaiser (1997) que los alumnos evidencian en los resultados, no tienen una relación directa con su desempeño habitual en la asignatura bajo la metodología conductista utilizada por el profesor. Sin embargo, la positiva respuesta de los estudiantes, muestra que la creación de tareas adecuadas a las capacidades y a la realidad de los alumnos, puede fomentar la obtención de resultados más cercanos a lo requerido actualmente por el currículum nacional, independiente de los prejuicios que la comunidad educativa muchas veces impone. Los resultados son bajos en cuanto a los niveles de logro. Sin embargo, la propuesta de la tarea y el instrumento de evaluación son lo suficientemente interesante como para incluirlo en prácticas docentes.

La innovación desde paradigmas constructivistas impacta en los estudiantes, permitiendo observar otros usos de la Matemática en el aula y fomentando el hacer, actuar y razonar de manera autónoma, siendo capaces de construir conocimiento matemático como ellos lo perciban.

## Referencias


Blum, W., & Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bloom, B. S. (1986). Taxonomía de los objetivos de la educación: la clasificación de las metas educacionales, manuales 1 y 2. México: El Ateneo.

MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 5 de mayo de 2015, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R. Y Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling ICTMA 14. New York: Sringer Verlag.

Maaß K. (2006). What are modelling competences?. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol.38 (2) 113-142.

OECD (2014), PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA. OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264201118-en

Stillman, G, Kaiser, G., Blum, W. y Brown, J. (2013). Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice. New York: Springer

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86-95.

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), Mathematical modelling: a way of life. 227-234. Chichester: Ellis Horwood.