Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Una Resignificación de lo exponencial a través del binomio modelación-graficación

Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de las Matemáticas.

Carolina González.

2013

Profesora guía: Astrid Morales.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a la Profesora Astrid Morales, por su tiempo, colaboración, paciencia y calidad humana, entregado en todo este tiempo de desarrollo del magister, sin su aliento, esta tarea habría sido aún más difícil de encaminar.

Agradecer también a los profesores del Magister, que de cierta manera aportaron al desarrollo de esta investigación, pero en especial al profesor Arturo Mena, por su completa dedicación y apoyo incondicional a nosotros sus estudiantes, por sus consejos, por su fascinante forma de hacer las clases y sobre todo, por su empatía.

Agradezco también a mis compañeros, por sus aportes, en especial a Lorena, Gabriela, Michel y Lady, que fueron una gran contribución en esta investigación.

A mi madre, siempre tan incondicional, gracias por tu paciencia y apoyo.

Finalmente a mis alumnas, por su tiempo y buena disposición, sin ellas, este proceso no podría haber concluido.

ÍNDICE

RESUMEN

La investigación considera como problemática específica cuál es el uso de las gráficas cuando se resignifica lo exponencial a través del binomio modelación-graficación, en el ámbito escolar, para esto se construyó una situación específica, en particular una situación de aprendizaje que resignifique lo exponencial.

La teoría Socioepistemológica a través de diversos resultados de investigación, señala lo conveniente de hacer estudios del uso del conocimiento matemático y su desarrollo, para crear un marco que ofrezca las prácticas de referencia donde se resignifique a la matemática. En ese sentido se plantea en esta investigación, enfocar la atención al uso de la gráfica, con el fin de construir un marco de referencia que evidencie los funcionamientos y formas de las gráficas según las actividades que generan las prácticas institucionales, Además, atendiendo al objetivo de la Socioepistemología, teoría que guía esta investigación, es que se realizó un estudio epistemológico del concepto de función, un análisis de los programas de estudio y texto, que brindaron nociones acerca del estatus de la función exponencial.

Posteriormente, con la información recopilada, se construyó un diseño de situación de aprendizaje en torno al uso de las gráficas determinado por tres momentos: establecimiento de la forma de las gráficas en la modelación, construcción de argumentos a través de la variación y la funcionalidad de lo exponencial a través de la modelación-graficación.

Con ello se fortalece la investigación, mirada desde la perspectiva de la Socioepistemología, la cual consiste en ampliar la visión de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde las prácticas sociales, sus categorías y los argumentos, son necesarios para la resignificación del conocimiento matemático.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación, tiene una mirada desde el marco teórico de la Socioepistemología, se centra en comprender el uso de las gráficas cuando se resignifica lo exponencial a través del binomio modelación- graficación, en oposición al estatus dado a la gráfica y modelación en el discurso matemático escolar, en donde es referida como una representación del concepto de función y como una generalización algebraica, respectivamente.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el caso específico de las gráficas, éstas son referidas usualmente como la representación del concepto de función, por tanto, el papel de la gráfica es el instrumento para ayudar a comprender el concepto de función, esto, producto del modelo de conocimiento que comúnmente es utilizado en la educación, ya que centra la atención en los conceptos matemáticos limitándose a entender el conocimiento como algo preexistente a la experiencia de los grupos humanos. De esta manera, se concibe a la matemática escolar como un producto acabado y que siempre ha existido, lo anterior lo vemos reflejado en los programas de estudio, los cuales están estructurados a partir de secuencias de contenidos matemáticos que provocan efectos en las concepciones de la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Una de las consecuencias, es aquella creencia donde el estudiante tiene que realizar innumerables ejercicios repetitivos, con la finalidad de que el estudiante mecanice un algoritmo matemático. Estas experiencias favorecen un estatus utilitario de la matemática, pero no así funcional donde el conocimiento matemático se construye y transforme la realidad. La Socioepistemología sostiene que el conocimiento matemático debe ser funcional, incorporando a las prácticas institucionales en el modelo del conocimiento, que en consecuencia rompen con la centración de los conceptos matemáticos, en ese sentido ya no se miran los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino que se tratan con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Tal aproximación, propone crear un modelo de conocimiento que dé cuenta de lo que constituye su conocimiento matemático y ponga al descubierto las causas reales de tal conocimiento.

La Socioepistemología incorpora de manera sistémica las cuatro componentes para la construcción social del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003); asumiendo como tesis fundamental que las prácticas sociales han sido y son las que van generando conocimiento matemático, el cual va modificándose para establecerse tal y como lo conocemos en la actualidad, revelando que tras todo el conocimiento, existe una consistencia social que respalda la construcción de los saberes matemáticos y son precisamente las prácticas sociales la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar.

Investigaciones en el marco de la socioespistemología, dan evidencias que las gráficas son argumentativas y dan fundamentos al razonamiento matemático. Con base a lo anterior, esta investigación se centra en comprender el uso de las gráficas de la función exponencial a través de binomio modelación-graficación en segundo año de enseñanza media, la metodología adoptada para tal fin, es realizar un estudio epistemológico del concepto de función, posteriormente una revisión de los programas de estudio con el propósito de conocer el estatus epistemológico de la gráfica, cómo es tratada, cómo se hace presente la graficación en el discurso matemático escolar y el momento en que aparece curricularmente, evidencias de lo anterior se encontrarán en los análisis a los libros de texto otorgados por el MINEDUC, para luego, con la información recopilada, diseñar una situación de aprendizaje que logrará la resignificación de lo exponencial en los estudiantes.

La siguiente investigación, se ha estructurado en cinco capítulos que ilustran el trabajo que se llevó a cabo en torno a la problemática de investigación. En las siguientes líneas brindamos un panorama general del desarrollo de los capítulos que conforman la presente tesis.
En el capítulo uno, se plantea la problemática de investigación y los antecedentes que aportan evidencias a dicho estudio.
En el capitulo dos, se presenta un análisis epistemológico del concepto de función para comprender la evolución del objeto a través de la historia y un estudio del binomio modelación-graficación visto en el programa de estudios y textos, para conocer el estatus de la gráfica y modelación en el discurso matemático escolar.
En el capítulo tres, se plantea el marco teórico que guía la investigación, esta es la teoría de la Socioepistemología, donde se abordan a las prácticas sociales como la fuente de reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar y se justifica el estudio del uso de las gráficas a través del binomio modelación- graficación.
En el capítulo cuatro se presenta el análisis a priori, a posteriori y la confrontación del diseño de situación, concluyendo en el capítulo cinco, con una discusión sobre las evidencias obtenidas de la hipótesis de investigación.

CAPITULO I: ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En este capítulo se plantea la problemática de investigación y su dependencia con el modelo de conocimiento que se adopta en los estudios de enseñanza y aprendizaje en el discurso matemático escolar. Además se entregan antecedentes acerca de estudios que dan evidencia de la problemática y posteriormente los objetivos e hipótesis en el marco de la teoría de la socioepistemología

1.1 PROBLEMÁTICA

Uno de los conceptos más relevantes y fundamentales en la enseñanza escolar, es el de función, ya que "tal y como se define actualmente en matemática es un objeto elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de la evolución de más de 2000 años" (Ruiz, 1998). Lo interesante de este concepto, que a pesar de gestarse hace tantos años, sigue más vigente que nunca, el ser humano durante la historia ha demostrado la necesidad de generalizar el resultado de un experimento, comprender la tendencia de un fenómeno de la naturaleza, analizar el comportamiento de un movimiento físico a través de sus gráficas, predecir sobre el precio petróleo en un tiempo determinado, observar el crecimiento que tiene una población de bacterias en un tiempo determinado, modelar la tendencia en la economía, etc. Actualmente, con toda la facilidad que existe con la tecnología para tener acceso a la información, un estudiante debe ser un entendido de su entorno, ser capaz de comprender como funcionan los comportamientos de diversos fenómenos que se presentan en la sociedad, ciencias, economía y naturaleza. Como docentes tenemos el deber de promover en el aula que nuestros alumnos sean analíticos, reflexivos, críticos, personas que sean capaces de comunicar lo que están observando sobre las diversas situaciones que suceden en el mundo. Entonces, si la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, ¿por qué estos temas son solo interesantes y abordables fuera del aula y completamente desconectados con la realidad de los estudiantes?, ¿por qué el discurso matemático escolar vigente privilegia el dominio de los conceptos matemáticos por sobre la construcción del conocimiento y aprendizaje del objeto matemático? Lamentablemente muchos de nuestros estudiantes están inmersos en un sistema educativo que suele darle más valor a una matemática disjunta de la vida real, alejándolo completamente de la idea de entender cómo funciona el mundo que los rodea.

Si bien, la matemática se ha construido fuera de la escuela y su introducción en el sistema de enseñanza obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2003), es necesario introducir aproximaciones educativas que permitan adaptar los saberes a la prácticas culturales que ocurren en el seno de la escuela, no podemos concebir el aprendizaje de la matemática separada de la naturaleza humana, por ende, se entenderá como una actividad que se desarrolla en un escenario escolar y no alejada de éste (Crespo, 2010).

Lo que sucede actualmente en el aula no permite el aprendizaje de los estudiantes en cuanto al concepto de función, que es lo que esta investigación trata, ya que el tratamiento dado a dicho objeto ha perdido su carácter dinámico, se ha convertido en un estudio de fórmulas, con tendencia a focalizarse en los conceptos, a utilizar la gráfica como una mera representación del concepto que para los estudiantes no tiene sentido. El concepto de función en el discurso matemático escolar[1] no se constituye como una herramienta para resolver preguntas en otros momentos de su vida, dentro y fuera de la escuela y en otros contextos. Esto se debe a que por lo general, en la enseñanza del concepto función, se centra la atención en el procedimiento, pero este énfasis no ha sido eficaz para la construcción de concepciones fundamentales y que son significativas para permitir la interpretación y la utilización de la función (Carlson; Oerhtman, 2005).

Hoy el discurso matemático escolar, privilegia en la actividad matemática el argumento algebraico, predominan los algoritmos y procedimientos, que oscurecen el pensamiento variacional, restringiendo el uso de gráficas y modelización. La concepción actual en el discurso escolar es que la validez de la generalización de una situación en la resolución de un problema, tiene un mayor argumento si se realiza a través del concepto, en cuanto a las gráficas de las funciones, investigaciones han demostrado que tradicionalmente han tenido un tratamiento privilegiado como representación del concepto de función (Cordero y Flores, 2007). Estas visiones hacen que el estudiante utilice el concepto, pero no es capaz de comprender su funcionalidad.

[1] Discurso matemático escolar: termino teórico en el marco de la socioepistemología. Definición en el capítulo del marco teórico.

Por ejemplo y más específicamente en el tema de esta investigación, conocer otros modelos al momento de construir un objeto de estudio, es de vital importancia para la mejor comprensión del concepto. Por otro lado, es enriquecedor para el aprendizaje de los estudiantes que trabajen con actividades que permitan comprender cómo funciona lo exponencial a través del uso de las gráficas en cualquier proceso, ya sea estadístico, biológico, físico, químico, etc. De esta manera, el uso de la gráfica no es visto como el desarrollo representacional del concepto de función exponencial, sino como modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, con el fin de propiciar la búsqueda de explicaciones del comportamiento de cierto fenómeno, pues de esta manera se induce a determinar las propiedades que son intrínsecas de la función, permitiendo el análisis del desarrollo de un proceso ya sea de crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión, máximos, mínimos etc. Y no menos importante, es realizar actividades de modelación que permitan dar significados matemáticos al concepto de función exponencial y no en la simple aplicación de fórmulas.

El uso del conocimiento desde la matemática misma, como modelar, variar y graficar, son esenciales al momento de argumentar matemáticamente y le dan un soporte al desarrollo del razonamiento matemático. (Cordero, 2003; Rosado, 2004¸Campos; Domínguez, 2003). Se entenderá por modelar aquellas prácticas que se desarrollan en interacción con un fenómeno (químico, físico, social, etc.) conjeturando y haciendo predicciones acerca de esos modelos, en cuanto a graficación se entenderá por el uso de las gráficas comprendiendo su forma y función, por último decimos que una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo de cambio en el sistema u objeto que se está estudiando (Cantoral, 2000).

En esta investigación, en contraste de lo que formula el discurso matemático escolar, se propone brindar un modelo en oposición a dicha centración de conceptos. Es decir, precisar otro marco de referencia enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional, que explique las gráficas de las funciones como una manifestación de los usos del conocimiento en el discurso matemático escolar, donde al debatir entre sus funcionamientos y sus formas en el ámbito escolar, se genere la construcción del conocimiento. En cuanto a lo institucional será aquello que hace que la graficación y modelación se desarrollen y se acepten como producto material social que tenemos que aprender y enseñar.

Considerando los argumentos expuestos anteriormente, es que se ha escogido la Socioepistemología, como marco teórico que da evidencia y sustento a esta investigación, que tiene como uno de sus fines impactar en el sistema educativo, estableciendo nexos y puentes entre la investigación y la realidad en el aula. No pierde de vista que la matemática es un constructo sociocultural y las prácticas de referencia que le dan origen y vida a esta disciplina, así como también incorpora con mayor énfasis la componente epistemológica en sus investigaciones, como una herramienta indispensable para la comprensión de los sucesos áulicos y como una fuente de información respecto a las dificultades y modos de superación producidos en el desarrollo de las nociones y conceptos matemáticos, así como también de significados que, por los procesos de comunicación se diluyen o pierden en el tiempo. (Ferrari, 2001)

Se entiende por Socioepistemología como un marco teórico que permite reconocer el conocimiento matemático como de naturaleza social, en particular, al tratar con la matemática dentro de los sistemas didácticos, la relación entre la actividad que se desarrolla el alumno y la generación del conocimiento (Cordero, 2011). En el tercer capítulo, se profundizarán términos teóricos relevantes que fundamentan y dan cuenta de esta teoría.

1.2 ANTECEDENTES

El concepto de función ha sido estudiado en numerosas ocasiones y con diferentes enfoques dentro de la Didáctica de la Matemática Educativa, se considera necesario, para dar sustento a la problemática, analizar distintas aportaciones realizadas por diferentes grupos de investigación que reportan sus resultados respecto a la apropiación por parte de los alumnos del concepto de función como el de su enseñanza, sin dejar de lado, el centro de esta investigación, el concepto de función exponencial visto a través de la gráfica, modelación y variabilidad.

Es importante aclarar por qué el conocimiento relacionado con la función exponencial debe ser funcional. En una de sus investigaciones Cantoral y Farfán (2003) plantean que toda sociedad necesita que el conocimiento que se adquiere en la escuela sea funcional, es decir, que se integre y se resignifique permanentemente en la vida (fuera de la escuela) para transformarla. El anclaje en el dominio matemático que se observa en las explicaciones y propuestas didácticas, que obliga a explicar la matemática desde la matemática misma, no toma en cuenta los otros dominios científicos ni, sobre todo, las prácticas de referencia que permitieron el surgimiento del conocimiento matemático.

En el caso específico de la función exponencial, el uso utilitario de esta, no permitiría entender modelos asociados a otras ciencias como la economía, biología, física, etc. Por eso, es importante que la función exponencial sea funcional, para comprender sucesos que ocurren fuera del aula.

Ahora bien, para Sierpinska (1992), los actos de entendimiento más relevantes para el concepto de función consisten en la identificación de cambios observados a nuestro alrededor como un problema práctico a resolver, así como también, el reconocimiento de regularidades en las relaciones entre cambios como una manera de estudiarlos. Ignorarlos como condiciones necesarias para el desarrollo de la noción de función, conllevaría enfrentar un obstáculo epistemológico, relativo a la filosofía de la matemática, respecto a considerar que los problemas prácticos no conciernen esta disciplina. Esto desconocería lo sucedido en la historia, pues las funciones aparecieron como herramientas para predecir y describir fenómenos de la naturaleza. Además establece que la definición es una descripción del objeto conocido a través de los sentidos, la definición no determina al objeto, sino el objeto a la definición. Superar este obstáculo requeriría la capacidad de discriminar entre una definición matemática y la descripción del objeto, es decir, hacer una síntesis de la concepción general de función como objeto.

Ruiz (1998) en el plano didáctico-epistemológico, analizó las concepciones que presentan los alumnos sobre la noción de función y de qué manera se aborda en los textos de estudio y programas curriculares. Estudió el fenómeno de transposición didáctica, e identificó los obstáculos didácticos y cognitivos alrededor del concepto. Con ello confirmó que las concepciones de los alumnos coinciden con la evolución histórica del concepto, es decir, además de que el tratamiento que se da al concepto de función como “objeto de estudio” le resta importancia como herramienta matemática.

En este mismo plano, Guzmán (1998) hizo una presentación sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de nociones relativas a funciones y el sentido que cobran en ellos, utilizó un enfoque cognitivo sustentado en registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. Por medio de un análisis de respuestas, puso en evidencia el hecho de que no se ha dado la suficiente importancia a la relación existente entre las diversas formas en que es posible representar una función. El estudio formula que en general, los estudiantes utilizan “monoregistros”, es decir, sus respuestas están dadas en el registro en que es formulada la pregunta, algunas veces recurren al algebraico, pero en la mayoría de los casos no coordinan dos o más.

Concluye que esta deficiencia es una cuestión de aprendizaje y debe ser tomada en cuenta sobre lo que se está enseñando. También detectó la dificultad para relacionar, ya que los estudiantes no logran coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico.

Se ha puesto en evidencia que nuestros estudiantes tienen dificultades para comprender la función, más aún, con un sistema escolar que no permite lograr este conocimiento. En uno de sus estudios, Quiroz (1989) distingue la enseñanza sobrevalorada de los aspectos formales y algorítmicos, en general, desprovistos de significados para el estudiante, lo cual redunda en la construcción de un universo restringido de formas gráficas y expresiones analíticas en la cultura escolar y por tanto en los saberes de los estudiantes y profesores. Se dejan de lado, por tanto, las argumentaciones visuales y los enfoques numéricos, entre otras causas por no ser considerados como procedimientos matemáticamente válidos. Además, da cuenta que la apropiación del conocimiento no se lleva a cabo, en general, a partir de la definición conceptual sino desde una severa acción algorítmica propiciada por los docentes en el salón de clases, considerándose que esta algoritmia se refleja como un obstáculo en la apropiación en los estudiantes.

En esta búsqueda, se manifiesta que los estudiantes tienen dificultades para hacer uso de la gráfica como una forma de obtener el conocimiento, para dar cuenta de la importancia de ésta. En un estudio Suarez y Cordero (2005), promueven el potencial de la graficación, ya que este puede ir más allá si se le considera en sí misma una modelación. Enuncian que las características que debería cumplir son las siguientes:

- Se deben obtener a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y que pueda hacer ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica.
- Debe tener un carácter dinámico que permita crear modelos gráficos que se conviertan en argumentos para nuevas descripciones de movimientos.
- Debe propiciar la búsqueda de explicaciones y enfatizar los comportamientos invariantes en las situaciones.

Uno de los propósitos de esta investigación, es dar evidencias de que la práctica de la graficación soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación. Existen investigaciones que sustentan este uso de la gráfica, Zaldívar y Cordero (2010) muestran en su investigación los usos de las gráficas en diferentes escenarios de divulgación de la ciencia cuando se trabajan ideas gráficas relacionadas con la estabilidad de las soluciones de una función. En dichos escenarios de difusión se propone una situación de modelación del movimiento que con ayuda de calculadoras y sensores de movimiento, genera discusiones en la que los participantes hacen uso de las gráficas que se generan con la calculadora o que ellos proponen. Dichos usos tienen un carácter funcional y un sentido específico que no dependen de las propiedades analíticas de la función que ahí intervienen. En el desarrollo de dichos usos entre los participantes se obtuvo la resignificación de la función, al estudiar el comportamiento de ésta a través de la gráfica.

López (2009) comenta en su estudio que la forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de construcción del concepto de función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes. En una de sus investigaciones, Cantoral (2000) da evidencia sobre la falta de argumentos por estudiantes de nivel universitario para explicar que dada un gráfica de una función (solo la gráfica) se les pide responder ¿Dónde la tercera derivada es positiva? Como tal pregunta no forma parte de su conocimiento aprendido por el discurso matemático escolar, no permitió crear en estudiantes las suficientes estructuras variacionales para responder a la pregunta y por lo tanto el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

El estudio de procesos de aprendizaje en el “aula tradicional” tiene que cambiar si queremos evidenciar otras formas de construcción del conocimiento matemático, por ello es necesario considerar otros escenarios donde la matemática no es objeto de estudio pero que sin embargo el conocimiento matemático subyace. Un ejemplo de esto, es el conocimiento cotidiano, el cual está provisto de ideas, intuiciones o sentido común donde subyace una matemática. Briceño y Cordero (2010) realizan un estudio bajo la aproximación teórica de la socioepistemología, tratando de caracterizar este conocimiento, se intenta desarrollar un pensamiento variacional característico del escenario a través del constructo “uso de la gráfica”, donde además se intenta encontrar alguna evidencia de nociones de integración tecnológica al conocimiento del participante.

El proyecto de investigación se ubica en el dominio de un escenario de difusión del conocimiento científico, donde se aplicó un diseño de actividades, con la intención de externar el conocimiento cotidiano con la relación a la variación. En el mismo diseño se ubican tres elementos importantes del estudio a considerar: el escenario, la matemática y la tecnología. En cuanto a la matemática, en la investigación se intentó que los participantes desarrollaran una matemática de tipo variacional por conducto de la modelación. La tecnología sería un instrumento en el proceso de construcción del conocimiento matemático y el escenario, una difusión del conocimiento científico, se logró un ambiente propicio para que los participantes expresaran sus conocimientos de sentido común hacia ideas variacionales.

El estudio de la matemática permite la modelización de situaciones que conducen a la resolución de problemas. Por esto, es primordial que los estudiantes analicen los cambios que ocurren en diferentes fenómenos biológicos, económicos y sociales. Sin embargo, durante la enseñanza media, no se favorece demasiado el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, base para la comprensión de los conceptos de la matemática de la variación y el cambio. Por este motivo, Engler, Vrancken, Hecklein, Gregorini, Müller y Henzen (2010), en su trabajo de investigación, analizaron los resultados obtenidos en una experiencia de aula centrada en el diseño, implementación y corrección de una guía de actividades sobre las nociones que tienen los alumnos que ingresan al nivel universitario con respecto a variables, cambios, funciones, imagen, gráficas, expresión analítica, valor numérico y comportamiento de funciones. Los resultados obtenidos hacen reflexionar y pensar por qué los conceptos matemáticos involucrados en el estudio de la matemática de la variación y el cambio presentan muchas dificultades. En la investigación, se concluyó que los estudiantes no los comprenden y, como consecuencia de ellos, en el aula surgen interpretaciones que no se corresponden con el conocimiento matemático. Se confirmó claras dificultades en el manejo de diferentes notaciones, confusión entre las variables dependientes e independientes, errores en el manejo de la recta y la determinación de intervalos, dificultades relacionadas con el concepto de función según sus diferentes representaciones, inconvenientes con la interpretación de los gráficos, dificultades en la identificación y manejo de variables. Lo enunciado anteriormente justifica el hecho de que en lo cotidiano en el aula se observa el problema del escaso, desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en integrantes de nivel superior.

En cuanto al uso de las gráficas, se está consolidando como una línea de investigación en la que se estudian las prácticas de referencias asociadas a la graficación en el discurso matemático escolar. Flores (2005), Cen (2006) y Torres (2004) han aportado información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación básica y en el bachillerato, proporcionando evidencias de que el uso de las gráficas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático. Estos trabajos tienen una orientación hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico. En estos estudios de uso de las gráficas existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura propia y susceptible al desarrollo.

En otra investigación, Suarez y Cordero (2010) exponen evidencias acerca de la existencia de un uso de las gráficas, que está determinado por una problematización que promueve el interés por el estudio del cambio. En el estudio, se concluye que las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a la funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de un función con su derivada, manejo simultaneo de dos o más ordenes de variación, máximo o mínimos o la acumulación de una función. Además, se propone el estudio de las gráficas de las funciones como el conocimiento mismo que se desarrolla y que hoy aportan datos epistemológicos que propician nuevas hipótesis para trabajar la variación en la matemática escolar.

En cuanto a la función exponencial, estudios realizados por Hernández y Arrieta (2005), que se inserta en el marco teórico de la Socioepistemología, se plantea como tesis central que es en ejercicio de algunas prácticas sociales donde las matemáticas surgen como herramientas. En este estudio, las prácticas sociales que se consideró es la de modelación en relación con la emergencia de lo exponencial. La propuesta para ser base del diseño de aprendizaje es la modelación del enfriamiento del silicón con estudiantes de nivel superior, el objetivo fundamental del estudio fue la construcción de un contexto donde los estudiantes y profesor, interactivamente en el aula, construyeran argumentos, herramientas y significados a partir de la modelación de un fenómeno. Los aspectos a considerar dentro del modelo: la construcción del modelo, el tratamiento y la articulación de los diferentes modelos con el fenómeno. Este proceso se realizó en las siguientes fases:

- La experimentación y la toma de datos del enfriamiento del silicón.
- Plantear conjeturas al analizar las características de la tabla de datos y realizar predicciones con ella.
- Realizar el modelo gráfico de temperatura y enfriamiento, para argumentar acerca de las conjeturas del momento anterior.
- Realizar el modelo a partir del planteamiento de la ecuación diferencial.
- Comparar el modelo exponencial con la nube de puntos tiempo y temperatura.
- Articulación de los modelos y fenómenos

Finalmente los estudiantes logran modelizar el enfriamiento del silicón a través de la toma de datos, fueron capaces de predecir, articulando la información en tablas y gráficos para obtener un modelo algebraico del fenómeno.

Otro estudio referente a la función exponencial, es el que realizó Lezama (1997), quien diseña, aplica y analiza una ingeniera didáctica para la función 2^x propiciando la realización de acciones a partir de criterios geométricos; localizar puntos en el plano, escribir tablas, identificar regularidades que propicien posteriormente generalizaciones pertinentes en estudiantes de enseñanza media. Este desarrollo atiende características como:

- La construcción de elementos geométricos y gráficos en las que se solicita a los estudiantes que efectúen trazos y localicen puntos de la forma 2^x según ciertos valores de x en un sistema de coordenadas rectangular.

- La inducción de lo local a lo global, que se presenta en las actividades en que se les solicita argumentar sobre los cocientes y las diferencias que se observaran en otras tablas diferentes a las analizadas.

- La generalización, el cual se puede encontrar en la actividad en que se les pide analizar si las regularidades detectadas para 2^x se observarían otras expresiones distintas.

Uno de los resultados de esta investigación fue que el concepto de potencias entera positiva es estable en la mayoría de los estudiantes, pero elevar a potencias fraccionarias carece de significado para la casi totalidad de ellos. Además, la mayoría de los estudiantes asocia la función exponencial con crecimiento, pero son incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento, pues la mayoría representó dicho crecimiento con líneas rectas crecientes.

Los estudios nombrados, han reportado diversos acercamientos al concepto de función, función exponencial, el uso de la gráfica, modelación y variación. Se mostró una serie de investigaciones de tipo didáctico, cognitivo, epistemológico, de la matemática formal, y recientemente investigaciones que involucran lo social para explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De esta forma, el estado del arte presentado permite dilucidar que existe una tendencia, en las investigaciones, de considerar la graficación y modelación como una práctica social y no como una habilidad cognitiva y que es necesario ir precisando cada vez más que los usos de las gráficas, así como sus desarrollos, son elementos consistentes con una matemática funcional.

Con base a lo anterior, la presente investigación identifica a la modelación como práctica social y al uso de las gráficas, en el marco de la Socioepistemología, que permiten el rediseño del discurso escolar en cuanto a la función exponencial.

1.3 HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

Como hipótesis de investigación se ha planteado:

- La graficación-modelación genera conocimiento matemático. En la situación de aprendizaje planteada, este binomio permitirá construir la noción de lo exponencial en estudiantes de segundo año de enseñanza media y de esta manera ser resignificado.

La hipótesis que se plantea es que el binomio modelación-graficación es una práctica institucional que ayuda a resignificar temas matemáticos y por lo tanto genera conocimiento en una situación específica, en particular en una situación de variación resignifica lo exponencial. La pregunta de la investigación es: ¿Cuál es el uso de las gráfica cuando se resignifica lo exponencial?

Como objetivo general de investigación se ha planteado resignificar lo exponencial a través del binomio modelación-graficación en segundo año de enseñanza media. A través de este objetivo se aporta con una nueva manera de abordar, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el tema de la función exponencial. Uno de los beneficios es poder contribuir a rediseñar el discurso matemático escolar actual, de esta manera se propone generar conocimiento centrándonos en prácticas socialmente compartidas en contraparte a la centración de los conceptos que actualmente se tiene en la enseñanza.

Los objetivos específicos de la investigación son los siguientes:

- Elaborar un diseño de situación que permita construir la noción de lo exponencial de manera funcional, basado en un estudio epistemológico de este.
- Analizar cuál es el rol de la gráfica en el diseño de situación implementado.

Por otro lado, el uso apropiado de la tecnología nos permite potenciar el binomio modelación-graficación, ya que calculadoras y software en PC o los sensores nos permiten la obtención de gráficas, ya sea en forma directa (sensores) o vía la graficación de datos. También tenemos que las calculadoras gráficas y muchos software en PC o en la Web nos permite obtener gráficas de muchas expresiones en poco tiempo y que pueden ser manipuladas, permitiéndonos así obtener conclusiones globales sobre las propiedades de ellas (comportamiento tendencial, variación de parámetros, etc.)

CAPITULO II: Aspectos epistemológicos del objeto función y función exponencial; estatus de la modelación-graficación.

En este capítulo, daremos a conocer un estudio histórico del concepto de función, donde se expone la evolución del concepto, posteriormente un análisis de los programas de estudio y textos que dan cuenta del estatus de la gráfica y modelación en el discurso matemático escolar y por último brevemente, un estudio del cuaderno de matemática proporcionado por una de las estudiantes que participó en el desarrollo de la situación de aprendizaje. Este capítulo, tiene el objetivo de dar a conocer el tratamiento de la gráfica con respecto a la función exponencial y su escaso uso en el discurso matemático escolar.

2.1 EPISTEMOLOGÍA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Esta investigación tiene su problemática asociada al objeto matemático función exponencial, sin ser su centro dicho objeto. Sin embargo, es importante considerar como se iniciaron los estudios acerca de la noción de función y más específicamente de la función exponencial, pues de esta manera, se conocen qué procesos ha seguido el concepto en su formación y desarrollo, además, da la oportunidad de analizar de qué manera el objeto matemático surgió, se construyó y formalizó a través de la historia. Para ello, se recurrió a un estudio que abarcó desde la antigüedad hasta el siglo XX, período en el cual se llevó a cabo un proceso de formalización matemática del objeto función y en el cual el concepto, se convirtió en una de las bases del cálculo y el análisis.

La intención de este estudio es entregar un análisis adecuado del origen del concepto de función y función exponencial, como fue tratado y como fue desarrollado durante el tiempo, de esta manera, se pretende crear una mejor comprensión y mayor claridad respecto al tratamiento de la noción de función y función exponencial a través de la historia. Para esto, se ha segmentado el estudio en épocas, para lograr una visión específica en cada tramo de la historia.

La antigüedad: Una búsqueda de regularidades y proporciones

MATEMÁTICA BABILÓNICA (2000 A.c-600 a.C)

Cálculos astronómicos, sobre la variación continua, como la luminosidad de la luna en intervalo de tiempo. Utilizaban tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y de raíces cubicas.

Se encontraron tabulaciones de progresiones geométricas como: $1+2+2^2+\ldots$, para sucesivos términos, así como la suma de la serie de los cuadrados $1^2+2^2+3^2+\ldots n^2$

Pedersen (1974) opina que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico instinto de funcionalidad. Esto se manifestó en sus trabajos de profundización en métodos cuantitativos a través de sus intentos de aritmetizar observaciones difícilmente medibles ya que no se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos, sino que usaron interpolaciones y extrapolaciones en una búsqueda de regularidades

MA TEMATICA GRIEGA

Gran parte de la filosofía aristotélica estaba consagrada al estudio del movimiento, de la continuidad y del infinito. Existía una idea primitiva de función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo, el cambio y movimiento se consideraban como algo externo a las matemáticas. Se estudian objetos fijos y sus relaciones .Esta filosofía estática de la matemática condujo a nociones como incógnitas, proporciones y ecuaciones y no a las funciones.

La concepción de variabilidad se consideraba como característica exclusiva de las magnitudes físicas. Rene Cotret (1985) la mayor influencia negativa en el desarrollo del concepto de función emergieron desde el tiempo de Pitágoras, cuando se pensaba que magnitud y numero eran cosas distintas, ya que número correspondía a la aritmética y magnitud a la geometría, sin embargo trataron de unificar estos conceptos a través de las proporciones, estas representaban la razón numérica que se puede establecer entre dos cantidades de una misma magnitud. Esta relación era siempre entre cantidades de la misma naturaleza, este modo de pensar les impedía observar las relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes que se hubiese aproximado a considerar relaciones funcionales.

Euclides trata en sus libros diferentes propiedades de las proporciones, los números los considera enteros y discretos, sin embargo las magnitudes son continuas. Mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será difícil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, solo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad en la variabilidad de los mismos

Edad media: Representación cinemática y geométrica de las relaciones funcionales.

Después de la desaparición de la sociedad antigua, la floración de la ciencia en los países de cultura árabe no aporta conocimientos nuevos en relación a la funcionalidad.

El pensamiento de la edad media estuvo presidido por la idea de explicación racional de los fenómenos. Esto se produjo gracias a la recuperación gradual de la lógica de Aristóteles y de la matemática griega y árabe. Una de las mayores preocupaciones fue el análisis de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento, como por ejemplo por qué cae la lluvia, por qué los planetas brillan, por qué el viento sopla, etc.. los fundamentos filosóficos para dar respuestas lo buscan en las ideas de Aristóteles y Platón. Estos dos filósofos buscaban la causa de los cambios cualitativos del movimiento.

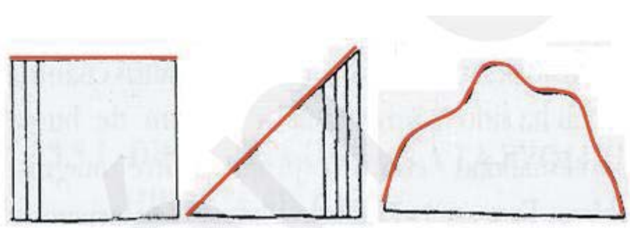
Se puede decir que el concepto función no nace únicamente en la matemática pura, sino que se utilizaba en otras ciencias antes de haber sido formalizado e incluso identificado como tal. En el segundo cuarto del siglo XIV, el interés ya no estaba tanto en el movimiento de los cuerpos, sino en la cuantificación del cambio que fue abordado por un grupo de lógicos y filósofos originarios del colegio de Merton, en Oxford. El desarrollo de la noción de función se beneficiaría con aportaciones muy significativas de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Filósofos, tales como Grosseteste y Bacon, aseguran que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos de la naturaleza, fenómenos sujetos al cambio, tales como calor, la luz, la densidad, la distancia, la velocidad-llamados cualidades o formas, según la terminología de Aristóteles- son estudiados planteándose no sólo por qué suceden los cambios sino fundamentalmente cómo suceden.

Se desarrollan teoría como la intensidad de la formas, llamada también como la teoría de las calculaciones, su parte más importante la cinemática, había sido desarrolladla en Inglaterra siguiendo la orientación de cinemática aritmética, en Francia se desarrollaría por Oresme, en dirección a la geometría.

Así el movimiento, era estudiado por primera vez matemáticamente, conduciendo así a la fundación de la ciencia de la cinemática, esto es, el análisis del movimiento en términos de distancia y tiempo (Crombie, 1979, p85)

Un integrante de este grupo fue el docente Nicolás Oresme (1323-1382), quien estudió los fenómenos que cambian, los cuales no podían ser modeladas matemáticamente (cualidades), por ejemplo: la velocidad; de esta manera, se abre un nuevo ámbito de razonamiento y estudio científico al proponer una aproximación geométrica para mostrar la relación entre dos “cosas” o cantidades variables, proponiendo el uso de una gráfica para marcar con una línea perpendicular la magnitud variable (latitudes) cuyo valor dependía de otra variable (longitudes), para explicar el movimiento uniformemente acelerado, ilustrándolo mediante el área de un triángulo o de un trapecio. Fue gracias a este tipo de trabajos, que Oresme se acercaba a una idea más precisa del concepto función, describiendo a las leyes de la naturaleza como leyes que dan una dependencia entre una cantidad y otra.

Además, se debe agregar que a Nicolás Oresme, se le ocurrió la idea primitiva de lo que ahora llamamos representación grafica de funciones, cuando se le ocurrió hacer un dibujo que representara el modo en que las cosas variaban. Su propósito era representarla cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica. Afirmo que las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas de la misma cualidad. Podemos decir que fue capaz de captar el principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva.



Siglo XV y XVI: El desarrollo de la notación algebraica

Los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar la formulación y la expresión de lo que hoy consideramos “variable” en una función o incógnita en una ecuación.

Los éxitos en la trigonometría fueron consecuencia del desarrollo de la astronomía heredada de la Grecia Antigua y de la ciencia árabe posterior. En el siglo XV, cuando se hicieron posibles las navegaciones lejanas, descubrimiento de América, primer viaje marítimo alrededor de África y alrededor del mundo, creció bruscamente el interés por la astronomía.

Galileo contribuyó a la evolución del concepto de función, ya que buscó resultados y las relaciones que provenían de la experiencia más que las que provenían de la abstracción. En eso reside su diferencia con Oresme, para quien la teoría pura, exenta de experiencia, era suficiente. Para Galileo, la experimentación estaba facilitada por los nuevos instrumentos de medida y así introdujo aspectos cuantitativos en campos en los cuales no se podía hablar antes más que de forma cualitativa. A diferencia de Oresme, los gráficos provienen de la experiencia y medida. Las relaciones de causa y efecto están expresadas en forma cuantitativa verificable. El principal campo de estudio de Galileo fue el movimiento, y en consecuencia la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida.

A finales del siglo XVI surge la noción de logaritmo, Chuquet estudió simultáneamente la progresión aritmética 1, 2, 3, ..., n y la progresión geométrica a, a^2,a^3,...a^n, observando que si hacia corresponder los términos de igual rango de estas progresiones, la suma de dos números de la progresión aritmética coincidía con el producto de los dos números correspondientes de la progresión geométrica. Stiefel en 1544, con la observación de Chuquet, le condujo a la creación de una definición de los logaritmos.

Ya en esta época, se logra observar cómo la palabra “función” fue usada como un término designado a varias cantidades geométricas asociadas a una curva. Así inicialmente, el concepto de potencia, se encuentra por un lado relacionado con la geometría, y por otro lado en cuanto a lo numérico, puesto que ya Arquímedes evidenció la necesidad del desarrollo de una notación para algunas potencias ligadas a números grandes provenientes de cálculos astronómicos.

Cabe destacar también, que se introduce el uso de exponentes negativos, se establecen algunas regularidades que relacionan las progresiones aritméticas con las geométricas y se introduce por primera vez la palabra exponente.

Siglo XVII: introducción de la representación analítica.

Según Youschkevich (1976) el desarrollo de la teoría de funciones se basó fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del algebra simbólico-literal y la extensión de concepto de número (a finales del siglo XVI abarcaba no solo el campo de los reales sino de los imaginarios y de los complejos). Por otra parte, a principios del siglo XVII, comienza a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidiría notablemente en la evolución de la noción de función. El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat (1602-1665) y a Descartes (1586-1650) el descubrimiento del mundo de la representación analítica. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las coordenadas.

Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva (Descartes, cit por Ruiz, 1986, p.117)

Según Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más significativos de la historia de las matemáticas. En efecto, introduce no solo la geometría analítica, sino también la idea de variable algebraica.
La idea de forma o función no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana. En este sentido, las coordenadas de Oresme están más próximas, en su motivación, al punto de vista moderno. Oresme representaba una ley trazando el gráfico de la función correspondiente y la curva obtenida ilustraba geométricamente la relación de dependencia entre las dos variables.

Los cambios en la naturaleza de los exponentes son consolidados por Descartes (1596-1650) que es considerado uno de los principales gestores de la ruptura con la tradición griega ya que no solo considera x^2 y x^3 como un área y el volumen, para Descartes, x^2 no sugería un área, sino más bien el cuarto término de la proporción $1:x=x:x^2$ y como tal puede utilizar un segmento de unidad, de esta forma se puede representar cualquier potencia de una variable por un segmento de recta, pudiéndose construir este segmento con herramientas euclideanas.

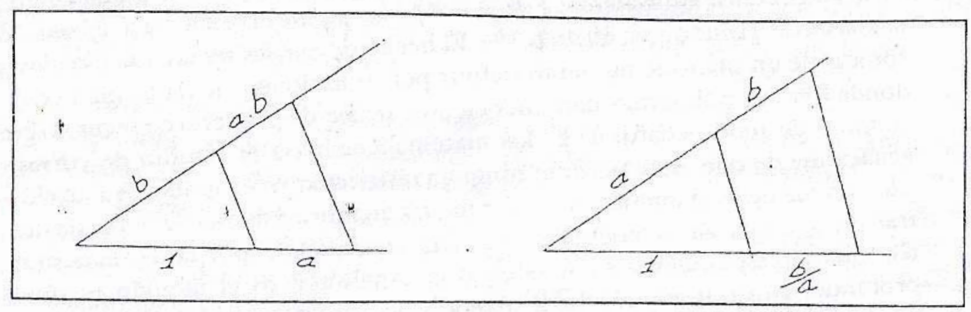


Fig. 3.4.
Determinación de productos y cocientes numéricos por medio de segmentos de recta.

En una etapa posterior, el estudio de curvas, la necesidad de homogeneidad en las operaciones entre monomios y la ampliación de índices (exponentes) fraccionarios y negativos, con Jhon Wallis (1606-1703), como principal representante, marcan la evolución de esta noción hacia la conceptualización de los denominados exponentes continuos.

Es aquí, que por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que permite al cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra.

La introducción de funciones bajo forma de ecuaciones tuvo el efecto de una evolución en el desarrollo de las matemáticas. La utilización de expresiones analíticas junto con las reglas para operar con ellas conferirá al estudio de funciones un estatus de verdadero cálculo.

Según Sierpinska, el desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones fue tan significativo que por medio de él, fue superado el obstáculo epistemológico de la diferenciación existente entre números y magnitudes. Las letras usadas en algebra van haciendo la noción de magnitud más abstracta, así para los matemáticos hacer una distinción entre magnitudes y proporciones, por una parte, y , números e igualdades, por otra, está cada vez menos justificada. No obstante, el álgebra, tan útil para vencer algunos obstáculos epistemológicos, trajo consigo otros. En el siglo XVII se aprecia una fuerte creencia en el poder de las operaciones formales con las expresiones algebraicas. Este encantamiento con el álgebra podría ser un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional en matemáticas, ya que se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Por otra parte, un estudio con exponentes reales fue realizado por Napier (1614-1620) de manera intuitiva, quien además introduce el número *e* de forma muy discreta.

Se puede decir, que la primera etapa en la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas, casi simultáneamente de dos modos diferentes: en la teoría de fluxiones de Newton y sus sensores ingleses, y en el cálculo de los diferenciales de Leibniz.

Newton no concedía a las matemáticas más que un valor instrumental. Con esta concepción, creía que los cálculos deben servir, sobre todo, para la resolución de problemas concretos; lejos de constituir un fin en sí mismos, no son más que un medio práctico de encerrar, en fórmulas precisas y concisas, los datos con los cuales trabaja la mente, de hacerlos más manejables y de llegar a resultados más claros.

El cálculo infinitesimal se presenta en la obra de Newton bajo dos formas equivalentes, una de ellas mediante el método que él llama de las primeras y últimas razones, de las cantidades que nacen y se desvanecen (que no es otro que el de los límites) y el llamado método de las fluxiones.

En una parte de los principios, dedicada al método de las fluxiones, Newton afirmó que ha mezclado este método con el de las series infinitas (desarrollos en serie por medio de expresiones algebraicas convergentes). La idea sobre la cual se basa es la aproximación, este método junto con el de interpolación contribuyó de manera directa a la creación del cálculo infinitesimal y eran esenciales para el pensamiento Newtoniano.

La concepción mecanicista está evidentemente presente en la invención del cálculo diferencial. Newton, como Barrow su maestro, elige el tiempo como noción universal e interpreta las variables dependientes como cantidades que transcurren de forma continua y poseen una velocidad de cambio. En su terminología, la función es una fluente, es

decir, una cantidad que transcurre en el tiempo, la derivada es la velocidad o fluxión y sirve para estudiar las variaciones de la fluente.
Leibniz, que dio en 1675 la definición y las reglas del cálculo diferencial, se situó, ante todo, bajo una concepción geométrica; consideró siempre elementos geométricos ligados a una curva. Describe la diferencial (dy) de una ordenada en una curva cualquiera como un segmento cuya relación a dx, es igual a la relación que existe entre la ordenada y la subtangente $dy/dx = y/S$

Expresó la idea general de dependencia funcional, introduciendo el término “función”. la palabra función aparece por primera vez en los manuscritos de Leibniz en 1673 (methodus tangentium inversa, seu de functionibus). Pero en un principio, no utiliza el término función para designar la relación formal entre la ordenada de un punto de una curva y su abscisa, en el sentido que le dan los matemáticos actuales sino más bien, en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. *In figura functionem facere* significaba para él, por ejemplo: tener un punto de contacto con la curva, ser perpendicular a la curva, considerar su sub-tangente, su sub-normal,etc.

J, Bernoulli (1683) examinó el problema del interés compuesto y, durante su análisis del interés compuesto continuamente, trato de encontrar el $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Uso el teorema del binomio para encontrar que estaba entre 2 y 3. Hasta donde se sabe, la primera vez que el número *e* aparece explícitamente es en 1690. En ese año, Leibniz le escribió una carta a Huygens en la que usa la notación “*b*” para lo que nosotros conocemos por *e.* Por fin el número *e* tenía nombre (aunque no sea el actual) y era reconocido.

Más tarde, en sus manuscritos la noción de función se identificará con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc. Asociadas con la posición de un punto en una curva. Este mismo sentido también es usado por Jean Bernoulli (1694) en toda su obra. La correspondencia mantenida por Leibniz y Bernoulli, muestra que la falta de un término general para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica.

La eficacia de los cálculos formales de las matemáticas se constituyó en un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función.
Las funciones consideradas por Descartes en su geometría era sobre todo funciones algebraicas definidas por curvas geométricas simples; lo mismo que aquellas a las cuales Fermat aplicó sus procedimientos en la misma época.

Después de Descartes surgió la idea de que los métodos de la geometría analítica eran válidos no solamente para todas las funciones elementales (polinomios, fracciones racionales, funciones trigonométricas y sus inversas) sino que se podían aplicar también a las funciones algebraicas generales y a las combinaciones, en número finito, de estas funciones.

En este periodo una función algebraica de x es considerada como la función y(x) obtenida al resolver por **y** la ecuación $P(x,y)=0$, donde $P(x,y)$ es un polinomio en **x** y en **y**.

Siglo XVIII: el concepto de función se considera central en la matemática

Desde finales del siglo XVII, con Leibniz y Jean Bernoulli el concepto de función se desprende de muchas consideraciones accesorias y toma una forma analítica que, si bien, permanece en los escritos de Bernoulli, se precisa en gran parte de los de Euler.

No obstante, la primera consideración de una función como expresión analítica aparecería en un artículo de Bernoulli en 1718:
Llamemos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes (Bernoulli, citado por Ruiz, p.131)

En este mismo artículo Bernoulli propone la letra griega f para designar la característica de una función (término debido a Leibniz), escribiendo todavía el argumento sin paréntesis: f x

El desarrollo del concepto de función, se considera obra exclusiva de Euler, alumno de Jean Bernoulli. En el Cap. I del volumen I de su *Introuctio in analysis infinitorum,* Euler analiza detenidamente el concepto de función. comienza definiendo las nociones iniciales: una constante es una cantidad definida que toma siempre un solo y único valor, mientras que una variable puede tomar valores en un conjunto (o un subconjunto) de números complejos.

Euler define: *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de número o cantidades constantes. (Euler, citado por Ruiz, p.134)*

Para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en las que entran las operaciones aritméticas, las potencias y raíces. Euler adjuntó también las funciones transcendentales elementales: e, Ln, z y las funciones trigonométricas. La clasificación de las funciones la realiza en correspondencia con la definición de este concepto:

Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras formadas por operaciones algebraicas solamente y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes(...) las funciones algebraicas se subdividen en racionales e irracionales. En las últimas la variable está afectada por radicales, y en las primeras no está afectada (...) las funciones racionales, por último se dividen en enteras y fraccionarias (Euler, introducción al análisis de los infinitos, 1748)

En cuanto a la función exponencial, clasificada dentro de las funciones trascendentes, se debe a Euler , la cual aparece por primera vez en una carta que le escribió a Goldbach en 1731.

Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor del número *e* y demostró que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} ...$$

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

También dio una aproximación de *e* con 18 decimales,
e = 2,718281828459045235.

Euler complementó la clasificación con la introducción de las funciones uniformes y multiformes, pares e impares y definió los criterios para su determinación. La clasificación de las funciones realizada por Euler significó una nueva etapa en la evolución de este concepto. Sin embargo, al restringirse en la consideración de función a las expresiones analíticas, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias:

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ donde z, en términos generales, era complejo.

Más tarde ampliaría la expresión analítica para potencias de la variable z, no solo enteras, sino cualquiera. Esta afirmación tan rotunda, era acorde a la época, donde la totalidad de funciones utilizadas eran analíticas.

En lo que se refiere a la notación del concepto de función, Euler fue el primero en utilizar la notación f(x)

El principal impulso para el posterior desarrollo del concepto de función proviene de los trabajos de Euler, sobre la física matemática, el más significativo en todos ellos fue el problema de las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades.

Fue a través de la resolución de este problema práctico como Euler tuvo la necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas: las funciones arbitrarias, tales como:

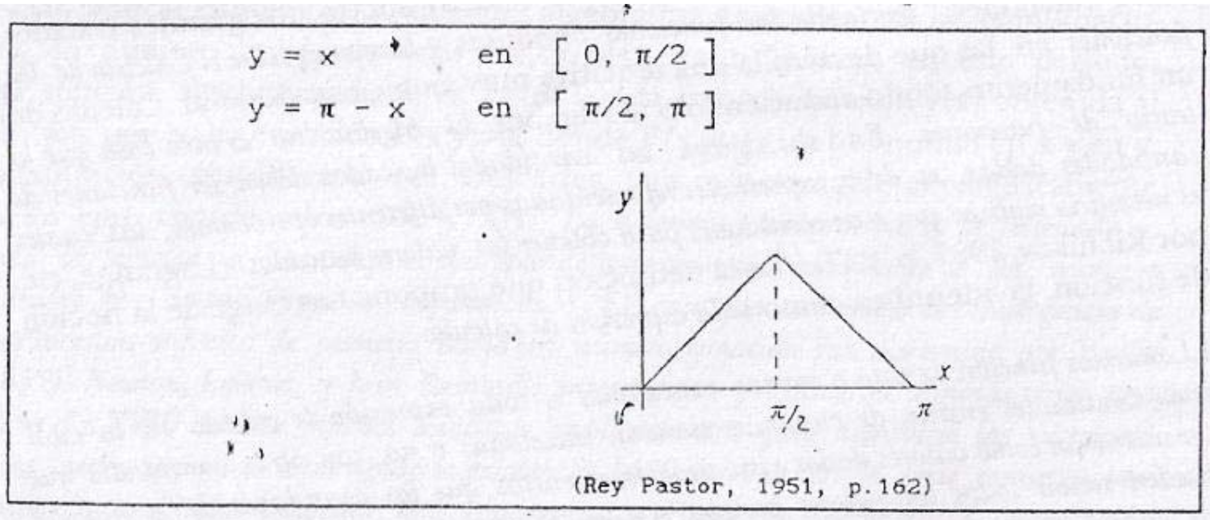


Fig. 3.5.
Representación de una «función arbitraria» según Euler.

Esta gráfica cuya representación es poligonal, es precisamente la función inicial que define la vibración de la cuerda sonora al pulsarla por su punto medio. Este tipo de funciones que intervenían en la solución de la ecuación de las cuerdas vibrantes, no estaba necesariamente definida por expresiones analíticas, sino más bien, por un gráfico obtenido por el trazo libre de la mano.

Comienza pues Euler a construir una noción más abstracta, más general que atiende la correspondencia arbitraria.

Las funciones analíticas podían ser representadas por series enteras; el estudio y el descubrimiento de las principales propiedades de esta clase particular de funciones va conducir, en primer lugar a analizar los problemas relativos a la continuidad de estas funciones. Toda la teoría de la continuidad desarrollada en el siglo XIX por Cauchy, Riemann y Weierstrass, tiene sus raíces en los trabajos de Euler y D´Alembert.

La ampliación de Euler al concepto de función, llevó a otros matemáticos a realizar una definición más profunda de la función. Fourier, postuló que cualquier función y=f(x) se puede representar por una serie trigonométrica, serie que conocemos hoy con el nombre de serie de Fourier.

Las representaciones por medio de tales series permiten un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a las que se puede aplicar, que el que permite la serie de Taylor, el desarrollo en serie trigonométrica permite representar una clase más general de funciones, las funciones ya no necesitaban ser de tan buen comportamiento en su forma como los matemáticos habían manejado hasta entonces. Sin embargo, con esto aparecía un nuevo problema, las condiciones necesarias para que la serie trigonométrica asociada a una función dada fuera convergente. La respuesta, según expresión de Dirichlet, la sustitución de las ideas del cálculo y, ante todo, una definición de la correspondencia funcional independiente de toda forma de expresión analítica.

Siglo XIX: la idea de correspondencia arbitraria

Al considerar el concepto de función como la idea principal del nuevo análisis, se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como correspondencia de tipo muy general.
Así en el Curso de análisis algebraico de Cauchy (1827) se encontró la siguiente definición:

Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que , dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (Cauchy, cit por Youschkevitch, 1976, p.58)

Dirichlet, propuso en 1837 una definición sumamente amplia y general: *si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre se atribuyen un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.*

En adelante el análisis carece del apoyo de la intuición geométrica, debe fundar en sí mismo sus propios principios y delimitar por sus propios medio su dominio. De esta crisis iba a surgir la teoría de conjuntos. Para lograr avances, fue necesario eludir las falsas evidencias de la intuición y las limitaciones de la expresión analítica. Aun quedaba por construir la teoría de conjuntos como medio de análisis del infinito y su desarrollo. El desarrollo de la teoría de funciones de Weirtrass y la teoría de conjuntos de Cantor se produjo en los últimos años del siglo XIX en un ambiente de crítica y lucha. Sin embargo, la teoría de conjuntos ejerció una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas, sirvió de base a la actual teoría de funciones de variable real, a la topología, al algebra, al análisis funcional etc.

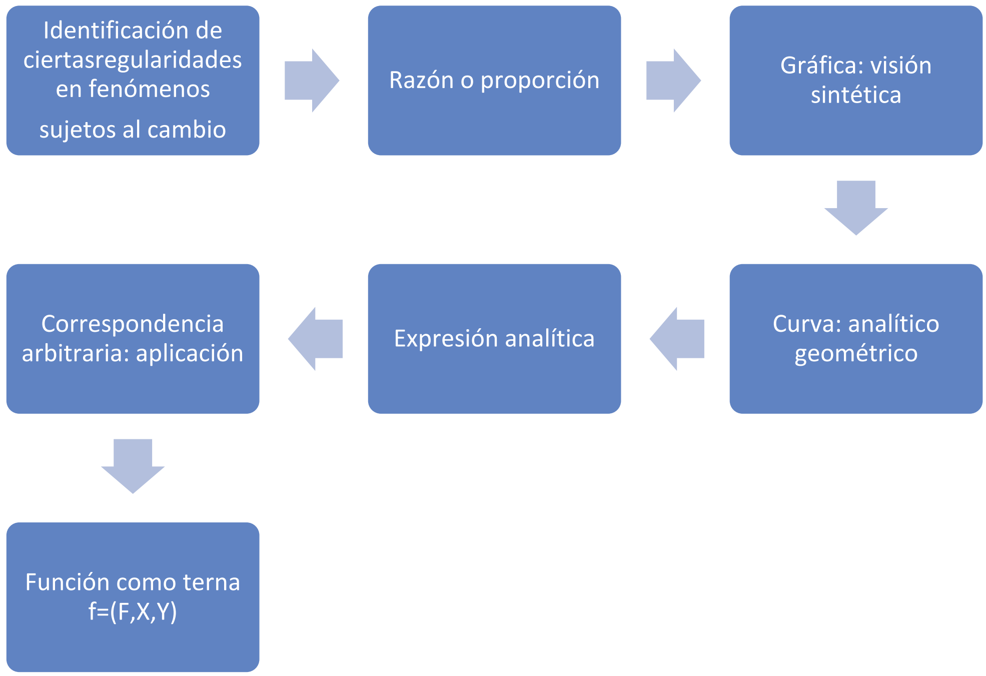
Siglo XX: el concepto de función como terna.

Las definiciones actuales del concepto de función se basa formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, pero en su construcción hay definiciones en las que permanece el carácter de correspondencia unívoca (aplicación) y se mantiene explícita la idea de asignación entre variables mientras que en otras, en un intento de mayor precisión y rigor, se introduce a través de la noción de grafo, (pares de elementos relacionados)

Los pares ordenados hacen posible la introducción del concepto de función, *así para una función univalente f(a) lo único que cuenta es que para un a dado, f(a) debe estar unívocamente determinado por algún criterio definido (dado anteriormente por un conjunto de pares P).* (Hausdorff, citado por Ruiz , p. 139)

En esta descripción, clara, precisa y estática ya no hay menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni el menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni aparece la vieja y sugestiva idea de variabilidad. Freudenthal, dirá que aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (Freudenthal, citado por Ruiz, p. 140)

Se puede identificar, mediante el estudio epistemológico de la función, las diferentes concepciones asociadas a la evolución histórica de la noción de función, resumiéndolas en el siguiente esquema:



En general, la modelización matemática de fenómenos físicos, da lugar a una reformulación del conocimiento que conforma el análisis de la noción de función. Los fenómenos que se modelan parten de la consideración de ciertas características, dando lugar a expresiones que exigen una noción arbitraria de la regla de correspondencia que define una función.

A mediados del siglo XIX se contribuye al establecimiento de una definición mucho más precisa del concepto función, haciendo de la relación entre variables el centro del concepto función, esto fue gracias a la elaboración de trabajos relativos a la continuidad y discontinuidad de funciones. Fue bajo estas circunstancias que se construyó el concepto de función exponencial tal y como la conocemos en nuestros días.

Podemos entender que no fue fácil la construcción del concepto de función y por ende, función exponencial, y así mismo su evolución a través de la historia, se asemeja a la comprensión del concepto en la enseñanza con los estudiantes.

"…el desarrollo del concepto función se ha hecho casi a la par que el ser humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia en el ámbito de las matemáticas del paradigma de la función como un objeto analítico, empero, el concepto función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría" … (Cantoral; Farfán (1998), citado en Del Castillo; Montiel, 2007).

A través de este estudio epistemológico, se aportó información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las situaciones problemáticas a las cuales las personas involucradas han dedicado sus esfuerzos para desarrollar el concepto de función. Asimismo, el estudio permitió identificar las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos.

Este estudio, aportará a la investigación conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta noción a lo largo de los distintos niveles de enseñanza.

2.2 PROGRAMA DE ESTUDIO

En nuestro país, desde 1990, a través de los distintos gobiernos, es que el Ministerio de Educación ha elaborado una serie de ajustes curriculares al programa de estudios de enseñanza básica y media, modificando en gran parte los contenidos y metodología que se practicaban en el aula.

En cuanto a la educación media, el currículum nacional se expresa a través de un Marco Curricular y en instrumentos curriculares que lo operacionalizan. Su propósito fundamental está orientado a definir el aprendizaje que se espera que todos los estudiantes desarrollen a lo largo de su trayectoria educativa. Su carácter es obligatorio, constituyéndose en referente basal, a través del cual se elaboran los Planes de Estudio, los Programas de Estudio y los Mapas de Progreso siendo el referente también para la construcción de los textos escolares y las pruebas SIMCE y PSU.

El decreto supremo de Educación n° 254 de agosto del año 2009 del Ministerio de Educación modificó el DSE[2] n° 220/1998 y estableció los Objetivos Fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación media. En este contexto, los programas de estudio presentan

[2] Decreto supremo de educación

una organización didáctica de un ciclo de mejoramiento continuo (un año escolar) para el logro de los OF[3] y CMO[4] y, además, definen aprendizajes esperados a desarrollar organizados por semestres y unidades de aprendizaje; ofrecen ejemplos de actividades de enseñanza y orientaciones metodológicas y de evaluación para apoyar el trabajo de los docentes en las aulas escolares, siendo siempre de carácter flexible, de manera que los docentes de las distintas asignaturas puedan adaptarlas a sus particulares realidades.

El MINEDUC, el año 2011, entrega de manera oficial el programa de estudios de segundo año medio, que de una manera, motivaría la reflexión docente en torno a nuevos contenidos insertados en el aula, que antes no eran vistos, o bien, se conocían en niveles superiores. Los nuevos contenidos en dicho nivel, buscarían motivar al estudiante a utilizar mejor las herramientas tecnológicas como apoyo en el aprendizaje, dar un fuerte énfasis en la lectura y también en el razonamiento matemático en el desarrollo de los conceptos. Dentro de los conceptos insertos, en la unidad tres llamada álgebra de segundo año de enseñanza media, está el contenido de función exponencial y representación gráfica, donde los estudiantes deben identificar la función exponencial, argumentar sobre las variaciones que se producen en la representación gráfica de dicha función y comprender por qué la base de la función exponencial pertenece a los reales positivos. En el programa de estudios se pide que los estudiantes puedan analizar gráficamente la función exponencial en forma manual y con herramientas tecnológicas, identificar características de la función, incluyendo dominio, recorrido e interceptos, modelar y aplicar la función exponencial en la resolución de problemas.

Según el mapa de progreso, el cual entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector y se ajusta a las expectativas del marco curricular, el estudiante al abordar la función exponencial, se encontraría en el nivel 5, el cual debe obtener los siguientes aprendizajes esperados:

AE01: Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

- Representan gráficamente la función exponencial $f(x) = ax$, con a IR y $a > 0$, en forma manual y usando herramientas tecnológicas.
- Identifican las características graficas de una función exponencial, incluyendo dominio, recorrido e interceptos.

[3] Objetivos fundamentales
[4] Contenidos mínimos obligatorios

- Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la grafica al modificar los parámetros de la función exponencial. Por ejemplo, caracterizan la función
$f(x) = ax + b$, con $a, b, \in IR$ y $a > 0$, observando en el gráfico la traslación vertical que resulta al variar el parámetro b.

AE07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función exponencial. Por ejemplo, la reproducción bacteriana

Más tarde, en octubre del año 2012, el Ministerio de Educación, pone a disposición de los establecimientos, guías didácticas para la articulación de los ejes curriculares de números, álgebra y geometría de 1° a 4° año de enseñanza media, como bases para los PME[5] que los establecimientos municipales y particular subvencionados por decreto deben impartir en sus dependencias, a partir de marzo 2013, o bien un PME propio.

El material disponible en la página web del Ministerio, muestra un trabajo en torno al desarrollo de la modelización, que en general es tratada como el proceso de resolver un problema proveniente de una situación real, por medio de un modelo matemático y de los principios y estrategias didácticas para desplegarla; la intención del material, es que los estudiantes sean los protagonistas de la acción, y el profesor sea solo un guía.

Por otro lado, las guías didácticas que se presentan en el documento tienen el propósito de apoyar el trabajo de los profesores con una propuesta metodológica para tratar los ejes de números, álgebra y geometría de forma articulada. Para ello se aborda el modelamiento funcional, como uno de los ámbitos nucleares de la matemática en educación media, introduciendo aspectos fundamentales del currículum, tal como son las funciones, pero desde una perspectiva contextual y significativa. Además , busca promover una forma de hacer matemática en el colegio, que responda a las necesidades establecidas para generar una alfabetización acorde con las exigencias que demanda la sociedad actual, a la vez que recoja los aspectos fundamentales de ella a nivel de educación media. Para esto, se plantea una construcción desde una perspectiva de competencias, ya que según el MINEDUC, permitiría ir más allá del contenido matemático presente de manera habitual en los currículos y

[5] Plan de mejoramiento educativo.

contextos escolares, e integraría en los procesos de aprendizaje las habilidades propias de la comprensión matemática aplicadas a la realidad, por medio de los procesos de matematización y modelización.

Ahora bien, en el texto entregado por el MINEDUC, se entiende que la matematización contempla las distintas fases del proceso de resolución de problemas. Da como referencia las fases del proceso de resolución de problemas planteados por Dewey (1933) o Polya (1945)

Tabla N°1: Fases del proceso de Resolución de Problemas (Rico y Lupiañez, 2008)

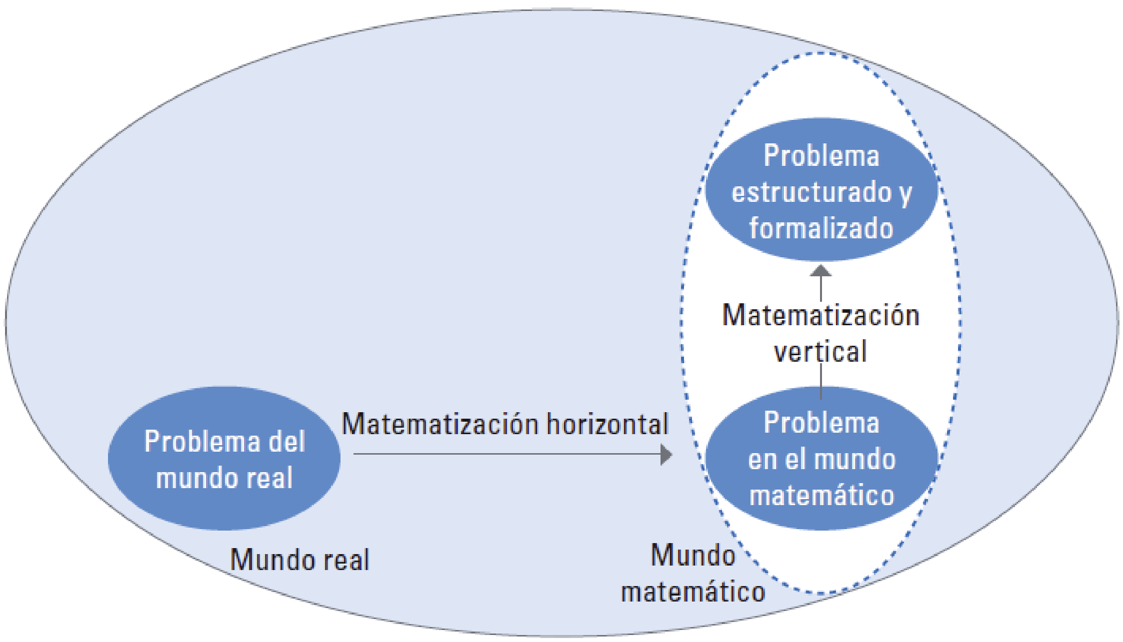
Dewey	Polya
• Se siente una dificultad: localización del problema.	• Comprender el problema.
• Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.	• Concebir un plan.
• Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.	• Ejecutar el plan.
• Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.	• Examinar la solución.
• Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.	

Entonces, lo que se entiende por matematización es un proceso en que tanto los matemáticos como otros profesionales, emplean la matemática para abordar cuestiones y problemas propios de sus prácticas, y al abstraerlos, matematizan los datos de sus ámbitos de trabajo. Este proceso de matematización implica una transformación de una situación real a un modelo matemático. La matematización, en estos términos, es una organización de la realidad que emplea el conocimiento matemático, en la cual las personas, y en particular los estudiantes, usan los conocimientos y habilidades adquiridas para descubrir regularidades desconocidas, relaciones y estructuras matemáticas (Treffers y Goffree,citado por MINEDUC, 2012). Y en base a esto, se distinguen dos componentes: (Freduenthal, citado por MINEDUC, 2012) :

- **La matematización horizontal:** es la transferencia del problema del mundo real al mundo matemático. Consiste en actividades tales como: identificar las matemáticas específicas en un contexto general; esquematizar; formular y visualizar el problema; descubrir relaciones y regularidades, y reconocer semejanzas en problemas diferentes (de Lange, 1987).

- **La matematización vertical:** es el proceso que se lleva a cabo al trabajar dentro del mundo matemático. Se reconocen las siguientes actividades: representar una relación en una fórmula; probar las regularidades; refinar y ajustar los modelos; combinar e integrar modelos, y generalizar.

Esquema N° 1: conexión entre la matematización horizontal y vertical (Rico y Lupiañez, 2008)



El texto manifiesta que para lograr los procesos de matematización en el colegio, se hace necesario tener claridad sobre dos de los aspectos que son definitorios de esta forma de hacer matemática: los conceptos matemáticos y las situaciones contextuales. En cuanto a los conceptos y procedimientos matemáticos, promueve la centración en los que son parte de la matemática escolar, ya que estos son los que la sociedad ha consensuado como útiles y culturalmente relevantes para la formación de los futuros ciudadanos. Sin embargo, se manifiesta que el tratamiento de la matemática escolar, puede ser realizado, por una parte, con una prioridad estructural, en que las conexiones internas refuerzan el lenguaje matemático, proporcionan sentido a cada noción, como además objetividad y potencial argumentativo. Por otra parte, se puede priorizar una visión funcional, en que las conexiones externas aportan referencias del contexto o de la propia experiencia social, potenciando modos de actuar o de abordar problemas.

El MINEDUC, en el texto didáctico, declara que la matematización logra un equilibrio entre las perspectivas estructurales y funcionales de la matemática escolar, permitiendo organizar los contenidos matemáticos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas de los cuales surgieron, es decir, organizar los contenidos atendiendo a grandes áreas temáticas (Freudenthal, citado por MINEDUC, 2012).

Siguiendo los procesos de matematización, lo que se lograría en definitiva es generar en el estudiante una competencia matemática tal que le permita utilizar su conocimiento y comprensión matemático para dilucidar diversas cuestiones y llevar a cabo las acciones pertinentes.

Dentro del Proyecto Pisa (OCDE, cit. por MINEDUC 2012), la competencia matemática se define de la siguiente manera:

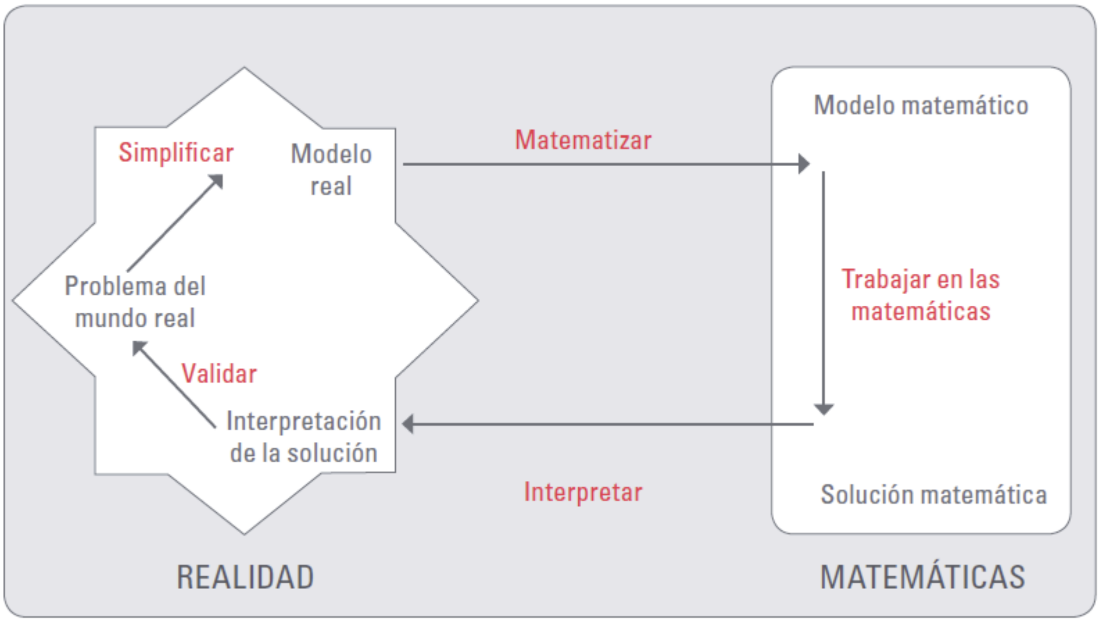
"La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo."

En los actuales documentos curriculares, se destaca la importancia de desarrollar procesos matemáticos, dentro de los cuales la resolución de problemas ya no se concibe como un eje en sí mismo, sino que es parte del razonamiento matemático, siendo trabajada transversalmente en los cuatro ejes de la asignatura de matemática. De hecho, en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2012) proponen cuatro habilidades concretas a desarrollar en matemática: resolver problemas, razonar y comunicar, modelar, y representar, las cuales se deben promover desde 1º básico, en particular la modelización.

Las tareas de modelización se enmarcan dentro de aquellos procesos que permiten a los estudiantes el manejo y uso de conceptos matemáticos para la resolución de problemas. De acuerdo con Maaß (citado por MINEDUC, 2012), para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelización comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de la matemática se obtiene una solución matemática; esta solución tiene que ser primero interpretada y luego validada.

En el siguiente esquema se ilustra esta propuesta.

Esquema N° 2: Fases de modelización (Maaß, 2006)



El texto didáctico, explica que la competencia de modelización se puede observar a través de las acciones y el comportamiento de los estudiantes. En la siguiente tabla, se clasifican las acciones de los estudiantes asociados a la competencia de modelización, en tres niveles.

Tabla N° 2: Niveles de la competencia de modelización (Henning y Keune, 2007)

Nivel 1: Reconocer el Modelo	Nivel 2: Modelizar	Nivel 3: Meta Reflexionar sobre el Modelo
• Reconocer el modelo. • Describir los procesos de modelización. • Caracterizar, distinguir y localizar las fases del proceso de modelización.	• Analizar y estructurar problemas y abstraer cantidades. • Adoptar diferentes perspectivas. • Construir modelos matemáticos. • Trabajar sobre modelos • Interpretar resultados y declaraciones del modelo. • Validar el modelo.	• Analizar críticamente la modelización. • Caracterizar los criterios de la evaluación del modelo. • Reflexionar sobre las causas de la modelización. • Reflexionar respecto a la aplicación de las matemáticas.

Lo que se plantea es que el estudiante en el primer nivel, no es necesariamente consciente de la modelización que está realizando, y lo que se espera es que sea capaz de resolver problemas reproduciendo estrategias sin necesariamente comprender las fases de modelización. En el segundo nivel, el estudiante pasa a ser consciente de la modelización que realiza, y es capaz de ejemplificar, aplicar conceptos matemáticos y terminología adecuada y por último, en el tercer nivel, debe desarrollar una actitud crítica sobre las fases de modelización.

Como se mencionó anteriormente, el material busca dar un aporte al docente, entregar una propuesta metodológica para tratar los ejes de números, álgebra y geometría de forma articulada. Los materiales que se presentan, son una forma de introducir aspectos fundamentales del currículo, tal como son las funciones, pero desde una perspectiva contextual, centrado en el objeto matemático y modelización desde un punto de vista algebraico.

En el material didáctico promueve la modelización funcional, y se entiende por esto, que los estudiantes requieren articular comprensiones sobre distintas temáticas trabajadas en matemática. Se plantea las relaciones funcionales como una gran variedad de representaciones diferentes, entre ellas la numérica (en una tabla, por ejemplo), la simbólica o la geométrica. Dichas representaciones necesitarían para su tratamiento, comprensión sobre los números, sobre los sistemas geométricos de representación junto a habilidades de interpretación de gráficos, y sobre los tratamientos y lenguaje algebraicos necesarios para modelizar. Se destaca y promueve, las situaciones y tareas que el docente debe aplicar en el aula, ya que los propuestos en dicho material, ayudarían a los estudiantes a desarrollar diferentes tareas, que contribuirían a la comprensión de los problemas y situaciones que se modelizan.

Según lo expuesto anteriormente, los niveles de desempeño y contenidos presentes en los niveles 5 y 6 de los mapas de progreso, como lo relativo a tratamiento funcional y modelización del marco curricular, se manifiestan según los siguientes contenidos matemáticos a trabajar:

Nivel: 1º Medio	2º Medio	3º Medio	4º Medio
Modelos lineales	Crecimiento exponencial y logarítmico	Modelos cuadráticos	Optimización lineal
Patrones de crecimiento lineal; situaciones de costo, beneficio, ahorro; interpretación gráfica de dichas expresiones algebraicas; tratamiento numérico tabular de las situaciones; entre otros.	Crecimiento poblacional; escalamiento logarítmico; operadores aritméticos potencia y logaritmo; representaciones gráficas; relación inversa de función exponencial y logaritmo; entre otros.	Fenómenos físicos modelados por funciones cuadráticas, estudio de la función cuadrática por manipulación de parámetros y su repercusión en la gráfica; entre otros.	Inecuaciones lineales, sistema de inecuaciones lineales; programación lineal; situaciones de costo, beneficio; entre otros

La estructura de las guías didácticas para cada nivel se determina de la siguiente forma:

- Fundamentos centrales de la Propuesta Didáctica
- Secuencia didáctica (primer nivel de concreción)
- Situaciones de clase (segundo nivel de concreción)

En segundo año de enseñanza media:

Los contenidos que aborda esta unidad son particularmente interesantes en aplicaciones no triviales y permiten modelar,(en la perspectiva de modelización del MINEDUC), situaciones de uso relativamente cotidiano. El tratamiento de la unidad, se centra en la diversidad de problemas reales, escogidos con la intensión de provocar en los estudiantes la necesidad de utilizar la matemática en el modelamiento de estas situaciones.

Cada situación modelable se desarrollará desde las siguientes nociones mínimas:

- Tabla de datos: como el conjunto de valores que satisfacen la expresión.
- Gráfico: como el conjunto de los puntos del plano que representan la expresión.
- Función: como correspondencia entre dos variables en que a cada variable independiente le corresponde una única variable dependiente.
- Dominio: como el conjunto de los valores posibles de la variable independiente.
- Recorrido: como el conjunto de los valores resultantes o imágenes.

A continuación, se muestra un esquema en el que se describe el primer nivel de concreción de la propuesta didáctica, que corresponde a la secuencia de procesos y contenidos propios de los modelos exponenciales, articulados a lo largo de la unidad.

CLASE 1	CLASE 2	CLASE 3	CLASE 4	CLASE 5
Una forma de diferenciar modelos lineales y exponenciales: El interés simple y compuesto.	Tratamiento de la función exponencial y sus principales características: Intensidad de la luz en las profundidades del océano.	Reconocer una función exponencial desde una tabla de valores: Eliminación de un fármaco por la orina. Parte I.	La necesidad de pasar de la función exponencial a la logarítmica: Eliminación de un fármaco por orina. Parte II.	Tratamiento de la función logaritmo: ¿Cómo se mide la magnitud de un sismo?

Clase 1: Una forma de diferenciar modelos lineales y exponenciales

El propósito de esta actividad es que los estudiantes pongan en práctica los contenidos, conceptos y habilidades relacionadas con las situaciones de modelamiento trabajadas en primero medio.

Clase 2: Tratamiento de la función exponencial y sus principales características

El propósito de esta clase es caracterizar la función exponencial de la forma $f(x)=a\cdot b^{x}$, donde $a,b \in IR$, y a través de la actividad que determina la Intensidad de la luz en las profundidades del Océano.

Finalmente, por medio de las gráficas realizadas, se determinará el dominio y recorrido de algunas gráficas en particular que permitan generalizar en términos de las características de la función exponencial.

Clase 3: Reconocer una función exponencial desde una tabla de valores.

El propósito de esta clase consiste en presentar las propiedades de las funciones exponenciales, pero desde un punto de vista funcional. Las propiedades se enunciarán, pero no se demostrarán, esto por razones de tiempo y alcances de la unidad, dejándole al docente la decisión de abordarlas o no.

Una de las actividades de interés en esta clase tiene relación con la comparación entre la función lineal (1° medio) y la función exponencial.

Se destaca como base de los modelos de crecimiento o decrecimiento exponencial la razón entre el valor de la función exponencial en t incrementada en h $f(t+h)=b^{h}$ y el valor de la función exponencial en el mismo $f(t)=b^{t}$ es constante, es decir: $\frac{f(t+h)}{f(t)}=b^{h}$

Clase 4: La necesidad de pasar de la función exponencial a la logarítmica.

El objetivo de esta clase es presentar la función logaritmo de la forma $f(x) = \log_b x$, donde la base b es cualquier número real positivo ($b > 0$), distinto de uno ($b \neq 1$) y fijo.

Clase 5: Tratamiento de la función logaritmo

El propósito de esta actividad es que los estudiantes pongan en práctica los contenidos y conceptos revisados en la guía anterior. Para ello se presenta una situación real modelada a través de la función logaritmo. Si bien esta clase no tiene como objetivo modelar la situación en torno a una función logarítmica, se ha centrado en los análisis de las tablas, gráficos y expresiones algebraicas, para comprender el comportamiento de una situación de importancia dentro de las condiciones sismológicas de nuestro país.

Si bien, el MINEDUC está preocupado por generar conocimiento en los estudiantes y ha resaltado lo fundamental que es desarrollar en los estudiantes el concepto de función durante su educación media, los fenómenos que se plantean no son estudiados a través del análisis del comportamiento a través de su gráfica y variación, nuevamente se enfatiza lo algebraico, dejando de lado la argumentación gráfica y se considera solo como una representación de un fenómeno.

Además, cabe señalar que el texto didáctico planteado por el MINEDUC, no se condice con los textos escolares que hoy rigen en los establecimientos municipales y particulares subvencionados.

2.3 LOS TEXTOS ESCOLARES

En el siguiente estudio, se muestra el texto de matemática que se entrega a los establecimiento particulares subvencionados y municipales, a los estudiantes de segundo año medio, el cual corresponde a la editorial Santilla, edición 2009.

En el texto Santillana se analizó la unidad 1 llamada “Números y raíces”, en esta unidad, los estudiantes deberían profundizar en la función exponencial, función logaritmo y función raíz.

Los aprendizajes esperados que determina el texto para la unidad son los siguientes:

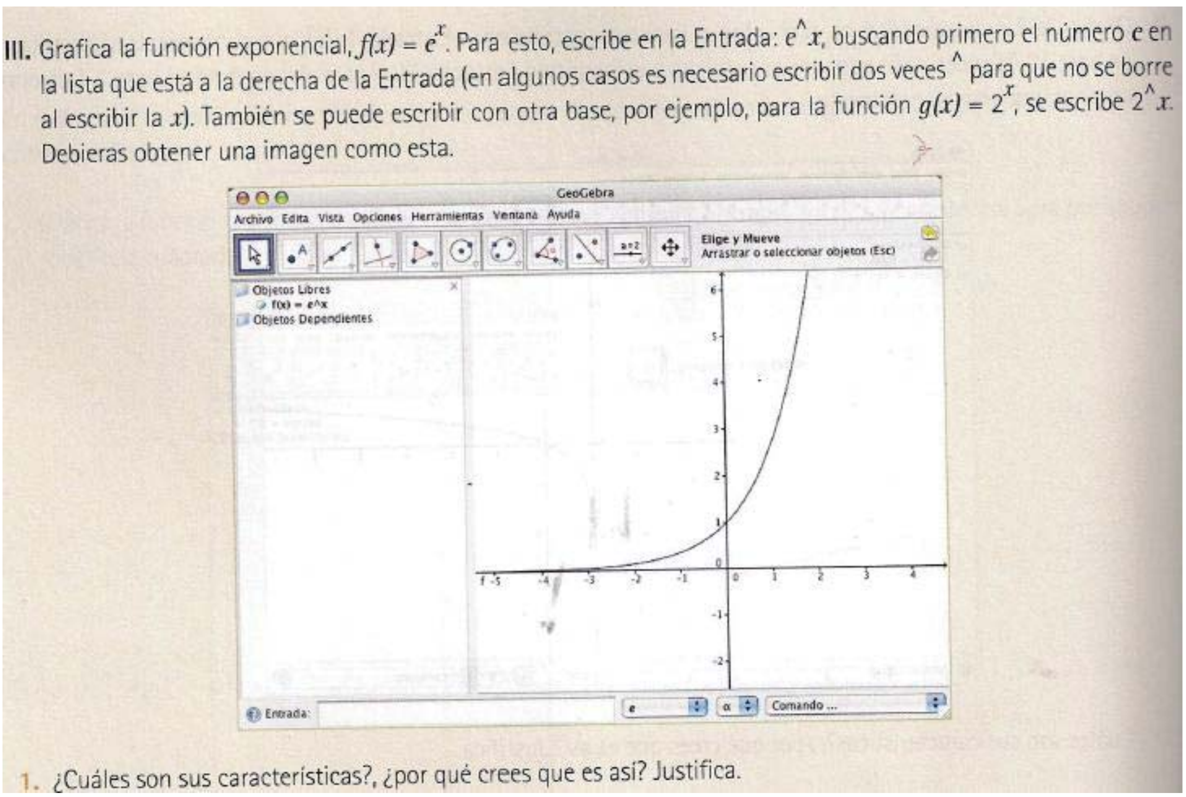
- Caracterizar los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos como un cociente entre dos números enteros.
- Caracterizar los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.
- Utilizar los números reales en la resolución de problemas, reconocer sus propiedades y realizar aproximaciones por defecto, por exceso y por redondeo,
- Ubicar algunas raíces en la recta numérica y explorar situaciones geométricas en las que ellas están presentes
- Analizar la demostración de la irracionalidad de algunas raíces cuadradas.
- Interpretar y calcular la raíz enésima de un número real y reconocer algunas propiedades.
- Relacionar las raíces enésimas con las potencias de exponente racional.

En el texto escolar, con respecto al estudio de la función exponencial, se pide que los estudiantes utilicen el software Geogebra[6] para poder graficar la función $f(x) = e^x$. Se pide responder preguntas acerca de las características, semejanzas, diferencias entre ellas y conclusiones. Además, se pide utilizar la herramienta para realizar diferentes gráficas en un mismo plano, para comparar y realizar reflexiones.

[6] GeoGebra es un programa interactivo especialmente diseñado para la enseñanza y aprendizaje de Álgebra y Geometría a nivel escolar medio (secundaria).

No existe un planteamiento sobre resolución problemas, tampoco existe una actividad en la cual los estudiantes deban construir la gráfica, se da más énfasis al tratamiento de la raíz y logaritmo que la función exponencial.

En la siguiente actividad, los estudiantes deben comparar las gráficas realizadas a través del software Geogebra, además deben analizarlas de tal manera que puedan identificar propiedades y características de cada una de ellas, de esta forma, se le está dando otro estatus a la gráfica, y se utiliza como argumento para construir las propiedades de la función exponencial.


III. Grafica la función exponencial, $f(x) = e^x$. Para esto, escribe en la Entrada: e^x, buscando primero el número e en la lista que está a la derecha de la Entrada (en algunos casos es necesario escribir dos veces ^ para que no se borre al escribir la x). También se puede escribir con otra base, por ejemplo, para la función $g(x) = 2^x$, se escribe 2^x. Debieras obtener una imagen como esta.

1. ¿Cuáles son sus características?, ¿por qué crees que es así? Justifica.

En otra actividad, se pide a los estudiantes que grafiquen, con el mismo software, distintas funciones exponenciales, encontrar semejanzas o diferencias.

3. Grafica en un mismo sistema de coordenadas las siguientes funciones.

a. $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

b. $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 3^{-x}$

c. $f(x) = -2^x$ y $g(x) = 2^x$

d. $f(x) = 3 \cdot 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$

- ¿Qué diferencias y semejanzas encuentras entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$? Explica.
- ¿Qué puedes concluir?

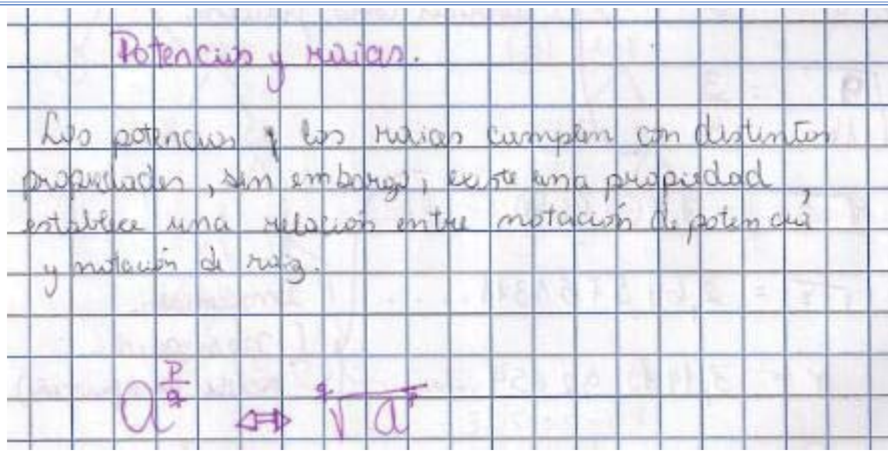
Se concluye que el objetivo de la actividad es que el estudiante pueda comprender que existen funciones crecientes y decrecientes, de las gráficas planteadas en cada ítem existe una simetría con respecto al eje *y*.

En esta situación, el estudiante debe manipular la gráfica y él mismo construir sus propias conclusiones con respecto a las gráficas planteadas, dejando de lado el tratamiento algebraico y utilizando solo el argumento gráfico como fundamento de sus conclusiones.

Con respecto al tratamiento de la función exponencial en el texto, es lo único que se puede apreciar de dicho contenido. Se manifiesta una fuerte profundización en el trabajo algebraico de la función raíz y logaritmo, enfatizando más en las propiedades y desarrollo de estas a través de ejercicios propuestos, minimizando el estudio de la función exponencial a dos páginas de la unidad.

Si bien, el MINEDUC ha realizado modificaciones en los programas de estudio y además ha propuesto un texto de actividades didácticas, en torno al estudio del concepto de función, en los establecimientos los docentes utilizan de apoyo a sus clases los textos escolares, por ende, si en los mismos textos que el MINEDUC aprueba para que se trabajen en el aula, se pone de manifiesto un trabajo inclinado a lo algebraico, en el aula el docente realizará estas mismas prácticas en sus dependencias.

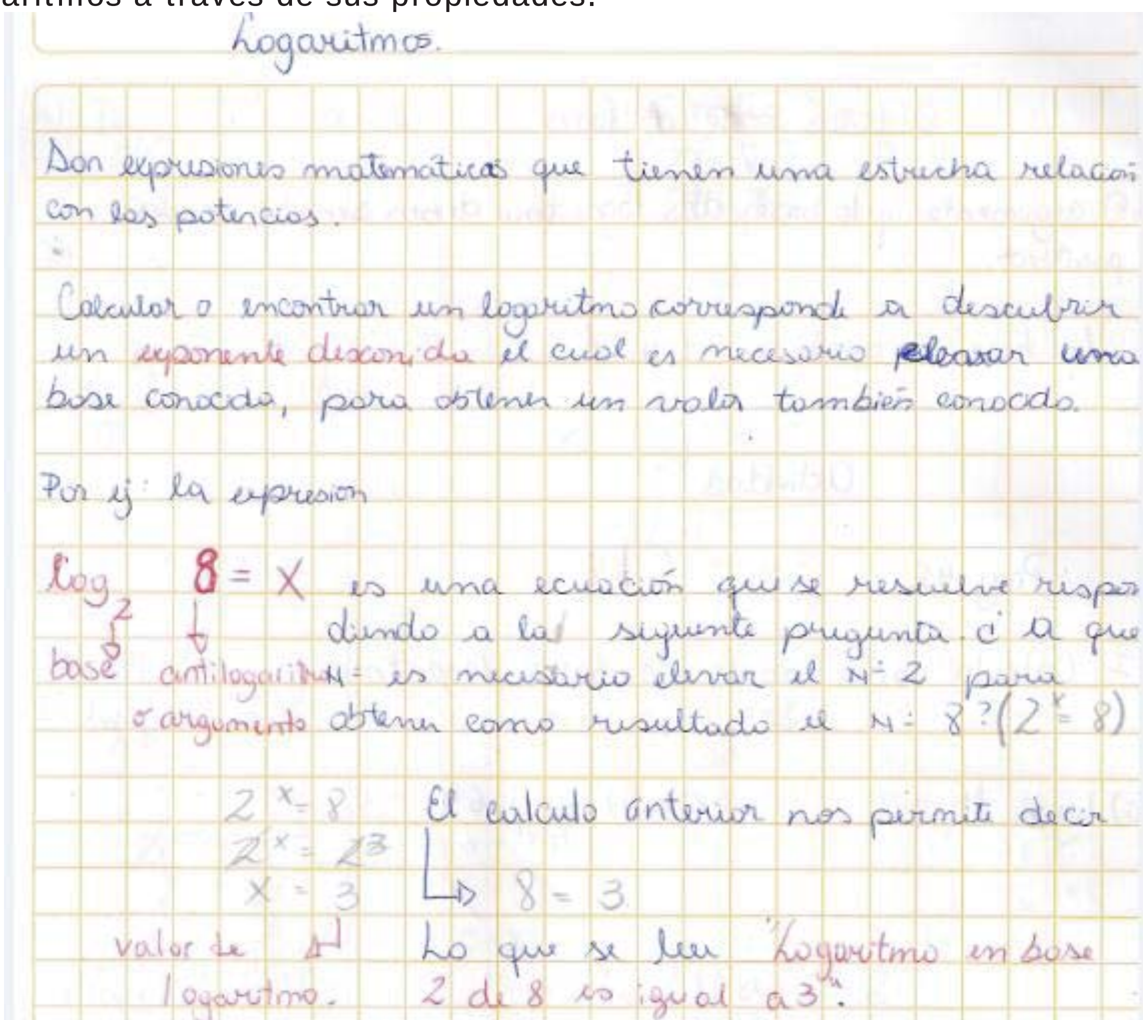
Las siguientes imágenes corresponden al cuaderno de una estudiante del establecimiento donde se aplicará las situaciones didácticas de esta investigación, podemos comprobar de qué forma se estudia la función exponencial.


Potencias y raíces.

Las potencias y las raíces cumplen con distintas propiedades, sin embargo, existe una propiedad, establece una relación entre notación de potencia y notación de raíz.

$a^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow \sqrt[q]{a^p}$

Posteriormente, se enuncian las propiedades para trabajar algebraicamente con la raíz, pero no hay un estudio sobre la gráfica. En cuanto a lo exponencial, se vuelven a recordar propiedades de potencias vistas en primer año de enseñanza media y finalmente se estudia logaritmos a través de sus propiedades.


Logaritmos.

Son expresiones matemáticas que tienen una estrecha relación con las potencias.

Calcular o encontrar un logaritmo corresponde a descubrir un exponente desconocido al cual es necesario elevar una base conocida, para obtener un valor también conocido.

Por ej: la expresión

$\log_2 8 = x$ es una ecuación que se resuelve respondiendo a la siguiente pregunta ¿A qué es necesario elevar el N° 2 para obtener como resultado el N° 8? $(2^x = 8)$

base

antilogaritmo o argumento

$2^x = 8$ El calculo anterior nos permite decir

$2^x = 2^3$

$x = 3$ → $\log_2 8 = 3$

valor de logaritmo. Lo que se lee "Logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3".

No se observa un trabajo de la gráfica de ninguna función (raíz, logaritmo y exponencial), como lo propone el programa de estudio y queda en manifiesto, que se sobrevalora el trabajo algebraico, dejando de lado otro tipo de argumentos.

El estudio epistemológico junto con la investigación sobre el estatus de la modelación-graficación en el discurso matemático escolar, dejan en manifiesto que el uso de la gráfica es escaso, y su nivel de tratamiento es utilitario, por lo tanto, lo estudiantes no logran una comprensión del objeto matemático, ya que solo se utiliza como aplicación de fórmulas o simplemente como para resolver muchos ejercicios del mismo tipo.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

En este capítulo mostraremos algunos aspectos teóricos relevantes del marco teórico de la Socioepistemlogía, destacando aquellos que fundamentaran esta investigación en cuanto a la resignificación de lo exponencial a través del binomio modelación-graficación.

3.1 ASPECTOS TEÓRICOS DE LA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

El ser humano como ser social, resuelve sus necesidades básicas, pero además comparte intereses comunes comunicando sus formas de pensar y proceder en las actividades que realiza o realizan grupos sociales, es decir, interactúa con sus semejantes. Esta forma natural y propia del ser humano, de compartir experiencias, es una manera de construcción del conocimiento. La construcción social del conocimiento se produce con la actividad humana y en particular la construcción del conocimiento matemático con la actividad matemática que se realiza en distintas instituciones de la sociedad.

La Socioepistemología postula que las prácticas sociales son las generadoras de conocimiento matemático, considera a la práctica social como un constructo que se está construyendo y que reivindica el trabajo del ser humano en las explicaciones de la construcción del conocimiento. Esta constituye un medio para estudiar el conocimiento matemático, ya que señala otras dimensiones que no son explícitas de la actividad matemática anclada a los conceptos, como son las prácticas en lo social y las argumentaciones en lo situacional (Cordero, Buendía, 2005).

Los sistemas sociales en la Socioepistemología son considerados como sistemas complejos donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, confluyen dimensiones que sistemáticamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que son consideradas en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural, la producción y reproducción social del mismo, esto es, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos (Arrieta, 2003).

Este trabajo se fundamenta en un marco teórico, llamado Socioepistemología, en la cual se atienden todos los aspectos inherentes al conocimiento matemático y al sujeto que aprende. Bajo esta perspectiva, la clase de matemática, debiera servir como un espacio para el ejercicio de prácticas, donde los estudiantes y profesores participen en la construcción del conocimiento.

3.1.1 LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

El término Socioepistemología, en cuanto al problema del saber, lo contextualiza y lo sitúa. Cantoral y Farfán, en un intento de caracterizar la socioepistemología, escriben que es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2002). En otras palabras en la Socioepistemología confluyen cuatro dimensiones, lo epistemológico, relativo a las prácticas que dan origen a las construcciones de los conocimientos; lo cognitivo, a los procesos de construcción de los conocimientos por los escolares; lo didáctico, que se relaciona a las formas de intervención en los sistemas escolares; y lo social, acerca a como se desarrollan y viven en nuestro entorno las prácticas que dan lugar a los conocimientos.

Esta teoría incorpora a las prácticas institucionales en el modelo del conocimiento, que en consecuencia rompe con la centración de los conceptos matemáticos. Intenta dar evidencias a través de diversos resultados de investigación del uso del conocimiento matemático y su desarrollo para crear otro marco que ofrezca las prácticas de referencia donde se resignifique el discurso matemático escolar, de tal manera que ya no se mire los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino que se tratan con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Del concepto a las prácticas, el nuevo reto (Cantoral y Farfán, 2003).

En cuanto al objeto matemático, la perspectiva de la socioepistemologia no es mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino atender a las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos. Es decir, intenta crear un modelo que describa la construcción social del conocimiento matemático y poner al descubierto sus causas reales: el reto es formular epistemologías sobre las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003).

3.1.2 PRÁCTICA SOCIAL

La Socioepistemología postula que existe una filiación entre el conocimiento matemático y las prácticas humanas (Cantoral, 2004). De este modo, le interesa entender, explicar y modelar el papel de las prácticas sociales en los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático.

Entiéndase práctica social como el constructo teórico que la Socioepistemología acuña para hablar de la construcción social del conocimiento matemático, es decir, aquella que pasa por procesos de institucionalización normando a la actividad humana y la praxis en su función reflexiva y que permiten la articulación de prácticas de referencia con herramientas matemáticas (Covián, 2005).

El constructo de práctica social hace referencia a aquello que provoca que un individuo o grupo realicen eso que hacen (Covián 2005; citada en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Se reconoce al ser humano haciendo matemáticas en vez del producto hecho por el humano. Considerar la producción matemática implica explicar la matemática desde la matemática misma; en cambio, reparar en el humano haciendo matemáticas obliga a mirar otros dominios científicos y prácticas de referencia donde se resignifica el conocimiento matemático.

La perspectiva teórica asume a las prácticas sociales como las acciones de un grupo social que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual, que actúa de acuerdo con ideologías predominante y utiliza a la matemática como herramienta para construir conocimiento (Cordero, 2001).

Una vez identificadas las prácticas sociales que dieron y dan cuenta del conocimiento matemático necesitan ser interpretadas para integrarse al sistema didáctico, donde precisan de la intencionalidad (de producción, en el sistema didáctico) para que se desarrollen en las condiciones del sistema, pues de esta manera, las prácticas sociales se consolidan como la base para el rediseño del discurso matemático escolar.

De este modo, se pretende explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático con base en prácticas sociales.

En sus investigaciones, los socioepistemologos reportan más bien las caracterizaciones del ejercicio de las prácticas que anteceden a la producción o construcción de conceptos y al desarrollo del saber.

3.1.3 EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

El discurso matemático escolar es la manifestación del conocimiento matemático de los participantes en el sistema didáctico, el cual constituye una concepción de enseñanza que está normada por el contrato escolar y el pragmatismo que se deriva de éste.

Se ejerce la enseñanza y el aprendizaje, considerando a la matemática como un conocimiento acabado y tratando a los conceptos matemáticos en las acciones de enseñar como actos repetitivos o de memorización. Estos hechos han definido la enseñanza tradicional de las matemáticas, cuya característica esencial es que se ha limitado al plano del lenguaje (modelo racional de la ciencia) y ha dejado de lado el papel de las acciones (los sentidos de los participantes). (Cordero, 2003).

En tanto, el discurso matemático escolar vigente con respecto a la función exponencial, es algebraico y centrado en conceptos, enfocado en un nivel utilitario y no funcional. En cuanto a la gráfica, en el discurso matemático escolar es utilizada como una representación y no como una argumentación del conocimiento de lo exponencial.

Es posible construir otras explicaciones de los contenidos matemáticos y la tarea es ver cuál es la más adecuada, esto se llama rediseño del discurso matemático escolar (Cordero, Cibem 2009). Este rediseño del discurso matemático escolar, resignifica la actividad matemática, otorgando una construcción del objeto.

3.1.4 LA RESIGNIFICACIÓN

La resignificación será la que propicie que el conocimiento sobre un objeto matemático se constituya como una herramienta para resolver preguntas en otros momentos de su vida, dentro y fuera de la escuela.

La resignificación será la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes. (Cordero, 2006).

Es un proceso que nace a partir de una investigación socioepistemológica y que responde a la intención de llevar a cabo una reorganización de la matemática escolar. (Borello, 2010).

La resignificación busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos, que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. (García, 2007).

Se trata por lo tanto de mirar al conocimiento en relación a su uso en una determinada situación la que lleva, dentro de la organización del grupo humano, a la determinación de la forma y de la función del mismo objeto matemático. (Domínguez, 2003). En este contexto, el individuo resulta ser "un ente activo modificando su entorno y modificándose a sí mismo en el contexto mismo de las prácticas en las que se involucra y éstas son la fuente de resignificación del conocimiento matemático". (Buendía, 2004, p. 71).

La resignificación es la función de la práctica social, dado que es lo que norma el conocimiento, da evidencia de construcciones de conocimiento matemático en situaciones específicas. De tal forma que una situación decimos que se resignifica un conocimiento matemático donde el participante desarrolla una matemática que sea funcional (Briceño, 2010).

La evidencia de la resignificación está dada por medio del estudio del uso del conocimiento, viendo éste como algo que se va organizando y cambiando, es decir, se va desarrollando en la situación o escenario que se enfrente. Esto va generando nuevos usos del conocimiento a través de su funcionamiento y forma. En este sentido, el estudio del uso de la gráfica sirve para resignificar un conocimiento matemático, cuando se hace uso de la gráfica a través de su desarrollo, mediante su funcionamiento y forma. De esta manera el conocimiento ya no es utilitario, sino funcional.

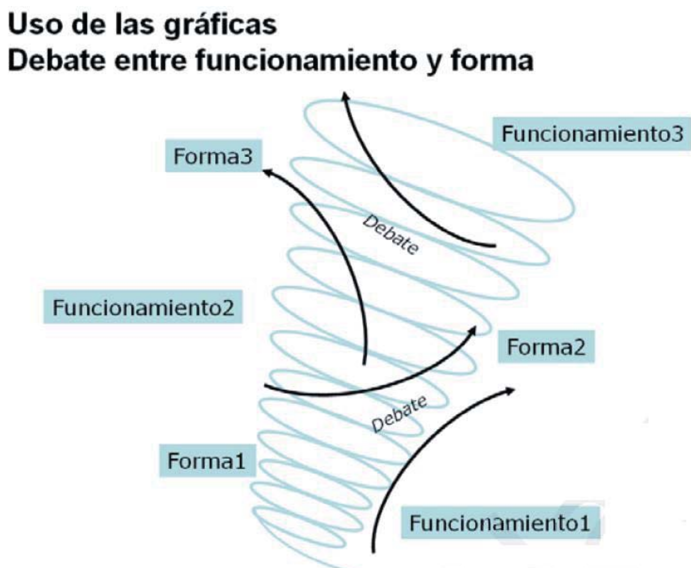
3.1.5 LA MATEMÁTICA FUNCIONAL

Cuando la socioepistemología se refiere a la justificación funcional, se entiende por aquellos mecanismos de desarrollo del uso del conocimiento en la situación específica son funcionales como contra parte de una justificación razonada, es decir, lo que norma la justificación no es una proposición lógica sino aquello que le es de utilidad a lo humano, por lo tanto se refiere al conocimiento incorporado orgánicamente en el ser humano, que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello, en oposición al conocimiento utilitario.

La matemática funcional es aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente (continuamente) en la vida. Esta funcionalidad no se podrá alcanzar en el sistema educativo sino se amplían los modelos de conocimiento que ocupa la didáctica de las matemáticas. Es necesario entender que la matemática se ha desarrollado porque ha estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde se ha resignificado esta. Para ello, debemos incorporar o crear modelos de conocimiento matemático que rindan cuenta de lo que constituye su contenido y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de conocimiento y que el volumen y el carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre viene determinado por el nivel de desarrollo de las prácticas sociales, es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior (Cordero, 2010).

3.1.6 BINOMIO MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

Para la Socioepistemología la modelación-graficación, es una categoría que representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de situaciones, varias investigaciones han abordado este binomio en una situación de modelación del movimiento (cf. Morales, 2009; Suarez 2008). Los elementos constitutivos de la categoría de modelación-graficación se traducen en los elementos de un diseño de situación con una hipótesis específica: la variación resignifica a través de la modelación-graficación. Es decir, una situación de aprendizaje que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas y situaciones que ahí intervienen, contribuye a establecer relaciones entre gráficas y situaciones de cambio donde la variación tiene un sentido específico que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función, de esta manera se establece un "uso de las gráficas" asociado a la función orgánica de la figuración de las cualidades donde se establecen formas de uso de las gráficas, se construyen argumentos y se ponen en funcionamiento avanzado hacia justificaciones funcionales. (Suarez y Cordero, 2008). Más precisamente, los elementos de funcionamiento son las circunstancias que hicieron posible la modelación de fenómenos de variación a través de figuras, en tanto que los elementos de forma son las clases de tareas. Estas tareas quedan determinadas por el funcionamiento y éste, a su vez, determina nuevas formas y nuevos funcionamientos. Los nuevos funcionamientos y formas se desarrollan en espiral, como se muestra en la siguiente figura:



De acuerdo a lo anterior, se desarrolla el uso de las gráficas en la figuración de cualidades en tres momentos:

- Momento I: establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento el uso de las gráficas en la modelación.
- Momento II: construcción de argumentos en el uso de las gráficas en a modelación.
- Momento III: puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación.

Se resume en: establecimiento de las formas gráficas, construcción de argumentos y funcionalidad, la cuales tienen como resultado la resignificación del conocimiento, estableciendo entre gráficas y situaciones de cambio.

Las argumentaciones de las gráficas de las funciones, en la socioepistemología, se refieren a la argumentación de la situación de transformación de funciones (situación de modelación). Ahí se resignifica el uso de las gráficas debatiendo entre su funcionamiento y forma: las curvas de movimiento geométricas son resignificadas como patrones de comportamiento gráfico y analítico y comportamiento tendenciales de las funciones generando procedimientos que consisten en identificar y variar los parámetros de las funciones, construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos. (Cordero, 20006a).

Estas argumentaciones del uso de la gráfica se han encontrado en otros dominios científicos donde adquiere significado. Esto ha brindado ciertas categorías de uso de la gráfica que se resignifica a través de su funcionamiento y forma en su vivencia escolar y que no se aprecian por centrarse en la gráfica como algo que se usa para rendir cuenta del concepto de función. Así el estatus del uso de la gráfica formula epistemologías donde la graficación, lleva hacer múltiples realizaciones y ajustes en su estructura para producir un patrón deseable, donde es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación para construir el conocimiento (Cordero, 2008).

Dentro de nuestra investigación se adopta a la modelación como una construcción teórica (Cordero, 2006) que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos. Y como características propias de esta construcción, la modelación posee su propia estructura, está constituída por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. Con todas estas características, la modelación selecciona el lenguaje de las herramientas (Arrieta, 2003 y Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suarez, 2004) sobre el lenguaje de los objetos.

Las gráficas de las funciones son el conocimiento mismo que se desarrolla y que hoy aportan datos epistemológicos que propician nuevas hipótesis para trabajar la variación en la matemática escolar. Por un lado, tenemos explicaciones sobre como la graficación conforma elementos importantes de construcción para las ideas de la variación y que se desarrollan de manera independiente, en este caso anterior al desarrollo analítico del concepto de función. También tenemos explicaciones sobre un uso argumentativo ya que la gráfica pasa a ser un elemento central en explicaciones como el de la caracterización de los puntos extremos o en el establecimiento de la veracidad de relaciones físicas o numéricas conocidas. (Cordero, 2010).

En cuanto a la modelación utilizada a través de la tecnología, estas deben ser articuladas a través del uso de las gráficas, ya que el potencial de la graficación puede ir más allá si se le considera en sí misma una modelación. Las características que debería cumplir son las siguientes según (Suarez y Cordero, 2005):

1) Las gráficas se obtienen a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica.
2) Tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos.
3) Propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos variantes en las situaciones.

En esta investigación se utilizará la modelación-graficación, como sustento para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de una situación de aprendizaje de la función exponencial. Entenderemos por situación de aprendizaje a aquella situación problemática que pone al estudiante ante un ambiente favorable para el desarrollo de procesos de construcción de significados para una noción. Además, se entiende como una situación que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas de la función exponencial que ahí intervienen, que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función. De esta manera se establecen formas de uso de las gráficas, se construyen argumentos y se ponen en funcionamiento avanzando hacia justificaciones funcionales.

CAPÍTULO IV: DISEÑO DE SITUACIÓN Y PUESTA EN ESCENA

En este capítulo se darán a conocer los aspectos epistemológicos considerados en la investigación y que otorgaron directrices para la elaboración del diseño de situación, junto con ello la puesta en escena del diseño, abordando aspectos como quienes fueron los participantes, el análisis a priori, el a posteriori del diseño, mostrando evidencias y argumentos que fundamentan la hipótesis de investigación.

4.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación se centra en la resignificaión de lo exponencial a través del binomio gráficación-modelación en segundo año de enseñanza media. La forma de trabajo adoptada para tal fin, fue revisar la epistemología de la función, posteriormente los programas de estudio, luego el texto del MINEDUC utilizado por las estudiantes y finalmente el cuaderno de estudio de una estudiante, todo con el propósito de conocer el estatus de la gráfica, cómo es tratada, cómo se hace presente la graficación en el discurso matemático escolar y el momento en que aparece curricularmente. Evidencias de lo anterior las encontramos en el análisis realizado del material mencionado, con el fin de caracterizar los usos de las gráficas a través de sus funcionamientos y formas. Posteriormente, con el análisis efectuado de material, se realizó un diseño de situación de aprendizaje que tuviera como objetivo la resignificación de la graficación-modelación en el estudio de la noción de lo exponencial en estudiantes de segundo año de enseñanza media.

Para cumplir este objetivo, se ha realizado un instrumento de recogida de datos, que corresponde a un diseño de situación que se distribuyen en tres momentos:

- Momento 1: Establecimiento de la forma de las gráficas en la modelación.
- Momento 2: Construcción de argumentos a través de la variación.
- Momento 3: Funcionalidad de lo exponencial a través de la modelación-graficación.

La metodología que se utilizó en esta investigación es cualitativa, ya que las estudiantes cuando reflexionan entre sus pares la situación propuesta, deben expresar y describir el proceso de desarrollo de cada una de las actividades planteadas.

4.2 ESCENARIO Y ACTORES

El diseño de situación se realizará a un mismo grupo de estudiantes, las cuales son alumnas de segundo año de enseñanza media, en un colegio particular subvencionado, de la comuna de Independencia. De acuerdo a lo mencionado en el capítulo II, en relación a que no existe aparente uso de las gráficas en cuanto a la función exponencial en el discurso matemático escolar, se sostiene que en este grupo de estudiantes puede ocurrir que lo se menciona en dicho capitulo.

En cuanto a la aplicación del instrumento, este se realizará en diversos días, en clases de matemática. Las alumnas podrán desarrollar las actividades a través de un documento escrito, el cual será entregado a cada una de ellas, sin embargo, dos de los diseños, requerirá adicionalmente el software geogebra, el cual ya está instalado en la sala de enlace del establecimiento, para que las estudiantes puedan trabajar con un computador, cada dos alumnas.

El investigador no interviene en todo el proceso de aplicación del diseño, posee un rol de observador.

Las alumnas fueron escogidas de segundo año medio, ya que en este nivel comienza el aprendizaje de la noción de función, en dicho curso, los planes y programas plantean estudiar la función exponencial, sin embargo, tal como se evidenció en el estudio de textos y cuadernos, es utilitario, lo cual no conllevaría a la comprensión de la noción de función, si bien, en este nivel, el estudio es menos profundo que en la enseñanza superior, se cree que a partir de este nivel, las estudiantes podrían adquirir los conocimientos necesarios para lograr la comprensión del objeto matemático.

4.3 EL DISEÑO

El diseño de situación está distribuido en tres momentos, los cuales tienen el objetivo de presentar una situación, en donde los estudiantes tengan la necesidad de utilizar herramientas, procedimientos y nociones matemáticas que den evidencia sobre el proceso de desarrollo de las actividades, para esto, los estudiantes describen, analizan y reflexionan en torno a la situación planteada, utilizando conocimientos previos para construir argumentos que fundamenten el razonamiento matemático.

A continuación se resume en el siguiente recuadro, el diseño de situación:

Momento 1	Momento 2	Momento 3
Actividad 1 y 2: Láminas con gráficas.	Actividad 1 y 2: Situación de variación.	Actividad 1: Graficación y modelación de la función exponencial
Objetivo: Establecimiento de la forma de las gráficas en la modelación.	Objetivo: Construcción de argumentos a través de la variación.	Objetivo: Funcionalidad de lo exponencial a través de la modelación-graficación.
Resignificar lo exponencial a través del binomio modelación-graficación en segundo año de enseñanza media		

Momento 1:

Está compuesto por dos actividades, la actividad 1 consta de un set de 12 láminas, las cuales tiene distintas gráficas de crecimiento y decrecimiento. El estudiante debe agrupar 10 láminas según el criterio que estime conveniente y luego en la actividad 2, insertar dos gráficas en los grupos que realizaron.

Momento 2:

Está compuesto por dos actividades, en la primera deben utilizar el software geogebra, el cual tiene un diseño que permite observar distintas gráficas de funciones como logaritmos, cúbicas y exponenciales, etiquetadas solo con letras mayúsculas.

La segunda actividad consta de una situación que muestra distintas gráficas, las cuales están impresas. La situación, consiste en explicar la información que las gráficas entregan a través de diversas preguntas que se plantean.

Momento 3:

Consta de una actividad, en la cual se debe manipular la gráfica de una situación planteada a través del software geogebra, además se debe verificar los datos generados en una tabla y argumentar las respuestas de las preguntas planteadas.

4.4 ANALISIS A PRIORI

MOMENTO 1: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Argumento: Forma de la gráfica.</td></tr>
<tr><td>Preguntas</td><td>Proceso</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a) Dada las siguientes láminas agrupa las gráficas de acuerdo a uno o más criterios que estimes conveniente, escribe los grupos que realizaste y los criterios que consideraste</td><td>IDENTIFICAR GRÁFICAS CRECIENTES Y DECRECIENTES:
Grupo crecientes:
n°2, n°3, n°4, n°5,n°6,n°7, n°8
Grupo decrecientes:
N°1, n°9, n°12</td></tr>
<tr><td>IDENTIFICAN POR TIPO DE FUNCIÓN:
lineal: N°7, n°12
Logaritmo; n°4,n°8,n°9
Exponencial: n°5, n°1
Raíz y polinomio: n°2, n°3, n°6</td></tr>
<tr><td>CORTES EN LOS EJES:
Eje Y: n°1,n°5
Eje X: n°4,n°8, n°9
(0,0): n°7,n°12, n°3, n°6, n°2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Argumento: Forma de la gráfica.</td></tr>
<tr><td>b) Observa la lámina n°10 y n°11, ¿qué observas?</td><td>OBSERVAN DIFERENCIAS Y SEMEJAZAS:
Ambas son curvas.
Una es creciente y la otra decreciente
Ambas cortan en el eje y
Simetría con respecto al eje y.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c) Inserta las láminas en los grupos que realizaste en la letra a) y explica el criterio que utilizaste.</td><td>Insertar la n°10 en las decrecientes
Y la n°11 en las crecientes</td></tr>
<tr><td>Insertar la n°10 y n°11 en las exponenciales</td></tr>
</table>

	Insertar la n°10 y n°11 en las que cortan en el eje y
d) En los grupos generados en la letra b), vuelve a realizar una nueva agrupación. Escribe los grupos que realizaste y los criterios que utilizaste.	Según cortes en los ejes: **Crecientes:** Corte en (0,0): n°2, n°6 y n° 3 Cortes en x: n°8 y n° 4 Cortes en y: n°11 y n°5 **Decrecientes:** Corte en (0,0):n°12 Cortes en x: n°9 Cortes en y:n°1 y n°10

MOMENTO 2: VARIACIÓN

Actividad 1	
Argumento: variación y uso de la gráfica	
Preguntas	**Proceso**
a) Observa lo que sucede y describe qué pasa con las gráficas cuando manipulas los botones de la pantalla.	Todas son curvas excepto A2
	Identificar gráficas crecientes, decrecientes o ambas
	Identificar cortes en eje x, eje y, en el punto (0,0) o en ninguno.
	Identificar que algunas gráficas tiene semejanza, por ejemplo: E, E1 y E2 se trasladan en el eje y.
Actividad 2	
Argumento: variación y uso de la gráfica	
Preguntas	**Proceso**
a) ¿Las tres personas comienzan a ahorrar con la misma cantidad de dinero?	Identifican la intersección con el eje Y.
Explica la forma en que cada uno realiza sus ahorros diarios.	Reconocen la variación de las funciones a través de los diferentes cambios de estas.
b) ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno a los 10 días?	Identifican una regularidad de aumento en cada una de las gráficas Juan: 0, 100, 200, 300… un aumento constante de $100

	diarios Carlos: 0, 100, 400, 900, 1600… Identifican un aumento lineal Matías: 100, 400, 800, 1600… Identifican un aumento exponencial
c) ¿Quién es el más ahorrador? Explica tu respuesta.	Identifican que el crecimiento de ahorro de Matías es más rápido que los demás, por ende el más ahorrador.

MOMENTO 3: MODELACIÓN Y GRAFICACIÓN.

Actividad 1	
Argumentos: variación, cambio, forma de gráfica, uso de la gráfica	
Pregunta	**Proceso**
a) Mueve el punto A y describe lo que sucede.	Reconocen la gráfica creciente. Identifican las variables independiente: tiempo y la variable dependiente: dinero.
b) Si tuvieras que explicar la forma en que el banco realiza el cobro de comisiones, desde el inicio y diariamente, ¿cómo lo harías?	Si tuvieras que explicar la forma en que la persona ahorra, desde el inicio y diariamente, ¿cómo lo harías?
c) ¿Qué sucede cuando presionas el botón C?	Reconocen una gráfica que modela la situación planteada.

4.5 RESULTADOS Y EVIDENCIAS

4.5.1 MOMENTO 1

Está compuesto por dos actividades, la actividad 1 consta de un set de 12 láminas, las cuales tiene distintas gráficas de crecimiento y decrecimiento. El estudiante debe agrupar 10 láminas según el criterio que estime conveniente y luego en la actividad 2, insertar dos gráficas en los grupos que realizaron. Los criterios utilizados para realizar las agrupaciones deben ser argumentados.

Actividad 1

a) Dada las siguientes láminas agrupa las gráficas de acuerdo a uno o más criterios que estimes conveniente, escribe los grupos que realizaste y los criterios que consideraste

• Grupo 1 : Láminas: N°2, N°3, N°4, N°5, N°6, N°7, N°8
(Creciente)
• Grupo 2 : Láminas: N°1, N°9, N°12
(decreciente)
Los agrupé así por el criterio de si la línea va de manera creciente / o decreciente \; y porque me pareció el criterio más general para agrupar.

Las estudiantes logran hacer una descripción gráfica del crecimiento y decrecimiento de gráficas que nunca han estudiado ni visto. Ellas pudieron relacionar la representación de la gráfica con pendientes inclinadas positivamente o negativamente (contenidos de primer año medio), para luego afirmar que estas curvas presentadas son crecientes o decrecientes.

En esta respuesta, podemos observar que las estudiantes utilizan la gráfica como argumento a la clasificación de gráficas crecientes y decrecientes. De esta forma, las estudiantes de manera natural, logran agruparlas debido a la interacción que generan entre las gráficas presentadas y los significados asociados a estas, que resultan similares a las vistas en primer año medio, lo cual queda manifiesto cuando las estudiantes dibujan por creciente un signo / y por decreciente un signo \

Si bien las estudiantes no expresan algebraicamente que $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_2 > x_1$ o $f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow x_2 > x_1$, el análisis cualitativo que realizan, permite tener una visión global de las gráficas proponiendo propiedades intrínsecas a las funciones, cuya forma es el argumento para decir que son crecientes o decrecientes.

Actividad 2

b) Observa la lámina n°10 y n°11, ¿qué observas?

* AMBAS SON CURVAS AUNQUE LA N° 11 VA DE MANERA CRECIENTE Y LA N° 10 VA DE MANERA DECRECIENTE, UNA ES EL REFLEJO (COMO UN ESPEJO) DE LA OTRA, AMBAS INTERCECTAN A EL EJE "Y" PERO NO A/EJE "X"

Se pone de manifiesto las propiedades analíticas intrínsecas a las funciones, las cuales quedan expresadas al caracterizar el comportamiento de la gráfica a través de la forma de una curva, la intersección con el eje *y*, y la simetría con respecto al eje y cuando escribe *"reflejo (como un espejo)".*

c) Inserta las láminas en los grupos que realizaste en la letra a) y explica el criterio que utilizaste.

* A LA N° 11 LA PUSE EN EL GRUPO 1 PORQUE VA DE MANERA CRECIENTE, Y A LA N° 10 LA PUSE EN EL GRUPO 2 PORQUE VA DE MANERA DECRECIENTE.

De forma natural, las alumnas son capaces de reconocer en otras gráficas, una propiedad común con las agrupadas y queda en evidencia al insertarlas en los grupos realizados, utilizando solo el argumento gráfico para exponer que hay dos grupos, uno creciente y el otro decreciente.

d) En los grupos generados en la letra b), vuelve a realizar una nueva agrupación. Escribe los grupos que realizaste y los criterios que utilizaste.

• GRUPO N°1

a) Láminas → N°1 , N°10 : la forma en que va decreciendo la recta no es tan pronunciada , además es similar en ambas

b) Lámina → N°9 : la recta va decreciendo de manera moderada en un principio , pero llega a un punto que lo hace muy pronunciadamente.

c) Lámina → N° 12 : la recta decrece de manera directa.

Se pone en evidencia que las alumnas son capaces de transitar desde una visión global a una visión local de la gráfica, a través de las observaciones y reflexiones en torno a ellas. Las estudiantes descubrieron los significados y sistemas simbólicos que se encuentran directamente en las gráficas, estos se ponen en evidencia a través del análisis cualitativo de las gráficas, cuando las estudiantes vuelven a clasificar los grupos realizados en el primer ejercicio, que como ellas mismas mencionaron: "*fue la forma más general de clasificarlas*", y con una segunda mirada a la clasificación, pueden observar más detalladamente los grupos, desprendiendo otras propiedades de las mismas gráficas (rectas, exponenciales y logaritmos) argumentado a través de la forma, con frases como: "*además es similar".*

4.5.2 MOMENTO 2

Está compuesto por dos actividades, en la primera deben utilizar el software geogebra, el cual tiene un diseño que permite observar distintas gráficas de funciones como logaritmos, cúbicas y exponenciales, etiquetadas solo con letras mayúsculas.

La segunda actividad consta de una situación que muestra distintas gráficas, las cuales están impresas. La situación, consiste en explicar la información que las gráficas entregan a través de diversas preguntas que se plantean.

Actividad 1

a) Observa lo que sucede y describe qué pasa con las gráficas cuando manipulas los botones de la pantalla.

La primera observación que hacen las estudiantes es con respecto a las funciones crecientes y decrecientes

Nos dimos cuenta que hay gráficas crecientes, decrecientes,
o los dos juntos, por ejemplo la A es creciente, B_1 es
decreciente y A_1 pareciera ser ambas cosas.

La segunda observación de las estudiantes es con respecto a la intersección de los ejes

Nos dimos cuenta que algunos atraviezan el eje X (D),
pasan por el origen ~~____~~ (A, A_1, A_2, B y C) y los otras
intersectan el eje Y (E, E_1, y E_2).

La tercera observación apunta a reconocer tres gráficas similares que son las funciones exponenciales

Por último observamos que las curvas E, E_1 y E_2 se
parecen mucho, sólo que parecieron iguales pero
movidos en el plano.

A partir de las dos primeras observaciones cualitativas, las estudiantes realizan una descripción gráfica de las curvas, dejando en evidencia significados propios de las gráficas, al decir que son crecientes o decrecientes, al notar las intersecciones con los ejes, y más aun, al realizar agrupaciones, dejan en manifiesto las propiedades que están identificando en varias de las funciones.

En la tercera observación cualitativa, no se menciona la palabra variación, sin embargo, las estudiantes logran identificar que tres gráficas son similares, al decir: *"se parecen mucho".* A través de esta reflexión, dejan en evidencia un análisis de las curvas, una relación entre las funciones y las diferencias de posición entre ellas, ya que intuyen que pertenecen a la misma clasificación de funciones al decir: *"solo que parecieran iguales pero movidas en el plano"*, de esta manera evidencian que reconocen un comportamiento de las gráficas a través de la forma, que argumentaría sobre la variación de estas.

Actividad 2

a) ¿Las tres personas comienzan a ahorrar con la misma cantidad de dinero?

En esta pregunta las estudiantes identifican a través de la gráfica las intersecciones con el eje y, al decir en cuánto dinero comienza cada persona

a.- matías comienza su ahorro con $100, en cambio, Carlos y Juan con $0.

Establecen relaciones entre la gráfica y la situación planteada, al identificar las intersecciones con el eje y. Los significados que otorgan a la gráfica se detectan a través de las explicaciones que dan*: "Matías comienza con $100, en cambio Carlos y Juan con $0* "

b) Explica la forma en que cada uno realiza sus ahorros diarios.

En esta pregunta las estudiantes realizan una observación cualitativa y cuantitativa de la gráfica, describiendo la forma en cada uno ahorra, mencionan que el primer caso tiene un aumento constante al decir *"ahorro constante y es de $100"*. En los otros dos modelos, se habla de un ahorro que no es contante, reconociendo la cantidad de ahorro diario.

Juan tiene un ahorro constante y es de $100.

Carlos no ahorra de forma constante pero nos damos cuenta que al segundo día tiene $400, al tercer día $900 y al cuarto día $1600.

Matías tampoco tiene un ahorro constante, pero nos damos cuenta que al segundo día tiene $400, al tercer día $1800 al cuarto día $1600

c) ¿Cuánto dinero tiene ahorrado cada uno a los 10 días?

En esta pregunta las estudiantes no logran predecir, sin embargo, intentan explicar cuánto dinero podrían tener ahorrado a los 10 días, a través de una observación cuantitativa, calculando la diferencia entre las cantidades.

c.- Aparentemente los ahorros de Carlos y Matías no se pueden saber, pero

Carlos: 0 - 100 - 400 - 900 - 1600... ?

100 300 500 700 900 ...?

Matías: 100 - 400 - 800 - 1600 ...?

300 400 800 ... ?

Y Juan a los 10 días tiene $1000.

Al establecer esta secuencia de datos, las estudiantes proponen un procedimiento de cálculo de diferencias para intentar llegar a los 10 días solicitados, pero como la información no se ve en la gráfica, no logran predecir, excepto en el caso del modelo de Carlos, en el cual trató de continuar con la variación al escribir: *"900...?"*

Los significados que otorgaron a las gráficas, dan cuenta de las relaciones que establecieron entre estas y la situación planteada, al realizar observaciones cualitativas y cuantitativas.

d) ¿Quién es el más ahorrador? Explica tu respuesta.

d.- Según la información Carlos y Matías a los 4 días tienen el mismo dinero ahorrado, en un tiempo más los dos deberían tener más dinero ahorrado (no se quien es el mas ahorrador, no aparece).

Como la gráfica no entrega más información, esto no facilita la tarea a las estudiantes para poder identificar quién es el más ahorrador, pero reconocen el crecimiento de la función al decir: *"en un tiempo más los dos deberían tener más dinero ahorrado".*

En las respuestas de las preguntas anteriores, se logró dar explicaciones de la situación en torno a la variación, al plantear argumentos sobre la forma en que las personas ahorraban, lo cual quedó explícito cuando hacen mención del crecimiento constante, no constante y los cálculos de las diferencias de ahorro de cada persona. Si bien, no identificaron el crecimiento exponencial, lograron dar significado a la gráfica, a través de procedimientos que se apoyaron en el funcionamiento y forma de esta, construyendo argumentos que permitieron describir y reconocer propiedades intrínsecas de la función.

4.5.3 MOMENTO 3

Consta de una actividad, en la cual se debe manipular la gráfica de una situación planteada a través del software geogebra, además se debe verificar los datos generados en una tabla y argumentar las respuestas de las preguntas planteadas.

Actividad 1

a) Mueve el punto A y describe lo que sucede.

Las estudiantes manipulan la gráfica e identifican las variables involucradas.

a) Al mover el punto A, se ve al costado derecho una tabla de datos que se genera al mover el punto A, me muestra los días (x) y el dinero (y).
Además cuando muevo el punto A, se muestra una curva que intersecta el eje "y" a través de un punto B, que va generando dicha curva.

La interacción con la gráfica a través del software, permite a las estudiantes realizar diversas manipulaciones y exploraciones, lo que conlleva a reconocer las variables involucradas. Este procedimiento logra dar significados a la gráfica al decir*: "me muestra los días (x) y el dinero (y)".*

b) Si tuvieras que explicar la forma en que la persona ahorra, desde el inicio y diariamente, ¿cómo lo harías?

Las estudiantes realizan una tabla para explicar la forma en que ahorra el sujeto de la situación.

b) Como se ve en la siguiente tabla:

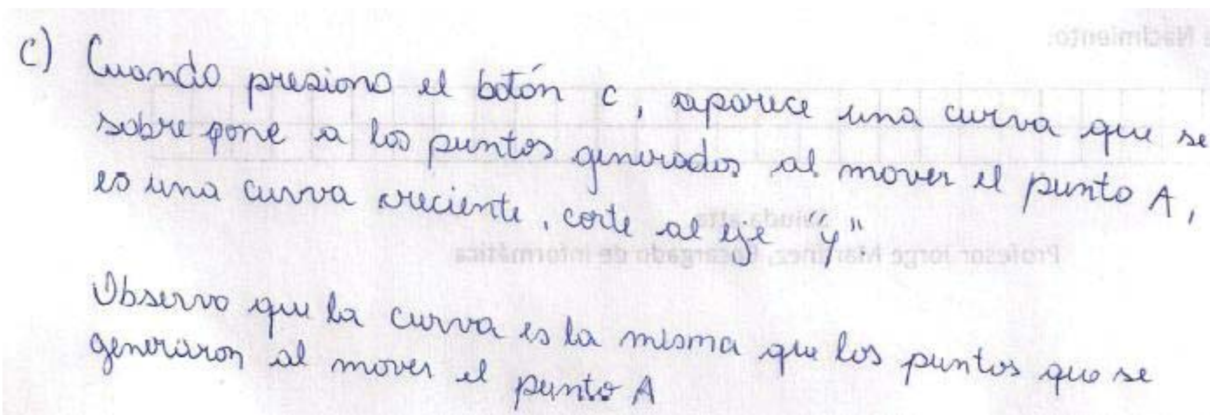
X Días	y Dinero	
0	3	
1	x2 6	+3
2	x2 12	+ 6
3	x2 24	+ 12
4	x2 48	+ 24
5	x2 96	+ 48
6	x2 192	+ 96
7	x2 384	+ 192
8	x2 768	+ 384
9	x2 1536	+ 768
10	3072	+ 1536

Como se ve en la tabla no es un aumento constante, cada día aumenta el doble del anterior.

Interactúan y manipulan la gráfica de tal forma, que en este proceso reconocen el comportamiento de la gráfica como un *"aumento"*. Generan de manera natural una tabla que permite sintetizar la información necesaria para realizar los procedimientos de cálculo de las diferencias de ahorro, para argumentar la variación de la situación planteada. Además, verbalizan un modelo de la situación, al explicar: *"cada día aumenta el doble del anterior"*. De esta manera se genera el conocimiento sobre el objeto matemático de la función exponencial, la cual se constituye como una herramienta para resolver preguntas en otros contextos.

c) ¿Qué sucede cuando presionas el botón C?

Identifican una curva que pertenece a la situación planteada.


c) Cuando presiono el botón c, aparece una curva que se sobre pone a los puntos generados al mover el punto A, es una curva creciente, corte al eje "y"

Observo que la curva es la misma que los puntos que se generaron al mover el punto A

Los usos de la gráfica en este momento, dieron significado a la gráfica, la manipulación e interacción con el software, permitió producir una generalización deseable. Por ende la graficación en sí misma logró un tipo de modelación, que trasciende y se resignifica, ha transformado los procedimientos de reconocer el crecimiento, la variación y el modelo que la situación planteada, de esta manera se han construido procesos, comportamientos, reflexiones que a través del binomio modelación-graficación las estudiantes de forma natural resignifican los modelos gráficos planteados en el momento 2.

Representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través del diseño de situaciones de modelación del movimiento. Una situación de cambio que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de la gráfica. El estudio no depende necesariamente de las propiedades analíticas.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

En esta investigación, se desarrollaron algunos aspectos metodológicos para establecer que la categoría que se conoce como: “uso de las gráficas” en la Socioepistemología, se manifiesta al inverso del rol que cumple la gráfica en el discurso matemático escolar vigente, donde se reconoce solamente como una representación del concepto de función. También se presentó un marco de referencia que diera evidencia de los usos de las gráficas en tanto a su funcionamiento y forma, a través del binomio modelación-graficación. De acuerdo a lo anterior, se expuso como objetivo de investigación dar a conocer cuál es el rol de la gráfica cuando se resignifica lo exponencial a través del binomio modelación-graficación, para lo cual se realizó un estudio epistemológico del concepto de función, posteriormente un análisis en los programas de estudio para conocer el estatus en el discurso matemático escolar en cuanto a modelación y graficación de la función exponencial, para finalmente crear un diseño de situación que permitiera resignificar lo exponencial en estudiantes de segundo año de enseñanza media, a través de una secuencia de actividades estructurada en tres momentos.

En la recopilación de antecedentes para la investigación, quedó de manifiesto que en el discurso matemático escolar, el modelo de conocimiento que comúnmente es utilizado es el que centra la atención en los conceptos, provocando en los estudios de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, un tratamiento del conocimiento limitado a la construcción de los conceptos matemáticos, lo anterior se ve reflejado en los programas de estudio, textos y cuadernos de estudiantes presentados en esta investigación, los cuales están organizados a partir de secuencias de conceptos que provocan efectos en las concepciones de la enseñanza y aprendizaje. Uno de esos efectos, es aquella valoración de la ejercitación y de la modelización algebraica, poniendo al estudiante a desarrollar secuencias de actividades que solo permiten aprender un mecanismo matemático sin sentido para el estudiante, este mecanismo favorece un estatus utilitario de la matemática, pero no así el funcional, donde el conocimiento matemático transforma una realidad y al participante mismo. Por el contrario, la aproximación socioepistemológica propone un estatus funcional de la matemática incorporando de manera sistémica cuatro componentes para la construcción del conocimiento: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social; dicha aproximación brinda una perspectiva diferente a la vista en el aula, incorpora las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento que en consecuencia rompe con la centración de los conceptos matemáticos, ya no se miran los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino que se tratan con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos.

Para tal fin, se debe reconocer al humano haciendo matemáticas en lugar de considerar el producto hecho por el humano, de esta manera el diseño de aprendizaje cumple un rol muy importante en el desarrollo del conocimiento, ya que a través de este instrumento, los estudiantes pueden otorgar significados que están asociados a propiedades intrínsecas a los objetos matemáticos que no necesariamente deben ser expresados algebraicamente para darles validez.

En esta investigación, los significados se vieron reflejados en las relaciones que las estudiantes lograron establecer con las gráficas en el desarrollo de las actividades, estas pudieron evidenciarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo manifiesto en los procedimientos que utilizaron mediante sus argumentos, los cuales permitieron dar explicaciones a las situaciones propuestas en las actividades.En la situación planteada, se observó que los argumentos variacionales constituyen las herramientas para lograr el conocimiento, su uso articula los conocimientos y procedimientos relacionados con el cambio, forma y funcionalidad. De esta forma, las evidencias que se obtuvieron con la modelación-graficación, se aprecian a través de los argumentos que las estudiantes plantearon en las actividades, para dar un registro de sus análisis y reflexiones. De esta forma, la gráfica es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación matemática en cuanto a lo exponencial. Si bien la generalización en el diseño no fue algebraica, lo cual no era un objetivo de investigación, las estudiantes establecieron argumentos que son fundamentales para la comprensión de lo exponencial, como identificar el crecimiento, reconocer la variación, intersección con los ejes, etc.

Por otra parte, las actividades de modelación con el software Geogebra, permitieron tener una visión global y local de la gráfica, donde las estudiantes pudieron explorar, manipular y dar explicaciones de lo que sucedía con la situación. De esta forma, el instrumento tecnológico se convirtió en un medio para el uso de las gráficas a través del binomio modelación – graficación.

Con respecto a la perspectiva de la Socioepistemología adoptada en esta investigación, dejó entrever que al considerar la categoría de modelación-graficación, llevó a crear otro discurso del que ofrece el vigente. Entonces, los argumentos planteados, que surgen a través de los usos de las gráficas, se ponen al descubierto los significados y propiedades asociadas al concepto de función exponencial. La fortaleza del marco con respecto a la problemática planteada en esta investigación, consiste en que, a través del binomio modelación-graficación, se robustecen las argumentaciones (gráficas) de los estudiantes con respecto a lo exponencial, lo cual conllevaría a la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Borello, M. (2010) “Un Planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las practicas didácticas del profesor. Un enfoque Socioepistemológico. Tesis de Doctorado no publicada. Cicata-IPN, México.

Briceño, E. (2010). Lo que norma una integración tecnológica en un escenario de difusión. De las trayectorias hacia el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. (Memoria predoctoral no publicada). Cinvestav-IPN. México.

Buendía, G. (2004) Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio socioepistemológico). Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Buendía,G. y Cordero, F. (2005). Prediction an the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepstemologica study. Educational studies in mathematics, 58, 299-333.

Cabrera, L. (2009). El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Estudio en el marco de la reforma de bachillerato. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, Mexico, D.F. Mexico.

Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. Educación Matemática, Vol. 18 (pp 133-160), Distrito Federal. Mexico.

Cantoral, R. (2000). Funciones: visualización y pensamiento matemático. Mexico: Prentic Hall y Pearson education.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau, Brazil: Universidade Regional de Blumenau

Cantoral, R. (2004. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Diaz (ed) Acta latinoamericana de matemática educativa, 17, 1-9.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2002). Sur sensibilité a la contradiction en mathématiques; l´origine de lánalyse complexe. Recherches en didactique des mathématiques 22(2).

Cantoral, R. y Farfan, R. (2002). Matemática educativa: una visión de su evolución. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol. 6 (pp 27-40), Distrito Federal, México.

Cantoral, R.; Farfan, R,; Lezama, J.; Martinez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, número especial, 83-102.

Carlson, M., Oerhtman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. The Mathematical Association of America. Recuperado de: http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html.

Cen, C (2006). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. (Tesis inédita de maestría). Departamento de matemática educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1(1) ,56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F. (2003a). Reconstrucciones de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como argumento. Grupo editorial Iberoamérica. S. A. de C. V. México.

Cordero, F. (2006 a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M Farfán, J Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano (pp. 265-286). D.F. México: Díaz de Santos-Comité latinoamericano de matemática educativa. A. C.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione gráfica nell`insegnamento apprendiento del la matematica. La matemática e la sua Didacttica, 20(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En cantoral, R., O. Covián, Ol.; Farfán, R.M., Lezama, J.,Romo (eds.) investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano.

Cordero, F. Flores, R. (2007). El uso de las graficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa, marzo vol. 10, numero 001, pp. 7-38. Comité latinoamericano de matemática educativa, Distrito Federal, México.

Covián, O. (2005) El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M. (2010). Variables, funciones y cambios: ¿qué conocen nuestros alumnos?. Acta latinoamericana de matemática educativa, Vol. 23 (pp. 277-286).

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, México.

Flores, R (2005). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. (Tesis inédita de maestría) departamento de matemática educativa. CINVESTAV-IPN, México.

García, M. (2007). Resinificando en concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN , México.

Guzmán, I. (1998) registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones. Annales de didactiques et de sciencies congnitives, 2, 230-260. IREM, Strasbourg.

Hernández, M., Arrieta, J. (2005). Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. Facultad de matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Lezama, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Acta de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, (pp. 19-23), México.

Lopez, S. (2009). Un estudio sobre la nocion de función constante. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad de Yucatán, Mexico.

Méndez, M (2011). La función de la modelación en el Bachillerato. El desarrollo de una red de usos del conocimiento matemático. (Memoria predoctoral no publicada). CINVESTAV-IPN. México.

MINEDUC (2012). Guías didácticas para la articulación de los ejes curriculares de números, algebra, geometría. Asignatura matemática: 1° a 4° año de enseñanza media. MINEDUC, división de educación general, nivel de educación media, Chile.

Quiroz, M. (1989). Instalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios. Un enfoque alternativo para la construcción del discurso matemático escolar del précalculo. Tesis de maestría no publicada. Área de educación superior, departamento de matemática educativa, Cinvestav-IPN, México.

Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid. Alianza Editorial.

Rosado, P. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealiad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Ruiz, L. (1998). La noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Jaen, servicio de publicaciones, España.

Sierpinska, A. (1992). On undestanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), the concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp 25-58). Estados Unidos.

Suarez, L. (2006). Uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico. Memoria predoctoral. Departamento de matemática educativa. Cinvestav-IPN, México.

Suarez, L. (2008). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, D.F., México.

Suarez, L., Cordero F. (2005). Modelación en matemática educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18, (pp 639-645), México.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis de maestría no publicada, CICATA-IPN, México.

Vargas, J. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.

Youschkevitech, (1995). The concept of function up to the mide of the 19 th century. (R. Farfán, trad.) En R. M. farfán (ed.), Antologías 1 (pp. 81-185). Área de educación superior, Departamento de matemática Educativa, Cinvestav-IPN: México.

Zaldívar, J. (2010). Los usos de las gráficas en la resignificación de lo estable en un escenario de difusión de la ciencia. Acta Latinoamericana de matemática educativa, Vol. 23, (pp 929-938), México.

Zañartu, M. Darriggrandi, F. Ramos, M. (2009). Matemática: texto para el estudiante 2° año de enseñanza media. MINEDUC, Santillana, Chile.

ANEXOS