Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Metodología Singapur: el caso del Método del Modelo de Barras. Una mirada Socioepistemológica

Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de las Matemáticas

Alumna: Gabriela Zúñiga P

Profesora guía: Astrid Morales S

2013

Expreso mis agradecimientos a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (Conicyt) por el apoyo que me ha brindado durante mi estadía en el programa de Magíster. Esta labor evidencia el compromiso de la institución con el desarrollo de conocimiento, no sólo en ámbitos de la Ciencia y la Tecnología, sino además en aquellos de índole educativos. Este trabajo se lo debo a experiencia que Conicyt me ha permitido vivir, sin su ayuda no hubiera sido posible.

Gabriela Zúñiga Puyol

Beca n° folio 501200098

AGRADECIMIENTOS

Me es difícil escribir estas palabras, pienso que la tarea de terminar este trabajo, este proceso de magíster, se lo debo a muchas personas. Ha sido una experiencia enriquecedora en muchos aspectos de mi vida, he conocido personas que buscan y esperan lo mismo que yo en la educación en Chile, y particularmente en la enseñanza de la Matemática.

Agradezco a mi familia, quienes han estado a mi lado en todo momento, en los buenos y en los malos. Mis padres, Mary y Víctor, quienes me han entregado las herramientas necesarias para sacar adelante esta etapa de mi vida; mis hermanos, Juanito, Saimon, Alonso, Piter y Nico, me han brindado la energía y el empuje que he requerido en el camino para seguir y luchar por darlo todo en esta tarea; y mi querido Memo quien ha sido un pilar y la fuerza que me permitió continuar y poder creer en mi trabajo. *TQA*

Agradezco haber encontrado una comunidad de estudio compuesta por personas que han hecho emerger mi máximo potencial. Gracias profe Astrid por siempre creer en mi trabajo, por siempre valorar nuestras propuestas y darnos el espacio para aventurarnos a cosas nuevas. Gracias profe Arturo por ser la gran persona que es, sin usted el programa no sería el mismo. Y gracias a todos los profesores que fueron parte de estos dos años: profe Jaime, profe Eli, a ustedes en especial.

Finalmente, quiero agradecer a mis compañeros por estar siempre dispuestos a brindar ayuda cuando era necesario, y crear innumerables instancias en donde salía a relucir toda la energía puesta en mostrar por qué estábamos en esto. En especial agradezco a mi grupo de seminario *Socio*: Caro, Lore, Leidy y Michael. Ustedes me dieron el espacio para mostrar cuánto me gusta compartir mis experiencias y las de ustedes, que bajo la orientación de la profe Astrid se transformaban en momentos de reflexión que podíamos sacarle gran provecho.

A todos les agradezco haber estado ahí cuando lo necesitaba. Hicieron que el esfuerzo valiera la pena.

Gabriela Elisa Zúñiga Puyol

ÍNDICE

RESUMEN

Uno de los temas en la palestra relativos a educación, es el que apunta a los bajos resultados obtenidos por nuestro país en pruebas de Matemática realizadas por organizaciones internacionales a las cuales nuestra nación pertenece. Frente a este escenario se han tomado un sinnúmero de decisiones en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, siendo una de las últimas de ellas la implementación de la metodología del currículum de Singapur, más conocido como el Método Singapur.

Se han incorporado a nuestros programas, aspectos de la metodología antes mencionada, que han provocado algunos cambios en la forma de percibir la asignatura de Matemática. Ante esta decisión, se hace esencial poder traer a la luz dichos elementos que están aportando a crear en nuestras escuelas una nueva enseñanza de la Matemática, la que está mostrando dar resultados. Por eso es fundamental reflexionar en torno a las prácticas y roles que los actores del sistema educativo puedan tener en el seno de esta metodología.

La metodología Singapur tiene diversos principios que marcan el quehacer del docente frente a los distintos contenidos y el rol que los estudiantes cumplen en sus propios procesos de aprendizaje. Las teorías que respaldan los procedimientos que se realizan en esta metodología se basan en trabajos relativos a la simplicidad de pasos, la variabilidad de representaciones, la modelación de problemas mediante barras, lo que conlleva a la resolución de situaciones problemáticas.

En el marco de esta investigación realizaremos diversos acercamientos a maneras de entender los procesos inherentes a la implementación de esta metodología en los procesos educativos de nuestro país. Para esto tomaremos los constructos adecuados al análisis, para así construir una crítica que sea conveniente a lo que ha sido un proceso que se está dando a nivel nacional: la implementación de la metodología Singapur. Nuestra investigación, entonces se centra esencialmente en el estudio de la Metodología Singapur pero con una mirada desde un marco teórico específico de la disciplina: la Socioepistemología. Esta teoría nos da herramientas para darle otra mirada a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ya que toma su centro en aportar al rediseño del discurso matemático escolar.

En consideración al bajo volumen de antecedentes en relación a los orígenes de esta metodología, hemos dado una estructura conveniente que permita una mejor comprensión de la problemática a tratar. Se recorrerán los fundamentos teóricos de esta metodología, se presentarán, los aspectos más relevantes de su puesta en práctica a través de actividades propuestas a estudiantes de 5° año básico, quienes fueron capaces de resolver problemas que en nuestro currículum son planteados en enseñanza media. Dando énfasis al caso del Método del Modelo de Barras propuesto en esta metodología, el cuál ha sido validado de desde diversas perspectivas en nuestra educación. Todas señaladas en el capítulo II de este escrito.

Para darle más fuerza a esta indagación, se realizó una confrontación entre el quehacer de los estudiantes de 5° año básico que traían la metodología Singapur hace al menos tres años y el quehacer de dos profesoras de educación media, quienes nos aportaron con los elementos necesarios para verificar que el tratamiento algebraico muchas veces se elige por sobre cualquier otro.

El currículum que ha sido planteado en la enseñanza de la Matemática en Chile se caracteriza por tener una visión de carácter conductista y tradicionalista de los procesos educativos. El Método del Modelo de Barras se presenta no sólo como una estrategia de resolución de problemas, sino como una alternativa a la modelación de situaciones en Matemática. Se presenta como una aproximación al entendimiento de la disciplina desde una perspectiva no aritmética–algebraica. Este es uno de los aspectos de la metodología Singapur, que finalmente son los que nos darán elementos para aportar al rediseño del discurso matemático escolar.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Matemática que hoy en día es impartida en Chile se basa en diversos supuestos en relación a aquello que *es correcto* en educación, o bien, aquello *que da buenos resultados* en pruebas estandarizadas. Una de las ideas implementadas, fue tomar elementos de la enseñanza impartida en Singapur de manera que sus métodos y visiones tomaran lugar en los procesos de enseñanza y aprendizaje en nuestro país. Esta innovación en los procesos adheridos a la enseñanza de la Matemática, no sólo busca erradicar procedimientos aislados que no toman sentido para el estudiantado, sino además pretende generar una nueva visión de la enseñanza de las matemáticas: desde el deber ser del estudiante hasta el rol que el profesor debe cumplir en este proceso.

La metodología Singapur tiene diversos principios que marcan el quehacer del docente frente a los distintos contenidos y el rol que los estudiantes cumplen en sus propios procesos de aprendizaje. Las teorías que respaldan los procedimientos que se realizan en esta metodología se basan en trabajos relativos a la simplicidad de pasos, la variabilidad de representaciones, la modelación de problemas mediante barras, lo que conlleva a la resolución de situaciones problemáticas. Base de la Matemática aplicada a la vida.

La variabilidad en los procesos de enseñanza, pretende que las tareas varíen sistemáticamente, en cuanto a dificultad y a forma, de manera de asegurar que los estudiantes que tienen mayores dificultades tengan la oportunidad de lograr un buen aprendizaje. La variación de tareas, consolida de mejor manera aquello que se está enseñando. Zoltan Dienes señala al respecto que los conceptos matemáticos son constantes en la medida que las herramientas utilizadas para consolidarlos sean variadas.

La resolución de problemas toma un lugar central en la metodología Singapur. Mediante la resolución de problemas se busca que el estudiante construya conocimiento, ya que la preocupación principal de esta metodología es buscar prácticas que con efectividad den paso al aprendizaje, por sobre las prácticas convencionales que toman su centro en el contenido mismo. Se inserta al estudiante en una situación problemática, de manera que se involucre activamente en el proceso de resolución, con el fin de que surja aprendizaje a partir del descubrimiento de elementos, todo a través de la acción directa.

Considerando estos antecedentes y lo que nos interesa investigar desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática es que nuestra investigación se centra esencialmente en el estudio de la Metodología Singapur pero con una mirada desde un marco teórico específico de la disciplina: la Socioepistemología. De esta manera se estudiará cuál es el discurso matemático escolar que en Singapur se trabaja en el ámbito de la Educación Matemática, y cómo se podría dar paso a una matemática funcional en el seno de esta metodología. Desde esta mirada pretendemos focalizarnos en un tópico específico usado en la enseñanza en Singapur: el Método del Modelo de Barras.

El acercamiento a la resolución de problemas se realiza mediante éste Método que plantea los conceptos *parte−entero* y *comparación*. Cada una de ellas se presenta como una alternativa a lo tradicional en cuanto a la resolución de problemas pues mediante cierta simbología (que podemos asociar al lenguaje algebraico), que son ajenos a estudiantes de los niveles de primer ciclo básico, logran realizar procedimientos de manera simple e intuitiva. La *modelación* de una situación problemática vía el Modelo de Barras, finalmente permitirá que el estudiante pueda orientar su resolución, es decir, esta forma de ilustrar la información del enunciado del problema orientará el quehacer del estudiante.

El aprendizaje de los estudiantes que trabajan desde su infancia bajo la metodología Singapur, ha sido educado en el seno de la identificación de datos relevantes para darle solución a problemas a los que se enfrentan. Esta identificación se traduce a una representación visual, o ilustración, mediante el Modelo de Barras.En esta realidad, se consideró que los elementos a evidenciar en nuestra investigación, se ilustrarían de mejor forma en colegios en que la puesta en práctica haya sido activa y con obtención de buenos resultados. Tomando gran interés en las prácticas pedagógicas de colegios privados, para un mejor estudio de los indicadores que se pretende evidenciar, y de los cuales se hará mención más adelante.

En el marco de esta investigación realizaremos diversos acercamientos a maneras de entender los procesos inherentes a la implementación de esta metodología en los procesos educativos de nuestro país. Para esto en el Capítulo I, daremos los fundamentos teóricos que sustentan esta metodología. Brindaremos las líneas de este escrito, en la presentación de los objetivos y la problemática en estudio. Para cerrar, con un breve análisis a una actividad exploratoria realizada el año 2012, con el fin de confirmar lo interesante que será darle una mirada profunda a esta metodología. Planteando los puntos de análisis de nuestra investigación en la sección Discusión de este mismo capítulo.

En el Capítulo II, se dará paso a estudiar a fondo las características del Método del Modelo de Barras, con el fin de centrar nuestro estudio en la forma en que se presenta en la metodología. Por otra parte, haremos consideraciones relevantes a su implementación, mostrando cuál es su concepción en la actualidad en nuestro país.

En el Capítulo III, se brindará una aproximación a lo que será el marco teórico que nos dará los elementos para constituir un análisis conveniente para nuestra problemática. Al enmarcarnos en esta teoría podremos estudiar de manera crítica los aspectos teóricos y en los elementos prácticos de la metodología Singapur. Tomaremos los constructos adecuados al análisis para así construir una crítica que sea conveniente a lo que ha sido un proceso que se está dando a nivel nacional: la implementación de la metodología Singapur.

Posteriormente, en el Capítulo IV presentaremos los aspectos metodológicos de nuestra investigación. Luego, se dará paso a una actividad que nos permitirá mirar los aspectos o indicadores que la metodología Singapur nos entrega en su implementación. Para ellos, utilizaremos algunos elementos de la ingeniería didáctica, con el fin fundamentar nuestras conclusiones a partir de una confrontación entre lo que se espera y lo que realmente sucedió.

En las Conclusiones se presentarán los aspectos de la metodología Singapur, que finalmente son los que nos darán elementos para aportar al rediseño del discurso matemático escolar.

CAPÍTULO I:
ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En este capítulo abordaremos la problemática de investigación y los elementos necesarios para una mejor comprensión de lo que se quiere analizar, es por esto que la estructura otorgada al capítulo será un tanto diferente a otros trabajos. La estructura estará conformada por cuatro secciones, la primera se refiere a la problemática y objetivos de la investigación, en la que se incluye la motivación de este estudio, la segunda se refiere a los antecedentes respecto de la metodología Singapur, básicamente a los aspectos teóricos que la fundan, distinguiendo este antecedente de lo que comúnmente entendemos en que debe ir incluido un estado del arte, el cual no abordaremos en nuestra investigación pues el centro es otro, la tercera sección responde a una actividad exploratoria necesaria para volver a mirar nuestra problemática y finalmente una sección de discusión que hará la conexión con el capítulo 2 que se presentará posteriormente.

1. Problemática y Objetivos de la Investigación

1.1 Motivaciones de la investigación y génesis de la problemática

A lo largo de la historia, en el Ministerio de Educación de Chile se han formulado diversas formas de concebir la enseñanza de la matemática. Esto es a raíz de los bajos resultados que hemos obtenido en la prueba TIMSS. El interés puesto en esta prueba es como país participante de la OCDE. Por tanto, trabajar con metodologías nuevas ha sido uno de los objetivos de nuestro Ministerio. Con el fin de permitir nuevas alternativas de aprendizaje de la Matemática en niños y niñas de escuelas municipales y subvencionadas se implementa el "Método Singapur" en 300 de dichas escuelas.

> **El próximo año el MINEDUC entregará textos escolares basados en el Método Singapur para el aprendizaje de Matemática**
>
> A partir de marzo de 2011, el MINEDUC entregará a 40 mil estudiantes de 1° y 2° básico de 300 establecimientos la serie de libros "Pensar sin límites", en la cual se plasma el método aplicado en Singapur para el aprendizaje de Matemática, que se basa en la resolución de problemas y se apoya en modelos visuales, material concreto y abundante ejercitación.
>
> Portal web: www.textosescolares.cl. Octubre 2010

Dentro de los ocho países mejores evaluados por esta prueba, se encuentra Finlandia, Singapur, entre otros países asiáticos que han demostrado una constante preocupación por mejorar el capital humano de sus países.

Esto ha llevado al MINEDUC a buscar maneras de acercarnos a dichas alternativas de enseñanza y aprendizaje. En este marco, desde el año 2012, se ha trabajado en una propuesta de involucrar la metodología de enseñanza de Singapur a nuestro currículum. Esta metodología, a grandes rasgos, pretende darle la oportunidad de aprender Matemática a todo estudiante, ya que su centro se encuentra en los métodos inherentes a la metodología, y no a las capacidades insertas en cada persona.

Mineduc comenzará a aplicar método Singapur en 300 colegios

Serán 40 mil niños de primero y segundo básico los que recibirán textos escolares de Matemática con dicha metodología a partir de marzo del 2011.

Por La Tercera - 30/09/2010 - 18:39

La implementación de esta propuesta surge por la necesidad de nuestro sistema educativo por mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas, para así lograr un aprendizaje de carácter significativo. Una de las secuelas que esto presentó fue que en el transcurso de la misma puesta en práctica los colegios particulares pagados se adelantan a esta propuesta y comienzan un trabajo arduo por lograr que esta metodología se presentara como una forma de concebir los procesos de enseñanza aprendizaje.

Hubo buenos resultados al corto plazo. Esto último, se debía a la brecha educacional que ha existido históricamente por el capital cultural que los estudiantes de mayores recursos han demostrado tener. Por otra parte, el nivel de recursos para la obtención de los materiales que debían ser adquiridos para realizar una mejor práctica, era de fácil acceso. Se generaron un gran número de capacitaciones, de las cuales la mayor parte fueron adquiridas por las instituciones de índole privada. Lo que significó agrandar más esta brecha que antes se mencionaba.

A partir de lo mencionado anteriormente y desde una mirada de la Didáctica de la Matemática es que surge una pregunta *¿Qué elementos aporta la metodología Singapur, que producen efecto en los niños chilenos?* Es una pregunta ingenua quizás pero que pretendo responder a la luz de una marco teórico específico e insertándola en mi problemática de investigación, sumando a ello el hecho de trabajar en un colegio que adopta la metodología Singapur en los primeros años de escolaridad (1º a 5º año básico).

1.2 Problemática y objetivos de la investigación

1.2.1 Problemática

En el marco de esta investigación y tomando elementos de la motivación de este estudio es que ponemos de manifiesto la necesidad de adentrarnos en estudiar la metodología Singapur, cuáles son sus bases teóricas y sus objetivos trazados para abordar la enseñanza y aprendizaje de la matemática de esta manera, la razón de ello es que bajo la mirada de la Socioepistemología, una teoría de la Matemática Educativa, y la que guía nuestra investigación, queremos estudiar cuál es el discurso matemático escolar que la metodología Singapur ubica en el aula y cómo a través de su forma de enseñanza provocaría aprendizaje significativo a los estudiantes, particularmente cuando los enfrenta a resolución de problemas. Desde la mirada que estamos adoptando, Socioepistemológica, creemos que esta metodología estaría provocando una matemática funcional donde el estudiante en un escenario específico estaría dando significado a lo que se le enseña abordando los problemas desde otra perspectiva, provocando de esta manera que el estudiante pueda encontrar sentido a lo que está resolviendo más que de una manera utilitaria. En otras palabras, que no se transforme su trabajo en encontrar una fórmula que brinda alguna respuesta pero que carece de sentido en muchas oportunidades.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática no es fácil poder decir dónde está concretamente el origen de la problemática, es muy complejo, puesto que existen muchas variables en juego, sin embargo desde nuestra visión nos preocupa la difusión y transmisión de conocimiento matemático y es en este lugar donde nos pronunciamos en cómo es que se están transmitiendo y difundiendo los conocimientos en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Desde nuestra perspectiva creemos que la manera en cómo hoy el discurso matemático escolar está abordando los temas en la matemática inmersa en la escuela, no está siendo el más adecuado ya que, bajo esta premisa, no está provocando construcción de conocimiento. Nuestra mirada apunta a que el estudiante debe construir conocimiento matemático y uno de los temas que inclusive hoy está con fuerza entrando en los currículum son la resolución de problemas y la modelación.

Una de las premisas que nos mueve es la importancia de adentrarnos en la epistemología, conocer cómo es que se construyeron en su génesis algunos constructos propios de la Matemática puesto que nos pueden brindar elementos necesarios para rescatarlos y traerlos a la enseñanza actual. Es relevante poner al estudiante en situación para que construya su propio saber, recurriendo a la matemática que conoce y la que podrá generar en común unión con sus compañeros, su profesor, etc. De esta manera poner atención a la metodología Singapur no es porque es un tema en boga en el ámbito educativo, sino porque creemos que puede estar logrando una matemática funcional y para ello es necesario adentrarnos en sus fundamentos teóricos. Es por esto que abordaremos las teorías del aprendizaje que sustentan esta metodología de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, lo que permitirá conocer los lineamientos que orienten el estudio que realizaremos. Cabe mencionar que no ha sido fácil encontrar estos fundamentos pues en la literatura lo que hemos encontrado han sido antecedentes relacionados a la aplicación de esta metodología, no así aquellos que muestren o evidencien sus orígenes.

Nuestra problemática será estudiar cómo opera la metodología Singapur pero específicamente nos referiremos a los aspectos que se pueden resaltar en la resolución de problemas poniendo nuestro foco en el uso del Método del Modelo de Barras, ilustrando este uso como una alternativa a las prácticas docentes actuales. De esta manera se dará paso al análisis de una actividad realizada a alumnos de quinto año básico que ha basado su enseñanza en esta metodología, con el fin de obtener los indicadores que nos permitirán evidenciar los aspectos centrales de la metodología Singapur.

Conforme a lo anteriormente expuesto, la investigación se hará cargo de dar respuesta a una pregunta, la que ha movido y motivado este estudio: *¿Qué aspectos de la metodología Singapur aportan a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Chile?*

Nos centraremos en la búsqueda de los elementos que provocan que la implementación de esta metodología estén dando buenos resultados: los niños aprenden y aprenden bien. Para ello, daremos paso a interpretar el *discurso* que hay detrás de esta metodología. Debe haber cambios en *nuestro discurso de enseñanza* para provocar cambios en nuestras prácticas. Es por esto que mirar e interpretar el *discurso* intrínseco a la metodología Singapur, resulta conveniente.

La necesidad de mirar una metodología que se preocupa de la actividad humana, y que utiliza este interés para lograr aprendizaje debe ser estudiada desde un marco teórico adecuado. Un marco que tenga un interés en común y que nos permita basarnos en sus constructos para así ordenar el estudio.

1.2.2 Objetivos Generales

Mediante esta investigación queremos evidenciar los elementos del discurso asociado a la metodología Singapur que estarían generando una matemática funcional, es decir, construyendo conocimiento matemático. Para ello el marco teórico, nos permitirá dar una lectura crítica al discurso que hoy en día rige nuestras prácticas pedagógicas, y como este se puede ver potenciado por aquellos aspectos de la metodología Singapur que podamos evidenciar. En este sentido, la mirada crítica se realizará de manera que pongamos en tapete cuestiones que nos interesan para la investigación. De este modo, no daremos por sentado aspectos que no hemos respaldado.

Podemos señalar entonces, que no es nuestro centro darle énfasis al estudio del conocimiento matemático, sino que al estudio de la función del conocimiento matemático. (Cordero, et al, 2009), evidenciando los elementos claves en la matemática funcional que logra la metodología Singapur, con el fin de aportar al rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) ya que éste no está permitiendo una real y significativa construcción del conocimiento matemático[1].

1.2.3 Objetivos específicos

En primer lugar tendremos como centro de nuestra investigación el análisis de la utilización del Método del Modelo de Barras, enfocándonos en la forma en que éste se presenta como una alternativa a los procesos de modelación (en el sentido de la representación de la información) que el Ministerio de Educación en las Bases Curriculares actuales exige. Siendo esta exigencia una manera de provocar en el quehacer docente la necesidad de utilizar modelos para los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula.

En segundo lugar, estudiaremos las teorías del aprendizaje que sustentan esta metodología. Esto lo haremos a partir de un análisis de los autores que dieron aportes fundamentales a los planteamientos bases de esta metodología.

Por último, daremos una mirada a los aspectos e indicadores que se observen en la resolución de problemas. Para esto involucraremos a los estudiantes en una actividad planteada a niños de 5º año básico de un colegio con la metodología aplicada desde hace al menos tres años. La misma actividad será aplicada a profesoras de enseñanza media que trabajan la enseñanza de la Matemática en un sentido convencional, adherido al discurso matemático escolar que actualmente está inserto en nuestras aulas. Esto nos permitirá confrontar ambas formas de abordar la solución de un problema.

[1]Resultados TIMSS 2011: Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias en http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf. p 14, 22.

2. Antecedentes

2.1 Metodología y no Método Singapur

Si bien esta forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es socialmente conocida como el *Método Singapur* haremos un cuestionamiento al estatus que la palabra *Método* le da. Nos abocaremos a estudiar el significado que esta palabra tiene para criticar su uso y proponer la utilización de la palabra *Metodología*.

La palabra *Método* viene del griego *methodos* siendo su significado: ***medio utilizado para llegar a un fin (…)*** *el camino que conduce a un lugar*[2]. Este significado implica una serie de cuestiones que no coinciden con lo que propone la metodología Singapur. Esta forma de abordar la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, es más que sólo *el camino que conduce a un lugar*, es más bien un conjunto de caminos que concluyen para logar un fin. Por esto surge la necesidad de proponer una palabra que abarque más que sólo un *Método*, una palabra que la confluencia que antes se menciona, sea evidente y tenga más fuerza al momento de ser nombrada. La palabra *Metodología* provoca una concepción distinta que la palabra *Método*, es un conjunto de métodos que complementados permiten y logran el fin primeramente propuesto.

La palabra *Metodología*, viene a solucionar este problema que nos genera la palabra *Método*, ya que según su etimología podemos ver que *es un vocablo generado a partir de tres palabras de origen griego: metà **("más allá")**, odòs **("camino")** y logos **("estudio")***[3]. Esto nos da indicios de que tiene una mayor significancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje en general, ya que estos procesos de índole humana, deben estar en constante estudio, y sometidos a reflexión con el fin de mejorar e implementar nuevas formas y elementos que logren generar los cambios necesarios en los procesos que se mencionan.

[2] Definición de método - Qué es, Significado y Concepto http://definicion.de/metodo/#ixzz2Xd9FzdfO Visto el 29 de Junio de 2013.

[3] Definición de metodología - Qué es, Significado y Concepto http://definicion.de/metodologia/#ixzz2XdDb3ETs Visto el 29 de Junio de 2013.

2.2 Fundamentos teóricos de la Metodología

La metodología Singapur, es una conjugación de diversos aspectos tomados de distintas teorías del aprendizaje. Los autores que a continuación mencionaremos son Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp. Estos tres autores, entregan importantes elementos a la metodología, los cuales serán expuestos para los fines de nuestra investigación.

2.2.1 Espirabilidad y Enfoque CPA

Jerome Bruner en su teoría de aprendizaje, propone un aprendizaje a través del tránsito entre lo concreto, lo pictórico y lo abstracto, al que se le conoce como el enfoque C-P-A. Este tránsito tiene dos grandes dimensiones: la primera de ellas dice relación con la escolaridad en su totalidad, y la segunda, se refiere a la forma en que este enfoque se percibe en cada curso, cada contenido, un tránsito en *espiral*.

La primera dimensión, se refiere a como el enfoque CPA se manifiesta según la etapa de desarrollo del estudiante, apelando a sus capacidades y habilidades cognitivas. En los primeros cursos de la escuela el trabajo está muy ligado a lo concreto, a la manipulación de materiales con que los estudiantes pueden jugar e introducir los conceptos u objetos que se estén estudiando. En años posteriores (2°, 3° año de enseñanza básica) se introducen formas de traducir a lo pictórico aquello que ya conocen en lo concreto, las cuales se profundizan en la medida que pasan los años. Aquí es donde se da uso al modelo de barras, en el que centraremos nuestra investigación. Posteriormente, y en una última etapa, se preponderan los procesos de abstracción de las ideas, esto es, se formalizan o institucionalizan los conceptos en reglas, fórmulas o definiciones, para generar consensos.

El enfoque CPA es aplicado a lo largo del proceso de escolaridad. Cada una de las fases apunta a una etapa de desarrollo en el estudiante, por tanto, es posible generar algunas ideas paralelas entre las propuestas de Bruner y Piaget quien postula las etapas del desarrollo cognitivo del ser humano desde la infancia hasta la adultez.

La segunda dimensión se refiere a la forma en que cada concepto se retoma en cada curso, dándole indicios de cada una de las fases del enfoque CPA. Esto es, se introduce en los primeros años un proceso matemático: la división de números naturales, por dar un ejemplo. Este acercamiento a la división se realiza manipulando material concreto utilizando la metáfora de la repartición o agrupación. En los años siguientes se vuelve a retomar la división, pero esta vez dando énfasis en procesos ligados a lo pictórico, de manera que los estudiantes logren adquirir nuevos instrumentos para la profundización en este proceso. En la medida que el estudiante adquiere nuevas herramientas, se ve en la necesidad de resolver desafíos que el profesor lo invita a enfrentar: desafiándolo a resolver una división con resto, por ejemplo. Finalmente, en un nivel conveniente, se dará paso a la abstracción del proceso, se mostrará el algoritmo, ya que existirá la necesidad de dar a conocer resultados y ordenar ideas de una misma manera. El enfoque Espiral, plantea que el estudiante vuelva a trabajar con ideas núcleo a medida que se profundice el entendimiento y comprensión de aquellas ideas. Pretendiendo así, organizar el aprendizaje de manera que se trabajen periódicamente los contenidos, para profundizarlos cada vez más.

El enfoque Concreto-Pictórico-Abstracto, recomienda generar un tránsito mediante estas tres etapas, con el fin de proporcionar un mejor aprendizaje. Se propone una progresión desde objetos concretos, físicamente manipulables, pasando por imágenes, que representen aquello que ya se trabajó en lo concreto, llegando a los símbolos abstractos, para el buen desarrollo de los conceptos. Esta idea, se obtiene del trabajo de Bruner en relación a los modelos de representación inactivo, icónico y simbólico. En términos generales el modelo de representación (m.r.) inactivo es aquel que surge en la representación inmediata de la realidad, ocurriendo marcadamente en los primeros años de vida de la persona; el m.r. icónico consiste en la representación de la realidad mediante esquemas o imágenes, siendo éstos similares a aquello que se está representando, por tanto la elección del esquema no es arbitraria; el m.r. simbólico es la representación de la realidad mediante un símbolo arbitrario, el que no se relaciona en cuanto a forma con lo que se está representando. Estos modelos de representación, pueden funcionar de manera paralela, por eso toma sentido además el currículum en espiral, permitiendo el funcionamiento de las tres formas de representación, una vez que cualquiera de los tres modelos esté bien adquirido. En esta última idea, toma mayor fuerza la teoría de los estadios del desarrollo de Piaget.

El enfoque CPA busca introducir los contenidos y conceptos a partir del trabajo con material concreto, el cual se torna como una herramienta que permite desarrollar habilidades matemáticas que luego puedan transitar a lo pictórico. Esto significa que los alumnos serán capaces de aplicar los mismos procedimientos trabajados en el sentido concreto, en un sentido pictórico. Finalmente, la necesidad de traducir al lenguaje algebraico se torna natural, ya que la tendencia de los estudiantes es trabajar con elementos que han entendido como "de índole matemática".

En la resolución de problemas, podemos encontrar aspectos de este enfoque. Por una parte, al enfrentar una situación problemática, el estudiante se ve involucrado en un contexto concreto, es decir real y cercano para él, para luego crear un diagrama que permita visualizar la forma de proceder en la resolución y así finalizar el problema con un tránsito a lo abstracto (ya sea de índole aritmética o algebraica). Por otra parte, el Modelo de Barras, que ya ha sido mencionado en la sección anterior y desarrollaremos en el capítulo 2, y la necesidad de utilizarlo surge en la etapa de lo pictórico, ya que genera una representación de la información relevante en la situación que se requiere resolver a partir de una modelación mediante rectángulos que toman valores y significados según cada situación.

2.2.2 Aprendizaje por descubrimiento

En el seno de la propuesta de Bruner, nos encontramos con la idea de aprendizaje por descubrimiento. Idea que guarda estrecha relación con los enfoques mencionados en lo anterior.

El rol del docente se torna fundamental en la propuesta de Bruner. El maestro debe generar espacios que motiven al estudiante a descubrir y relacionar conceptos con otros ya adquiridos. Siendo su guía en el proceso de construcción del conocimiento. Será central la labor que el docente realice en cuanto a los estímulos que esté dando a cada uno de los estudiantes. En el currículo tradicional se busca una formalización de aquello que se está aprendiendo. En la metodología Singapur la institucionalización de los conceptos es un proceso que toma sentido cuando hay necesidad, la que debe ser provocada por el profesor. De esta manera, la Matemática es entendida como un lenguaje que permite la comunicación, en la medida que los procedimientos se dificulten, y así la semiótica es complementada.

El docente debe cumplir su rol de potenciar el aprendizaje a partir de diversas estrategias que acerquen al estudiante a descubrir y construir el conocimiento. Para ello en esta metodología se propone intercambiar algunos datos en un problema para darle profundidad a los elementos que causan mayor dificultad, de manera que se torne un desafío para los alumnos y se vean más cercanos y así involucrados en su resolución. Esta tarea se complementa con el uso de los textos, los que ilustran la metodología de manera que las estrategias mantengan un orden secuencial y no se centren en el objeto en sí, sino que en las prácticas que debe realizar el alumno para darle solución al problema que se propone. Esto significa, mantener una secuencia de pasos simples de aprender, ya que el proceso de resolución debe tornarse una tarea de baja complejidad, logrando así un proceder más intuitivo. La simplicidad de los procesos evitará desviar el foco de aquello que efectivamente se está aprendiendo.

2.2.3 Variabilidad

La teoría de Zoltan Dienes aporta con la idea de la variabilidad. La variabilidad que Dienes propone debe ser sistemática, de manera que el alumno se enfrente a una variedad de tareas sin repetir el mismo *tipo* de ellas. La variabilidad Matemática, busca potenciar el aprendizaje a partir de la multiplicidad de procedimientos matemáticos de un mismo concepto (por ejemplo, suma con y sin reserva). La variabilidad Perceptual integra múltiples representaciones del mismo concepto, de manera que el estudiante lo perciba de diversas formas.

El docente tiene un rol muy determinado dentro de la enseñanza basada en la variabilidad. Este rol viene dado por ideas que surgen de los componentes teóricos propuestos por Vigotsky en la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), en que el niño se ve imposibilitado de generar conocimiento si no es orientado por un tutor. El profesor en el seno de la metodología Singapur debe estimular, intencionar, y potenciar los procesos de aprendizaje del estudiante de manera que éste se vea involucrado en la tarea y así exista una real construcción de conocimiento. Por otra parte, el profesor debe generar un espacio susceptible para el aprendizaje, de manera que el estudiante se vea no sólo comprometido con la constitución del saber, sino además se vea en la necesidad de verbalizar los procedimientos para demostrar el nivel de comprensión real que se tiene de aquello que está haciendo.

2.2.4 Comprensión instrumental y conceptual

Richard Skemp propone la necesidad de provocar una dialéctica entre la comprensión instrumental y la comprensión conceptual. La primera de ellas la distingue como la capacidad de realizar una operación, mientras que la segunda, se refiere a la capacidad de explicar un procedimiento. El autor aporta con la reflexión en torno a generar un proceso de enseñanza de la Matemática en donde el estudiante interactúe entre la comprensión instrumental y la comprensión conceptual.

Skemp invita a provocar esta interacción en los procesos de enseñanza ya que postula que no tiene mayor sentido realizar operaciones matemáticas sin tener noción de los conceptos, ideas y principios que respaldan dichos procedimientos. En este sentido nuevamente podemos mencionar el Método del Modelo de Barras, ya que se presenta como una forma de guiar el quehacer al momento de resolver un problema, justificando los procedimientos y operaciones que se requieran realizar.

2.3 Estructura del currículum de Singapur

El currículo de la enseñanza de las Matemáticas de Singapur es guiado por una Estructura Matemática, que resume el objetivo de desarrollar en los estudiantes sus habilidades matemáticas, en particular, aquellas relativas a la resolución de problemas. La Estructura Matemática muestra los principios de un programa matemático efectivo aplicable a todos los niveles, desde la primaria hasta los niveles avanzados. Brinda una dirección para la enseñanza, el aprendizaje, y la evaluación de las matemáticas.

La resolución de problemas, en la metodología propuesta por el currículo de Singapur, es central para la adquisición y aplicación de los conceptos matemáticos y habilidades. El desarrollo de la habilidad para la resolución de problemas depende de la interrelación entre los cinco componentes de la Estructura Matemática:

- Conceptos: Los estudiantes deben desarrollar y explorar las nociones matemáticas en profundidad y entender la matemática como un todo integral, no como piezas aisladas de conocimiento.
- Habilidades: el desarrollo de las habilidades en matemática deben ser tal, que los estudiantes tengan las competencias para entender la matemática que hay detrás de

los diversos procedimientos. Esencial para el aprendizaje y aplicación de esta disciplina.

- Procesos: Se refieren a las habilidades de pensamiento. Hay tres escenarios en donde estas habilidades se reconocen en la resolución de problemas: 1. Razonamiento, comunicación y conexiones, 2. Heurísticas, 3. Aplicaciones y Modelación. La primera de ellas surge cuando el estudiante comprende, justifica sus procesos y se involucra con el problema (conectando con la vida real); la segunda, cuando está pensando en qué práctica debe efectuar para resolver el problema (clasificar, comparar, secuenciar, entre otras) y cómo puede abordar el problema cuando la solución no es tan obvia; la tercera se presenta cuando logran representar mediante un modelo la situación problemática, usando métodos y herramientas apropiadas para la resolución.
- Metacognición: se refiere a la toma de consciencia de los propios procesos de reflexión y de autoregulación del aprendizaje. Proveer a los estudiantes de experiencias de metacognición permitirá el buen desarrollo de las habilidades y estrategias para la resolución de problemas.
- Actitudes: hace referencia a los aspectos afectivos en el aprendizaje de la Matemática. En la medida que el aprendizaje tome sentido y sea relevante para los estudiantes, éste dará paso a la construcción de confianza y apreciación por la disciplina.

3. *Resolución de problemas: una actividad exploratoria*

La resolución de problemas en nuestras escuelas es utilizada como una aplicación para un objeto o concepto que se quiere reforzar, dándole un estatus a través de su uso en la *vida real*. La metodología Singapur propone una nueva mirada a la resolución de problemas. A diferencia de nuestros procesos educativos relativos a la matemática, el currículum de Singapur centra su foco en la resolución de problemas, lo que finalmente son los que provocan la constitución de conocimiento. Por esto, toma gran importancia estudiar una de las principales herramientas para la resolución: el Método del Modelo de Barras.

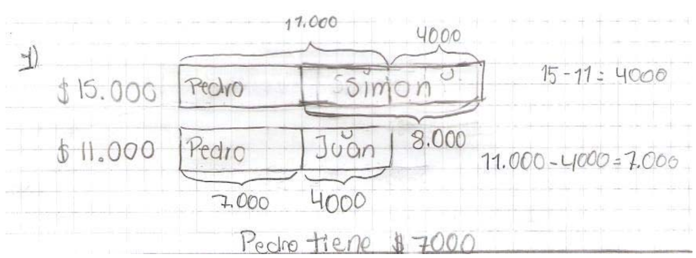
A modo de prueba se trabajó en una actividad exploratoria con el fin de corroborar, o bien, corregir la problemática en estudio. Esta actividad fue aplicada a estudiantes de 5° año básico, quienes habían trabajo (al momento de la actividad) por dos años con la metodología Singapur, y consistía en la resolución de 5 problemas que ilustrarían la utilización del método del modelo para su resolución. El desarrollo de esta actividad se realizó en parejas para potenciar la discusión y reflexión en torno a las posibles formas de proceder en la resolución de los problemas propuestos.

Los problemas que se propusieron en esta actividad utilizaban, para su resolución, elementos que en el seno del currículum nacional son trabajados y estudiados en educación media. Por ejemplo, ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. A continuación se realizará un análisis de las formas de resolución de cada uno de los problemas.

Problema 1

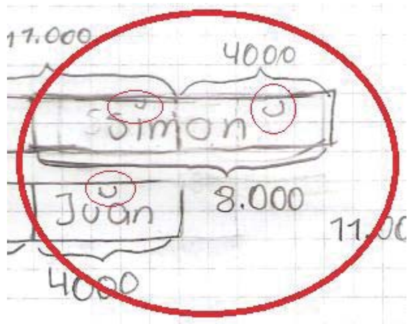
Si Pedro y Simón juntan sus ahorros, pueden comprar un nuevo juego de computador de $15.000. Si Pedro y Juan juntan su dinero, pueden comprar una pelota de fútbol oficial de $11.000. Si Simón tiene el doble de dinero que Juan, ¿Cuánto dinero tiene Pedro ahorrado?

En el primer problema se espera que los estudiantes descubran cuál es el monto de ahorro de cada uno de los personajes, con el fin de definir cuál es el ahorro de Pedro en particular. Para ello, deben generar un modelo de barras que les permita ilustrar la situación, y así vislumbrar cual es la mejor forma de proceder para resolver el ejercicio.

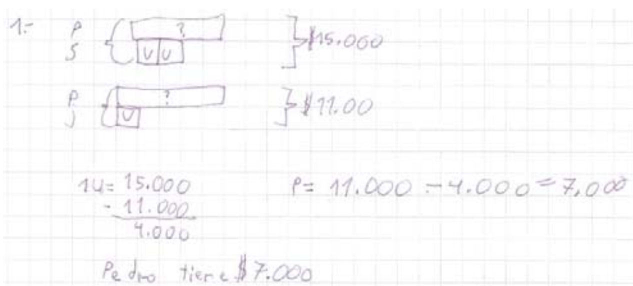


En la imagen se puede ver como las estudiantes generaron un modelo de tipo *comparación*. En donde la barra superior ilustra el ahorro total entre Pedro y Simón y la barra inferior ilustra el ahorro total entre Pedro y Juan. Para realizar este modelo de manera efectiva, es decir, que de alguna manera oriente hacia la resolución del problema se deben considerar algunos elementos que son de gran importancia. Por una parte, se da a entender que Pedro tiene la misma cantidad de dinero en ambas barras ya que el tamaño de los segmentos correspondientes a Pedro, son iguales.

Luego, la forma de representar el enunciado "Si Simón tiene el doble de dinero que Juan" a partir de la segunda parte de ambas barras. Esto se puede ver en la utilización de las letras U (representando una *unidad*) en la conformación del segmento para Simón y para Juan. La utilización de la letra U, da nociones de que aquel segmento de la barra superior que excede a la barra inferior es igual a Juan. Esto permitió orientar una forma de proceder en donde debían abocarse a descubrir el valor de dicho excedente.



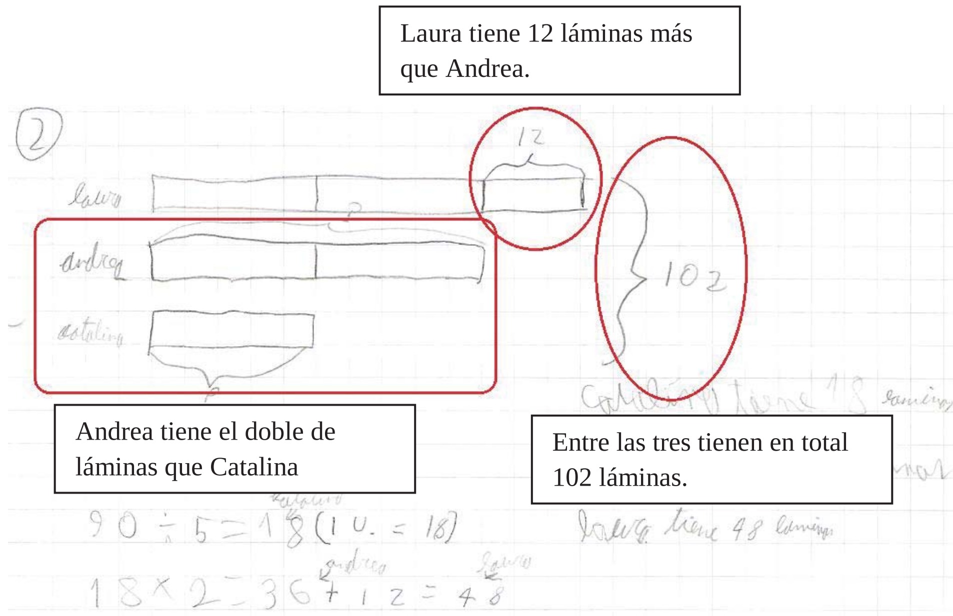
Utilizando la misma noción del modelo de comparación, dos estudiantes elaboraron la siguiente solución. El modelo utilizado, no tiene igual forma, si tiene la misma raíz, es decir, representa la misma información. Esto les permitió eventualmente notar que aquello que excedía, al mirar una barra en relación a otra, era lo que debían encontrar para así solucionar el problema. Nuevamente la utilización de la letra U, orienta la forma de proceder en la resolución del problema.



Problema 2

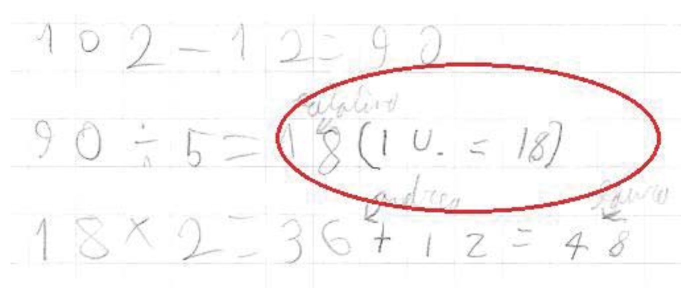
Laura tiene en su álbum 12 láminas más que Andrea. Andrea tiene el doble de láminas que Catalina pegadas en su álbum. Si entre las tres tienen en total 102 láminas, ¿cuántas láminas tiene cada una pegadas en su álbum?

Para la resolución de este problema, los estudiantes debían establecer una relación entre la cantidad de láminas que cada personaje del problema tuviera. Para ello había información relevante que debía estar representada en la ilustración.



En este caso los estudiantes utilizaron el modelo de *comparación* combinando con el modelo *parte−entero*. El modelo utilizado por este par de estudiantes ilustró toda la información relevante del problema. El modelo permite visualizar que hay 5 segmentos iguales, los que en total representan 90 láminas. Ya que a las 102 láminas iniciales se les quitó la diferencia de 12 que Laura tenía en su álbum. Luego, cada una de dichas partes representa 18 láminas, cantidad de láminas que tiene Catalina. A fin de hallar la cantidad de láminas que tiene cada una de ellas, deben releer el modelo que presentan, esto es, Andrea tiene el doble de láminas que Catalina, y Laura 12 más que Andrea.

Es posible notar que el estudiante relaciona 1 unidad a las 18 láminas ya que establece que un segmento es equivalente a 1 unidad. Todo lo anterior se muestra en el desarrollo del problema.

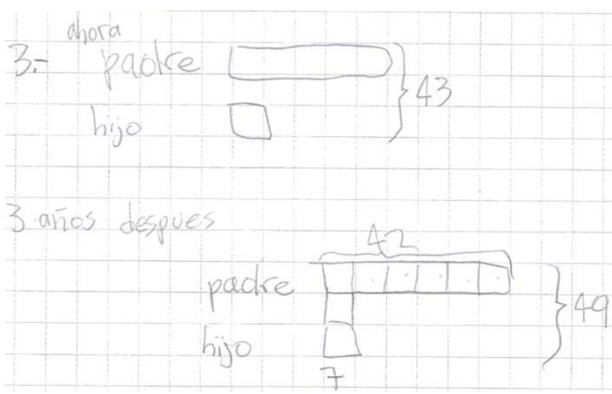


Problema 3

La edad de un padre y su hijo suman 43 años. En 3 años más la edad del padre será 6 veces la edad del hijo, ¿qué edad tiene cada uno?

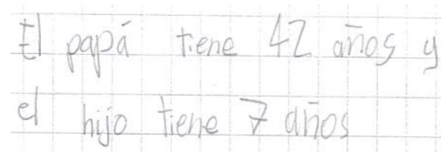
El nivel de dificultad de este problema es mayor, ya que no sólo debían crear el modelo para visualizar esta situación, sino además comprender todos los datos entregados. Si bien todos los estudiantes comprendieron como representar que la suma de las edades de un padre y de un hijo era 43, algunos no lograron comprender que en tres años más la suma aumentaría en 6 años. La falta de comprensión en la lectura del problema llevaba a un error en la respuesta.

De los estudiantes que lograron notar esta sutileza en la información, no tuvieron mayor dificultad para llegar a la solución del problema. El modelo parte–entero fue el mayormente utilizado para darle solución al problema, el cuál algunos de los estudiantes conjugaron con el modelo antes–después, para tener una mayor claridad de aquello que debían realizar para resolver el problema.

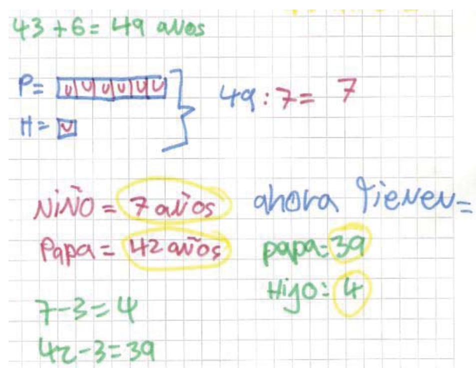


En esta resolución se puede apreciar la forma en que el estudiante ilustra la suma de las edades de padre e hijo en 3 años más, y además que el padre tendrá 6 veces la edad del hijo. Esto les permite notar que existen 7 segmentos de igual tamaño que en unión suman 49.
Si bien no existe un cálculo explícito en la resolución, sí podemos notar que se ha realizado una división para hallar el valor de cada uno de dichos segmentos. De los que 1 de ellos corresponde a la edad del hijo y 6 de ellos a la edad del padre.

Al analizar la respuesta que los estudiantes entregan en esta resolución, es posible ver que no responde a la pregunta del problema: "¿qué edad tiene cada uno?", es decir, la edad actual de cada uno. Confundiendo el resultado obtenido con la respuesta final.



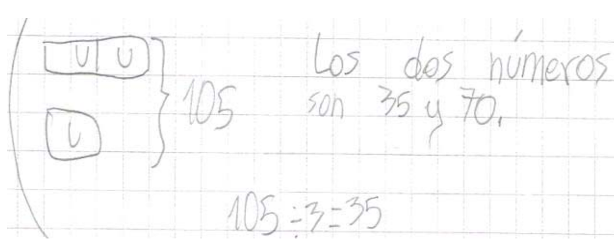
Dentro del desarrollo de la actividad hubo parejas que sí notaron que la pregunta era acerca del "ahora" y no del "después", y además lograron ilustrar cada paso que realizaron para obtener la respuesta. En esta resolución se expresan de manera clara los pasos que se han seguido para resolver el problema, lo que indica que existe una buena asimilación del proceso de resolución mediante el método del modelo.



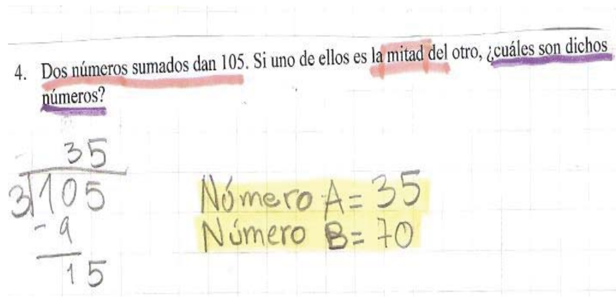
Problema 4

Dos números sumados dan 105. Si uno de ellos es la mitad del otro, ¿cuáles son dichos números? En este problema se esperaría que los estudiantes exhibieran en el modelo la fracción que en el enunciado del problema aparece. Fracción que fue utilizada de otra forma.

Se utilizaron diversas formas de modelar el problema, de las cuales se repitió en gran medida el modelo *parte−entero*. Este se utilizó generando una equivalencia entre "Si uno de ellos es la mitad de otro" con "Uno de ellos es el doble del otro". A partir de dicha relación lograron establecer un modelo de baja dificultad que les permitió descubrir la operación o el conjunto de operaciones que les permitiría hallar los números que se pedía.



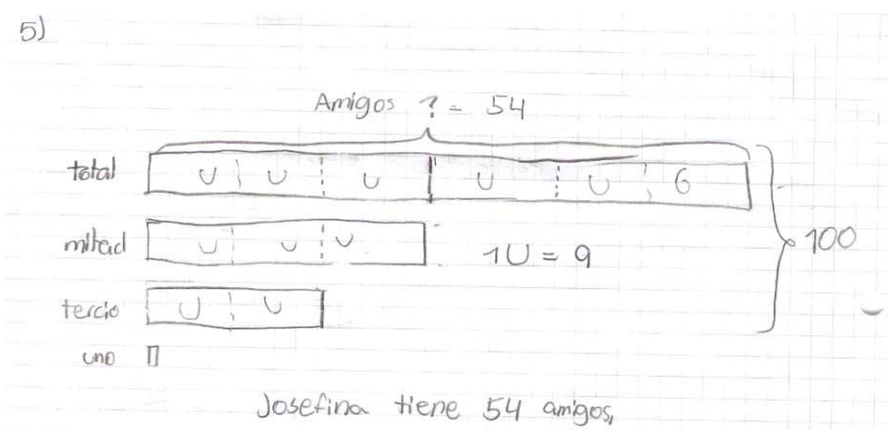
Existió, por otra parte, una pareja que logró establecer las operaciones a realizar sin elaborar el modelo. Las operaciones realizadas por esta pareja de estudiantes daba a entender que existía una utilización del modelo sin hacerlo explícito en el papel.



Problema 5

Josefina en su cuenta de facebook tiene varios amigos, de hecho, ella afirma que "mis amigos más la mitad de mis amigos, más un tercio de mis amigos más 1 es 100". ¿Cuántos amigos tiene Josefina?

De manera similar al problema anterior los estudiantes establecen una equivalencia entre "un tercio de" y "el triple de", entre "un sexto de" y "seis veces" logrando solucionar el problema de manera correcta. En esta resolución, los estudiantes han utilizado el modelo parte−entero, lo que les permitió ilustrar 9 segmentos iguales que unidos sumaban 99.



4. Discusión

El interés de esta investigación es dar luces de las formas en que el ser humano reacciona a nuevas prácticas, y como éste genera su espacio en ellas. La relatividad de los procesos educativos, provoca un interés por comprender y representar la realidad a la que se enfrenta el sujeto. En este sentido la Metodología Singapur se presenta como una oportunidad a dar respuestas a preguntas en torno al *rediseño* del discurso matemático escolar que se enfrenta a una nueva propuesta. El nuevo planteamiento de la enseñanza de la matemática que plantea la Metodología Singapur, da luces de un nuevo discurso, el que será sometido a análisis bajo una mirada socioepistemológica.

Es interesante para la comprensión del Método del Modelo de Barras comprender desde la socioepistemología qué se entiende por modelo. Por otra parte, al ser el Modelo de Barras considerado como un instrumento de resolución, sugiere una Matemática de carácter utilitario, es conveniente preguntarnos ¿podrá ser entendida, bajo otras premisas, como una Matemática funcional?

Observando los resultados obtenidos en la actividad exploratoria, podemos ver que mediante este método la dificultad de los problemas que un niño de 5° año básico resuelve, es de alto nivel. Esto se refleja, por ejemplo, en la resolución de problemas que en el currículum nacional se resuelven en cursos superiores a 8° año básico, relativos a ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. Los alumnos de 5° año básico se ven involucrados en situaciones problemáticas las cuales logran traducir a un modelo de barras, esto permite que se torne alcanzable la solución.

La Metodología Singapur se encarga de los diversos aspectos que la resolución de problemas conlleva, y por esto que se toma como el centro de su estructura. La consideración del profesor y de los textos de trabajo es fundamental. Por una parte, el profesor debe cumplir su rol de potenciar el aprendizaje, por ejemplo, a partir del ensayo y error. Para ello en esta metodología se propone intercambiar algunos datos en un problema para darle profundidad a los elementos que causan mayor dificultad, de manera que se torne un desafío para los alumnos y se vean involucrados en su resolución. Por otra parte, los textos deben ilustrar la metodología de manera que las estrategias mantengan un orden secuencial y no se centren en el objeto en sí, sino que en las prácticas que debe realizar el alumno para darle solución al problema que se propone. Esto significa, mantener una secuencia de pasos simples de aprender, ya que el proceso de resolución debe tornarse una tarea de baja complejidad, logrando así la naturalidad en el proceder. La simplicidad de los procesos evitará desviar el foco de aquello que efectivamente se está resolviendo.

CAPÍTULO II:
MODELO DE BARRAS COMO OBJETO DE ESTUDIO

1. *El Método del Modelo de Barras*

En los fundamentos teóricos se mencionan diversos aspectos en los que la metodología Singapur basa sus prácticas. Entre estos aspectos, se hace mención al enfoque CPA el que permite dar forma a toda actividad en el marco de esta metodología.

Como una forma de innovar en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Singapur se introduce *el método del modelo para la resolución de problemas*. Este modelo fue implementado con el fin de erradicar las malas prácticas y dificultades que los estudiantes manifestaban al momento de resolver problemas escritos en los primeros años de primaria.

Por otra parte, el modelo de barras se introduce como un elemento esencial dentro del enfoque CPA en la metodología Singapur. La modelación o diagramación de la información en la resolución de problemas es central para la enseñanza de la matemática basada en la adquisición de habilidades y competencias que potencian el aprendizaje. En este sentido, el Método del Modelo de Barras se trabaja en la escuela desde los primeros años de escolaridad, en donde es introducido mediante la manipulación de material concreto, para luego en cursos superiores profundizar en su estudio.

Este enfoque permite a los estudiantes crear un modelo *pictórico* para representar la información que un cierto problema describe. Este modelo genera en el estudiante una visualización del problema, lo que posibilita la toma de decisiones en cuanto a qué operaciones matemáticas utilizar para llegar a la solución de dicho problema. Este proceso no sólo permite visualizar aquella información explícita en el problema, sino que la información implícita también se torna una parte de esta visualización

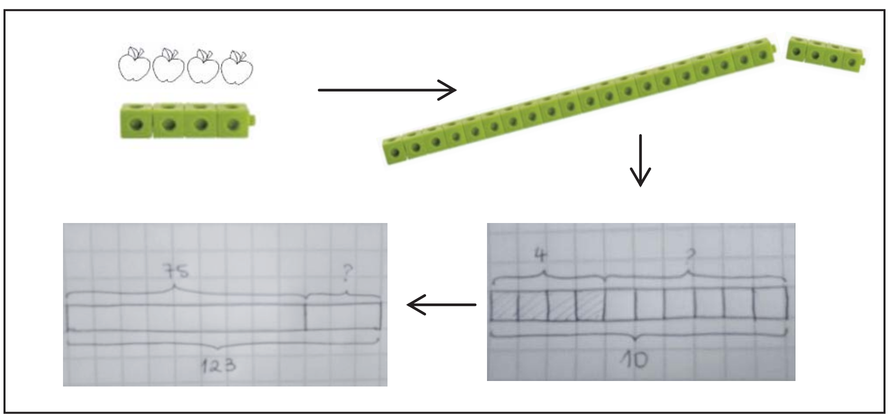
Los estudiantes utilizan material concreto (piezas multiencaje[4]) para darle sentido a la necesidad de utilizar un modelo de barras que permita representar la situación problemática y así ilustrar el mejor camino para la solución del problema. Posteriormente, elaboran

[4] *Pieza de multiencaje:* son piezas utilizadas en los primeros años de escolaridad. Permiten trabajar con material manipulable, situaciones numéricas. Son piezas que pueden ser ensambladas en cualquier dirección.

dibujos para hacer representaciones pictóricas del modelo y así facilitar la resolución con ayuda de la simbología en las representaciones abstractas.

Este tránsito en el que los estudiantes se ven involucrados al momento de profundizar en el estudio de este método, se puede entender desde el enfoque *espiral*. Esto es, en la medida que el estudiante adquiera las herramientas correspondientes al nivel que esté trabajando, podrá profundizar más en la utilización del modelo de barras para la resolución de problemas. Es decir, podrá resolver problemas de mayor dificultad.

Las siguientes imágenes brindan una idea del tránsito que se da en relación al modelo de barras. En primera instancia la barra formada por piezas de multiencaje representa la situación tal cual se describe en el problema. Luego, se crea la necesidad de utilizar las barras dibujadas, ya que una barra de piezas de multiencaje muy larga no logra sostenerse. Finalmente, la pictorización (tránsito a lo pictórico) de las barras se da en dos momentos, el primero representa cada unidad como una parte representada, y el segundo, sólo brinda la información cuantitativa de manera explícita ya que dibujar muchas partes, podría llevar a confusiones.



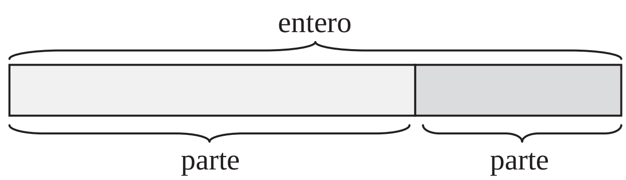
En tercer año de enseñanza básica, se presentan dos conceptos para desarrollar el uso del Modelo de Barras. Uno de estos conceptos se conoce como modelo de barras *parte−entero* y el segundo de ellos es llamado modelo de barras *comparación*. Ambos permiten dar solución a problemas de alta dificultad, en relación al nivel escolar en que los niños estudian este método.

Antes de dar paso a la descripción de ambos conceptos, es conveniente mencionar que en el último tiempo, en el desarrollo del currículum de Singapur, se ha estado integrando el *Método del Modelo* con el *Método Algebraico*, para así generar un tránsito entre la primaria y la secundaria. Esta idea surge de la necesidad de que los estudiantes logren resolver problemas escritos a partir del *Método Algebraico*, porque muestran mayores dificultades en la utilización directa del lenguaje algebraico como tal. Es una posibilidad de acentuar la importancia de los procesos, dándole el mismo estatus que los productos en el aprendizaje de la Matemática.

1.1 El modelo Parte−Entero

Ambos modelos, pueden ser aplicados en la introducción y profundización en los conceptos de fracción, razones y porcentaje, todos involucrados en la resolución de problemas. La utilización de estos modelos busca desarrollar habilidades de pensamiento matemático, las que permiten resolver problemas no−rutinarios, de final abierto y de contexto en la vida real.

Mediante la utilización del material concreto, y posteriormente (2° año básico) con dibujo de rectángulos, pueden generar una relación cuantitativa entre las cantidades: el entero y las dos partes.



Para hallar el entero conocidas las dos partes, los estudiantes deben sumar

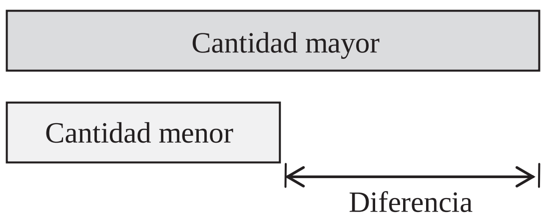
$$\text{parte} + \text{parte} = \text{entero}$$

Para hallar una de las partes, se deben conocer el entero y la otra parte, los estudiantes deben restar entero – parte = parte

Esta forma de utilización del modelo de barras, permite dar solución a problemas en donde exista una cantidad desconocida, asociando su aplicación a problemas que en el currículum de nuestro país, se dan solución mediante ecuaciones lineales de una incógnita, incluyendo aquellas de coeficientes fraccionarios.

1.2 El modelo de la comparación

Este modelo, mediante la comparación permite ilustrar cuánto más grande o más chico es una cantidad en relación a otra. En este caso la relación cuantitativa es entre tres cantidades: la cantidad mayor, la cantidad menor y la diferencia entre ambas.



A través de este modelo no es difícil notar que la diferencia se encuentra a partir de la sustracción entre la cantidad mayor y la menor

cantidad mayor – cantidad menor = diferencia

Para hallar la cantidad mayor, deben ser sumadas la cantidad menor y la diferencia

cantidad menor + diferencia = cantidad mayor

Si la cantidad mayor y la diferencia son conocidas, para hallar la cantidad menor se debe restar

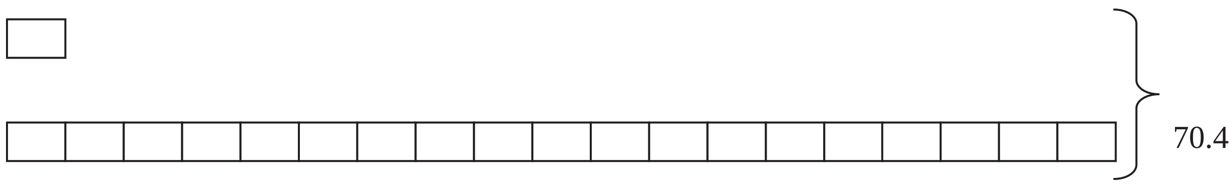
cantidad mayor – diferencia = cantidad menor

El tipo de problemas que se puede dar solución mediante este concepto de modelo de barras, son aquellos donde se ilustran dos magnitudes desconocidas. Esto nos permite asociarlo a la solución de problemas que en nuestro currículum pueden ser resueltos mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales, de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Un ejemplo de lo antes escrito se muestra a continuación. Este problema fue extraído del texto de 5° año básico “My Pals are Here 5B”.

La suma de dos números es 70.4. Si uno de ellos es 19 veces el otro, ¿cuáles son dichos números?

Primero se visualiza la información relevante del problema mediante el modelo de barras.



Cada uno de los cuadros que se generan en el modelo representa una unidad. Luego:

20 unidades → 70,4

1 unidad → 70,4 : 20 = 3,52

El primer número corresponde a una sola unidad por tanto es 3,52, el segundo número corresponde a 19 unidades por lo tanto es 19 · 3,52 = 66,88.

2. *El Método del Modelo de Barras en la actualidad*

Para entender el estatus que el modelo de barras tiene hoy en día, nos adentraremos en dos dimensiones que nos permitirán entrever algunos aspectos que deben ser considerados en la investigación. Primero daremos una mirada a cómo se presenta el Modelo de Barras en nuestro país, ilustrando las prácticas pedagógicas que hoy en día se basan en esta metodología. En segundo lugar, daremos paso a un estudio de los textos escolares que están a cargo de orientar la implementación de la metodología Singapur.

2.1 Modelo de Barras en la Educación Chilena

Como ya se ha hecho mención en la introducción a este escrito, la metodología Singapur fue implementada en nuestro país en el año 2011 con el objetivo de mejorar nuestros resultados en las pruebas internacionales. Para esto, se comenzó con el trabajo en los niveles de primer y segundo año de enseñanza básica.

Se realizaron capacitaciones a algunas de las escuelas que implementarían la metodología, exponiendo los fines de la implementación y los resultados que ha tenido a nivel país en Singapur. Estas capacitaciones fueron realizadas a escuelas y colegios de índole estatal y privada, con el fin de lograr la mejor implementación posible de esta metodología.

En una escuela subvencionada por el estado[5] se trabajó activamente en la implementación de la nueva metodología. Esto significó trabajar en capacitaciones de manera rigurosa, el año 2009 se comenzaron a trabajar en talleres semanales, el 2010 se dio menos continuidad, realizando talleres cada 15 días, para finalmente terminar trabajando en talleres mensuales como capacitación en la metodología Singapur. En cada taller se revisaba el material de trabajo, se estudiaban las propuestas metodológicas, para luego ser evaluados. Estos resultados eran informados a la dirección del establecimiento.

Los resultados en esta escuela, bastante decidores en cuanto a lo que queremos mostrar. En los resultados SIMCE se logró un incremento sustancial desde el año 2010 (251 puntos) al año 2012 (269 puntos), que podríamos atribuir a las nuevas formas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

En la organización curricular que las Bases Curriculares publicadas el año 2012 presentan, se explicita la necesidad de desarrollar cuatro habilidades fundamentales para el buen

[5] Colegio Juan Luis Undurraga Aninat. RBD 25988. Quilicura. Fundación Belén Educa. Santiago. Chile.

aprendizaje de la Matemática. Estas cuatro habilidades vienen a subsanar las dificultades que los estudiantes chilenos han tenido, esto se refleja en los bajos resultados en pruebas de medición internacionales. Como habilidades se presenta: Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar, las que se explicita deben estar interrelacionadas para mejores resultados.

La Metodología Singapur, responde a esta necesidad de desarrollar las cuatro habilidades antes mencionadas, de manera dialéctica. Lo que nos permitiría aventurarnos a presentar como una de las razones por las cuales se ha implementado en la enseñanza de nuestro país. Las habilidades, si bien muestran una nueva mirada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática no se condicen con los textos escolares o la formación inicial de nuestros profesores.

Una de las habilidades que más nos interesa dar relevancia es la de *modelar*. Las bases curriculares definen explícitamente qué es lo que se entiende por *modelar*: "es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construirlos (…) [para así] lograr que el estudiante construya una versión simplificada y abstracta de un sistema (…) y lo exprese mediante lenguaje matemático" (Mineduc, 2012). La habilidad pretende un desarrollo de destrezas matemáticas de índole algebraica, lo que no permite, en el marco de esta definición, desarrollarla a partir de otras formas de *modelamiento*.

El Método del Modelo de Barras se presenta como una alternativa para el desarrollo de la habilidad de *modelar*. Uno de los especialistas de la editorial Galileo, afirma en una entrevista que ante las Bases Curriculares 2012, las Barras constituyen otra manera de interpretar esta habilidad. En este sentido, es posible notar como la metodología Singapur toma mayor fuerza en nuestro currículum a partir de las propias definiciones y consensos que en el MINEDUC se han estado formulando. De esta manera se da por entendido que el Método del Modelo de Barras también se logra interpretar como una forma de expresión algebraica, por lo que paso a esta rama de la matemática podría ser más intuitivo y natural, que el tratamiento que hoy en día se le da a este tránsito: entre lo aritmético y lo algebraico.

2.2 Modelo de Barras en los textos escolares

En esta sección se trabajará el ámbito de los textos escolares en la metodología Singapur. En una primera instancia se realizará un breve análisis a los textos bajo el currículum chileno actual, y como en éstos se validan los procedimientos propuestos por la metodología. En una segunda instancia revisaremos como se plasma la metodología en los textos escolares traídos a Chile “Pensar sin límites” los que han sido traducidos al español y adaptados a los contenidos mínimos expresados en las Bases Curriculares publicadas el año 2012, por el Centro Felix Klein dependiente de la Universidad de Santiago de Chile.

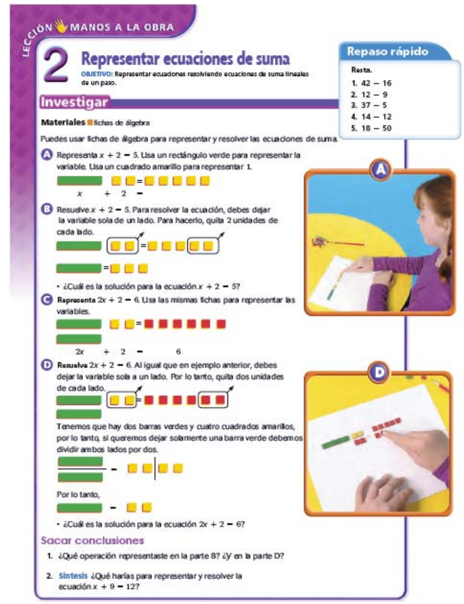
2.2.1 Modelo de Barras en los textos escolares chilenos

Lo que el Ministerio de Educación espera de los textos escolares se refleja en las publicaciones a nivel nacional de los textos que se entregan de manera gratuita en las escuelas de índole estatal, ya sea municipal o particular subvencionada.

El texto que en 6° año de enseñanza básica se ha hecho entrega es el correspondiente a la editorial Galileo, éste fue construido a partir de la adaptación de textos de Estados Unidos, los que respondían a nuestro currículum misturando los contenidos de diversos niveles (4°, 5° y 6° de educación primaria en dicho país). La metodología Singapur, también ha sido implementada en Estados Unidos, de manera que sus textos escolares se reflejan algunos aspectos de la metodología, lo que a su vez son propuestos en el texto entregado por nuestro Ministerio de Educación.

Una de las secciones en donde se muestran estos aspectos, es en la lección de resolución de *ecuaciones de suma*. En primera instancia se da una breve explicación mediante un ejemplo de cómo se puede resolver una ecuación de este tipo, para luego dar a conocer de manera visual cuáles son los principios matemáticos que hay detrás de dicho procedimiento.

Es aquí donde es necesario preguntarse por qué se presenta en este orden la resolución de ecuaciones de suma. Es decir, por qué, si se le está dando cierto estatus a esta forma de resolver ecuaciones, no se da a conocer este contenido de manera inversa. Comenzando desde una idea más intuitiva, como es el material concreto y su manipulación, para luego formalizar el procedimiento.



LECCIÓN MANOS A LA OBRA

2 Representar ecuaciones de suma

OBJETIVO: Representar ecuaciones resolviendo ecuaciones de suma lineales de un paso.

Repaso rápido

Resta.

1. $42 - 16$
2. $12 - 9$
3. $37 - 5$
4. $14 - 12$
5. $18 - 50$

Investigar

Materiales fichas de álgebra

Puedes usar fichas de álgebra para representar y resolver las ecuaciones de suma.

A Representa $x + 2 = 5$. Usa un rectángulo verde para representar la variable. Usa un cuadrado amarillo para representar 1.

B Resuelve $x + 2 = 5$. Para resolver la ecuación, debes dejar la variable sola de un lado. Para hacerlo, quita 2 unidades de cada lado.

• ¿Cuál es la solución para la ecuación $x + 2 = 5$?

C Representa $2x + 2 = 6$. Usa las mismas fichas para representar las variables.

D Resuelve $2x + 2 = 6$. Al igual que en ejemplo anterior, debes dejar la variable sola a un lado. Por lo tanto, quita dos unidades de cada lado.

Tenemos que hay dos barras verdes y cuatro cuadrados amarillos, por lo tanto, si queremos dejar solamente una barra verde debemos dividir ambos lados por dos.

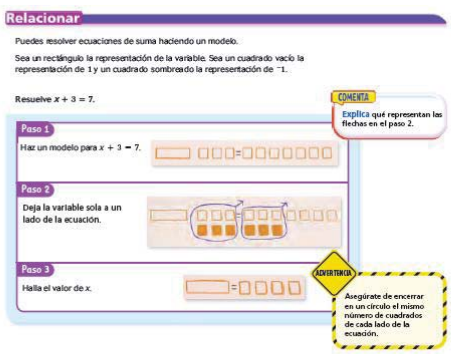
Por lo tanto,

• ¿Cuál es la solución para la ecuación $2x + 2 = 6$?

Sacar conclusiones

1. ¿Qué operación representaste en la parte B? ¿Y en la parte D?
2. Síntesis ¿Qué harías para representar y resolver la ecuación $x + 9 = 12$?

En este sentido podríamos afirmar que se está utilizando una noción usual de lo que refiere a *modelar*, ya que se está utilizando una representación del procedimiento dándole el estatus de aplicación, es decir, no hay una validación como procedimiento en sí mismo.



Relacionar

Puedes resolver ecuaciones de suma haciendo un modelo.

Sea un rectángulo la representación de la variable. Sea un cuadrado vacío la representación de 1 y un cuadrado sombreado la representación de $^{-}1$.

Resuelve $x + 3 = 7$.

COMENTA

Explica qué representan las flechas en el paso 2.

Paso 1

Haz un modelo para $x + 3 = 7$.

Paso 2

Deja la variable sola a un lado de la ecuación.

Paso 3

Halla el valor de x.

ADVERTENCIA

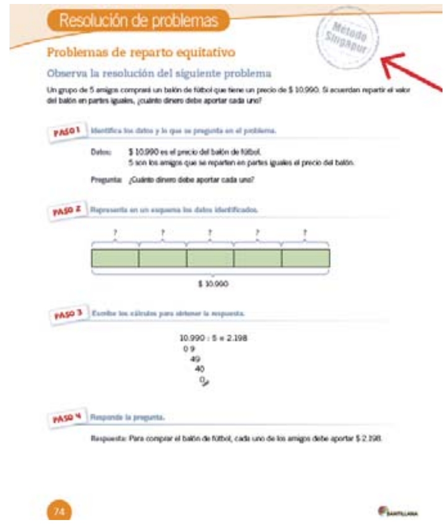
Asegúrate de encerrar en un círculo el mismo número de cuadrados de cada lado de la ecuación.

A continuación de mostrar cómo "se concretiza" la resolución de ecuaciones de suma, se da paso a una visualización, necesaria para mostrar cómo generar un procedimiento análogo al anteriormente mostrado, pero llevado al papel y al lápiz. Sin tener el material concreto como única opción.

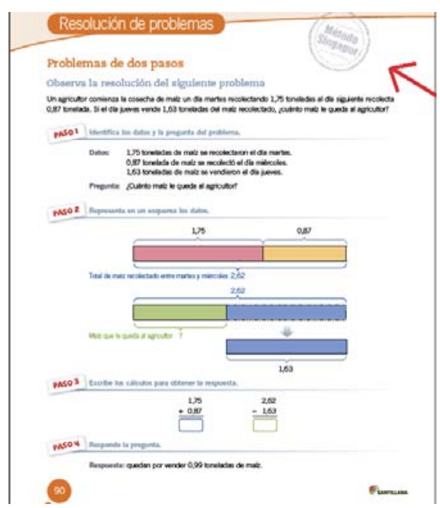
Nuevamente cabe preguntarse, en relación al orden en que se conforma esta unidad. Se reafirma, la idea que antes se planteaba, en donde la utilización del *modelar* es en el sentido usual, en el sentido que propone el Ministerio de Educación.

Hay aspectos de la metodología Singapur que se ilustran en la situación antes descrita, los que son atingentes al enfoque CPA, pero dándoles un estatus equivocado en términos de la metodología.

Asimismo, se ilustra una situación similar en el texto correspondiente a la editorial Santillana, el cuál es utilizado en colegios particulares pagados (sólo aquellos que lo seleccionen). Esta editorial, de gran prestigio, también muestra en sus textos la utilización de algunos aspectos de la metodología Singapur, anunciándolos como tal. Es debido diferenciar con el caso antes mostrado, ya que aquí se muestra como una manera de dar solución a cierto tipo de problemas, y no se le da el estatus correspondiente. En este caso se utiliza el modelo de barras, como una manera *especial* de solucionar problemas, no se valida como un conocimiento en sí mismo.



En el texto de 5° año de enseñanza básica se da paso a la utilización de uno de los modelos de barras, como un procedimiento para cerrar la unidad. Esta forma de presentar el modelo de barras, permite una Matemática significativa, es decir, los estudiantes en caso de trabajarlo no le darán la importancia que el aprendizaje de este método podría tener para la comprensión y entendimiento de la disciplina.



De igual manera se presenta una situación en el texto de 6° año de enseñanza básica, en que no se le da el estatus correspondiente a este método en la metodología Singapur. En ambos casos (5° y 6° año de enseñanza básica), se da paso a una noción del *modelar* distinta a la del caso del texto de la editorial Galileo. Si bien sólo se muestra como una *aplicación* de los contenidos, ya que hay uso de números decimales, pero no se presenta como una oportunidad de aprendizaje para la resolución de problemas. Al no darle una relevancia mayor a este método, no se permite el paso a tomarlo y utilizarlo para la resolución de problemas en cualquier ámbito numérico (no sólo números decimales), y así darle un carácter de funcionalidad para la vida real.

2.2.2 Pensar sin Límites, textos escolares de la metodología Singapur

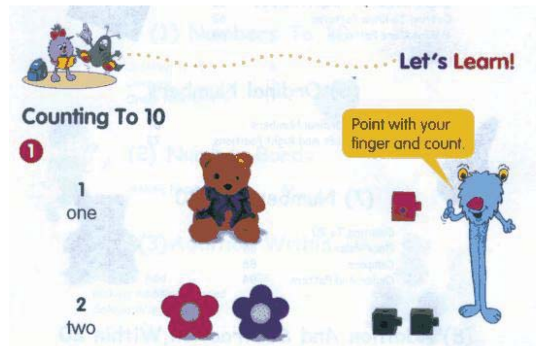
La implementación de la metodología Singapur a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en nuestro país tiene características especiales, lo que significó un proceso riguroso en la adaptación de los textos *My Pals Are Here*, al currículum y al idioma de nuestro país. Este proceso de adaptación, no sólo fue a nivel curricular, sino además de índole didáctica y cultural.

La adaptación curricular, surge a raíz de la necesidad de considerar las diferencias entre el currículum de Singapur, en relación al de nuestro país. Esto se refleja, por ejemplo en la gran cantidad de geometría que los programas chilenos presentan en comparación al currículum de Singapur.

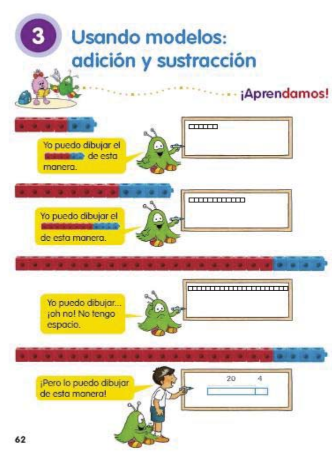
La adaptación didáctica y cultural, se debe a diferencias sustanciales en algunos elementos de nuestra cultura en relación a la de Singapur. Un ejemplo de esta diferencia es la utilización de nuestro sistema monetario. En Singapur se utilizan dólares y centavos, lo que permite mostrar los números decimales a temprana edad, siendo que en nuestro país debemos regirnos por un sistema monetario que se sumerge en el ámbito numérico de los números naturales. Siempre en consideración, que nuestros estudiantes deben *responder* a los parámetros medidos por pruebas estandarizadas a nivel nacional, como la prueba SIMCE.

Esta adaptación se traduce al texto que hoy, escuelas de índole estatal y privado, utilizan de 1° a 4° de enseñanza básica (en proceso de adaptación se encuentra el texto correspondiente a 5° año básico). Esta línea de textos es llamada Pensar Sin Límites, a cargo de la editorial Galileo y SBS. La línea de textos Pensar Sin Límites brinda herramientas acordes a la implementación de esta metodología. Su utilización permite abordar los contenidos que se requieran revisar conforme los métodos y procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que aquello implica.

Se mostrará a continuación un recorrido por la introducción al Método del Modelo de Barras. Se dará una idea de qué es lo que sucede con este Método desde 1° básico a 4° básico, para finalmente terminar con un estudio más profundo de aquello que pasa en 5° básico. Esto es por la importancia que este nivel toma en nuestra investigación.



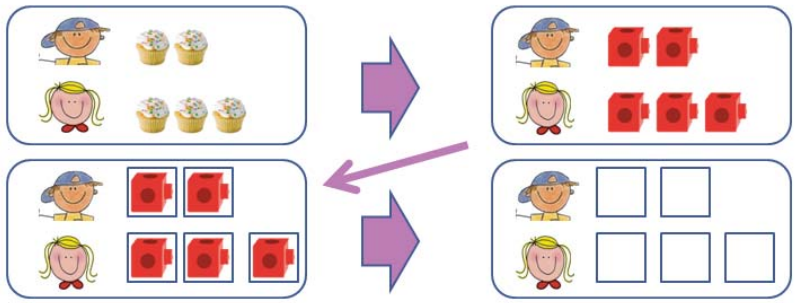
El Método del Modelo de Barras, toma forma en la medida que el nivel de escolaridad avance. En primera instancia, se da paso a la relación entre una situación conocida para los estudiantes (concreta) con las herramientas de manipulación que la metodología Singapur presenta. En este caso, las piezas de multiencaje. Esta es la primera etapa en que el Método del Modelo de Barras comienza a tomar forma, ya que es el primer momento en que los estudiantes le brindan una forma "rectangular" a la modelación de los datos entregados en el enunciado del problema.



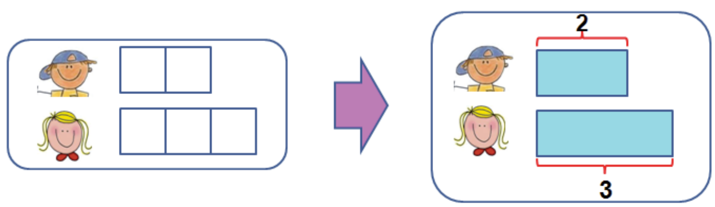
En segundo año básico, se introduce un tránsito entre lo concreto (piezas de multiencaje) y lo pictórico. Este paso permite darle estatus al Modelo de Barras, ya que valida una manera distinta de representar cierta información. Todo este tránsito está a cargo de uno de los personajes que se presenta en esta línea de textos escolares, los que familiarizan a los estudiantes con la Matemática entregada en cada página. Se introduce el Modelo de Barras a partir de las primeras ideas de *representación rectangular*[6] que los estudiantes tienen, que antes se mencionaron. Este tránsito debe ser entendido como aquel paso entre lo concreto (aún cuando ya no es material concreto, se asocia la barra a figuras de elementos que el niño podía reconocer) a lo pictórico. Para así poder representar

[6] *Representación Rectangular* es una forma de modelar cierta situación, siendo este modelo una barra rectangular.

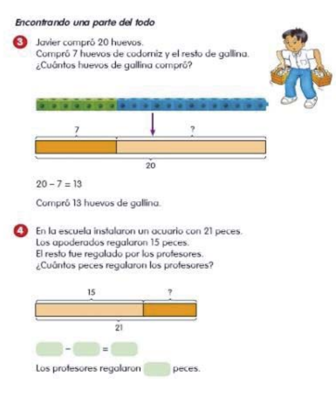
a modo de diagrama situaciones que quizás serían de gran dificultad representarlas como lo hacían en una primera instancia con las piezas de multiencaje.



Se realiza un primer paso por la construcción de barras con partes iguales, cada una de ellas representando una pieza de multiencaje. Finalmente, se realiza el paso a la abstracción del tamaño de la barra. Esto es, se dibujará una barra de cualquier tamaño para cada situación, siempre correspondiendo el *tamaño relativo*. Entendiendo este último, como el tamaño que debe tener una barra en relación a la longitud de otra, considerando su valor numérico.



De manera muy directa se da paso a la resolución de problemas, dando énfasis a la elaboración de un Modelo de Barras acorde a la información entregada en el resultado. Se introduce el uso del Modelo de Barras *parte−entero*, el que debe ser resuelto a partir de una de las tres premisas presentadas en la sección anterior. Esta resolución, es trabajada a partir de diversas situaciones, de manera que se trabajen las tres premisas, de manera que se potencie la variabilidad propuesta por Dienes.



Encontrando una parte del todo

3 Javier compró 20 huevos.
Compró 7 huevos de codorniz y el resto de gallina.
¿Cuántos huevos de gallina compró?

7 ? 20

20 – 7 = 13

Compró 13 huevos de gallina.

4 En la escuela instalaron un acuario con 21 peces.
Los apoderados regalaron 15 peces.
El resto fue regalado por los profesores.
¿Cuántos peces regalaron los profesores?

15 ? 21

– =

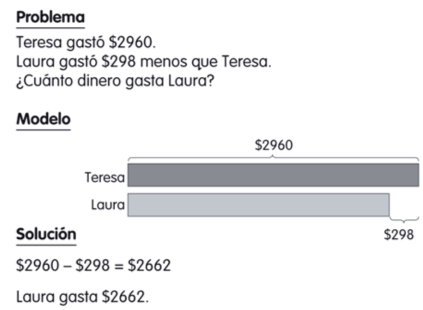
Los profesores regalaron peces.

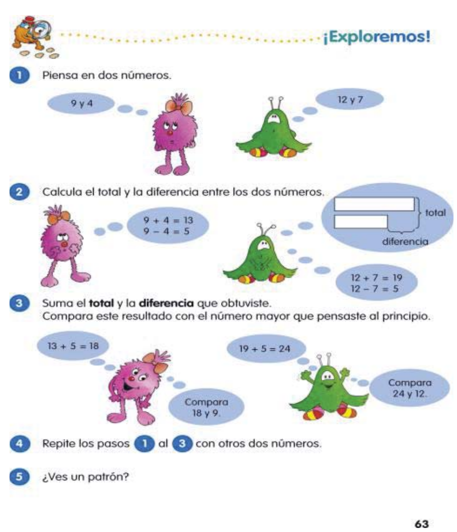
64

De la misma forma, se trabaja con el Modelo de Barras *comparación*. Se introduce trabajando una de las premisas de resolución, para luego dar paso a las otras premisas.

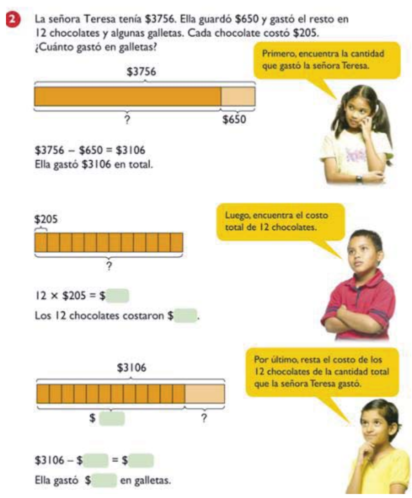
Nuevamente con el mismo fin de potenciar la variabilidad. En ambas situaciones de resolución de problema, se les presenta el Modelo de Barras como una alternativa, ya que más adelante los problemas tendrán un carácter de dificultad mayor. Esto finalmente significará, que el Modelo de Barras será el único camino viable para resolver problemas.

En tercer año de enseñanza básica, en el marco de la *espirabilidad*, se utilizan nuevamente los Modelos de Barras ya presentados, esta vez en una profundidad mayor. Se da énfasis a dos aspectos: organizar y ordenar la resolución de un problema, y resolver problemas de mayor dificultad. El orden de los problemas, se presenta en hojas que conllevan los pasos de resolución: Leer e interpretar el problema, plantear un modelo adecuado, realizar cálculos y brindar una respuesta. Este orden intencionado, es finalmente el que genera en los estudiantes una habilidad de comunicar y justificar aquello que están pensando. La dificultad de los problemas que podrán resolver, radica en el potencial que el Modelo de Barras *comparación* adquiere cuando se le da una buena utilización. En este caso se logran resolver problemas en que existen dos magnitudes desconocidas, las que deben ser encontradas a partir de la manipulación del Modelo.





En 4° año de enseñanza básica, los estudiantes son situados en un contexto problemático en el que ellos deben notar los aspectos fundamentales del Método del Modelo. Así, se realizan diversos problemas que utilizan Modelo de Barras, con el fin de profundizar en su estudio. En primera instancia se resuelven problemas que pueden ser abordados desde una *frase numérica* (number sentence), es decir, existe una expresión numérica que se puede extraer del enunciado del problema siendo estos de dificultad menor. Luego se da paso a problemas que no son posibles de enfrentar de dicha manera, por tanto se debe utilizar el Modelo de Barras.



Por otra parte, es introducida la idea de *unidad* o *parte*. Este concepto, utilizado en el Modelo de Barras, brinda una nueva herramienta para la resolución de problemas. Se presenta de manera simplificada en relación a 5° año básico, sólo se involucra la multiplicación en su abstracción. Es conveniente señalar que el uso de las llamadas asociadas a cada niño de la imagen es fundamental, permiten que la comprensión de la idea de *unidad*, que está siendo introducida, sea ordenada y clara.

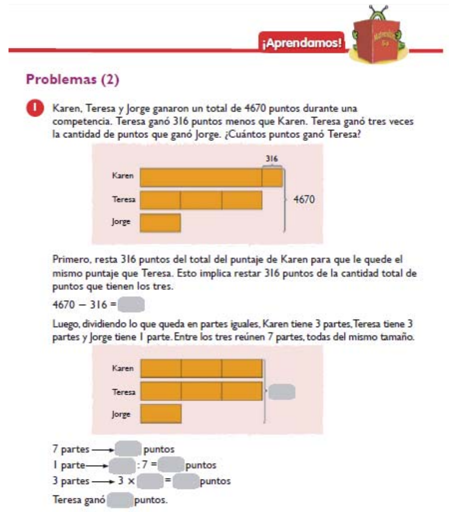
En 5° año de enseñanza básica, se da paso directamente a problemas que son resueltos mediante los conceptos de *parte−entero* y *comparación*. En la guía del profesor, se hace mención a la necesidad de recordar los elementos principales que tiene una resolución mediante el Modelo de Barras. Esto se hace con el fin de que los estudiantes busquen heurísticas que les permitan abordar problemas donde la solución no es obvia. Para ello, el Modelo de Barras se presenta como la vía para poder plantear una frase numérica, es decir, dar paso a una abstracción de la resolución del problema.

Gestión de la clase

1

- Repase la heurística de "dibujar un modelo" para resolver problemas. Recuérdeles el procedimiento para resolver problemas.
  Paso 1: Leer el problema atentamente y determinar cuál es la información dada y cuál la que deben encontrar.
  Paso 2: ¿Se puede escribir una frase numérica? Si no es posible, pensar en una estrategia o heurística que se pueda usar. En este caso, pida a los estudiantes que cierren el libro y dibujen un modelo con la información dada.
  Paso 3: A partir del modelo, escriba las frases numéricas requeridas.
  Paso 4: Compruebe si el resultado es razonable usando la estimación.

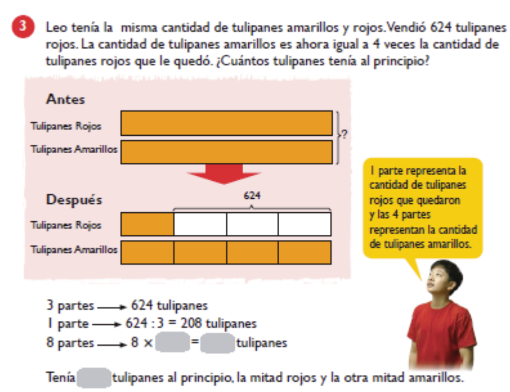
Trabajar con ambos conceptos (*parte−entero* y *comparación*) desde los primeros niveles de escolaridad, permite que los estudiantes logren establecer los posibles problemas que ellos serán capaces de resolver en la medida que se les dé oportunidad de enfrentar situaciones adecuadas a aquellos aspectos que el Modelo de Barras trae a la luz.



En el texto Pensar Sin Límites 5, se presenta el primer problema que los estudiantes deben enfrentar, en donde se muestra una estrategia distinta a la frase numérica, para abordar un problema. Se puede apreciar que el título de esta lección es “Problemas (2)”, esto es porque la lección anterior (“Problemas (1)”), son problemas que pueden ser abordados a partir de una frase numérica.

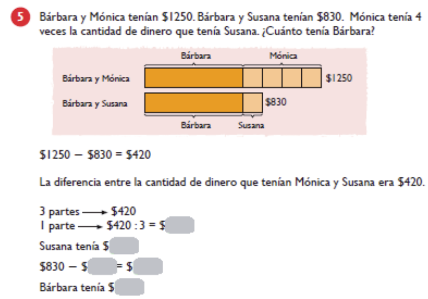
Los estudiantes tienden a trabajar los pasos de resolución de problemas mediante un trabajo aritmético únicamente, esta heurística permite dar una nueva mirada a la resolución de problemas. Esto es, le da un nuevo estatus al *modelar*, un conocimiento matemático en sí mismo. Este nuevo estatus, es distinto al que nos presentan las Bases Curriculares actuales. Siendo este punto, el centro de nuestra reflexión.

En la medida que esta lección avanza, nos enfrentamos a distintas formas de darle forma a la resolución de problemas mediante el Modelo de Barras. Es importante resaltar que son distintas, vimos en los Fundamentos Teóricos que la variabilidad en tanto situacional como procesual debe estar presente para que exista una real profundización.



En este problema, se introduce una complementación a los conceptos ya vistos: el *antes y después*. Es interesante mirar cómo algunas indicaciones para un mejor entendimiento son enunciadas a modo de “llamada”. Es pertinente generar la reflexión en torno a cómo nuestro currículum presentaría una nueva estrategia, quizás, paso a paso y con un grupo de posibles aplicaciones a continuación. Pensando esto último en el sentido que hemos estado dando la mirada crítica que queremos darle nuestro currículum.

Para cerrar esta lección, relativa a las posibles formas en que el Método del Modelo de Barras nos brinda para la resolución de problemas, se presenta un problema que combina los conceptos de *parte−entero* y *comparación*. Esta combinación, es la que llama más la atención con respecto al nivel de dificultad que logra abordar este método. Si bien la traducción de la situación a un modelo, puede no ser tan intuitiva como lo fueron los casos anteriores, su abstracción, es decir, el paso a los cálculos, se da de manera que sea natural para los estudiantes.



Es preciso aclarar, que hay más problemas resueltos en esta lección, los que no sólo se abordan desde el Método del Modelo de Barras. Se muestran heurísticas alternativas, como la *tabulación*, ya que el sentido de la metodología no es opacar o poner una estrategia por sobre otra, sino validar los procesos de heurística que los estudiantes estén usando de buena forma y así acercar cada vez más la Matemática a los procesos intuitivos de la actividad humana.

CAPÍTULO III:
MARCO TEÓRICO

1. Matemática Educativa y la Socioepistemología

La Matemática Educativa es una disciplina que surge en respuesta a la necesidad de dar una mirada y, mejor aún, estudiar la confrontación que existe entre la matemática escolar y la obra matemática. El centro de esta disciplina giraba en torno al objeto matemático y en los procesos cognitivos y habilidades que el estudiante debe adquirir para asimilar los conceptos de manera que permanezcan en el tiempo. Esto dio paso a diversos escenarios en la disciplina: algunos impulsaron a propuestas didácticas, otros a estudios históricos–epistemológicos de los objetos matemáticos, por otra parte se comenzaron a realizar investigaciones de índole cognitivo relativas a esta disciplina (Matemática Educativa). En el seno de esta forma de comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas el estudiante se consideraba como un observador de la creación matemática, un espectador de los procesos que se requerían para la constitución del saber matemático, perdiendo el interés en las formas en que la construcción de conocimiento podía darse en los diversos contextos adheridos a las diversas realidades.

Es común encontrarse con investigaciones en Educación Matemática que responden a un discurso de carácter cognitivo, abocadas a la búsqueda, como antes se mencionaba, de aquellas habilidades que permitían un mejor aprendizaje. Esto puso en desmedro aquellos temas relativos a la construcción de conocimiento, surgiendo de esta manera la necesidad de dar una mirada crítica, humana, social a los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Una mirada que muestre como el ser humano puede integrarlas a su vida para así transformarla.

> La misma disciplina (*Matemática Educativa o Didáctica de la Matemática*) ha generado marcos teóricos alusivos a representaciones de los conceptos o a construcciones mentales de los conceptos o a situaciones específicas con una secuencia para construir conceptos. Cada uno de estos marcos responde a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ofreciendo elementos didácticos que ayudarán al

> profesor y al estudiante a enseñar y aprender los conceptos que aparecen en el currículo. (Cordero, 2008, p. 270)

Un marco teórico que se adecúa a las necesidades de esta investigación es la teoría de la Socioepistemología. La Socioepistemología es una teoría de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2003)

Esta teoría, la Socioepistemología, surge en el seno de la Matemática Educativa, siendo uno de sus objetivos ilustrar los problemas que emergen en la institucionalización de la obra matemática, y como este proceso provoca un alejamiento del ser humano en relación a la construcción del saber. Por otra parte, este marco teórico nos permite dar una mirada que busca evidenciar los elementos que generan una construcción social del conocimiento matemático. El dominio matemático obliga a explicar la matemática desde el saber puro, como un constructo cerrado y acabado, por tanto pone al margen lo humano y los sentidos que el saber matemático pueda o no tener para la transformación de nuestras vidas. Ante esto, Cantoral señala que la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción en el sistema de enseñanza obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2003).

Esta teoría nos entrega herramientas que ordenan el análisis crítico que se quiere realizar a lo que hoy en día se está planteando en el currículum nacional en todas sus formas de expresión, al discurso matemático escolar (dME). Estas herramientas nos concederán un espacio en el que la construcción social de conocimiento toma un rol fundamental para la comprensión de los procesos de aprendizaje. Se refinará la búsqueda de elementos, de manera que nos funde una base para el rediseño del dME, con el fin de modificar y poner en la palestra aquellas prácticas que no generan una producción del saber que persevere en el tiempo. Desde la Socioepistemología nos encontramos frente a un constructo que se presenta como *práctica social*, la que permite que el conocimiento emerja como una respuesta a las necesidades y problemas de lo humano (Buendía, 2004). Si bien, en el cotidiano tenemos una idea de aquello que es práctico, entendiendo esto último como una acción que provoca cierta utilidad, para la esencia de esta investigación, la entenderemos en el sentido que nos propone Covián: “La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen” (Covián, 2005).

2. *El discurso matemático escolar*

El discurso matemático escolar es un constructo que surge desde la Socioepistemología. Este marco teórico nos presenta el dME como un todo ya acabado, no hay espacio para la real construcción del conocimiento, ya que se mantiene una idea fija de enseñar reiterando y emulando procedimientos previamente estipulados. En este sentido, vemos en las prácticas docentes una tendencia a imponer argumentaciones, significados y procedimientos, sugiriendo una automatización de los procesos matemáticos.

La concepción de la matemática que subyace en la enseñanza ha estado históricamente en términos de lo preexistente, es decir, la Matemática se ha considerado independiente de la experiencia humana, el conocimiento matemático se ha concebido como un sistema de verdades seguras, no modificable por el individuo (Espinoza 2009). La idea de concebir la Matemática desde un constructo cerrado, pone en desmedro los elementos que la Socioepistemología quiere resaltar en el quehacer del aprendizaje de la Matemática.

En la actualidad hemos visto que la actividad docente se ve normada y encerrada por una autoridad pedagógica, que a su vez impone a los docentes ejercer ciertas prácticas por sobre otras. Esta autoridad pedagógica que norma a los actores del sistema didáctico se torna un impedimento para la construcción social del conocimiento matemático, la cual se ejerce desde entidades como el Ministerio de Educación, la institución y por su puesto el currículum que se impone como el compilado de contenido y temáticas *deben* ser abarcadas.

Hemos visto que existe un fracaso en Matemática, el cual es asociado a las malas prácticas docentes y a los posibles impedimentos externos a la escuela que un estudiante pueda o no tener. Esto ha conllevado que existan un sinnúmero de incumplimientos de objetivos de aprendizaje que son definidos por la institución educativa. Los estudios que atienden esta problemática se ocupan de resultados obtenidos en pruebas de medición internacionales, provocando un estigma en la enseñanza de la matemática que se aleja de los reales problemas que atañen a nuestra cultura. Esta realidad responde a un dME que provoca una autoridad que rige bajo la idea de la normalización de los procesos educativos.

En esta reflexión, es posible identificar indicadores que nos señalan que el dME deja fuera a los actores del sistema didáctico, entendiendo este como el conjunto de todos los individuos que se ven inmersos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemáticas: profesor, estudiantes, directivos, textos, entre otros. Hay un discurso tradicionalista que muestra una concepción pedagógica sobre la enseñanza de la matemática, inspirada en el paradigma positivista, (Rivas 2005) cubierto por actividades de intuición y contextualizadas en el entorno de los estudiantes.

Es posible construir otras explicaciones de los contenidos matemáticos y la tarea es ver cuál es la más adecuada, esto se llama ***Rediseño del discurso matemático escolar.*** *(Cantoral, Cibem 2009)*

3. La Matemática funcional una mirada para el rediseño del dME

Una de las formas que la matemática funcional surja en nuestro discurso educativo, es dándole una preponderancia a la matemática socialmente constituida. De manera que podamos atender a una de las principales ideas que propone la Socioepistemología, la construcción de conocimiento se logra a través de prácticas socialmente compartidas (Buendía, 2004)

Nuestro modelo de enseñanza actual en cierta medida, tiene una preponderancia por el trabajo reiterativo y basado en la memorización. Esto implica que el conocimiento se centre en los conceptos que se quieran enseñar, las temáticas puntuales que, según nuestro currículum, deben ser enseñadas en la escuela. Esto último, no ha permitido dar paso a una matemática con sentido para los estudiantes. Desde la socioepistemología, daremos una mirada al dME, y nos centraremos en aquellas falencias que el sistema presenta, mostrando como la más evidente la concentración de la enseñanza en los conceptos y objetos, dejando de lado el carácter funcional que la matemática podría tomar. En este sentido, será entendido por funcional aquel conocimiento integrado a la vida, de manera que con él se puedan conseguir cambios y transformaciones en ella. Así ilustraremos que las formas actuales de enseñanza, de carácter utilitario, no se preocupan por la función que podría tomar el conocimiento en la vida del ser humano. Es decir, no se está logrando despojar del carácter utilitario a la matemática que hoy en día en nuestras escuelas se está enseñando y aprendiendo.

Es sabido, que en la escuela la Matemática toma real importancia en relación a las otras disciplinas escolares, pero tanto docentes como estudiantes la perciben como una disciplina en servicio, potenciando el carácter utilitario que el dME provoca. Si bien, los docentes buscan campos, distintos al de la Matemática, para darle sentido a la disciplina (mostrando diversas aplicaciones que ésta tiene en la física, en la ingeniería, entre otras), el estudiante busca un sentido de utilidad para la vida en la matemática, como lo son las operaciones básicas para el día a día. Exigencia que se torna un problema en los procesos de aprendizaje ya que difícilmente podremos encontrar utilidades cotidianas, por ejemplo en el caso de la función logarítmica (dentro de otros muchos).

En el marco de esta situación, donde la concepción de la Matemática es de índole utilitaria, es que la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina no tiene lugar como una forma de pensar, o como parte de la cultura. *"Si realmente queremos que los estudiantes valoren socialmente el conocimiento matemático, es necesario arrancar su concepción del nivel utilitario de tal conocimiento y llevarlos al nivel funcional"* (Cordero, 2006, p.5).

Desde una mirada socioepistemológica podemos afirmar que hoy en día el modelo de enseñanza de la matemática en nuestro país, permite el paso a un conocimiento utilitario de éstas, dejando de lado las posibilidades de constituir una matemática funcional para nuestros estudiantes.

4. La modelación como una práctica para la resolución de problemas

En la enseñanza de las matemáticas se entienden los procesos de modelación como una mera aplicación de los conceptos y contenidos enseñados. Influyendo en el dME que plantea el currículum actual: estudiar los objetos matemáticos como constructos cerrados y luego aplicarlos en distintos escenarios y situaciones. Desde la Socioepistemología, se entiende la Modelación como una práctica, que en sí misma, es conocimiento matemático.

La modelación toma mayor fuerza, como una forma de representar un conocimiento, un saber ya acabado. Entendiéndola como una representación de la realidad preexistente, en contraposición, a la mirada que nuestro marco teórico pueda darle: es parte de la construcción de conocimiento, en donde la realidad y el saber se construyen en una constante dialéctica.

La modelación debe tomar un rol de mayor importancia en la construcción de conocimiento, debe ser más sólida que una representación o aplicación de un cierto concepto. Debe ser concebida como una práctica válida para la argumentación de una situación, provocando una construcción progresiva a partir de saberes ya adquiridos y transformando aquellos que se requieran para ser integrados a éste proceso de aprendizaje.

5. La Socioepistemología en nuestra investigación

Nuestra investigación, en el seno de la teoría de la Socioepistemología, dará paso a una mirada crítica a las formas de enseñanza de la Matemática que actualmente predominan en nuestro sistema educativo las que son basadas en la aplicación de técnicas, reglas y fórmulas. Esta realidad no permite que los estudiantes se cuestionen aspectos como ¿Por qué resulta esto? ¿Habrá algo más que dé resultados? ¿Qué es lo que está realmente pasando cuando realizo esto que estoy haciendo?

Desde la socioepistemología debemos mirar el dME que buscamos rediseñar a partir de los posibles elementos que la metodología Singapur pueda entregar para generar una matemática funcional. Actualmente el dME nos presenta el conocimiento matemático como un conjunto de estrategias que "funcionan" ante ciertos estímulos y condiciones. De manera que el estudiante no logra establecer un vínculo entre aquello que está aprendiendo y las condiciones que deban estar presentes en las diversas situaciones, para que dicha estrategia pueda ser utilizada. En contraposición a esto la Metodología Singapur nos propone una enseñanza desde la necesidad, para luego llegar a consensos para un lenguaje común y una semiótica que de paso a entendimientos en la disciplina Matemática.

La importancia de realizar estudios sobre el uso del conocimiento matemático consiste en que nos ofrecen indicadores para formular marcos de referencia que hagan una matemática funcional en la escuela (Cordero, et al, 2009). Estos indicadores, los buscaremos en las prácticas que la metodología Singapur nos presenta como propuesta de enseñanza de las matemáticas. Esta enseñanza responde a las necesidades que los estudiantes están presentando en la escuela, logrando así dar paso a una matemática que pueden integrar a sus vidas y dándole un uso significativo a ella.

Con lo anterior se aportará al rediseño del dME, a partir de la evidencia de elementos que el dME nos muestra como usuales y parte de una línea en nuestro país. Esto dará un espacio al debate, que se tornará hacia el funcionamiento y forma del conocimiento tomando en cuenta las funciones que los estudiantes le puedan dar a éste.

En este sentido, a partir de una mirada socioepistemológica, cuestionaremos como el conocimiento se está construyendo. Para ello, daremos una lectura crítica al dME, el cual, en cierta medida, excluye o más bien no permite involucrar a los actores del sistema didáctico (profesores, alumnos, entre otros) en la construcción del conocimiento matemático, ya que, como antes lo mencionaba, concibe la disciplina Matemática como un saber acabado.

El dME de la metodología Singapur nos muestra una metodología que se basa en el aprendizaje por descubrimiento, logrando así una construcción del conocimiento matemático basada en las expectativas y necesidades de los estudiantes. Así la matemática toma un carácter funcional y deja de lado las técnicas y fórmulas que constituyen una matemática utilitaria.

Algunos elementos o indicadores que podemos resaltar de la Metodología Singapur son:

- El Método del Modelo de Barras se presenta como una oportunidad para desligar de la argumentación algebraica−aritmética todos los procedimientos asociados a la resolución de problemas. Entendiendo esta última como una argumentación basada en los procesos de algoritmización y simbolización en la comunicación de resultados.
- Por otra parte, hay elementos que logran a la matemática despojarse de su carácter utilitario para así presentarse como una matemática funcional.
- Los fundamentos teóricos de esta metodología permiten ver elementos de una matemática más intuitiva que se basa en la constitución social del conocimiento. Entendiendo *lo social* como el sistema de relaciones que el estudiante debe generar en el aula para lograr un aprendizaje que tenga sentido para su vida. El enfoque Concreto−Pictórico−Abstracto (CPA), nos brinda éstas herramientas.
- Parte esencial de la metodología es darle un vuelco a la enseñanza tradicional de las matemáticas, potenciando la construcción del conocimiento a partir de situaciones acordes a la etapa de desarrollo del estudiante.
- La Metacognición se presenta como una de los ejes principales en esta metodología, sugiriendo que las situaciones deben causar impacto en el estudiante, tanto en la manera de contextualizar el proceso que se desea mostrar como la dificultad que el problema pueda tener.

CAPÍTULO IV:
PUESTA EN ESCENA

1. Aspectos metodológicos

La Matemática Educativa es una disciplina que centra su interés en analizar y teorizar en torno a fenómenos didácticos. Es decir, toma procesos sociales e intrínsecos al ser humano, inherentes a la escuela, para luego reflexionar, analizar y generar reflexiones y así conclusiones en torno a ellos.

Para una investigación inmersa en esta disciplina, es debido tomar los elementos de un paradigma centrado en la construcción de conocimiento, como resultado de procesos humanos. El paradigma Interpretativo toma lugar en esta investigación puesto que percibe el conocimiento de manera relativa o subjetiva, ya que depende de la interrelación de los sujetos. Por otra parte, el conocimiento es entendido como una construcción social, y por tanto, con historicidad y contexto propio.

La relación sujeto – objeto que propone este paradigma, ilustra una dialéctica entre ambos de manera que se ilustren las líneas para comprender los significados atribuidos a las diversas entidades de sus realidades sociales. Es decir, mediante la interrelación antes descrita, el objeto es construido desde y en el sujeto. Es por esto que a investigación toma sentido al darle forma en este paradigma.

El interés de esta investigación es dar luces de las formas en que el ser humano reacciona a nuevas prácticas, y como éste genera su espacio en ellas. La relatividad de los procesos educativos, provoca un interés por comprender y representar la realidad a la que se enfrenta el sujeto.

1.1 Actores

Se trabajará con estudiantes del 5° año básico que han trabajado, durante al menos dos años, la asignatura de Matemática bajo la Metodología Singapur. Los estudiantes que participen de esta actividad, no corresponderán a una selección, sino más bien se requiere la participación de todos los estudiantes de un curso, para observar el quehacer de aquellos que tienen un buen manejo de la Matemática y aquellos que no logran adquirir todas las habilidades desarrolladas en clase en el mismo espacio–tiempo.

Por otra parte se trabajará con dos profesoras de educación media. Ellas han trabajado la enseñanza y aprendizaje de la Matemática desde una perspectiva tradicional. Es decir, no han tenido contacto con los aspectos de la metodología Singapur. Ambas docentes tienen larga trayectoria en cursos de enseñanza media, en específico segundo de año medio. Este nivel es de gran interés para nuestra investigación, ya que es aquí donde existe mayor relación con problemas del carácter que presentaremos en la actividad.

Tanto estudiantes como profesoras, serán quienes nos entreguen las evidencias con que podremos establecer las conclusiones pertinentes a nuestra investigación.

1.2 Diseño de actividad

El registro de evidencias se genera a partir de las prácticas y fenómenos del aula. Estos últimos, pueden ser enriquecidos con una indagación en relación a la percepción de los actores del proceso de enseñanza aprendizaje de dichos sucesos.

Para un análisis de las formas de proceder en la resolución de problemas, tanto en los estudiantes de 5° año básico, como en el quehacer de las profesoras, se realizará una actividad a modo de cuestionario abierto. El cuestionario abierto se presenta como una herramienta de investigación que permite analizar aspectos humanos en las formas de responder, es decir, se espera que el estudiante se enfrente a éste utilizando lenguajes y procedimientos intrínsecos a sus propias metodologías. No habrá formas de proceder sesgadas ni muchos menos intencionadas por el investigador, ya que se dará la oportunidad de dar respuestas libres.

Por otra parte, enriqueceremos la toma de datos a partir de la observación de conductas. En cierta medida, ésta posibilita mirar las formas de proceder y reacciones de los estudiantes ante el problema, que a veces no son percibidos en otras formas de toma de datos. La observación nos dará luces de los procesos personales por los que el estudiante pasa al momento enfrentarse a situaciones problemáticas, lo que permitirá realizar un análisis comparativo de aquello que se observa en clases con los resultados obtenidos de la actividad. Asimismo, se dará cuenta de las formas de reaccionar y de enfrentar la actividad de las profesoras involucradas en la investigación.

1.3 Actividad: Resolución de problemas con Modelo de Barras

El tipo de problemas que se presentarán en la actividad, como se mencionaba antes, se desarrollará a modo de cuestionario abierto, son tradicionalmente (en el discurso matemático actual) abordados con el planteamiento de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. Es decir, no se dará paso a la resolución de problemas en general sino a aquellos problemas que tienen estas características.

La actividad contará con 4 problemas con las características antes mencionadas. Para el objetivo de esta investigación, no era relevante que los estudiantes se detuvieran en cálculos engorrosos, y se distrajeran de su quehacer. Por tanto, los valores numéricos que se utilizaron fueron pensados para la realización de cálculos simples.

La actividad se realizará en grupos de 3 estudiantes con el fin de generar debate en torno a las posibles formas de enfrentar el problema. Serán supervisados por la profesora de la asignatura, quien tendrá la instrucción de no interferir en el quehacer de los niños. Esto da pie a posibles equivocaciones, o malas interpretaciones de los enunciados que la actividad propone. Siendo estas últimas, una parte importante del análisis de la investigación.

A continuación se muestran los problemas que fueron planteados en la actividad. Los cuales son introducidos mediante una instrucción que se redacta de tal manera que no fuerce a la utilización de ningún procedimiento particular, y sólo invite a la resolución de los problemas con los métodos y formas de proceder que estimen convenientes para cada caso. Con el fin de dar a entender que toda forma de proceder tiene igual validez.

1. La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

2. Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?

3. Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?

4. La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?

La actividad fue construida considerando algunos aspectos que quedaron como cabos sueltos en la actividad que se planteó en el primer capítulo como "actividad exploratoria".

1.4 Puesta en escena

La puesta en escena de la actividad, tomó lugar en horario de clases. Los niños tomaron posiciones ubicados en grupos de 3 integrantes. En primera instancia se dio espacio para una breve introducción a los motivos de la realización de la actividad, para así lograr que las evidencias resultantes nos permitieran estudiarlas posteriormente.

Una vez repartidas las hojas de la actividad, se hizo una lectura de las instrucciones escritas en el párrafo inicial. Esto se hizo para resaltar la idea de mostrar todo procedimiento que se lleve a cabo para dar solución a los problemas, y no hubiera ambigüedades al momento de analizar los documentos. Se concedió la palabra a estudiantes con dudas al respecto del funcionamiento de la actividad, para finalmente darle inicio a ésta.

Los estudiantes trabajaron mostrando gran interés por lograr darle solución a los problemas, reflexiones y discusiones se generaron en el desarrollo de la actividad. En cada caso se veía la necesidad de mostrar un modelo que permitiera argumentar los cálculos que se realizarían. Si bien, el modelo de barras era el centro, se esperaba otras formas de modelar la situación.

En cuanto a la actividad realizada a las profesoras, se les dio la misma instrucción. Esto significó traer a la luz las herramientas de tipo algebraica que ellas manejan para la resolución de problemas. Para mantener un registro de los comentarios que realizaban al momento de realizar la actividad, se tomó nota a modo de una nueva evidencia para el análisis.

2. *Análisis de Datos de la Actividad de Resolución de Problemas mediante el uso del Modelo de Barras.*

A continuación se analizará el trabajo de ambos actores que son parte de esta investigación. Primero, se realizará un análisis a las formas de proceder de los estudiantes y luego se pondrá en contraposición con el trabajo realizado por las profesoras encuestadas. La necesidad de dar a conocer el quehacer de las profesoras es para evidenciar los elementos que el currículum actual potencia en la resolución de problemas: trabajo aritmético–algebraico.

Para ello se hará una confrontación entre la hipótesis planteada según la actividad (manifestada en el análisis a priori), en relación a lo que realmente hicieron los estudiantes y las profesoras para llegar a una conclusión con respecto a la resolución de problemas mediante el uso del modelo de barras (análisis a posteriori).

2.1 Análisis a Priori

En primera instancia, es necesario que tengamos presente la hipótesis con la que sostenemos esta investigación: el método del modelo de barras, en el seno de la Metodología Singapur, aporta elementos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto permite que los estudiantes sean capaces de darle solución a problemas de dificultad superior, según el currículum actual. Lo cual, dará paso a una matemática funcional en cuanto a la resolución de problemas.

Para esto se analizará la actividad, que consta de cuatro problemas que en el currículum actual son resueltos mediante ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. Los que se muestran a continuación:

Problema 1: "¿Qué edad tiene cada amiga?

El quehacer de los estudiantes

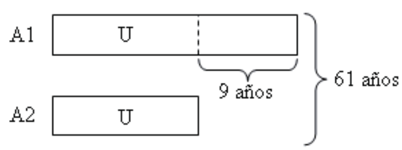
Al momento de abordar el primer problema, los estudiantes se aventurarán a probar con diversos pares de números que cumplan con las condiciones que se indican. Se percatarán de los parámetros en los cuales se deben mover dichos números para no comenzar a probar con cualquiera de ellos. El formato en que presentarán este tanteo de soluciones se dará de diversas formas, siendo una de ellas la tabla.

Amiga 1	Amiga 2	Suma	Diferencia
30	31	61	1
29	32	61	3
28	33	61	5
27	34	61	7
26	35	61	9

Indicando la respuesta correcta, en este caso, mediante la franja destacada.

El par de números con el cual se comienza, si bien podría ser cualquiera, se estima que los estudiantes se den cuenta que ambos números no debieran ser considerados como “números distantes”, es decir, debieran ser capaces de establecer la relevancia que tiene la diferencia que en el enunciado se explicita.

Por otra parte habrá estudiantes que buscarán la resolución del problema a partir de la utilización de un modelo de barras para argumentar la toma de decisiones al momento de *algoritmizar* la resolución. El modelo de barras que se plantee tiene la forma de “modelo de barras: comparación”, ya que se presenta una diferencia entre números y la suma entre ellos. A partir de la representación de la información mediante el modelo, se realizarán los cálculos que el modelo ilustre. Este modelo será presentado mediante dos barras, una más corta que la otra, de manera que el exceso represente la diferencia entre los números. La barra de menor longitud corresponderá a la *unidad* que se busca, y la de mayor longitud involucrará la misma unidad más la diferencia antes mencionada.



Luego se procederá a los cálculos pertinentes al caso, estos se pueden dar de diversas formas, siempre en búsqueda del valor de *unidad*.

El quehacer de las profesoras

Este problema toma lugar en la resolución de sistemas de ecuaciones, tema tratado en segundo año de educación media. Las ecuaciones que deben ser planteadas deberán explicitar aquellas relaciones que existen entre las partes del problema, esto es, debe existir una congruencia entre aquello que se expresa en lenguaje natural y el lenguaje algebraico.

El sistema que se planteará será el siguiente:

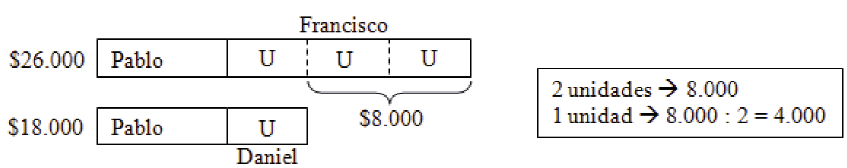
$$\begin{array}{l|} x+y=61 \\ x-y=9 \\ \hline \end{array}$$

Esto considerando que cada variable representará la edad de cada una de las amigas.

Problema 2: ¿Cuánto dinero tienen entre los tres?

El quehacer de los estudiantes

Para la resolución de este problema, por parte de los estudiantes se esperan dos posibles escenarios. El primero de ellos, es el ideal, donde se utilizará el modelo de barras para encontrar la solución correspondiente. Se verificarán algunos cálculos que tienen directa relación con el planteamiento correcto del modelo, es decir, no habría una manera distinta de determinar dicho camino sino se hubiera planteado de manera correcta la representación en barras. El modelo a plantear sería el siguiente:



Un segundo escenario, es aquel en que el estudiante no comprende el problema, y para dar solución a éste sólo suma los valores dados sin percatarse que el ahorro que tiene Pablo es considerado dos veces en dicha suma.

El quehacer de las profesoras

Nuevamente tomará lugar un sistema de ecuaciones lineales, el cual estará dotado de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Cada uno de los personajes de este problema, será considerado como un valor incógnito a encontrar. El sistema que se esperaría que las profesoras plantearan sería el siguiente:

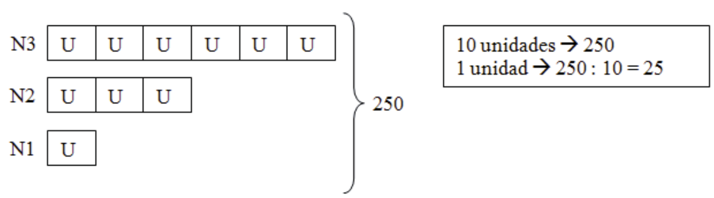
$$\begin{aligned} F + P &= 26.000 \\ D + P &= 18.000 \\ F &= 3D \end{aligned}$$

Siendo la solución al problema la suma de los tres valores encontrados: $F + P + D$.

<u>Problema 3: "¿Cuáles son los números?"</u>

El quehacer de los estudiantes

Este problema no presentará mayor complicaciones al momento de su resolución. Los estudiantes serán capaces de abordarlo utilizando el modelo de barras con el fin de reestructurar el problema a partir de relación entre los tres números. Es decir, al mencionar que "el primer número es un tercio del segundo", los estudiantes entenderán que "el segundo número es el triple del primero". El modelo de barras que idealmente utilizarán, en el que se evidenciará lo antes descrito se muestra a continuación:



A partir del cual encontrarán la unidad, la que les permitirá hallar el valor de los tres números.

El quehacer de las profesoras

Se podrá abordar, desde el álgebra, a partir de una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones dependiendo de las formas que la profesora prioriza para solucionar problemas. La relación existente entre los tres números se establecerá fijando el segundo número como la incógnita, ya que es la tendencia esperada según el planteamiento del problema, para luego a partir de este valor encontrar los otros números.

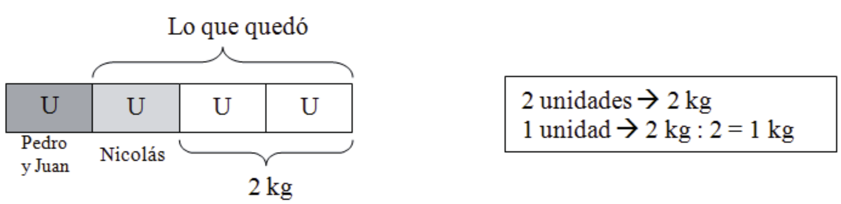
Ecuación lineal	Sistema de ecuaciones lineales
$\frac{1}{3}x + x + 2x = 250$	$z = \frac{1}{3}x$ $y = 2x$ $x + y + z = 250$

Ambas formas son equivalentes desde el punto de vista de la sustitución de variables para la resolución del sistema de ecuaciones.

Problema 4: "¿Cuánto pesaba el pastel?"

El quehacer de los estudiantes

A partir de un modelo de barras los estudiantes podrán visualizar que "un tercio de lo que quedaba" es uno de los tramos determinados en la barra, luego de ya considerar que debía eliminar "un cuarto del pastel". Con esto podrán fácilmente darle solución al problema, interpretando de buena manera el valor de lo que quedaba de pastel. El modelo a utilizar podría ser el que se muestra a continuación:



Realizando simples cálculos para finalizar la resolución.

El quehacer de las profesoras

Se planteará la una ecuación lineal, la cual tomará como el peso inicial del pastel la incógnita que debe ser encontrada. Esta ecuación es de gran complejidad en cuanto a los cálculos algebraicos, lo que podría llevar a equivocaciones en su desarrollo.

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{4}x\right)+2=x$$

En ella $\frac{1}{4}x$ representa aquello que comió Pedro y Juan, $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{4}x\right)$ representa aquello que comió Nicolás, es decir, "lo que quedaba" se representa a partir de $\left(x-\frac{1}{4}x\right)$.

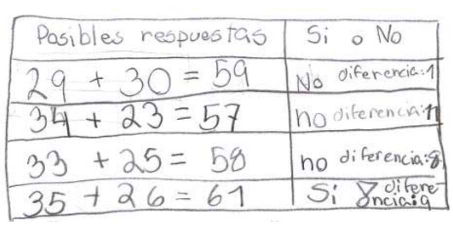
2.2 Análisis a Posteriori

La actividad fue aplicada a un curso de 5° año básico, durante una de las clases de matemática. Esta instancia duró una hora y media, la que tomó sentido para los estudiantes como una actividad para cerrar la primera unidad de números. Por otra parte, también fue realizada a dos profesoras de educación media, las cuales no conocen los elementos que la Metodología Singapur brinda, lo cual enriqueció la investigación. Esto último, porque las profesoras dieron solución a los problemas a partir de las formas propuestas en el currículum actual.

<u>Problema 1: ¿Qué edad tiene cada amiga?</u>

El quehacer de los estudiantes

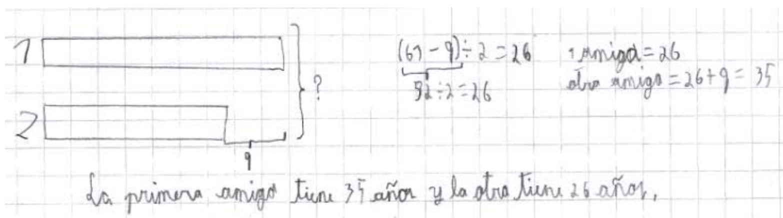
Esta respuesta se presentó de dos formas sin predominar una sobre la otra. La primera de ellas se manifestó mediante un marcado trabajo aritmético, en donde los estudiantes comenzaron a probar con algunos valores hasta dar con la respuesta. Para ello, formularon tablas donde se mostraba la verificación de la suma y la diferencia entre las respuestas. La tabulación de las posibles soluciones ilustraba una forma de ordenar y organizar las posibles respuestas, en resolución de problemas por Ensayo y Error.



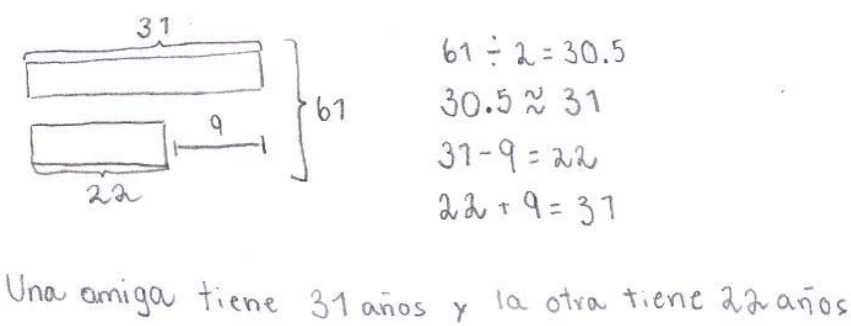
Posibles respuestas	Si o No
29 + 30 = 59	No diferencia:1
34 + 23 = 57	no diferencia:11
33 + 25 = 58	no diferencia:8
35 + 26 = 61	Si 8 diferencia:9

En esta forma de abordar el problema, también se dieron algunas equivocaciones, ya que los estudiantes obviaron una de las condiciones obteniendo una respuesta parcialmente correcta. En este caso los estudiantes no lograron comprender a cabalidad las condiciones que el problema entregaba en su enunciado.

La segunda forma de abordar este problema fue a partir del uso del modelo de barras. Se generó un modelo adecuado para la situación descrita en problema, esto daba paso a dos escenarios. El primero de ellos era en el que los estudiantes lograban darle un buen uso para la toma de decisiones en cuanto a las operaciones aritméticas que debían realizarse.



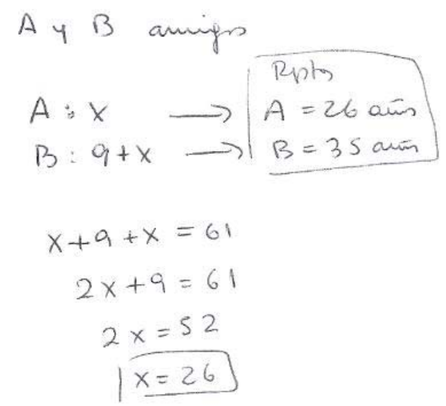
Y el segundo, por el contrario, se efectuaba cálculos erróneos, ya que la interpretación del modelo que, a pesar de estar correcto, los llevaba a operaciones y formas de proceder inadecuadas.



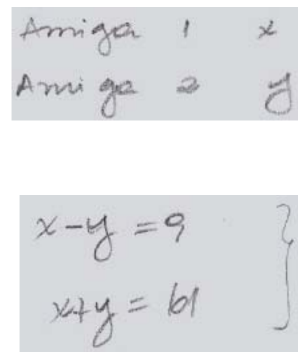
El quehacer de las profesoras

La primera profesora generó una ecuación lineal a partir de la representación de cada personaje del problema en función de la menor de las amigas. Con esto pudo encontrar la edad de la menor de ellas, para luego hallar la edad de la mayor de ellas.

La segunda profesora planteó un sistema de ecuaciones, el cual es la traducción directa de la información del enunciado. Es decir, plantea claramente la diferencia y la suma entre ambas amigas.

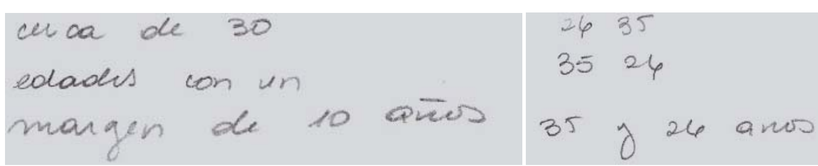


Primera Profesora



Segunda Profesora

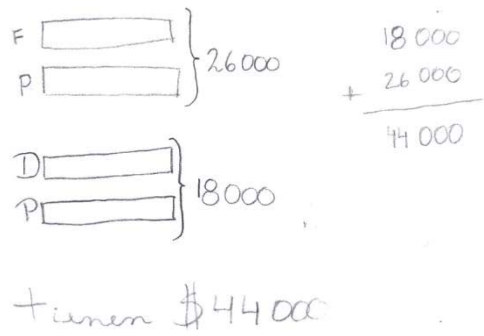
De todas se percata que las soluciones debían ser cercanas a 30 para que se cumplieran ambas condiciones. Por tanto realiza un procedimiento mental que la lleva a encontrar la solución, por lo mismo el sistema de ecuaciones queda sólo planteado y no se ilustra su resolución.



Problema 2: ¿Cuánto dinero tienen entre los tres?

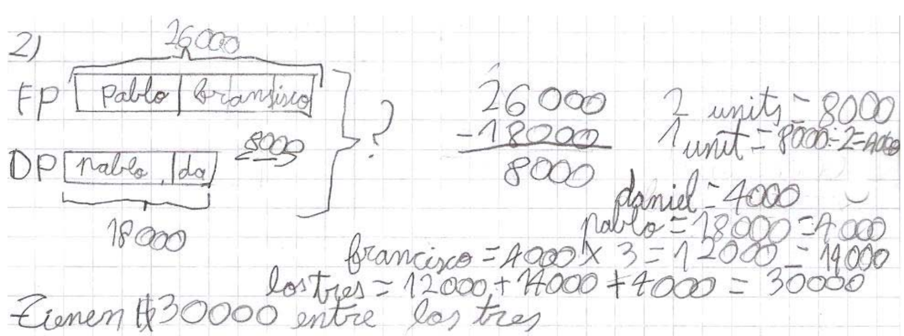
El quehacer de los estudiantes

Este problema fue en el que se obtuvieron la mayor cantidad de respuestas incorrectas, ya que no había comprensión de aquello que el problema requería. Algunos se aventuraron a trabajar con el modelo de barras, pero no lo planteaban de buena forma



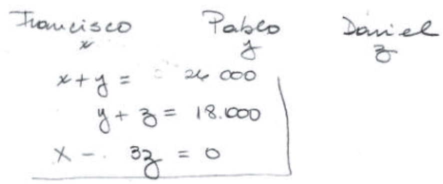
Llevándolos a respuestas que sin darse cuenta no tenían coherencia con el contexto del problema.

Por otra parte hubo algunos que sí lograron generar un modelo adecuado y asimismo una respuesta correcta. Si bien, no fue la mayoría, se ilustraba que el uso de barras permitía abordar el problema a pesar de ser una situación problemática que toma elementos, en el dME, de cursos de educación media. Los modelos que lograron representar de manera correcta la información entregada por el problema mostraban las tres condiciones necesarias para la resolución: el ahorro entre los pares de amigos y la relación que existía entre dos de ellos. Esta última parte era fundamental para resolver el problema, y fue ahí donde aquellos que no lograron la respuesta correcta, perdían la dirección a seguir.



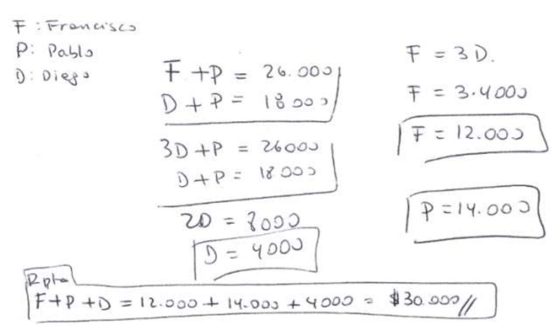
El quehacer de las profesoras

Se plantea un sistema de ecuaciones el cual es resuelto mediante el método de la reducción combinado con el método de sustitución. Las ecuaciones utilizadas en este sistema son la traducción directa de la información entregada en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.



“Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza para comprar 2 juegos de *play station* a \$26.000” se traduce en “F + P = 26.000”, de similar manera para la relación entre Pablo y Daniel. Para finalizar con una tercera ecuación que relaciona la forma en que la situación de Francisco puede ser expresada en función de Daniel, es decir, “F = 3D” o bien “F – 3D = 0”.

Cada variable utilizada representa a uno de los personajes del problema. Esto significa que al resolver dicho sistema se encontrarán directamente las soluciones requeridas para la solución. Es necesario, para esta forma de abordar el problema, que cada una de las partes del problema sea representada mediante alguno de los símbolos y signos del álgebra. Esto se evidencia cuando explícitamente muestran que es lo que representa cada variable.



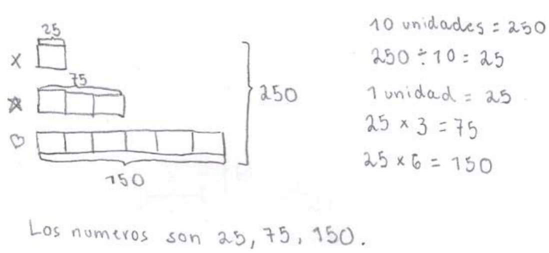
Problema 3: “¿Cuáles son los números?”

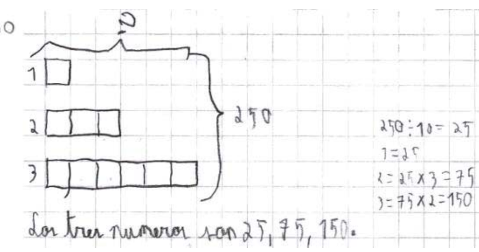
El quehacer de los estudiantes

La utilización del modelo de barras fue inmediata. Los estudiantes utilizaron de manera natural la representación en barras, esto fue porque al hablar de “tantas veces” o “es una parte de”, se les hacía necesario mostrarlo con partes iguales (unidades) en una barra. Este fue el problema que mayor cantidad de respuestas correctas obtuvo.

El segundo número se tomó como referente para la construcción del modelo. Es decir, el primer número se dibujó como la tercera parte del segundo número, emergiendo inmediatamente tres “unidades” en el segundo número. Luego, el tercer número, debía ser representado con el doble de tamaño de la barra del segundo número, esto permitió que surgieran seis “unidades” en el tercer número.

A partir de esto los estudiantes fueron capaces de notar que la cantidad total debía ser dividida en 10 partes, una manera intuitiva de abordar el problema.





El quehacer de las profesoras

Se plantearon dos formas de abordar el problema. Una de las profesoras planteó un sistema de ecuaciones, generando una congruencia entre cada una de las partes del problema con una de ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones. Nuevamente se plantea una traducción directa del enunciado al lenguaje algebraico, siendo este procedimiento uno de los más repetidos en la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Cada uno de los números es representado por una letra, siendo la variable *x* quien representa al “segundo número” parámetro utilizado para plantear las relaciones de igualdad en el sistema.

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}y \\ x+y+z &= 250 \\ y &= 2z \end{aligned}$$

La segunda profesora, logró establecer una ecuación lineal de una incógnita, en la que se resumía la información entregada en el enunciado en una sola igualdad algebraica. A partir de este procedimiento la solución encontrada será el “segundo número”, ya que al igual que la otra profesora, éste fue el parámetro utilizado para plantear las relaciones que existen entre las distintas variables.

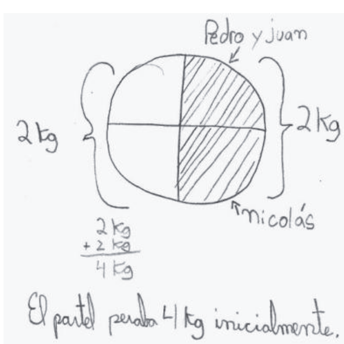
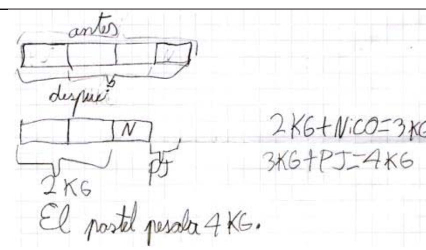
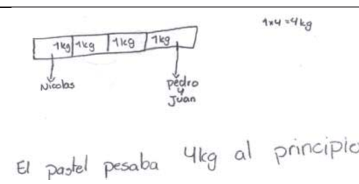
$$\frac{1}{3}x + x + 2x = 250$$

El problema enuncia que tanto el primer número como el tercer número se relacionan con el segundo número, de manera que las ecuaciones planteadas debían reflejar dicha relación.

Problema 4: “¿Cuánto pesaba el pastel?”

El quehacer de los estudiantes

Este problema, fue planteado último en la actividad, ya que su dificultad en cuanto a un planteamiento algebraico era superior al resto de los problemas. No así fue la utilización de un modelo gráfico que permitió encontrar la solución sin siquiera tener la necesidad de realizar cálculos escritos. Se menciona un modelo gráfico y no un modelo de barras, porque algunos de los estudiantes utilizaron un modelo circular para representar la situación. Esta situación se entiende como una forma de darle sentido al problema que se contextualizaba en la confección de un pastel, es decir, se plasma en este modelo la idea de un pastel redondo.

<table>
<tr><th>Modelo Gráfico Circular</th><th>Modelo de Barras</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

El quehacer de las profesoras

Una de las profesoras resolvió el problema utilizando ecuaciones y sistemas de ecuaciones. A partir de la información entregada en el enunciado generó dos ecuaciones, que en cierta medida apuntan a una lectura más intuitiva del problema, ya que si miramos de manera más acuciosa el desarrollo que ella realizó el modelo de barras prestaría una gran ayuda. Ambas ecuaciones, finalmente las utilizó para realizar una ecuación que resolvió de manera equivocada, ya que el traspaso de una situación a otra le hizo equivocar en su proceder. Siendo esta una de las pruebas de que el manejo algebraico muchas veces es engorroso y genera confusiones en su manipulación.

X: Peso inicial del Pastel.

$\boxed{\text{Rpta: } 6 u}$

$$P + J = \frac{1}{4}x$$

$$N = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}x\right).$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{4}x\right) + 2 = x$$

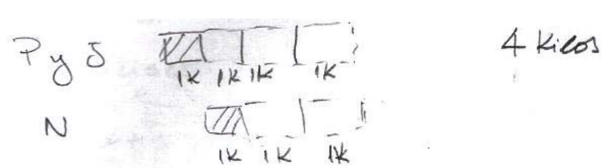
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + 2 = x \quad /\cdot 12$$

$$3x + 4x + x + 24 = 12x$$

$$8x - 12x = -24$$

$$-4x = -24 \rightarrow \boxed{x = 6}$$

Por otra parte, la segunda profesora se abocó a trabajar con la representación gráfica de las fracciones (así es como ella hizo mención a este procedimiento, a pesar de su similitud con el modelo de barras). Visualizó la información en un modelo gráfico, de manera que a partir de esta representación, sin hacer mayores cálculos logró dar con la respuesta. Aseguró que a pesar de serle muy fácil dar con la respuesta mediante este procedimiento, no le fue natural su utilización. En cierta medida, se obligó a trabajar el problema en esta perspectiva (gráfica), notando los beneficios que esta forma le trajo, a posteriori.



2.3 Confrontación: Evidencias de la Actividad

Problema 1

Para la realización de la actividad se les explicitó a los estudiantes que debían utilizar procedimientos con los que se sintieran cómodos y seguros. Por tanto, no se planteó una actividad en la que se debía usar cierto procedimiento por sobre otro para así validar cualquier resolución que surgiera en los estudiantes.

Mediante la *tabulación* de la información, los estudiantes utilizaron el método del *ensayo y error*, el cual permitió organizar las soluciones que lo estudiantes proponían *a priori*. Si bien, la tendencia fue utilizar tablas para ordenar la información, hubo estudiantes que utilizaron el modelo de barras. Esto permitió ordenar los datos de manera que le dieron un buen uso al modelo, no fue sólo para *hacer lo que decía la profesora en clases*. Se pudo observar que en cualquier caso existió una necesidad de ordenar y representar dicho orden mediante alguna forma de modelación: la *tabla* o el *modelo de barras.*

Por otra parte, las profesoras resolvieron este problema sin mayor dificultad, planteando el sistema de ecuaciones esperado. Identificaron a cada amiga con una variable de manera que la resolución de dicho sistema brindaría de manera directa ambas soluciones. Una de ellas, se plantea un desafío de dar una solución distinta a la que se esperaba: propuso, al percatarse que las edades debían cumplir que la diferencia entre ellas fuera 9 años, que las edades debían rondar los 30 años. Esto le permitió con un cálculo mental hallar los números que cumplieran con lo solicitado en el enunciado, a pesar de declarar lo mucho que le costó pensar en dichos términos la resolución del problema.

Problema 2

En la instrucción inicial a la actividad se señaló que se podía abordar el problema con el procedimiento que más les acomodara. Al observarse que a los niños les costaba entender el problema que el enunciado indicaba, se pensó que comenzarían a realizar cálculos sin un orden o lógica que los respaldara. A pesar de esto, los estudiantes comenzaron a elaborar modelos, buscando el más adecuado para las necesidades del problema. En varios de estos intentos se utilizaron dos modelos, uno para cada situación de ahorro. A raíz de los intentos erróneos, las respuestas fueron también incorrectas.

Si bien, no fue la mayoría, hubo estudiantes que ocuparon el modelo correctamente dando paso así a la solución correcta. Los modelos que se presentaron de manera correcta, fueron aquellos que demostraron comprender que Pablo era un factor en común para ambas situaciones, y por tanto, modelar como si fueran dos situaciones distintas no sería de gran ayuda.

Las profesoras, lo resolvieron utilizando el procedimiento que se esperaba, planteando el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. La resolución de éste fue a partir del método de reducción. Uno de los enseñados en el currículum actual en segundo año medio.

Problema 3

A pesar de que durante la actividad se creyó que los estudiantes tendrían cierta dificultad para abordar “un tercio de”, se obtuvo un gran número de respuestas correctas. Esto a partir de la lectura que los estudiantes dieron al problema. Para ellos la incógnita a encontrar no fue el segundo número sino que el primero: realizaron un modelo que mostraba que el segundo número era el triple de primero y el tercer número era seis veces el primero. Esto mostró como los niños tienden a simplificar para poder resolverlos, dejando de lado las complicaciones que este problema entregaba. Una vez encontrada la solución correspondiente al modelo planteado, muy fácilmente pudieron determinar el valor de los otros dos números.

Las profesoras enfrentaron el problema desde el álgebra, como se esperaba, presentando la incógnita del problema como el segundo número. A pesar de que ambas llegaron a las soluciones correctas, una de ellas se desafió a buscar otros métodos para resolver el problema, dando algunas propuestas que aludía a representaciones análogas al modelo de barras. Nuevamente la profesora, reconoció la dificultad que se le presenta al momento de pensar en otras formas de proceder.

Problema 4

Para los estudiantes fue natural utilizar un modelo para la resolución de este problema. Llama la atención como ellos pensaron el modelo de manera circular, posiblemente por entender un pastel asociado a un círculo. El resultado de la utilización del modelo (que ya no hablaremos sólo de barras porque se utilizó mayormente la idea del círculo) fue que no se realizaran cálculos explícitos por la simplicidad que se generaba en los cálculos si el modelo era bien planteado. Esto es, en la medida que el modelo fuera bien planteado, el único cálculo que se debía realizar era $2 : 2 = 1$, siendo de muy baja complejidad para el nivel.

Por otra parte, las profesoras procedieron de distinta manera. Una de ellas planteó un método algebraico, que era de esperar según la forma en que resolvió el resto de la actividad. En cambio, la segunda profesora siguió intentando, a pesar de la dificultad que esto le significaba, realizar un procedimiento alternativo, planteó un modelo de barras el cual le llamó la atención lo mucho que facilitaba la resolución.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

El currículum que ha sido planteado en la enseñanza de la Matemática en Chile se caracteriza por tener una visión de carácter conductista y tradicionalista de los procesos educativos. Esto ha conducido a insertar en la educación de nuestro país un sinnúmero de prácticas pedagógicas basadas en programas de estudio extranjeros, que han obtenido mejores resultados en pruebas estandarizadas a nivel internacional. La implementación no ha sido eficaz, ya que no han considerado los constructos y herramientas que los estudiantes y los docentes deban tener para generar buenas prácticas.

En este marco, el currículum utilizado en Singapur se presenta como una oportunidad para concretizar prácticas pedagógicas efectivas en la asignatura de Matemática. Esta implementación no ha conllevado los resultados esperados. Esto último por motivos de una falta de conjugación correcta entre aquello que se desea enseñar, cómo se desea enseñar y a quién se desea enseñar. Una buena aplicación de esta metodología, permitirá que el desarrollo del pensamiento abstracto y la conexión de éste con el lenguaje de las Matemáticas, se presente de manera natural en el proceso de aprendizaje.

Se nos hizo necesario realizar una indagación en esta problemática de índole curricular, a partir de un marco teórico que nos brindara los constructos necesarios para una buena reflexión y análisis, los cuales son entregados por la Socioepistemología. Esta teoría nos da herramientas para darle otra mirada a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ya que debe mostrar interés por la actividad humana. La resolución de problemas se torna una actividad esencial en la vida, de manera que la necesidad de darle solución a situaciones problemáticas es una de las habilidades centrales que la humanidad debiera adquirir. Por tanto, la Matemática basada en la resolución de problemas permitiría un acercamiento a una Matemática funcional. Las habilidades y aptitudes que permiten darle solución a problemas, son las que realmente acercan al ser humano a la disciplina Matemática.

En el marco de nuestra investigación hemos evidenciado diversos aspectos que la Metodología Singapur propone en su implementación. La primera de ellas, es la que hacemos referencia en lo anterior, la resolución es el centro de su estructura. El desarrollo de las habilidades adheridas a este proceso son las que permitirán involucrarse y conectar la disciplina Matemática con la vida real. Estas habilidades, son las que permiten que la Matemática se encuentre en vías de desligarse de su carácter utilitario para optar por alcanzar una Matemática Funcional. En la teoría Socioepistemológica, este último punto se torna esencial para el aporte al rediseño del dME, ya que el objeto deja de ser el centro de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática permitiendo una construcción del conocimiento matemático ligado a los procesos inherentes al humano.

Las teorías del aprendizaje que sustentan esta Metodología, apuntan a una matemática más intuitiva, es decir, ligada a los procesos humanos. Da paso a una construcción del saber matemático en lo colectivo (compañeros, profesores, etc.), permitiendo un tránsito natural entre lo concreto, lo pictórico y lo abstracto. Este tránsito es el que brindará líneas para pensar una nueva manera de enseñar y aprender Matemática en nuestro país, dando énfasis a los procesos acordes al desarrollo cognitivo del estudiante complementando su quehacer con el enfoque de la espirabilidad, la variabilidad, la comprensión instrumental y conceptual, conceptos tratados en el capítulo I.

El Método del Modelo de Barras se presenta no sólo como una estrategia de resolución de problemas, sino como una alternativa a la modelación de situaciones en Matemática. Se presenta como una aproximación al entendimiento de la disciplina desde una perspectiva no aritmética‒algebraica, es decir, se le da un estatus superior a procesos no convencionales para la justificación y argumentación en el actuar del estudiante ante una situación problemática, en relación a lo propuesto en los programas publicados por el gobierno. Despojar el proceso de aprendizaje de los símbolos y signos como el único camino "matemáticamente válido", permite que los estudiantes se acerquen a la Matemática para así comenzar a entenderla como una disciplina que aún está en construcción. El rol del Modelo de Barras, finalmente se entiende como un tránsito entre lo aritmético y lo algebraico, no en oposición a estos. Además se presenta como una oportunidad para desarraigar la idea de que un problema está "bueno o malo", de hecho busca potenciar la identificación de la información relevante de un problema, con el fin de completar el modelo cuando esté siendo elaborado. Esto se debe a la consideración de que una solución incorrecta puede ser el resultado de la mala interpretación de un sólo dato del problema.

El trabajo que esta metodología da a los contenidos, se basa en los fundamentos que se describen en el capítulo I, los cuales podemos evidenciar en el capítulo II al realizar un recorrido al estudio del Método del Modelo de Barras. El real potencial de este Método es alcanzado a partir del trabajo interrelacionado de prácticas adecuadas en el aula y los textos escolares. A diferencia de nuestro país, en donde los textos escolares encuentran cabida sólo como complemento al desarrollo de una clase. Mediante este Método se está permitiendo comprender el paso al álgebra desde la aritmética, o al menos se brinda la oportunidad de comprender dicho paso, el que ha generado problemas en la introducción al álgebra en el dME actual.

Los alcances del Modelo de Barras los pudimos evidenciar en la actividad que se propuso en el capítulo IV. Como ya lo hemos mencionado, el Modelo de Barras apela a procesos intuitivos y ligados a lo humano, como lo es representar en un esquema o diagrama una situación problemática para *visualizar* su solución. La utilización de la *unidad* permite realizar procesos que en el dME los encontramos sólo en la manipulación del lenguaje algebraico, es decir en cursos de enseñanza media. Los estudiantes de 5° año básico lograron darle solución a problemas que en nuestro currículum están inmersos en cursos de enseñanza media. Lo anterior lo podemos evidenciar, por ejemplo, en el problema 3 de la actividad en donde se utilizó una *variable auxiliar* para resolver el problema. En lo algebraico, esta variable auxiliar surge desde la *amplificación* de la expresión, y de la equivalencia de las soluciones. Esto lo podemos expresar en lo que sigue: $\frac{1}{3}x + x + 2x = 250$ la variable auxiliar $\frac{1}{3}x = u$ se obtiene que $u + 3u + 6u = 250$. Expresión que representa la ecuación que finalmente los estudiantes dieron solución a partir del uso del Modelo de Barras.

Es posible notar que el Método del Modelo de Barras se introduce con gran similitud a los procesos algebraicos más esenciales que la Matemática nos entrega, siendo esta la razón de comprender este Método como un buen camino para transitar hacia dicha rama de la Matemática. Por otra parte, observando las evidencias recogidas en la investigación, es conveniente reflexionar en torno a las similitudes entre la información entregada en un Modelo de Barras adecuado y un sistema de ecuaciones lineales bien planteado (¿serán lo mismo, y sólo difieren en representación?), dándole más fuerza a la idea que este método es un buen camino para acercarse al Álgebra.

En otras palabras, la metodología Singapur genera una alternativa a la enseñanza prematura del álgebra. La enseñanza basada en procedimientos simples, no da cabida a procesos del álgebra ya que complejizan y dificultan el aprendizaje. La metodología Singapur con el uso adecuado del Modelo de Barras viene a subsanar dicha situación, pues, mediante la resolución de problemas, el Método, reivindica la importancia de la modelación como un proceder válido en el camino a resolver problemas. Así nos enfrentamos a una buena alternativa a la habilidad de *modelar* que nos plantea las Bases Curriculares, puesto que se presenta como una nueva forma de hacer álgebra.

A modo de comentario final, es interesante resaltar la oportunidad que nos deja la metodología Singapur de provocar un cambio de paradigma en la educación Matemática. Preguntarnos por la oportunidad de basar la enseñanza y aprendizaje de la Matemática de cursos de educación media en esta metodología se hace necesario. De alguna manera se presenta un camino válido y que abre puertas a todos por igual, posibilitando la difícil tarea de dar paso a la equidad al menos en lo relativo a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Por otra parte, en el transcurso de la investigación hemos detectado que los errores que mayormente se cometen en la resolución de la actividad son aquellos relacionados a cálculos aritméticos o algebraicos en la resolución de los problemas, tanto por las profesoras y los estudiantes. De alguna manera el dME no está provocando los buenos resultados en dichos aspectos de la resolución de problemas, a pesar de ser los que más énfasis ilustra en la concepción que nos brinda de la enseñanza de la Matemática.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

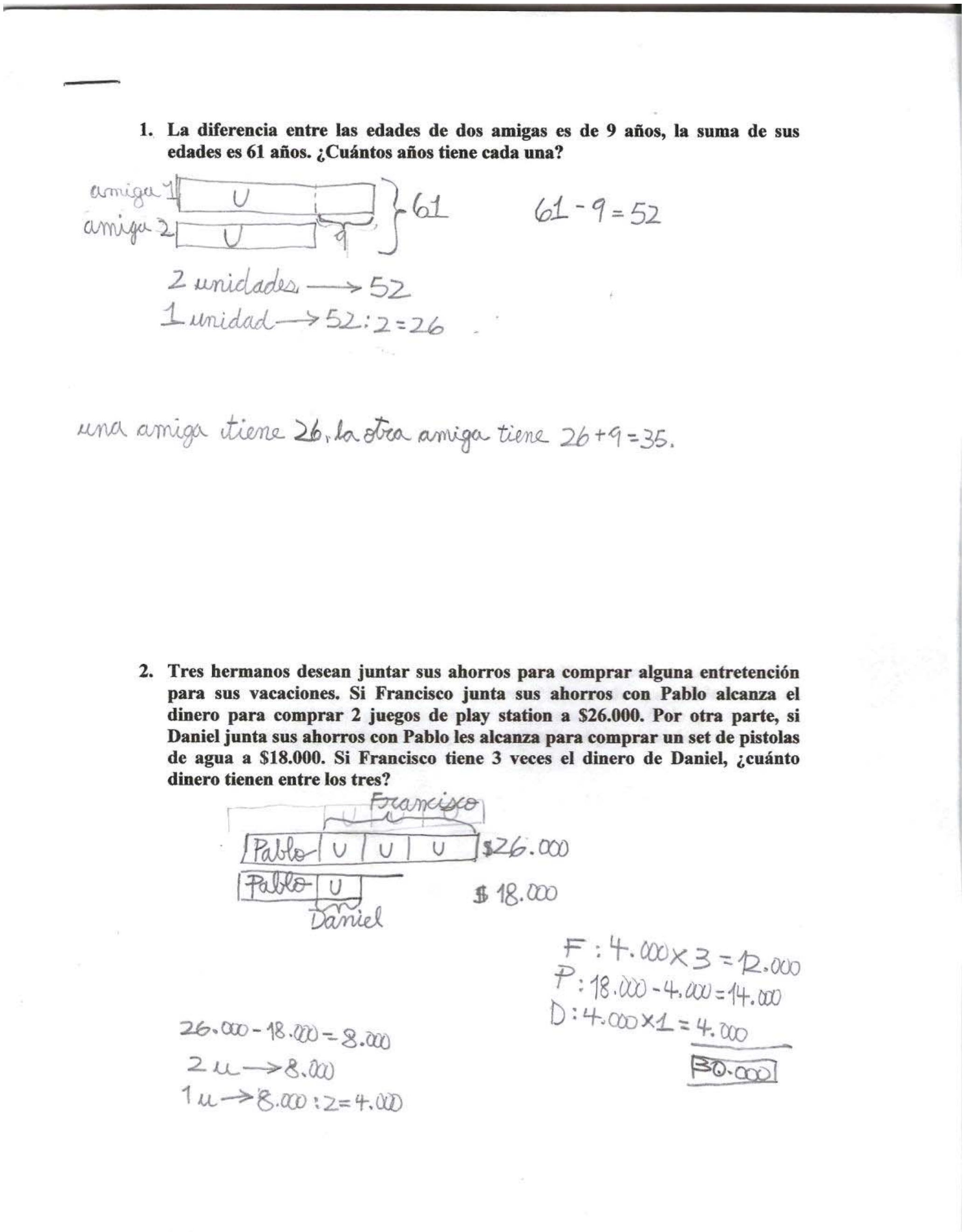
- Chaves Salas, A. L. (2001). *Implicaciones Educativas de la Teoría Sociocultural de Vigtosky*. p 59−65. Revista Educación 25(2). México.
- Ban Har, Y. (2010). *Bar Modeling: A Problem−Solving Tool*. Marshall Cavendish Education. Professional Development. Singapur.
- Ban Har, Y. (2011). *Matemáticas de Singapur para la enseñanza Profesional.* Marshall Cavendish Education. Professional Development. Singapur.
- Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marcode prácticas sociales*. Tesis de Doctorado. México: Cinvestav-IPN.
- Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau. Brasil.
- Cantoral, R. Farfán, R. (2003). *Matemática Educativa: una visión de su evolución (pp. 27 – 40).* RELIME. Vol. 6 número 001. México.
- Cantoral, R. Farfán, R. Lezama, J. Martínez, G. (2006). *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos (pp. 83 – 102).* RELIME. Número especial. México.
- Cordero, F. (2006). *La modelación y la graficación de la matemática escolar*. D.F. México: CINVESTAV – IPN, CINVESTAV.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (265-286). México: Díaz de Santos– Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.
- Cordero, F. Suarez L. (2010). *Modelación−graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico.* RELIME. Volumen 13 (4 – II). Diciembre 2010. México.

- Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya* (Tesis inédita de maestría). Cinvestav-IPN, México, d.f.
- Espinoza, L. (2009) *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav−IPN.
- Ma, Liping. (2010). *Conocimiento y Enseñanza de las Matemáticas Elementales*. Editado por Academia Chilena de Ciencias. Santiago de Chile.
- Mineduc (2012). *Bases curriculares 2012*. Gobierno de Chile.
- Mineduc, (2011).*Resultados TIMSS 2011: Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias.*Agencia calidad de la educación. División de Estudios. Gobierno de Chile.
- Ministry of Education, Singapore (2009). *Model Method for learning mathematics.*EPB Pan Pacific. Singapur.
- Munari, A. (1994). *Jean Piaget (1896 – 1980)*. Perspectivas: revista trimestral de educación comparada. Vol. 24 (1-2): p. 315 – 332. UNESCO. Paris.
- Rivas, P.(2005). *La Matemática como factor de deserción escolar y de exclusión social [Versión electrónica]*. La Revista Venezolana de Educación 9 (29), pp.175-170
- Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica.* Tesis para optar al grado de Maestra en Ciencias. Director de Tesis Ricardo Cantoral. Cinvestav-IPN. México.
- Textos Escolares *Pensar sin Límites 1, 2, 3, 4, 5*. Adaptación textos escolares *My Pals Are Here* a cargo Editorial Galileo. Grupo Felix Klein.

ANEXOS

1. Evidencia recogida del quehacer de los estudiantes

Grupo 1



1. La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

amiga 1 | U | |

amiga 2 | U | 9

$\} 61$

$61 - 9 = 52$

2 unidades → 52

1 unidad → 52 : 2 = 26

una amiga tiene 26, la otra amiga tiene 26 + 9 = 35.

2. Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de play station a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?

Francisco

| Pablo | U | U | U | $26.000

| Pablo | U | $ 18.000

Daniel

F : 4.000 x 3 = 12.000

P : 18.000 - 4.000 = 14.000

D : 4.000 x 1 = 4.000

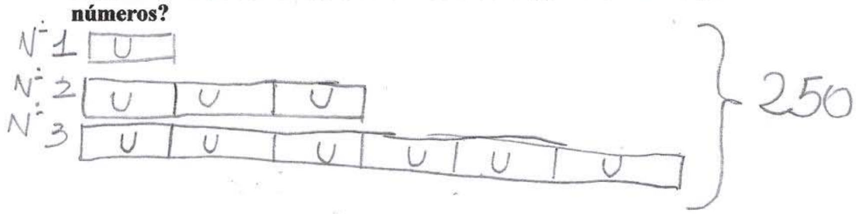
$\boxed{30.000}$

26.000 - 18.000 = 8.000

2 u → 8.000

1 u → 8.000 : 2 = 4.000

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**

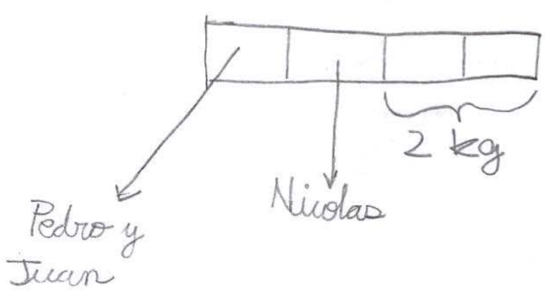


10 u ⟶ 250

1 u ⟶ 250 : 10 = 25

N° 1 : 25
N° 2 : 25 × 3 = 75
N° 3 : 25 × 6 = 150

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**



2 unidades ⟶ 2
1 unidad ⟶ 1
4 unidades ⟶ 4

el pastel pastel pesaba 4kg inicialmente.

Grupo 2

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

Posibles respuestas	Si o No
29 + 30 = 59	No diferencia:1
34 + 23 = 57	no diferencia:11
33 + 25 = 58	no diferencia:8
35 + 26 = 61	Si diferencia:9

2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**

$$\begin{array}{r} 18.000 \\ +\ 18.000 \\ \hline 36.000 \\ +\ 8.000\ F \\ \hline 44\ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 26\ 000 & P+F \\ -\ 18\ 000 & P+D \\ \hline 8\ 000 & F \end{array}$$

26.000

P

D

Francisco: $12.000

Daniel: $4.000

Pablo: $28.000

Entre los 3 tienen $44.000.

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer nú segundo y el tercer número es el doble del segundo nú números?**

1^{er} número: 25
2^{do} número: 75
3^{er} número: 150

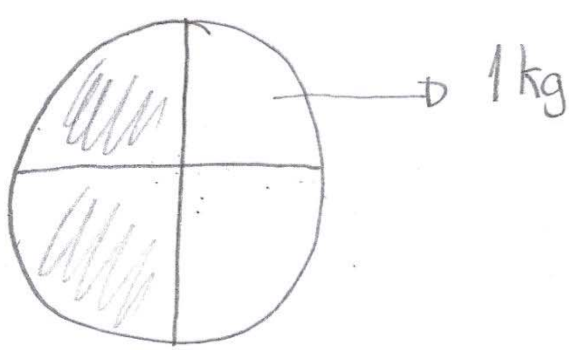
250

1 $\boxed{25}$
2 $\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}$
3 $\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}$

250

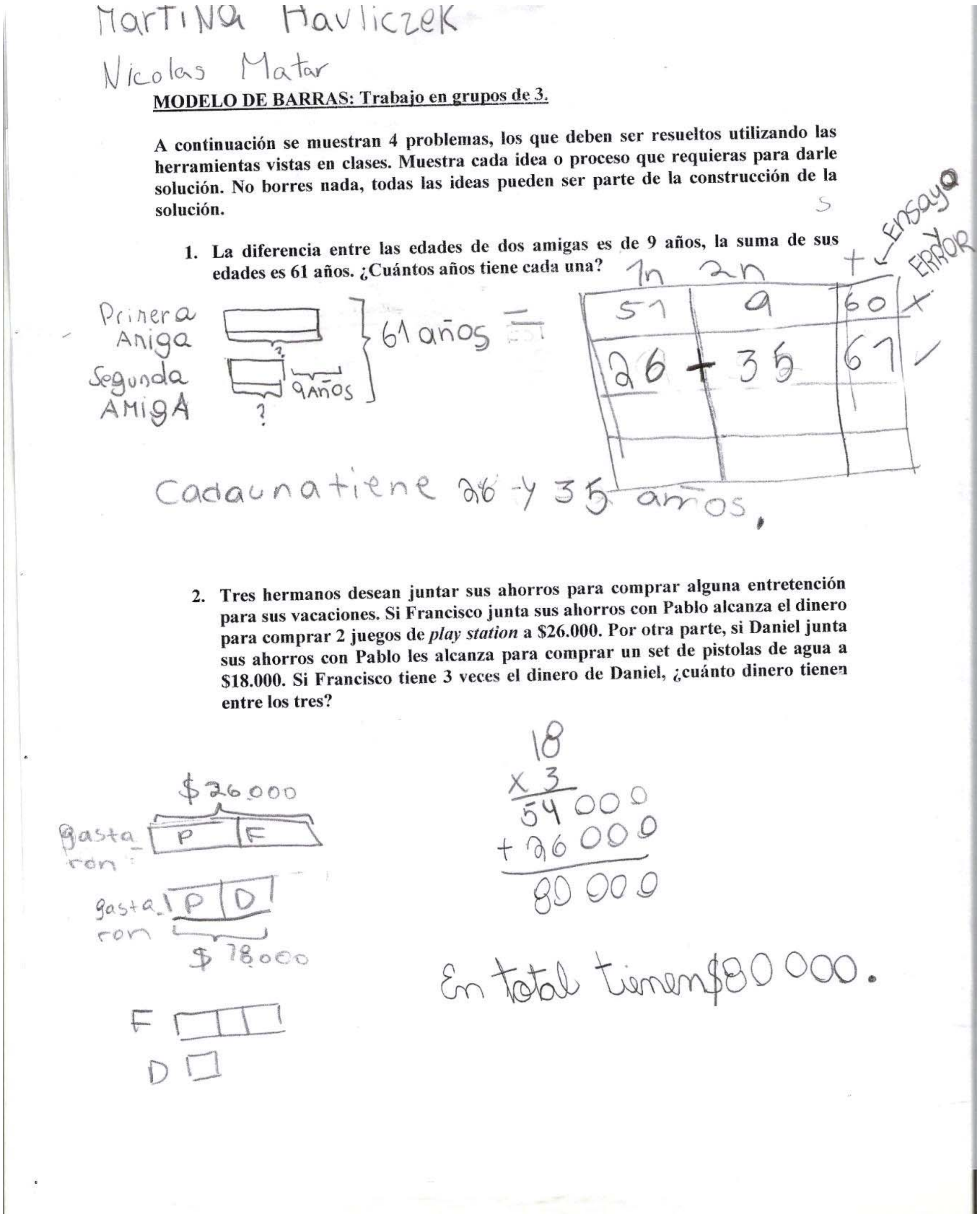
El 1^{er} número es 25 el 2^{do} 75 y el 3^{er} 150.

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**



Inicialmente habian 4 kg.

Grupo 3



Martina Havliczek

Nicolas Matar

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

1n	2n	
51	9	60 +
26 + 35		61 ✓

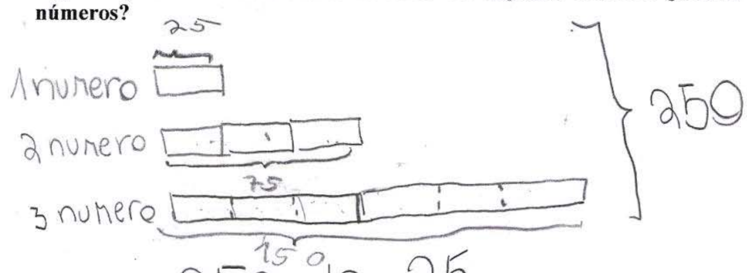
Cadauna tiene 26 y 35 años.

2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 3 \\ \hline 54\,000 \\ +\ 26\,000 \\ \hline 80\,000 \end{array}$$

En total tienen $80 000.

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**

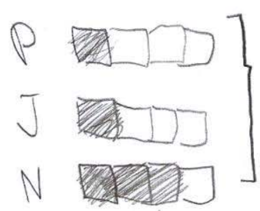


$250 \div 10 = 25$

$25 + 75 + 150 = 250$

el 1 numero es 25 el segundo es 75 y el tercero es 150

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**



$1 + 1 + 3 + 2 = 7$

Inicialmente pesaba 7 Kg..

Grupo 4

Antonia Schulze, [illegible]

Pupkin

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

A	+ B	answer
20	29	= 49 X
25	34	= 59 X
26	35	= 61 ✓

= 61

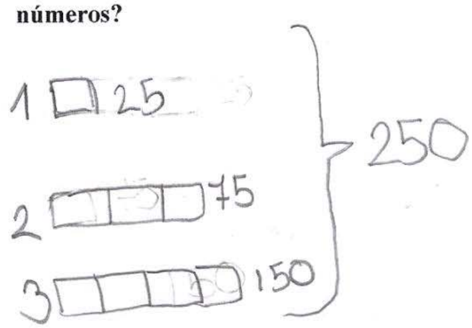
Una tiene 26 y la otra 35

2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 3 \\ \hline 54000 \\ +\ 26000 \\ \hline 80000 \end{array}$$

En total tiene 80 000

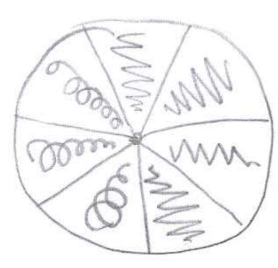
3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**



4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**

2 kg = 3 ÷ 2 = 1,5

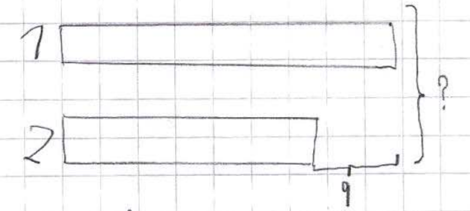
1,5 × 4 = 6 kg



Grupo 5

Ignacio Alarza, Sergio Flores

1)



$(61 - 9) \div 2 = 26$

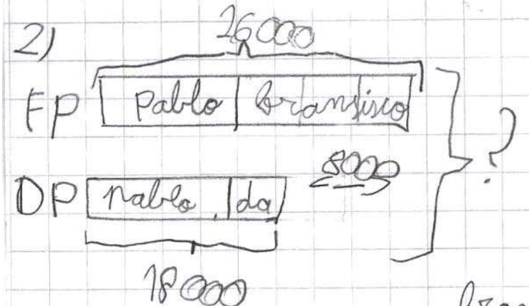
$52 \div 2 = 26$

1 amiga = 26

otro amigo = 26 + 9 = 35

La primera amiga tiene 35 años y la otra tiene 26 años.

2)



$$\begin{array}{r} 26\,000 \\ -\,18\,000 \\ \hline 8000 \end{array}$$

2 units = 8000

1 unit = 8000 ÷ 2 = 4000

daniel = 4000

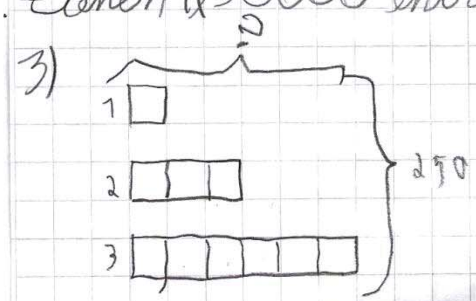
pablo = 18000 = 4000

francisco = 4000 × 3 = 12000 = 14000

los tres = 12000 + 14000 + 4000 = 30000

Tienen ₡30000 entre los tres

3)



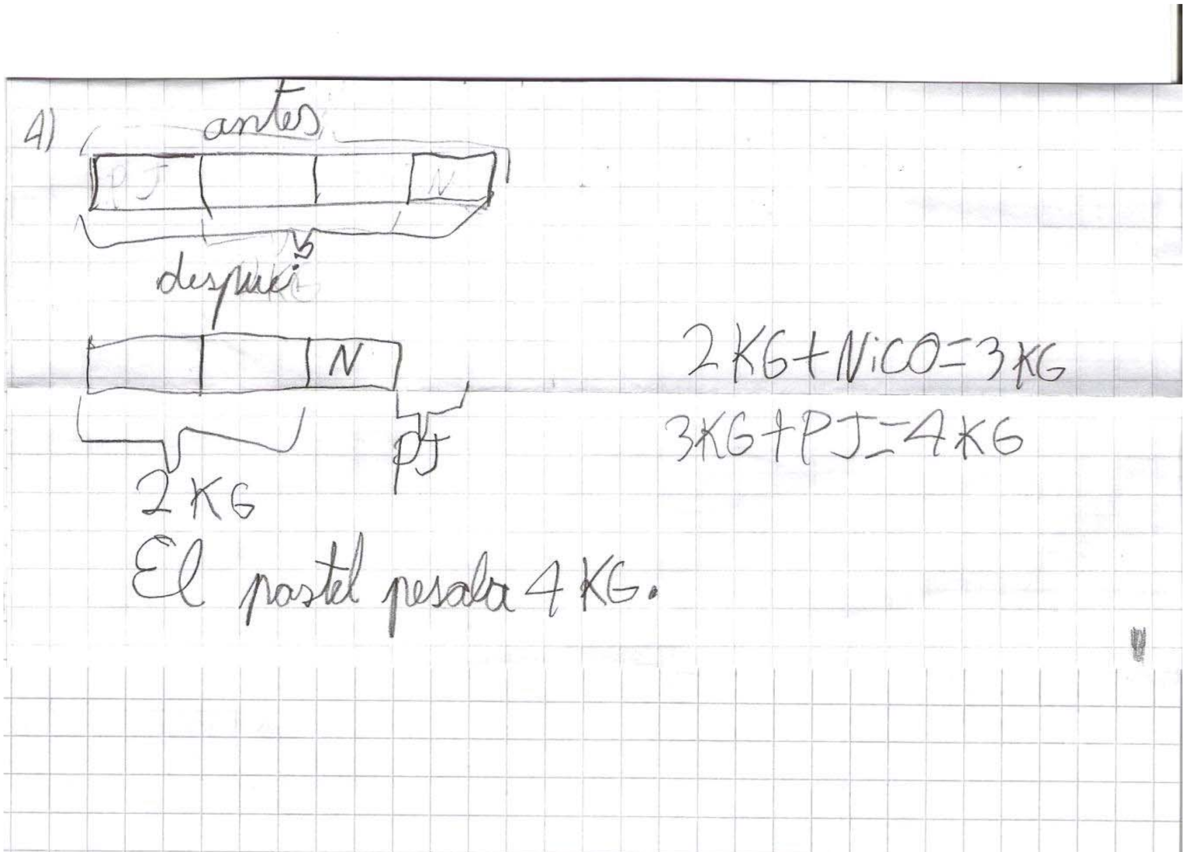
250 ÷ 10 = 25

1 = 25

2 = 25 × 3 = 75

3 = 75 × 2 = 150

· Los tres numeros son 25, 75, 150.


4)
antes
PJ
N
después
N
PJ
2 KG
2KG+NiCO=3KG
3KG+PJ=4KG
El pastel pesaba 4 KG.

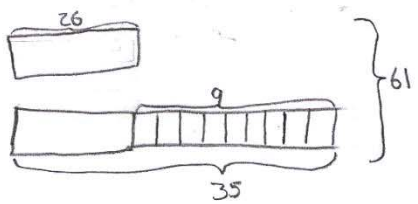
Grupo 6

5ºB

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**



$61 - 9 = 52$

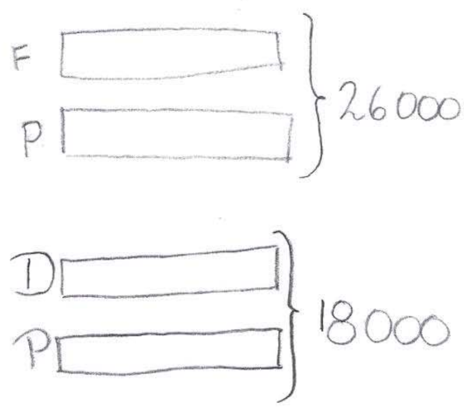
$52 \div 2 = 26$

$26 + 9 = 35$

$35 + 26 = 61$

Una tiene 26 y otra tiene 35.

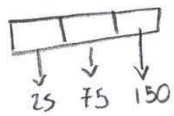
2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a \$26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a \$18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**



$$\begin{array}{r} 18\,000 \\ +\ 26\,000 \\ \hline 44\,000 \end{array}$$

tienen \$44 000

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**



$250 \div 10 = 25$

$25 \times 3 = 75$

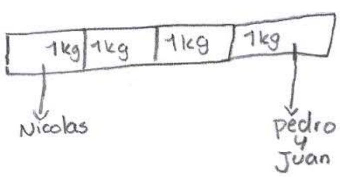
$75 \times 2 = 150$

$25 + 75 + 150 = 250$

Los 3 numeros son 25, 75 y 150

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**

$1 \times 4 = 4$ kg



El pastel pesaba 4kg al principio.

Grupo 7

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

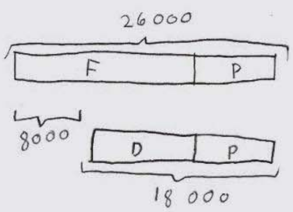
A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

1	2	+	Si o NO
20	37	57	NO
27	32	53	NO
25	36	61	Si

Una amiga tiene 25 y la otra 36.

2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**



$$\begin{array}{r} 26\,000 \\ -18\,000 \\ \hline 8\,000 \end{array}$$

8000 ÷ 2000 = 4000

2 unidades F = 8000
1 unidad F = 4000
3 unidades F = 12000

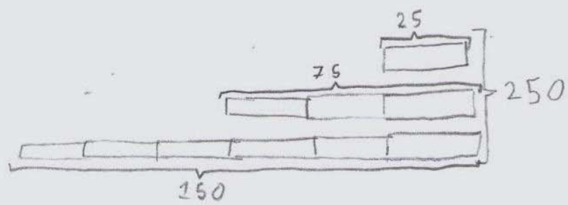
$$\begin{array}{r} 4000 \\ \times \quad 3 \\ \hline 12000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26\,000 \\ -12\,000 \\ \hline 14\,000 \end{array}$$

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**

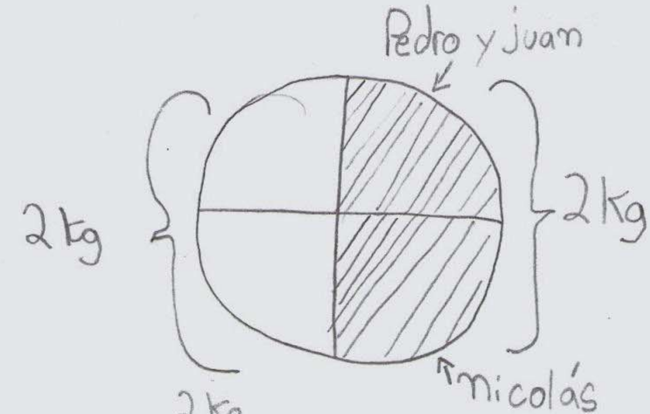
$250 \div 10 = 25$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ +\ 25 \\ \hline 250 \end{array}$$



El primer numero es 25 el segundo 75 y el tercero 150.

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**



$$\begin{array}{r} 2\text{ kg} \\ +\ 2\text{ kg} \\ \hline 4\text{ kg} \end{array}$$

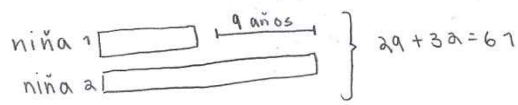
El pastel pesaba 4 kg inicialmente.

Grupo 8

<u>MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.</u>

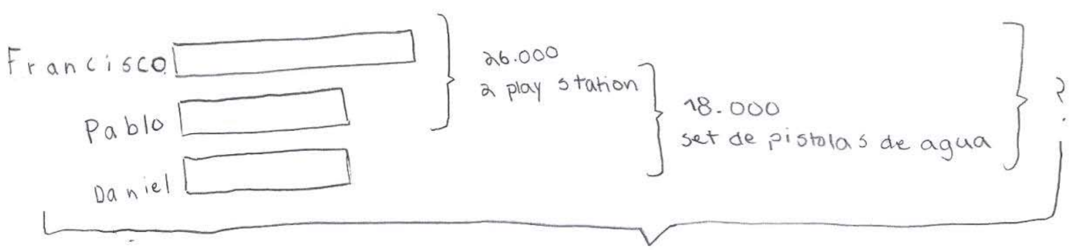
A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**



Una niña tiene 29 años y la otra tiene 32 años.

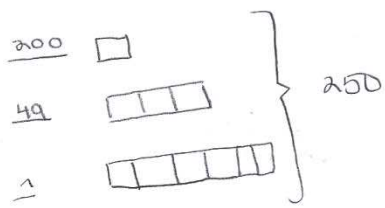
2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**



26.000 + 18.000 = 44 000

Ellos tendrian 44000 $ todos juntos

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**



200 + 49 + 1 = 250

resultado

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**

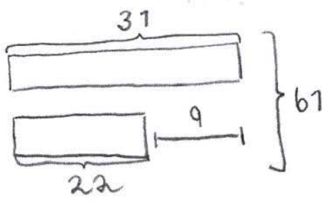
Grupo 9

Constanza Silva

MODELO DE BARRAS: Trabajo en grupos de 3.

A continuación se muestran 4 problemas, los que deben ser resueltos utilizando las herramientas vistas en clases. Muestra cada idea o proceso que requieras para darle solución. No borres nada, todas las ideas pueden ser parte de la construcción de la solución.

1. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**



$61 \div 2 = 30.5$

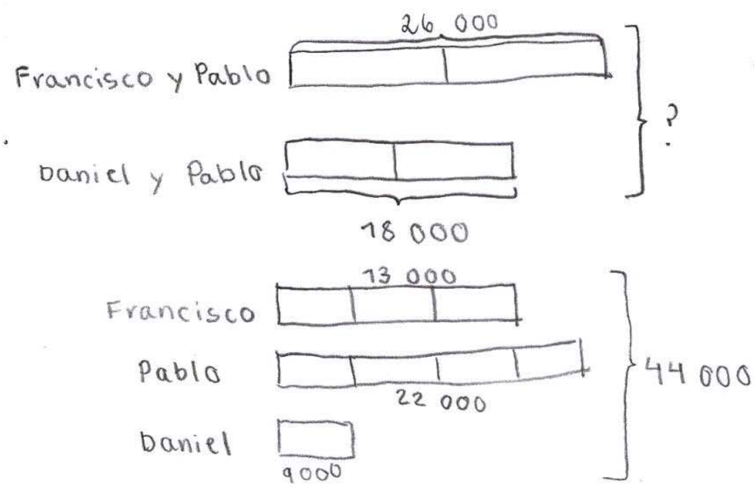
$30.5 \approx 31$

$31 - 9 = 22$

$22 + 9 = 31$

Una amiga tiene 31 años y la otra tiene 22 años.

2. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**



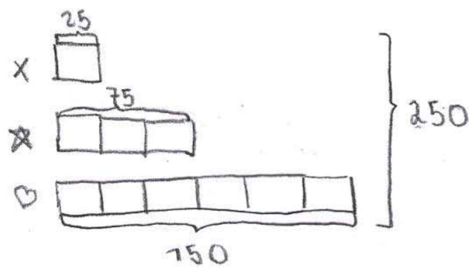
$26\ 000 \div 2 = 13\ 000$

$18\ 000 \div 2 = 9000$

$13\ 000 + 9000 = 22\ 000$

Entre los 3 tienen 44 000$.

3. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**



10 unidades = 250

250 ÷ 10 = 25

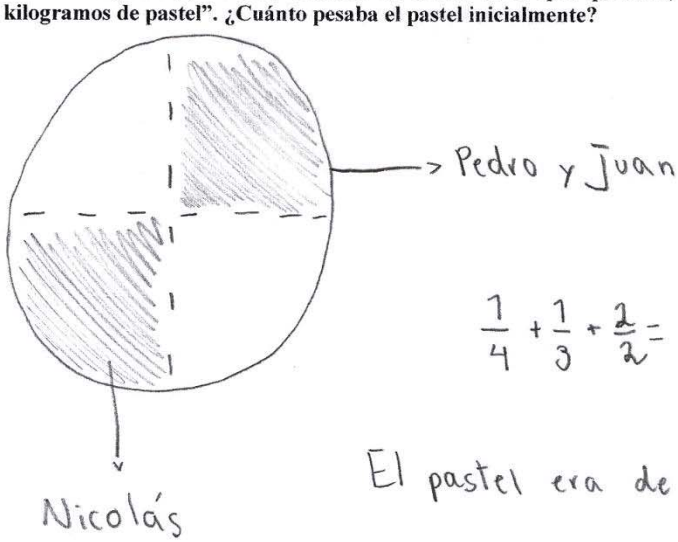
1 unidad = 25

25 × 3 = 75

25 × 6 = 150

Los numeros son 25, 75, 150.

4. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{2} = \frac{4}{9}$$

El pastel era de $\frac{4}{9}$.

2. *Evidencia recogida del quehacer de las profesoras*

Profesora 1

1. Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?

F : Francisco
P: Pablo
D: Diego

$F + P = 26.000$
$D + P = 18.000$

$3D + P = 26000$
$D + P = 18.000$

$2D = 8000$
$\boxed{D = 4000}$

$F = 3D.$
$F = 3 \cdot 4000$
$\boxed{F = 12.000}$

$\boxed{P = 14.000}$

Rpta
$\boxed{F + P + D = 12.000 + 14.000 + 4000 = \$30.000}$ //

2. Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?

~~1er Número~~
~~2° Número~~
~~3° Número~~

~~$A = \frac{1}{3}x \rightarrow A = \frac{1}{3} \cdot 75 = 25$~~
~~$B = x \rightarrow B = 75$~~
~~$C = 2x \rightarrow C = 2 \cdot 75 = 150.$~~

$\boxed{x : 2° \text{ Número}}$

$\frac{1}{3}x$: 1er

$2x$: 3er Número

$\frac{1}{3}x + x + 2x = 250$

$\frac{1}{3}x + 3x = 250 \quad / \cdot 3$

$x + 9x = 750$

$10x = 750$

$\boxed{x = 75}$

a) $\frac{1}{3} \cdot 75 = 25$

b) 75

c) $2 \cdot 75 = 150$

$\boxed{\text{Rpta: N°s: } 25, 75, 150}$ //

3. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**

X: Peso inicial del Pastel.

$P + J = \frac{1}{4}x$

$\boxed{\text{Rpta: } 6\text{ u}}$

$N = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}x\right).$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{4}x\right) + 2 = x$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x + 2 = x \quad /\cdot 12$

$3x + 4x + x + 24 = 12x$

$8x - 12x = -24$

$-4x = -24 \longrightarrow \boxed{x = 6}$

4. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

A y B amigos

Rpta

$A: x \longrightarrow A = 26$ años

$B: 9 + x \longrightarrow B = 35$ años

$x + 9 + x = 61$

$2x + 9 = 61$

$2x = 52$

$\boxed{x = 26}$

Profesora 2

1. **Tres hermanos desean juntar sus ahorros para comprar alguna entretención para sus vacaciones. Si Francisco junta sus ahorros con Pablo alcanza el dinero para comprar 2 juegos de *play station* a $26.000. Por otra parte, si Daniel junta sus ahorros con Pablo les alcanza para comprar un set de pistolas de agua a $18.000. Si Francisco tiene 3 veces el dinero de Daniel, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?**

Francisco x Pablo y Daniel z

$$x + y = 26\,000$$
$$y + z = 18.000$$
$$x - 3z = 0 \quad -1$$

$F(1) - F(3)$

$$y + 3z = 26.000$$
$$y + z = 18.000 \quad -$$
$$2z = 8\,000$$

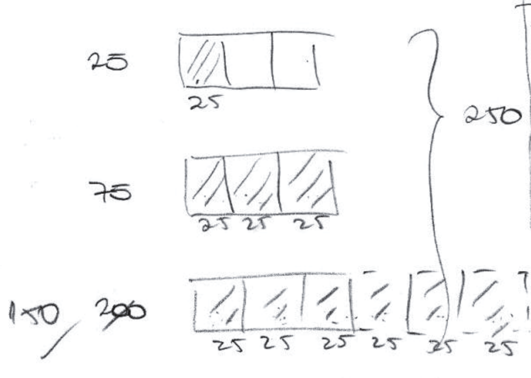
$z = 4.000$
$x = 12.000$
$y = 14.000$

$\$ 69.000$

2. **Si se suman tres números se obtiene 250. El primer número es un tercio del segundo y el tercer número es el doble del segundo número. ¿Cuáles son los números?**

$$x = \frac{1}{3} y$$
$$x + y + z = 250$$
$$y = 2z$$

$$\frac{1}{3}x + x + 2x = 250$$
$$x + 3x + 6x = 750$$
$$10x = 750$$
$$x = 75$$



Primeo /
Seg / / /
tercero / / / / / / /

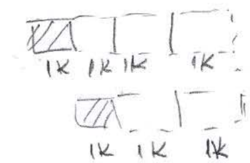
$10 / = 250$
$/ = 25$?

$10 \cdot \square = 250$?
25

3. **La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Les ha pedido que adivinen cuánto pesaba inicialmente: "Luego de que Pedro y Juan comieran un cuarto del pastel, y Nicolás comiera un tercio de lo que quedaba, sobraron 2 kilogramos de pastel". ¿Cuánto pesaba el pastel inicialmente?**

P y J

N



4 Kilos ? que pesado!!

4. **La diferencia entre las edades de dos amigas es de 9 años, la suma de sus edades es 61 años. ¿Cuántos años tiene cada una?**

Amiga 1 x

Amiga 2 y

$x-y=9$

$x+y=61$

cerca de 30 edades con un margen de 10 años

26 35

35 26

35 y 26 anos