Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

El conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la resolución de problemas de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada. Una Investigación-acción

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE

MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA

De: Jane Yáñez Fuentes

Profesores Guías: Sr. Raimundo Olfos -
Sra. Elisabeth Ramos - Sra. Patricia Vásquez

2016

Agradecimientos

Considero que uno debe ser agradecida de la vida y de las personas que nos rodean, siempre podemos aprender de ellos. Es por ello que quiero partir mi trabajo dando gracias a todas las personas que me prestaron ayuda durante este proceso.

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia, Miguel, Emilio y Laura. Gracias por motivarme siempre a seguir aprendiendo, apoyarme con su paciencia y cariño en los meses que estuve trabajando.

También quiero a agradecer a mis colegas que me apoyaron, me dieron de su tiempo para conversar, reflexionar y compartir su experiencia como docentes sobre el tema que estaba desarrollando. Gracias a Cristóbal y Juan, siempre tuvieron la disposición de ayudarme, de conversar sobre sus prácticas, tanto sus experiencias cómo sus dudas, y muchas veces sólo a escucharme. Gracias a aquéllos que me apoyaron en momentos difíciles, Catherine y María José. Y no puedo dejar de agradecer también a mi coordinador Gustavo, siempre me apoyo y ayudo en todo lo que necesitara.

Estoy agradecida también del programa de Magíster, por darme la oportunidad de terminar este proceso que inicié algunos años atrás. Gracias por el apoyo y orientaciones de los profesores Patricia, Raimundo y Diana. Muchas gracias profesora Elisabeth por sus retroalimentaciones, fueron justo en un momento de desmotivación y me ayudó a terminar el trabajo.

Gracias a todos.

Tabla de contenido

Introducción

La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo. Nelson Mandela.

Los hombres aprenden mientras enseñan. Séneca

Este trabajo se enmarca dentro de las temáticas de la enseñanza del concepto de derivada y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas junto con su relación con el análisis didáctico. Las preocupaciones por estas temáticas surgen luego de constatar en nuestra práctica profesional, que para nuestros estudiantes de Cálculo el aprendizaje del objeto derivada es un tema complejo, todos los años arroja malos resultados en sus evaluaciones y frustración en ellos, generando constantes preocupaciones y cuestionamientos en nosotros, los docentes. Además, existe un interés por buscar cómo podemos mejorar nuestra docencia.

El instituto donde me desarrollo como profesional corresponde a un instituto de educación superior técnico profesional[1]. La realidad social y académica de nuestros estudiantes difiere de otras instituciones de educación superior, ya que no es considerado su puntaje de PSU (Prueba de Selección Universitaria) para la admisión, tenemos alumnos que llevan un año o más fuera del sistema escolar, o son trabajadores que buscan especializarse en un área del conocimiento. Un 41,9% de los estudiantes de jornada diurna estudia y trabaja al mismo tiempo y esta realidad se da en un 79,4% de los estudiantes vespertinos (datos extraídos del perfil del alumno 2015[2]).

En todas las carreras profesionales que tienen la asignatura de Cálculo I se utiliza la misma planificación de asignatura, cronograma - en el cual se entrega un orden cronológico de las clases y las guías a trabajar en cada una de ellas-

[1] Duoc UC: Instituto profesional que hoy cuenta con aproximadamente 88 mil alumnos matriculados distribuidos en 16 sedes.
[2] El perfil del alumno se puede revisar en http://www.duoc.cl/nosotros

tanto las guías de clases como las evaluaciones que se aplican, son las mismas para todos las carreras, secciones y sedes.

En la evaluación del tema de derivada, que corresponde a la segunda prueba de la asignatura, aplicada en el primer semestre del año 2015 uno de los ítems en el cual se obtuvo un menor porcentaje de logro (con un 48% de logro de una población de 4582 alumnos) correspondía a un problema de optimización del área de un rectángulo con perímetro constante.

Considerando el antecedente anterior e integrando reflexiones con otros docentes de la asignatura de la misma sede en que imparto clases, del análisis de las guías y de la literatura revisada, rescatando de ésta que en la enseñanza de la derivada predomina la concepción algebraica por sobre su concepción gráfica-geométrica y el rol que juega el profesor en las actividades y tipos de tareas que presenta al alumno como oportunidades de aprendizaje. Mi estudio está guiado por el conocimiento especializado del profesor de matemática que puede poner en juego en las clases de cálculo, específicamente en las derivadas, la pregunta que intento responder es:

¿Cuál es el conocimiento que manifiesta el profesor al enseñar a sus estudiantes a resolver problema de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada?

Para poder indagar en este aspecto y poder encontrar alguna respuesta que me oriente frente a la pregunta, es que el objetivo del estudio es:

Identificar el conocimiento que manifiesta el profesor cuando enseña a sus estudiantes a resolver problema de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada.

El estudio es realizado por medio de una investigación-acción de la cual soy participante. En un comienzo trabajo con el apoyo de otro profesor de la asignatura que imparte cálculo. Juntos desarrollamos una planificación de una clase sobre optimización de funciones, pero enfocada principalmente a la relación de la derivada con la pendiente de la recta, con el fin, que los estudiantes establezcan la relación entre la derivada y los puntos críticos. Esta clase fue observada y grabada, para luego a partir de ella reformular una nueva clase. En esta reformulación utilizo la literatura revisada tanto en torno a la derivada, así como también sobre el modelo MTSK y el análisis didáctico. Esto me permitió tomar decisión para la reformulación de la clase, por ejemplo, mantener el problema planteado pero enfocado más a una situación didáctica de indagación por parte de los alumnos.

CAPITULO I. ANTECEDENTES

1.1 Antecedentes sobre la comprensión del concepto derivada.

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos fundamentales del cálculo evoca dificultades que atañen tanto al aprendizaje de los estudiantes que cursan esta asignatura como al docente que la imparte. Esto se evidencia en las numerosas investigaciones alrededor de esta área (ver, por ejemplo, Badillo, E. (2003). Contreras,A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2003), Dolores, C. (1998), Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2006 y 2008)). En varios de ellos citan a Artigue (1995) quien describe que la enseñanza de los principios del cálculo es una problemática, agrega además la existencia de un círculo vicioso que se da en la enseñanza universitaria debido a que aun cuando declaren otras ambiciones de enseñanza, se sigue enseñando de la forma tradicional, con predominio en la práctica algorítmica y algebraica. Además, las evaluaciones siguen estos mismos dominios, y como quieren obtener niveles aceptables de logro en la asignatura, entonces centran su evaluación en aquello en que a los estudiantes mejor les va, y a la vez ellos consideran esto como esencial ya que es lo que se evalúa. Esta autora da un ejemplo en el que describe que se puede enseñar a los estudiantes a realizar algunos cálculos de derivadas de forma mecánica, y el resolver algunos problemas estándar, sin embargo, se dan grandes dificultades cuando se quiere que alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamientos centrales del cálculo.

En su trabajo Neira (2013) menciona las dificultades que se da en la enseñanza del cálculo, describiendo lo que es común para esta asignatura: repitencias, deserción escolar, incomprensión de conceptos, inadecuados manejo de razonamientos, cursos desarrollados mecánicamente en las que prevalece el trabajo puramente algorítmico y algebraico, sin alcanzar la comprensión de los conceptos del cálculo.

En torno al concepto derivada, diferentes investigaciones evidencian la complejidad en la comprensión del concepto derivada por parte de los estudiantes y las dificultades que nacen en el aprendizaje de esta. En su trabajo Sánchez-Matamoro et al. (2008) lleva a cabo una revisión y organización de las aportaciones a este tema que han realizados investigadores en Matemática Educativa, permitiéndole estructurar esto en seis aspectos:

- Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada: la noción de razón de cambio.
- Relación entre razón de cambio y cociente incremental.
- Los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas.
- Lo local y lo global: la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$.
- El desarrollo del esquema de derivada.
- La aplicación del concepto de derivada: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

De sus análisis concluye que la compresión de la noción de derivada se puede ver a través de tres ámbitos: Relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; la integración de los sistemas de representación; y, por último, la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada.

En el estudio epistemológico-histórico realizado por Contreras (2002) organizó las concepciones y obstáculos asociados a la noción de derivada mediante cuatro aspectos: la concepción de la derivada como pendiente de la recta tangente, la concepción de la derivada como razón de cambio, la concepción de la derivada como función, la concepción numérica de la derivada. Además, agrega dos concepciones que obtuvo del análisis de textos y de respuestas dadas por estudiantes, estas son la concepción geométrico-gráfica, en el cual el estudiante utiliza las gráficas y la recta tangente en sus razonamientos y la concepción algebraica, ligada a la relación que la derivada de una función consiste en operaciones mecánicas de las reglas de derivación.

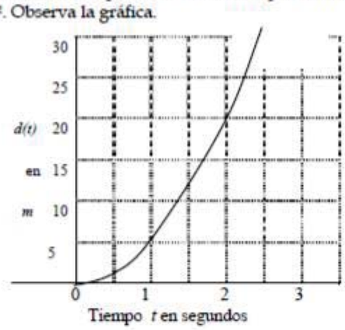
Ramírez (2009) en su ponencia en el 4° Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias llevado a cabo en Bogotá, enuncia que las complejidades de la función derivada se encuentran en: su lenguaje, en la simbología, las representaciones, los contextos de aplicación, las interpretaciones (sintácticas y semánticas) y en la relación enseñanza-aprendizaje. Señala que el estudio de la complejidad de la función derivada es a través de cuatro dimensiones: histórica, epistemológica, cognitiva y didáctica.

1.2 Antecedente sobre la enseñanza de la derivada

El desarrollo de este tema está basado en un estudio realizado por Dolores (1998) el cual entrega información sobre algunas ideas que se forman los estudiantes del Bachillerato acerca de la derivada.

Como se ha descrito en el aparatado anterior el aprendizaje de los conceptos involucrados en la asignatura de Cálculo es complejo, centrando la mirada en la derivada se encuentran distintas perspectivas para analizar y tratar de comprender mejor qué influye en la comprensión de este concepto. Compartiendo la preocupación frente a este tema Dolores (2008) contribuye a la literatura que existe acerca de la derivada mirando desde el estudiante. El objetivo de su investigación consistió en explorar qué ideas acerca del concepto de derivada desarrollan los estudiantes en sus cursos de Cálculo Diferencial. Para ello diseñó y aplico un cuestionario a 112 estudiantes de dos bachilleratos, cuyas edades fluctuaban entre los 16 y 18 años en el tiempo en que se encontraban terminando el curso. En el diseño consideraron algunas concepciones que los estudiantes podrían haberse formado acerca de la derivada, por ejemplo, uno de ellos es "*como la pendiente de la tangente en un punto de una curva*". Las preguntas del cuestionario fueron construidas de modo que los estudiantes tuvieran que utilizar las concepciones para poder responderlas. En el estudio declara, que esto es intencionado, ya que no le interesaba explorar si los estudiantes sabían de memoria alguna definición, sino que ver cómo usaban los conocimientos entregados en su curso de Cálculo diferencial. El cuestionario consistió en tres situaciones, de las cuales se desprenden ocho preguntas en total, estas se agruparon bajo dos miradas, en una explora la cuantificación simple de la variación y la velocidad media, y en la otra, explora las ideas acerca de la derivada como límite, como pendiente de tangentes y como velocidad instantánea (Figura 1).

3. La distancia que recorren los cuerpos en caída libre sobre la superficie terrestre está dada aproximadamente por la fórmula $d(t) = 5t^2$. Observa la gráfica.



A) ¿Cuánto cambia la *distancia* que recorre el cuerpo entre el 1o. y 2o. segundo?

a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m

B) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo entre el 1o. y 2o. segundo? a) 5 m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10.2 m/s

C) ¿Cuál es la *velocidad* del cuerpo exactamente en el 1er. segundo? a) 5 m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s

FIGURA 1. SITUACIÓN TRES EN EL ESTUDIO DE DOLORES (2008).

En las dos preguntas que exploraban la interpretación geométrica de la deriva, 66 estudiantes cuándo le preguntaron por el valor de la derivada en un punto (en este caso era en x=2) contestaron como correcta el valor de f(2), y solamente 19 estudiantes contestaron correctamente la pregunta. Lo mismo ocurrió en la segunda pregunta en donde solo 23 estudiantes respondieron correctamente y 57 estudiantes contestaron como correcta el valor de f(4) en vez de f'(4). Tal como dice la investigadora, en las respuestas que más frecuencia tuvieron como correctas subyace la idea de que $f'(x_0) = f(x_0)$ dado un x_0., esto reafirma la observación realizada Ortón en sus estudios (Citado en Sánchez-Matamoros et al. (2006)), y de los que contestaron correctamente a ambas preguntas solamente fueron tres estudiantes.

De los análisis de las respuestas que obtuvo en el cuestionario, la autora presenta las siguientes conclusiones:

- Se muestra una escasa presencia de las ideas relativas a la variación (sólo un 24% contestó correctamente las preguntas referidas a esto)
- Detectó numerosas deficiencias acerca de las concepciones de la derivada como límite, menciona que un número de estudiantes tiene la idea que en el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero se anula, o que la expresión $\Delta x \to 0$ significa que $\Delta x = 0$.

- No pudieron reconocer que, mediante la posición límite de la secante (tangente), pueden obtener la derivada de una función a partir del esquema que utilizan comúnmente los profesores de cálculo.
- Casi la mitad de los estudiantes contestaron que la derivada se mide en dos puntos y no en uno solo.
- También mostraron inconsistencia sobre la interpretación geométrica de la derivada, las dos preguntas relacionadas con esto solamente fueron contestadas correctamente tres estudiantes.
- Indica que en los cursos sobre la derivada pareciera que no relaciona esta con los fenómenos de variación, en el cuestionario solamente un 8% logró asociar correctamente la velocidad instantánea con la derivada y un 74,1% confundió el valor de la función en el punto solicitado con el valor de la velocidad instantánea.

CAPITULO II. Marco de referencia.

2.1 El conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK.

El modelo de Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher Specialised Knowledge, MTSK) es un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de tipo descriptivo desarrollado en la Universidad Huelva. El modelo analiza el conocimiento del profesor desde un punto de vista integral, considerando tanto el dominio matemático como el dominio didáctico específico y destaca las diferentes facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático.

El MTSK posee la característica de ser dual, ya que es una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y además es una herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013).

El MTSK está formado por dos dominios que son el Conocimiento Matemático MK (Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido PCK (Pedagogical Content Knowledge) y cada uno de ellos se desglosa en tres subdominios. El Conocimiento Matemático analiza el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica, y el análisis del conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje se realiza a través del dominio Conocimiento Didáctico del Contenido. Además, el MTSK considera las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, a estas concepciones se les denomina creencias y se encuentran en el centro del modelo, delimitada con líneas punteadas para reflejar que ellas permean a cada uno de los subdominios de éste, y que es pertinente el estudio de las relaciones entre dichas creencias y los conocimientos por formar parte, respectivamente, de la estructura afectiva y cognitiva del profesor.

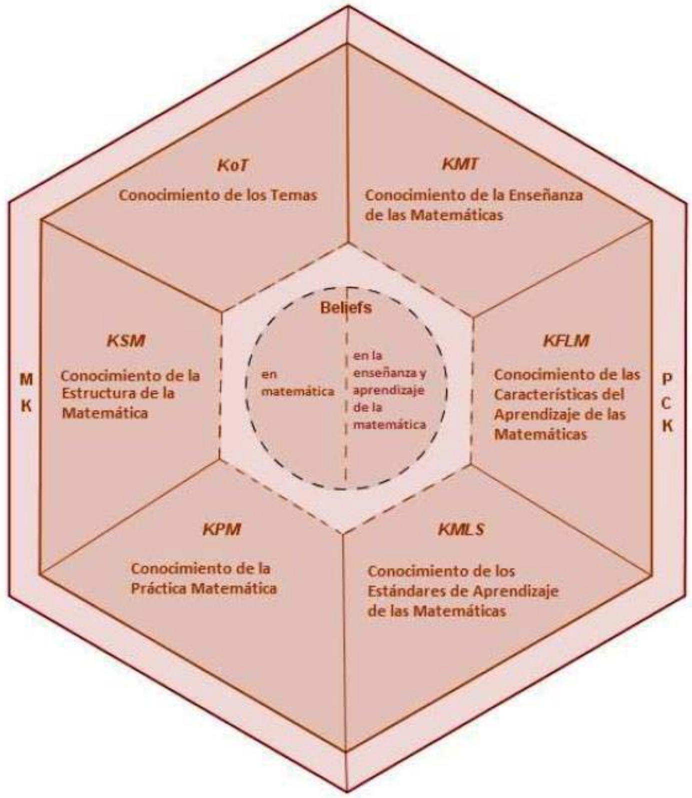


FIGURA 2. MODELO DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA MTSK Y LOS SUBDOMINIOS. AGUILAR, CARMONA, CARRILLO ET AL. (2014)

2.1.1 Conocimiento Matemático (MK).

Un elemento fundamental en el conocimiento del profesor es el conocimiento de la propia disciplina que enseña. Por lo cual, resulta necesario saber qué y cómo conoce/debe conocer matemáticas un profesor de matemáticas. Los subdominios propuestos en este dominio están basados en las diferentes formas de conocer matemática disciplinar, escolar y didáctica. Refleja un conocimiento local de la propia matemática (conocimiento profundo de los temas matemáticos), global (conocimiento de la conectividad entre diferentes conceptos), y de la forma de articular la propia disciplina (formas habituales de proceder en matemáticas). Los subdominios son: *Conocimiento de los temas*

Matemáticos (KoT), Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), Conocimiento de la práctica matemática (KPM).

2.1.1.1 Conocimiento de los temas Matemáticos (KoT).

Es el conocimiento de los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno y permite la consideración de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos.

Los autores del modelo aclaran que cuando se refieren a temas son los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas, como referencia esta la propuesta que realiza el NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

Son cinco las categorías que se usa para caracterizar el contenido del KoT, estos son: Fenomenología, Propiedades y sus Fundamentos, Registros de Representación, Definiciones y procedimientos.

- *Fenomenología:* Esta categoría se puede ver desde dos puntos. Uno, es el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, que son vistos como fenómenos y que pueden ser utilizados para generar conocimiento matemático. El otro punto de vista, es el conocimiento que tiene el profesor acerca de usos y aplicaciones de un tema.
- *Propiedades y sus Fundamentos:* Conocimientos de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un tema o procedimiento en particular.
- *Registros de Representaciones:* Es el conocimiento que tiene el profesor de las distintas formas en que se puede representar el tema trabajado (numérica, gráfica, verbal, analítica, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones.

- *Definiciones:* Es el conocimiento del conjunto de propiedades que hace definible a un objeto, así como también, las diferentes alternativas que utilice el profesor para definir los objetos matemáticos.
- *Procedimientos*: Es el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos; los fundamentos de los algoritmos y las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión.

2.1.1.2 Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM).

Este subdominio integra tanto aquellas relaciones conceptos más avanzados, como más elementales, que permiten al profesor trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa, permitiendo al profesor comprender las matemáticas escolares desde un punto de vista superior.

El KSM es el conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos.

Se reconoce dos aspectos no excluyentes entre sí que generan conexiones de interés para el KSM:

- La *temporalidad*, no como visión curricular, sino como visión secuenciadora que genera conexiones de complejización y simplificación.
- La *delimitación de objetos matemáticos* que genera conexiones intraconceptuales e interconceptuales. Las primeras pertenecen al KoT, el KSM sólo considera las conexiones interconceptuales.

El modelo propone cuatro categorías para analizar el conocimiento que corresponde al profesor de matemáticas sobre estas conexiones, estas son: Conexiones de Complejización, Conexiones de Simplificación, Conexiones de Contenidos Transversales, Conexiones Auxiliares.

- *Conexiones de Complejización:* Son las relaciones que se dan entre los contenidos enseñados con contenidos posteriores.
- *Conexiones de Simplificación:* Es la relación que existe entre los contenidos enseñados con los contenidos previos.
- *Conexiones de Contenidos Transversales:* No son conexiones de contenidos más simples o más complejos entre sí, sino que hay una

cualidad común en estos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común. *Por ejemplo, En el límite, la derivada, la continuidad puntual y global, la integral, subyacen procesos infinitos que les hacen relacionarse* (Flores, Carrillo et al. 2013)

- *Conexiones Auxiliares:* Son las relaciones que se establecen cuando un concepto utiliza otro concepto en sus procedimientos. Por ejemplo, el uso de ecuaciones como auxiliar para determinar las raíces (o determinar la no existencia de estas) de una función es una conexión interconceptual entre ecuaciones y funciones. (Flores, Carrillo et al. 2013)

2.1.1.3 Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

Este subdominio corresponde a aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que sin duda un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, las formas de validación y demostración en matemática, el significado de definición, las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones matemáticas, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática. También es considerado en este subdominio el conocimiento heurístico en la resolución de problemas.

2.1.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PKC).

Es un conocimiento particular del profesor, propio de su labor de enseñanza. Tiene que ver con la importancia de que el profesor conozca el contenido matemático desde el punto de vista de un contenido a enseñar (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT), desde el punto de vista de un contenido a aprender (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM) y desde una visión general de los estándares de aprendizaje que se pretenden alcanzar (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS).

2.1.2.1 Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM).

Se consideran las formas de aprendizaje, enfocado al conocimiento del profesor acerca de las formas de aprendizaje asociadas a un contenido matemático. El foco está en el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del estudiante con el contenido matemático, no es mirar las características del estudiante en sí mismo.

Existen cuatro categorías que permiten analizar este tipo de conocimiento, estas son: *Conocimiento sobre Formas de Aprendizaje, Conocimiento de Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje, Conocimiento de las Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático y Conocimiento de Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas.*

- *Conocimiento sobre Formas de Aprendizaje*: Es el conocimiento de estructuras o teorías institucionales o personales sobre el aprendizaje del estudiante tanto de la matemática en general, como de contenidos particulares. Por ejemplo, un profesor puede conocer de manera formal o informal, La teoría de espacio geométrico (ETG) sobre el desarrollo del pensamiento geométrico y usarlo como procesos de enseñanza de contenidos geométricos.
- Conocimiento de Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje: Es el conocimiento del profesor acerca de los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos. Por ejemplo, el error que siempre se da cuando se pide a los alumnos desarrollar el cuadrado del binomio $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, o cuando alumnos están sumando dos números enteros negativos y usan la regla de los signos dándole un resultado positivo.
- *Conocimiento de las Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático*: Es el conocimiento del profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los atípicos, conocimiento sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido.
- *Conocimiento de Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas.* Es el conocimiento del profesor acerca de las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas.

2.1.2.2 Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT).

Es el conocimiento acerca de los recursos, materiales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. En este subdominio los conocimientos están intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos en sí, el contenido matemático condiciona la enseñanza (se excluye, por ejemplo, estrategias de enseñanza que pueden resultar potentes desde la visión de la pedagogía en general, como el trabajo en equipo).

Para el análisis de este subdominio existen tres categorías, las cuales son: *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, Recursos Materiales y Virtuales* y la última categoría es *Actividades, Tareas, Ejemplos, Ayudas.*

- *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza*: Es el conocimiento que puede tener el profesor acerca de teorías de enseñanza específicas de la Educación Matemática, conocimientos sobre la potencialidad que pueden tener ciertas actividades, estrategias o técnicas didácticas asociadas a un contenido matemático, así como los alcances que éstas tienen, conocimiento de las analogías, ejemplos típicos, metáforas, explicaciones, etcétera, que los profesores consideren potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento particular de enseñanza.
- *Recursos Materiales y Virtuales*: Se refiere a los conocimientos del profesor sobre los recursos materiales y virtuales como elementos para la enseñanza de las matemáticas (libros de texto, regletas, pizarras normales y electrónicas, Tangrams, software como Cabri o Geogebra, etcétera) y los beneficios o dificultades asociadas al uso de éstos como apoyo para la enseñanza de un determinado contenido matemático.
- *Actividades, Tareas, Ejemplos, Ayudas*. Es el conocimiento sobre elementos que el profesor utilizara de manera intencionada en la enseñanza de un tema, por ejemplo, en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los estudiantes, cuáles ejemplos son más potentes de acuerdo al momento e intencionalidad de la clase.

2.1.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Es el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales para saber lo que prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado. Es el conocimiento que posee el profesor de matemáticas acerca de aquello que el estudiante debe o puede alcanzar en un curso escolar determinado (también considerando los conocimientos previos como los conocimientos posteriores).

Para este subdominio existen tres categorías, que son: *Contenidos Matemáticos que se requieren Enseñar, Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado y Secuenciación de diversos Temas.*

- *Contenidos Matemáticos que se requieren Enseñar*: Es el conocimiento que tiene el profesor acerca de qué contenidos se requiere enseñar en el grado que imparte clase. Este conocimiento puede ser adquirido mediante la consulta de un documento institucional que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar. Por ejemplo, en nuestro caso el Marco Curricular señala los Contenidos Mínimos Obligatorios, y en los Programas de estudio están definidos los aprendizajes esperados para cada nivel escolar.
- *Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental esperado:* Es para un contenido en un determinado momento escolar, por ejemplo, saber hasta qué número contabiliza un niño de kínder.
- *Secuenciación de diversos Temas*: Esto puede mirarse de manera transversal, conocer los conocimientos previos o capacidades, al curso que está enseñando, o los conocimientos posteriores al contenido (cursos posteriores). También puede mirarse dentro del mismo curso al secuenciar los contenidos que se enseñaran en el año.

2.2 El Análisis Didáctico

El análisis didáctico es una herramienta que se desarrolla en el grupo de investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

(Rojas, 2014). Se origina del análisis curricular realizado por Rico (1997) que considera cuatro dimensiones en torno de las cuales se puede organizar los niveles de reflexión curricular, estas son: Dimensión cultural/conceptual, Dimensión cognitiva o de desarrollo, la Dimensión ética, Dimensión social.

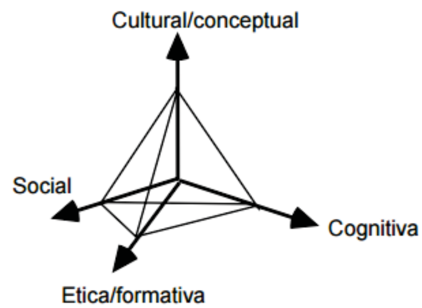


FIGURA 3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS CUATRO DIMENSIONES DEL CURRÍCULO RICO (1998)

Partiendo de la caracterización del currículo en términos de dimensiones y niveles propuesta por Rico (1992, 1997a), Gómez (2007) tomando como referente la caracterización del currículo en términos de dimensiones y niveles propuesta por Rico (1997) conceptualizó el procedimiento general del análisis didáctico para el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas sobre temas matemáticos específicos. El análisis didáctico introduce un nuevo nivel de reflexión curricular, centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de temas de la matemática escolar y que, en correspondencia con las cuatro dimensiones del currículo, propone cuatro componentes: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*. (Lupiáñez, 2013).

Lupiáñez (2013) señala que el análisis didáctico tiene dos particularidades, que son:

- Es específico para cada tema de matemática
- Se realiza para una planificación de un tiempo determinado de enseñanza sobre ese tema

Además, señala que los tres primeros análisis que conforman en análisis didáctico corresponde a la etapa de diseño conformando el análisis *a priori* de la enseñanza, y el último análisis se centra en la puesta en práctica, implementación y posterior evaluación de los resultados obtenidos correspondiendo al análisis *a posteriori*.

Dimensiones del análisis didáctico

Análisis a priori	Análisis de contenido Análisis cognitivo Análisis de instrucción
Análisis a posteriori	Análisis de actuación

FIGURA 4. DIMENSIONES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

- *El análisis de contenido*. Este análisis está en la dimensión cultural y conceptual del currículo, se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones involucradas en el tema de matemáticas que el profesor considera relevantes a efectos de su planificación. Se organiza en torno a tres organizadores del currículo que son *los sistemas de representación*, *fenomenología* y la *estructura conceptual*. Otro organizador de carácter transversal es la Historia de las Matemáticas, que permite determinar el origen de algunas nociones, comparar diferentes sistemas de representaciones empleados o localizar problemas clásicos Furinghetti, Citado en Lupiáñez (2013).

- *análisis cognitivo*. Este componente del análisis didáctico se corresponde con la dimensión cognitiva del currículo. Aquí se estudia los objetivos y capacidades a desarrollar a través del aprendizaje de los estudiantes, así como también incluye investigar sobre las dificultades y errores inherente al concepto matemático ya que estos producen limitaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje, además se debe establecer el diseño de tareas como oportunidades de aprendizaje para el estudiante.

- *análisis de instrucción.* Este componente corresponde al diseño de la unidad de la unidad didáctica considerando los análisis previos de contenido y cognitivo para su adaptación a las condiciones, por ejemplo, de un aula, de un centro educativo o en la planificación que debe realizar un profesor. Conlleva, el diseño y secuenciación de las tareas, análisis de los materiales y recursos que empleará el profesor en la ejecución de sus clases, junto con ello la organización y gestión del trabajo en el aula. Como proceso de reflexión sobre este proceso, también se considera en esta parte del análisis didáctico, la evaluación realizada en tres niveles, primero la evaluación diagnóstica que muestra los aprendizajes adquiridos por los estudiantes previamente y los cuales marcan lineamientos para el inicio de la enseñanza de los nuevos contenidos, en segunda instancia la evaluación que permite interpretar los rendimientos y resultados alcanzados en el proceso de instrucción, y finalmente, la evaluación y síntesis de todo el proceso, para tomar decisiones en post de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *análisis de actuación*. Al finalizar la implementación de la unidad didáctica este análisis consiste en valorar en qué medida se logró lo planificado, identificar en qué aspectos se obtuvieron logros y qué aspecto no se logró o tuvo falencias. Esta información permite rediseñar la unidad didáctica para alcanzar las expectativas de aprendizaje que se pretende, así como también, da lineamientos para la toma de decisiones para la planificación del tema posterior.

El análisis didáctico posee una estructura cíclica que es representada gráficamente por Lupiáñez (2013) (Figura 5)

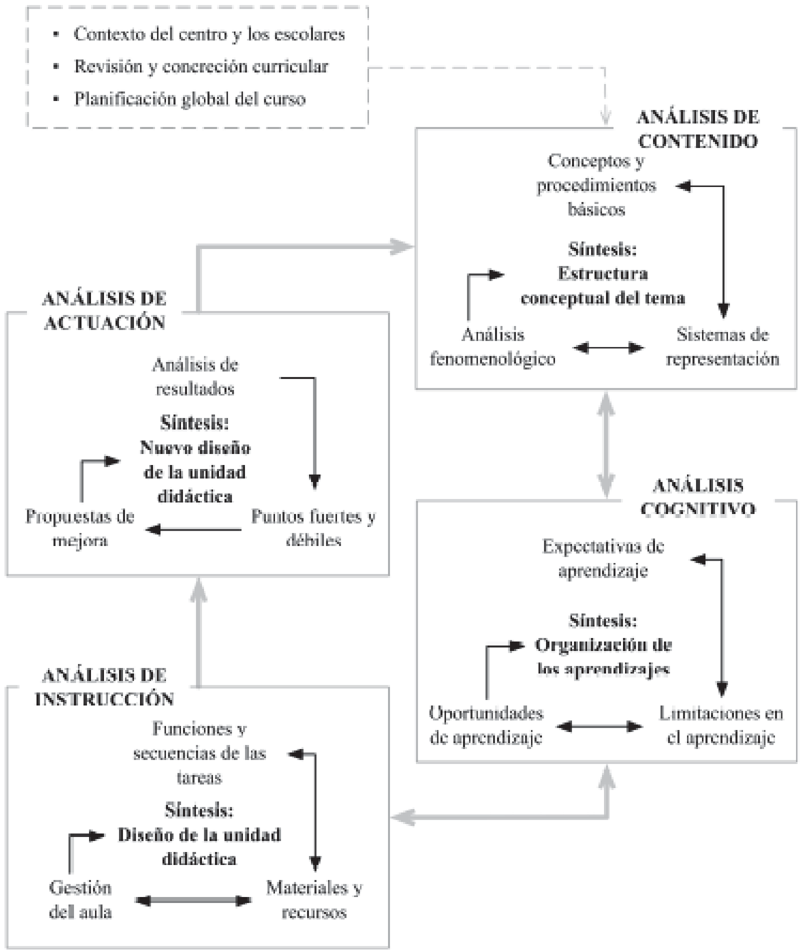


FIGURA 5. CICLO DE ANÁLISIS DIDÁCTICO LUPIÁÑEZ (2013)

2.3 Relación entre análisis didáctico y el modelo MTSK.

En este apartado tomare como base el trabajo realizado por Rojas (2014) y Rojas, Flores y Carrillo (2012) en los cuales se estableció relaciones entre tres de los análisis del análisis didáctico con los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza.

Rojas (2014) muestra los elementos del análisis didáctico que se relacionan con los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. (Figura 6)

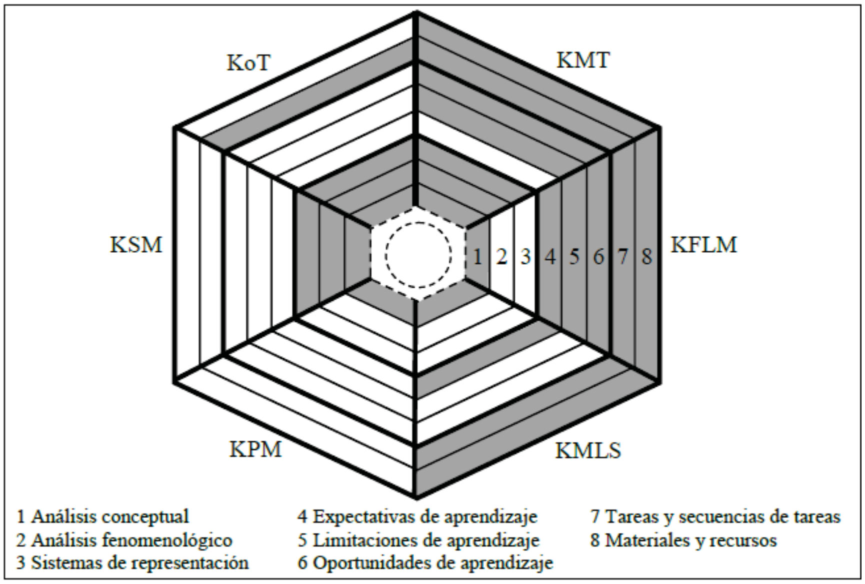


FIGURA 6. RELACIÓN ENTRE ANÁLISIS DIDÁCTICO CON LOS SUBDOMINIOS DEL MODELO MTSK (ROJAS, 2014).

La autora señala, que en análisis de contenido se profundiza en los aspectos fenomenológicos, en los sistemas de representación del concepto, todo esto conforma elementos que influyen cómo el profesor realiza su enseñanza, y esto puede evidenciar en el conocimiento que el profesor aplica en la planificación, diseño y enseñanza de un contenido.

CAPITULO III. Metodología

3.1 La Investigación-Acción.

Elliot es el principal representante de la investigación acción desde un enfoque interpretativo, quien afirma que*:*

> *el propósito de la investigación – acción consiste en profundizarla comprensión del profesor (diagnóstico) de su problema. Por tanto, adopta una postura exploratoria frente a cualesquiera definiciones iniciales de su propia situación que el profesor pueda mantener...La investigación acción interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema, por ejemplo, profesores y alumnos, profesores y director. (Elliot, 1993).*

También destacan los aportes de Kemmis, quien describe la investigación-acción como una forma de indagación autoreflexiva realizada por quienes participan en las situaciones sociales que mejora: prácticas sociales o educativas; comprensión sobre sí misma; y las instituciones en que estas prácticas se realizan, Kemmis (1984).

Características

La investigación – acción se presenta como una metodología de investigación orientada hacia el cambio educativo y se caracteriza entre otras cuestiones por ser un proceso, como señalan Kemmis y MacTaggart (1988); (i) Se construye desde y para la práctica, (ii) pretende mejorar la práctica a través de su trasformación, al mismo tiempo que procura comprenderla, (iii) demanda la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas, (iv) exige una actuación grupal por la que los sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación, (v) implica la realización de análisis crítico de las situaciones y (vi) se configura como una espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión.

Entre los puntos clave de la investigación – acción, Kemmis y Mctaggart (1988) destacan la mejora de la educación mediante su cambio, y aprender a partir de las consecuencias de los cambios y la planificación, acción, reflexión nos permite dar una justificación razonada de nuestra labor educativa ante otras persona porque podemos mostrar de qué modo las pruebas que hemos obtenido y la reflexión crítica que hemos llevado a cabo nos han ayudado a crear una argumentación desarrollada, comprobada y examinada críticamente a favor de lo que hacemos.

Tipos de investigación-acción

Grundy (1982, 1991) señala tres modelos básicos de investigación - acción: el técnico, el práctico y el crítico o emancipador.

MODALIDADES	TIPO DE CONOCIMIENTO QUE GENERAN	OBJETIVOS	FORMAS DE ACCIÓN	NIVEL DE PARTICIPACIÓN
I/A TÉCNICA	Técnico /explicativo	Mejorar las acciones y la eficacia del sistema	Sobre la acción	Cooptación Designación
I/A PRÁCTICA	Práctico	Comprender la realidad	Para la acción	Cooperación
I/A CRÍTICA	Emancipativo	Participar en la trasformación social	Por la acción	Implicación

TABLA Nº1: MODELOS DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN DESCRITA EN BAUSELAS. (1992)

3.2 Desarrollo de la investigación-acción en el estudio

En este trabajo, las fases de la investigación-acción fueron llevadas a cabo de la siguiente manera:

Fase 1 (Planificación):	Ambos profesores participantes planificamos una clase que llamaremos Clase 1) correspondiente a problemas de optimización de funciones, se realizó un análisis didáctico previo. El objetivo de la clase era establecer la relación de los valores críticos de la función y su función derivada para ser aplicada en

	la resolución de problemas de optimización.
Fase 2 (Acción):	Uno de los profesores llevo a cabo la clase en el cual participaron tres estudiantes de cálculo. Grabamos la clase.
Fase 3 (Observación y reflexión):	Se analiza la clase 1 y a partir del modelo MTSK y el análisis didáctico (denominado análisis a priori) complementado con la revisión de literatura.
Fase 1.1 (Planificación):	Se planifica la clase N° 2 basándome en la literatura del MTSK y análisis didáctico. Se reformula la clase tomando decisiones a nivel instruccional, modificación de la situación, y modificación de los applets. En la sección 4.3 está la actividad de la clase modificada.
Fase 2.2 (Acción):	Se llevó a cabo la clase 2 junto nuevamente con su grabación.
Fase 3.3 (Observación y reflexión):	Se transcribe la clase 2 y se analiza considerando la relación entre el análisis didáctico y el MTSK.

Hasta este proceso se da conocer este estudio, que es parte de una investigación-acción en proceso.

3.3 Tipo de Investigación

Este trabajo es parte de una investigación-acción crítica en proceso, llevada a cabo en el instituto donde me desempeño, buscamos comprender el conocimiento matemático para la enseñanza que manifiestan los profesores en la enseñanza del concepto de derivada, enfocándonos en los problemas de optimización de funciones. Es por ello que tomamos el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas relacionado con el análisis didáctico, ya que participo también en la planificación de las clases observadas. El método es cualitativo vinculado al paradigma interpretativo.

3.4 Sujetos y contexto

El diseño de investigación es a través de la observación no participante en la clase del primer profesor que participa en la investigación-acción, y una segunda instancia corresponde a una observación participativa de la ejecución de la clase y diseño de esta. Las observaciones de aula fueron realizadas a través de grabación en vídeo, en la mayor parte del tiempo en ambas clases la grabación fue tomada desde la parte trasera de la sala, y en el momento de interacción entre alumnos, o entre alumnos y profesor, la toma fue en primer plano. En la primera clase participaron tres alumnos de la asignatura de Cálculo I de la carrera de Ingeniería en Prevención de Riesgo y en la segunda clase participaron veinte y dos alumnos de la misma asignatura y carrera. La asignatura de Cálculo I en esta carrera se encuentra en el cuarto semestre lectivo. Los alumnos que participaron en la primera clase no participaron en la segunda clase, pero tal como describimos en un comienzo ésta asignatura corresponde al programa transversal de matemática y está organizada de modo que todos los cursos de cálculo I, de todas las carreras, desarrollan las mismas guías en la misma semana y las evaluaciones son las mismas para todos los cursos. La grabación se transcribe para los análisis necesarios. Como es una investigación-acción que está en proceso, sólo se presenta el análisis de la clase realizada en la fase 2.

3.5 Instrumento de recogida de datos

Los profesores que iniciamos esta investigación-acción examinamos nuestras clases a través de la observación y grabación de dos clases. En la primera clase fui observadora no participativa, y en la segunda clase fui observadora participativa.

Las clases fueron grabadas en video en una cámara digital. Esta fue ubicada en la parte posterior de la sala de clase, y cuando los alumnos interactuaban entre ellos o con el profesor se acercaba la cámara a ellos con el fin de ver el conocimiento que ponía en juego el profesor al responder las dudas o inquietudes de los alumnos.

En la primera clase se elaboró un plan de clases en el cual describimos ciertas acciones del profesor frente a determinados momentos que estaban planificados en el desarrollo de la clase o acciones frente a posibles preguntas o errores de los alumnos. En la segunda clase se realizó la planificación de la clase basada en el problema y las preguntas a desarrollar.

Cada clase se transcribe textualmente (ANEXO A). En este estudio se da a conocer la transcripción de la segunda clase.

3.6 Análisis de datos

El análisis del dato tiene la intención de mostrar la relación entre las categorías del análisis didáctico y los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK, relación basada en la propuesta realizada por Rojas (2014). Se presenta episodios de la grabación en donde es posible establecer dicha relación. En la transcripción se tiene la siguiente nomenclatura para referirnos a los sujetos involucrados: P: Profesor, A: alumno, AS: Alumnos (intervención conjunta de dos o más alumnos). El análisis de la clase usando el modelo MTSK fue revisado por una profesora investigadora que trabaja con este modelo.

CAPITULO IV. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA DERIVADA

En este capítulo de desarrollan los cinco sub-análisis del análisis didáctico

4.1 Análisis conceptual y de contenido

a) Saber Sabio. Concepto de derivada.

El concepto de derivada es de los que más han influido en el desarrollo de la matemática. Nuestro objetivo es el estudio de la derivabilidad, así como el cálculo de la derivada cuando ello proceda, de las funciones $f : A \to \mathbb{R}^M$, donde $A \subset \mathbb{R}^N$, siendo M y N dos naturales prefijados.

Esencialmente el estudio de la derivabilidad de un campo vectorial f en un punto a responde al problema de si f es aproximable por una función afín (continua) en el punto a, es decir, por una función g de la forma $g(x) = c + T(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, donde $c \in \mathbb{R}^M$ y $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$. La parte lineal de la mejor aproximación afín de la función f en el punto a es la derivada de ésta en a y las propiedades de esta mejor aproximación (equivalentemente de la derivada) repercuten de manera natural sobre las propiedades locales de la función en el punto a. Así, el cálculo diferencial es una potente herramienta para estudiar el comportamiento local de funciones. El cálculo diferencial para aplicaciones entre espacios normados fue iniciado por Fréchet en 1.925, si bien la paternidad ha de ser compartida con muchos otros matemáticos como Stolz, Young, etc.

Empezaremos recordando la noción de derivada para funciones reales de variable real, así como su interpretación geométrica.

Definición 3.8 (derivada de funciones reales de variable real). Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es derivable en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

en cuyo caso el valor de tal límite se nota $f'(a)$ y se denomina la *derivada* de la función f en el punto a.

La derivabilidad de una función tiene la siguiente magnífica caracterización en términos de existencia de una mejor aproximación afín, cuya interpretación es clara.

Proposición 3.9 (Caracterización de la derivabilidad). *Sean $A \subset \mathbb{R}, a \in A \cap A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Equivalen:*

i) f es derivable en a.

ii) Existe una función afín (continua) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que $g(a) = f(a)$ y que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0.$$

En ese supuesto la función g es única y viene dada por

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La Definición 3.8 y la Proposición 3.9 pueden extenderse literalmente a funciones vectoriales de una variable real.

Definición 3.10 (derivada elemental para funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^M$). Sean M un natural, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f: A \to \mathbb{R}^M$ una función. Se dice que f es *elementalmente derivable* en el punto a si existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

en cuyo caso el valor de tal límite (un vector de $\mathbb{R}^M$) se denomina la *derivada elemental* de f en el punto a y se nota $f'(a)$. Se dice que f es derivable elementalmente en un subconjunto $B \subset A$ si es derivable elementalmente en cada punto de B.

Sea $A_1 \subset A$ el conjunto de puntos donde f es derivable elementalmente. La aplicación $x \to f'(x)$ de A_1 en $\mathbb{R}^M$ se denomina la *aplicación derivada elemental* de f y se nota f'.

Proposición 3.11 (Caracterización de la derivabilidad elemental). *Sean M un natural, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$ y $f = (f_1, \ldots, f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ una función. Equivalen:*

i) f es derivable elementalmente en a.

ii) $f_1, \ldots, f_M$ son derivables en a.

iii) Existe una función afín (continua) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ verificando que $g(a) = f(a)$ y que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0.$$

En ese supuesto, $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_M'(a))$, la función g es única y viene dada por

$$g(x) = f(a) + (x - a) f'(a), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

$i) \Leftrightarrow ii)$ Basta observar que para $x \in A \setminus \{a\}$ es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a}, \ldots, \frac{f_M(x) - f_M(a)}{x - a} \right)$$

y aplicar entonces la Proposición 2.62 sobre la reducción del límite a campos escalares.

$ii) \Leftrightarrow iii)$ Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.9 y 2.62. ■

El intento de llevar la Definición 3.10 al caso en que el dominio de la aplicación sea un subconjunto de un espacio de dimensión mayor que 1 tropieza con la imposibilidad de dar sentido al límite que en ella aparece. Sin embargo, la caracterización de la derivabilidad de una función en un punto por la existencia de una mejor aproximación afín a la función en el punto (afirmación *iii*) de la proposición anterior) es perfectamente trasladable al ámbito deseado si se cae en la cuenta de que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0 \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{|x - a|} = 0.$$

La anterior propiedad tiene sentido para funciones definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ y con valores en $\mathbb{R}^M$, sin más que sustituir el valor absoluto por una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^N$ y la función afín de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^M$ por una función afín de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$.

Parece pues que en el ambiente siguiente: $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A \cap A'$, y $f : A \to \mathbb{R}^M$, la función f debe considerarse derivable en a cuando exista una función afín (continua) $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ verificando que $g(a) = f(a)$ y que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

Como quiera que una tal aplicación afín g ha de tener la forma

$$g(x) = f(a) + T(x - a), \ \forall x \in \mathbb{R}^N$$

para conveniente aplicación lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, la condición anterior es equivalente a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Es importante observar que la condición anterior es topológica, es decir involucra solamente las topologías de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ y no las concretas normas que se tomen. En efecto, fijada una norma en $\mathbb{R}^N$, al ser la noción de límite topológica concluimos que la condición es independiente de la norma elegida en $\mathbb{R}^M$. Ahora si $|||\cdot|||$ es otra norma en $\mathbb{R}^N$, entonces se tiene para $x \in A \backslash \{a\}$ que

$$\frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = \frac{|||x - a|||}{\|x - a\|} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{|||x - a|||}$$

y como por la equivalencia de $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$, existen $0 < k, K$ tales que $k \leq \dfrac{|||x - a|||}{\|x - a\|} \leq K$, se sigue, teniendo en cuenta de nuevo que la noción de límite es topológica, que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0 \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{|||x - a|||} = 0.$$

Examinamos a continuación la repercusión que tiene la propiedad anterior sobre la continuidad de f en a. De ella deducimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) - T(x - a) = 0,$$

lo que prueba que f es continua al ser T continua.

Para garantizar la unicidad de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ verificando la condición requerida, necesitamos poder acercarnos al punto a en cualquier dirección, esto es, si para cada $x \in S(\mathbb{R}^N)$ notamos

$$A_x = \{t \in \mathbb{R} : \ a + tx \in A\},$$

deberá ser $0 \in A'_x$ para todo x en $S(\mathbb{R}^n)$ (véase Ejercicio 3.2). Es importante notar al respecto que la condición topológica más expeditiva para garantizar la anterior propiedad es que a sea un punto interior de A y esta condición será asumida en adelante. En este caso, sea $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subset A$. Para $x \in S(\mathbb{R}^N)$ y $t \in \mathbb{R}$ con $0 < |t| < \delta$, se tiene que $a+tx \in A$ y

$$\left\| \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} - T(x) \right\| = \frac{\|f(a+tx)-f(a)-tT(x)\|}{|t|} =$$

$$\frac{\|f(a+tx)-f(a)-T(a+tx-a)\|}{\|a+tx-a\|},$$

de donde deducimos que

$$(*) \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tx)-f(a)}{t} = T(x)$$

expresión que nos asegura la unicidad de T dado que una aplicación lineal está determinada por el comportamiento en la esfera unidad (¡Hágase!).

Estamos ya en condiciones de definir de manera coherente el concepto de derivada.

Definición 3.12 (función derivable Fréchet). Sean $M,N \in \mathbb{N}, A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathring{A}$, y $f : A \to \mathbb{R}^M$ una función. Se dice que f es derivable (en el sentido de Fréchet) o diferenciable en el punto a si existe una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$ verificando

$$(**) \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^N$. En tal caso la aplicación T es única, se denomina la *derivada de una función en un punto* o *diferencial de f en a* y se nota por $Df(a)$. Se dice que f es derivable en un subconjunto $B \subset A$ si es derivable en cada punto de B.

Sea $A_1 \subset A$ el conjunto de puntos donde f es derivable. La aplicación $x \mapsto Df(x)$ de A_1 en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ se denomina la aplicación derivada de f y se nota Df.

Se dice que f es de *clase $\mathscr{C}^1$* en a, y se nota $f \in C^1(a)$, si f es derivable en un entorno de a y la aplicación Df es continua en a. Se dice que f es de clase C^1 en un subconjunto $B \subset A$ si es de clase C^1 en cada punto de B.

Se dice que f es de clase C^1 cuando lo sea en todos los puntos de su conjunto de definición (que necesariamente será abierto). Notamos por $C^1(A)$ al conjunto de las funciones de clase C^1 en el abierto A.

Queda claro que si $N \geq 2$ se deriva en puntos interiores, lo que por comodidad, no siempre se resaltará en adelante.

1. Resaltamos que los conceptos de derivabilidad y de derivada de una función en un punto involucran sólamente las topologías de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ y no las normas concretas elegidas. Es decir, son conceptos algebraico-topológicos.

2. Obsérvese que la Proposición 3.11 tiene ahora la siguiente lectura para puntos interiores: Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$, $M \in \mathbb{N}$ y $f = (f_1, \ldots, f_M) : A \to \mathbb{R}^M$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) f es derivable elementalmente en a.

   ii) $f_1, \ldots, f_M$ son derivables en a.

   iii) f es derivable en a.

   Además en el caso de que f sea derivable en a, la relación entre ambas derivadas viene dada, en virtud de (*), por

$$Df(a)(x) = xf'(a),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

   mientras que la función afín g viene dada por

$$g(x) = (f(a) - af'(a)) + xf'(a)$$

   (nótese que $Df(a)$ es la aplicación lineal asociada a g). En particular, se obtiene que

$$Df(a)(1) = f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_M'(a)).$$

3. Si f es derivable en el punto a, entonces f es continua en a.

De acuerdo con la definición, el estudio de la derivabilidad de una función en un punto conlleva dos problemas: el conocimiento de T dado por (*) y la verificación de (**).

Fijado un vector no nulo x, se dice que la función f es derivable en a en la dirección de x si existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t},$$

en cuyo caso el valor de tal límite (que es un vector de $\mathbb{R}^M$) se nota $f'(a;x)$ y se denomina la *derivada de f en a en la dirección de x*. Para $x = 0$ el anterior límite tiene sentido y vale cero, por lo que es natural definir también $f'(a;0) = 0$. La condición (*) se traduce ahora diciendo que la condición necesaria para que f sea derivable en a es la existencia de $f'(a;.)$, o sea deben existir todas las derivadas direccionales de f en a, siendo en tal caso la candidata a derivada de f en a la aplicación T dada por $T(x) = f'(a;x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ (supuesto que sea lineal). Es inmediato (¡Hágase!) que si la función f es derivable en a en las direcciones de los vectores de la esfera unidad, también lo es en la dirección de cualquier vector x, y en tal caso

$$f'(a;x) = \|x\| f'\left(a; \frac{x}{\|x\|}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

b) Saber Escolar.

En Cálculo I se inicia el estudio de la derivada a través de la asociación de esta con el concepto de razón de cambio instantánea entre dos variables, aplicada a tres contextos que son: rapidez y aceleración instantánea, tasa de crecimiento y marginalidad. En la guía 3 se oficializa la definición de derivada de la siguiente manera:

Definición de Derivadas:

La derivada de la función $f(x)$ con respecto a x es la función $f'(x)$ dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notación:

Sea $y = f(x)$, entonces la derivada de la función se puede denotar por:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

Inmediatamente se presenta las fórmulas de derivación de cuatro funciones a través del siguiente cuadro:

Tipo de Función	Expresión Algebraicas	Derivada
Constante	$f(x) = c \quad donde \quad c \in \Re$	$f'(x) = 0$
Potencia	$f(x) = x^n \quad donde \quad n \in \Re$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
	$f(x) = x \quad donde \quad n = 1$	$f'(x) = 1$
Exponencial	$f(x) = a^x \quad donde \quad a > 0$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logarítmica	$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Recordar: $\frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \sqrt[n]{x^y} = x^{y/n}$

Podemos observar en la definición dada de derivada se titula “Definición de Derivadas” lo cual está en plural y luego se refiere a “La derivada de la función”, indicando el objeto en singular.

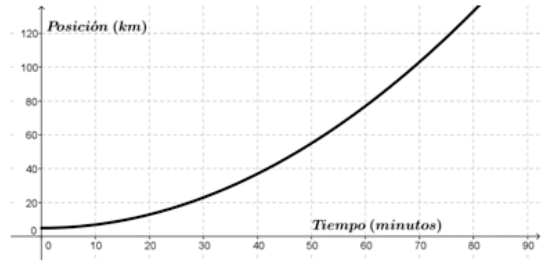
- La definición que consideramos perteneciente al saber sabio establece el concepto de derivada sobre funciones vectoriales, por lo que el saber escolar, que se establece en funciones reales, sería una situación particular del concepto más amplio de derivada.
- En el saber escolar no se explicita la naturaleza de la función, es decir, cuáles son los conjuntos dominio y recorrido, haciendo que sea imprecisa y desde el rigor de la matemática erudita es incorrecta.
- La definición de derivada en el saber escolar no explicita la condición de existencia del límite para su definición.
- En el saber escolar se desconoce o no se menciona la transformación lineal como la función lineal que aproxima la diferencia de las imágenes y que por lo tanto la función afín: $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ aproxima a la función en torno a x_0.
- La definición encontrada en el saber sabio define la derivada en un punto, sin embargo, en el saber escolar se define como la función derivada sin ahondar en la naturaleza la función ni de la función derivada.

4.2 Análisis Cognitivo

a) Análisis del texto escolar.

La asignatura de cálculo I se trabaja mediante guías, en ellas se entrega definiciones y propiedades. El estudio del concepto de derivada se desarrolla en seis guías. A modo de introducción el concepto de derivada se presenta a partir de un par de problemas que guían la aproximación de la velocidad instantánea por el cálculo de la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez más pequeños (Figura 7).

1. Un grupo de estudiantes participa de una cicletada que inicia en el centro de Santiago hacia el sur del país. La función $f(x) = 0{,}02x^2 + 5$ entrega la posición de un ciclista (en kilómetros) después de t minutos de su partida.



a) ¿Cuál es su posición a los 30 minutos de su partida?
b) ¿cuál es la velocidad promedio entre los 30 y 60 minutos?
c) Determine mediante aproximaciones la Velocidad Instantánea a los 30 minutos de su partida. Utilizar la siguiente tabla de valores, redacte respuesta.

Intervalos de Tiempo	Expresión Velocidad Promedio	Velocidad Promedio
$28 \le x \le 31$	$\frac{f(31)-f(28)}{31-28}$	
$29 \le x \le 30{,}5$	$\frac{f(30{,}5)-f(29)}{30{,}5-29}$	
$29{,}9 \le x \le 30{,}1$	$\frac{f(30{,}1)-f(29{,}9)}{30{,}1-29{,}9}$	
$29{,}99 \le x \le 30{,}01$	$\frac{f(30{,}01)-f(29{,}99)}{30{,}01-29{,}99}$	

FIGURA 7. PROBLEMA 1 CORRESPONDIENTE A LA PRIMERA GUÍA SOBRE DERIVADA.

Con este tipo problemas se pretende dar sentido al concepto de derivada y establecer relación con la definición como límite.

El segundo problema es de la misma naturaleza y objetivo que es determinar la velocidad instantánea en un valor de *x*, se guía a los alumnos mediante una tabla donde se explicitan intervalos cada vez más pequeños para la variable independiente.

Después de estos dos problemas se describe la definición del concepto de derivada del siguiente modo:

<u>Definición de Derivadas:</u>

La derivada de la función $f(x)$ con respecto a x es la función $f'(x)$ dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

<u>Notación:</u>

Sea $y = f(x)$, entonces la derivada de la función se puede denotar por:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

Podemos observar que los primeros problemas se enfocan en trabajar intuitivamente el concepto de derivada, pero manera local, y en la definición se amplía a la variable x, podemos decir, que se trabaja los problemas introductorios en f'(a) pero la definición es para f'(x), se trata de dar coherencia a la definición de la derivada como límite a través de encontrar la velocidad instantánea en un punto, sin embargo, en ninguna parte de los ejercicios se explícita la relación con el concepto de límite, esto también ocurre cuando se describen las reglas de derivación, no se conectan con la definición de límite. El tema de continuidad de la función no está presente, así como tampoco un estudio de las condiciones para que una función puede o no ser derivable. No existe una interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente en un punto, con lo cual además implica que sólo existe un tratamiento del registro algebraico.

Por otra parte, la propuesta introductoria al concepto de derivada que se da es truncada rápidamente para dar paso a la producción de algoritmos para el cálculo de las derivadas de cuatro funciones: Función constante, potencia, exponencial y logarítmica. Seguidamente, se dan a conocer reglas de derivación de operaciones entre funciones, estas son: regla del múltiplo constante, regla de la suma y resta de funciones, regla del cuociente de dos funciones a esta parte se denomina álgebra de derivadas y se finaliza con la regla de la cadena. Las reglas son definidas de la siguiente manera:

Operación de Funciones Elementales		**Derivada**
Multiplicación por una constante	$h(x) = c \cdot f(x)$	$h'(x) = c \cdot f'$
suma o resta	$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f' \pm g'$
multiplicación de dos funciones	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$h'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$
división de dos funciones	$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0$	$h'(x) = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{(g)^2}$

Notemos que en ninguna parte se hace mención a que las funciones son derivables, cuando se describe la regla de la cadena ocurre esto mismo:

Regla de la Cadena para Derivar una Función Compuesta

Si $f(x)$ es una función compuesta, es decir $f(x)=(h\circ g)(x)$ entonces su derivada será $f'(x)=(h\circ g)'(x)=h'[g(x)]\cdot g'(x)$

Generalmente se trabaja con las siguientes funciones compuestas:

- $e^{g(x)}$ su derivada será $e^{g(x)}\cdot g'$
- g^{n} su derivada será $n\cdot g^{(n-1)}\cdot g'$
- $\log_a(g)$ su derivada será $[\log_a(g)]'\cdot(g)'$ ➔ $\dfrac{1}{g\cdot\ln(a)}\cdot(g)'$

Todo esto se desarrolla en la guía n° 3 de la asignatura. A partir de la siguiente guía (cuarta guía) hasta la sexta guía corresponde a la aplicación de la derivada. Las primeras aplicaciones se agrupan en la concepción de la derivada como razón de cambio, los problemas propuestos se resuelven mediante el cálculo de la derivada en un punto y se exige una correcta interpretación del resultado en consideración al ámbito de aplicación. Las otras aplicaciones de la derivada que están presente en las guías son: determinar valores máximos y mínimos para finalizar con problemas de optimización.

La guía n° 4 se comienza con un ejercicio para determinar la razón de cambio, pero no está institucionalizado este concepto ni su relación con la derivada, se guía de manera mecánica a través de una tabla en dónde indican lo que debe calcular y como última pregunta se solicita que interpreten la función derivada en un valor específico. No se habla de razón de cambio salvó en el título de la guía (Figura 8).

La Derivada como razón de cambio

1. Hasta el año 2000, la estimación de la deuda de EEUU, expresada en millones de dólares está dada por la función $f(t) = -0{,}11t^4 + 3{,}59t^3 - 28{,}91t^2 + 271{,}85t + 930{,}2$ donde t son los años trascurridos a partir de inicios de 1980.

   a) Complete la siguiente tabla

Variables	t	$f(t)$	$f'(t)$
Significado			
Unidad de Medida			

   b) Escriba el dominio contextualizado de la función
   c) ¿Cuál es la deuda de EEUU al iniciar el año 1990?
   d) Interprete y calcule $\dfrac{df}{dt}$ transcurridos 10 años.

FIGURA 8. PROBLEMA 1 DE LA GUÍA N° 4 DE CÁLCULO I

En la misma guía se presentan las siguientes notas a los alumnos sobre rapidez instantánea, aceleración instantánea, ingreso marginal y costo marginal, observemos que no se describe de forma explícita estos conceptos con la derivada, por lo cual los alumnos tienen aclaración con respecto a esto en la clase y no mediante el material de apoyo que es su guía.

Nota N°1
La ***rapidez instantánea*** corresponde a la razón de cambio instantánea de la posición con respecto al tiempo
La ***aceleración instantánea*** corresponde a la razón de cambio instantánea de la rapidez con respecto al tiempo

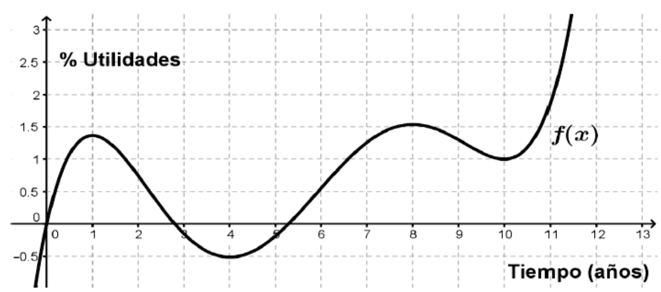
Nota N°2
El **Ingreso Marginal** es la razón de cambio de la función ingreso respecto a la cantidad de unidades. Corresponde al cambio en el ingreso total cuando la cantidad vendida aumenta en una unidad. El **Costo Marginal** es la razón de cambio de la función costo respecto a la cantidad de productos. Corresponde a la variación que sufre el costo debido a la fabricación de una unidad más.

Nota N°3
La ***corriente*** es la razón de cambio de la cantidad de carga con respecto al tiempo, en otras palabras, es la rapidez con que la carga fluye por una superficie, se mide en unidades de carga por unidades de tiempo, a menudo en coulombs por segundo (amperes).

En el segundo grupo de aplicaciones de la derivada se realizan análisis de puntos críticos, máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento con objeto de describir una función.

En esta parte se presenta un problema para explorar los conceptos a partir de la gráfica de la función:

1. La función f(x) muestra el % de las utilidades de una empresa los primeros 11 años de funcionamiento, $f(x) = \frac{1}{500}x^5 - \frac{23}{400}x^4 + 0{,}58x^3 - 2{,}36x^2 + 3{,}2x$, donde x son los años trascurridos desde su creación



a) Transcurridos el primer, cuarto, octavo y décimo año de funcionamiento se observaron los **valores** (utilidades) **críticos**, determínelos e indique las coordenadas en la gráfica, al igual que los % de utilidades al inicio y final del estudio.

Luego se presentan definiciones:

Los valores máximos o mínimos de una función son los valores más grandes o más pequeños que toma una función en un punto situado ya sea dentro de un intervalo o en el dominio de la función. Determinar estos valores responde a buscar respuesta a problemas de optimización.

Para encontrar los valores mínimos y máximos es necesario determinar los puntos crítico, que se definen a continuación:

Punto Crítico:

Dado un valor c que pertenece al dominio de la función f donde $f'(c) = 0$ o no está definido se dirá que es un valor crítico, y $(c, f(c))$ será un punto crítico.

Máximo y Mínimo relativo:

Criterio de la Primera derivada: Para encontrar los valores máximos y mínimos relativos de una función continua f, se debe:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f
2. Si f' cambia de positiva a negativa alrededor del valor crítico, entonces f tiene un máximo relativo.
3. Si f' cambia de negativo a positivo alrededor del valor crítico, entonces f tiene un mínimo relativo.
4. Si f' no cambia de signo (es decir, f' es positiva en ambos lados o es negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimo relativo.

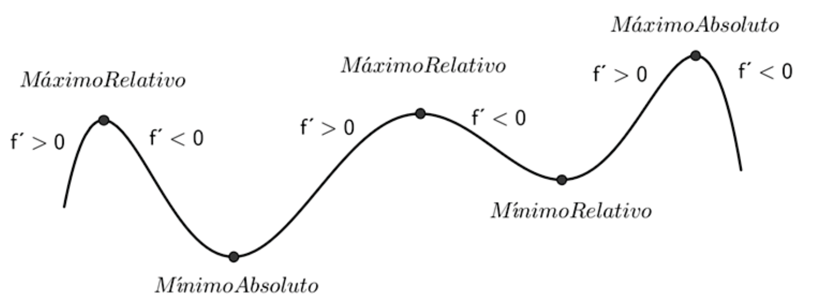
En resumen: Si c es un valor crítico, a y b dos valores cercanos a c con $a < c$ y $b > c$, si se analizan los signos de la derivada se tiene:

$f'(a)$	$f'(c)$	$f'(b)$	Conclusión
$+$	0	$-$	El valor c es un máximo relativo
$-$	0	$+$	El valor c es un mínimo relativo
$+$	0	$+$	El valor c no es mínimo ni máximo relativo
$-$	0	$-$	El valor c no es mínimo ni máximo relativo

Máximo y Mínimo absoluto:

Para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[c, g]$, se debe:

1. Encontrar los puntos críticos de la función f en el intervalo (c, g)
2. Encontrar los valores de f en los valores críticos
3. Encontrar los valores de f en los valores extremos de la función, es decir, determinar $f(c)$ y $f(g)$.
4. El más grande de los valores de los pasos 2 y 3 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.



Observemos que en las definiciones falta rigurosidad matemática, y también se da una especie de recetario para encontrar los valores máximos o mínimos, no hay un estudio de casos de algunas funciones para analizar que ocurre con estos valores, por ejemplo, es posible que una función no tenga valores extremos en un intervalo de la función.

Finalmente se abordan problemas de optimización de medidas de volumen y superficie, por ejemplo:

Se requiere fabricar una lata cilíndrica para que contenga 1 litro de aceite (1000 cm³). Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

Ten en cuenta:

Para minimizar el costo del metal, minimizaremos el área de la superficie del cilindro (tapa, fondo y lados), por lo que se debe considerar:

- ⇨ Área $A = 6{,}28r^2 + 6{,}28\, r\, h$
- ⇨ Volumen $V = 3{,}14\, r^2\, h.$

Donde r correspondel al radio del cilindro y h a la altura

Nota: Las fórmulas originales son $\mathrm{A} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ y $\mathrm{V} = \pi r^2 h$, se reduce considerando $\pi = 3{,}14$

Algunas situaciones que llaman también la atención en los problemas planteados en las guías, es que falta de funciones no derivables, los alumnos sólo deben derivar funciones continuas y derivables en todo su dominio, no existe un reparo o un instante que permita al alumno analizarlo. En los problemas de optimización no se presentan problemas no tengan solución, o situaciones que la resolución algebraico-aritmética no tenga sentido en el contexto del problema, todo está diseñado para que el alumno aplique las recetas que se le dan sin analizar la situación.

b) Análisis del Currículo.

En análisis del texto escolar se identificaron cuatro etapas en la secuenciación didáctica del concepto de derivada, desde el punto de vista curricular presentamos los tiempos destinados a cada una de estas.

1. Definición de derivada y técnicas algebraicas de derivación de funciones.

   Material de clases: Guía N°3: Derivadas de Funciones
   Tiempo Asignado: 7 módulos de 45 min.
   Cantidad de clases: 3

2. Concepción de la derivada como razón de cambio.

Material de clases: Guía N°4: La derivada como Razón de cambio

Tiempo Asignado: 5 módulos de 45 min.

Cantidad de clases: 2

3. Descripción de una función mediante su derivada.

Material de clases: Guía N°5: Aplicación de la derivada: Valores máximos y mínimos

Tiempo Asignado: 8 módulos de 45 min.

Cantidad de clases: 3

4. Problemas de optimización.

Material de clases: Guía N°6: Máximos y Mínimos: Problemas de Optimización

Tiempo Asignado: 5 módulos de 45 min.

Cantidad de clases: 2

Realizaremos el análisis considerando conocimientos previos al estudio de la función derivada y cómo incide este objeto en conocimientos por aprender.

Sobre conocimientos previos nos centraremos en el concepto de función y el concepto de límite.

El concepto de función es introducido por primera vez en el curso de Álgebra que del mismo modo que Cálculo I, es una asignatura transversal a la mayoría de las carreras del instituto, su tratamiento se restringe a reconocer ciertas funciones elementales como objetos de la matemática que modelan situaciones en que se relacionan dos variables y que permiten determinar el valor de una variable dado un valor de la otra (problemas de determinar imágenes o preimágenes) o a partir de su representación gráfica, las funciones tratadas en ente curso son:

- Función lineal

- Función cuadrática
- Función exponencial
- Función logarítmica

No se abordan en este nivel conceptos como dominio y recorrido ni operaciones entre funciones; sumas, multiplicaciones, composición.

El concepto de función es nuevamente estudiado en el curso de Cálculo I a través del análisis de la función lineal y cuadrática, en el caso de la función lineal se le da énfasis a la interpretación de la pendiente y en la función cuadrática se trata el vértice como el máximo o mínimo de la función, se estudia además la composición de funciones con la clara intención de acercar al alumno a conceptos relacionados al estudio de la derivada.

En el caso del concepto de límite pareciera que su introducción es forzada y no es coherente al uso que se le da en el concepto de derivada.

Se estudia el concepto de límite mediante el cálculo de la función en valores de la variable independiente cada vez más grande para dar cuenta que se estabiliza o se aproxima a un valor, sólo se tratan límites al infinito positivo y no se expone a alumnos a casos donde no exista el límite.

Se definen dos límites elementales cuando la variable independiente tiende a infinito y se ejercita el cálculo del límite de funciones del tipo:

$$f(x) = \frac{-3 - x^2}{10 + 0,2x^2} + 15$$

II. Límites al Infinito Elementales.

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{C}{x^n} = 0$, Si $n > 0$ y C es un número real

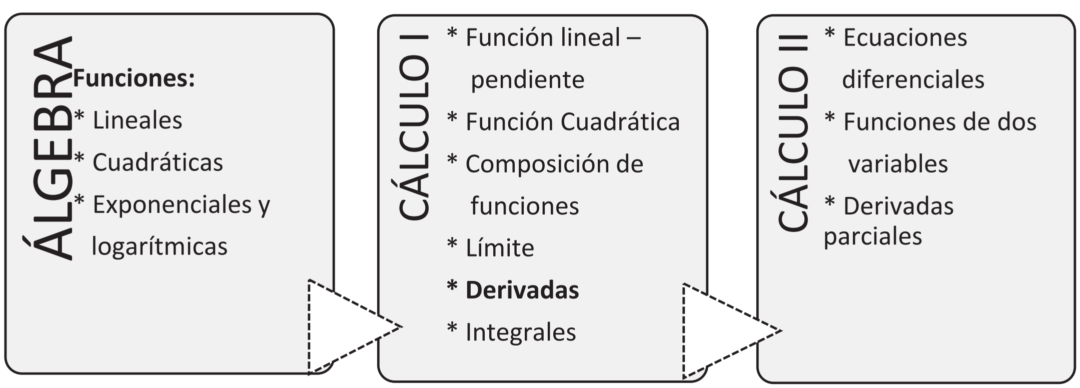
ii) $\lim_{x \to \infty} C = C$, Si C es un número real

Respecto al uso de la Derivada en el estudio de conceptos posteriores podemos separar el análisis en dos partes; la primera es cómo se desarrolla el resto del curso de Calculo I que contempla el estudio de integrales, y la segunda corresponde a curso de Cálculo II que contempla ecuaciones diferenciales y derivadas parciales de funciones de dos variables.

Para el estudio de integrales se parte desde el cálculo de integrales definidas llamando también a este concepto como la antiderivada. Así la interiorización de las técnicas de derivación juega un rol fundamental en el desarrollo de la última parte del curso. Sin embargo, observamos que a nivel conceptual no se establece relación entre la integral y la derivada.

En el caso del curso de Cálculo II, esta asignatura está presente en pocas carreras por lo que para muchos estudiantes el concepto de derivada no tiene más referencias que dentro de Cálculo I y quizás en algunas asignaturas de especialidad. Señalado esto, los alumnos que cursan Cálculo II no tienen manera de eludir el concepto de derivada pues este permite la aplicación de las ecuaciones diferenciales y su ampliación al aplicar sobre funciones de varias variables.

El esquema general de los conocimientos previos y los conocimientos posteriores en torno al concepto de derivada se podría resumir del siguiente modo:



c) Dificultades y errores en el proceso enseñanza-aprendizaje de la derivada.

Sánchez-Matamoros en su revisión de literatura (2006 y 2008) identificó las siguientes dificultades y errores respecto a la noción de derivada:

- *Dificultad del manejo del significado de la noción de derivada.*
- *Dificultad de la definición de función derivada.*
- *Representación gráfica. Se da a conocer la dificultad en la comprensión de la gráfica de la función derivada en un punto y la dificultad que existe en la conexión entre lo gráfico y lo analítico.*
- *Influencia de los contextos.* En este aspecto cita a Azcárate (1990) quien señala que dentro de esta influencia está la confusión que tienen algunos estudiantes entre la velocidad media con la instantánea en un punto.

Badillo (2003) llevo a cabo un estudio de tres casos de profesores de Bachillerato de Colombia, para indagar acerca de las prácticas de los profesores enfocándose en lo que conocen de los conceptos de derivada y velocidad y cómo aplican sus conocimientos, en estos aspectos, cuando definen la enseñanza de estos. Dentro de este estudio describe también las dificultades encontradas en el manejo del significado de la noción de derivada, en este punto:

> "*Las dificultades que tienen los profesores en la comprensión de los macro objetos f´(a) y f´(x) se convierten en un obstáculo para poder hacer una transposición de esos macro objetos y, posteriormente para la enseñanza de los mismos, y les lleva en muchos casos, a reproducir las confusiones y los errores de cara a sus alumnos*." (p. 437)

En su trabajo Rojas (2008) da a conocer la recopilación sobre algunos tipos de dificultades que ocurren tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto de derivada, llevada a cabo por Pinzón y otros autores. Estas dificultades se organizan de acuerdo a su origen didáctico (relación con la enseñanza) o a su origen epistemológico.

Dificultades de origen didáctico.

- *Derivada en un punto.* Se refiere a la preponderancia de los procedimientos algorítmico-algebraico centrados en la noción de convergencia.
- *Tangencia local*. Se refiere la definición de que se da a la recta tangente, como aquella recta que corta en un solo punto a la curva, de modo cuando los alumnos están frente a la situación como se muestra en la Figura 9, produce ellos rechacen la recta como una recta tangente a la curva.

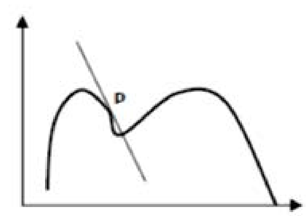


FIGURA 9. RECTA TANGENTE EN EL PUNTO P (ROJAS 2008)

- *Dificultad para percibir la derivada como una función y caracterizarla de manera global.* Esto se da por la prevalencia de la concepción puntual de la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto. En esta dificultad concurren factores tanto didácticos como también pueden ser epistemológicos.
- *La concepción dinámica (sucesión de secantes).* Esta dificultad está ligada con la anterior debido a la conservación del carácter estático en la determinación de la tangente en la Geometría Euclidiana (es dada como un lugar geométrico); es difícil comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga realmente la tangente.
- *La algebrización del cálculo diferencial escolar.* Esto se da en la simplificación del cálculo basado en operaciones algebraicas con límites y derivadas, desarrollando de forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.
- *Los ejemplos prototípicos de un concepto.* Esto se da cuando un ejemplo posee características que son atributos no requeridos por la definición. Consecuentemente, los atributos irrelevantes corren el riesgo de convertirse

en una dificultad de origen didáctico o de enseñanza, al ser transferidos como característicos del concepto. Por ejemplo, el tomar la derivada solamente como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

- *Terminología que utiliza el texto.* Se refiere al uso de palabras y cómo se encuentran utilizadas en el texto, se clasifican tres clases: las palabras técnicas; términos que aparecen en matemáticas y en el lenguaje ordinario cuyo significado es diferente para ambos contextos, por ejemplo, el término derivada y por último palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.
- *Uso de la terminología matemática.* Se refiere a la dificultad que se puede originar cuando se otorga más importancia a la notación que al significado del concepto. Por ejemplo, cuando se trabaja formalmente y se hacen demostraciones bajo la definición de límites, se deja de lado la esencia del concepto y se deja un aprendizaje casi memorístico de la definición de límite.
- *Falta de enlace para crear una estructura conceptual.* Esto se da cuando no se logra establecer una relación de un concepto con una estructura conceptual produciendo obstáculos en la construcción y comprensión de conceptos posteriores dependientes de él.

Dificultades de origen epistemológico.

- *Desdoblamiento de la derivada.* De acuerdo con Duval (1983) el obstáculo del desdoblamiento aparece cuando el estudiante debe separar propiedades o características, hasta entonces fuertemente asociadas a un objeto, o atribuir denominaciones y representaciones diferentes a un objeto que se piensa que es el mismo.
- *El problema de calcular el ritmo de cambio.* El origen de este problema se da en el dominio de la mecánica en el intento de enfrentarse con movimientos donde la rapidez y la aceleración variaban con el tiempo. Debido a esta dificultad, se pretende llegar al concepto de rapidez instantánea a través del mundo de los sentidos, del cual escapa una y otra vez, lo que provoca un claro rechazo hacia el concepto de rapidez instantánea.

- *El problema de encontrar la tangente a una curva dada.* Esto tiene que ver nuevamente con la definición que se da de la recta tangente basada en la concepción griega de la línea que toca a la curva en un solo punto y se encuentra a un lado de la misma, lo cual no sirve para curvas que iban más allá de las cónicas.
- *El problema de calcular valores máximos y mínimos de una función.* Esto tiene que ver con el origen de estos problemas y la aplicación que se da a ellos en estos tiempos. Este tipo de problemas surgió en la mecánica y la astronomía, por ejemplo, el ángulo que determina el alcance máximo de un proyectil o determinar la mayor y menor distancia de un plantea al sol.
- *Dificultad en la interpretación del papel de las definiciones de la derivada en la actividad matemática.* La definición se ve como la descripción de un objeto ya conocido por los sentidos o por "insight".
- *La derivada como un límite.* Se da cuando en la introducción de la derivada se considera el límite sólo como una aproximación.

Errores relacionados con el objeto derivada.

Algunos de los errores que se dan a conocer en la literatura revisada son:

- "*Uno de los errores que cometieron los alumnos fue que daban el valor de la abscisa cuando se les preguntaba por la razón de cambio en un punto, y para un valor genérico x = T cuando se presentaban funciones lineales*". Sánchez-Matamoros, G. et al. (2008). Pp. 272.

- "*Se identificaron dos errores en los estudiantes que ilustraban las dificultades en cuantificar el cambio en contextos de velocidad: 1) confundir la pendiente de una recta con su ordenada en el origen; 2) dar el valor de la ordenada en el origen como valor de la pendiente de la recta*". Sánchez-Matamoros, G. et al. (2008). Pp. 274.

- *"La mayoría de los alumnos contestó de manera correcta al preguntarles por la razón de cambio con funciones lineales, mas no sucedía lo mismo en* *tareas donde la función era no lineal*". Sánchez-Matamoros, Gloria et al. (2008). Pp. 272.

- "*Los errores más frecuentes que suelen cometer los alumnos son: no saben qué hacer para calcular la tasa de variación en un punto genérico; creen que la fórmula de la derivada de una función en un punto mide la tasa de variación entre dos puntos, no distinguen entre la tasa de variación media y la tasa de variación en un punto referidas a una función lineal puesto que es constante, no asocian la variación negativa o nula con función decreciente y extremos, respectivamente, el significado de ciertos símbolos como* $dx, dy, dy/dx, \Delta x, \Delta y, \Delta y/\Delta x$ *no es claro para los alumnos*". Ortega y Sierra (1998). Pp. 92.

d) Oportunidades de aprendizaje para la enseñanza de la derivada

Considerando los factores que influyen en la comprensión del concepto de derivada, junto con los antecedentes sobre las dificultades y errores que se dan en torno a ella, existen investigaciones que dan propuestas para la enseñanza de la derivada o consideraciones que se deben atender cuando se quiere diseñar situaciones de enseñanza para los diferentes temas ligadas al concepto. En este apartado daré a conocer algunas propuestas de enseñanzas o antecedentes a tener en cuenta para la enseñanza.

López de los Mozos (1991) presenta actividades que buscan a través de una aproximación intuitiva desarrollar la comprensión del concepto de derivada a través de los conceptos de cociente incremental y recta tangente. Ella se basó en las conclusiones que realizó Ortón (1983) de su estudio acerca del concepto de derivada, estos son:

- La primera aproximación del alumno al Cálculo Diferencial debe ser intuitiva y sin gran formalización algebraica, ya que se ha comprobado que las dificultades operatorias que el alumno tiene en el desarrollo algebraico de las fórmulas, hace disminuir la comprensión que pudiera haber tenido inicialmente del concepto.

- Es necesario, entonces, un gran soporte gráfico al tiempo que se introducen los principales conceptos. También puede ser útil en esta fase el empleo de la calculadora.

Propuestas de actividad descrita por López de los Mozos (1991)

Cociente incremental. Este concepto está relacionado con los conceptos de razón y proporción, pero en una curva se puede calcular la razón media de cambio o proporciónmedia en que se incremente la variable dependiente y al incrementarse la variable independiente x, o la razón de cambio en un punto de la curva; ambos valores varían al considerar otro punto y otro intervalo.

En la cctividad 1 plantea que la primera aproximación debe ser de un modo gráfico y usando una recta. La actividad consiste en situar en un papel cuadriculado los ejes de coordenadas rectagulares, en el cual se debe trazar una recta que pase por el origen, de modo que, cuando la variable x aumente un cuadrado, la variable y aumente otro cuadrado (la recta bisectriz del primer cuadrante). Recomienda en esta fase evitar las coordenadas en lo posible. En este momento apoyándose gráficamente, pide extraer dos conclusiones prácticas:

1) La variación "promedio" de la recta en cada cuadrado es igual a la unidad.
2) Si la variable x aumenta, por ejemplo, tres cuadrados, la variable y aumentará también tres. La variación promedio es igual a la unidad. Con esto, ya se está trabajando de manera implícita con el cociente incrementeal.

Junto con ello se deben plantear las siguientes preguntas:

- ¿esta variación promedio tiene alguna relación con el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las x? ¿cuál será esa relación?
- ¿qué nombre se le puede adjudicar a esta relación?

Indica que el buscar hallar respuesta adecuadas a las preguntas conducirá a establecer la relación entre el cociente incremental, la pendiente de la recta y la inclinación de ésta. Además, como no hay un trabajo analítico (de ecuación) se refuerza la comrpensión intuitiva de la pendiente como razón de cambio de la variable y con respecto a la variable x. La autora comenta que es esta razón que en la actividad se pide dibujar la recta bisectríz, ya que la tangente de 45° es la que mejor recuerdan los alumnos.

En la actividad 2 plantea que se debe seguir trabajando con papel cuadriculado, en el cual debe haber dibujado un punto A sin coordenadas. El alumno debe construir rectas que, pasando por A, tengan distintas pendientes. Esto se puede hacer en un doble sentido: dada una pendiente, construir la recta asociada que pase por el punto A o dado el trazado de una recta que pasa por el punto A, obtener su pendiente.
Luego, en el mismo papel cuadriculado se dibuja una curva y sobre ella, varios puntos como se muestra en la *Figura 10*:

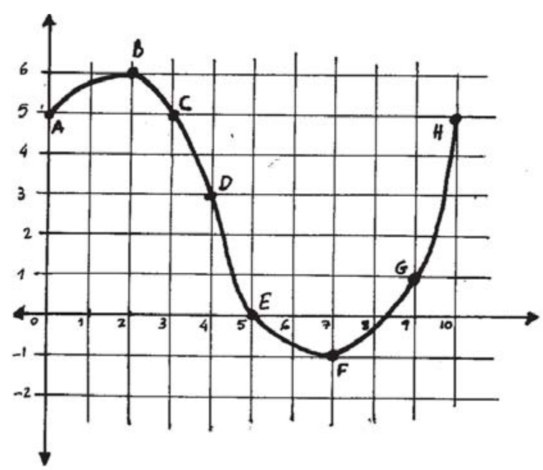


FIGURA 10. ACTIVIDAD PLANTEADO EN LÓPEZ DE LOS MOZOS (1991).

Concepto de tangente a una curva en un punto. En este punto la autora plantea que un primer planteamiento de la derivada se puede realizar a través de la determinación de la tangente a una curva en un punto. Describe que el problema ligado a tratar la derivada de esta forma, tiene que ver con la concepción que poseen los alumnos sobre la recta tangente, considerándola como aquella recta que toca a la gráfica de la curva una sola vez, que es justamente uno de las dificultades de origen didáctico descrito anteriormente.

Entonces, la autora describe establecer la definición de recta tangente a través de la siguiente actividad. Considerar una curva con punto A, como el de la *Figura 11*. Delimitar una pequeña zona de la curva alrededor de A, además, considerar un punto P móvil sobre la curva que pasa por las sucesivas posiciones P_1, P_2, P_3, etc. Trazar las correspondientes secantes a la curva que pasen por el punto A y por cada una de las posiciones que tome P.

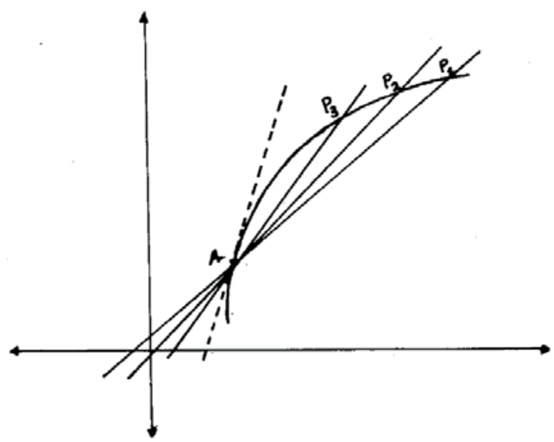


FIGURA 11. ACTIVIDAD PLANTEADA PARA EL CONCEPTO DE TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO LÓPEZ DE LOS MOZOS (1991).

Plantear las siguientes preguntas:

- ¿Se podría seguir trazando rectas si el punto P está cada vez más cerca de A?¿Cuántas rectas?
- ¿Qué pasaría si el punto P estuviera infinitamente cerca de A?¿Qué recta podríamos trazar?

De esto establecer una primera definición para la recta tangente: “La recta tangente a una curva en un punto A es la posición límite de las rectas secantes a la curva por los puntos A y P, cuando el punto P se aproxima infinitamente al punto A”

La autora describe que esta definición que es completamente intituituva y en la que no se necesita ninguna herramienta algebraica, debe ser trabajada por los alumnos con distintas curvas, situando el punto A en diferentes posiciones. Luego, realizar una fase que consista en encontrar la expresión analítica de dicha recta.

En el articulo **El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza**, de Ortega y Sierra (1998) los autores tomando como base el concepto de organizadores del currículo, desarrollado por Rico, organizan su trabajo a través de: el desarrollo histórico del concepto, concepciones de los alumnos, propuestas didácticas para introducir la derivada y contenido matemático.

En las concepciones de los alumnos se refieren a los errores y dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los temas en derivada. En las propuestas didácticas se focalizan en los conceptos de tasa media de variación, velocidad media, junto con el paso al límite. Se presentan tres propuestas para introducir el concepto de derivada, estos son:

- La propuesta del Grupo Cero de Vakencia (1982) comienza trabajando con la tasa de variación en diversos contextos.
- El School Mathematics Project (cuarta versión de 1996). Este proyecto consta de varios libros conteniendo cada uno de ellos un tópico de Matemáticas o una unidad transversal como puede ser el dedicado a Métodos de Matemáticos. De estos consideraron el libro Introductory Calculus, que trata los conceptos de derivada e integral y sus respectivas aplicaciones.

Los autores describen que en este libro se presenta la derivada sin tratar previamente el concepto de límite, señalan que es un proyecto donde la actividad del alumno es intensa además de utilizar calculadoras gráficas o programas de computadores. El desarrollo de los temas es:

1. Tasa de variación de una función, considerando distintas situaciones que se organizan mediante una función, estudiando de modo particular el caso lineal.
2. Pendiente de curvas: curvas localmente rectas, cálculo de pendientes, gráficas de pendientes, encontrando pendientes numéricamente, función pendiente, notación de Leibniz.

3. Optimización: Gráficas y pendientes de gráficas (se introduce el concepto de máximo y mínimo local), funciones cuadrado y cubo, problemas de máximos y mínimos, optimización gráfica.

- La tercera propuesta qe consideran es la dada en los programas franceses, describe que por ejemplo, en el libro de texto de Terracher y Ferachoglan del año 1995 se consideran tres aspectos inseparables en la derivación: el aspecto geométrico, el aspecto numérico y el aspecto cinemático, este último se refier al concepto de velocidad instantánea.

En la parte de contenido matemático los autores llevan a cabo una revisión de libros de análisis diferencial con el objetivo de desarrollar las definiciones de los conceptos y de procedimientos en el aula de una forma más coherente. El análisis lo organizaron por medio de ocho temas, los cuales son:

- La derivada.
- Continuidad y derivabilidad.
- Interpretación de la derivada o definición de tangente.
- La función derivada.
- La diferencia.
- Algunos enunciados llamativos.
- Derivada de la función recíproca.
- Bases del estudio local (Crecimiento y decrecimiento, Máximos y mínimos y Concavidad, convexidad y puntos de inflexión)

Para la introducción del concepto de derivada mecionan algunas consideraciones, por ejemplo, describen que el funcionamiento del radar de la policía de tráfico es un modelo muy adecuado para introducir el concepto de velocidad instantánea, y otro enfoque que debe estar presente es el epistemológico, ya que aportan ideas básicas que están subyacentes en el propio concepto, y que son las que suelen perdurar. En este punto también analizan las definiciones y propiedades que aparecen en los libros dando a conocer dificultades que se pueden dar en el aprendizaje del estudiante. En el tema de interpretación de la derivada se refieren a la interpretación geométrica de la derivada como recta tangente haciendo ver, al igual que la autora López de los Mozos, cómo definir la recta tangente a la curva en un punto. En la sección de algunos enunciados llamativos, dan a conocer como se presentan algunos ejercicios en los libros, y las dificultades que podrían acarrear en la comprensión de parte de los estudiantes, un ejemplo que describen es el siguiente:

Ejemplo 2. A veces se leen cosas como ésta "Calcular las derivadas laterales en x = 0 de la función $f(x) = x^2 sen(x^{-2})$*". El autor, sin duda, ha querido escribir la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(x^{-2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Que es continua en toda la recta real.

Pineda (2013) en su trabajo **Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria** inicia su estudio considerando el desarrollo histórico del concepto de derivada, describiendo por ejemplo, el método de Fermat para hallar máximos y mínimos, el método de las tangentes de Fermat, el método de Newton para determinar la cuadratura de una curva, entre otros. A continuación, desarrolla el aspecto que llama reflexiones didácticas sobre el concepto de derivada en el cual cita a Azcárate et al. (1990) quien describió que el docente debe considerar cuatro factores claves para que la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada tenga éxito, los cuales son:

1. Partir de las concepciones previas que los alumnos tengan del concepto de velocidad.
2. Usar gráficos de funciones que permitan visualizar claramente las ideas especialmente cuando se habla de pendiente de una recta y tasas medias de variación.
3. Usar problemas concretos en los cuales el estudiante relacione lo que aprende con situaciones de la vida diaria.
4. Tener claro las dificultades que se presentan cuando se realiza el proceso de paso al límite en una función y entender que el límite no es solo un proceso de sustitución de una variable por un valor y realizar unas operaciones, ya que este concepto va más allá de esto.

El autor además agrega a estos cuatro elementos la necesidad que el alumno debe poseer una serie de conocimientos previos en geometría elemental y trigonometría, los cuales deben estar acompañados de preconceptos, meciona:

1. Dependencia entre variables.
2. Nociones de: función, Dominio y rango de una función, Grafica de una función, Crecimiento y decrecimiento de funciones, Tasa media de variación.
3. Función lineal y afín.
4. Pendiente de una recta.
5. Velocidad media.
6. Recta tangente y secantes a una curva.

En este apartado trabaja en los temas de La razón de cambio, La velocidad media, Pendiente de una recta, La razón de cambio entre dos puntos de una curva, Rectas secantes y tangentes de una función en un punto dado y Velocidad instantánea. En ellos considera aspecto como la definición de los conceptos, algunas consideraciones en las actividades que se puedan generar, algunos ejemplos de situaciones (actividades) y fenómenos en los cuales se pueden aplicar. En en tema de la razón de cambio describe fenómenos que puede considerar el docente para modelar situaciones de enseñanza, menciona:

- *La **velocidad de enfriamiento** (o calentamiento) de un cuerpo o un líquido es la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.*
- *El **índice de precios** es la razón de cambio de los precios con respecto al tiempo.*
- *El **índice de natalidad** es la razón de cambio de una población con respecto al tiempo.*
- *La **pendiente de una recta** es la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente.*
- *La **velocidad** es la razón de cambio del desplazamiento de un objeto con respecto al tiempo.*

En el tema de velocidad media describe como necesario considerar aspectos como:

- *Establecer un intervalo de tiempo durante el cual se realiza el desplazamiento.*
- *Al usar la velocidad media en un intervalo de tiempo no se tienen en cuenta las variaciones que sufre la velocidad real durante dicho intervalo.*
- *La velocidad media de un móvil se utiliza para facilitar la interpretación de movimientos uniformes que pueden ser útiles en muchos casos.*

El autor finaliza su trabajo proponiendo actividades de enseñanza en siete temas que son: identificación de varianles dependientes e independientes, funciones y sus gráficas, función lineal y afín, razón de cambio promedio, velocidad promedio e instantánea, derivada de una función y recta tangente a una función en un punto dado usando GeoGebra.

En el estudio de Ortega et al. (2002) describen la investigación que lleva a cabo un grupo de investigadores participantes del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática, del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso referente a la conceptualización que lograban los estudiantes de los cursos de Cálculo. Debido a la baja calidad del aprendizaje mostratada por parte de los estudiantes de una Universidad, nace la preocupación por saber cómo estaban enseñando los profesores estos contenidos con el fin de establecer orientaciones que favorezcan los aprendizajes y buscando dar respuesta entre otras interrogantes el cómo mejorar el quehacer docente de los profesores de cálculo. La investigación llevada a cabo se focaliza en la metodología empleada por los profesores que imparten o han impartido diferentes cursos de la línea de Cálculo en los primeros años universitarios en una universidad escogida. Para ello elaboraron un cuestionario y lo aplicaron a 32 profesores pertenecientes a la universidad. En la Unidad de Derivadas consideraron los temas: Concepto de derivada, Cálculo de derivadas, Interpretación de la Derivada, Teoremas claves en el tema, Máximos y mínimos, Gráfico de Curvas y Problemas de aplicación. Cada uno de estos temas lo trabajaron a través de siete parámetros en las preguntas: grado de dificultad, grado de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, uso de ejercicios y problemas, tipo de representción de la materia y metodología en clases.

Dentro de su metodología utilizan el análisis a priori, en el cual dan a conocer cuál sería el perfil del “buen profesor” (de acuerdo a la respuesta esperada en cada una de las preguntas del cuestionario), estas consideran:

- el profesor le asigna alguna dificultad los temas de derivada, puesto que no es de inmediata aceptación por los alumnos.
- el profesor le asigna bastante importancia a los temas de derivada, pues la institución lo hace, por considerarlo herramienta matemática básica.
- el profesor utiliza el tiempo estipulado en el programa de estudio.
- el profesor usa dos o más ejemplos ilustrativos por concepto, pues estima que los alumnos aprenden mejor si se ilustran los conceptos matemáticos con ejemplos pertinentes.
- el profesor selecciona ejercicios y problemas abiertos en distintos contextos y en los cuales la demostración es relevante. De esta manera muestra originalidad al tratar los temas seleccionando ejercicios y problemas distintos de los de las guías institucionales.
- el profesor combina adecuadamente lo algebraico y lo gráfico para enseñar los temas. De esta manera utiliza el registro algebraico-simbólico y lo complementa con el registro gráfico en beneficio del concepto que va a enseñar.
- el profesor privilegia la actividad de los alumnos, esto como metodología usada en sus clases.

Como conclusiones en su estudio obtuvieron que los 32 profesores encuestados se caracterizan, en general, por enseñar el tema de derivadas en forma adecuada, cercano al perfil del profesor ideal. Del análisis clasificatorio que aplicaron destacan la existencia de tres grupos de profesores, uno de ellos está formado por profesores que se preocupan de entregar una buena enseñanza a sus alumnos, poniendo empeño en ello, el segundo grupo se caracteriza por realizar su actividad docente con un mínimo esfuerzo y el tercer grupo de profesores no se pronuncian sobre estos temas.

El análisis realizado a través del software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), les permitió obtener una visión acerca de las prácticas

docentes de los profesores, identificando donde se dan las falencias. Estas son: el uso de solo un registro de representación en la enseñanza
de los temas, privilegiando el registro algebraico – simbólico; Seleccionan ejercicios rutinarios y problemas clásicos; no seleccionan problemas abiertos, no realizan demostraciones, en general. La metodología que más aplican en clases es la exposición, no se privilegia la actividad de los alumnos. Características que se alejan bastante del perfil del buen profesor.

Tanto el perfil dado al buen profesor, así como las falencias encontradas en las practicas docentes de los profesores en este estudio, nos orientan acerca de las decisiones y acciones que podemos y aquellas que debemos evitar, para mejorar nuestra enseñanza en post de un mejor aprendizaje de nuestros estudiantes en la asignatura de cálculo.

4.3 Análisis de instrucción

Este análisis contempla el desarrollo de las planificaciones de las clases a implementar y analizar posteriormente, en nuestro caso, se presenta la planificación de la clase 1 y 2.

a) Planificación de clase 1

Plan de enseñanza sobre la resolución de problemas de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada.
Alumnos de Cálculo I, carreras de Ingeniería en Construcción y Prevención de Riesgos, Instituto profesional DuocUC

1. **Nombre de la clase:** Problemas de optimización de funciones.

2. **Sobre el tema de la clase:**
El concepto de derivada es uno de los pilares del cálculo y su comprensión es determinante en el ámbito de aplicaciones de la ingeniería, sin embargo, alcanzar el nivel de comprensión necesario para lograr su aplicación independiente de una intención didáctica es un camino complejo. Un importante obstáculo a considerar en la instrucción es la articulación entre la concepción geométrico-gráfica y la concepción algebraica.

3. Consideraciones de la secuencia de clases:

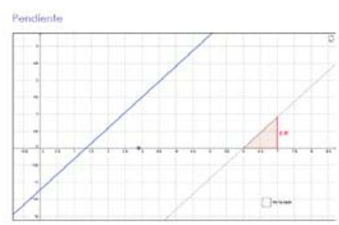
Del análisis a priori desarrollado sobre el tema de derivada obtuvimos evidencias de la dificultad que poseen algunos estudiantes de interpretar geométricamente la derivada, como pendiente de la recta tangente o de dotar de significa gráfico a la derivada de la función en un punto f`(a) al confundirlo con la ordenada en x = a, en f(a). Junto con ello, agregamos el antecedente que nos da nuestra práctica sobre los bajos resultados que obtienen los alumnos de nuestro instituto al resolver problemas de optimización, al cual subyace el problema de identificar y establecer los puntos críticos de la función.

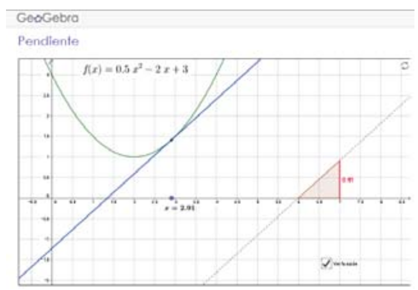
Por ello, que definimos nuestra hipótesis: la interpretación geométrica de la derivada permite una mayor comprensión para determinar la relación de los valores críticos de la función y su función derivada.

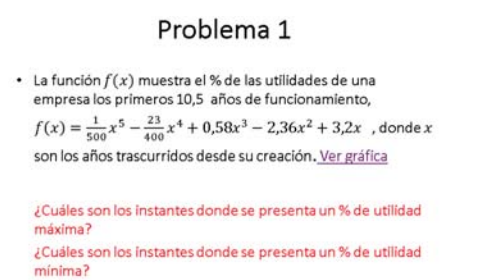
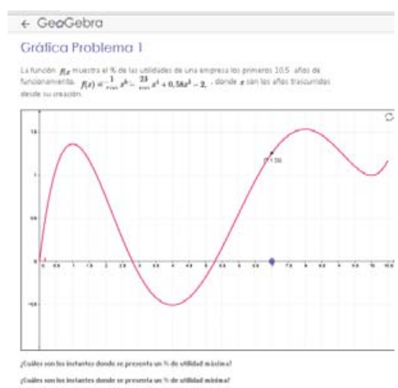
Se trabajará con problemas presente en las guías de cálculo sobre optimización, pero introduciremos su solución en una primera instancia de manera gráfica. Con ello vamos a ir introduciendo la relación de los valores críticos de la función y su función derivada para llegar a establecer esto como un método analítico de resolver estos tipos de problemas.

4. Objetivo de la clase:

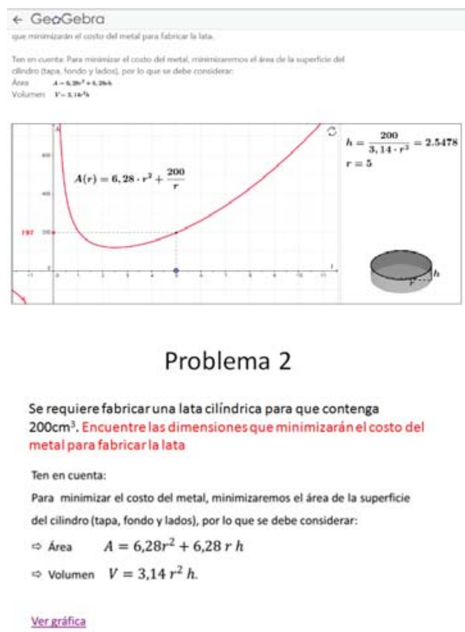
Establecer la relación de los valores críticos de la función y su función derivada para ser aplicada en la resolución de problemas de optimización.

Tiempo (minutos)	Descripción de la actividad	Recursos usados	Asistencia del profesor
10	Los alumnos desde la diapositiva deben ingresar al applet 1, el cual pueden manipular, moviendo la recta que aparece en ella. **Profesor:** Pregunta si recuerdan qué es la pendiente. *Se espera que indiquen la pendiente como la inclinación de la recta con el eje x*	 El applet 1 consiste en la gráfica de una recta y al lado derecho de la pantalla aparece el valor de la pendiente de la recta.  Link applet 1: https://www.geogebra.org/m/gRQ3BqZc	▪ El profesor recuerda el concepto de pendiente, pero sobre todo enmarca que esta posee un valor, muestra en el applet qué sucede con el valor de la pendiente cuando la recta toma diferente posiciones. ▪ Va junto con los alumnos escribiendo la derivada de la función en la pizarra.

10	A continuación, los alumnos deben marcar en el applet la opción función, aquí aparecerá la gráfica de una función cuadrática, junto con la gráfica de recta, que corresponde ahora a la recta tangente. **Profesor:** Pide a los alumnos que deriven la función que aparece en el applet. Escribe la derivada en la pizarra. Luego pide a los alumnos que evalúen la función cuando x = 3,5 **Profesor:** Pregunta ¿qué relación existe entre la derivada y pendiente de la recta tangente a la función? *Se espera que los alumnos indiquen que es el mismo valor.*		▪ El profesor recalca que el valor obtenido a evaluar la función derivada en x = 3,5 es el mismo valor de la pendiente de la recta tangente en x = 3,5 ▪ Una vez que los alumnos evalúen la función derivada, dice que comparen el valor que encontraron al evaluar la función derivada en x= 3,5 y el valor de la pendiente de la recta tangente. ▪ Cuando digan la relación se les pide que verifiquen la relación encontrada, con otro valor para x. ▪ Esperando que todos respondan, se resume la relación en conjunto con los alumnos. estableciendo que la derivada en un punto corresponde a la pendiente de la recta tangente en ése punto.

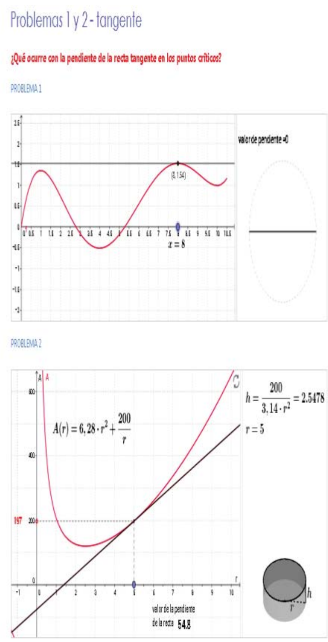
10	Pasan a la siguiente diapositiva, en la cual se presenta el problema 1 de optimización. Deben acceder al applet 2 en el cual podrán manipular un punto en el eje de las abscisas y determinar visualmente los puntos críticos de la función. **Profesor:** Pide que a partir de la gráfica respondan las preguntas del problema. Los alumnos manipulan la gráfica unos minutos. **Profesor:** pide a un alumno que escriba en la pizarra, su respuesta a la primera pregunta. Se pide que sus compañeros comparen sus resultados con lo expuesto en la pizarra. **Profesor:** pide a un alumno que escriba en la pizarra, su respuesta a la segunda pregunta. Se pide que sus compañeros comparen sus resultados con lo expuesto en la pizarra.	 	▪ Profesor indica que el punto marcado en la gráfica se puede mover. ▪ Cuando un alumno escriba la respuesta a la primera y segunda pregunta, pedirá que indiquen cuál es el % de utilidad en el instante de tiempo de las respuestas dadas por el compañero o compañera. (esto es para identificar si comprenden lo que representa la gráfica) ▪ Sí un alumno entrega otro resultado distinto a lo descrito en la pizarra, el profesor le pide que escriba su respuesta en la pizarra, se revisará entre todos con la proyección de uno de los computadores de algún alumno, el valor dado por el alumno para visualizar gráficamente si es máximo valor o un mínimo valor.

	Profesor: establece que visualizando la gráfica se puede indicar que transcurrido 1 año y 8 años son los instantes donde hay mayores utilidades, y que transcurrido 4 años y 10 años son los instantes donde hay menores utilidades. **Profesor:** pregunta a los alumnos si recuerdan cómo se llaman estos puntos de la gráfica en dónde se observan las mayores y menores utilidades. *Se espera que respondan puntos críticos* **Profesor:** pide a los alumnos que describan cuándo pueden identificar gráficamente que la función tiene un máximo o un mínimo.		

15	Abordan un nuevo problema de optimización aparentemente con las mismas condiciones, a partir de la exploración del applet 3 deberán dar respuesta a las preguntas planteadas. **Profesor:** Pide a dos alumnos que le digan la respuesta de ellos. *Se esperan respuestas aproximadas a la solución y distintas entre los alumnos, establecen la aproximación mediante la manipulación de un punto en la gráfica de la función* Con ayuda de un compañero el profesor solicita que comparen los resultados dados, e indiquen cuál de ellos entrega una menor área. **Profesor:** ¿Deja inquietud la pregunta si se puede ser más preciso? En base a las comparaciones entre los resultados de los alumnos, los alumnos deben responder cuáles son los valores de las dimensiones de	 Link applet 3: https://www.geogebra.org/m/u2hFywjb?doneurl=%2Fleander	▪ Visualizan Appet 3, de la gráfica de la función área, pueden mover un punto en el eje horizontal y obtener los valores de la función, en este caso el valor de la abscisa del punto mínimo es un número irracional. ▪ El valor que se busca es un irracional, el profesor les indica a los alumnos que traten de aproximarse lo más que puedan. ▪ Se insistirá si están de acuerdo con los datos que están entregando. ▪ Se pedirá a un alumno que muestre la gráfica en los valores dados por sus compañeros. En el caso que sea necesario se indicara que hagan zoom a la pantalla para ver valores más pequeños de la abscisa. ▪ Como se entrega la aproximación al valor

	la lata cilíndrica que minimizan los valores de fabricación. Luego el profesor pregunta ¿hay puntos críticos? ¿cuántos? *Se espera que los alumnos respondan sí.*		correcto, el profesor acuerda con los alumnos que los valores hasta ahora dados por ellos son una buena solución. ▪ El profesor recuerda qué es un punto crítico.
20	Luego, se les da un tercer problema. Se discute de la dificultad añadida (no hay gráfica que explorar) *Se espera que no puedan responder a las preguntas.* Profesor: pregunta ¿cómo resuelven este problema? ¿Si no se tiene la gráfica, cómo se puede resolver este problema?	Problema 3 El rendimiento de un ciclista está dado por la rapidez que alcanza. Si entrena siete horas en forma continua su rendimiento será de $\mathrm{R}(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ (km/h), donde t son las horas transcurridas desde que inicia la práctica. • ¿Después de cuantas horas de entrenamiento se observa el máximo rendimiento del ciclista? • ¿Durante que tramos de tiempo el rendimiento del ciclista disminuye?	▪ Dan cuenta de que se requiere de un método analítico que les permita determinar puntos críticos. ▪ Hace ver a los alumnos cómo habían dado respuesta a los problemas anterior, buscando que los alumnos describan el uso de la gráfica, para mostrar que ahora no cuentan con la gráfica. ▪ El profesor hacer ver la necesidad de contar con un método analítico

	Para poder resolver este problema el profesor pedirá a los alumnos que revisen cómo se resolvieron los problemas anteriores, pero buscando introducir el concepto de derivada.		

15	**Profesor:** Invita a que revisen los dos problemas anteriores. Los alumnos deben ir a la siguiente diapositiva. **Profesor:** indica a los alumnos que el applet 4 tiene la gráfica de los dos problemas anteriores, pero además está gráfica la recta tangente. Pregunta ¿cómo se llama esta recta? *Se espera que los alumnos respondan que es la recta tangente.* El profesor solicita que manipulen el gráfico y vean cuál es la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente y los puntos críticos.		▪ El profesor invita a los alumnos que resuman con qué iniciaron la clase. ▪ El profesor les dice a los alumnos que ubiquen en la gráfica (manipulando el valor de x) los valores críticos. ▪ El profesor recalca que vean el valor de la pendiente de la recta tangente cuando se posiciona en los puntos críticos, les pide que manipulen la gráfica. ▪ Guía a los alumnos para que revisen el desarrollo de la gráfica del applet 1 y qué habían calculado la derivada y cómo era la pendiente en ése punto.

	Se espera que los alumnos describan que en los valores críticos el valor de la pendiente de la recta tangente es 0. Además, el profesor solicita que esa pendiente con qué era igual. Se busca que los alumnos recuerden que la derivada es igual a la pendiente de la recta tangente.	Link applet 4: https://www.geogebra.org/m/D6mPe7p3?doneurl=/leander	
20	Con la relación encontrada, el profesor pide a los alumnos que retomen el problema 3 y qué indiquen qué tendrían que buscar para resolver este problema. *Se espera que los alumnos respondan, derivar.*		▪ El profesor insiste a los alumnos qué es lo que deben buscar, dónde están los máximos y los mínimos. ▪ Si es necesario se retoman los applets anteriores para repasar gráficamente la relación entre la pendiente de la recta tangente y la derivada.

	Profesor: insistirá en que hay que buscar un método analítico sin tener la gráfica para resolver el problema, pregunta a los alumnos cuál puede ser. Se espera que los alumnos digan derivar. Luego les solicita que deriven la función. Una vez que encuentran la función derivada, pregunta ¿cuál sería la manera de resolver el problema utilizando esa derivada? ¿cuál es la relación con los puntos críticos? Se da tiempo para que los alumnos deriven la función. Luego se escribe en la pizarra esta. Profesor: ¿cómo debe ser la derivada? *Se espera que los alumnos indiquen que deben ser igual a cero.*		▪ Cuando igual a cero la derivada, el profesor enfatiza qué es lo que deben resolver ahora. ▪ Un alumno resolverá en la pizarra la ecuación, ayudado por sus compañeros. ▪ Cuando se les pregunte si los valores encontrados son un máximo o un mínimo, los alumnos pueden responder que se debe evaluar la

	Profesor: una vez que los alumnos indican que la deben igual a cero la derivada pregunta ¿qué es lo que debe resolver cuánto igualan la función derivada a cero? Se pide a un alumno que escriba en la pizarra la derivada igualada a cero. Profesor: Pregunta ¿qué es lo que debemos resolver ahora? *Se espera que los alumnos digan una ecuación.* Cuando los alumnos respondan que es una ecuación, el profesor pregunta ¿qué tipo de ecuación es? ¿cómo se resuelve esta ecuación? Se espera que utilicen la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Se espera que obtengan los valores 2 y 6 cuando resuelvan		función en estos puntos, o también pueden buscar graficar la función. En este caso cualquiera de estas estrategias que utilicen los alumnos será escrita y desarrollada en la pizarra. ▪ Los alumnos deben escribir en sus cuadernos los pasos que deben seguir para resolver estos ejercicios.

	la ecuación. El profesor pregunta ¿qué son los valores qué encontraron? Se espera que respondan que son puntos críticos. Profesor: ¿estos valores son un máximo o un mínimo? *Se espera que evalúen la función en estos puntos o que quieran esbozar la gráfica de la función*. Se da un espacio para que los alumnos exploren para ver si los valores encontrados son un máximo. Se trabajará todos juntos desarrollando en la pizarra. Se espera que los alumnos determinen que en el valor x=2 existe un máximo de la función. Una vez que se llegué esto el profesor pide que respondan a la pregunta. Para finalizar, el profesor pide que indiquen entre todos que pasos deben realizar para resolver estos tipos de ejercicios.		

b) Planificación clase 2

Se implementa la clase 1. Del análisis de la implementación de esta primera clase se consideraron los siguientes aspectos para la segunda clase:

- Disminuir las actividades solamente al problema 1 de la actividad planteada en la primera clase, pero se modificaron las preguntas de modo, que los alumnos comiencen activando su conocimiento de las funciones, para luego ir introduciendo el concepto de la pendiente de la recta tangente y los valores máximos y mínimos.
- También se modificó la función del problema, ya que este trataba del porcentaje de utilidades de una empresa y en el gráfico que se presenta de la función aparecen valores negativos, esto se contradice con el concepto de utilidades.
- Del análisis se estableció que en la primera parte de las actividades se dieran valores de la variable independiente, de modo que los alumnos obtuvieran valores que iban disminuyendo, en el momento de compartir sus resultados y conclusiones todos respondieran que la función decrecía en el intervalo de tiempo que les era solicitado. En este momento se les preguntará por el valor en el cuarto año, que es dónde se encuentra un mínimo de la función, de modo de hacer nacer la necesidad de explorar de otra manera la función para analizar su comportamiento. Junto con lo anterior se decide que la forma de proceder y de trabajar la clase centrándola en los alumnos. Esta decisión buscó emular, dentro de lo posible, proceso de devolución de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau , Alagia, Bressan y Sadovsky (2005).

Finalmente, la segunda clase es la que se presenta a continuación.

OPTIMIZANDO FUNCIONES REALES EN UNA VARIABLE

Instrucciones:

Todo el desarrollo y respuesta debes escribirlo en la hoja.

Situación:

En una determinada empresa de construcción, el % de sus utilidades los primeros 10,5 años de funcionamiento, se puede determinar con la función descrita a continuación:

$f(x) = \frac{1}{500}x^5 - \frac{23}{400}x^4 + 0{,}58x^3 - 2{,}36x^2 + 3{,}2x + 0{,}52$, x son los años trascurridos desde su creación

Parte I

a) ¿Se puede afirmar que a partir del segundo año el porcentaje de las utilidades de la empresa comenzaron a disminuir?
b) Para complementar su respuesta a la pregunta anterior, describa cuál fue el porcentaje de utilidad de la empresa al tercer año y al quinto año.

Parte II

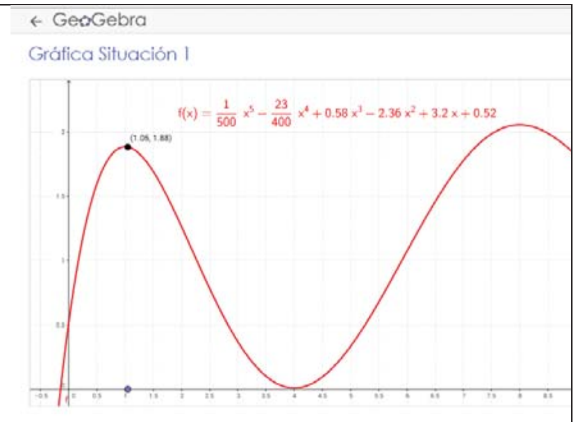
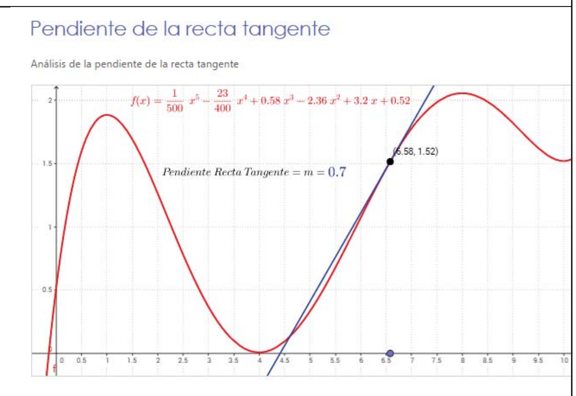
Usando la gráfica de la función con la recta tangente a la curva, responda:

a) Qué elemento de la recta tangente le permite describir si se produce disminución en la utilidad de la empresa. Cómo podríamos indicar cuándo existe un decrecimiento en la función.
b) Qué elemento de la recta tangente le permite describir si se produce aumento en la utilidad de la empresa. Cómo podríamos indicar cuándo existe un crecimiento en la función.

Parte III

a) Derive la función.
b) Evalúe la derivada en el segundo, tercero, cuarto y quinto año.
c) Observe la tabla resumen de todos los análisis obtenidos, qué le llama la atención, qué podría concluir.

Los applets usados en esta clase se encuentran en los links:

<table>
<tr>
<td>http://tube.geogebra.org/m/Vsr5Aw2V?doneurl=%2Fjanekyf</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>http://tube.geogebra.org/m/uJMd39JQ?doneurl=%2Fjanekyf</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

4.4 Análisis de actuación

En el capítulo II se identifican los diferentes análisis que se llevan a cabo en el análisis didáctico, el último de ellos corresponde al análisis de actuación en el cual, tal como se describe en dicho capítulo, una vez que se ha ejecutado la unidad didáctica se debe hacer una evaluación y reflexión en torno a lo que se logró y en qué medida de lo que se ha planificado, identificar cuáles fueron estos aspectos que se lograron y en cuáles se presentaron falencias o no se lograron. Todo esto con el fin de rediseñar la unidad didáctica para alcanzar las expectativas de aprendizajes. Este análisis se relaciona con la fase de reflexión de la investigación-acción. Bajo el modelo MTSK se identificará que conocimiento del profesor en el desarrollo de la clase.

Para ello se divide la clase en 9 episodios, cada uno de ellos analizados desde el MTSK.

El primer episodio significativo de la clase se ilustra en la tabla 2.

Tabla 2. Episodio 1.

Sujeto	Texto (grabación)
P	Vamos a trabajar en la resolución de problemas de optimización.
P	Primero les pido que trabajen en grupo, máximo tres alumnos, lean la situación que está en la guía y contesten las preguntas entre ustedes. Luego compartiremos entre todos.
A	*si poh, porque está multiplicando, la x, por lo tanto, tengo que mantener esa y derivar a x derivado a 5 y la x derivado a 5 vendría siendo una función como 5 por x elevado a cinco menos 1, es cuatro, partido por x menos 1 perdón al exponente a menos 1, eso igual da 4, entonces tengo que multiplicar esto y mantener lo que es x ¿está bien o no?*
P	*Pero mira si te pidieran derivar x elevado a dos ¿cómo quedaría?*
A	*¿x elevado a 2? quedaría… ehmm x elevado a dos… dos x partido por una.*

A	*A2: es que… sí, porque esos se multiplican y quedaría cuatro acá... a mí se me olvido eso.*
P	*P: eso es una constante, es un número, y ¿la derivada de una constante?*
A	*A2: se mantiene.*
P	*P: ¿se mantiene? Pero la pregunta es acá cuando tienes x elevado a cinco*
A	*A2: no es esto por esto, cinco por…cinco por sería cero coma cero uno, eso me da ahí*
P	*P: ya y ¿cómo queda la variable?*
A	*A1: Sería cero como cero uno ehh… cinco, x cinco así ¿o no?*

En el episodio 1 de la clase se puede evidenciar el conocimiento del análisis de contenido sobre término, tareas que da la profesora para la enseñanza o en este caso resolver situaciones de optimización de funciones, el conocimiento matemático sobre las reglas de derivación de polinomios, para interpretar las preguntas y respuestas de las dos estudiantes. Focalizando su atención en la parte en que están derivando un término del polinomio. Interpreta que lo que intenta una alumna es aplicar la regla de derivación cuando se tiene un múltiplo constante y la regla para derivar una potencia focalizando la atención de las estudiantes en esta última ya que ahí es donde las alumnas demuestran un error, estas reglas ya les fueron enseñadas a las alumnas. Por otra parte, la profesora devuelve a las estudiantes sus dudas preguntándoles por conceptos o estableciendo analogías con otras situaciones, tal es el caso cuando las alumnas están derivando el término $\frac{1}{500}x^5$ y les pregunta cuál es la derivada de x^2, esto podría interpretarse como el conocimiento de la profesora de las características de aprendizaje de las matemáticas. Está presente el análisis de instrucción con la puesta en acción de secuencias y tareas, análisis cognitivo con la oportunidad de aprendizaje y podríamos evidenciar también el proceso de devolución de la teoría de situaciones didácticas, analizando desde el modelo MTSK se evidencian los subdominios KMP y KFLM.

Posteriormente en el episodio 2, corresponde al momento de la clase en el cual comienzan a compartir los resultados que obtuvieron en la parte I de la guía, aquí los alumnos evaluaron la función en los valores dados, pero este lenguaje no es utilizado por ellos, pero es rescatada la forma como lo expresan y la profesora escribe en la pizarra la forma correcta. Además, en este momento se produce lo que era esperado cuando fue planificado la actividad, los alumnos concluyeron que la función decrecía, entonces la profesora pregunta qué ocurre en el cuarto año, para hacer nacer la necesidad de estudiar la función de otra forma, apoyándose en la gráfica.

Tabla 3. Episodio 2

Sujeto	*Texto (grabación)*
A3	*Reemplazar*
P	*¿qué reemplazó?*
A3	*primero para poder decrecer, para comenzar a decrecer primero sacamos el de un año para saber en cuanto iba, y ahí salía uno ochenta y ocho*
P	*ya, y cómo hizo eso*
A	*reemplace en la fórmula de f de x f de uno*
P	*ya, y eso quedaba*
A	*uno coma ochenta y ocho*
P	*o sea donde está la x…*
A	*exacto, y el segundo año hice exactamente lo mismo y me dio uno coma dos sesenta y cuatro*
A	*uno coma veinte seis*
P	*¿uno coma?*
A	*sesenta y cuatro*
A	*coma veinte seis*
A	*O sea, uno coma veinte y seis, ahí nos dimos cuenta que estaba decreciendo*
P	*ya, y qué paso en el tercer y quinto año*
A	*En el tercero nos dio cero coma tres seis y el quinto año nos dio cero coma tres, cero coma treinta y tres, y ahí nos dimos cuenta que estaba decreciendo*
P	*ya, ustedes dicen que decrece, ¿alguien hizo otra cosa?*

	mmm…no
A	*Profe…*
P	*Dígame*
A	*es que nosotros lo hicimos partiendo desde el comienzo de la empresa, que sería desde el cero*
P	*Ya, y cuánto les da ahí*
A	*cero coma cincuenta y dos*
P	*y después qué hizo*
A	*después nos fuimos altiro al segundo año, para ir viendo qué va pasando desde los comienzos del segundo año, y bueno para nosotros en ese caso sería que fue un aumento*
P	*¿entre quién?*
A	*entre el primero, entre los inicios de la empresa y el segundo año*
P	*entonces, entre los inicios y el segundo año. Ya, ¿y después que pasa?*
A	*después disminuye, en el tercero y quinto año disminuye*
P	*entonces, entre el tercer y quinto año disminuye. Ya, alguien hizo algo más. Ahora, qué pasa en el cuarto año, vean que ocurre en el cuarto año.*
A	*da cero coma cero uno*
P	*¿qué ocurre entonces? ¿qué está ocurriendo con la función? ¿cómo podemos saber esto? Qué otra estrategia, o de qué otra forma podríamos saber qué pasa con la función*
A	*con la gráfica*

En el episodio 2 de la clase cuando los alumnos dan sus respuestas la profesora interpreta y acepta el lenguaje que usan los alumnos para leer un decimal, así como también cuando describen la evaluación de la función en los valores solicitados, transcribiendo estos en la pizarra.

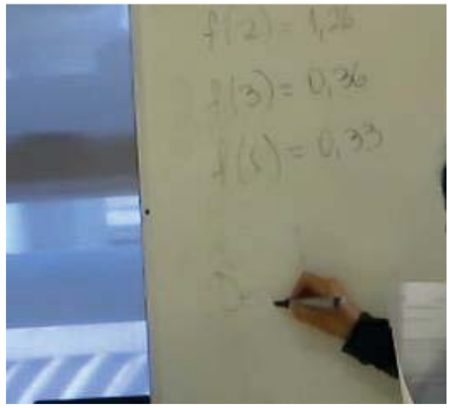


FIGURA 12. EJEMPLO DE TRADUCCIÓN A LENGUAJE MATEMÁTICO DE LA EVALUACIÓN DE LA FUNCIÓN DESCRITA POR LOS ALUMNOS.

Usaremos el indicar definido por Sosa, Leticia et all (2015) “KFLM1. Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje” para indicar que este conocimiento se evidencia en la profesora. También rescatamos el momento en el cual un alumno indica que hay momentos en el cual aumenta el porcentaje de utilidad y disminuye, la profesora pregunta ¿entre quién? Contestando A5 “entre el primero, entre los inicios de la empresa y el segundo año”, podemos inferir en la necesidad que se tiene para que no quede como respuesta valores discretos. Estos están relacionados con el análisis de contenido (registros verbales y simbólicos) y con el análisis cognitivo, esto se puede evidenciar cuando produce el quiebre en las conclusiones de los alumnos al preguntar qué ocurre en el cuarto año.

A partir del episodio 6 (tabla 4) de la clase se evidencia el uso del recurso didáctico GeoGebra como un medio para comprender el comportamiento de la función, así como también para corroborar los resultados y respuestas dadas por los alumnos e implícitamente está usando el conocimiento de los registros de representación asociado al concepto de función, el registro gráfico.

Tabla 4. Episodio 6.

Sujeto	Texto (grabación)
P	ya, miren en su computador tienen un archivo en power point, ábranlo e ingresen donde dice gráfico 1. Ahí hay que esperar un poquito se demora, pero va aparecer.
P	¿lograron ingresar? ¿Qué pasaba ahí con la gráfica? ¿qué pasaba con la función? ¿decrecía después del segundo año?
A	pero después vuelve a aumentar en el cuarto y vuelve a disminuir en el ocho
A	vuelve a aumentar en el cuarto, en el quinto….
P	Pero después vuelve a aumentar no cierto desde donde empieza a aumentar más menos
A	Desde el cuarto, aumenta, luego en el octavo vuelve a decrecer y vuelve luego a descender en el diez coma cinco
P	Exacto, y pueden, fíjense ahí abajito en el eje x está el puntito morado
A	si uno
P	y ése puntito morado ustedes lo pueden mover y arriba les va entregando, o sea, ése valor lo pueden mover ahí les va entregando el valor del punto en la grafica
A	ah…va entregando del …
P	entonces ahí pueden comprobar, por ejemplo, los valores que les daban a ustedes, por ejemplo, ¿en el segundo año da el valor?
A	si está bien
A	si da el resultado
P	les da el resultado no cierto
A	Sí…
A	ah que bakan que tengo esto el GeoGebra

En este episodio el conocimiento del profesor que emana es sobre la enseñanza de las matemáticas. Estamos frente al análisis de instrucción en el uso del recurso manipulativo que en MTSK corresponde al KMT, así como también podemos estar en presencia del análisis de contenido referido al registro de representación relacionándose con el subdominio KoT.

En el episodio 7 (tabla 5) se describe el momento de la clase en que los alumnos están trabajando con el applets creado, en el cual aparece la gráfica de la función de la situación planteada, la gráfica de la recta tangente a la curva y el valor de la pendiente, el cual fue diseñado para que cambiara de color dependiendo si su valor era negativo, positivo o cero. Con esto se buscaba que relacionaran los valores de la pendiente de la recta tangente con el crecimiento o decrecimiento de la función, así como también con el valor de ésta en los puntos críticos.

Tabla 5. Episodio 7.

Sujeto	**Texto (grabación)**
P	pudieron comprobar sus valores, todos los observan en la gráfica
A	Sí…
P	ya ahora vayan de nuevo por favor, de nuevo al power point y vayan donde dice gráfica 2
A	Ya
P	Si se fijan es la misma función, pero ahora apareció otra cosa ahí, qué aparece
A	la pendiente
P	¿pendiente? ¿y qué más? hay otra grafica ¿de qué?
A	de la recta
P	qué recta es esa
A	Tangente
P	Recta tangente no cierto y además les entregan ahí un valor a ustedes
A	cero coma siete
P	¿y ese cero coma siete en este caso a qué corresponde? En el caso de la compañera aquí tiene cero coma siete, cero coma siete, ahh todos tienen cero coma siete
AS	a la pendiente
P	¿es la pendiente de quién?
AS	del y
P	¿es la…? ¿Es la pendiente de quién?
A	de la gráfica ¿o no?
P	de la gráfica ¿de la gráfica de quién? Porque ahí tenemos la gráfica de la función ¿no cierto?, que es esa curvita que sube y baja, además tenemos otra gráfica, de una…
A	de una…recta
P	de la recta tangente no cierto, ya, y esa pendiente de quién, es
A	de la tangente

P	de la recta tangente, entonces miren muevan el valor en el eje x, muevan el puntito, fíjense que va ocurriendo con ése valor de ésa pendiente
A	es para determinar el punto crítico, si decrece o…si porque después en negativo
A	Negativo
A	valor de crecimiento y decrecimiento?
P	se dan cuenta que va pasando con el valor
A	va aumentando o…
P	aumentando pero en alguno también…entonces miren con esta situación ahora respondan a esta parte por favor.

En el momento 7 de la clase la profesora recurre a los conocimientos previos de los alumnos que son la recta tangente y pendiente. Sin embargo, cuando los alumnos le responden que es la pendiente ella quiere verificar a qué están llamando pendiente, por eso insiste en preguntar la pendiente de quién. Por otra parte, se nota el detalle que tiene la profesora al referirse al tipo de recta, cada vez que los alumnos se refieren a la recta tangente, como es el caso cuando responden “tangente” o la “recta”, la profesora repite “recta tangente”. La intencionalidad detrás de esto es debido al objetivo de la clase que es la interpretación geométrica de la derivada a través de la pendiente de la recta tangente, además de establecer el lenguaje correcto de los conceptos matemáticos. A partir de este momento de la clase, también se evidencias conocimientos sobre conceptos matemáticos de valores críticos y puntos críticos, la interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Recordamos que en el diseño de la actividad se tomó la decisión de modificar la primera clase que se llevó a cabo en cuanto a la actividad y el papel que juega los alumnos en ella, centrándola en ellos. Esta decisión busco emular, dentro de lo posible, proceso de devolución de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, Alagia, Bressan y Sadovsky (2005). Es por ello que se observa que la profesora pregunta constantemente a los alumnos, y frente a respuesta de ellos los guía para que sean ellos lo que puedan obtener la respuesta.

La tabla 6 muestra una síntesis de la presencia de los subdominios en cada uno de los episodios de la clase.

La tabla 6. Síntesis de la presencia de los subdminios en cada episodios de la clase.

Episodios	KoT	KSM	KPM	KFLM	KMT	KMLS
1	1	-	-	1	-	-
2	2	-	2	1	-	-
3	-	-	-	-	1	-
4	-	-	-	-	-	-
5	2	-	2	4	1	-
6	1	-	2	-	2	-
7	5	-	-	1	2	-
8	5	2	1	-	-	-
9	14	-	7	1	2	-
Total subdominios	30	2	14	8	8	-

De la tabla 6 podemos observar que hay una alta presencia del dominio conocimiento matemático (MK) del cual se evidencia alta presencia del subdominio KoT, esto se ve fuertemente en el episodio 9 de la clase, que corresponde al momento en el cual se comienza a institucionalizar la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente. En este mismo momento de la clase existe un trabajo mayor con los registros algebraicos y gráficos, esto puede explicar el mayor predominio del subdominio KPM.

También se observa poca presencia del subdominio KSM evidenciándose en el episodio 8 de la clase. Aquí la profesora utiliza el concepto de pendiente que es tratado en la asignatura previa correspondiente a álgebra, esto nos sugiere que el concepto de pendiente fue utilizado solamente aludiendo a la representación gráfica y no a su definición, por otra parte también no se estableció la relación entre este problema con los estudiados en la asignatura previa. Por otra parte, el subdominio KMLS no es evidenciado en ninguno de los episodios de las clases.

En el anexo A se adjunta la transcripción y categorización de la clase de acuerdo a los subdominios del MTSK

Conclusiones

Este trabajo y la investigación-acción nació a partir de las interrogantes que nos planteamos frente al concepto de derivada, específicamente para nuestra realidad era el tema de resolución de problemas de optimización de funciones. En un comienzo la revisión de la literatura nos permitió observar que en las guías que trabajamos en la asignatura de cálculo, prevalece lo algebraico entre otras cosas, y la falta de rigurosidad en algunas de ellas me llevaron a focalizarme entonces en la clase, específicamente en el profesor y el conocimiento que debe tener para realizar la enseñanza en estos temas, establecimos el objetivo:

Identificar el conocimiento que manifiesta el profesor cuando enseña a sus estudiantes a resolver problema de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada.

Para ello llevamos a cabo la planificación y ejecución de dos clases en las cuales trabajamos en la interpretación geométrica de la derivada. De la experiencia de la primera clase implementada nos dimos cuenta que uno de los obstáculos que tenían los alumnos era que no establecían cómo era la pendiente de la recta tangente en los valores críticos de la función, por lo tanto, la segunda clase fue focalizada en aquello. Pero para lograr esto nos centramos en el conocimiento que debe poner en juego el profesor, pensando en cómo se puede mejorar el problema que ya está establecido en la guía de la asignatura. Para poder realizar esto nos basamos en el análisis didáctico haciendo un paralelo con los conocimientos especializados del profesor de matemática, ya que, al disponer de un análisis como, por ejemplo, la fenomenología del concepto, sus representaciones, la identificación de las dificultades y errores en torno a él, nos brindaban un bagaje de elementos que influyen en nuestra planificación y esto a su vez debería verse reflejado en la segunda clase. Estos análisis nos permitieron tomar la decisión en referente al tipo de pregunta que se realizaría para el mismo problema, modificar la función debido al contexto de utilidad, centrar la actividad en el alumno y utilizar Geogebra para que ellos pudieran visualizar y manipular la función con el fin, por un lado, de que corroborasen algunas de sus respuestas y por otro, que establecieran la relación entre la pendiente de la recta tangente con la derivada en un punto.

Pensando en la segunda clase, proyectamos que debería ver evidencias del conocimiento matemático, centrado en el KoT así como también KSM, lo cual se pudo observar de los análisis de la transcripción de la clase en el que se observó una alta presencia del subdominio KoT y esto se esperaba ya que en la clase buscábamos establecer la pendiente de la recta con la derivada para analizar máximos y mínimos de una manera gráfica, por lo tanto se despliega varios contenidos matemáticos.

Del análisis de la transcripción de la clase logramos identificar que predominó altamente el subdominio KoT, se identificó en treinta intervenciones en la clase, el subdominio que le sigue es el KPM observado en catorce intervenciones, tanto los dominios KFLM y KMT se identificaron en la misma cantidad de intervenciones. El subdominio KMLS no fue observado. Estuvo débil la conexión con los conocimientos previos de los estudiantes, a pesar que se utilizó de manera gráfica fue débil la comprensión de los estudiantes en cuánto al significado de la pendiente.

Hasta aquí hemos podido identificar el conocimiento que manifiesta la profesora cuando enseña la interpretación geométrica de la derivada, como la pendiente de la recta tangente en un punto, sin embargo, para alcanzar completamente el objetivo del estudio falta observar el conocimiento que emplea en una clase en la cual se deba determinar la función que optimice alguna situación como, por ejemplo, problema de optimización del área de un rectángulo con perímetro constante.

A través de la investigación pudimos constatar el potencial que tienen los modelos MTSK y el análisis didáctico para la planificación de la enseñanza. Reiteramos esta importancia ya que nos permite tomar decisiones más acertadas con respecto a las instrucciones y a las actividades a desarrollar para enseñar un concepto matemático, propiciando una mejor oportunidad de logro para los alumnos.

En lo que concierne al proceso de investigación-acción una de las dificultades que tuvimos fue la implementación de las clases, ya que tuvimos que realizarlas fuera del horario de clases normal. Como describimos en un comienzo del trabajo, todos los cursos de cálculo están programados, cada clase está organizada para trabajar en una determinada guía, por lo tanto, la implementación de las clases no podía hacerse en el horario normal de clases, además debíamos realizar la clase en las salas de laboratorio donde están los computadores para poder utilizar los applets que creamos, en este ámbito también tuvimos dificultad por la poca disponibilidad de las salas. A pesar de ello encontramos los horarios en el cual tanto nosotros como los alumnos pudieron asistir. Los alumnos al finalizar las clases nos comentaban que les había gustado trabajar con Geogebra y que les era más claro entender, por ejemplo, cuando la función crece o decrecía con los valores de la derivada. Sin embargo, pudimos apreciar que fue débil la comprensión de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Para complementar este trabajo continuaré desarrollando la investigación-acción, una línea de acción es cómo mejorar la implementación de las guías que existen. Se puede contribuir a buscar establecer una nueva reorganización de la asignatura, porque tal como se describe en la investigación de Pineda (2013) los alumnos deben poseer una serie de conocimientos previos en geometría elemental y trigonometría, los cuales deben estar acompañados de preconceptos, como: Dependencia entre variables, Nociones de: función, Dominio y rango de una función, Grafica de una función, Crecimiento y decrecimiento de funciones, Tasa media de variación, Función lineal y afín, Pendiente de una recta, Velocidad media, Recta tangente y secantes a una curva. Así como también se reportó en otras investigaciones, la necesidad de trabajar en diferentes registros y establecer como metodología de clase priviligiando la actividad en el alumno, pero para todo esto el profesor debe manejar una amplia gama de conocimientos para el diseño de sus clases y para las decisiones entorno a la enseñanza y aprendizaje que quiere lograr.

Referencias.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. México D. F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático u como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia (Tesis doctoral).* Universitat Autònoma de Barcelona, España. Recuperada de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4702/erbj1de4.pdf?sequence=1

Bausela, E. (1992). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación – De los lectores*. Recuperada de http://www.rieoei.org/deloslectores/682Bausela.PDF.

Bertoglio, N., y Rolando, C. (1994). *Introducción al Análisis Infinitesimal Vol.2 Funciones de Varias Variables*. Santiago: Ediciones Universidad Católica de Chile.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero-Ávila, D. & Flores-Medrano, E. (Eds.). (2015). *Un marco teórico para el conocimiento del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Contreras,A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2003). *Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en bachillerato y universidad*. Revista de Educación, 331, (pp. 399-419). Recuperado en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=670581

Dolores, C. (1998). *Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachilletaro en sus cursos de Cálculo Diferencial*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de http://www.cimateuagro.org/images/pdf/derivada.pdf

Dolores, C. (2000). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada*. El futuro del cálculo infinitesimal. ICME-8. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Escudero, D., Carrillo, J. y Climent, N. (2015). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas*. PNA, revista de investigación en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Vol. 10, (pp. 53-76). Recuperado de http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Escudero2015PNA10(1)Elconocimiento.pdf

Gavilán, J. (2010). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Sevilla: Edición Digital @tres.

Gómez, P. (2009). *Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en Matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/398/397

López de los Mozos, M. (1991). *Aproximación didáctica al concepto de derivada*. Departamento de Matemática aplicada, Universidad de Sevilla. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/21/Articulo01.pdf

Ortega, L., Guzmán, I. y Mena, A. (2002). *¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad*?. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente, Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile Recuperado de http://www.asi4.uji.es/actas/p2a7.pdf

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). *El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza*. es de una revista buscar Recuperada de https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/117981.pdf

Pineda, E. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria* (Tesis de maestría). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/39569/1/01186769.2013.pdf

Rico, L. (1998, Marzo). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 1, 1, 22-29. México.

Rico, L. (2013, Marzo). *El método del Análisis didáctico*. Revista Iberoamericana de Educación matemática, vol 33, (pp. 11-27). Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina., M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Granada, España: Universidad de Granada.

Rojas, C. (2008). *Reconstrucción del concepto de derivada en docentes de Matemáticas* (Tesis de maestría). Colombia. Recuperado de http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/88/2/140034.pdf

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de Casos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2012). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *AIEM, Avance de Investigaciones en Educación Matemática*, N° 4, (pp. 47-64). Recuperado de http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/74

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A. Bressan, y P. Sadovsky, Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. Bs. As.: Libros del Zorzal.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada.* Revistes Catalanes amb Accés Obert (RACO). *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, vol. 24, *(pp. 85-98).* Recuperada de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/73534/84742

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008, junio). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa Relime, vol. 11*, n° 2, (pp. 267-296). Recuperada de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005

Sosa, L., Flores, E. y Carrillo, J. (2015, junio). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Revistes Catalanes amb Accés Obert (RACO). Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, vol. 33*, n° 2, (pp. 173-189). Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/293271.

Villa, S. (2003). *Calculo infinitesimal de varias variables reales Vol.2*. México, D.F.: Centro de Investigación y de Estudio Avanzados I.P.N.

ANEXO A.

Momentos de la clase	Sujeto	Texto (grabación)	Subdominios del modelo MTSK: Kot	KSM	KPM	KFLM	KMT	KMLS	Observaciones
1	A	Una consulta							
	P	Dígame							
	A	nos enredamos con...Por ejemplo, aquí hay que derivar ¿cierto? Cuando es esto, mantengo y derivo							
	P	pruebe por mientras, de ahí lo vamos a compartir entre todos				x			
	A	porque como es una multiplicación tengo que sacar el primero y derivo el segundo							
	P	una constante, un número	x						
	A	a x derivado a 5 y la x derivado a 5 vendría siendo una función como 5 por x elevado a cinco menos 1, es cuatro, partido por x menos 1 perdón al exponente a menos 1, eso igual da 4, entonces tengo que multiplicar esto y mantener lo que es x ¿está bien							
2	P	Pero mira si te pidieran derivar x elevado a dos ¿cómo quedaría?			x				
	A	¿x elevado a 2? quedaría... ehmm x elevado a dos... dos x partido por una.							
	A	es que... sí, porque esos se multiplican y quedaría cuatro acá… a mí se me olvidó eso							
	P	eso es una constante, es un número, y ¿la derivada de una constante?	x						
	A	se mantiene.							
	P	¿se mantiene? Pero la pregunta es acá cuando tienes x elevado a cinco				x			
	A	no es esto por esto, cinco por...cinco por sería cero coma cero uno, eso me da ahí							
	P	ya y ¿cómo queda la variable?			x				
	A	Sería cero como cero uno ehh... cinco, x cinco así ¿o no?							
	P	tiene... porque esto es una potencia ¿no cierto?, te acuerdas de la fórmula para derivar potencia	x						
	A	si poh... se baja el exponente hacia delante y... se resta uno al exponte y ahhh ¡eso no más es!, no es na partido... (risas)							
	P	(risa) ya siga, eso							

	P	Dígame							
	A	es que tenemos una duda. Acá se hace directamente ¿no se tiene que derivar? ¿por qué están todos derivando?							
	P	estamos experimentando, de ahí vamos a compartir entre todos					X		
3	A	Acá te está el porcentaje de utilidades y te están pidiendo el porcentaje de utilidades no habría que derivar, porque para derivar sería la							
	P	¿sería?							
	A	ya tendríamos listo según nuestra opinión. Ahora hay que terminar que los chiquillos terminen para compartir							
	P	ya, vamos a compartir. Vamos a esperar a que los demás terminen.							
4	A	Profe...							
	P	Dígame.							
	A	Así lo derivamos... aquí la pregunta dice... tenemos que responder si es verdad que decrece a partir del segundo año, eso debería ser.							
	P	Sí							
	A	Después se reemplaza en el tercer y quinto año							
	P	Claro, dice para complementar su respuesta de la pregunta anterior, para ayudarte a afirmarlo piden hacer eso, determinar esos valores							
	P	Cómo van chiquillos, compartimos							
	A	si...							
	P	entonces, le daban la función ¿cierto? Y dice en una determinada empresa de construcción, el porcentaje de sus utilidades los primeros diez coma cinco años de funcionamiento, se puede determinar con la función que aparece ahí ¿cierto?, y le dicen que x son los años transcurridos desde su creación. Entonces les piden si se puede afirmar que a partir del segundo año las utilidades del segundo año de la empresa comenzaron a decrecer o sea comenzaron a disminuir, y para apoyar su					X		
	A	*Reemplazar*							
	P	*¿qué reemplazó?*							
	A	*primero para poder decrecer, para comenzar a decrecer primero sacamos el de un año para saber en cuanto iba, y ahí salía uno ochenta y ocho*							
	P	*ya, y cómo hizo eso*							

	A	reemplace en la fórmula de f de x f de uno							
	P	ya, y eso quedaba (La profesora escribe en la pizarra en lenguaje algebraico lo que el alumno le describre)	x						USO DE REGISTRO
	A	uno coma ochenta y ocho							
	P	o sea donde está la x...							
	A	exacto, y el segundo año hice exactamente lo mismo y me dio uno coma dos							
	A	uno coma veinte seis							
	P	¿uno coma?							
	A	sesenta y cuatro							
	A	coma veinte seis							
	A	O sea, uno coma veinte y seis, ahí nos dimos cuenta que estaba decreciendo							
	P	ya, y qué paso en el tercer y quinto año				x			
5	A	En el tercero nos dio cero coma tres seis y el quinto año nos dio cero coma tres, cero coma treinta y tres, y ahí nos dimos cuenta que estaba decreciendo							
	P	ya, ustedes dicen que decrece, ¿alguien hizo otra cosa?				x			
	A	mmm...no							
	A	Profe...							
	P	Dígame							
	A	es que nosotros lo hicimos partiendo desde el comienzo de la empresa, que sería							
	P	Ya, y cuánto les da ahí							
	A	cero coma cincuenta y dos							
	P	y después qué hizo							
	A	después nos fuimos altiro al segundo año, para ir viendo qué va pasando desde los comienzos del segundo año, y bueno para nosotros en ese caso sería que fue un							
	P	¿entre quién?							
	A	entre el primero, entre los inicios de la empresa y el segundo año							
	P	entonces, entre los inicios y el segundo año...							
	A	hay un aumento							
	P	ya, ¿y después que pasa?				x			
	A	después disminuye, en el tercero y quinto año disminuye							

	A	si está bien								
	A	si da el resultado								
	P	les da el resultado no cierto								
	A	sii								
	A	ah que bakan que tengo esto el GeoGebra								
	P	pudieron comprabar sus valores, todos los observan en la gráfica								
	A	siii								
	P	ya ahora fíjan de nuevo por favor, de nuevo al power point y fíjan donde dice gráfica ?					x			
	A	ya								
	P	Si se fijan es la misma función, pero ahora apareció otra cosa ahí, qué aparece								
	A	la pendiente								
	P	¿pendiente? ¿y qué más? hay otra grafica ¿de qué?	x							
	A	de la recta								
	P	qué recta es esa								
	A	tangente								
	P	Recta tangente no cierto y además le entregan ahí un valor a ustedes	x							
	A	cero coma siete								
	P	¿y ese cero coma siete en este caso a qué corresponde? En el caso de la compañera aquí tiene cero coma siete, cero coma siete, ahh todos tienen cero								
	AS	a la pendiente								
	P	¿es la pendiente de quién?	x							
7	AS	del y								
	P	¿es la...? ¿Es la pendiente de quién?								
	A	de la gráfica ¿o no?								
	P	de la gráfica ¿de la gráfica de quién? Porque ahí tenemos la gráfica de la función ¿no cierto?, que es esa curvita que sube y baja, además tenemos otra gráfica, de	x							
	A	de una...recta								
	P	de la recta tangente no cierto, ya, y esa pendiente de quién es	x							
	A	de la tangente								

	P	*entonces, entre el tercer y quinto año disminuye. Ya, alguien hizo algo más. Ahora, qué pasa en el cuarto año, vean que ocurre en el cuarto año.*	x		x	x			Observamos que en el momento en el cual el alumno indica que hay momentos en el cual aumenta el porcentaje de utilidad y disminuye, la profesora pregunta ¿entre quién? a lo cual el alumno contesta "entre el primero, entre los inicios de la empresa y el segundo año", podemos inferir en la necesidadque se tiene para que no quede como respuesta valores discretos.
	A	*da cero coma cero uno*							
	P	*¿qué ocurre entonces? ¿qué está ocurriendo con la función? ¿cómo podemos saber esto? Qué otra estrategia, o de qué otra forma podríamos saber qué pasa*			x				
	A	*con la gráfica*							
	P	*ya, miren en su computador tienen un archivo en power point, ábranlo e ingresen donde dice gráfico 1. Ahí hay que esperar un poquito se demora, pero va aparecer.*			x		x		En este momento de la clase se recurre al uso del recurso didáctico GeoGebra como un medio para comprender el comportamiento de la función, así como también para corroborar los resultados y respuestas dadas por los alumnos e implícitamente está usando el conocimiento de los registros de representación asociado al concepto de función, el registro gráfico
	P	*¿lograron ingresar? ¿Qué pasaba ahí con la gráfica? ¿qué pasaba con la función? ¿decrecía después del segundo año?*			x				
	A	*pero después vuelve a aumentar en el cuarto y vuelve a disminuir en el ocho*							
	A	*vuelve a aumentar en el cuarto, en el quinto....*							
	P	*Pero después vuelve a aumentar no cierto desde donde empieza a aumentar más menos*	x						
6	A	*Desde el cuarto, aumenta, luego en el octavo vuelve a decrecer y vuelve luego a descender en el diez coma cinco*							
	P	*Exacto, y pueden, fíjense ahí abajito en el eje x está el puntito morado*							
	A	*si uno*							
	P	*y ése puntito morado ustedes lo pueden mover y arriba les va entregando, o sea, ése valor lo pueden mover ahí les va entregando el valor del punto en la grafica*					x		
	A	*ah...va entregando del...*							
	P	*entonces ahí pueden comprobar, por ejemplo, los valores que les daban a ustedes, por ejemplo, ¿en el segundo año da el valor?*							
	A	*si está bien*							
	A	*si da el resultado*							

	P	*de la recta tangente, entonces miren muevan el valor en el eje x, muevan el puntito, fíjense que va ocurriendo con ése valor de ésa pendiente*					x		
	A	*es para determinar el punto crítico, si decrece o...si porque después en negativo*							
	A	*negativo*							
	A	*valor de crecimiento y decrecimiento?*							
	P	*se dan cuenta que va pasando con el valor*				x			
	A	*va aumentando o...*							
	P	*aumentando pero en alguno también...entonces miren con esta situación ahora respondan a esta parte por favor.*							
	P	entonces usando la gráfica 2 respondan a esas preguntas por favor.							
	A	Profe quiere escuchar el argumento de nosotras							
	P	por supuesto							
	P	ya...con respecto a la pregunta a) dice ehhh...cómo podríamos indicar cuándo existe un decrecimiento en la función, cuando la pendiente es positiva existe un crecimiento y cuándo podríamos indicar que existe un crecimiento de la función, cuando la pendiente es negativa existe un decrecimiento							
	A	cuando existe decrecimiento, lo dijiste al revés							
	A	ah... si decrecimiento (aquí corrigen la pregunta que la alumna dice existe un crecimiento)							
	A	esa es la diferencia							
	P	ya, compartiremos. Ya chiquillos compartimos?							
	A	Sii							
	P	ya, entonces las preguntas dicen qué elementos de la recta tangente le permite describir si se produce decrecimiento o sea que vamos así (gesto con la mano hacia abajo) hacia abajo en la utilidad de la empresa, qué elemento de la recta tangente?			x				
	A	es que dependen del signo de la pendiente, si la pendiente es negativa va en decrecicmiento si la pendiente es positiva hay un crecimiento							
	P	Si?, están todos de acuerdo o no							
	A	SÍ, y también van a depender igual de los puntos críticos							
	P	ya... cuáles son los puntos críticos							

	A	en esta función?							
	P	en general							
	P	se supone que son el valor máximo del intervalo, después va disminuyendo puede ser absoluto o puede ser relativo, dependiendo cuál sea el mayor en este caso en la función, aquí por lo menos en lo que se ve, aquí tiene dos no más tiene un absoluto que seria el más alto que seria ocho coma dos cero seis, y un mínimo absoluto que sería en el cuarto año	x						
	P	y ése en cuarto año, también sería un punto crítico (se observa la gráfica)	x						
	A	si, también es punto crítico							
	P	todos de acuerdo chiquillos							
	A	si							
8	P	entonces miren, y ¿cómo a través de la recta tangente podemos indicar cuando crece o decrece la función? Por qué ahí en los puntos críticos que vamos a tener	x	x					
	A	es que dependen del signo							
	A	si, como dijo la Daniela							
	A	si es positivo o negativo, si la pendiente nos da negativa es decrecimiento, claro							
	P	ya, entonces vean ahora cuánto les da el valor de la pendiente en estos años que analizamos. A los dos años ¿cuál es el valor de la pendiente?							
	A	menos cero coma noventa y seis							
	P	a todos les da eso en la gráfica?, a los tres años							
	A	menos cero coma siete							
	P	en el cuarto							
	A	es cero porque es un punto...							
	P	¿cómo es la recta tangente ahí, qué forma tiene?							
	A	así...horizontal							
	P	es horizontal no cierto, es paralela ¿a quién podemos compararla? A qué eje	x	x					
	A	a x							
	P	al eje x cierto. Al quinto año cuánto da la pendiente							
	A	cero coma seis							
	P	cero coma seis. Entonces ustedes me dicen que cuando la pendiente es negativa la función va?							

	P	cero coma seis. Entonces ustedes me dicen que cuando la pendiente es negativa la función va?							
	A	decreciendo							
	P	decreciendo, o sea que entre los dos y los tres años la función va ir así (se dibuja una curva decreciente en la pizarra) y en cuarto año qué pasa							
	A	es un punto mínimo							
	P	ya sabíamos que iba bajando así que ahí qué va ocurrir							
	A	un quiebre...							
	P	ya y ahí que pasa, qué pasa con la pendiente							
	A	aumenta							
	P	positiva, entonces esto comienza a... a subir, más menos así va ir en esos rango entre dos y cinco, sí o no	x						
	A	si							
	P	ya, ahora les voy a pedir que hagan esto (pasa otra hoja)							
	P	ahora evalúen la función derivada en los años que analizamos anteriormente.	x		x				
	P	ya chiquillos les dio?							
	A	si...							
	P	cuánto da al evaluar la derivada al segundo año			x				
	A	Menos uno coma cero ocho							
	P	¿a todos les da eso?							
	A	a mí me da cero coma noventa y seis, me da los mismos resultados que la pendiente							
	A	pero...multiplicaste el dos coma treinta y seis por dos?							
	A	dónde está viendo, está en la función							
	P	no la derivada, con la derivada, evaluar derivada, evaluar la función derivada en los mismos años, a los dos, tres, cuatro y a los cinco años	x		x				
	A	da lo mismo que la función							
	P	revísenlo chiquillas, de nuevo, calculo. Acá esta función derivada cierto, esta que esta acá. ¿les da?	x						
	A	me da lo mismo							
	A	me da lo mismo que la pendiente							
	P	pero aquí el y está a la cuarta							

	P	pero aquí el x está a la cuarta								
	A	ya poh								
	P	pero la x es dos								
	A	¿estaba bien profe?								
	P	si, había un valorcito mal puesto. Ya entonces a los dos años cuánto da?								
	A	menos cero coma noventa y seis								
	P	y mirando acá la tabla qué podemos decir chiquillos?	x							
	A	la pendiente es igual...								
	P	la pendiente de quién?	x		x					
	A	la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada								
	P	exactamente, la pendiente de la recta tangente corresponde a...la derivada. Entonces acá viene una pregunta, si a ustedes le dan una función y le piden calcular el mínimo, gráficamente qué ocurria con la pendiente ahí	x		x					
	A	aumenta								
	A	constante								
	A	es... es horizontal, es horizontal la pendiente								
	P	tengo una función, una función así (dibuja un curva en la pizarra) quiero determinar el mínimo, qué acabamos de descubrir?... Qué el valor de la derivada corresponde a...el valor de la pendiente de la recta tangente no cierto, entonces si yo quiero descubrir ahí (apunta al mínimo del gráfico) cómo tendrá que ser gráficamente la pendiente?								
9	A	horizontal								
	P	horizontal, gráficamente la recta tangente es horizontal y cuánto vale la pendiente aquí?	x							
	A	cero								
	P	entonces la derivada cuánto debería valer aquí?								
	A	cero								
	P	cero, entonces para determinar este mínimo de la función qué cálculo algebraico deberíamos hacer	x		x					
	A	igual a cero								
	P	qué hay que igualar a cero								

	P	qué hay que igualar a cero						
	A	la derivada						
	P	por qué a derivada						
	A	cuál fue la pregunta profe disculpe						
	P	si a usted le dan una función y le piden determinar un mínimo, entonces gráficamente qué podríamos determinar cuándo hay un mínimo...este punto, usted denante dijo un nombre a este punto ¿cómo se llama este punto?	x		x	x		
	A	punto crítico						
	P	ya, el punto crítico, y cómo es la derivada aquí, aquí dibuje la recta tangente, cuál es valor de pendiente	x					
	A	cero						
	P	por lo tanto la derivada en el punto crítico qué valor tiene que tener?	x				x	
	A	cero						
	P	cero, entonces algebraicamente si sólo tuviéramos esto (apunta a la función escrita en la pizarra) cómo podríamos determinar un punto crítico	x				x	
	A	Reemplazar por cero						
	P	¿reemplazar la x por el cero?						
	A	noo... hay que determinar los puntos críticos						
	P	en el punto crítico la derivada cuánto va a dar						
	A	se supone que cero						
	P	la derivada va a dar cero, qué habría qué hacer	x					
	A	igualar a cero						
	P	igualar a cero qué?						
	A	la derivada						
	P	la derivada, tenemos la derivada, si la derivada la igualamos a cero vamos a buscar dónde la recta tangente su pendiente es cero, y ahí es donde se produce un mínimo o un máximo.	x					
	P	Dejémoslo hasta aquí chiquillos, sé que varios tienen otra clase altiro, gracias por venir que estén bien.						
	AS	Chao profe, gracias						