Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemática

ESTUDIO DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DE PROFESORES EN EL EJE DE PROBABILIDADES

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: Reinaldo Romero Lazo

Profesora guía: Elizabeth Montoya Delgadillo

2014

Agradecimientos:

A mi amada esposa, quien me apoyo en estos dos años de estudio, por su comprensión ante la falta de tiempo en el hogar, sin ti este proyecto de estudio difícilmente hubiese culminado.

A mis padres por su apoyo constante y preocupación en cada momento, en especial a mi madre quien siempre mediante su oración me lleva por el camino del señor.

A mis profesores del programa, en especial a la profesora Elizabeth Montoya, por sus enseñanzas en didáctica de la matemática y por su colaboración como profesora guía de esta tesis. A los profesores Arturo Mena y Patricia Vásquez por confiar siempre en mis capacidades.

A Dios por sobre todas las cosas, por darme la oportunidad de entrar a esta universidad y permanecer en ella hasta el final.

ÍNDICE

Introducción

En el currículo escolar vigente, el eje datos y azar es abordado formalmente desde el nivel de séptimo básico culminando en cuarto medio, posteriormente este es visto en la universidad en diversas carreras, tanto en ingeniería como pedagogía en matemáticas, ante esto resulta importante estudiar que sucede con los profesores de educación media que imparten clases de probabilidades y que vienen recién egresando de la universidad, ver como enseñan, cuáles son sus estrategias y la transposición didáctica del objeto matemático a enseñar son aspectos importantes a estudiar.

Por esta razón resulta importante estudiar a profesores en ejercicio, puesto que, los resultados obtenidos tanto en pruebas nacionales Simce e internacionales como Pisa, nos posicionan bajo la media en este dominio.

En base a estos antecedentes se pretende estudiar a dos profesores de matemática en ejercicio de dos establecimientos distintos, evidenciando con datos reales observados al interior del aula, grabando las clases en que el profesor de matemática enseña probabilidades a sus estudiantes, observando la transposición didáctica y la preparación del docente de su clase al momento de enseñar probabilidades a sus estudiantes, y que situaciones de aprendizajes propone en sus clases.

Con el propósito de estudiar al profesor de matemática, esta investigación se sustenta en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011) que en sus inicios fue conocida como teoría de Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico (Houdement & Kuzniak, 1996; 2006).

Esta teoría permite analizar un dominio matemático que involucra el trabajo en clases en un ambiente organizado, teniendo como actor principal al profesor en el desarrollo de sus clases y de qué manera influye la transposición didáctica que realiza junto a ellos (ETM idóneo) en el proceso aprendizaje, como también observar al profesor como experto con respecto a sus conocimientos al abordar el objeto matemático en clases (ETM personal)

El trabajo lo hemos estructurado en cinco partes organizadas de la siguiente forma:

En el capítulo 1, mostramos una descripción, explicación de la problemática de investigación y los objetivos propuestos. Además, se exponen antecedentes preliminares recopilados de otras investigaciones que tienen relación con nuestro estudio, una aproximación epistemológica mediante la historia de las probabilidades y el hábitat de este objeto matemático en el ámbito escolar.

En el capítulo 2, se muestra el marco teórico, el cual permite dar sustento a esta investigación y poner en centro la matemática, bajo este marco se puede estudiar y observar el desarrollo de la matemática en el ámbito escolar en una comunidad educativa, la organización curricular y la transposición de un contenido, de esta forma se pueden analizar las clases y fundamentar los resultados bajo esta teoría.

En el capítulo 3, se expone la metodología usada para llevar adelante esta investigación, se muestran los instrumentos metodológicos utilizados, las pautas de observación de clases, transcripción de videos y la confección del cuestionario con sus respectivos objetivos por cada pregunta.

En el capítulo 4, se analizan los resultados a partir de las pautas de observación de clases, analizando el espacio de trabajo matemático idóneo del profesor en su ambiente de trabajo con sus estudiantes, de acuerdo al proceso de transposición didáctica en el desarrollo del contenido en probabilidades.

Adicionalmente se analizaran los cuestionarios aplicados a los docentes, con el objetivo de contrastar los resultados obtenidos en la grabación de clases con los obtenidos en los cuestionarios aplicados a otros profesores.

En el capítulo 5, formulamos las conclusiones teóricas de nuestro trabajo de investigación, así como algunas reflexiones y sugerencias para futuras investigaciones de acuerdo a los resultados obtenidos.

Por último presentamos los anexos, donde se incluyen los cuestionarios aplicados a los profesores.

Capítulo 1

1.1 El problema de estudio

En nuestra labor como profesores de aula, diariamente convivimos con múltiples dificultades para lograr aprendizajes óptimos y atención de los estudiantes en el desarrollo de los contenidos matemáticos. Esto se ve traducido en resultados poco satisfactorios, pruebas nacionales como SIMCE, han revelado que existen dificultades en el Eje Temático de Probabilidades, esto podría deberse a que, según el mismo estudio, un 33% de los profesores declaró no haber enseñado Geometría y Probabilidades. Además estas materias, que son las que los profesores enseñan menos coinciden con aquellas que declaran sentirse menos preparados, (MINEDUC, (2003), Resultados SIMCE Segundo Año Medio (p. 14, 15), Santiago de Chile).

En pruebas internacionales, como la Timss, que evalúan los aprendizajes de estudiantes de octavo básico, en el año 2011 se muestran resultados poco satisfactorios en el eje de Datos y Azar menores al promedio mundial de los países que participan en este estudio. En el mismo informe de esta prueba se evidencia que los establecimientos de Chille, con respecto al cumplimiento de los contenidos mínimos obligatorios no alcanzan en promedio un 71,4% de cobertura del currículum de matemática. A nivel de ejes curriculares, el Eje Números es el más trabajado por los docentes durante 2011 (91,7%). Le sigue en cobertura el Eje Geometría con un promedio de 77,2%, Eje Álgebra con un 68,9% y finalmente el Eje Datos y Azar con 49,5%.

Los resultados en la enseñanza media son muy similares, a modo de ejemplo en el último ensayo nacional de la PSU 2013, donde más de veinte mil estudiantes de distintas regiones del país participaron y dentro de los porcentajes de logro más bajos se encuentra el eje de datos y azar con un 29% de aprobación.

El énfasis que se ha dado en estos últimos años al eje Datos y Azar en el currículo de enseñanza Básica, han tenido las mismas dificultades los profesores de matemáticas en la transposición del contenido en el ámbito curricular de probabilidades, los profesores se sienten débiles o no se consideran preparados para enseñar estos contenidos curriculares.

Por otra parte, existen investigaciones que dan cuenta de las dificultades que presentan los profesores que enseñan probabilidades a sus estudiantes (Alsina, 2014) quien aporta con antecedentes para mejorar la comprensión de la probabilidad, y procurar así la transformación progresiva de la práctica docente. En la tesis doctoral (Mohamed, 2012), realizada en España, se reporta que los futuros profesores tienen dificultades para resolver problemas elementales de probabilidad.

Montoya (2014), en el estudio sobre la estabilidad epistemológica del profesor debutante, bajo el marco de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se reportan que los profesores debutantes presentan problemas en la transposición didáctica del dominio de azar, además no logran una circulación entre los planos del ETM, en especial la génesis discursiva, concluyendo que la razón principal es que en la formación inicial no se enseña a trasponer la demostración u otros medios de pruebas.

Los resultados pocos satisfactorios en el eje de Azar, en general se deben a la no adecuada transposición didáctica en probabilidades, en soló recurrir a una fórmula para calcular probabilidades, y entre otras al no cubrir cabalmente el programa del eje datos y azar, planificar para el final los contenidos de la unidad o en otros casos donde el profesor no se encuentra familiarizado con este eje curricular, esto puede darse por diversos factores uno de ellos, que los docentes que enseñan no tienen cursos donde se enseñe a transponer estos saberes en la disciplina.

1.2 Objetivos de investigación

Atendiendo a la problemática planteada, relacionada con dos grandes aspectos; por una parte las dificultades en la enseñanza escolar de Probabilidades y, por otra, a la transposición didáctica del profesor de asignatura que imparte clases de probabilidades, de esta forma se identificara el tiempo que dedica un profesor a la unidad de probabilidades y estudiar el tipo de tareas propuestas a los estudiantes.

Las preguntas pertinentes para llevar a cabo el análisis son:

P1: ¿Cuál es el espacio de trabajo idóneo del profesor?
P2: ¿Cuáles son los tipos de artefactos que se utilizan en el desarrollo de las clases?
P3: ¿Cómo activa la génesis instrumental en probabilidades?
P4: ¿Qué tareas son solicitadas a los alumnos?

Objetivo General de la Investigación

- Estudiar el espacio de trabajo matemático en probabilidades que utiliza un profesor que imparte clases de matemática.

Objetivos Específicos

- Analizar las circulaciones entre las componentes entre el plano epistemológico y cognitivo de acuerdo al tipo de génesis a desarrollar.

- Identificar los medios de prueba que utiliza el profesor en el desarrollo de sus clases

1.3 Aproximación epistemológica de las Probabilidades

Existen características no muy comunes en el desarrollo histórico de la probabilidad en comparación a otras teorías matemáticas tales como la geometría o aritmética. Un enfoque matemático de la probabilidad empezó a surgir hace más de cuatro siglos, mucho después que el hombre tuviera las primeras experiencias con el azar. Una fundamentación matemática sólida se estableció por Kolmogorov en 1933 pero no clarificó la naturaleza de la probabilidad. Todavía hoy existen distintos enfoques filosóficos que despiertan controversia. Es importante conocer, la historia de las probabilidades, como fue evolucionando y como matemáticos importantes contribuyeron en el desarrollo de esta teoría.

La teoría de las probabilidades podemos decir de manera global que surge de los juegos de azar hace más de cuatro siglos. Las apuestas son tan antiguas que desde hace 2000 años atrás ya existían juegos de azar donde la comunidad china hacia sus apuestas. Durante la época del imperio Romano, tuvieron gran auge los juegos de azar. Las apuestas deportivas eran parte de la vida de los romanos, incluso el propio Julio César apostaba en los acontecimientos que se celebraban en los circos romanos.

La Edad media termina históricamente en el año 1453 con la caída de Constantinopla por parte de los otomanes, dando paso a la etapa conocida como Renacimiento, la cual se destacó por la actividad mercantil, industrial, artística, arquitectónica, intelectual y científica, entre otras. A partir de esta época la matemática y la filosofía tomaron fuerza y fueron creciendo dando una explicación coherente a muchos fenómenos que no seguían un patrón determinístico sino aleatorio. En este periodo del Renacimiento es cuando empiezan a surgir los conceptos de aleatoriedad por la necesidad de contabilizar el número de posibles resultados de un dado lanzado varias veces, o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando se interrumpe un juego antes de finalizar.

La sociedad francesa en el año 1640, los juegos de azar comenzaron a ser extremadamente populares y no sujetos a restricciones legales. Cada vez fueron surgiendo juegos más complejos con cartas, dados y otros artefactos, con el fin de ser justos en las apuestas y repartos o incluso de conocer las respuestas para obtener ventajas y en consecuencia mayores ganancias respecto a otros jugadores, ya se estudiaban matemáticamente los juegos de azar.

Uno de los primeros problemas dedicados a contabilizar el número de posibles resultados al lanzar un dado varias veces podemos encontrarlo aún en la Edad Media, en el poema De Vetula de Richard de Fournival (1200-1250) donde afirma correctamente que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula acertadamente los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora puede parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros autores se equivocaron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.

Se puede considerar uno de los problemas más importante relativo a los juegos de azar conocido como “problema del reparto de apuestas” que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Este problema fue abordado por Luca Pacioli (1445-1517) quien en 1487 propuso estos dos problemas particulares: un juego en el que el premio es de 22 ducados que consiste en alcanzar 60 puntos se interrumpe cuando un equipo lleva 50 puntos y el otro 30; y tres arqueros que compiten por un premio de 6 ducados lanzan flechas hasta que uno de ellos haga 6 dianas, siendo interrumpidos cuando el primero de ellos lleva 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2. ¿Cómo deben repartirse los premios entre los contendientes? Pacioli propuso que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas anteriormente: así, el premio del primer problema se dividía en $\frac{60\cdot 5}{8}$ ducados para el primer equipo y en $\frac{60\cdot 3}{8}$ para el segundo.

El primer libro sobre la teoría de probabilidades parece ser *De Ludo Alae de Girolamo Cardano (1501-1576)* publicado recién en 1663 que está básicamente dedicado a los juegos de azar. Además Cardano se había ocupado anteriormente del problema del reparto de apuestas y en 1539 llegó a la conclusión de que la solución de Pacioli era incorrecta porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada equipo, no contaba cuántos juegos debían ganar para quedarse con el premio.

Niccolo Tartaglia (1499–1557), también intentó resolver este problema y en 1556 publicó un libro en el que descartaba la solución dada por Pacioli y daba su propio solución: si un equipo ha ganado a puntos y el otro b, se juega a n puntos y el premio total es P, las ganancias deberían repartirse de la forma: $\left(\frac{P}{2} \pm P\left[\frac{(a-b)}{n}\right]\right)$ siendo la cantidad mayor para el equipo que tenga más victorias. Sin embargo, Tartaglia fue consciente de que su solución no era la correcta y en su libro dejaba claro que era buena para impartir justicia y equilibrio a un reparto, pero no era exacta desde el punto de vista matemático.

Se atribuye el origen de la formulación de la primera teoría de las probabilidades a una disputa entre grandes apostadores en el año 1654, entre los cuales se encontraban Blaise Pascal, conocido matemático francés y un asiduo apostador el caballero Antoine Gombaud el Chevalier de Mére quien se contactó con Pascal, para que le ayudara a discernir una aparente contradicción en un popular juego de dados. El juego consistía en lanzar un par de dados 24 veces y analizar si era predecible que en ambos dados apareciera el seis al menos una vez de las 24 ocasiones. El caballero de Mére quería ver si valía la pena realmente apostar, la experiencia le decía que sí, pero sus cálculos matemáticos decían lo contrario.

Este y otros problemas planteados por el caballero a Pascal sobre juegos de azar, dieron origen a una correspondencia entre el propio Pascal y algunos de sus amigos matemáticos, sobre todo con Pierre de Fermat (1601-1665) de Toulouse, abogado de profesión, pero gran amante de las matemáticas. Este intercambio se considera como el origen de los principios de la teoría de las probabilidades. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que tanto como Pascal y Fermat no desarrollaron tanto esta teoría.

Años más tarde sería Christian Huygens en 1657, quien tras conocer el tema a través de la correspondencia entre Pascal y Fermat, escribiría el libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae.* Otros matemáticos que continuaron consolidando esta teoría serían también Abraham de Moivre y Pierre Simon Laplace.

Jean Le Rond d' Alembert (1717-1783) fue un famoso matemático francés del siglo XVIII; es también famoso por haberse equivocado en el siguiente problema que le fue planteado en 1754: ¿Con que probabilidad una moneda que se tira dos veces, por lo menos una vez cae en sello? entrego como respuesta 2/3. El matemático consideraba que hay únicamente tres resultados posibles: cara en el primer lanzamiento cara en el segundo lanzamiento ninguna cara. Como hay 3 casos posibles y dos favorables, la probabilidad buscada es 2/3. D' Alambert no tuvo en cuenta que los tres resultados posibles no eran igualmente probables, siendo la respuesta correcta 3/4.

Durante el siglo XVIII el interés por aplicar conceptos matemáticos a los juegos de azar interesaron a grandes matemáticos, siendo Jakob Bernoulli y Abrahan de Moivre dos de los principales precursores de aplicar las matemáticas en los juegos de azar.

De esta manera, gracias a Bernoulli, se introdujo en la teoría de la probabilidad la ley de los Grandes Números, uno de los conceptos más importantes en cálculo de probabilidades, muestreos, etc. También las probabilidades ya eran trabajadas en diversos contextos fuera de los juegos de azar y con aplicaciones en muchos campos de la estadística y de las matemáticas y la ciencia en general. Esta ley además será objeto de conversaciones entre matemáticos en los siglos venideros, estando sujeta a constantes estudios, mejoras y ampliaciones hasta prácticamente nuestros días. Ya en esta época el Marqués de Condorcet (1743 – 1794) líder político durante la revolución francesa estaba interesado en aplicar las probabilidades en otras disciplinas como la economía y política, siendo así que realizaba cálculos para determinar la probabilidad de que un jurado que dictaminaba un veredicto por mayoría tenía la decisión correcta si cada miembro del jurado tenía la misma probabilidad de tomarla en forma independiente.

En 1812 Pierre de Laplace publica su obra titulada Théorie Analytique des Probabilités en la que extendió definitivamente el uso de las probabilidades fuera del ámbito de los juegos de azar. Así Laplace incorporó a su dominio temas pertenecientes a diferentes campos como astronomía, demografía, filosofía y la mecánica estadística.

Pierre de Laplace introdujo la primera definición explícita de probabilidad, la llamada probabilidad clásica o a priori (del latín “lo que viene antes de”). Se define como “una cuantificación obtenida a través de un análisis lógico de información disponible del evento aleatorio”. La probabilidad p(A) de un suceso A es igual a la proporción del número de resultados que son favorables al suceso A en relación al número de todos los resultados posibles de la prueba. Esta definición asume implícitamente que los resultados individuales son equiprobables (esto se justifica normalmente por simetría). Laplace formuló el "principio de razón insuficiente" para la operatividad de la regla; según este principio, debemos asumir que los resultados son equiprobables si no tenemos razón para creer que alguno de los resultados es más probable que otro. Esta primera definición formal no clarifica la naturaleza de la probabilidad en cuanto que para su operatividad se refiere a un principio oscuro filosóficamente y tiene un dominio de aplicación que no engloba los problemas reales. Los intentos posteriores que se hicieron para corregir este principio (basado en consideraciones de indiferencia o invariancia) no tuvieron éxito. Había algunos problemas e ideas que dificultaban el progreso conceptual.

En 1894, Karl Pearson analizó un gran número de resultados de una determinada ruleta no justa (con distribución no uniforme) y sugirió utilizar los casinos como un laboratorio dedicado al estudio de las probabilidades para realizar experimentos y analizar los datos.

La escuela Rusa contribuyo en gran parte al desarrollo de la teoría de las probabilidades, que está plasmada en muchos libros que son utilizados en la actualidad. El primer libro de probabilidades que surgió de la escuela francesa es obra de Viktor Buniakovski (1804-1889).

A partir, fundamentalmente, de Laplace las dos disciplinas más importantes dentro de la teoría de la probabilidad, que eran la teoría de probabilidades y la estadística se fusionaron de manera que el cálculo de probabilidades se convirtió en el andamiaje matemático de la estadística. Toda la base matemática que permitió desarrollar la teoría de probabilidades está extraída del análisis combinatorio, una disciplina iniciada por Leibniz y Jacob Bernoulli. Posteriormente con el paso del tiempo fue introduciendo la teoría de límites disminuyendo el peso que tenía el análisis combinatorio.

Del texto escrito por Laplace se puede destacar un extracto de la definición que hacía de probabilidad:

"La teoría del azar consiste en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad de busca. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es, pues, más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los posibles” (Todhunter, 1965, p.5)

Esta definición ha sido fundamental para el desarrollo de la probabilidad durante más de dos siglos, hasta que en la primera mitad del siglo XX, Kolmogorov en su monografía (traducida al inglés en el año 1950), titulada Foundations of Probability Theory, la que nos dio la axiomática que es la base de la teoría moderna de las probabilidades.

Ahora bien, podemos decir que esta teoría se ha ido consolidando y fue mejorando por medio de aportes teóricos de diversos matemáticos quienes contribuyeron en el desarrollo de esta teoría. En la actualidad el conocimiento de las probabilidades se exige en los programas vigentes del ministerio de educación, en el ámbito universitario es casi seguro el estudio de las probabilidades en carreras universitarias.

Esquema del tiempo de las contribuciones en la teoría de probabilidades

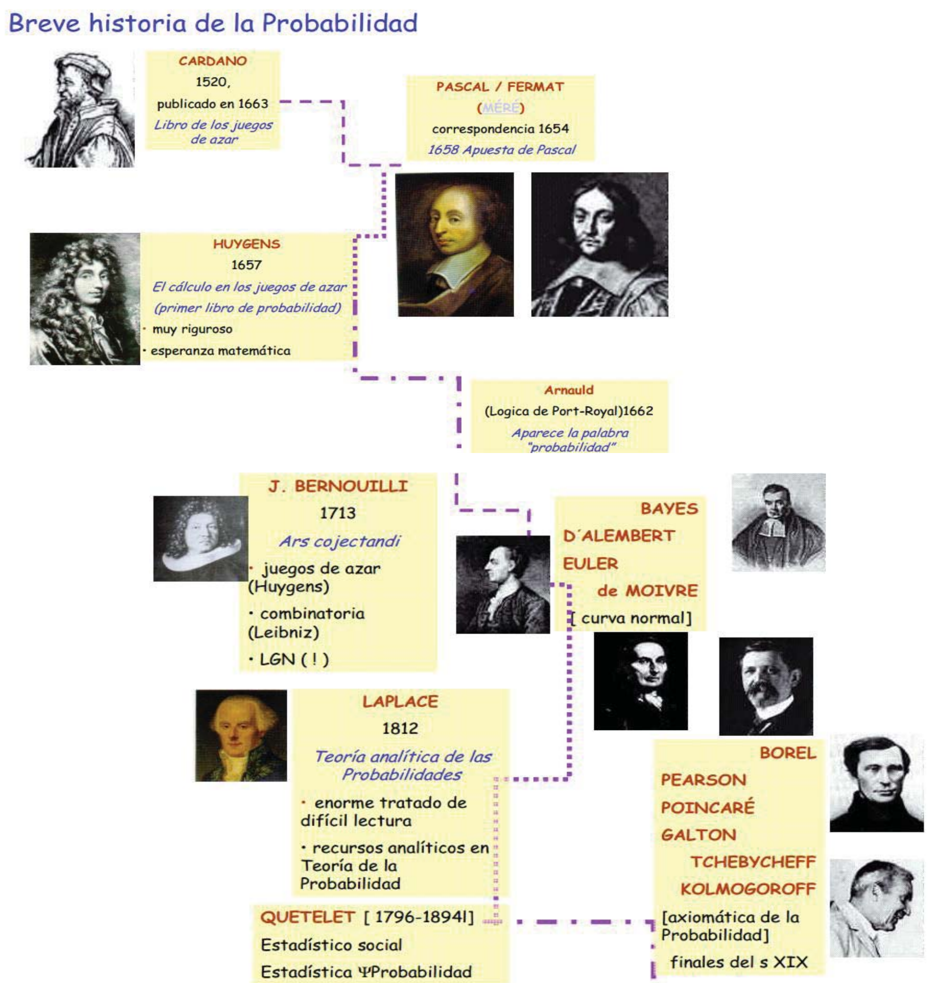


Figura 1: Historia de las probabilidades (Todhunter, 1965)

1.4 Hábitat de las probabilidades como objeto a enseñar

A continuación se mostrará el lugar que tiene la probabilidad en los programas de estudios de enseñanza media, para esto se analizarán los aprendizajes esperados para los niveles de octavo año de enseñanza básica y primer año de enseñanza media, propuestos por el MINEDUC.

1.4.1 Currículum nacional

En el marco curricular vigente en el eje de datos y azar, comienza a estudiarse en séptimo año básico, comenzando con sucesos aleatorios y deterministas, complementando la probabilidad mediante las tablas de frecuencias como la razón entre la frecuencia absoluta y el número total de datos, se trabaja con espacios muéstrales finitos y se establece la probabilidad como una frecuencia relativa a partir de experimentos que son repetidos un número limitado de veces. En octavo básico se retoma el concepto de probabilidad y se hace hincapié a trabajar de manera no experimental usando el modelo de Laplace, en este nivel se aplica la regla para el cálculo de probabilidades.

En los programas de matemática en séptimo básico es abordado el tema, donde en este curso se establece como objetivo fundamental lo siguiente:

“Predecir acerca de la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples” (MINEDUC,2009 p.75)

Se retoma el concepto de probabilidades en el nivel de octavo básico, estableciéndose el siguiente objetivo fundamental:

“Determinar teóricamente probabilidades de ocurrencia de eventos, en experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales” (MINEDUC,2009 p.68)

Luego en octavo básico en conexión con el programa escolar del anterior año, establece el programa escolar que el tiempo adecuado para la enseñanza de las probabilidades es de 30 a 35 horas.

Los contenidos asociados a esta Unidad son:

a) Análisis de ejemplos en diversas situaciones donde los resultados son equiprobables, a partir de la simulación de experimentos aleatorios mediante el uso de herramientas tecnológicas.
b) Identificación del conjunto de los resultados posibles en experimentos aleatorios simples (espacio muestral) y de los eventos o sucesos como subconjuntos de aquél, uso del principio multiplicativo para obtener la cardinalidad del espacio muestral y de los sucesos o eventos.
c) Asignación en forma teórica de la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento alea- torio, con un número finito de resultados posibles y equiprobables, usando el modelo de Laplace.

Los aprendizajes esperados por parte de los alumnos son:

1. Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

2. Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

En la enseñanza media se continúa con esta unidad, donde en primero medio se fortalece el concepto de probabilidad por medio de la regla de Laplace, planteándose el siguiente objetivo fundamental:

> "Obtener la cardinalidad de espacios muéstrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones" (MINEDUC, 2009 p.181)

Retomando lo anterior en segundo medio se estudian las probabilidades de sucesos compuestos, sucesos dependientes e independientes, donde el objetivo fundamental es:

> "Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades" (MINEDUC, 2009 p.185)

1.4.2 Textos Escolares

A continuación se hará una descripción y análisis de la organización matemática que proponen dos textos escolares de séptimo y octavo año básico difundidos por el MINEDUC, con el propósito de extraer el nivel de comunicación y conexión con los programas de estudios vigentes. También el trabajo y tipo de tareas que propone el texto escolar de acuerdo a los aprendizajes esperados del currículo nacional.

1.4.2.1 Texto para el estudiante, Matemática 7° básico, año 2013

En este nivel se comienzan a estudiar conceptos como azar e incertidumbre o que tan probable o poco probable, se estudian experimentos aleatorios que pueden ser manipulados por simuladores gráficos y representados mediante tablas de frecuencias. El texto muestra cómo se puede calcular la probabilidad experimental realizando un experimento un número limitado de veces mediante el cuociente de la frecuencia relativa y el número total de casos.

Probabilidades de eventos aleatorios

Si tienes una moneda equilibrada y la lanzas 20 veces quizás esperes obtener 10 caras y 10 sellos. Aunque realices esta experiencia varias veces es muy poco probable que obtengas la misma cantidad de sellos que de caras. Sin embargo, cuando la cantidad de repeticiones de un experimento es grande, se observan ciertas regularidades. Descarga del sitio web: www.santillana.cl/mat2/moneda.xls una hoja de cálculo para que experimentes con el lanzamiento de una moneda y observes el gráfico correspondiente.

Libro Santillana, texto para el estudiante (7° básico, página 170)

En este texto escolar no se evidencio conceptos como azar o incertidumbre, el comenzar tan repentinamente con probabilidad de eventos aleatorios sin antes definir o comentar que se entiende por azar, puede ser un obstáculo para el estudiante a medida que avanza con el estudio de las probabilidades.

1.4.2.2 Texto para el estudiante, Matemática 8° básico, año 2013

En este texto se comienza con definiciones de espacio muestral, sucesos y eventos, para posteriormente contextualizar un suceso equiprobable con la siguiente situación:

Sucesos equiprobables

Seis amigos y amigas (Camila, Josefa, Andrea, Carlos, Alberto y Rosita) salieron de excursión al campo, para investigar acerca de algunos insectos. Decidieron que uno de ellos escribiría todo lo observado; para escogerlo realizaron un sorteo, que consistía en anotar el nombre de cada uno en un papel y, luego, sacar uno, sin mirar, que indicaría quién escribiría el informe.

Hipertexto

Para discutir

- El sorteo realizado, ¿corresponde a un experimento aleatorio?, ¿por qué?
- ¿Cuál es el espacio muestral en este caso?
- ¿Todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos?

Libro Santillana, texto para el estudiante (8° básico, página 152)

Posteriormente se concluye en el texto del estudiante lo siguiente:

No olvides que...

- Si en un experimento todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, se dice que los sucesos son **equiprobables.**

Luego de un taller de ejercicios reforzando el concepto de sucesos equiprobables, se continúa con la introducción de la regla de Laplace, abordando el cálculo de probabilidades mediante una formula como se muestra a continuación.

- La probabilidad de un suceso A, se denota por $P(A)$.
- **Regla de Laplace:** si en un experimento aleatorio los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, son equiprobables, la **probabilidad** de que un suceso A ocurra se puede calcular utilizando:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos totales}}$$

Ejemplo:

Al lanzar un dado de seis caras, la probabilidad de que el número sea primo es de $\frac{1}{2}$ ó 0,5 ó 50%, ya que,
Suceso A: obtener un número que sea primo
Casos favorables: $\{2, 3, 5\} \longrightarrow$ 3 casos favorables
Casos totales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow$ 6 casos totales

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ó } 0{,}5 \text{ ó } 50\%$$

Libro Santillana, texto para el estudiante (8° básico, página 155)

En general la noción de probabilidad se trabaja mediante el uso del principio de Laplace y solo se estudiaron experimentos aleatorios y no se dieron ejemplos de experimentos no aleatorios donde no es posible determinar la probabilidad a priori mediante la regla de Laplace.

1.4.2.3 Texto para el estudiantze, Matemática 1° Medio, año 2014

En este nivel se retoma la noción de probabilidad, estudiando la probabilidad empírica y contrastando de la probabilidad teórica, conocida como regla de Laplace. También se muestran diferentes formas de representar el espacio muestral de un experimento aleatorio, mediante diagramas de árbol y como par ordenado. Además de estudiar propiedades como la probabilidad complementaria.

Este cálculo de probabilidad surge del hecho que todos los resultados posibles son igualmente probables, y recibe el nombre de **probabilidad clásica** o **teórica**.

$$\text{Probabilidad Teórica} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

Según la tabla del lado izquierdo, una persona con discapacidad, ¿qué probabilidad tiene de recibir ayuda? ¿Qué probabilidad tiene de no recibir ayuda? ¿Cómo calculas las probabilidades? En este caso usaremos la probabilidad dada por la frecuencia relativa. A este tipo de probabilidad se le denomina **probabilidad empírica** y se determina teniendo en cuenta la frecuencia del evento y el número total de observaciones.

$$\text{Probabilidad empírica} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurre}}{\text{Número total de observaciones}}$$

Libro McGraw-Hill, texto para el estudiante (1° medio, página 208)

1.4.2.4 Texto para el estudiante, Matemática 2° Medio, año 2014

En segundo medio se retoman las probabilidades y se estudian sucesos compuestos, dependientes e independientes. Concentrándose el estudio en las reglas del producto y la suma de probabilidades, se utilizan distintos diagramas para su representación e inducir a las propiedades.

Se mencionan los sucesos mutuamente excluyentes, pero no el caso contrario omitiendo la propiedad de la adición de probabilidades cuando los sucesos no son mutuamente excluyentes y en la multiplicación de probabilidades ocurre lo mismo cuando los sucesos son dependientes.

> Si en un experimento debe ocurrir primero un suceso A (con probabilidad P(A) y luego un suceso B (con probabilidad P(B) luego de que ocurre A), se tiene que:
>
> $$P(AyB) = P(A) \cdot P(B)$$
>
> Si un suceso C se compone de dos sucesos A y B mutuamente excluyentes, entonces:
>
> $$P(C) = P(A) + P(B)$$

Libro McGraw-Hill, texto para el estudiante (1° medio, página 208)

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Espacio de trabajo matemático ETM

El enfoque teórico que sustenta este trabajo de investigación es la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico ETG*, desarrollada inicialmente por Houdement y Kuzniak (1996,2006). Actualmente esta teoría fue profundizada en aspectos que no consideraba el ETG y se conoce como *Espacio de Trabajo Matemático (ETM)*, llamada así por Kuzniak (2011). Actualmente el espacio de trabajo matemático es una profundización del ETG para otros dominios de la matemática (geométricos, algebraico, análisis, probabilidades, etc).

Un espacio de trabajo matemático, se define como un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos dependiendo del dominio. En el caso de las matemáticas escolares, estos individuos generalmente no serán expertos sino alumnos o estudiantes, bien a nivel de principiantes o avanzados.

En el ETM se distinguen dos planos, el epistemológico y cognitivo, y la articulación entre estos mediante tres tipos de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación y orden. Cada plano contempla tres componentes, en el plano epistemológico: representamen, artefactos y el referencial, y en el plano cognitivo: visualización, construcción y prueba. La articulación de estas componentes entre los dos planos por medio de las génesis, permiten un ambiente organizado de trabajo, para lograr un aprendizaje adecuado del dominio en que se encuentra una persona.

Los planos que estructuran la ETM y que ayudan a comprender la circulación de los conocimientos matemáticos, a través de las tres génesis a desarrollar, permiten hacer posible un buen trabajo matemático.

Una primera génesis, inicialmente llamada génesis figural, proviene del ETG para describir el proceso semiótico asociado con el pensamiento visual que se da en geometría. Actualmente es conocida como génesis semiótica para globalizar en distintos dominios de matemática, está génesis basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporciona un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; esta génesis semiótica asegura, el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos vinculados. Una segunda génesis, la génesis instrumental permite hacer operatorio los artefactos en el proceso constructivo y finalmente la génesis discursiva que tiene relación con la teoría misma del dominio de trabajo (definiciones, propiedades) en el referencial teórico, para ponerlos al servicio del razonamiento matemático y de una validación exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada. (Kuzniak, 2011).

En la siguiente figura se muestra el ETM y las génesis que permiten articular los planos.

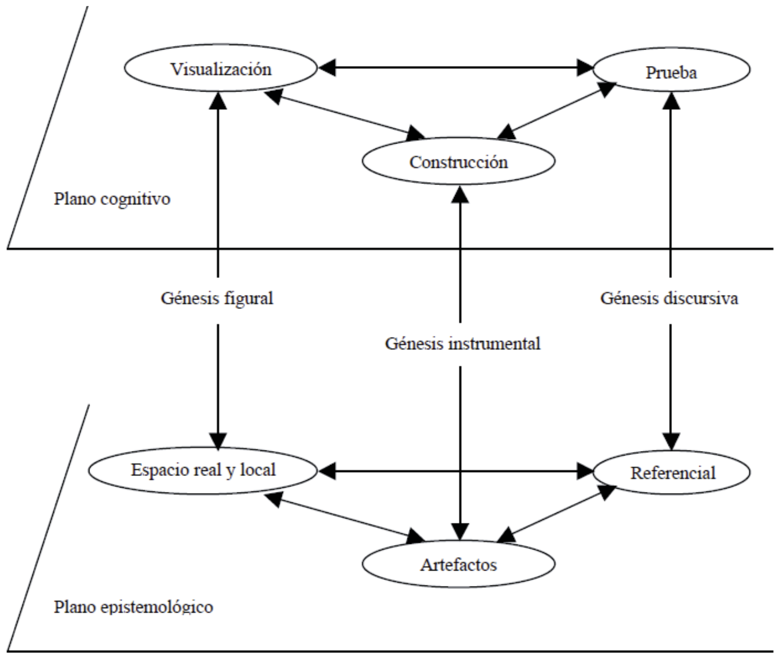


Figura 2: Espacio de Trabajo Matemático y su génesis (Kuzniak, 2011)

2.2 Componentes del plano epistemológico del ETM

El plano epistemológico está compuesto por tres componentes, las que se articulan dando un sentido a este espacio de trabajo. Las componentes de este plano son:

La idea del representante está relacionada a la noción signo de Pierce (1978), y tiene que ver con el objeto matemático bajo formas más o menos abstractas: íconos, índices y símbolos. Un signo remite a su objeto de alguna de estas tres formas, según un proceso semiótico, este proceso es conocido como génesis semiótica que permite articular esta componente y poder visualizarlo en el plano cognitivo. En el ETM_p la idea de representamen estará representada por los propios símbolos o notación conjuntista que se utiliza en probabilidades.

Los artefactos en el ETM, según el sentido de Rabardel (1995), quien distingue entre un artefacto material y otro simbólico, empleado como un medio para la acción. El instrumento es considerado como una entidad mediadora, entre el sujeto y objeto sobre el cual se dirige la acción, cuando los artefactos se utilizan como medio de acción, es decir son instrumentalizados para una posterior construcción del objeto matemático, la articulación entre ambas componentes se produce mediante la génesis instrumental. En el ETM_p la idea de artefactos estará compuesta por el material concreto al realizar un experimento aleatorio en la probabilidad experimental o los manipuladores virtuales en el caso de simulaciones de experimentos aleatorios por medio de un software de estadística.

La componente referencial proviene de los elementos de carácter teórico del dominio matemático en juego. En esta componente se encuentran las propiedades, teoremas, definiciones y otros elementos que permiten ser utilizados para argumentar y convencer matemáticamente mediante procesos de pruebas, la buena articulación entre estas dos componentes permite activar la génesis discursiva. En el ETM_p la componente referencial proviene de los elementos teóricos que sustentan la teoría de las probabilidades en los distintos ámbitos: probabilidad experimental que obedece a la ley de los grandes números, probabilidad clásica y probabilidad bayesiana.

2.3 Componentes del plano cognitivo del ETM

El plano cognitivo del ETM, está compuesto por tres componentes, las que se articulan por medio de las génesis desarrolladas dando un sentido a este espacio de trabajo matemático. Las componentes de este plano son:

La visualización relativa a la representación de un objeto en sus diferentes formas, en el caso de las probabilidades una representación de un espacio muestral mediante un diagrama de árbol o la propia frecuencia relativa de un evento en base a un experimento.

Un proceso de construcción que depende de los instrumentos utilizados cuando los artefactos contribuyen al trabajo matemático. En el caso de las probabilidades en cómo se construye la probabilidad frecuencial a partir de experimentos aleatorios simples o de experimentos realizados con un simulador de experimentos aleatorios.

Un proceso discursivo que depende de los tipos de pruebas, argumentos o razonamientos matemáticos de validación del objeto matemático. En el caso de las probabilidades en cómo se valida la ley de los grandes números por medio de la convergencia de la frecuencia relativa a un número, a partir de repetir el experimento un número ilimitado de veces. Las propias demostraciones del teorema de Bayes a partir de la probabilidad condicional.

2.4 Tipos de ETM

En los distintos ETM es posible identificar tres tipos, dependiendo del ambiente de trabajo en que este insertó un sujeto, un referencial definido de manera ideal sobre criterios matemáticos (ETM de referencia). Un espacio definido en términos de la enseñanza en como transmite y enseña el profesor cierto contenido de aprendizaje (ETM idóneo) y, un espacio propio que lo caracteriza la forma de cómo resuelve una tarea de acuerdo a la reflexión de sus conocimientos matemáticos (ETM Personal)

En esta investigación se estudiara el espacio de trabajo idóneo del profesor que imparte clases en probabilidades, por esta razón resulta importante clarificar este tipo de ETM, ya que nos permite estudiar a dos profesores mediante la grabación de sus clases y observando el proceso de transposición didáctica efectivo en el establecimiento al momento de enseñar probabilidades.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

El diseño experimental del estudio es de carácter cualitativo y se enfocó en la recolección de datos mediante la metodología de estudio de casos, realizando un seguimiento a dos profesores de matemática de enseñanza media, considerando en nuestro estudio la enseñanza media a partir de séptimo básico. A cada profesor se observaron dos clases realmente efectivas, cuya duración de tiempo fue de una hora con treinta minutos, es decir dos periodos de clases, en primera instancia a un profesor del norte y en otra oportunidad a un profesor de la región metropolitana. En los dos casos los profesores realizaban sus clases en la unidad de Datos y Azar, específicamente en probabilidades.

Para analizar las grabaciones de clases, se han identificado episodios relevantes que tienen relación con el propósito de la investigación, atendiendo a lo anterior, se han analizado las tareas y las articulaciones entre ambos planos descritos en el marco teórico utilizado.

El proceso investigativo desarrollado permite analizar las componentes de cada plano del espacio de trabajo matemático idóneo del profesor en el dominio de probabilidades, permitiendo observar al profesor en sus clases, las definiciones utilizadas, el proceso de transposición didáctica y organización del saber matemático, la formulación de tareas y los tipos de materiales que utiliza para la experimentación.

Adicionalmente, como instrumento de recogida de datos, se construye un cuestionario con el objetivo de estudiar el espacio de trabajo idóneo y personal de profesores que enseñan probabilidades, cada una de las preguntas del cuestionario, tiene como objetivo principal analizar las circulaciones entre los planos epistemológico y cognitivo por medio de las génesis a desarrollar, enfocándose en lo que realmente el profesor activará en la clase en términos matemáticos y cognitivos.

La validación del cuestionario se consideró la opinión de expertos en el área de la Didáctica de la Matemática, en este caso el grupo de didáctica del espacio de trabajo matemático conformado por la Dra. Elizabeth Montoya (docente guía de este trabajo), El Dr. Arturo Mena y 6 seminaristas del último semestre del Magíster en Didáctica de la Matemáticas

3.2 Diseño de los instrumentos

3.2.1 Pautas de transcripción de clases

Para estudiar el espacio de trabajo matemático en probabilidades por dos profesores, se observan clases mediante grabaciones de clases, para analizar la transposición didáctica del profesor en aula.

Para analizar lo mencionado anterior se confecciona la siguiente pauta de observación y de transcripción de la clase, que nos permite distinguir los distintos episodios y las tareas involucradas en el desarrollo de la clase.

Profesor	**Número de clases observadas**	**Curso**	**Temas tratados**	**Uso de tecnologías en clases**

Tabla 1. Pauta de Observación

Tema central de la clase	**Episodio de la clase**	**Tarea (t)**

Tabla 2. Episodios de la clase y tipo de tareas

Minutos	Episodio de la clase	Profesor	Intervención alumnos

Tabla 3. Transcripción de videos de clases

3.2.2 Elaboración del cuestionario

Para relacionar la información obtenida acerca del ETM personal e idóneo que tienen estos dos profesores, se confecciona como instrumento un cuestionario, que tiene por objetivo contrastar la información obtenida mediante clases grabadas, aplicados a seis profesores de matemática de la región metropolitana, entre ellos dos profesores que imparten clases de séptimo a octavo básico y cuatro de ellos profesores de enseñanza media. El cuestionario contempla dos secciones, la primera sección son preguntas cerradas con opciones y la segunda con preguntas abiertas. La razón principal de haber escogido a este grupo de profesores fue el acceso que el investigador tenía al momento de aplicar el instrumento.

Pregunta N° 1: tiene como objetivo obtener información del ETM personal del profesor que imparte clases en la unidad de probabilidades, en cómo percibe el azar.

Se tira una moneda al aire muchas veces.

a) ¿En qué puede ayudar a sus estudiantes a entender cómo funciona el azar?

b) ¿Y en que lo puede confundir?

Pregunta N° 2: Tiene como objetivo obtener información del ETM idóneo del profesor, en cuanto a la transposición didáctica al enseñar la ley de los grandes números y la convergencia de la frecuencia relativa a un número mediante la experimentación.

Si utilizas un dado para explicar la ley de los grandes números

a) ¿cuáles son los puntos importantes en que te centrarías?

b) ¿En qué nos ayudaría este experimento?

Pregunta N° 3: Tiene como objetivo obtener información del ETM personal del profesor de matemática al justificar si un experimento aleatorio permite acercarse a la noción de probabilidad mediante la ley de los grandes números. Analizar la activación de la génesis discursiva al demostrar o probar la ley de los grandes números en experimentos aleatorios mediante el referencial teórico y el tipo de validación que utiliza el profesor.

- ✓ Del siguiente objetivo de aprendizaje propuesto en el programa vigente del actual currículo:

  “Predecir la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples”

  ¿Cómo enseñaría a sus estudiantes este objetivo de aprendizaje?

Pregunta N° 4: Tiene por objetivo obtener información ETM idóneo del profesor, en el proceso de transposición didáctica en el desarrollo de sus clases, al momento de abordar el tema de experimentos aleatorios, además de analizar su ETM personal al ver cómo percibe la probabilidad experimental y la contrasta con la teórica.

Del siguiente objetivo de aprendizaje:

“Determinar la probabilidad teórica de experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales”

¿Cómo enseñaría a sus estudiantes este objetivo de aprendizaje?

Pregunta N° 5: Tiene por objetivo estudiar el ETM personal del profesor en relación a cómo comprende la ley de los grandes números y como lo está enseñando a sus estudiantes (ETM Idóneo)

- ✓ Al realizar el experimento de lanzar un dado 100 veces y registrar en una tabla los resultados obtenidos, como se presenta en la siguiente tabla:

Número obtenido	N° de veces que se obtiene
1	17
2	18
3	21
4	13
5	12
6	19

Si la frecuencia relativa de obtener el número 5 es $\frac{12}{100} = 0{,}12$ y la probabilidad teórica es $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$. ¿Cómo explicas la relación entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica mediante estos datos?

Pregunta N° 6: Tiene por objetivo estudiar el ETM personal del profesor, para analizar lo que comprende por cálculo de probabilidades mediante la experimentación y por medio de la regla de Laplace.

- ✓ Si al lanzar 100 veces una moneda al aire, se obtienen 44 veces cara y 56 sellos, donde la frecuencia relativa de obtener cara es 0,44 y la de obtener sello 0,56. ¿Es posible inferir que la probabilidad de obtener cara es de un 50%?

Pregunta N° 7: Tiene por objetivo estudiar el espacio de trabajo personal e idóneo del profesor y estudiar la génesis discursiva en el momento de argumentar acerca de la intuición que tienen los estudiantes al momento de realizar una pregunta o tarea.

- ✓ Muchas personas piensan que después de tirar 5 veces una moneda y obtener cara todas las veces, la probabilidad de tener una cara la próxima vez es distinta que ½. Comente los argumentos que siguen

  a) La probabilidad que salga cara es mayor que ½ pues la moneda debe estar cargada

  b) La probabilidad que salga cara es menor que ½ pues como ha salido tantas caras toca que salga sello

  Explique cómo aprovechar estos razonamientos, fomentando el estudio sistemático de estos temas sin sacrificar la intuición

Capítulo 4: Análisis de resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos luego de la observación de clases analizando el espacio de trabajo matemático idóneo de ambos profesores.

Para organizar el análisis de los profesores observados, hemos asignado a cada profesor una nomenclatura; la sigla PR1 y PR2 hacen referencia a los dos profesores grabados en sus clases.

Análisis y Evidencias de los videos de PR1

Clase N° 1.

Nivel: Primero Medio

Número de estudiantes: 45

La siguiente tabla muestra parte de los episodios de la primera clase observada.

Tema central de la clase	**Episodio de la clase**	**Tarea (t)**
Noción de probabilidad	Se comparten ideas de que se entiende por probabilidad	No hay tarea
Probabilidad frecuencial	Predicción de la probabilidad experimental por medio de la frecuencia relativa	Lanzar una moneda y registral que se obtuvo
Probabilidad	Repetición del experimento	Lanzar un dado y

Frecuencial	Predicción de la probabilidad experimental por medio de la frecuencia relativa	registrar que aparece en la cara superior
Probabilidad Frecuencial	Predicción de la probabilidad experimental por medio de la frecuencia relativa	Lanzar un dado y registrar que aparece en la cara superior

A continuación mostramos un extracto de la clase donde PR1 muestra la probabilidad experimental, por medio del experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire.

PR1	Ya chiquillos, entonces la pregunta es, ¿cuál es la probabilidad de que salga sello al lanzar una moneda?, ya lancen sus monedas chiquillos y van a levantar honestamente a quien le salga sello. Ya chiquillos no la tiren tan arriba, tírenla en la mesa, ya a quien le salió sellos déjenme contarlos, 1,2,3,...,17. Ya entonces la primera vez que lanzamos ¿cuántos sellos se obtuvieron?
Alumnos	17
PR1	y cuántos hay en el curso chiquillos
Alumnos	45
Alumno	Pero no todos tiraron la moneda
PR1	Son 42 personas entonces, ya chiquillos ustedes conocen la frecuencia absoluta y relativa cierto.
Alumno	No, no me acuerdo

PR1	La frecuencia es las veces que sale y la frecuencia relativa vamos sumando las frecuencias anteriores, entonces aquí también es 17. Ya chiquillos lancen de nuevo sus monedas.

Este procedimiento se repite 3 veces y se presentan los resultados mediante una tabla de frecuencias, se observa en el discurso de la profesora que tiene un error al indicar que la frecuencia relativa es ir acumulando la frecuencia absoluta, confunde esta frecuencia con la frecuencia absoluta acumulada, la componente referencial de PR1 presenta confusión a sus estudiantes y puede generar un obstáculo didáctico cuando le corresponda aproximarse a la probabilidad mediante la frecuencia relativa.

¿Cuál es la probabilidad de que salga sello?

Nº de veces que se repite	f	fr	Total alumnos	Total lanzamientos
1	17	17	42	42
2	13	30	42	84
3	15	45	42	126

Episodio 2: Transcripción del experimento de lanzar una moneda al aire

En la tabla de frecuencia utilizada por PR1 se muestra que al cabo de 3 lanzamientos en 45 ocasiones ha salido sello de un total de 126, cuando ocurre esto la profesora solicita a sus estudiantes realizar el experimento nuevamente, ya que no se había realizado correctamente. Todo esto sucede al ver que los resultados que se escribieron en la pizarra no mostraban un acercamiento a la probabilidad teórica y se alejaban uno del otro.

En el episodio 3 de la clase cuando se repite el experimento, a partir de los datos recolectados por parte de todos los alumnos, se obtiene la siguiente tabla de frecuencia:

¿Cuál es la probabilidad de que salga sello?					
Nº de veces que se repite	f	fr	Total alumnos	Total relativa	Relativo total fr/Tr
1	15	15	38	42	15/38 =0
2	22	37	38	76	37/38
3	18	55	38	114	0,48
4	19	74	38	152	0,48
5	19	93	38	190	0,48
6	13	106	38	228	0,46

Episodio 3: Transcripciòn de la repetición del mismo experimento

La profesora en ese momento, considera que si se realizó correctamente el experimento, a partir de realizar 231 ocasiones el lanzamiento de la moneda, han salido 106 sellos. De esta forma termina explicando que este número 0,46 se acerca a 0,5 y concluye que la probabilidad de obtener un sello al lanzar una moneda al aire es 1/2.

En el tercer episodio la profesora realiza otro experimento en conjunto con sus estudiantes, ahora es el momento de lanzar un dado y predecir la probabilidad de obtener un 6.

¿Cuál es la probabilidad de que salga 6?					
Nº de veces que se repite	f	fr	Total grupos	Total relativa	Relativo total fr/Tr
1	2	2	13	13	o,15
2	4	6	13	26	0,23
3	2	8	13	39	0,2
4	1	9	13	52	0,17
5	3	12	13	65	0,18
6	3	15	13	78	0,19

Episodio 4: Transcripción del experimento de lanzar un dado al aire

Luego de realizar 6 veces el experimento por cada grupo y registrando en forma grupal los resultados obtenidos, se obtienen 15 seis de un total de 78 ocasiones que fue lanzado el dado. En esta ocasión la profesora concluye que 0,19 se aproxima a 1/6, justificando que la probabilidad de obtener un 6 es 1 de un total de 6.

Se observa que en esta clase que PR1 introduce la noción de probabilidad experimental, muestra cómo se registran los datos en una tabla de frecuencias y termina concluyendo la probabilidad con un número a partir de la frecuencia relativa. No se observa una circulación por la génesis discursiva que se explote o desarrolle, nada se argumenta matemáticamente, y rápidamente concluye que la frecuencia relativa es la probabilidad de ocurrencia de dicho evento al realizar un experimento un número finito de veces, sin importar que la convergencia de esta secuencia de frecuencias es uno de los grandes teoremas en probabilidades, llamado Ley de los grandes números.

A pesar de activar la génesis instrumental, al utilizar la componente de artefactos, donde las monedas o dados se instrumentalizan, para construir la frecuencia relativa a partir de los experimentos aleatorios realizados, no se logra por completo la noción de probabilidad frecuencista al no argumentar matemáticamente que este número tiende a su probabilidad teórica, no confronta con los estudiantes, sobre lo que pensaban intuitivamente y lo que se da en la experimentación.

La génesis semiótica es activada entre la componente representamen, que en este caso son los propios signos o símbolos que se utilizan en el ámbito de las probabilidades y como se visualiza en el plano cognitivo de diferentes formas, aunque este último se ve más ausente al no mostrar otro tipo de visualización del experimento aleatorio que podría haber sido un gráfico poligonal que muestre la tendencia de ocurrencia del suceso.

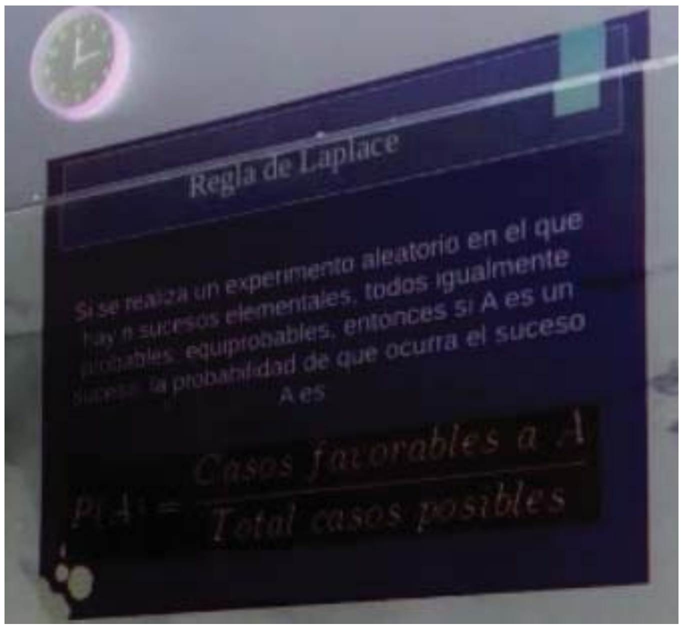
Clase N° 2

La siguiente tabla muestra los episodios importantes de la segunda clase observada.

Tema central de la clase	**Episodio de la clase**	**Tarea (t)**
Probabilidad Teórica	Introducir la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades	Calcular la probabilidad de experimentos aleatorios
Probabilidad teórica	Desarrollo de ejercicios	Calcular la probabilidad de experimentos.

Espacio muestral	Formas de representar un espacio muestral	Cálculo de probabilidades a partir de un espacio muestral

En el episodio 1, se observa la inclinación del ETM personal del profesor al presentar la regla de Laplace al iniciar su clase y luego entregar tareas a los estudiantes.

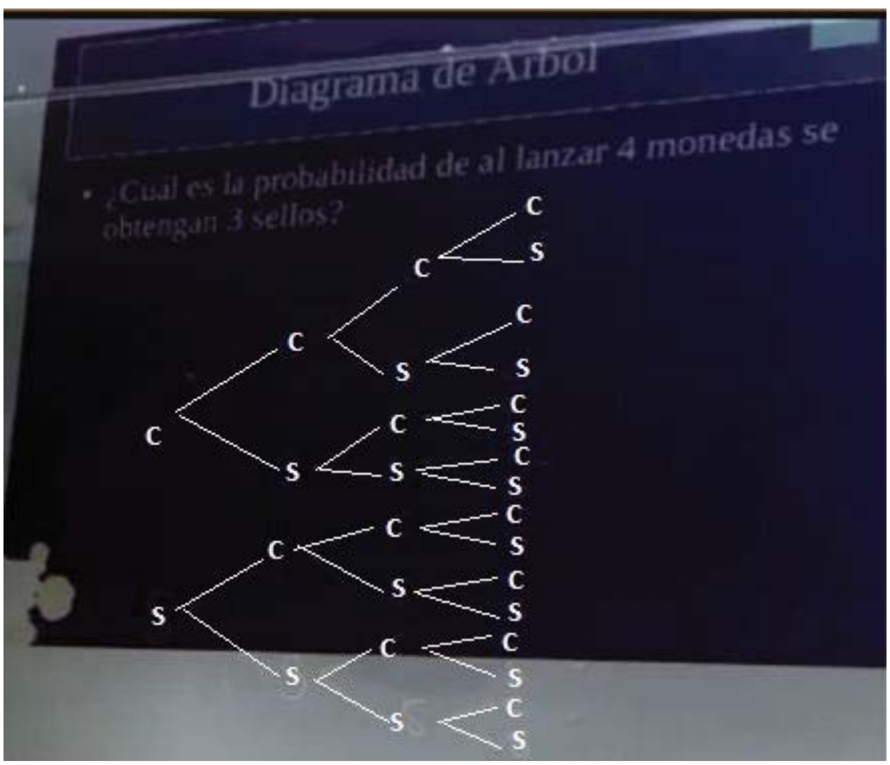


Hay una prevalencia de esta fórmula por parte de PR1 y se aplica de forma indiscriminada en todos los casos sin cuestionarse las condiciones de equiprobabilidad en la aleatoriedad del experimento. No se observa una circulación por la génesis discursiva que se explote o desarrolle, nada se justifica, y rápidamente pasa al cálculo.

Este episodio termina con ejercicios realizados con la regla de Laplace para el cálculo de una probabilidad, relativos a la resolución de problemas rutinarios en el dominio cognitivo de la aplicación.

En el episodio 2, se dan tareas orientadas al cálculo de la probabilidad mediante esta fórmula. A pesar de sus motivaciones, todo se reduce a una fórmula sin realizar la génesis discursiva. Sin embargo, realiza una circulación en el plano del descubrimiento recurriendo al artefacto simbólico fracción.

En el episodio 3, se introducen formas de registrar el espacio muestral de un experimento por medio del diagrama del árbol, en el caso de dos o tres monedas. Si bien se activa la génesis semiótica al visualizar por medio del registro gráfico mediante un diagrama de árbol, articulando los símbolos propios de las probabilidades con una representación gráfica.



En general la introducción de la formula mediante la regla de Laplace, carece de sentido al no contrastarla con experimentos donde esté ausente la equiprobabilidad, se aprecia una ausencia de verificar formulas o contrastar la probabilidad teórica con la probabilidad frecuencial, las tareas solicitadas durante los distintos episodios tienen por objetivo calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio mediante el uso de la regla de Laplace. En ningún momento el profesor prueba o muestra porque esta fórmula sirve para calcular cualquier probabilidad de un experimento aleatorio finito y con resultados igualmente probables, la ausencia de la génesis discursiva en la articulación entre la teoría misma y como esta se argumenta o se prueba, génesis discursiva.

Análisis y Evidencias de los videos de PR2

Clase 1.
Nivel: Segundo Medio
Número de estudiantes: 26
La siguiente tabla muestra los episodios importantes de la primera clase observada.

Tema central de la clase	**Episodio de la clase**	**Tarea (t)**
Introducir la noción de probabilidad por medio del significado de la palabra	Se comparte con los estudiantes ideas intuitivas de que se entiende por probabilidad	No hay tarea asociada
Calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso de manera intuitiva	Presentación de problemas donde los estudiantes intentan predecir la probabilidad de un suceso en experimentos aleatorios	Indicar la probabilidad de un suceso aleatorio

Distinción entre fenómenos determinísticos y aleatorios	Se comparte con los estudiantes fenómenos aleatorios y determinísticos y se ejemplifican	Clasificar fenómenos aleatorios y determinísticos

En el episodio 1, se intenta introducir intuitivamente a la noción probabilidad mediante aproximaciones al significado; se confrontan distintas percepciones que tienen los estudiantes, como posibilidad, resultado, oportunidad y aproximación.

En el segundo episodio, se calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento utilizando la intuición de los estudiantes, probabilidad a priori, sin realizar el experimento se intenta predecir la probabilidad de ocurrencia de un suceso

En el tercer episodio, se hace la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas, dando ejemplos de cada uno de ellos y pidiendo a sus estudiantes clasificar algunos fenómenos de la vida cotidiana.

En el cuarto episodio, se introduce la regla de Laplace, no se menciona las condiciones mínimas necesarias para poder calcular de manera teórica la probabilidad de ocurrencia de un suceso, ni tampoco se dieron ejemplos en donde no se puede aplicar esta regla cuando los experimentos aleatorios son no equiprobables.

A continuación mostramos un extracto de la clase donde PR2 muestra la Ley de Laplace (en una diapositiva) y ejemplifica para el cálculo de las probabilidades.

PR2	Bien, pasemos a la siguiente entonces. Esos son los tipos de experimentos que existen y ¿sobre qué trabaja la probabilidad entonces? Se supone que los deterministas el resultado ya se pueden conocer, pero en los aleatorios no hay una certeza de lo que pueda suceder, entonces la probabilidad mide la frecuencia con la que aparece un resultado determinado cuando se realiza, y este tiene una cantidad de sucesos determinados. ¿Cómo se calcula la probabilidad? Y esto es la regla de Laplace y se calcula en número de casos favorables dividido por el número de casos totales, y eso me va a dar la probabilidad de que un suceso pueda ocurrir. Por ejemplo, tenemos ejemplo para analizar: En una caja hay 12 bolas negras y 8 rojas ¿qué probabilidad hay de sacar una bola negra?
Alumnos	12 de 20
PR2	Sería, lo primero que hay que determinar es que la probabilidad es: casos favorables partido por casos totales… Para el caso de sacar una bola negra ¿cuántos casos favorables tenemos?
Alumnos	12
PR2	Son 12, cierto, porque dice sacar una bola negra ¿cuántas bolas negras tenemos?
Alumnos	12
PR2	Serían 12 dividido por los casos totales. Los casos totales son todos los casos que existen dentro del experimento. Son 12 bolas negras y 8 bolas roja ¿Cuántos casos tenemos

	en total? 20, la probabilidad es 12 de 20. Ahora, el caso de sacar una bola roja sería: los casos favorables son 8 partido por los casos totales que son 20 y eso es nada más la probabilidad para sacar este tipo de problemas, no es complicado, solamente tengo que analizar cuántos casos totales tengo y lo que me están pidiendo, cuántos casos favorables resultan del experimento. Arriba el total de casos favorables y abajo el total de casos del experimento.

Clase número 2.

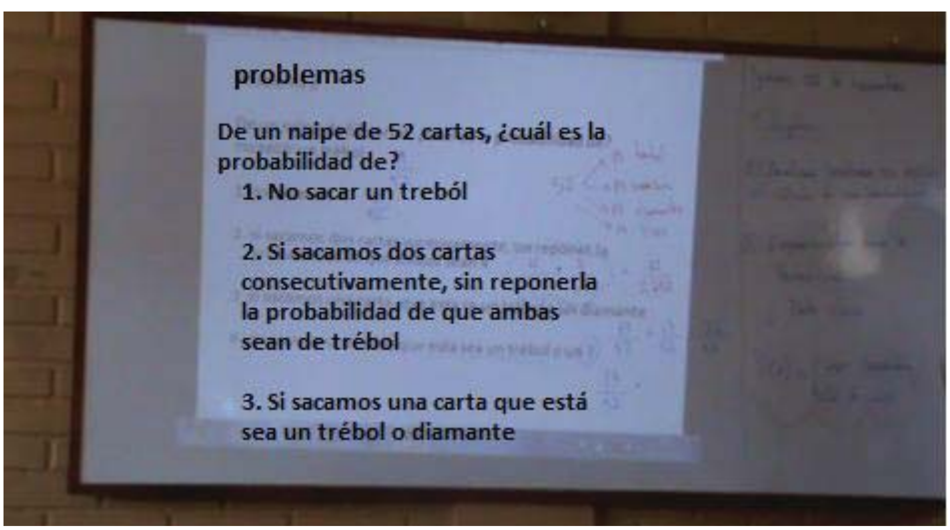
La siguiente tabla muestra los episodios importantes de la segunda clase observada.

Tema central de la clase	**Episodio de la clase**	**Tarea (t)**
Aleatoriedad	Se muestran videos de sucesos paranormales donde la probabilidad de ocurrencia es mínima	No hay tarea involucrada
Probabilidad Teórica	Se muestran ejemplos donde se puede calcular la probabilidad mediante la regla de Laplace	Calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso a partir de experimentos aleatorios
Suma y multiplicación	Se introduce al cálculo de	Calcular

de probabilidades	probabilidades mediante la suma y producto	probabilidades utilizando la regla de la suma y producto

En el primer episodio, se utilizan recursos tecnológicos por parte de PD2, para mostrar vídeos donde la probabilidad de ocurrencia de un suceso cotidiano es mínima.

En el segundo episodio, se calculan probabilidades utilizando la regla de Laplace. Se usa esta fórmula en toda la clase, a modo de ejemplo se muestra un extracto de este episodio de la clase, donde aparece en el lado izquierdo una diapositiva indicando una tarea a desarrollar a los estudiantes y en el lado derecho la fórmula de cálculo para obtener la probabilidad, en ningún momento se habla de que todas las pelotas deben ser equiprobables para poder calcular la probabilidad, deben tener el mismo tamaño y de igual volumen, el profesor junto a sus estudiantes no se cuestionan si pueden determinar la probabilidad teórica en esta tarea.



A continuación mostramos un extracto de la clase donde PR2 muestra la Ley de Laplace (en una diapositiva) y ejemplifica para el cálculo de las probabilidades.

PR2	Veamos un tercer ejemplo, un tercer problema. Dice: en naipe de 52 cartas, este es un naipe español, ¿cuál es la probabilidad de no sacar un trébol?
Alumno	¿Cuántas cartas son?
PR2	Cuántas cartas son, son 52, tenemos 13 trébol, tenemos 13 corazón, tenemos 13 diamantes y tenemos 13 picas ¿Cuál es?

En un tercer episodio, se observa que introduce la probabilidad de ocurrencia de un suceso con otro, no se distingue entre sucesos independientes y dependientes, conjuntos disjuntos, solo prosigue con una formula llamada regla de la suma y producto, el ETM idóneo del profesor es débil en esta materia y se ve influenciado por su ETM personal y Referencial. Hay ausencia de signos propios de la teoría de conjuntos que se utilizan en las probabilidades, el representamen que utiliza no es el adecuado y no logra visualizarse en el plano cognitivo, desde el punto de vista en que el estudiante vea una representación de las reglas mediante un diagrama de Venn u otros registros, no se logra activar la génesis semiótica.

Cuando PR2 muestra el cálculo de una probabilidad con una condición, utiliza el conector “o” como suma de probabilidades y el conector “y” como el producto de probabilidades, pero en ningún momento explica que lo que está realizando es para sucesos mutuamente excluyentes, esto traerá una dificultad mayor cuando los estudiantes se vean enfrentados a la misma situación con sucesos dependientes, conjuntos con elementos comunes, se equivocaran al no restar los elementos comunes a la suma de las probabilidades.

En la siguiente situación se observa la situación planteada anteriormente, donde el propio PR2 comete el error al enseñar la probabilidad de ocurrencia de un suceso compuesto con el conector lógico "o" como una suma de probabilidades, sin darse cuenta que los sucesos no eran mutuamente excluyentes, es decir habían elementos comunes.

En la siguiente cuadro se muestra el problema propuesto por PR2 a sus estudiantes y la respuesta entregada por el profesor.

Problema:

Una clase consta de 20 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños.

Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños

Respuesta:

$$\frac{10}{30} + \frac{15}{30} = \frac{25}{30}$$

La transcripción de este episodio es la siguiente.

PR2	Ultima parte para analizar, problema para analizar. Dice: Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños. Primero ¿cuál es el espacio muestral?, ¿cuántos son el total de casos?
Alumnos	30
PR2	Son 30 porque son 30 personas, 30 en total. Dice primera probabilidad, primera probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre. ¿Cuántos hombres tenemos?
Alumnos	10
PR2	10, la primera probabilidad es 10 de 30 "o", y ¿Qué habíamos dicho con "o"?, ¿qué significaba el "o"?
Alumno	Que teníamos la suma
PR2	Sería 30 y sería
Alumnos	15
PR2	Porque son 5 hombres y 10 mujeres, de 30, 25 de 30

En problema expuesto por PR2, donde menciona que la probabilidad de elegir a una persona al azar, esta sea hombre o de ojos castaños es igual a la suma de la probabilidades, entre los hombres con la probabilidad de escoger a una persona de ojos castaños, sin considerar que hay personas de ojos castaños que son hombres, es decir, no se da cuenta que los sucesos no son mutuamente excluyentes y omitió restar la intersección de la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez. Además ningún alumno se dio cuenta que si son 25 casos favorables habrían solo 5 personas que son mujeres y tienen ojos de otro color, contradiciendo el enunciado del problema que hay 10 mujeres que tienen los ojos de otro color.

La génesis discursiva en el ETM idóneo del profesor al momento de enseñar a sus alumnos es débil y presenta errores.

En el cuarto episodio, PR2 realiza experimentos aleatorios con material concreto, la moneda es un artefacto que es utilizado por los estudiantes para la construcción de la probabilidad frecuencial, por medio de la génesis instrumental, cada estudiante lanzaba una moneda 50 veces y registraba en su cuaderno el número de caras y sellos que se obtenía, si bien PR2 se esmeró por lograr aprendizajes por parte de los alumnos, este experimento es finito y el número de lanzamientos es muy pequeño para poder acercarse a un número de convergencia, se podría haber aprovechado aún más esta situación al calcular el promedio de todas las frecuencias relativas de todos los estudiantes, buscando la tendencia de la probabilidad frecuencial mediante más lanzamientos.

4.2 Análisis Cuestionarios.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en las respuestas de los cuestionarios aplicados a seis profesores. Para organizar el análisis de los profesores participantes, hemos asignado a cada profesor una nomenclatura; la sigla PM1, PM2, PM3, PM4, PM5 y PM6 hacen referencia a los seis profesores mencionados.

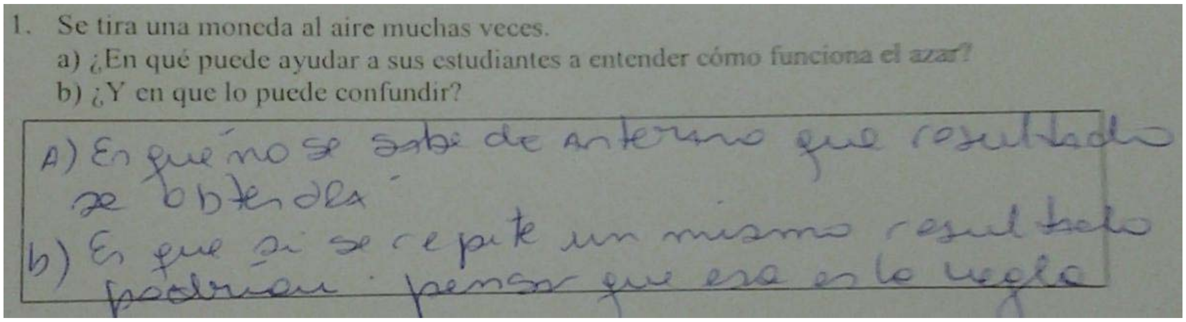
La estructura del análisis del cuestionario viene dada en dos partes, la primera un análisis personal de las respuestas entregadas en el cuestionario sobre el ETM idóneo del profesor y la segunda parte un análisis general del ETM idóneo de los profesores estudiados.

Nos centraremos en algunas respuestas que se consideran importantes de analizar.

Análisis de PM1.

El profesor encuestado tiene 12 años de experiencia impartiendo clases en la educación básica y en ocasiones en los niveles de séptimo a octavo año de enseñanza media. De sus años de trabajo, PM1 declara que en la mayoría de los casos la unidad de probabilidades es abordada en la planificación a final de año, además no siempre se estudia en profundidad.

En la pregunta 1 del cuestionario, PM1 responde lo siguiente:

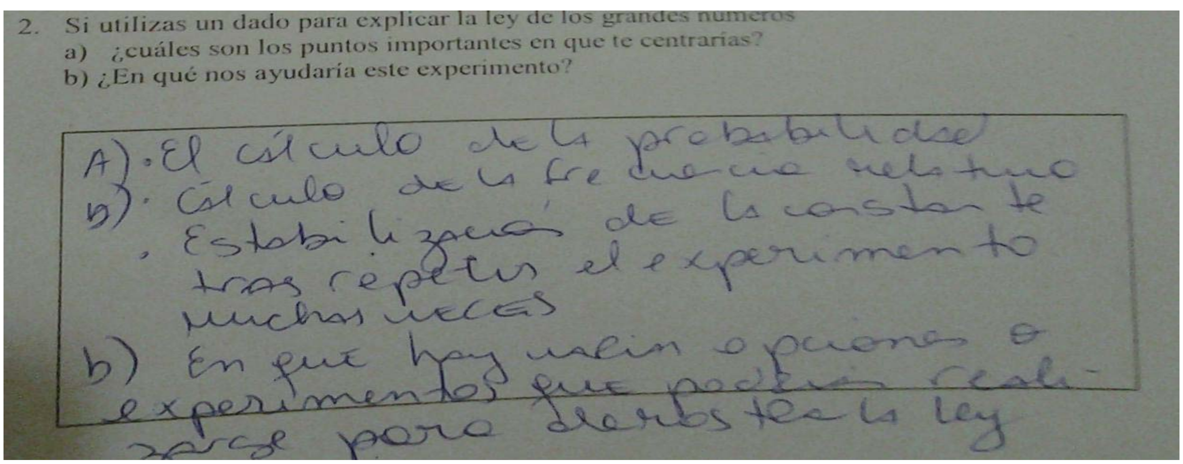

1. Se tira una moneda al aire muchas veces.
a) ¿En qué puede ayudar a sus estudiantes a entender cómo funciona el azar?
b) ¿Y en que lo puede confundir?

A) En que no se sabe de antemano que resultado se obtendrá
b) En que si se repite un mismo resultado podrían pensar que esa es la regla

a) En que no se sabe de antemano que resultado se obtendrá b) En que se repite un mismo resultado podrían pensar que esa es la regla

Afirmando que un estudiante se puede confundir al realizar el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire si la moneda está cargada. La respuesta entregada por PM1 indica que su ETM personal es desprovisto de un ETM referencial al no comprender que la tendencia de la probabilidad experimental mediante un número se acerca cuando el experimento se ha repetido más veces.

En la pregunta 2, PM1 responde:


2. Si utilizas un dado para explicar la ley de los grandes números
a) ¿cuáles son los puntos importantes en que te centrarías?
b) ¿En qué nos ayudaría este experimento?

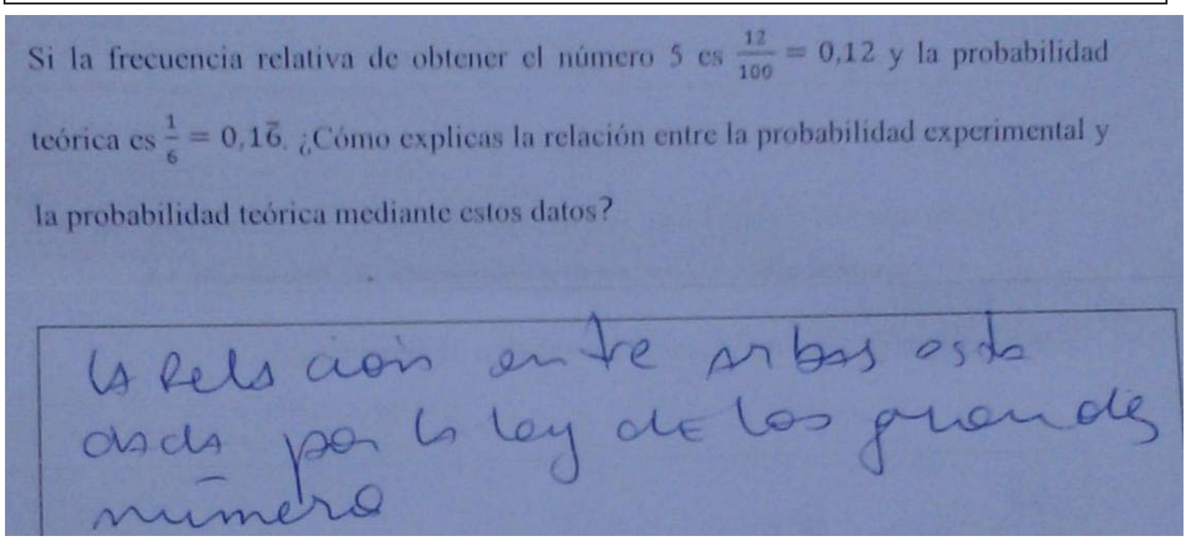
A) · El cálculo de la probabilidad
b) · Cálculo de la frecuencia relativa
· Estabilización de la constante tras repetir el experimento muchas veces
b) En que hay varias opciones o experimentos que podrían realizarse para demostrar la ley

a) El calculo de la probabilidad b) El calculo de la frecuencia relativa, estabilización de la constante tras repetir el experimento muchas veces c) En que hay varias opciones o experimentos que podrían realizarse para demostrar la ley

PM1 se centró en aspectos que no son tan relevantes para enseñar la ley de los grandes números o también conocido como el Teorema de James Bernoulli, donde lo central es fijarse en la tendencia de la asignación de la probabilidad mediante la frecuencia relativa, donde a largo plazo repitiendo más veces el experimento, el número de la frecuencia relativa se acerca a la probabilidad clásica o que la diferencia tiende a ser cero entre la frecuencia relativa y la probabilidad clásica.

En la pregunta 5, PM1 responde:

La relación entre ambas esta dada por la ley de los grandes números

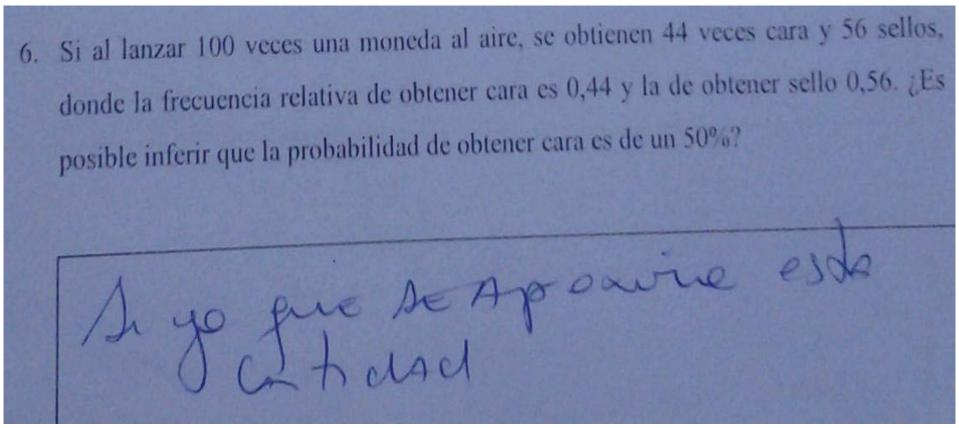


Si la frecuencia relativa de obtener el número 5 es $\frac{12}{100} = 0,12$ y la probabilidad teórica es $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$. ¿Cómo explicas la relación entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica mediante estos datos?

la Relación entre ambas esta dada por la ley de los grandes número

La respuesta de PM1 no es coherente con la ley de los grandes números y en este caso no es posible ver una relación entre $0{,}12\ y\ 0{,}1\overline{6}$, ya que la diferencia entre ambos valores esta muy alejado de cero, de esta forma como se menciona en el teorema se necesita repetir más veces el experimento para obtener una buena aproximación.

En la pregunta 6, PM1 responde:


6. Si al lanzar 100 veces una moneda al aire, se obtienen 44 veces cara y 56 sellos, donde la frecuencia relativa de obtener cara es 0,44 y la de obtener sello 0,56. ¿Es posible inferir que la probabilidad de obtener cara es de un 50%?

Si ya que se Aproxime esta Cantidad

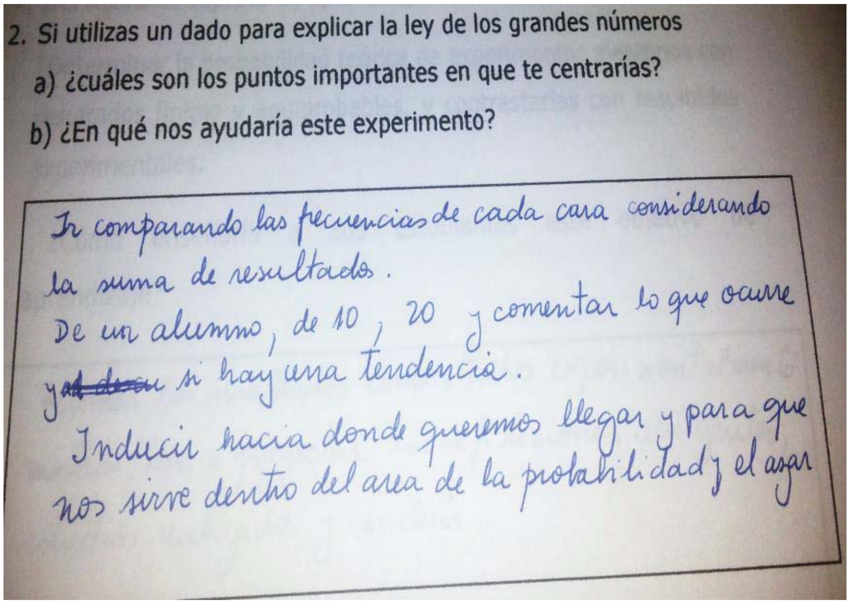
Si ya que se aproximaría esta cantidad

La respuesta entregada por PM1 no es la esperada, ya que existe mucha diferencia entre 0,44 y 0,56 a 0,5. Para poder acercarse a la probabilidad clásica debieran estabilizarse estos dos números cuando el experimento es repetido en más ocasiones acercándose cada vez más a 0.5

Análisis de PM3.

El profesor encuestado tiene 10 años de experiencia impartiendo clases en educación media. De sus años de trabajo, PM3 declara que con frecuencia cumple en la programación del contenido de probabilidad y que ocasionalmente planifica la unidad de probabilidades a final de año.

En la pregunta 2 del cuestionario, PM3 responde lo siguiente:


2. Si utilizas un dado para explicar la ley de los grandes números
a) ¿cuáles son los puntos importantes en que te centrarías?
b) ¿En qué nos ayudaría este experimento?

Ir comparando las frecuencias de cada cara considerando la suma de resultados.
De un alumno, de 10, 20 y comentar lo que ocurre y si hay una tendencia.
Inducir hacia donde queremos llegar y para que nos sirve dentro del area de la probabilidad y el azar

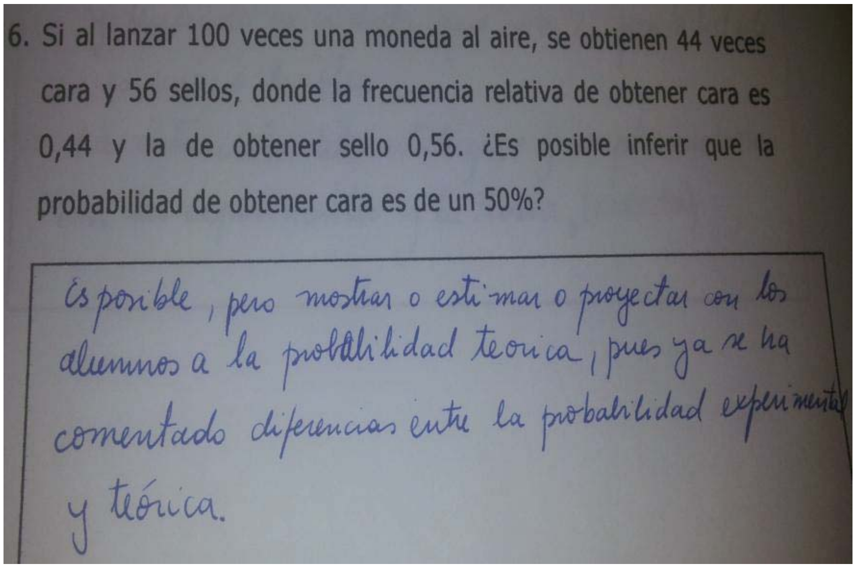
a) Ir comparando las frecuencias de cada cara considerando la suma de resultados

De un alumnos, de 10, 20 y comentar lo que ocurre y si hay una tendencia

b) Inducir hacia donde queremos llegar y para que nos sirve dentro del área de las probabilidades y el azar

Si bien el profesor debe facilitar el aprendizaje de sus estudiantes, no significa que deba inducir a un número cuando los datos experimentales no arrojan los resultados esperados por el profesor, para estos casos el profesor debe repetir más veces el experimento hasta llegar a cierta aproximación esperada. El proceso de transposición del contenido en PM3 le quita protagonismo a los estudiantes y ellos mediante la experimentación no alcanzaran a construir la probabilidad frecuencial, es decir la génesis instrumental no será activada entre los polos.

En la pregunta 6 del cuestionario, PM3 responde lo siguiente:



6. Si al lanzar 100 veces una moneda al aire, se obtienen 44 veces cara y 56 sellos, donde la frecuencia relativa de obtener cara es 0,44 y la de obtener sello 0,56. ¿Es posible inferir que la probabilidad de obtener cara es de un 50%?

es posible, pero mostrar o estimar o proyectar con los alumnos a la probabilidad teorica, pues ya se ha comentado diferencias entre la probabilidad experimental y teórica.

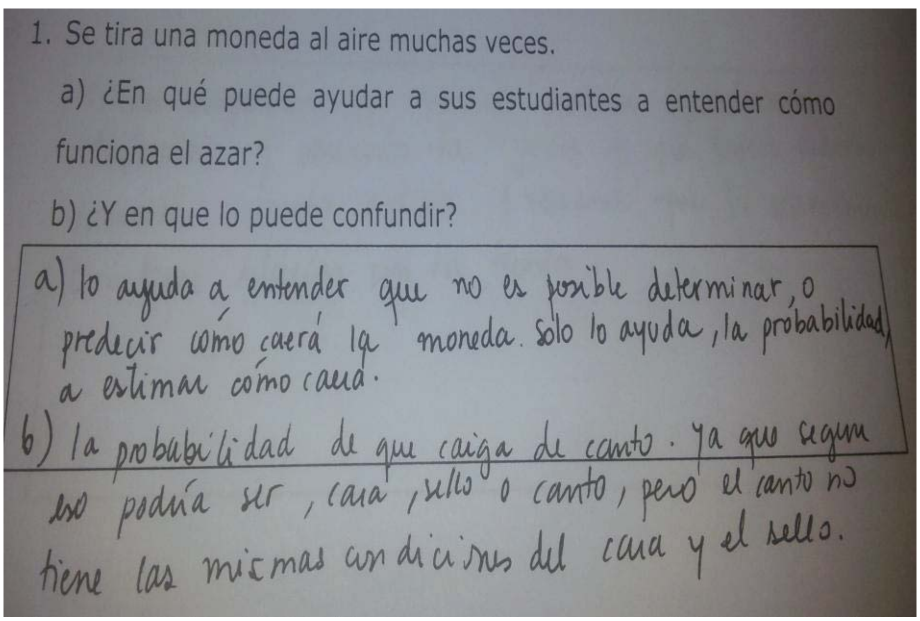
Es posible, pero mostrar o estimar o proyectar con los alumnos a la probabilidad teórica, pues ya se ha comentado diferencias entre la probabilidad experimental y teórica

PM3 manifiesta que existe una diferencia entre la probabilidad teórica y la probabilidad experimental, desconociendo el teorema del límite de James Bernoulli de la ley de los grandes números, descubrimiento que permite evidenciar que la frecuencia relativa se acerca a la probabilidad teórica cuando su diferencia tiende a cero al realizar el experimento de forma indefinida, que quiere decir esto que la diferencia entre la probabilidad experimental y la probabilidad clásica no debiese ser tan distinta, cuando el experimento es repetido un número de veces apropiado, entre más lejano es su diferencia quiere decir que las veces en que se repitió el experimento es mínimo y no obedece al tratamiento de la ley de los grandes números, de esta forma el ETM personal de PM3 afecta en los aprendizajes de los estudiantes, el discurso de PM3 en su proceso de transposición del saber es ausente en la génesis discursiva del ETM idóneo.

Análisis de PM5.

El profesor encuestado realiza clases en enseñanza media, tiene 2 años de experiencia. PM5 declara que en su planificación la unidad de probabilidades es trabajada a final de año, además menciona que utiliza herramientas tecnológicas para realizar simulaciones de experimentos aleatorios y que ocasionalmente cumple con los tiempos de programación de la unidad

En la pregunta 1 del cuestionario, PM5 responde lo siguiente:



1. Se tira una moneda al aire muchas veces.

a) ¿En qué puede ayudar a sus estudiantes a entender cómo funciona el azar?

b) ¿Y en que lo puede confundir?

a) lo ayuda a entender que no es posible determinar, o predecir cómo caerá la moneda. Solo lo ayuda, la probabilidad, a estimar cómo caerá.

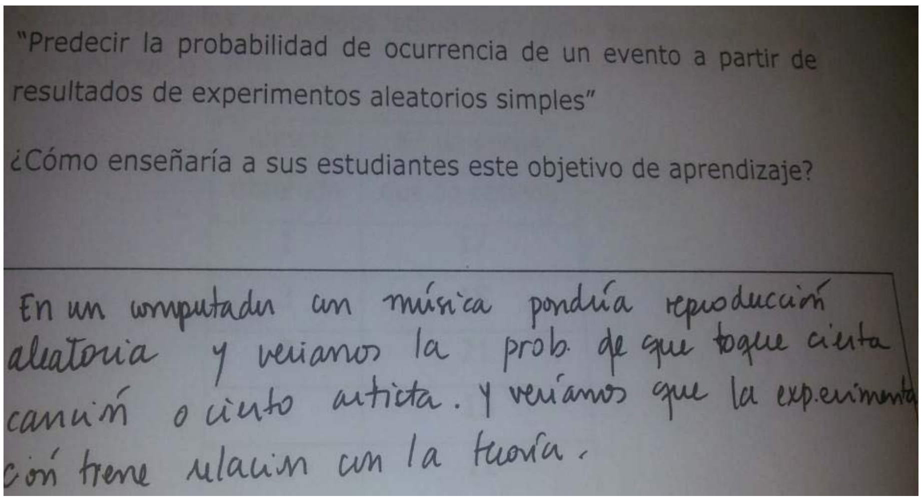
b) la probabilidad de que caiga de canto. ya que según eso podría ser, cara, sello o canto, pero el canto no tiene las mismas condiciones del cara y el sello.

a) Ayuda a entender que no es posible determinar o predecir cómo caerá la moneda. Solo lo ayuda, la probabilidad a estimar cómo caera.

b) La probabilidad de que caiga de canto, ya que según eso podría ser, cara, sello o canto, pero el canto no tiene las mismas condiciones del cara y sello

Un estudiante puede hacerse la pregunta de qué sucede si la moneda cae de canto, pero es solo una inquietud para él y en ningún momento se verá confundido con esta situación excepcional, se puede rápidamente clarificar al momento de realizar los lanzamientos por ellos mismos. Lo que confunde realmente al estudiante, es cuando el experimento se realiza pocas veces y se obtienen muchas caras a favor más que sellos.

En la pregunta 3 del cuestionario, PM5 responde lo siguiente:


"Predecir la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples"

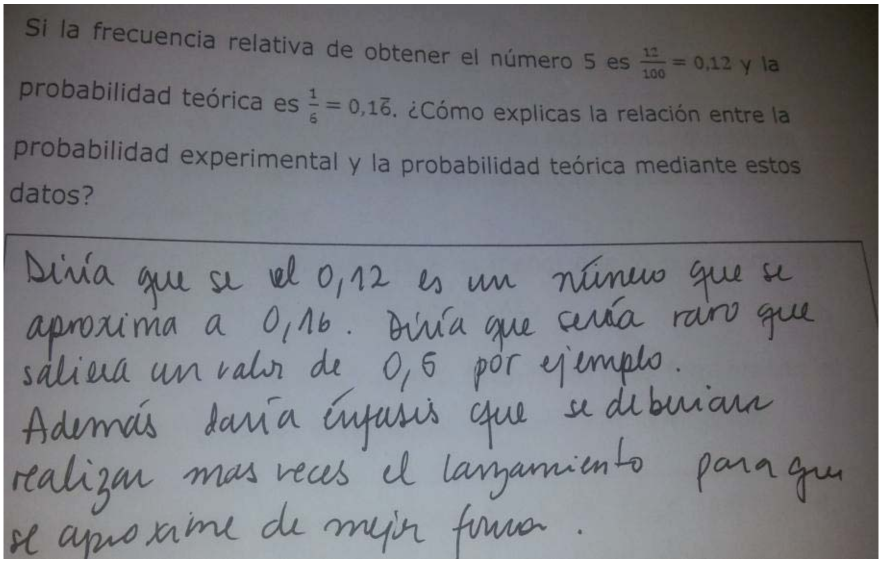
¿Cómo enseñaría a sus estudiantes este objetivo de aprendizaje?

En un computador con música pondría reproducción aleatoria y veriamos la prob. de que toque cierta canción o cierto artista. Y veríamos que la experimentación tiene relación con la teoría.

En un computador con música pondría reproducción aleatoria y veriamos la probabilidad de que toque cierta canción o cierto artista. Y veríamos que la experimentación tiene relación con la teoría.

La respuesta entregada por PM5 claramente favorece a la intuición y la ley de los grandes números, la simulación como artefacto juega un papel importante en la construcción de la frecuencia relativa activando la génesis instrumental, el artefacto que utiliza PM5 es poco común en el aula, pero permite entender este objetivo de aprendizaje a partir de un experimento aleatorio.

En la Pregunta 5 del cuestionario, PM5 menciona lo siguiente:



Si la frecuencia relativa de obtener el número 5 es $\frac{12}{100} = 0{,}12$ y la probabilidad teórica es $\frac{1}{6} = 0{,}1\bar{6}$. ¿Cómo explicas la relación entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica mediante estos datos?

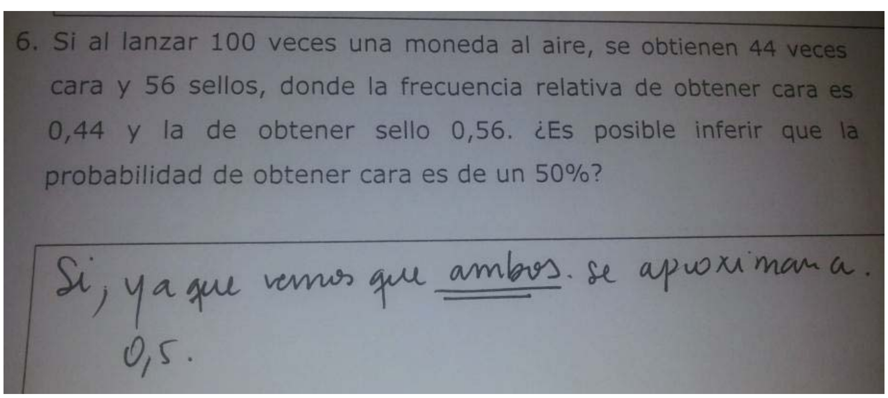
Diría que se el 0,12 es un número que se aproxima a 0,16. Diría que sería raro que saliera un valor de 0,5 por ejemplo. Además daría énfasis que se debieran realizar mas veces el lanzamiento para que se aproxime de mejor forma.

Diría que sí el 0,12 es un número que se aproxima a 0,16. Diría que sería raro que saliera un valor de 0,5 por ejemplo

Además haría énfasis que se debieran realizar mas veces el lanzamiento para que se aproxime de mejor forma

PM5 se da cuenta que el número de lanzamientos no es apropiado para ver la tendencia de la frecuencia relativa y propone que para esto debiera repetirse en más oportunidades el experimento. Nos parece bien la respuesta entregada por PM5, su ETM personal como profesora de matemática es adecuado y es provisto de un razonamiento lógico de su referencial teórico.

En la Pregunta 6 del cuestionario, PM5 responde lo siguiente:



6. Si al lanzar 100 veces una moneda al aire, se obtienen 44 veces cara y 56 sellos, donde la frecuencia relativa de obtener cara es 0,44 y la de obtener sello 0,56. ¿Es posible inferir que la probabilidad de obtener cara es de un 50%?

Si, ya que vemos que ambos. se aproximan a. 0,5.

Si, ya que vemos que ambos se aproximan a 0,5

La respuesta entregada por PM5 se contradice con la respuesta de la pregunta 5, en este caso si puede aproximar a 0.5 porque para PM5 es casi intuitivo este resultado, pero existe una diferencia grande entre 0,44 y 0,5.

Análisis general de los PM y PR.

Los profesores que se sometieron a este cuestionario, presentan dificultades en la organización del contenido matemático, sobre todo en la comprensión de la ley de los grandes números en relación a experimentos aleatorios, en la mayoría de los casos, se considera correcto realizar el experimento 100 veces, siendo que este número de veces es finito y la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad clásica es cuando se el experimento se realiza un número ilimitado de veces.

En las clases observadas se presenta la misma inquietud, los PR observados se conforman con realizar un experimento con cada estudiante y repetirlo en cinco o seis oportunidades, se aproximan los resultados sin justificar o argumentar matemáticamente, la génesis discursiva no es activada en ellos, al no probar o demostrar la convergencia de esta frecuencia relativa a un número entre más veces se repita el experimento, de esta forma el ETM idóneo del profesor no logra articular los polos de las componentes referencial y prueba, afectando la transposición didáctica del dominio presente.

Los profesores PR1 y PR2, ambos presentan dificultades en su ETM personal como matemáticos, al momento de enseñar PR1 considera la frecuencia relativa como la acumulación de la frecuencia absoluta, confundiendo con la frecuencia absoluta acumulada y PR2 al aplicar la regla de la suma en probabilidades no considera que los sucesos no son mutuamente excluyentes y termina errando en los cálculos, sin que ningún estudiante perciba este error.

El ETM idóneo de un profesor, permite analizar si hay un ambiente organizado de trabajo en el aula, de manera que si se activan las tres génesis hay una buena transposición didáctica de las probabilidades y en consecuencia un mayor aprendizaje de los estudiantes, en las clases observadas no está presente la génesis discursiva, creemos que la ausencia de está génesis es debido a que no se enseña a transponer la demostración o medios de pruebas, es decir, en el ETM personal de los PR el polo referencial lo consideran una demostración formal no son viables en este nivel escolar.

Conclusiones

En este capítulo presentamos de forma sucinta las conclusiones más relevantes obtenidas en el estudio exploratorio sobre el Espacio de Trabajo Matemático en Probabilidades de los profesores que participaron en esta investigación.

El currículo escolar ha tenido muchos cambios en la actualidad, por lo que se hace necesario contar con profesores preparados que logren que sus estudiantes alcancen estos nuevos cambios y que utilicen distintas estrategias didácticas para enseñar los contenidos recientemente incorporados, como es el caso en probabilidades. Estos cambios requieren que la formación de profesores en la universidad tenga nuevos cursos de probabilidades, donde en algunas instituciones resulta escaso.

Los profesores recién egresados presentan problemas en la transposición didáctica del contenido, no se logra una concepción de la ley de los grandes números en experimentos aleatorios, siempre se utilizan experimentos comunes monedas o dados que son simétricos equiprobables y se pueden obtener mediante la simple intuición, resultaría interesante experimentar con otras actividades complementarias como el lanzamiento de un chinche o un dado asimétrico donde no sea fácil asignar la probabilidad a priori, de esta forma tendrá mayor relevancia el abordaje experimental al problema. Así se puede un valor para la probabilidad y contrastar que tan bien funciona nuestra probabilidad teórica para predecir el resultado de futuros lanzamientos.

Los profesores presentan dificultades en la transposición del contenido de probabilidades y omisión de parte del curriculum al momento de enseñar, se omiten las condiciones necesarias para calcular probabilidades, no se estudian las probabilidades con la formalidad necesaria y se deja de lado la teoría de conjunto. Cuando uno de los profesores explica la propiedad de la adición de probabilidades, se estudian sucesos mutuamente excluyentes y no se dan ejemplos cuando no lo son cambiando la propiedad para ellos. En la multiplicación de las probabilidades sucede algo parecido cuando los sucesos son dependientes, la formula que presentan en los sucesos independientes cambia para estos casos.

La probabilidad experimental es trabajada en la mayoría de los casos en situaciones de equiprobabilidad, se sugiere crear situaciones experimentales no equiprobables, aquellas promueven una noción intuitiva de convergencia mediante la experimentación repetida. Los profesores experimentan y no aprovechan la unión de los experimentos de todos los estudiantes, esto permitiría comprender de mejor forma cómo funciona la ley de los grandes números.

El estudio de las probabilidades en los textos escolares y programas curriculares, carecen de los símbolos propios utilizados en la teoría de conjuntos, la ausencia de los símbolos o signos, no permiten dar definiciones teóricas adecuadas y mucho menos demostrar matemáticamente, de esta forma la génesis discursiva no podrá ser activada.

En general los textos de estudios coinciden en la misma forma al tratar este contenido, el concepto de probabilidad no evoluciona siempre se reducen a cálculos por medio de una razón, porcentaje y como número decimal en problemas del ámbito del azar. Si bien el estudio de las probabilidades surgió a partir de juegos de azar hace más de cuatro siglos. Ahora en la actualidad la utilidad de las probabilidades va mucho más allá que resolver problemas relacionados con juegos de salón.

Para ello, en futuros estudios es necesario seguir indagando al interior de la sala de clases, con respecto a cómo se está enseñando o transponiendo el dominio del azar, para ver si hay una comprensión adecuada de la probabilidad, de los conceptos propios y de las distintas estrategias que pueda ofrecer un profesor para promover su enseñanza, por medio de la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios. Es importante que los profesores cuenten con cursos de didáctica de las probabilidades, que cuenten con una formación que les permita tener una actitud reflexiva y critica en probabilidades.

Bibliografía

- Alsima, A. (2014), Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado, volumen 85 p.17-21
- Chile, M. d. (2009). Actualización curricular. Chile.
- Chile, M. d. (2009). Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, matemática. Chile.
- Fripp, A. (2011). La probabilidad en el trabajo matemático escolar, Matemática II. Montevideo: III PAEPU.
- Gomez, E. (2011), Bases para la definición semántica del conocimiento matemático-didáctico del profesor de secundaria para enseñar probabilidad.
- KUZNIAK, A. (2010), El espacio de Trabajo Matemático y su Génesis, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volumen 16 p.9-24.
- Kuzniak, C. Montoya E. (2009), Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico, apuntes del Seminario de Graduación de Magíster ECDIMAT, PUCV.
- Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.
- Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.

- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. (2014). La estabilidad epistemológica del profesor debutante en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME; número especial
- Ortiz, J. (2011), conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo.
- Soto, J. (2000), El azar del cara o sello, introducción al cálculo de probabilidades.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Conocimiento didáctico y matemático en profesores de primaria para la enseñanza de las probabilidades.

Anexo 1.

Cuestionario a Profesores

El siguiente cuestionario, tiene por finalidad recolectar datos para una investigación en el marco de una tesis del Magíster en Didáctica de Matemáticas de la PUCV. Es muy importante su colaboración y es de carácter completamente anónima

Instrucciones: E está dividida en dos secciones, considere lo siguiente:

Sección 1. Marque con una "**X**" la casilla del indicador ***S = Siempre F = Frecuentemente A = A veces N = Nunca*** con el cual se sienta identificado(a).

Sección 2. Las preguntas se deben responder de manera resumida y enfocándose a lo requerido.

1. Para contribuir a una buena investigación se sugiere responder todas las preguntas.

Le informamos que esta encuesta es de carácter confidencial por lo cual sugerimos responder con toda sinceridad. De antemano, muchas gracias por su colaboración.

Sección 1.

Favor de contestar utilizando la siguiente escala en los recuadros que así lo soliciten.

Preguntas	**Indicadores**			
	S	**F**	**A**	**N**
Utilizas los textos escolares en la preparación de tus clases				
Utilizas los textos escolares para dar actividades a sus estudiantes				
Cuando desarrollas tus clases, te apoyas con tus apuntes o cuadernos de la universidad				
Utilizas textos de probabilidades para dar definiciones y propiedades				
Consideras las definiciones y propiedades en probabilidades para abordar tus clases				
En tus clases realizas simulaciones con material concreto para predecir la probabilidad en un experimento aleatorio				
En tus clases utilizas simuladores virtuales para predecir la probabilidad de un experimento aleatorio				
En tus planificaciones en la unidad de probabilidades, cumples con los tiempos de programación				
En tus planificaciones en la unidad de probabilidades es abordada a final de año				

Sección 2.

1. Se tira una moneda al aire muchas veces.

   a) ¿En qué puede ayudar a sus estudiantes a entender cómo funciona el azar?

   b) ¿Y en que lo puede confundir?

2. Si utilizas un dado para explicar la ley de los grandes números
   a) ¿cuáles son los puntos importantes en que te centrarías?
   b) ¿En qué nos ayudaría este experimento?

3. Del siguiente objetivo de aprendizaje propuesto en el programa vigente del actual currículo:

   "Predecir la probabilidad de ocurrencia de un evento a partir de resultados de experimentos aleatorios simples"

   ¿Cómo enseñaría a sus estudiantes este objetivo de aprendizaje?

4. Del siguiente objetivo de aprendizaje:

“Determinar la probabilidad teórica de experimentos aleatorios con resultados finitos y equiprobables, y contrastarlas con resultados experimentales.

¿Cómo enseñaría a sus estudiantes este objetivo de aprendizaje?

5. Al realizar el experimento de lanzar un dado 100 veces y registrar en una tabla los resultados obtenidos, como se presenta en la siguiente tabla:

Número obtenido	N° de veces que se obtiene
1	17
2	18
3	21
4	13
5	12
6	19

Si la frecuencia relativa de obtener el número 5 es $\frac{12}{100}$=0,12 y la probabilidad teórica es $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$. ¿Cómo explicas la relación entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica mediante estos datos?

6. Si al lanzar 100 veces una moneda al aire, se obtienen 44 veces cara y 56 sellos, donde la frecuencia relativa de obtener cara es 0,44 y la de obtener sello 0,56. ¿Es posible inferir que la probabilidad de obtener cara es de un 50%?

7. Muchas personas piensan que después de tirar 5 veces una moneda y obtener cara todas las veces, la probabilidad de tener una cara la próxima vez es distinta que ½.

   Comente los argumentos que siguen:

- La probabilidad que salga cara es mayor que ½ pues la moneda debe estar cargada
- La probabilidad que salga cara es menor que ½ pues como ha salido tantas caras toca que salga sello

Explique cómo aprovechar estos razonamientos, fomentando el estudio sistemático de estos temas sin sacrificar la intuición