Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Una propuesta didáctica para los teoremas ángulos en la circunferencia bajo la Teoría de Situaciones Didácticas

Trabajo final para optar al Grado de
Magíster en Didáctica de la Matemática

De: Susana Zurita G.
Profesor Guía: Soledad Estrella

2014

Índice General

Introducción 5
Capítulo I: Problemática, preguntas y objetivos de investigación 8
Problemática 9
Preguntas de investigación 11
Objetivos de investigación 12
Objetivo general 12
Objetivos específicos 12
Capítulo II: Antecedentes de investigación 13
Antecedentes curriculares 14
Resultados de ítems PSU que abordan el teorema de ángulos en la circunferencia. 14
Descripción del objeto matemático ángulos en la circunferencia en dos textos escolares de II Medio 17
Antecedentes Didácticos 25
Investigaciones del uso de Software de geometría dinámica 25
La transposición informática 26
Investigación del objeto matemático ángulos en la circunferencia en didáctica de la matemática 29
Capítulo III: Análisis histórico epistemológico 31
Análisis histórico epistemológico del objeto matemático ángulos en la circunferencia 32
La geometría del círculo en el III libro de los Elementos 35
Capítulo IV: Marco teórico 48
Teoría de Situaciones Didáctica 49
Capítulo V: Marco metodológico 52
Metodología: Ingeniería didáctica 53
Participantes 55
Recogida de datos 56
Capítulo VI: Análisis a priori de la secuencia de situaciones didáctica 57
Fundamentación y descripción general de las actividades de la secuencia de situaciones didácticas 58
Análisis a priori Actividad I 61
Descripción de la actividad 61
Actividad I 61
Respuesta experta de la Actividad I 64
Conocimientos en juego 71
Conocimientos previos 71
Posibles dificultades y errores 72
Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad 74
Análisis a priori Actividad II 75
Descripción de la actividad 75

Actividad II 75
Respuesta experta de la Actividad II 79
Conocimientos en juego 84
Conocimientos previos 85
Posibles dificultades y errores: 85
Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad 88
Análisis a priori Actividad III 90
Descripción de la actividad 90
Actividad III 90
Respuesta experta Actividad III 94
Conocimientos en juego 100
Conocimientos previos 100
Posibles dificultades y errores 100
Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad 102
Análisis a priori Actividad IV 103
Descripción de la actividad 103
Actividad IV 103
Respuesta experta Actividad IV 105
Conocimientos en juego 109
Conocimientos previos 110
Posibles dificultades y errores 110
Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad 112
Capítulo VII: Análisis a posteriori de la secuencia de situaciones didácticas 113
Análisis Actividad I 115
Análisis Actividad II 126
Análisis Actividad III 139
Análisis Actividad IV 144
Capítulo VIII: Conclusiones 149
Conclusiones 150
Recomendaciones y perspectiva para futuras investigaciones 153
Bibliografía 155
Anexos 157
Anexo 1: Secuencia de actividades 157
Anexo 2: Notas de campo clase. 165

Resumen

Se presentan resultados del diseño e implementación de una secuencia de actividades que buscaban propiciar el aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia en alumnos chilenos de educación media. A partir de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y de un estudio histórico epistemológico del objeto matemático, se diseñó una secuencia de actividades didácticas cuya situación de acción se centra en la experiencia del trabajo geométrico, es decir, la construcción de los objetos geométricos que permitan a los alumnos la formulación de conjeturas en relación al teorema a partir de las propiedades de éstos. La implementación de la secuencia de actividades didácticas se realizó en un curso de II medio de un colegio particular subvencionado de la región metropolitana. En relación a los resultados de la implementación de la secuencia de actividades, se destaca que los alumnos, tuvieron dificultades para desarrollar las situaciones de acción basadas en actividades de construcción geométrica, sin embargo, pudieron resolver situaciones didácticas que les permitieron formular y validar el teorema.

Introducción

Basada en la experiencia personal como profesora de matemática de educación media, muchos contenidos de geometría como el teorema de Thales, y teoremas relativos a ángulos en la circunferencia son presentados a los alumnos a través de un enfoque algebraico, perdiendo así el sentido geométrico de su estudio. Lo anterior, es evidenciado en investigaciones en didáctica de la matemática realizadas por Bonilla (2012), Corica y Marin (2014), e Itscovich (2005). Es así que a través de esta forma de enseñar los conceptos de geometría se les impide a los estudiantes la posibilidad de utilizar las propiedades geométricas que ya conocen para anticipar y conjeturar nuevas propiedades, y en consecuencia "el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente" (Itscovich, 2005, p. 9).
Además, los textos escolares no propician que los alumnos se enfrenten a la resolución de actividades que les permitan ser los protagonistas de su aprendizaje, tomando decisiones en torno a la búsqueda de estrategias a partir de sus conocimientos previos, cuya solución permitirá emerger en los alumnos el nuevo conocimiento en juego, tal como lo plantea la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau.
En base a lo anterior, en nuestra investigación nos centraremos en realizar una propuesta didáctica para los teoremas de ángulos en la circunferencia bajo la Teoría de Situaciones Didácticas, para lo cual indagaremos tanto en los elementos fundamentales de esta teoría como en los de la matemática (a través de un estudio histórico epistemológico del objeto matemático en cuestión) para realizar y fundamentar el diseño de esta secuencia de actividades didácticas para alumnos de II medio.

Organizaremos nuestro trabajo en ocho capítulos, los cuales describimos a continuación:

Capítulo I: Problemática, preguntas y objetivos de investigación.

En este capítulo se describirá la problemática de investigación la cual se centra en los bajos resultados de los ítems PSU que evalúan los contenidos en geometría, en particular los relacionados con los teoremas de ángulos en la circunferencia, y el tratamiento de estos teoremas en los textos de matemática para los alumnos de II medio, los cuales no presentan actividades en que los alumnos puedan construir este conocimiento matemático en torno a la experimentación, reflexión y trabajo geométrico. A partir de esta problemática plantearemos preguntas y definiremos objetivos que guiaran nuestra investigación.

Capítulo II: Antecedentes de investigación.

En este capítulo mostraremos los antecedentes que fundamentan muestran investigación, los cuales se centran en:
Antecedentes curriculares, es decir, el tipo de ítems PSU que evalúan estos teoremas y cuál es el tratamiento de este objeto matemático tanto en los planes y programas chilenos (2011) como en los textos escolares de II medio.
Antecedentes Didácticos, relacionados con investigaciones sobre el uso de software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría, sus ventajas y desventajas. Además, se describirá el proceso de visualización en el trabajo geométrico, el cual es esencial para abordar la resolución de problemas geométricos.

Capítulo III: Análisis histórico epistemológico.

En busca de los elementos geométricos que permitan realizar el diseño de una secuencia didáctica que propicie el aprendizaje de los teoremas de ángulos en la circunferencia a través de la experimentación, formulación y del trabajo geométrico, es que en este capítulo se presentará un estudio histórico epistemológico del teorema del ángulo inscrito, centrado en aquellas etapas de la historia donde se desarrolló este teorema.

Capítulo IV: Marco teórico.

En este capítulo describiremos los elementos más importantes de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, los cuales fundamentarán el diseño de la secuencia de actividades de aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia en alumnos de II medio.

Capítulo V: Marco metodológico.

En esta sección damos cuenta del diseño metodológico de nuestra investigación, describiendo en un principio los elementos más importantes de la metodología de Ingeniería Didáctica, la cual como metodología de investigación permite realizar un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase (Artigue, 1995). Posteriormente, se describirán los sujetos participantes de la secuencia de situaciones didácticas, y la forma en la cual se recogieron los datos.

Capítulo VI: Análisis a priori de la secuencia de situaciones didácticas.

En este capítulo realizamos un análisis a priori del conjunto de actividades que se diseñaron a partir de los hallazgos del estudio histórico epistemológico y desde la Teoría de Situaciones Didácticas para el aprendizaje de los teoremas de ángulos en la circunferencia.

Capítulo VII: Aplicación y análisis a posteriori de la secuencia de situaciones didácticas.

En esta sección se presentan las evidencias empíricas de la implementación de la secuencia de actividades didácticas para el aprendizaje del objeto matemático en cuestión, las cuales se analizan a partir del análisis a priori. Los resultados presentados nos permitirán establecer las conclusiones de nuestra investigación.

Capítulo VIII: Conclusiones.

Finalmente establecemos las conclusiones de nuestro objetivo general a partir de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori del diseño y aplicación de la secuencia de actividades didácticas para el aprendizaje del teorema del ángulo inscrito en la circunferencia en alumnos de II medio. Además, presentaremos recomendaciones y perspectivas para futuras investigaciones en relación al objeto matemático en cuestión.

Capítulo I: Problemática, preguntas y objetivos de investigación

En este capítulo daremos cuenta de la problemática que da origen a nuestra investigación, de la cual se desprenden las preguntas y objetivos de investigación.

Problemática

Los aprendizajes de los contenidos del eje de geometría son los que presentan las mayores dificultades año a año, lo cual queda en evidencia en los bajos resultados obtenidos por los alumnos de cuarto año medio en los ítems de PSU[1] que evalúan este tipo de contenido matemático. Este antecedente es presentado en la publicación PSU n° 13 del proceso de admisión 2012, el cual señala "de los cuatro Ejes Temáticos en la PSU de Matemática, geometría es el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas"(DEMRE, 2011, p.3)
En particular, los ítems que evalúan el contenido de ángulos en la circunferencia presentan un alto porcentaje de omisión, lo cual se refleja en un informe entregado por el DEMRE[2], en que se presenta el análisis de algunas preguntas en cuanto a su grado de dificultad y porcentaje de omisión, además, de señalar los errores más comunes que probablemente cometieron los alumnos en la resolución de estos ítems (DEMRE, 2012). A continuación se presenta la pregunta n° 47 del proceso de admisión 2012 (ver Figura 1).

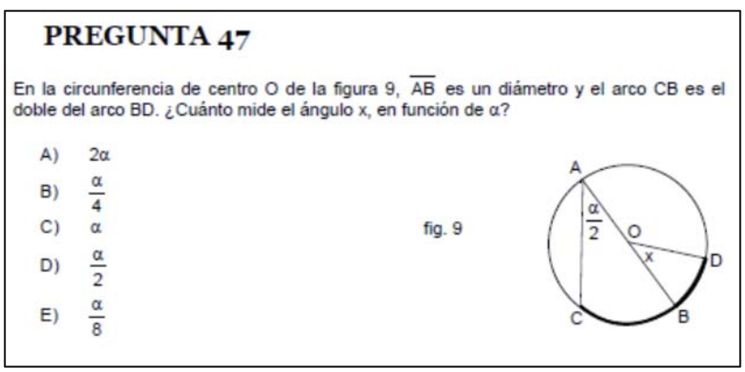


Figura 1. Ejercicio PSU, Teorema del ángulo inscrito en la circunferencia

Dicho informe señala que este ítem fue omitido por el 48% de los alumnos y que sólo fue contestado correctamente por el 26%. Además, postula que una de las causas para que el 12% de los estudiantes optara por el

[1] PSU, Prueba de selección universitaria, la cual corresponde a un test estandarizado para el proceso de admisión a la educación universitaria en Chile.
[2] DEMRE, Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional dependiente de la Universidad de Chile, el cual es el responsable del desarrollo y construcción de los instrumentos de evaluación y medición de las capacidades y habilidades de los egresados de la enseñanza media en Chile.

distractor B, se debe a que consideraron que el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtienden el mismo arco son de igual medida (cuya relación no es correcta).

De lo anterior, podemos cuestionar la comprensión y aplicación de los teoremas por parte de los alumnos al desarrollar este tipo de ítems. Al parecer, las actividades que se proponen en el aula no propician un trabajo geométrico de exploración donde los alumnos deban recurrir a las propiedades de objetos geométricos que ya conocen y que por lo tanto les permitan generar otras relaciones y propiedades como los teoremas de los ángulos en la circunferencia.

Además, los textos escolares tampoco promueven actividades donde el alumno deba conjeturar en relación a estos teoremas, utilizando los conocimientos matemáticos previos como por ejemplo el teorema del triángulo isósceles y el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo. Lo anterior, se evidencia en el texto escolar Matemática 2° educación media de la editorial Santillana (Darrigrandi, Ramos & Zañartu 2013), en donde los autores intentan proponer actividades para la construcción de conocimiento por parte de los alumnos en relación a los teoremas a partir de casos particulares, sin embargo, no permiten la reflexión en torno a la experimentación, el descubrimiento y la toma de decisiones a través de los conocimientos geométricos previos que poseen los alumnos, ya que se les entrega la forma de resolución de esta actividad a través del uso del transportador. Es así, que el texto de estudio no presenta actividades candidatas a situaciones adidácticas en el sentido de Brousseau (1998, 2007).

Por otra parte, algunos contenidos de geometría como teorema de Thales, y teoremas relativos a ángulos en la circunferencia se reducen a un trabajo netamente algebraico, es decir, estos teoremas se transforman en fórmulas para la resolución de cuestiones algebraicas, tal y como se puede apreciar en el ejemplo presentado del ítem PSU y en las actividades del texto escolar de matemática de 2° educación media de Darrigrandi et al. (2013). En consecuencia, este enfoque no es suficiente para lograr un aprendizaje de este objeto matemático en los alumnos, ya que como lo plantea Brousseau (2007), en la Teoría de Situaciones Didácticas, un individuo aprende corrigiendo sus acciones y anticipando sus efectos, en las situaciones en las que está comprometido. Así, “el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso” (Brousseau, 2007, p. 18), es decir, el aprendizaje se produce mediante la experimentación y reflexión en torno a la búsqueda de estrategias para resolver una o más situaciones adidácticas, lo que le permitirá al alumno establecer conjeturas en torno al objeto matemático en juego.

Preguntas de investigación

A partir de nuestra problemática, nos planteamos las siguientes preguntas, que guiarán el desarrollo de esta investigación:

- ¿Qué elementos de la matemática propician la creación de una secuencia de enseñanza aprendizaje para el teorema del ángulo inscrito en la circunferencia?
- ¿Los alumnos a partir de una situación de aprendizaje podrán generar conjeturas en relación al teorema del ángulo inscrito en la circunferencia, y por ende acceder a su comprensión y aplicación?
- ¿Qué elementos develan que los alumnos están conjeturando en relación a los teoremas de ángulos en la circunferencia?
- ¿El profesor es capaz de gestionar el acto de devolución y por ende hacer responsable al alumno en dar respuesta a la actividad o situación planteada?
- ¿El profesor es capaz de incorporar en la formalización del teorema ángulo inscrito en la circunferencia los conocimientos construidos por los alumnos en la realización de las actividades?

Objetivos de investigación

A partir de la problemática e interrogantes descritas, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo general

Realizar un estudio del proceso aprendizaje de los teoremas ángulos[3] en la circunferencia bajo la teoría de situaciones didáctica de Brousseau, en alumnos de segundo año medio de un colegio particular subvencionado de la región metropolitana

Objetivos específicos

1. Realizar un análisis epistemológico histórico del objeto matemático que fundamente el diseño de una secuencia de aprendizaje.

2. Diseñar y aplicar una secuencia de aprendizaje que propicie el aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia.

3. Describir los componentes esenciales del profesor en una situación didáctica, devolución e institucionalización, en la aplicación de la secuencia de enseñanza aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia.

[3]Teoremas ángulos en la circunferencia (teorema del ángulo inscrito, corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia, corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco)

Capítulo II: Antecedentes de investigación

En este capítulo daremos cuenta de los antecedentes que sustentan nuestra problemática, los cuales abarcan las siguientes aristas:

- Antecedentes curriculares en relación a los resultados de ítems PSU que abordan el teorema de ángulos en la circunferencia, también se presentará una descripción de los planes y programas y textos escolares en relación a la presentación del tema ángulos en la circunferencia.
- Antecedentes didácticos en relación al trabajo geométrico con el uso de software de geometría dinámica; investigaciones en relación al proceso de visualización y al trabajo geométrico. Finalmente, se presentará un investigación didáctica en relación al objeto matemático ángulos en la circunferencia.

Antecedentes curriculares

Resultados de ítems PSU que abordan el teorema de ángulos en la circunferencia.

A través de los planes y programas del Ministerio de Educación, la enseñanza de la matemática en la educación media se organiza en torno a cuatro ejes temáticos: números, álgebra, geometría y datos y azar. Es así que a partir de los contenidos mínimos obligatorios de estos cuatro ejes temáticos, el DEMRE construye la prueba de selección universitaria PSU que corresponde al instrumento de evaluación y medición de los egresados de enseñanza media de nuestro país. A través de su página web, el DEMRE publica pruebas oficiales de años anteriores junto con un análisis de las preguntas, donde por ejemplo se menciona el porcentaje de omisión y los errores más comunes cometidos por los egresados.
En consecuencia, los análisis de estas preguntas evidencian que la geometría sin lugar a dudas y en particular el contenido ángulos en la circunferencia presenta año a año un mínimo porcentaje de respuestas correctas y un alto porcentaje de respuestas omitidas, tal y como se presenta en la siguiente pregunta:

En la figura 13, $\overline{EB}$ y $\overline{FC}$ son diámetros de la circunferencia de centro O y $\overline{CF}$ es bisectriz del ángulo ECA. La medida del ∢ x es

A) 60°
B) 40°
C) 80°
D) 90°
E) 120°

fig. 13

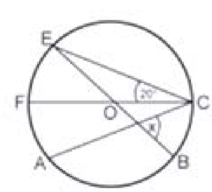
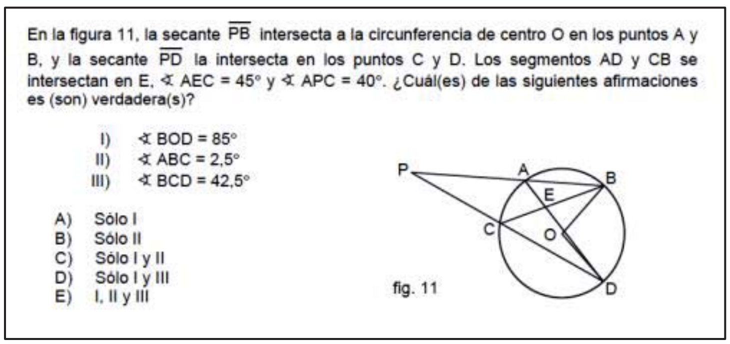


Figura 2. Ejercicio PSU, Teorema del ángulo inscrito en la circunferencia

Para que el alumno pueda resolver esta pregunta, debe conocer los conceptos de ángulos y triángulos, los teorema en relación a las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, y el teorema que relaciona la medida de un ángulo del centro de la circunferencia con la medida de un ángulo inscrito de ésta que subtiende el mismo arco.
Así, esta pregunta solo fue contestada correctamente por el 23% de los alumnos y omitida por un 50% de ellos. Además, se menciona que una de las causas de que el 17% de los alumnos seleccionará el distractor B, es que determinaron de forma errónea que el ángulo x correspondía a un ángulo del centro que subtiende el arco BC.
A continuación se presenta la pregunta n° 50 del proceso de admisión 2012 (ver Figura 3).


En la figura 11, la secante $\overline{PB}$ intersecta a la circunferencia de centro O en los puntos A y B, y la secante $\overline{PD}$ la intersecta en los puntos C y D. Los segmentos AD y CB se intersectan en E, ∢ AEC = 45° y ∢ APC = 40°. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) ∢ BOD = 85°
II) ∢ ABC = 2,5°
III) ∢ BCD = 42,5°

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

Figura 3. Ejercicio PSU, Teorema del ángulo inscrito en la circunferencia

Los alumnos para dar respuesta a la pregunta deben conocer los teoremas en relación a las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, y también el teorema que relaciona la medida de un ángulo del centro de una circunferencia con la medida de un ángulo inscrito de ésta que subtiende el mismo arco. Sin embargo, esta pregunta tiene una mayor dificultad en relación a la pregunta anterior (ver Figura 2), ya que se debe determinar la medida de tres ángulos, para lo cual tienen que visualizar triángulos que tienen como ángulos interiores a los ángulos $\measuredangle BOD, \measuredangle ABC\ y\ \measuredangle BCD$, para poder relacionar estas medidas con las de los ángulos dados en el enunciado del ítem.
Así, esta pregunta tuvo una omisión del 74%, y se propone que una de las causas para que los alumnos optaran por el distractor D, es que relacionaron de forma incorrecta la medida del ángulo del centro de una circunferencia y la medida del ángulo inscrito a esta que subtiende el mismo arco.
A partir de los resultados expuestos, se evidencia grandes dificultades en el aprendizaje de los teoremas relativos a ángulos en la circunferencia por parte de los alumnos, y queda expuesto que estos teoremas al igual como los teoremas de Thales, se convierten en formulas sin sentido para los alumnos.

Descripción del objeto matemático ángulos en la circunferencia en los planes y programas

En el programa de estudio de II medio (Ministerio de Educación, 2011), el tema ángulos en la circunferencia se presenta en la unidad 2 de Geometría, la cual tiene como propósito que los alumnos “identifiquen los ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia y los teoremas relacionados con ellos” (Ministerio de Educación, 2011, p. 49)

En las actividades planteadas se les propone a los profesores que los alumnos utilicen programas geométricos digitales, ya que permiten medir los ángulos y mediante la función arrastre variar la posición relativa de éstos en la circunferencia, lo que contribuirá a los alumnos a conjeturar en relación a la medida de estos. Además, es importante que el profesor formule preguntas que conduzcan a los alumnos a establecer estas relaciones.

También en el programa, se plantea que se proponga una actividad similar con el uso de regla, compás y transportador, solicitando a los alumnos lo siguiente:

- “Dibujen una circunferencia, un ángulo del centro y cinco ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco
- Midan el ángulo del centro y los ángulos inscritos
- Completen una tabla con las mediciones
- Realicen este mismo proceso con tres ángulos distintos del centro
- Formulen una conjetura basada en sus datos y argumenten su validez” (Ministerio de Educación, 2011, p. 56)

A pesar de que existe la intención de que a través de la actividad los alumnos puedan conjeturar en relación a la medida de los ángulos inscritos y del centro de una circunferencia que subtienden el mismo arco, no se promueve el trabajo geométrico de establecer relaciones entre las figuras de la construcción, para anticipar la conjetura entre las medidas de los ángulos en la circunferencia, ya que según la actividad esta conjetura se debe realizar a través de la medición de los ángulos utilizando el trasportador o alguna función predeterminada el programa de geometría dinámica, entregándoles así la estrategia de resolución a los alumnos.

A partir de lo anterior, en el programa de estudio no se promueven actividades adidácticas donde los alumnos puedan explorar, tomar decisiones, argumentar a través de propiedades geométricas, formular y validar estas conjeturas ante sus pares, involucrándolos así en un trabajo geométrico que les permita anticipar relaciones y propiedades no conocidas.

Además, el tema ángulos en la circunferencia se encuentra desarticulado en relación al resto de los contenidos que se proponen para este nivel, ya que no se establece una relación entre éste tema con otros de geometría, como es el de cuadriláteros cíclicos el cual no se presenta en el currículum nacional. En consecuencia, en los alumnos se pierde el sentido del estudio de este teorema.

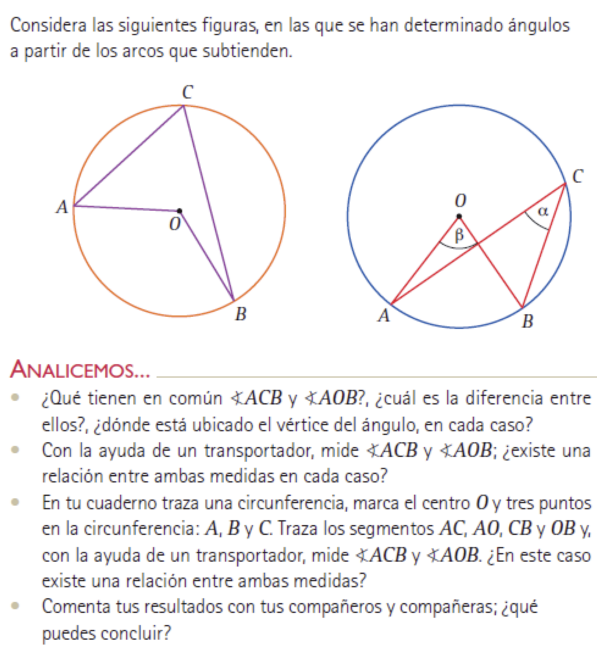
Descripción del objeto matemático ángulos en la circunferencia en dos textos escolares de II Medio

Para describir los siguientes textos de II Medio, se utilizaran los conceptos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (1998, 2007). Esta teoría plantea, que un individuo aprende cuando es él quien construye el concepto incorporándolo a su estructura cognitiva. Así, "el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso" (Brousseau, 2007, p. 18), es decir, el aprendizaje se produce mediante la experimentación y reflexión en torno a la búsqueda de estrategias para resolver una o más situaciones adidácticas, lo que le permitirá al alumno establecer conjeturas en torno al saber que se quiere enseñar.
Es importante mencionar que, el análisis de una actividad matemática utilizando la Teoría de Situaciones Didáctica considera las interacciones entre el saber, el alumno el profesor y el medio. Estas interacciones no pueden verse a través del texto escolar, y es por esto que se analizarán algunas actividades que propone el texto en relación a si éstas corresponden a candidatas a situaciones adidácticas, y por ende si propician o no las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización en torno a la interacción entre el saber que se quiere enseñar, el alumno y el medio.

Texto Matemática 2° educación media, editorial Santillana año 2013, autores: F. Darrigrandi, M. Ramos y M. Zañartu.

El texto escolar en sus primeras páginas presenta actividades de resolución de ejercicios en torno a la activación de conocimientos previos de circunferencia y sus elementos y semejanza de triángulos (concepto que se trabajó en una unidad anterior), los cuales serán fundamentales para los nuevos aprendizajes. Sin embargo, no se incorporan actividades en donde los alumnos puedan activar los conocimientos que ya adquirieron en torno a las propiedades de los triángulos en especial de triángulos isósceles en relación a las propiedades de sus ángulos interiores y exteriores, las cuales serán fundamentales para el trabajo posterior. En este sentido, sería importante no solo incorporar ejercicios donde se aplique de forma inmediata las propiedades mencionadas, sino que también ejercicios geométricos en donde el alumno deba modificar las figuras originales y relacionar los elementos geométricos presentes. De esta forma, se movilizaría la reflexión y la búsqueda de estrategias en relación a las propiedades mencionadas las cuales son fundamentales para abordar las propiedades de ángulos y proporcionalidad en la circunferencia.

Posteriormente el texto escolar, para abordar el teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, les presenta a los alumnos la siguiente actividad.


Considera las siguientes figuras, en las que se han determinado ángulos a partir de los arcos que subtienden.

ANALICEMOS...

- ¿Qué tienen en común ∡ACB y ∡AOB?, ¿cuál es la diferencia entre ellos?, ¿dónde está ubicado el vértice del ángulo, en cada caso?
- Con la ayuda de un transportador, mide ∡ACB y ∡AOB; ¿existe una relación entre ambas medidas en cada caso?
- En tu cuaderno traza una circunferencia, marca el centro O y tres puntos en la circunferencia: A, B y C. Traza los segmentos AC, AO, CB y OB y, con la ayuda de un transportador, mide ∡ACB y ∡AOB. ¿En este caso existe una relación entre ambas medidas?
- Comenta tus resultados con tus compañeros y compañeras; ¿qué puedes concluir?

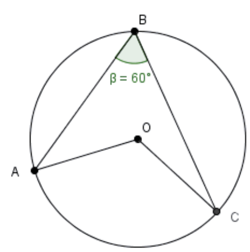
Figura 4. Actividad de inicio para el teorema del ángulo inscrito

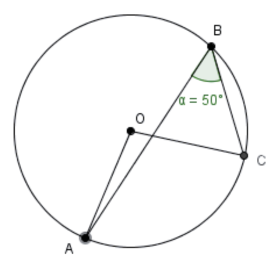
En primer lugar, el alumno a través de sus conocimientos previos (medición de ángulos, ángulos del centro y ángulos inscritos) es capaz de abordar y responder cada una de las preguntas, las cuales tienen por objetivo que conjeture relaciones entorno a las medidas de los ángulos determinados en la circunferencia. Sin embargo, a pesar de que la actividad le permite al alumno conjeturar relaciones a partir de casos particulares, ésta no corresponde a una actividad problemática ni desafiante que le permita al estudiante buscar estrategias de resolución (estrategia que es explícitamente entregada al alumno en el texto), es decir, que le permita realmente reflexionar en torno a la experimentación, el descubrimiento y la toma de decisiones, utilizando las propiedades geométricas de ángulos en los triángulos isósceles que se deben trazar en la circunferencia. Debido a lo anterior, esta actividad no es una candidata a situación adidáctica.

En consecuencia, para convertir la actividad anterior en una candidata a situación adidáctica, se les podría pedir a los alumnos que justificarán a través de propiedades geométricas las conjeturas establecidas, permitiendo así la reflexión y toma de decisiones, modificando así la actividad según la siguiente propuesta:

Tabla 1. Propuesta actividad

Actividad:
Considera las siguientes figuras en las que se han determinado ángulos a partir de los arcos que subtienden.





Para cada caso responde las siguientes preguntas:
1) ¿Qué tienen en común el $\measuredangle ABC$ y el $\measuredangle AOC$?, ¿cuál es la diferencia entre ellos?, ¿dónde está ubicado el vértice del ángulo, en cada caso?
2) **Sin utilizar transportador**, ¿es posible determinar la amplitud del $\measuredangle AOC$? Justifica tu respuesta
3) ¿Existe una relación entre las medidas del $\measuredangle ABC$ y del $\measuredangle AOC$?
4) Comenta tus resultados con tus compañeros(as)

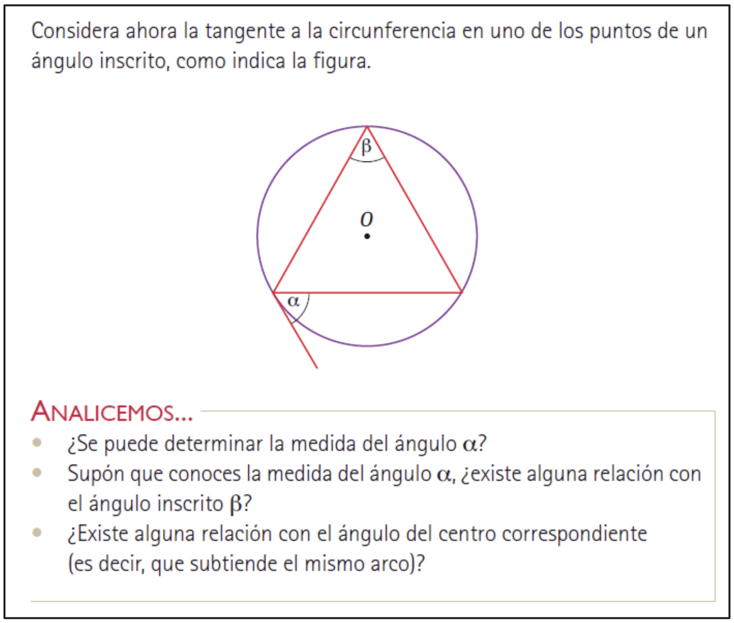
Modificando la situación anterior, se les presenta a los alumnos una actividad problemática y desafiante, ya que ellos deberán buscar relaciones entre los ángulos a partir de la modificación de la figura, es decir, deberán trazar cuerdas para dibujar triángulos isósceles al interior de la circunferencia para así relacionar las propiedades de los objetos geométricos (ángulos, lados, arcos). A partir de lo anterior, el alumno estará experimentando, descubriendo y tomando decisiones al buscar estrategias que le permitan dar respuesta a las preguntas, lo cual corresponde a la situación de acción.

Además, tanto la actividad del libro como la propuesta, les solicita a los alumnos comunicar y comparar los resultados obtenidos, para construir la relación entre los ángulos inscritos y los ángulos del centro de una circunferencia que subtienden el mismo arco, dando paso así a la situación de formulación.

Luego de que el alumno conjeture en relación a la medida de los ángulos en la circunferencia, el texto presenta la demostración del teorema de la medida del ángulo inscrito considerando los casos en que el ángulo inscrito contenga el centro de la circunferencia y no. Lo anterior, permite la realización de la situación de institucionalización, es decir, le permite al profesor dotar de un estado cultural el conocimiento construido por los alumnos, relacionando los resultados de las actividades con el teorema.

Luego de la demostración del teorema, el texto propone a los alumnos una serie de ejercicios en donde tienen que aplicar este nuevo conocimiento de forma inmediata, y también se presentan algunos casos donde se debe modificar la figura original para determinar triángulos isósceles y relacionar la medida de los ángulos determinados en la circunferencia. Es así, que la reflexión y la toma de decisiones realizadas por los alumnos en la situación acción es de suma importancia para la resolución de estas actividades.

Posteriormente, se presenta la siguiente actividad para que los alumnos puedan establecer la relación entre las medidas del ángulo inscrito y semi-inscrito de una circunferencia que subtienden el mismo arco.


Considera ahora la tangente a la circunferencia en uno de los puntos de un ángulo inscrito, como indica la figura.

ANALICEMOS...

- ¿Se puede determinar la medida del ángulo α?
- Supón que conoces la medida del ángulo α, ¿existe alguna relación con el ángulo inscrito β?
- ¿Existe alguna relación con el ángulo del centro correspondiente (es decir, que subtiende el mismo arco)?

Figura 5. Actividad de inicio para el teorema del ángulo semi-inscrito

La actividad presentada por el texto escolar es problemática y desafiante para el alumno, ya que para poder desarrollarla debe experimentar y buscar estrategias de resolución que están orientadas a realizar una modificación en la figura original, es decir, debe trazar los radios hasta los vértices del lado horizontal del triángulo inscrito en la circunferencia, para de esta forma utilizar las propiedades del triángulo isósceles que se traza y la propiedad del ángulo conformado por la tangente y el radio en el punto de tangencia. Lo anterior, permite relacionar la medida del ángulo del centro con la medida del ángulo α, y así determinar la relación entre las medidas de los ángulos α y β. En consecuencia, esta actividad le permite al alumno reflexionar y tomar decisiones en función de establecer relaciones entre las propiedades de los objetos geométricos que se encuentran representados en la figura con los que se deban incorporara o modificar en ésta.

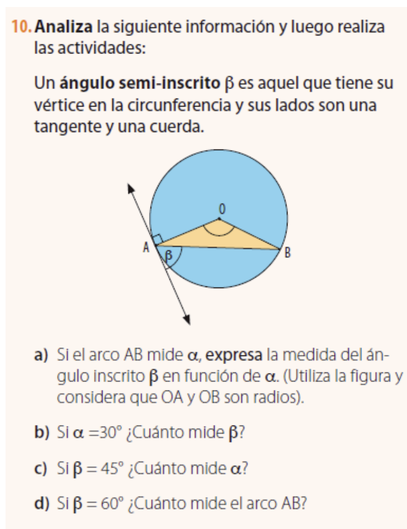
Sin lugar a duda la resolución de esta actividad por parte del alumno corresponde a la situación acción que le da la posibilidad a él de ser protagonista de su aprendizaje. En relación a las otras situaciones, estas no están presenten de forma explicitas, para lo cual el profesor deberá organizar el trabajo de los alumnos para que puedan de esta forma interactuar entre ellos, comunicar, discutir y validar sus estrategias y respuestas, produciéndose así las situaciones de formulación y validación. Además, el profesor deberá realizar la situación de institucionalización del teorema, la cual no ésta presente en el texto, no olvidando incorporar las conclusiones que obtuvieron los alumnos al desarrollar la actividad.

Posteriormente, el texto presenta una serie de ejercicios en donde los alumnos por un lado deben aplicar de forma explícita el teorema visto, y también utilizar las reflexiones que les permitieron relacionar las propiedades de los triángulos isósceles que debieron construir al interior de la circunferencia con las medidas de los ángulos determinados en ésta.
Sin embargo, se debe considerar que en todos los casos luego de iniciar la actividad el texto inmediatamente presenta el desarrollo de estas, lo cual perjudica la reflexión y construcción de conjeturas por parte de los estudiantes.
Finalmente el texto escolar en la unidad de circunferencia, donde se presenta el objeto matemático ángulos en la circunferencia, intenta proponer actividades en donde el alumno reflexione y conjeture las relaciones entre la medida del ángulo del centro con la medida de ángulo inscrito y semi-inscrito que subtiende el mismo arco, sin embargo, se les entrega a los alumnos la estrategia a utilizar para dar respuesta a la situación presentada, lo cual no le permite buscar estrategias de resolución, ni reflexionar en torno a la experimentación, el descubrimiento y la toma de decisiones.

Texto Matemática II medio, editorial ediciones SM año 2013, autores: L. Jiménez, G. Muñoz y P. Rupin.

Al igual que el texto escolar anterior, en las páginas iniciales de este texto para el estudiante de la editorial ediciones SM, se presenta al alumno actividades de resolución de ejercicios en torno a la activación de conocimientos previos como son: circunferencia y sus elementos, y relación de medida entre los ángulos de un triángulo. Debido a lo cual, también se sugiere la incorporación de actividades donde les permitan a los alumnos reflexionar en torno a las propiedades de los triángulos en relación a la medida de sus ángulos interiores y exteriores, propiedades que luego son fundamentales para establecer los teoremas de ángulos en la circunferencia.
Posteriormente el texto les presenta a los alumnos la demostración del teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, en los casos donde el centro de la circunferencia se encuentra al interior del ángulo inscrito, y en el caso donde el centro de la circunferencia se encuentra en el exterior del ángulo inscrito. Luego de las demostraciones que formalizan el teorema, se presentan los corolarios en relación a la medida del ángulo inscrito que subtiende una semicircunferencia, entre otros. A continuación se les presenta a los alumnos una lista de ejercicios donde deben aplicar el teorema demostrado.

A partir de lo cual, el texto no presenta actividades candidatas a situaciones adidácticas para que los alumnos reflexionen y conjeturen en torno al teorema del ángulo inscrito, es así que el énfasis que coloca el texto en relación a este objeto matemático es presentar una fórmula para que posteriormente sea aplicada en la resolución de diversos ejercicios.
Sin embargo, en una de las actividades que presenta el texto escolar, se les pide a los alumnos que establezcan la relación entre la medida del ángulo semi-inscrito y la medida del arco que subtiende el cual es dado en forma general (en el caso posterior se les pide considerar una medida particular del arco), para que el alumno pueda relacionar estas medidas se les destaca en la figura el triángulo isósceles formado por los radios, construcción que es fundamental para que los alumnos pueda determinar la relación entre la medida del ángulo semi-inscrito y la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.



10. Analiza la siguiente información y luego realiza las actividades:

Un **ángulo semi-inscrito** β es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son una tangente y una cuerda.

a) Si el arco AB mide α, **expresa** la medida del ángulo inscrito β en función de α. (Utiliza la figura y considera que OA y OB son radios).

b) Si $\alpha = 30°$ ¿Cuánto mide β?

c) Si $\beta = 45°$ ¿Cuánto mide α?

d) Si $\beta = 60°$ ¿Cuánto mide el arco AB?

Figura 6. Actividad para el teorema del ángulo semi-inscrito

Al destacar el triángulo isósceles en la figura de la actividad anterior, se les está entregando de forma implícita a los alumnos la estrategia que deben utilizar para que puedan dar respuesta a la pregunta planteada, ya que la búsqueda de triángulos isósceles en la figura es la clave para determinar la relación entre el ángulo semi-inscrito y el ángulo central que subtienden el mismo arco. Además, sería pertinente que los alumnos primero determinen la medida del ángulo semi-inscrito dada la medida del arco que subtiende y viceversa, para luego continuar con la actividad donde se debe considerar la medida del ángulo central de forma general. Pues bien, aunque la actividad anterior no es una candidata a situación adidáctica debido a que de forma implícita se les está entregando a los alumnos la estrategia de resolución, se debe destacar el intento de proponer una actividad distinta en que el alumno sea quien establezca la relación geométrica entre los ángulos en la circunferencia, sin ser presentada como una fórmula que se debe aplicar en la resolución de ejercicios. Para que la situación fuese candidata a situación adidáctica, el profesor debe considerar los comentarios presentados para realizar las modificaciones pertinentes e incorporar además, momentos en la actividad que promuevan que los alumnos comparen sus resultados y puedan formalizar las estrategias que utilizaron para dar respuesta a la situación planteada, para luego retomarlas y formalizar el teorema a través de la demostración en la situación de institucionalización, la cual no está presente en el texto escolar.

Además, es importante destacar que existe un error presente en la actividad del texto al considerar que la medida de un arco puede ser expresada en grados al igual que los ángulos, es por lo anterior que se debe pedir a los estudiantes que determinen la relación entre la medida del ángulo inscrito y la medida del ángulo del centro que subtienden el mismo arco.

Finalmente, el texto escolar en la unidad de ángulos y segmentos en la circunferencia, no presenta en su mayoría actividades en donde les permitan a los alumnos conjeturar en relación a los teoremas de los ángulos en la circunferencia, más bien presenta los teoremas, sus demostraciones y actividades de aplicación de los mismos. Es por lo anterior, que el texto no contribuye de forma adecuada al aprendizaje de los alumnos, ya que como lo establece la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau el aprendizaje se produce mediante la experimentación y reflexión en torno a la búsqueda de estrategias para resolver una o más situaciones adidácticas.

Antecedentes Didácticos

Investigaciones del uso de Software de geometría dinámica

Los programas de geometría dinámica permiten a los estudiantes una aproximación de la geometría que les permiten la manipulación dinámica de las representaciones de los objetos geométricos, es decir, permiten trabajar estos conceptos matemáticos de forma experimental, investigando sus relaciones y colocándolas a prueba. En este sentido, los planes y programas de matemática II medio 2011 proponen para la unidad de geometría el uso de software geométrico para que los alumnos puedan conjeturar en torno a teoremas como el que relaciona la medida del ángulo del centro e inscrito de una circunferencia que subtienden el mismo arco.
En relación al software CABRI, Bagazgoitia (2003), plantea que una de las características más importantes de este programa es que a través de la función arrastre se puede modificar una construcción inicial sin modificar las propiedades o relaciones que se hayan definido, permitiendo así que la geometría que tradicionalmente se trabaja de forma deductiva (enunciado de teoremas y demostración de los mismos) se pueda trabajar a través de planteamientos inductivos, es decir, los alumnos primero experimentan a través de la resolución de un problema estableciendo pautas o relaciones, para luego elaborar conjeturas que posteriormente se demostraran.
Además, Larios (2006) en su investigación menciona que las características que diferencian una aproximación al trabajo geométrico utilizando CABRI en vez de papel y lápiz son:

- planificar cadenas de construcciones bajo el nombre de macros.
- construir lugares geométricos.
- transformación continua en tiempo real de la forma o posición de los objetos geométricos construidos a través de la función arrastre, sin que se dejen de preservar las relaciones geométricas con las cuales fueron construidos.
- El software a través de la función arrastre se convierte en un mediador semiótico entre el conocimiento geométrico y el usuario.

Si bien el software de geometría dinámica permiten ambientes en donde los alumnos puedan experimentar y formular en relación a las propiedades de los objetos geométricos hay que considerar como lo plantea Larios (2006) que como toda herramienta los usuarios de ésta en nuestro caso los alumnos y el profesor deben interiorizarse de sus propiedades como por ejemplo el carácter dinámico de las construcciones a través de la función arrastre, ya que su desconocimiento pueden convertirse en obstáculos al momento de realizar las actividades. Además, Larios (2006) expone considerar que algunos fenómenos cognitivos siguen presentes en los alumnos al desarrollar problemas geométricos con el uso de software dinámicos, como son la *rigidez geométrica*, el cual es un fenómeno que está relacionado con la visualización de figuras geométricas, es decir, es "una incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica al no estar en ciertas posiciones estándares" (Larios, 2006, p.307), fenómeno que se convierte en un obstáculo en la resolución de problemas geométricos por parte de los alumnos.

La transposición informática

Como se expuso anteriormente, el uso de un software de geometría dinámica para la enseñanza de la geometría, impone ciertas restricciones, (las cuales corresponden a las propiedades internas, es decir limitaciones lógicas y materiales del software) que exigen que el profesor realice ciertas transformaciones con el fin de facilitar la puesta en práctica de una actividad con el uso de esta tecnología. Balacheff (1993) define la transposición informática como "El trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la puesta en práctica de dicha representación por un dispositivo informático." (p. 16). Además señala, que el dispositivo informático habita en tres regiones:

- Universo interno, es decir las componentes del programa informático, naturaleza del procesador, capacidad de la memoria, estructura de la pantalla, entre otras.
- La interface, es decir, la interacción entre el usuario y la computadora
- Universo externo, es decir el universo en que trabaja el humano, sus conocimientos en relación con el dispositivo informático.

En relación a lo anterior Balacheff (1993) distingue diversas restricciones en relación a los dispositivos informáticos, las que están relacionadas con: el universo interno, los fenómenos de granularidad y la compilación, en relación a la representación de datos y su tratamiento, y las restricciones relacionadas con la interface en relación a la visualización y a la manipulación directa de las entidades abstractas.

En relación al software geométrico CABRI Balacheff (1993), expone que este dispositivo informático permite la visualización y la manipulación de los objetos de la geometría, los cuales tienen una representación interna es decir, sobre un modelo de los números reales y una representación en

la interface a través de una base finita de pixeles que limitará la percepción de los dibujos. Además señala que a través de la manipulación de los objetos de la geometría con CABRI es posible observar sus deformaciones y por lo tanto determinar sus invariantes propiedades geométricas.
Sin embargo, Balacheff (1993) menciona que esta manipulación directa de los objetos de la geometría a través de los dispositivos informáticos plantea un nuevo problema, es decir, la relación entre el comportamiento de las representaciones de los objetos y el comportamiento de los modelos que subyacen en estas representaciones.

El proceso de visualización

A partir de los ítems de PSU descritos, se evidencia que en el aprendizaje de la geometría se deben coordinar los procesos de visualización razonamiento y construcción así como lo plantea Duval (como se citó en Marmolejo y Vega, 2012)

> El aprendizaje de la geometría ocurre necesariamente mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, cada uno con sus funciones epistemológicas específicas. Si bien el desarrollo del funcionamiento cognitivo de cada una de estas actividades ocurre de manera separada, la visualización puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y construcción geométricos (p.8).

El proceso de visualización es esencial para abordar la resolución de problemas geométricos, ya que corresponde a la percepción de las representaciones.
Duval (2003 citado en Marmolejo & Veja, 2012) define la visualización como “una actividad cognitiva compuesta por dos maneras de proceder sobre las figuras geométricas: una, la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada) y dos, los cambios de focalización aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta” (p.8).
En relación al proceso de visualización existen muchos estudios e investigaciones que dan cuenta de la importancia de este proceso en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y de las dificultades que presentan los alumnos en relación a este. Es así que, Larios (2006) establece que las observaciones de los alumnos se centran en los aspectos figurales, es decir, forma, tamaño y posición, lo cual dificulta la

identificación de las figuras y sus propiedades. Estableciendo además, que una de las causas de esta dificultad es el uso de figuras con formas o posiciones estándares.
Es por este motivo, que consideramos clave el proceso de visualización en la resolución de problemas geométricos y que hemos ejemplificado en las preguntas de PSU presentadas, donde el razonamiento a través de las propiedades de geometría de ángulos en la circunferencia y ángulos en el triángulo está estrechamente conectado con la identificación de las representaciones de los triángulos isósceles, sus ángulo respectivos, y los ángulos del centro e inscritos de la circunferencia que subtienden el mismo arco, los cuales por un lado no están en posición estándar y por otro lado no se encuentran de forma asilada sino que forman parte de un todo. Así, el alumno enfrentado a un problema de geometría representado a través de una figura, debería en una primera instancia reconocer las diferentes unidades figurales presentes en la figura asociándolas a las definiciones y teoremas, y luego debería efectuar modificaciones en las relaciones de las partes del todo en la figura, es decir, agregar o retirar elementos geométricos de la figura original, y de esta forma podría realizar las interacciones entre la pregunta planteada y los tratamientos que debe realizar en la figura geométrica.

Igualmente, es importante destacar que algunos de los errores cometidos por los alumnos en los ejemplos presentados, se centran en relacionar de forma errónea la medida de los ángulos del centro e inscrito de una circunferencia que subtiende el mismo arco. En relación a lo cual, se infiere que algunos teoremas en geometría, como éste en particular, se reducen a fórmulas sin sentido que se utilizan para resolver cuestiones algebraicas. Así, Marín y Corica (2014) plantean que el trabajo geométrico tanto en los colegios como en la formación docente ha sido relegado hacia una algebratización. Lo anterior, se convierte en una barrera para el aprendizaje de la geometría, ya que según Duval (2003) los procesos cognitivos que intervienen en la actividad geométrica corresponden a: visualización, razonamiento y construcción, los cuales, por un lado durante la enseñanza deben ser desarrollados separadamente, y por otro, se deben realizar actividades donde el alumno pueda reconocer estos diferentes procesos para realizar la coordinación entre visualización y razonamiento.

Investigación del objeto matemático ángulos en la circunferencia en didáctica de la matemática

A continuación se reporta una investigación en didáctica de la matemática relacionada con nuestra problemática sobre los teoremas de ángulos en la circunferencia. Se describirán la naturaleza de la investigación, sus objetivos y resultados.

Corica y Marin (2014) realizan un diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación, para la enseñanza de ángulos inscritos en la circunferencia con fundamento en la Teoría Antropológica de lo didáctico de Chevallard para alumnos en la escuela secundaria de Argentina. Es por esto que el tipo de investigación que realizan es de tipo cualitativo, de corte exploratorio descriptivo, y su problemática se centra en que el estudio de la geometría ha perdido sentido y espacio tanto en las escuelas como en la formación docente.
En relación al diseño de las actividades estas tienen por objetivo involucrar a los alumnos en un nuevo tipo de trabajo, el cual implicó modificaciones a nivel de *mesogénesis*[4], *topogénesis*[5] y *cronogénesis*[6].

Con relación a la *mesogénesis* los alumnos resolvieron situaciones que permitieron desplegar razonamientos del trabajo geométrico, es decir, los alumnos dedujeron a partir de los datos y utilizaron propiedades y relaciones que no estaban explicitas en sus construcciones, los cuales permitieron a su vez institucionalizar el teorema del ángulo inscrito en la circunferencia.

Con relación a la *topogénesis*, con las actividades se buscó que los estudiantes se responsabilizaran en validar las técnicas propuestas para resolver las situaciones. Sin embargo, para producir estas validaciones se requirió la constante intervención del profesor ya que los alumnos se manifestaron resistentes a recuperar sus *topos* en el proceso de estudio. Además, la implementación de las actividades de estudio para el teorema del ángulo inscrito en la circunferencia requirió mayores tiempos de trabajo para que los alumnos realizaran las tareas, ya que ellos debían proponer las técnicas para su resolución, en consecuencia se evidencian cambios a nivel de *cronogénesis.*

[4] Chevallard (1991, 2000) llama mesogénesis a la descripción específica del trabajo conjunto del profesor y el alumno.
[5] El enseñante y el enseñado se diferencian por sus lugares respectivos en relación a este saber, lo que Chevallard (1991, 2000) llama la topogénesis del saber.
[6] "Enseñante y enseñado ocupan distintas posiciones en relación con la dinámica de la duración didáctica: difieren en sus relaciones respectivas con la diacronía del sistema didáctico , con lo que podemos denominar la cronogénesis" (Chevallard, 2000, p.83)

En conclusión, el diseño e implementación de actividad de estudio e investigación para la enseñanza de ángulos inscritos en la circunferencia permitió que los alumnos pudieran explorar y conjeturar en relación a este objeto matemático.

Destacamos de la investigación, las actividades que se proponen a los alumnos para que a través de la construcción puedan establecer relaciones entre los datos conocidos, las propiedades y relaciones que se encontraban en las construcciones que realizaron los alumnos, lo cual les permitió establecer una conjetura en relación a la medida del ángulo inscrito y del centro de una circunferencia que subtienden el mismo arco. Lo anterior, se evidencia en las actividades que corresponden a la situación 2, la cual se origina a partir de la tarea de establecer la relación entre los ángulos inscritos en un mismo arco de circunferencia.

Situación 2

Trazar una circunferencia de centro O y radio r. Ubicar tres puntos (A, B y C) en la circunferencia de tal manera que el ángulo $A\hat{B}C$ sea de 30º y el lado $\overline{AB}$ pase por el centro de la misma. Sin utilizar el transportador, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo central $A\hat{O}C$? ¿Por qué?
b) Determina un punto D, en el arco $\overline{AB}$ que no contiene al punto C, de tal manera que el ángulo $D\hat{O}C$ sea recto. ¿Es posible conocer el valor del ángulo inscripto $D\hat{B}C$? Justifica.
c) Determina en el arco AC que no contiene al punto B, un punto E de tal manera que el ángulo $A\hat{O}E$ tenga una amplitud de 20º. ¿Es posible determinar la amplitud del ángulo inscripto $E\hat{B}C$? ¿y del ángulo central $E\hat{O}C$? Justifica.
d) ¿Qué relación se establece entre cada ángulo inscripto determinado en los ítems anteriores y el ángulo central correspondiente a cada uno de ellos?
e) ¿Podrías afirmar que dicha relación es válida para todo ángulo inscripto? Justifica.

Figura 7. Actividad para el aprendizaje del teorema del ángulo inscrito

En esta situación, los alumnos debieron establecer la relación entre los ángulos, considerando las distintas posiciones del centro de la circunferencia respecto al ángulo inscrito, para de esta forma establecer a partir de propiedades ya conocidas la relación entre las medidas de los ángulos inscritos y del centro que subtienden un mismo arco de circunferencia.

Capítulo III: Análisis histórico epistemológico

En relación a nuestro primer objetivo específico de investigación, describiremos de manera general la evolución que ha tendido la geometría desde sus orígenes hasta la cultura griega, centrándonos en los aportes de las diferentes culturas de la época al desarrollo y formalización de los teoremas de ángulos en la circunferencia, antecedentes históricos epistemológicos que nos permitirán diseñar una secuencia de enseñanza aprendizaje para este objeto matemático.

Análisis histórico epistemológico del objeto matemático ángulos en la circunferencia

Boyer (1999) relata que Heródoto y Aristóteles sostenían dos posturas opuestas en relación al origen de la geometría. Es así que Heródoto afirmaba que la geometría se había originado en Egipto como respuesta a la necesidad práctica que tenían los agrimensores de trazar los límites de la tierra después de las inundaciones anuales del río Nilo. En cambio Aristóteles sostenía que los inicios de la geometría fueron impulsados por una clase sacerdotal. Sin embargo, cualquiera de estas hipótesis opuestas se puede apoyar en el hecho de que los geómetras egipcios llamados “los tensadores de las cuerdas” se dedicaron tanto a bosquejar los planos de los templos como a reconstruir los límites de las tierras a orillas del río Nilo. Ninguna de estas hipótesis contempló el hecho de que el hombre neolítico en sus dibujos y diseños ya había plasmado su interés en las relaciones espaciales como las congruencias y simetrías.
En cuanto a las propiedades o relaciones geométricas descubiertas por la cultura prehelénica, se tiene por ejemplo que los egipcios (aproximadamente 3200 a.C. hasta el 332 a.C.) ya conocían algunas relaciones geométricas para calcular el área de un triángulo, en la que se debe multiplicar un medio de la base por la altura, establecieron también los comienzos de un bosquejo de teoría de congruencia al realizar transformaciones en las que convertían triángulos isósceles y trapecios en rectángulos. Del mismo modo determinaron un procedimiento para calcular el área de un círculo aproximando π a $3\frac{1}{6}$, y una regla para calcular la circunferencia de un círculo, así la “regla egipcia para hallar la circunferencia de un círculo, según la cual la razón del área de un círculo a su circunferencia es la misma que la razón del área del cuadrado circunscrito a su perímetro” (Boyer, 1999, p.39).
Sin embargo, la geometría de los egipcios era predominantemente empírica, ya que no se establecieron teoremas y demostraciones basados en un sistema lógico deducido a partir de axiomas y postulados, es decir, la “geometría egipcia resulta haber sido casi exclusivamente una rama de la aritmética aplicada, y donde aparecen relaciones elementales de congruencia, su finalidad parece ser la de proporcionar nuevos recursos de

medición más que la de un conocimiento más profundo” (Boyer, 1999, p. 43).
Filloy (1998) menciona además, que la matemática mesopotámica estaba más desarrollada que la egipcia y por ende su influencia en los primeros siglos de la cultura helénica fue decisiva. Entre los resultados geométricos conocidos en Mesopotamia se pueden mencionar la relación entre los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo; la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, permitiendo establecer así una aproximación de $3\frac{1}{8}$ para el número π, lo que les permitió establecer un procedimiento para calcular la longitud de la circunferencia y el área de un círculo. No obstante, los babilónicos (aproximadamente 2.000 a.C. hasta el 600 a.C.) no consideraban la geometría como una teoría matemática, es decir, “no es para ellos una teoría matemática en el sentido que los es para nosotros, sino un cierto tipo de aritmética o álgebra aplicada en la que las figuras venían representadas por medio de números” (Boyer, 1999, p.63).

En relación al surgimiento de las propiedades de los ángulos en la circunferencia, existen indicios de que ya los babilónicos alrededor del año 2.000 a.C. sabían que un ángulo inscrito en una semicircunferencia corresponde a un ángulo recto, relación desconocida por los egipcios, y que actualmente es conocida como teorema de Thales a pesar de que este matemático vivió un milenio después de que los babilónicos ya la utilizaran.

Posteriormente, la rigurosidad en los métodos y demostraciones de las propiedades de los elementos geométricos de los griegos, permitió que los conocimientos en geometría pasaran al rango de verdades que en la cultura prehelénica no necesitaban mayor demostración que la verificación, es decir, la geometría en esta época se formaliza, lo que implica por ejemplo que el concepto de circunferencia pase de ser un simple objeto que se utilizaba a diario, a un concepto en donde sus elementos y propiedades son estudiadas y utilizadas en tan diversas áreas como la astronomía. Es así, que en la cultura griega (aproximadamente desde el siglo VI a.C.), la matemática estaba más relacionada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida cotidiana.
En consecuencia, el estudio de propiedades geométricas como la de los ángulos en la circunferencia se formaliza, y es así que Thales (624 – 548 a.C.) es considerado como el primer hombre al que se le atribuyen descubrimientos matemáticos concretos, al demostrar por ejemplo el teorema del ángulo inscrito en una semicircunferencia y el teorema de los ángulos basales en un triángulo isósceles entre otros. Por el contrario, la tradición apoya los puntos de vista de Eudemo (discípulo de Aristóteles) y de Proclo (filósofo neoplatónico) quienes postulan que los pitagóricos

fueron los primeros en contribuir realmente en la organización deductiva de la geometría. Boyer (1999) expone que existen distintas posturas en relación a las causas que llevaron a la transformación de los procedimientos matemáticos empíricos de la cultura prehelénica a la estructura deductiva formal de la cultura griega, entre las cuales se establece que los matemáticos de la época (entre siglo VI o IV a.C.) como Thales, debieron percatarse de las discrepancias entre la matemática de la cultura egipcia y babilónica en relación a los diferentes procedimientos para calcular por ejemplo el área de un círculo, lo que los llevó a establecer métodos estrictamente racionales.

Además, en relación a la contribución de los griegos a la geometría, Platón (siglo IV a.C.) "discutió también los fundamentos de la matemática, clarificó algunas de las definiciones y reorganizó las hipótesis de partida, subrayando de paso que los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan" (Boyer, 1999, p.125). Asimismo, Boyer postula que una de las contribuciones más notables de Platón a la geometría, es el formalizar el método analítico usado en las demostraciones, el cual consiste en invertir el proceso de la demostración matemática deductiva, es decir, comenzar la demostración con la proposición que hay que demostrar y deducir de ella una conclusión que se sabe se verifica, luego si es posible invertir estas etapas de la cadena de razonamiento, el resultado será una legítima demostración de la proposición que se quiere demostrar.

En relación a los aportes de Euclides (300 a.C.) (que se supone había estudiado con los discípulos de Platón), éstos se centran en su obra los *Elementos*, en la cual expone en un orden lógico los fundamentos de la matemática elemental de la época, es decir, la aritmética, la geometría sintética (en relación a los puntos, rectas planos, círculos y esferas) y el álgebra (en relación a la geometría algebraica de la época). En estos libros, Euclides formaliza los fundamentos de la geometría, partiendo de definiciones, postulados y axiomas con los cuales demuestra teoremas que, a su vez, son utilizados para demostrar otros teoremas.

Los *Elementos* de Euclides están divididos en trece libros o capítulos de los cuales los seis primeros libros corresponden a geometría plana elemental. En particular, el primer libro comienza con una lista de 23 definiciones, que corresponden a una frase que introduce un concepto matemático. Sin embargo, algunas definiciones "no definen nada, ya que no hay ningún conjunto previo de elementos indefinidos en términos de los cuales definir los demás" (Boyer 1999, p. 146) por ejemplo, la definición euclidiana de un ángulo plano corresponde a la "inclinación de una respecto a la otra de dos líneas en un plano que se cortan y no están situadas sobre una línea recta" esta definición "es defectuosa por el hecho de que *inclinación* no ha sido definida previamente y no resulta ser mejor conocida que la palabra *ángulo*". (Boyer 1999, p. 146).

Posteriormente Euclides presenta una lista de cinco postulados y cinco nociones comunes (en relación a las propiedades de la igualdad), los cuales se admiten sin demostración. A continuación, se presentan las proposiciones que corresponden a las aseveraciones que se logran demostrar partiendo de las definiciones, nociones comunes y postulados anteriores. En relación a las demostraciones de las proposiciones presentes en el libro los *Elementos*, Euclides hace uso frecuente de postulados tácitos en relación a la continuidad que asegure que las rectas o circunferencias que se cortan tienen un punto en común o en relación a la unicidad e infinitud de la línea recta que pasa por dos puntos distintos. Además, existen diversas críticas en torno del quinto postulado de Euclides, en relación a si se debe considerar como un teorema o no y por lo tanto desarrollar su demostración. Los esfuerzos para probar este postulado condujeron al establecimiento de su equivalencia con enunciados como que "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos", entre otros.

La geometría del círculo en el III libro de los *Elementos*

En particular en el III libro de los *Elementos*, Euclides trata la geometría del círculo formalizando algunas relaciones en torno a las propiedades de éste, por lo que en esta etapa las relaciones de los ángulos en la circunferencia se formaliza en teoremas que son demostrados.

En relación a la formalización de los teoremas de ángulos en la circunferencia, se presentan a continuación las demostraciones de los teoremas de ángulo inscrito en la circunferencia, ángulo inscrito en una semicircunferencia y ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, los cuales corresponden al objeto matemático de nuestra investigación. Las demostraciones que se presentan a continuación fueron extraídas del libro *Elementos: Libros I-IV.* Madrid Gredos 1991.

Proposición 20: En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuándo los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

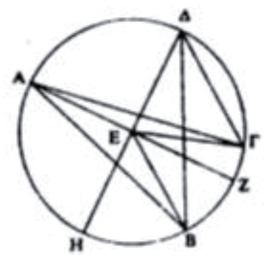
Demostración

Sea el círculo ABΓ y sea el ángulo correspondiente a su centro BEΓ, y el (ángulo) BAΓ el correspondiente a la circunferencia, y tengan como base la misma circunferencia BΓ.

Digo que el ángulo BEΓ es el doble del (ángulo) BAΓ.

Una vez trazada la recta AE, prolónguese hasta Z.

Así pues, como EA es igual a EB, el ángulo EAB es también igual al (ángulo) EBA [I, 5]; por tanto, los ángulos EAB, EBA son el doble de EAB. Pero el (ángulo) BEZ es igual a los (ángulos) EAB, EBA [I, 32]; por tanto, el (ángulo) BEZ es también el doble de EAB. Por lo mismo, el (ángulo) ZEΓ es el doble del (ángulo) EAΓ. Luego el (ángulo) entero BEΓ, es el doble del (ángulo) entero BAΓ.



Trácese de nuevo una recta quebrada [93] y sea el otro ángulo BΔΓ, y, una vez trazada ΔE, prolónguese hasta H. De manera semejante demostraríamos que el ángulo HEΓ es el doble del (ángulo) EΔΓ, de cuyas partes el (ángulo) HEB es el doble del (ángulo) EΔB; por tanto, el (ángulo) restante BEΓ es el doble de BΔΓ.

Por consiguiente, en un círculo el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia. Q. E. D.

Figura 8. Demostración del teorema del ángulo inscrito en la circunferencia
Fuente: Modificado de Euclides (1991). *Elementos* (vol. 1: libros I-IV) (p.317). Gredos, Madrid. [Trad. al castellano notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Tabla 2. Proposiciones y consideraciones de la demostración

Proposiciones que se utilizan en la demostración. **Proposición 5 del I libro (I,5)** En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongados las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí. **Proposición 32 del I libro (I, 32)** En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.
Consideraciones en la demostración del teorema: En la primera parte del teorema se considera el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra dentro de la región determinada por el ángulo inscrito. Luego en la segunda parte solo se menciona que de la misma forma se debería demostrar que el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, para los casos: El centro de la circunferencia se encuentra sobre una de las cuerdas que forma el ángulo inscrito. El centro de la circunferencia se encuentra en la región exterior del ángulo inscrito.

En adelante se presenta la demostración del teorema ángulo inscrito en la circunferencia considerando los tres casos mencionados anteriormente. Antes de partir con la demostración se deben considerar las siguientes definiciones:

Circunferencia: Dados un punto O y un número real no negativo r, se denomina circunferencia de centro O y radio r al conjunto de puntos del plano π que están a distancia r del punto O, o sea:

$C[O,r] = \{P \in \pi / OP = r\}$

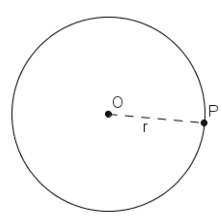


Figura 9. Circunferencia dado centro y radio

Ángulo del centro: es aquel ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia, y cuyos lados contienen radios de ella. En la figura $\measuredangle AOB$ es ángulo inscrito.

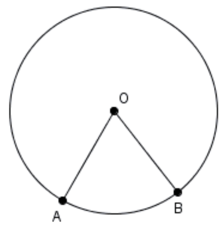


Figura 10. Ángulo del centro

Ángulo inscrito: es aquel ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados son cuerdas de la circunferencia. En la figura $\measuredangle ECD$ es ángulo inscrito.

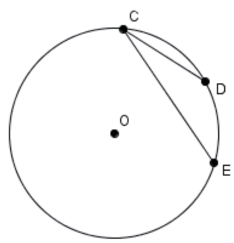


Figura 11. Ángulo inscrito

Teorema: Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

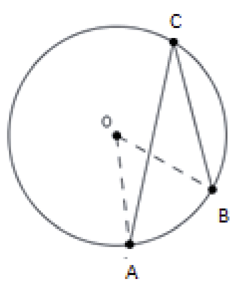


Figura 12. Ángulo inscrito y ángulo del centro que subtienden el mismo arco

Es decir, $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2}m(\measuredangle AOB) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB})$.

La última igualdad usando radianes como medida de ángulos.

Para la demostración debemos considerar 3 casos:

1° caso: El centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región determinada por el ángulo inscrito.
Hipótesis: Sea $\measuredangle ACB$ ángulo inscrito y el $\measuredangle AOB$ ángulo del centro, de la circunferencia de centro O.

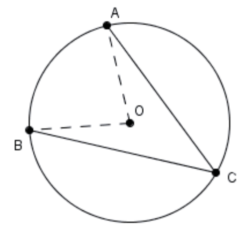


Figura 13. Centro de la circunferencia al interior de la región del ángulo inscrito

Tesis: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$
Demostración:
Se traza el diámetro $\overline{CD}$.
Dado que CO = BO = AO por ser radios, el ΔBCOy el ΔACO son isósceles, por lo tanto se tiene que:
$m(\measuredangle OCB) = m(\measuredangle CBO) = \beta$
$m(\measuredangle ACO) = m(\measuredangle OAC) = \alpha$
Así se tiene que:
$m(\measuredangle DOB) = m(\measuredangle OCB) + m(\measuredangle CBO) = \beta + \beta = 2\beta$ (Por ser ángulo exterior al ΔBCO)
$m(\measuredangle AOD) = m(\measuredangle ACO) + m(\measuredangle OAC) = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (Por ser ángulo exterior al ΔACO)

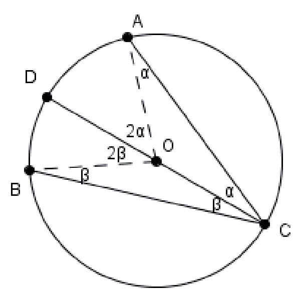


Figura 14. Apoyo demostración del teorema
Además, $m(\measuredangle ACB) = \alpha + \beta$
Por lo tanto:
$m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle AOD) + m(\measuredangle DOB) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot m(\measuredangle ACB)$
En consecuencia: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$

2° caso: El centro de la circunferencia se encuentra sobre una de las cuerdas que forman el ángulo inscrito.
Hipótesis: Sea $\measuredangle ACB$ ángulo inscrito y el $\measuredangle AOB$ ángulo del centro, de la circunferencia de centro O.

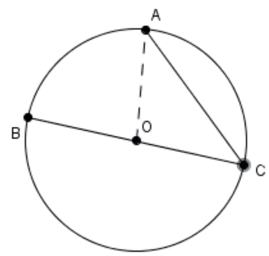


Figura 15. Centro de la circunferencia en una de las cuerdas del ángulo inscrito

Tesis: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$
Demostración:
Dado que CO = AO por ser radios, el ΔACO es isósceles, por lo tanto se tiene que:
$m(\measuredangle ACO) = m(\measuredangle OAC) = \alpha$

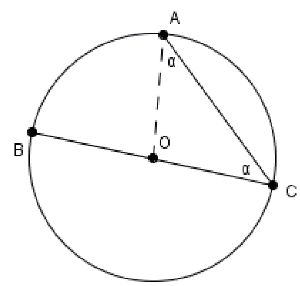


Figura 16. Apoyo demostración del teorema

Así se tiene que:
$m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle ACO) + m(\measuredangle OAC) = \alpha + \alpha = 2\alpha$ (Por ser ángulo exterior al ΔACO)
De esta forma: $m(\measuredangle AOB) = 2 \cdot m(\measuredangle ACO) = 2 \cdot m(\measuredangle ACB)$
En consecuencia: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$

3° caso: El centro de la circunferencia se encuentra en el exterior de la región determinada por el ángulo inscrito.
Hipótesis: Sea $\measuredangle ACB$ ángulo inscrito y el $\measuredangle AOB$ ángulo del centro, de la circunferencia de centro O.

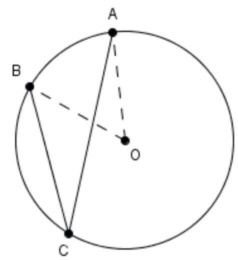


Figura 17. Centro de la circunferencia en la región exterior del ángulo inscrito

Tesis: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$
Demostración:
Se traza el radio $\overline{OC}$.
Dado que $m(\overline{CO}) = m(\overline{BO}) = m(\overline{AO})$ por ser radios, el ΔBCO y el ΔACO son isósceles, por lo tanto se tiene que: $m(\measuredangle CAO) = m(\measuredangle ACO) = \alpha$
Además, considerar $m(\measuredangle ACB) = \beta$

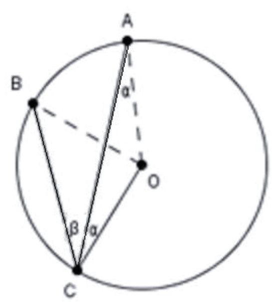


Figura 18. Apoyo demostración del teorema

A partir de lo cual, $m(\measuredangle BCO) = m(\measuredangle CBO) = \alpha + \beta$
De esta forma:
$m(\measuredangle BOC) = 180° - 2(\alpha + \beta)$
$m(\measuredangle AOC) = 180° - 2\alpha$
De lo cual se tiene que:

$$\begin{aligned} m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle AOC) - m(\measuredangle BOC) &= 180° - 2\alpha - (180° - 2(\alpha + \beta)) \\ &= 180° - 2\alpha - (180° - 2\alpha - 2\beta) \\ &= 180° - 2\alpha - 180° + 2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

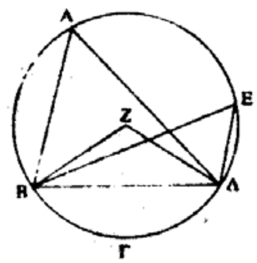
$m(\measuredangle AOB) = 2\beta = 2 \cdot m(\measuredangle ACB)$
En consecuencia: $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB)$

Proposición 21: En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí

Demostración:

Sea el círculo ABΓΔ y en el mismo segmento BAEΔ estén los ángulos BAΔ, BEΔ.

Digo que los ángulos BAΔ, BEΔ son iguales entre sí.



Tómese, pues, el centro del círculo ABΓΔ y sea Z, y trácense BZ, ZΔ.

Y como el ángulo BZΔ es el correspondiente al centro y el (ángulo) BAΔ el correspondiente a la circunferencia, y tienen como base la misma circunferencia BΓΔ, entonces el ángulo BZΔ es el doble del (ángulo) BAΔ [III, 20]. Por lo mismo, el (ángulo) BZΔ es también el doble del (ángulo) BEΔ; luego el (ángulo) BAΔ es igual al ángulo BEΔ.

Por consiguiente, en un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí. Q. E. D.

Figura 19. Demostración del corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco

Fuente: Euclides (1991). *Elementos* (vol. 1: libros I-IV) (p.318). Gredos, Madrid. [Trad. al castellano notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Tabla 3. Proposiciones que se utilizan en la demostración

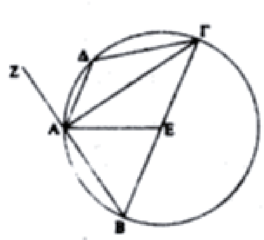
Proposiciones que se utilizan en la demostración. **Proposición 20 del III libro (III, 20):** En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuándo los ángulos tienen como base la misma circunferencia.

Parte de la Proposición 31: En un círculo el ángulo en un semicírculo es recto, ….

Demostración:

Sea ABΓΔ el círculo y sea BΓ su diámetro y el centro E, y trácense BA, AΓ, AΔ, ΔΓ.

Digo que el ángulo BAΓ en el semicírculo BAΓ es recto, y el ángulo ABΓ en el segmento ABΓ mayor que el semicírculo es menor que un recto, y el ángulo AΔΓ en el segmento AΔΓ menor que el semicírculo es mayor que un recto.

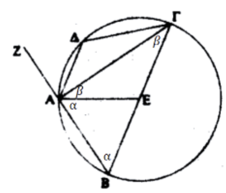


Trácese AE, y prolónguese BA hasta Z.

Y como BE es igual a EA, el ángulo ABE es también igual al (ángulo) BAE [I, 5]. Como a su vez ΓE es igual a EA, el (ángulo) AΓE es también igual al (ángulo) ΓAE [I, 5]; por tanto, el (ángulo) entero BAΓ es igual a los dos (ángulos) ABΓ, AΓB. Pero el (ángulo) ZAΓ exterior al triángulo ABΓ es también igual a los dos ángulos ABΓ, AΓB [I, 32]; por tanto, el ángulo BAΓ es también igual al (ángulo) ZAΓ; luego (cada uno de ellos) es recto, [I, Def. 10]; así pues, el ángulo BAΓ en el semicírculo BAΓ es recto.

Figura 20. Demostración del corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia
Fuente: Modificado de Euclides (1991). *Elementos* (vol. 1: libros I-IV) (p.328). Gredos, Madrid. [Trad. al castellano notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Tabla 4. Proposiciones, definiciones y consideraciones de la demostración

Proposiciones y definiciones que se utilizan en la demostración. **Proposición 5 del I libro (I,5)** En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongados las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí. **Proposición 32 del I libro (I, 32)** En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos. **Definición 10 del I libro (I,Def.10)** Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.
Consideraciones en la demostración del teorema: Se podría utilizar la Proposición 32 libro I para finalizar la demostración de la proposición, considerando lo siguiente. De la primera parte de la demostración del teorema se tiene:  Figura 21. Adaptación Figura 20 A partir de la Figura 11 se puede concluir que $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$ (Proposición 32 libro I) Entonces $\alpha + \beta = 90°$. Por lo que el ángulo BAΓ en el semicírculo es recto

Finalmente, el teorema de ángulos inscritos en la circunferencia, permite demostrar las propiedades y relaciones de los cuadriláteros cíclicos o cuadriláteros inscritos en una circunferencia, es así que para demostrar por ejemplo que en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios, es necesario utilizar el teorema del ángulo inscrito, tal y como se muestra a continuación:

Proposición 22: Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos.

Demostración:

Sea el círculo ΑΒΓΔ, y sea el cuadrilátero en el mismo ΑΒΓΔ.

Digo que los ángulos opuestos son iguales a dos rectos.

Trácense ΑΓ, ΒΔ.

Así pues, como en todo triángulo los tres ángulos son iguales a dos rectos [I, 32], entonces los tres ángulos ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ del triángulo ΑΒΓ son iguales a dos rectos.

Pero el ángulo ΓΑΒ es igual al (ángulo) ΒΔΓ: porque están en el mismo segmento ΒΑΔΓ [III, 21]; y el (ángulo) ΑΓΒ (es igual) al (ángulo) ΑΔΒ: porque están en el mismo segmento ΑΔΓΒ; por tanto, el (ángulo) entero ΑΔΓ es igual a los (ángulos) ΒΑΓ, ΑΓΒ. Añádase a ambos el (ángulo) ΑΒΓ; entonces los (ángulos) ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ son iguales a los (ángulos) ΑΒΓ, ΑΔΓ; pero los ángulos ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ son iguales a dos rectos. Por tanto, los (ángulos) ΑΒΓ, ΑΔΓ son también iguales a dos rectos. De manera semejante demostraríamos que los ángulos ΒΑΔ, ΔΓΒ son también iguales a dos rectos.

Por consiguiente, los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos rectos. Q. E. D.

Figura 22. Demostración del teorema de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia

Fuente: Modificado de Euclides (1991). *Elementos* (vol. 1: libros I-IV) (p.318). Gredos, Madrid. [Trad. al castellano notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Tabla 5. Proposiciones que se utilizan en la demostración

Proposiciones que se utilizan en la demostración. **Proposición 32 del I libro (I, 32)** En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos. **Proposición 21 del III libro (III, 21):** En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí

Otro teorema de los cuadriláteros cíclicos es el teorema de Ptolomeo (150 a.C.), el cual es un resultado clásico de la geometría de cuadriláteros, y que utiliza el teorema de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. El teorema dice lo siguiente:
"En un cuadrilátero cíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos, y recíprocamente"
Como lo expone Boyer (1999) un caso particular de este teorema ya estaba incluido en los *Datos de Euclides* en la proposición 93 de la siguiente forma: Si ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia y BD es la cuerda bisectriz del ángulo ABC, entonces $\frac{(AB+BC)}{BD} = \frac{AC}{AD}$

Demostración del teorema de Ptolomeo

Sean A, B, C y D puntos de la circunferencia, por demostrar que

$$DB \cdot AC \ = DC \cdot AB + AD \cdot CB$$

Se construye el punto E tal que E ∈ AC y que $\measuredangle ABE \cong \measuredangle DBC$.

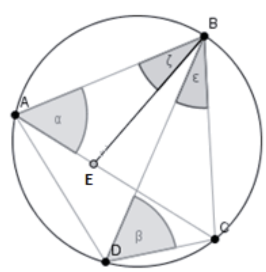


Figura 23. Construcción punto E sobre AC

Además, se tiene que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle BDC$ (ángulos inscritos que subtienden el mismo arco), entonces $\Delta ABE \sim \Delta DBC$ por lo tanto se tiene que $\frac{AE}{DC} = \frac{AB}{DB}$ y que $AE \cdot DB = DC \cdot AB$ (1)
También se tiene que $\measuredangle ABD \cong \measuredangle EBC$ y que $\measuredangle BDA \cong \measuredangle BCA$ (Por ser ángulos inscritos que subtienden el mismo arco)

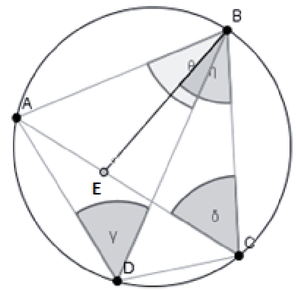


Figura 24. Ángulos inscritos congruentes

Entonces $\Delta ABD \sim \Delta EBC$ por lo tanto se tiene que $\frac{AD}{EC} = \frac{DB}{CB}$ y que $EC \cdot DB = AD \cdot CB$(2)
Sumando (1) y (2) se tiene que:

$$AE \cdot DB + EC \cdot DB = DC \cdot AB + AD \cdot CB$$
$$DB \cdot (AE + EC) = DC \cdot AB + AD \cdot CB$$
$$DB \cdot AC = DC \cdot AB + AD \cdot CB$$

Además se tiene que en el caso particular que ABCD sea un rectángulo, la fórmula anterior se convierte en el teorema de Pitágoras, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

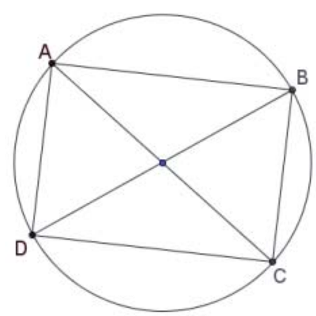


Figura 25. Rectángulo inscrito en una circunferencia

Finalmente, como lo plantea Boyer (1999) los griegos son los primeros en realizar un estudio sistemático de las relaciones entre las medidas de los ángulos centrales de un círculo y las longitudes de las medidas de las cuerdas que los subtienden, lo cual corresponde a los inicios de una nueva rama de la matemática, la trigonometría.

Capítulo IV: Marco teórico

Para la realización de la propuesta de aprendizaje del concepto matemático ángulos en la circunferencia, se utilizará como marco teórico, la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, el cual nos provee elementos teóricos para diseñar una secuencia de actividades didácticas con el objetivo de que los alumnos formulen y conjeturar en relación al teorema del ángulo inscrito en la circunferencia a partir de las propiedades geométricas que ya conocen.

Teoría de Situaciones Didáctica

Brousseau (1998, 2007) expone que el principio metodológico de la teoría de situaciones didáctica, consiste en definir un conocimiento matemático a través de una situación que es creada o rediseñada por el profesor, la cual es resuelta de forma óptima solo a través de este conocimiento matemático que está en juego.

A partir de lo anterior, es importante destacar que la teoría de situaciones adopta un enfoque sistémico ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.

En consecuencia, esta teoría permite comprender las interacciones sociales que se dan dentro de la sala de clase entre el saber matemático, los alumnos y el docente. Interacciones que condicionan el qué y el cómo los alumnos aprenden matemática, proporcionando así una mejor comprensión a los docentes del proceso enseñanza aprendizaje de los objetos matemáticos.

En relación a la pregunta ¿cómo el alumno construye un conocimiento matemático?, la teoría de situaciones propone que un individuo construye este conocimiento cuando es él quien incorpora este conocimiento a su estructura cognitiva, adaptándose a los desequilibrios, dificultades y contradicciones (por ejemplo modificación de los conocimientos previos) que le proporciona una situación de desafío que le propone el profesor, la cual determina un conocimiento matemático en juego.

A partir de lo cual, Brousseau (2007) define una *situación* como un modelo de interacción de un sujeto con un cierto medio que determina un conocimiento dado, es decir, una situación puede ser una actividad problemática desafiante, creada o rediseñada por el profesor, con el objetivo de construir un conocimiento matemático por parte del alumno.

Además, uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje, lo constituye la *devolución*, el cual es el acto que realiza el profesor al lograr que el alumno acepte la responsabilidad de dar respuesta a la situación de aprendizaje sin la intervención del mismo docente, es decir, "esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr por su propio movimiento, que actué, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer " (Brousseau, 2007, p. 31)

Formalmente, estas situaciones que producen la construcción de un conocimiento matemático por parte del alumno se definen como las *situaciones adidácticas,* las cuales corresponden a una situación problemática, desafiante, en que la respuesta no es inmediata, por lo que el alumno deberá confrontar sus conocimientos previos, para así poder generar hipótesis y conjeturas en relación al conocimiento que estará en juego. Además, el alumno deberá aceptar el "problema" y producir una respuesta sin intervención directa del docente, la cual, solo quedará relegada a la realización de preguntas orientadoras que permitan al alumno dar respuesta a la situación. Estas situaciones adidácticas se encuentran estrechamente relacionadas con un conocimiento matemático específico, la cual involucra al alumno y al profesor en un sistema de interacciones con el medio, es decir, con todos aquellos objetos que el alumno pueda emplear con el fin de dar respuesta a esta situación adidáctica. El modelo que describe la actividad del profesor y también la del alumno en el sistema de interacciones entre él y la situación adidáctica, constituye lo que se denomina como *situación didáctica*, es decir, la situación didáctica corresponde a un modelo de interacción que involucra las situaciones adidácticas (situación que determina la construcción de conocimiento), un cierto medio, el alumno y el profesor.

Las situaciones didácticas, al ser un modelo que describe las relaciones e interacciones entre el alumno, el medio y el profesor, también incorporan el estudio de las *variables didácticas*, es decir, el estudio de aquellos elementos, relaciones o condiciones que permiten al alumno buscar estrategias distintas de resolución y por ende dar respuesta a la situación adidáctica.

Además, la relación didáctica entre el profesor y el alumno se establece bajo acuerdos o reglas tanto implícitas como explicitas que establecen cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos en relación al desarrollo de la situación adidáctica. Estas reglas o acuerdos corresponden al contrato didáctico, el cual evoluciona en relación a la responsabilidad que va adquiriendo el alumno en relación a la construcción de su conocimiento y aprendizaje, mediante la asignación de roles y tareas por parte del profesor.

Brousseau (1998, 2007), destaca que las interacciones que se establecen entre el alumno con el medio a través de la situación adidáctica, se clasifican en las siguientes situaciones:

Situación de acción: son aquellas donde el alumno de forma individual interactúa con el “problema” propuesto a través de acciones como son por ejemplo la toma de decisiones en torno a la experimentación de estrategias que le permitan dar respuesta al problema planteado, sin embargo estas acciones no le permiten aún probar ni formular una teoría. Es así que la situación acción es un “modelo implícito al conjunto de relaciones o reglas según las cuales el alumno toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas y a posteriori de su formulación” (Brousseau, 2007,p. 22).

Situación de formulación: En este tipo de situaciones, el objetivo es la comunicación de informaciones entre los alumnos, es decir, ellos deberán ser capaces de transmitir sus exploraciones, ideas o hipótesis en relación a la respuesta del problema en lenguaje matemático (aunque sea incipiente), produciéndose un intercambio de hipótesis codificadas en lenguaje matemático al interior de los grupos.

Situación de validación: consiste en que las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la evaluación del resto de los estudiantes, es decir, estos grupos deben aceptar o rechazar éstas afirmaciones. En estas situaciones, los alumnos de cada grupo organizan sus ideas o reflexiones, con el objetivo de convencer a los demás compañeros de las conjeturas construidas en relación a la respuesta del problema, para lo cual deberán construir pruebas que les permitan demostrar al resto de sus compañeros la validez de sus conjeturas. En este sentido, estas conjeturas son puestas aprueba y debatidas por los integrantes de cada grupo, en donde por ejemplo, se le puede pedir al alumno que al momento de defenderlas las ponga aprueba en otras situaciones de acción o también que las demuestre.

En estas tres situaciones que describen la interacción del alumno con el medio, el protagonista es el alumno. Sin embargo, estas situaciones no bastan para asegurar la formalidad o el estado cultural del conocimiento matemático construido por ellos a través de la situación adidáctica. Es por esto, que al final de este proceso se debe desarrollar la situación de institucionalización protagonizada por el docente.

Así se establece que en la *situación de institucionalización*, se sistematizan las conclusiones a partir de las producciones de los alumnos durante las situaciones anteriores, es decir, el profesor debe describir lo que han hecho los alumnos durante el desarrollo de la situación adidáctica y vincular estas conclusiones con el saber cultural, es así que el docente le da al conocimiento construido un estado cultural, es decir, un estado de saber matemático. De esta forma, el profesor cumple el rol de mediador entre los saberes culturales y los producidos por los alumnos en el aula.

Capítulo V: Marco metodológico

Se ha considerado pertinente para alcanzar los objetivos específicos utilizar un diseño metodológico cualitativo de ingeniería didáctica, el cual en términos de diseño de clase se puede comprender como una secuencia de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático, constituida por situaciones adidácticas y didácticas que le permiten al alumno construir sus propios aprendizajes. A partir de lo cual, se presentarán a continuación los elementos más importantes de la metodología de ingeniería didáctica, para posteriormente describir los sujetos participantes en la secuencia de situaciones didácticas, y la recogida de datos.

Metodología: Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica como metodología de investigación surge en la didáctica de la matemática a principios de la década de los ochenta, la cual "se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p.36).

La ingeniería didáctica como metodología consta de cuatro fases, las cuales corresponden a las siguientes:

Fase 1 análisis preliminares, en esta fase se investigaron los antecedentes que permitieron la construcción de la secuencia de actividades adidácticas para el aprendizaje por parte de los alumnos de los teoremas de ángulos en la circunferencia, considerando lo siguiente:

- Análisis histórico epistemológico del objeto matemático ángulos en la circunferencia.
- Análisis de las restricciones y obstáculos de las concepciones de los alumnos respecto a la visualización en la resolución de problemas geométricos.
- Descripción de los planes y programas y textos escolares que proponen actividades para el aprendizaje de los teoremas de ángulos en la circunferencia.

Fase 2 concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, en esta fase además del diseño de la situación adidáctica se contemplaron los siguientes análisis con el objetivo de controlar los comportamientos de los alumnos en la aplicación de la secuencia de actividades didácticas:

- Descripciones de las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.
- Respuesta experta de cada una de las actividades.
- Conocimiento en juego en la resolución de las actividades.
- Conocimientos previos que deben tener los alumnos para la resolución de las actividades.
- Posibles dificultades y errores que pueden presentar los alumnos al momento de resolver las actividades.
- Intervención del docente, para conducir el desarrollo de las actividades.
- Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la resolución de las actividades.

Fase 3 de experimentación, corresponde a la puesta en escena de la situación adidáctica, la observación y recolección de la información.

Fase 4 de validación, consiste en la confrontación de las hipótesis establecidas en el análisis a priori y los resultados de la fase de experimentación.

Finalmente, una de las características de la metodología de ingeniería didáctica es que su modo de validación es interna, es decir, “desde la misma fase de concepción se empieza el proceso de validación, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, directamente ligada a la concepción local de esta última” (Artigue, 1995, p.44).

Participantes

Los sujetos participantes en la implementación de la secuencia de actividades didácticas, corresponden a 35 alumnos de un curso de II medio de un establecimiento educacional particular subvencionado de la región metropolitana; liceo de tipo Bicentenario, donde actualmente tiene acceso la investigadora.

Una de las características de este grupo curso es que se destaca dentro de su nivel en los resultados de las evaluaciones estandarizadas (Pruebas de nivel, ensayos SIMCE) que se realizan periódicamente en el establecimiento. Además, estos alumnos desconocen los teoremas de ángulos en la circunferencia ya que aún no se ha trabajado en este nivel la unidad de geometría que trata este objeto matemático. Finalmente, se eligieron estos estudiantes ya que la mayoría de ellos pertenece al establecimiento desde 8° básico, y por lo tanto se tiene evidencia desde su profesora de matemática que han trabajado durante estos tres años (periodo entre 8° básico y II medio) los conocimientos previos en relación a la circunferencia y sus elementos, propiedades de los triángulos en especial de triángulos isósceles en relación a las propiedades de sus ángulos interiores y exteriores, las cuales serán fundamentales para alcanzar el aprendizaje del teorema del ángulo inscrito en la circunferencia a través de la secuencia de enseñanza aprendizaje.

Además, otra característica del grupo curso que influyó en la decisión de escogerlos como sujetos participantes de la implementación de la secuencia de actividades didácticas, tiene relación con que la mayoría de los alumnos ya habían utilizado el software de geometría dinámica GEOGEBRA, en clases de los cursos anteriores.

Recogida de datos

Para nuestra investigación, la recogida de información se realizó mediante los siguientes métodos:

- Registro de las guías trabajadas por los alumnos durante la aplicación de la secuencia de actividades.
- Grabación de algunos momentos de la aplicación de la secuencia de actividades didáctica (registro de situaciones de acción, formulación, validación)
- Registro de los cuadernos de los alumnos que den cuenta de la situación de institucionalización
- Registro de los archivo de los trabajos de los alumnos realizados con el programa GEOGEBRA.
- Notas de campo de la aplicación de la secuencia de actividades didácticas.

A través de esta recogida de datos se podrá presentar las evidencias empíricas de la implementación de la secuencia de actividades didácticas para el aprendizaje del teorema del ángulo inscrito en la circunferencia, el corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia, y el corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Capítulo VI: Análisis a priori de la secuencia de situaciones didáctica

En este capítulo se realizará en primer lugar una fundamentación del diseño de la secuencia de actividades didácticas a través de los elementos que surgieron del análisis histórico epistemológico del objeto matemático en cuestión. Posteriormente, se realizará una descripción de esta secuencia de aprendizaje, en relación a la forma en que trabajaron los alumnos, y el objetivo que tiene cada una de las actividades fundamentado en la Teoría de Situaciones Didácticas. Finalmente, se presentará el análisis a priori de la secuencia de actividades considerando respuesta experta, conocimientos en juego, conocimientos previos, posibles dificultades y errores entre otras.

Fundamentación y descripción general de las actividades[7] de la secuencia de situaciones didácticas

A partir del análisis histórico epistemológico de los teoremas ángulos en la circunferencia, se determinó que a través de la construcción con regla y compás es posible que los alumnos puedan explorar y validar estos teoremas, a través de la relación entre los ángulos interiores y exteriores de los triángulos isósceles que están presentes en las construcciones. Este mismo proceso se presenta en las demostraciones de estos teoremas en Los *Elementos* de Euclides en el tercer libro. Además, esta experiencia de trabajo geométrico a través de la construcción, la toma de decisiones acerca del uso de las herramientas (transportador y compás), posibilita en los alumnos la formulación y validación de las conjeturas en relación a las propiedades de los ángulos en la circunferencia, es decir, “bajo ciertas condiciones, las construcciones con los instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de las figuras” (Itzcovich, 2005, p.13)
En consecuencia, la secuencia de actividades didácticas se centra en que los alumnos analicen la relación entre los datos conocidos y los de las figuras geométricas a través de la construcción. A partir de lo anterior, tal y como lo expone Itzcovich (2005) se podrá de esta forma conducir a los alumnos a entender una figura como el conjunto de relaciones o propiedades que la caracterizan, las cuales pueden ser enunciadas a través de un texto.
Además, en la secuencia de actividades diseñada se les solicita a los alumnos explicitar los argumentos que sostengan la validez de la propiedad que está en juego, ya que de esta forma es posible conducirlos hacia al trabajo geométrico que se comenzó a realizar en la cultura griega, al formalizar a través de las demostraciones las relaciones.

[7] La guía con todas las actividades de la secuencia que utilizaron los alumnos se encuentra en el anexo 1.

En relación a la descripción de la secuencia de actividades didácticas para el aprendizaje de los teoremas de ángulos en la circunferencia, se planificaron 3 clases de 90 minutos cada una. La primera clase de 90 minutos, se planificó para el desarrollo de las actividades I y II, las cuales corresponden a una adaptación de las actividades que presentan Corica y Marin (2014) en su estudio e investigación para la enseñanza de nociones geométricas. En consecuencia, el objetivo de estas actividades es que los alumnos se enfrenten a las situaciones de acción y formulación de conjeturas en relación a las medidas de los ángulos inscritos y del centro que subtienden el mismo arco. Para lograr lo anterior, en el inicio de la primera actividad se formaron equipos de trabajo de dos y tres integrantes, para fomentar el trabajo en grupo, la discusión y formulación de nuevas relaciones a través de las propiedades geométricas que ya conocen.

La segunda clase de 90 minutos, se planificó para el desarrollo de las actividades III y IV las cuales contemplan actividades utilizando el software de geometría dinámica GEOGEBRA, y tienen por objetivo que los alumnos en los grupos establecidos en las actividades anteriores, puedan validar el teorema del ángulo inscrito, ya que en la actividad III esta propiedad les permitirá argumentar por qué los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco miden lo mismo, y por qué el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Además, en esta clase se planificó la realización de la institucionalización de los teoremas, la cual es de responsabilidad del docente a cargo, y cuyo objetivo es recoger las conclusiones de la puesta en común de los alumnos en torno a la formulación de las estrategias que utilizaron para determinar la medida de un ángulo inscrito a partir de la medida de un ángulo del centro o viceversa, considerando los distintos casos donde se puede ubicar el centro de la circunferencia con respecto al ángulo inscrito. Para la realización de estas actividades, cada alumno en sus respectivos grupos trabajará con un computador que tiene instalado el software de geometría dinámica GEOGEBRA, además de los archivos para cada actividad.

Finalmente, la tercera clase de 90° minutos se planificó la realización de la actividad IV, en donde los alumnos deberán utilizar GEOGEBRA, y a través de su herramienta *elige y mueve* podrán experimentar y determinar que la figura que contiene los vértices de los ángulos inscritos congruentes dados en el enunciado del problema corresponde a un arco de circunferencia, por lo tanto la situación de acción se realizará de una forma más eficiente y rápida, ya que el objetivo principal de esta actividad es que el alumno pueda validar el teorema del ángulo inscrito el cual debe colocarlo en acto para dar respuesta a la construcción. Para la realización de esta actividad, cada alumno en sus respectivos grupos trabajará con un computador que tiene instalado el software de geometría dinámica GEOGEBRA, además del archivo de la actividad.

Análisis a priori Actividad I

Descripción de la actividad

La actividad I consta de una secuencia de 7 subactividades, las cuales se detallan a continuación.

Actividad I

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 3cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
   a) traza el diámetro AB.
   b) determina un punto C en el arco **AB**, de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 40°.
   c) traza la cuerda BC.

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ABC? Explica tu respuesta**.

3) En la circunferencia construida determina un punto D en el arco **BA**, de tal forma que el ángulo inscrito DBC mida 50°.

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro **DOC? Explica tu respuesta**.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AC		
DC		
DA		

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?
7) ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro **no subtiende el mismo arco** que el ángulo inscrito? **Explica tu respuesta**.

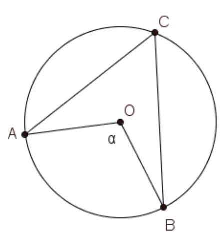
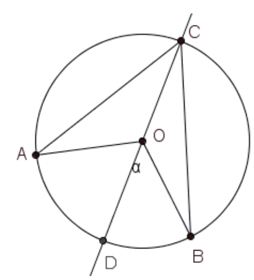
Situación de acción: subactividades I.1) y I.3)

En esta parte de la secuencia de actividades se pretende que los alumnos hagan uso de los conocimientos previos de construcción de circunferencia y ángulos, a través del uso de compás y transportador.
En la actividad I.1) se contempla que el alumno construya en primer lugar la circunferencia de centro O y un diámetro AB. Posteriormente que determine un punto C en la circunferencia de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 40° y que trace la cuerda desde B hasta C de tal forma de construir el ángulo inscrito ABC que subtiende el mismo arco que el ángulo del centro AOC. A partir de esta construcción, el centro de la circunferencia se encuentra en una de las cuerdas (cuerda AB) del ángulo inscrito ABC (La cual corresponde al diámetro AB), que es el caso más inmediato para determinar la medida del ángulo inscrito ABC a partir del ángulo del centro AOC que subtiende el mismo arco, para lo cual el alumno deberá relacionar la medida del ángulo del centro AOC con las medidas de los ángulos basales del triángulo isósceles COB, ya que este ángulo es ángulo exterior de este triángulo isósceles.
Además, en esta situación el alumno deberá tomar decisiones en relación al uso del transportador es decir, donde ubicar el centro del transportador y posteriormente hacia donde girarlo de tal forma que el lado AO del ángulo AOC coincida con la marca de 0° y para que además el punto C se encuentre en el arco AB de tal forma que el ángulo central AOC mida 40°.

Posteriormente, en la actividad I.3) el alumno deberá tomar las mismas decisiones en cuanto al uso del transportador para determinar el punto D pero ahora en el arco BA, de tal forma que el ángulo inscrito DBC mida 50°. Con la construcción de este ángulo inscrito el alumno deberá determinar la medida del ángulo central DOC el cual subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito DBC. A través de la construcción de la actividad I.3) la cual tiene como base la construcción de la actividad I.1), el alumno se enfrentará a relacionar la medida de los ángulos centrales e inscritos con la medida de los dos triángulos isósceles que están presentes en la construcción, ya que se está considerando el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra al interior de la región del ángulo inscrito.

Además, el hecho de que el alumno realice las dos construcciones tanto de la actividad I.1) como de la actividad I.3) en la misma circunferencia, le permitirá tener en la construcción de las figuras datos necesarios para relacionar los ángulos conocidos, y no deberá realizar una transformación de la figura inicial (dibujar algún elemento auxiliar como un diámetro) para formar estos triángulos isósceles como se hace en la demostración, lo cual es de más complejidad en cuanto al trabajo cognitivo de visualización. Es decir, si solo se le pidiera construir al alumno un ángulo del centro que mida α y uno inscrito que subtienda el mismo arco que el ángulo del centro, y posteriormente se le pidiera determinar la medida de este ángulo inscrito, el alumno tendría que discernir qué transformaciones se deben realizar en la figura inicial que le permitan relacionar las propiedades de estas subfiguras y por lo tanto responder a la tarea propuesta. Lo anterior se representa en la siguiente tabla.

Tabla 6. Proceso de visualización

<table>
<tr><th>Figura inicial
(figura de partida)</th><th>Descripción del proceso de transformación de la figura para relacionar las propiedades geométricas</th><th>Figura de llegada</th></tr>
<tr><td>
</td><td>A través del proceso cognitivo de visualización se debe transformar la figura inicial realizando la construcción del diámetro CD, lo que permitirá relacionar los ángulos interiores de los triángulos isósceles que corresponden a sub-configuraciones de la figura inicial.</td><td>
</td></tr>
</table>

Situación de formulación: subactividades I.2), I.4), I.5), I.6) y I.7)

En las actividades I.2) y I.4) los alumnos deberán visualizar los triángulos isósceles que se presentan en las construcciones de las actividades I.1) y I.3) lo cual les permitirán relacionar la medida de sus ángulos interiores y exteriores con la medida de los ángulos del centro e inscritos de la circunferencia en cada uno de los casos, a partir de lo cual deberán comunicar la estrategia utilizada, es decir la relación que existe entre las figuras de la construcción a través de argumentos deductivos.

En la actividad I.6) los alumnos deberán establecer una conjetura que relaciones la medida del ángulo inscrito y el ángulo del centro que subtiende el mismo arco, la cual se establece a partir de las actividades anteriores y que la tabla de la actividad I.5) permite organizar, para que surja de forma natural la conjetura.

Finalmente, la actividad I.7) conduce a los alumnos a cuestionar la validez de la conjetura establecida en la actividad I.6), para lo cual ellos deberán recurrir a las relaciones de las figuras presentes en su construcción para determinar que la relación no es válida si el ángulo inscrito no subtiende el mismo arco que el ángulo del centro (pero si estos ángulos subtienden arcos distintos pero congruentes, la relación es válida), para lo cual podrían buscar un contraejemplo en la construcción para justificar su respuesta.

Respuesta experta de la Actividad I

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 3cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:

   a) traza el diámetro AB.
   b) determina un punto C en el arco **AB**, de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 40°.
   c) traza la cuerda BC.

Respuesta actividad I.1)

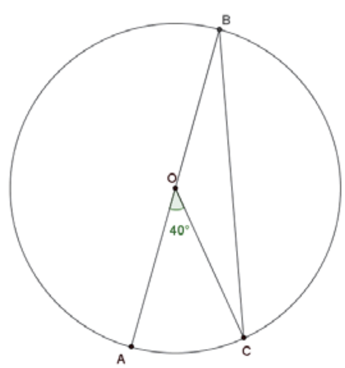


Figura 26. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ABC? Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad I.2)

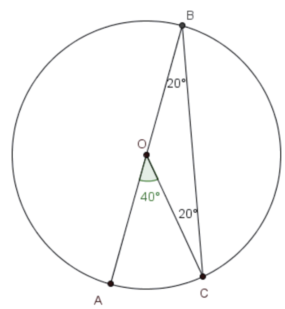


Figura 27. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

Se tiene el triángulo isósceles COB (ya que está formado por dos radios CO y BO), entonces se tiene que $\measuredangle OCB \cong \measuredangle OBC$ (ángulos basales del triángulo isósceles) y $m(\measuredangle OCB) + m(\measuredangle OBC) = 40°$ ya que el $\measuredangle AOC$ de 40° es ángulo exterior del triángulo isósceles y por lo tanto su medida es igual a la suma de los ángulos no adyacentes a él, los cuales son el $\measuredangle OCB$ y el $\measuredangle OBC$. Entonces se tiene que $m(\measuredangle OCB) = m(\measuredangle OBC) = 20°$.
Además $m(\measuredangle OBC) = m(\measuredangle ABC) = 20°$. Finalmente la medida del ángulo inscrito ABC es de 20°.

Otra respuesta a la actividad I.2)

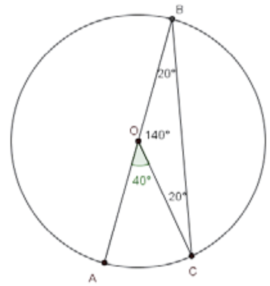


Figura 28. Modificación Figura 27

Se tiene que $m(\measuredangle COB) = 180° - m(\measuredangle AOC)$ ya que el $\measuredangle COB$ y el $\measuredangle AOC$ son ángulos adyacentes, entonces $m(\measuredangle COB) = 180° - 40° = 140°$

Se tiene también que el triángulo COB es isósceles (ya que está formado por dos radios CO y BO), entonces se tiene que $\measuredangle OCB \cong \measuredangle OBC$ (ángulos basales del triángulo isósceles).

Además, $m(\measuredangle COB) + m(\measuredangle OCB) + m(\measuredangle OBC) = 180°$ por ser ángulos interiores del triángulo COB, entonces $140° + m(\measuredangle OCB) + m(\measuredangle OBC) = 180°$, trabajando con la igualdad se tiene que $m(\measuredangle OCB) + m(\measuredangle OBC) = 40°$, por lo que $m(\measuredangle OCB) = m(\measuredangle OBC) = 20°$ ya que son ángulos congruentes.

Asimismo, $m(\measuredangle OBC) = m(\measuredangle ABC) = 20°$. Finalmente la medida del ángulo inscrito ABC es de 20°.

3) En la circunferencia construida determina un punto D en el arco **BA**, de tal forma que el ángulo inscrito DBC mida 50°.

Respuesta actividad I.3)

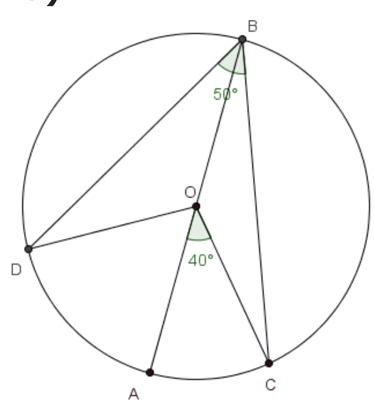


Figura 29. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro **DOC? Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad I.4)

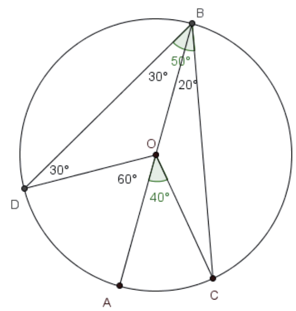


Figura 30. Modificación Figura 29

Se tiene el triángulo isósceles DOB (ya que está formado por dos radios DO y BO), entonces se tiene que $\measuredangle BDO \cong \measuredangle DBO$ (ángulos basales del triángulo isósceles) y $m(\measuredangle DBC) = 50° = m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle DBA)$ entonces reemplazando los datos conocidos se tiene:
$m(\measuredangle DBC) = 50° = 20° + m(\measuredangle DBA)$, por lo que $m(\measuredangle DBA) = 30°$
Además $m(\measuredangle DBA) = m(\measuredangle DBO) = 30°$ y como $\measuredangle BDO \cong \measuredangle DBO$ entonces $m(\measuredangle BDO) = m(\measuredangle DBO) = 30°$. También se tiene que el $\measuredangle DOA$ es ángulo exterior del triángulo por lo que su medida es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a este, de esta forma $m(\measuredangle DOA) = m(\measuredangle DBA) + m(\measuredangle DBO) = 30° + 30° = 60°$, de esta forma $m(\measuredangle DOC) = m(\measuredangle DOA) + m(\measuredangle AOC) = 60° + 40° = 100°$. Finalmente la medida del ángulo central DOC es de 100°.

Otra respuesta a la actividad I.4)

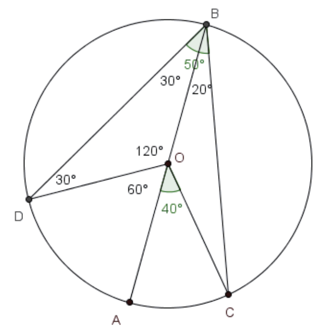


Figura 31. Modificación Figura 30

Se tiene el triángulo isósceles DOB (ya que está formado por dos radios DO y BO), entonces se tiene que $\measuredangle BDO \cong \measuredangle DBO$ (ángulos basales del triángulo isósceles) y $m(\measuredangle DBC) = 50° = m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle DBA)$ entonces reemplazando los datos conocidos se tiene:
$m(\measuredangle DBC) = 50° = 20° + m(\measuredangle DBA)$ por lo que $m(\measuredangle DBA) = 30°$.
Además, $m(\measuredangle DBA) = m(\measuredangle DBO) = 30°$ y como $\measuredangle BDO \cong \measuredangle DBO$ entonces $m(\measuredangle BDO) = m(\measuredangle DBO) = 30°$. Entonces se tiene que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° por lo que se cumple que $m(\measuredangle BDO) + m(\measuredangle DBO) + m(\measuredangle DOB) = 180°$ reemplazando los datos conocidos se tiene: $30° + 30° + m(\measuredangle DOB) = 180°$ trabajando la igualdad se tiene que $m(\measuredangle DOB) = 120°$.
Entonces $m(\measuredangle DOA) = 180° - m(\measuredangle DOB)$ ya que el $\measuredangle DOA$ y el $\measuredangle DOB$ son ángulos adyacentes, entonces $m(\measuredangle DOA) = 180° - 120° = 60°$, de esta forma $m(\measuredangle DOC) = m(\measuredangle DOA) + m(\measuredangle AOC) = 60° + 40° = 100°$. Finalmente la medida del ángulo central DOC es de 100°.

Otra respuesta a la actividad I.4)

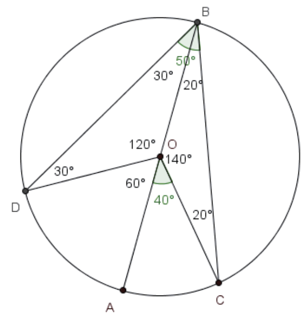


Figura 32. Modificación Figura 31

A partir de la respuesta 2) se tiene que $m(\measuredangle DOB) = 120°$y además si se considera que $m(\measuredangle COB) = 140°$ (utilizando la respuesta 2) de la actividad 2)), y considerando además que $m(\measuredangle AOC) + m(\measuredangle COB) + m(\measuredangle BOD) + m(\measuredangle DOA) = 360°$ (ya que forman un ángulo completo), Remplazando las medidas de los ángulos conocidos en la igualdad se tiene:
$40° + 140° + 120° + m(\measuredangle DOA) = 360$ (Considerando que el $\measuredangle DOB$ y el $\measuredangle BOD$ son el mismo ángulo). Trabajando la igualdad se tiene que $m(\measuredangle DOA) = 60°$ y considerando que $m(\measuredangle DOC) = m(\measuredangle DOA) + m(\measuredangle AOC) = 60° + 40° = 100°$. Finalmente la medida del ángulo central DOC es de 100°.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Respuesta actividad I.5)

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AC	40°	20°
DC	100°	50°
DA	60°	30°

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

Respuesta actividad I.6)

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

Otra respuesta a la actividad I. 6)

La medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.

7) ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro **no subtiende el mismo arco** que el ángulo inscrito? **Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad I.7)

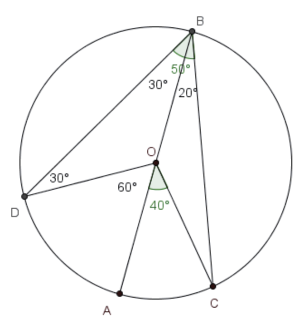


Figura 33. Modificación Figura 32

La relación anterior no es válida siempre, ya que si el ángulo inscrito no subtiende el mismo arco, se puede demostrar a través de un contraejemplo a partir de las construcciones

$m(\measuredangle DOA) = 60°$ (Ángulo del centro que subtiende el arco DA)

$m(\measuredangle ABC) = 20°$ (Ángulo inscrito que subtiende el arco AC)

$$m(\measuredangle ABC) \neq \frac{1}{2} m(\measuredangle DOA) = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$$

Ahora si es ángulo del centro e inscrito subtienden arcos distintos pero congruentes la relación establecida (La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco) si es válida debido al teorema: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, los arcos congruentes son subtendidos por ángulos centrales congruentes.

Conocimientos en juego

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.
La medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.
Considerando los casos en que el centro de la circunferencia se encuentra en una de las cuerdas del ángulo inscrito, y el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra en la región interior del ángulo inscrito.

Conocimientos previos

- Construcción de ángulos con un transportador, dada la medida de éste.
- Construcción de circunferencias con compás dado la medida de su radio.
- Elementos de la circunferencia como arcos, radios, cuerdas, diámetro, ángulos del centro y ángulos inscritos. Para lo cual es necesario conocer sus características.
- Propiedades de un triángulo isósceles en relación a la medida de sus lados y medida de sus ángulos interiores.
- Teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo
- Teorema del ángulo exterior de un triángulo
- Ángulos adyacentes y sus propiedades.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.

Posibles dificultades y errores

Posibles dificultades

- No conocer los conceptos de diámetro y cuerda y por lo tanto no saber construirlos según las indicaciones.
- Dificultades en el procedimiento de construcción de los ángulos dada su medida utilizando el transportador, por ejemplo, no saber dónde ubicar el centro del transportador y hacia donde girarlo.

> **Intervención del docente:**
> El docente primero debe verificar si algún integrante del grupo recuerda cómo construir un ángulo con el transportador y si la respuesta es negativa deberá recordar a los alumnos que el centro del transportador se debe ubicar en el vértice del ángulo y que deben girar el transportador de tal forma de hacer coincidir la recta horizontal de este instrumento con el lado del ángulo construido y posteriormente medir desde 0° hasta la amplitud solicitada.

- No reconocer en qué lugar de la circunferencia de centro O se den construir los puntos C y D, que determinan los ángulos inscritos según las indicaciones solicitadas.
- No visualizar los triángulos isósceles que permitirán relacionar la medida de los ángulos del centro e inscritos que subtienden el mismo arco.

> **Intervención del docente:**
> El docente les deberá preguntar a los alumnos ¿qué elementos geométricos es posible observar en sus construcciones?, si responden los alumnos solo ángulos, el profesor les deberá preguntar, ¿habrá algo más que ángulos?, si los alumnos reconocen en la figura los triángulos presentes, el profesor les deberá preguntar, ¿es posible relacionar las propiedades de los elementos geométricos que reconocieron en la figura con la medida del ángulo pedido?

- Desconocer la propiedad de que los ángulos basales en un triángulo isósceles son congruentes.
- Desconocer la propiedad de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Posibles errores

- Al momento de construir los ángulos conociendo su amplitud, su vértice y uno de sus lados, no trazar el otro lado del ángulo.
- Errores en la construcción al determinar el punto C en arco BA y no en el arco AB como es solicitado. Posteriormente construir el punto D en el arco AB y no el AB, construyendo así de forma errónea lo siguiente:

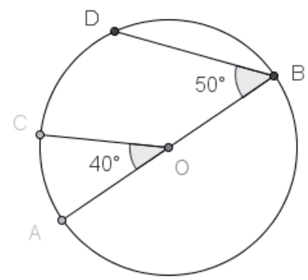


Figura 34. Error al construir actividad I.1) y I.3).
Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

- Determinar de forma incorrecta punto D al construir el ángulo DBC de 50° sobre el diámetro AB y no sobre su lado BC, formando así un ángulo de 70° y no de 50°, construyendo lo siguiente:

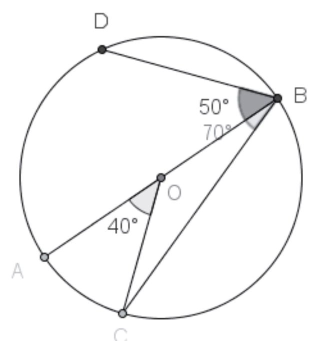


Figura 35. Error al construir actividad I.3).
Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

Intervención del docente:
El docente al observar este error le preguntará a los alumnos si efectivamente el ángulo DBC mide 50°, para lo cual se le solicitará a los alumnos que midan el ángulo con el transportador. Luego el docente les deberá preguntar ¿dónde deben ubicar la recta horizontal del transportador para así construir el ángulo DBC de forma correcta?

- Construir el ángulo DBC con vértice en el centro de la circunferencia.

> **Intervención del docente**:
> El profesor puede preguntar ¿cuál es el vértice del ángulo DBC?, y por lo tanto ¿dónde deben hacer coincidir el centro del transportador?

- Errores de cálculo mental.
- Establecer de forma incorrecta la relación entre la medida del ángulo inscrito y del centro que subtienden el mismo arco.
- Establecer que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro sin considerar que subtiendan el mismo arco.

Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad

El teorema del ángulo inscrito:
Teorema: Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

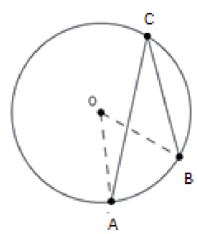


Figura 36. Ángulo del centro e inscrito que subtienden el mismo arco

Es decir, $m(\measuredangle BAC) = \frac{1}{2} m(\measuredangle BOC) = \frac{1}{2} m(\widehat{BC})$.
La última igualdad usando radianes como medida de ángulos.

Análisis a priori Actividad II

Descripción de la actividad

La actividad II consta de una secuencia de 7 subactividades, las cuales se detallan a continuación.

Actividad II

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
   a) un ángulo del centro AOB de 50°
   b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 90° y el punto **B** esté en el arco que subtiende este ángulo.
   c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ACB? Explica tu respuesta**.

3) En la circunferencia construida:
   a) determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro BOD mida 100° y el punto **C** esté en el arco que subtiende este ángulo.
   b) traza la cuerda DB y la cuerda DC.

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **BDC? Explica tu respuesta**.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AB		
BC		

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?
7) A partir de las relaciones obtenidas en las actividades anteriores, ¿podrías afirmar que la conjetura establecida entre la medida del ángulo del centro y la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, es **siempre válida**? **Explica tu respuesta**.

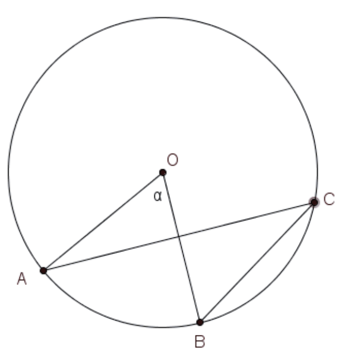
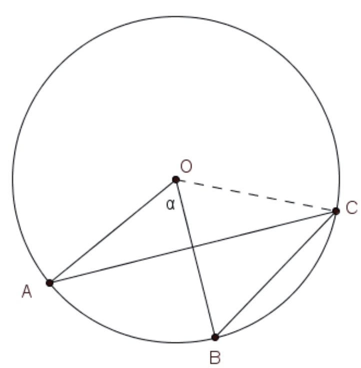
Situación de acción: subactividades II.1) y II.3)

En esta parte de la actividad II se pretende que los alumnos utilicen las estrategias que utilizaron en la Actividad I para relacionar las propiedades de los elementos geométricos como ángulos, triángulos isósceles etc., con las medidas de los ángulos del centro e inscritos. Además, harán uso de los conocimientos de construcción de circunferencia y ángulos con compás y transportador.

En la actividad II.1) se contempla que los alumnos nuevamente tomen decisiones en relación al uso del transportador es decir, donde ubicar el centro del transportador y posteriormente hacia donde girarlo de tal forma de construir adecuadamente los ángulos pedidos. En relación a la toma de estas decisiones los alumnos deberán construir en primer lugar la circunferencia de centro O y un ángulo del centro AOB de 50°. Posteriormente deberá determinar un punto C en el arco BA de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 90° y luego deberán trazar las cuerdas CA y CB, con la intención de formar el ángulo inscrito ACB que subtiende el arco AB el mismo que subtiende el ángulo del centro AOB de 50°. A partir de esta construcción, el centro de la circunferencia se encuentra en la región exterior del ángulo inscrito ACB, que es el caso más complejo para determinar la medida del ángulo ACB a partir del ángulo del centro AOB que subtiende el mismo arco. Para determinar la medida del ángulo inscrito ACB, los alumnos deberán relacionar las medidas de los ángulos del centro que se construyeron (ángulo AOB y ángulo AOC) con las medidas de los ángulos de los triángulos isósceles que se forman entre las cuerdas y radios dibujados, triángulo isósceles AOC y triángulo isósceles BOC.

A través de la construcción de la actividad II.1) los alumnos deberán haber dibujado dos ángulos del centro que subtienden arcos consecutivos y un ángulo inscrito que subtiende uno de los arcos que también subtiende uno de los ángulos del centro. La construcción anterior, permitirá que los alumnos tengan en su dibujo las figuras y datos necesarios para relacionar los ángulos conocidos y entonces no deberán realizar una transformación de la figura inicial (realizar una construcción auxiliar como trazar un radio) para formar estos triángulos isósceles como se hace en la demostración, lo cual es de más complejidad en cuanto al trabajo cognitivo de visualización y al trabajo deductivo de relacionar las medidas de los ángulos, al conocer únicamente la medida de uno de los ángulos. Es decir, si solo se le pidiera construir al alumno un ángulo del centro que mida α y uno inscrito que subtienda el mismo arco que el ángulo del centro, de tal forma que el centro de la circunferencia esté en la región exterior del ángulo inscrito y posteriormente se le pidiera determinar la medida de este ángulo, el alumno tendría que discernir que transformaciones se deben realizar en la figura inicial que le permitan relacionar las propiedades de estas sub-figuras y por lo tanto responder a la tarea propuesta. Lo anterior se representa en la siguiente tabla.

Tabla 7. Proceso de visualización

Figura inicial (figura de partida)	Descripción del proceso de transformación de la figura para relacionar las propiedades geométricas	Figura de llegada
	A través del proceso cognitivo de visualización se debe transformar la figura inicial realizando la construcción del radio OC, lo que permitirá relacionar los ángulos interiores de los triángulos isósceles que corresponden a sub-configuraciones de la figura inicial. Además el trabajo deductivo y algebraico para relacionar las medidas de los ángulos interiores de los triángulos isósceles es complejo en comparación con los casos donde el centro de la circunferencia se encuentra en la región interior del ángulo inscrito o en una de sus cuerdas, ya que se deben visualizar dos triángulos isósceles y relacionar sus medidas con la de los ángulos de la circunferencia.	

En la actividad II.3) la construcción que se debe realizar está en la misma dirección que la que se realizó en la actividad II.1) por lo tanto los alumnos deberán tomar decisiones en torno al uso del transportador para construir los ángulos pedidos, además, deberán realizar el trabajo cognitivo de visualización de los triángulos isósceles presentes para relacionar las medidas de los ángulos de estos triángulos con las medidas de los ángulos inscritos y del centro. Por lo tanto, el objetivo de esta actividad es que los alumnos puedan reforzar las estrategias utilizadas en la actividad II.1) y que además al tener dos casos en que los ángulos inscritos subtienden el mismo arco que los ángulos del centro (en el caso en que el centro se encuentra en la región exterior de estos ángulos inscritos), podrán realizar la conjetura de que en este caso también se cumple la relación establecida entre estos ángulos.

Situación de formulación: subactividades II.2), II.4), II.5), II.6) y II.7)

En esta parte de la actividad II.2) y II.4) los alumnos deberán visualizar los triángulos isósceles que se presentan en las construcciones de las actividades II.1) y II.3) lo cual les permitirán relaciona las medidas de sus ángulos interiores con las medidas de los ángulos centrales e inscritos de la circunferencia en cada uno de los casos, a partir de lo cual deberán comunicar la estrategia utilizada, es decir la relación que existe entre las figuras de la construcción a través de argumentos deductivos.
En la actividad II.6) los alumnos deberán establecer una conjetura que relaciones la medida del ángulo inscrito y el ángulo del centro que subtiende el mismo arco, la cual se establece a partir de las actividades anteriores y que la tabla de la actividad II.5) permite organizar, para que surja de forma natural la conjetura.
Finalmente, la actividad II.7) conduce a los alumnos a cuestionar la valides de la conjetura establecida en la actividad II.6), en consecuencia, deberán recurrir a las relaciones de las figuras presentes en su construcción para determinar que la relación entre las medidas de los ángulos inscritos y del centro que subtienden el mismo centro si es válida ya que se cumplen en los casos en que el centro se encuentra en una de las cuerdas del ángulo inscrito, en la región interior del ángulo inscrito, y en la región exterior del ángulo inscrito.

Respuesta experta de la Actividad II

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
   a) un ángulo del centro AOB de 50°
   b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 90° y el punto **B** esté en el arco que subtiende este ángulo.
   c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.

Respuesta actividad II.1)

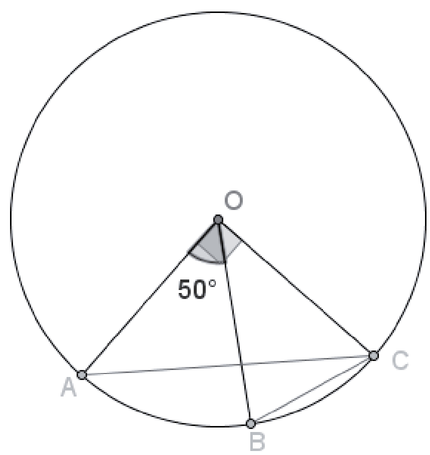


Figura 37. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ACB? Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad II.2)

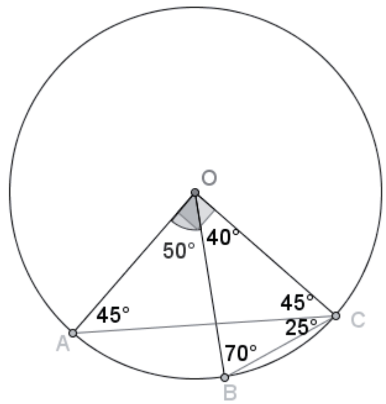


Figura 38. Modificación Figura 37

Se tiene que la $m(\measuredangle AOB) = 50°$, y que $m(\measuredangle AOC) = 90°$, además $m(\measuredangle AOC) = m(\measuredangle AOB) + m(\measuredangle BOC)$, reemplazando en la igualdad las medidas de los ángulos conocidos se tiene que $90° = 50° + m(\measuredangle BOC)$ y trabajando algebraicamente la igualdad se tiene que $m(\measuredangle BOC) = 40°$.

Además, se tiene que el triángulo AOC es isósceles (ya que está formado por dos radios AO y CO), entonces se tiene que $\measuredangle OAC \cong \measuredangle OCA$ (ángulos basales del triángulo isósceles) entonces
$m(\measuredangle OAC) = m(\measuredangle OCA) = 45°$ (Por teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo)

Además, se tiene que el triángulo BOC es isósceles (ya que está formado por dos radios BO y CO), entonces se tiene que $\measuredangle OBC \cong \measuredangle OCB$ (ángulos basales del triángulo isósceles) entonces $m(\measuredangle OBC) = m(\measuredangle OCB) = 70°$ (Por teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo)

También se cumple que $m(\measuredangle ACB) = m(\measuredangle OCB\ ) - m(\measuredangle OCA)$ remplazando las medidas de los ángulos conocidos se tiene que
$m(\measuredangle ACB) = 70° - 45° = 25°$. Finalmente la medida del ángulo inscrito ACB es de 25°.

3) En la circunferencia construida:

a) determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro BOD mida 100° y el punto **C** esté en el arco que subtiende este ángulo.
b) traza la cuerda DB y la cuerda DC.

Respuesta actividad II.3)

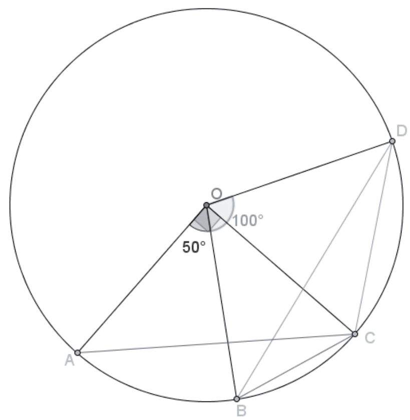


Figura 39. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **BDC? Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad II.4)

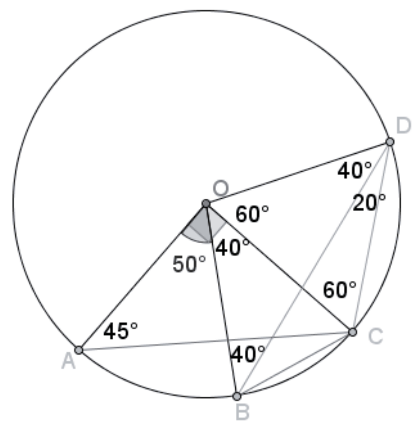


Figura 40. Modificación Figura 39

Se tiene que la $m(\measuredangle BOD) = 100°$, y que $m(\measuredangle BOC) = 40°$.
Además $m(\measuredangle BOD) = m(\measuredangle BOC) + m(\measuredangle COD)$, reemplazando en la igualdad las medidas de los ángulos conocidos se tiene que $100° = 40° + m(\measuredangle COD)$ y trabajando algebraicamente la igualdad se tiene que la $m(\measuredangle COD) = 60°$.
También se tiene que el triángulo BOD es isósceles (ya que está formado por dos radios BO y DO), entonces se tiene que $\measuredangle OBD \cong \measuredangle ODB$ (ángulos basales del triángulo isósceles) entonces
$m(\measuredangle OBD) = m(\measuredangle ODB) = 40°$ (Por teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo)
Además, se tiene que el triángulo COD es isósceles (ya que está formado por dos radios CO y DO), entonces se tiene que $\measuredangle OCD \cong \measuredangle ODC$ (ángulos basales del triángulo isósceles) entonces
$m(\measuredangle OCD) = m(\measuredangle ODC) = 60°$ (Por teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo) y debido a que las medidas de los ángulos interiores del triángulo COD es igual a 60°, el triángulo COD es equilátero.
También se cumple que $m(\measuredangle BDC) = m(\measuredangle ODC\ ) - m(\measuredangle ODB)$ remplazando las medidas de los ángulos conocidos se tiene que
$m(\measuredangle BDC) = 60° - 40° = 20°$. Finalmente la medida del ángulo inscrito BDC es de 20°.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Respuesta actividad II.5)

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AB	50°	25°
BC	40°	20°

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

Respuesta Actividad II.6)

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

Otra respuesta a la actividad II.6)

La medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.

7) A partir de las relaciones obtenidas en las actividades anteriores, ¿podrías afirmar que la conjetura establecida entre la medida del ángulo del centro y la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, es **siempre válida**? **Explica tu respuesta**.

Respuesta actividad II.7)

La relación establecida si es válida, ya que se cumple en los tres casos donde puede estar ubicado el centro de la circunferencia con respecto al ángulo inscrito, es decir, la relación entre el ángulo inscrito y del centro que subtienden el mismo arco se cumple en los siguientes casos:
Centro de la circunferencia se encuentra ubicado en una de las cuerdas del ángulo inscrito.
Centro de la circunferencia se encuentra ubicado en la región interior del ángulo inscrito.
Centro de la circunferencia se encuentra ubicado en la región exterior del ángulo inscrito.

Conocimientos en juego

La medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.
La medida del ángulo del centro es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.
Considerando el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra en la región exterior del ángulo inscrito.

Conocimientos previos

- Construcción de ángulos con un transportador, dada la medida de éste.
- Construcción de circunferencias con compás dado la medida de su radio.
- Elementos de la circunferencia como arcos, radios, cuerdas, diámetro, ángulos del centro y ángulos inscritos. Para lo cual es necesario conocer sus características.
- Propiedades de un triángulo isósceles en relación a la medida de sus lados y medida de sus ángulos interiores.
- Teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo
- Teorema del ángulo exterior de un triángulo
- Ángulos adyacentes y sus propiedades.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.

Posibles dificultades y errores:

Posibles dificultades

- No conocer los conceptos de diámetro y cuerda y por lo tanto no saber construirlos según las indicaciones.
- Dificultades en la construcción de los ángulos dada su medida utilizando el transportador, es decir, no saber dónde ubicar el centro del transportador y hacia donde girarlo.

Intervención del docente:
El docente primero debe verificar si algún integrante del grupo recuerda cómo construir un ángulo con el transportador y si la respuesta es negativa deberá recordar a los alumnos que el centro del transportador se debe ubicar en el vértice del ángulo y que deben girar el transportador de tal forma de hacer coincidir la recta horizontal de este instrumento con el lado del ángulo construido y posteriormente medir desde 0° hasta la amplitud solicitada.

- No reconocer en qué lugar de la circunferencia de centro O se den construir los puntos C y D, que determinan los ángulos inscritos según las indicaciones solicitadas.
- No visualizar los triángulos isósceles que permitirán relacionar la medida de los ángulos del centro e inscritos que subtienden el mismo arco.

Intervención del docente:
El docente les deberá preguntar a los alumnos ¿qué elementos geométricos es posible observar en sus construcciones?, si responden los alumnos solo ángulos, el profesor les deberá preguntar, ¿están seguros que solo ángulos?, si los alumnos reconocen en la figura los triángulos presentes, el profesor les deberá preguntar, ¿cómo es posible relacionar las propiedades de los elementos geométricos que reconocieron en la figura con la medida del ángulo pedido?

- Dificultades al determinar la medida del ángulo ACB, la cual se obtiene relacionando la medida del ángulo OCB con la medida del ángulo OCA, los cuales son ángulos interiores de triángulos isósceles.
- Dificultades al determinar la medida del ángulo BDC, la cual se obtiene relacionando la medida del ángulo ODC con la medida del ángulo ODB, los cuales son ángulos interiores de triángulos isósceles.
- Desconocer la propiedad de que los ángulos basales en un triángulo isósceles son congruentes.
- Desconocer la propiedad de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Posibles errores

- Al momento de construir los ángulos conociendo su amplitud, su vértice y uno de sus lados, no trazar el otro lado del ángulo.
- Determinar de forma incorrecta el punto C al construir el ángulo AOC de 90° sobre el radio BO y no sobre el radio AO, formando así un ángulo de 140° y no de 90°, construyendo lo siguiente:

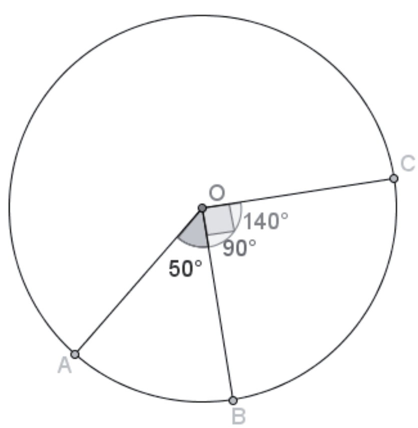


Figura 41. Error al construir actividad II.1).
Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

Intervención del docente:
El docente al observar este error le preguntará a los alumnos si efectivamente el ángulo AOC mide 90°, para lo cual se le solicitará a los alumnos que midan el ángulo con el transportador. Luego el docente les deberá preguntar ¿dónde deben ubicar la recta horizontal del transportador para así construir el ángulo AOC de forma correcta?

- Determinar de forma incorrecta el punto D al construir el ángulo BOD de 100° sobre el radio CO y no sobre el radio BO, formando así un ángulo de 140° y no de 100°, construyendo lo siguiente:

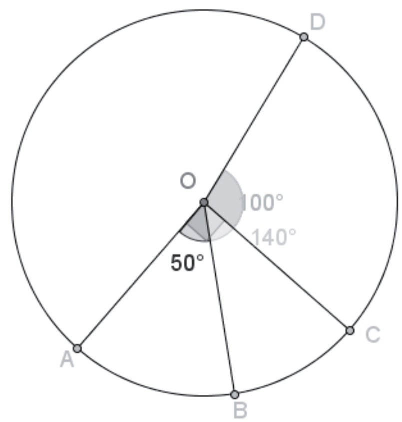


Figura 42. Error al construir actividad II.3).
Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

Intervención del docente:
El docente al observar este error le preguntará a los alumnos si efectivamente el ángulo BOD mide 100°, para lo cual se le solicitará a los alumnos que midan el ángulo con el transportador. Luego el docente les deberá preguntar ¿dónde deben ubicar la recta horizontal del transportador para así construir el ángulo BOD de forma correcta?

- Errores de cálculo al momento de resolver las ecuaciones que se plantean para determinar la medida de los ángulos.
- Establecer de forma incorrecta la relación entre la medida del ángulo inscrito y del centro que subtienden el mismo arco.

Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad

El teorema del ángulo inscrito:
Teorema: Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

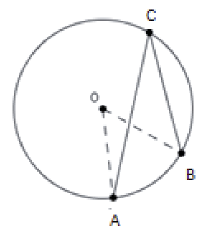


Figura 43. Ángulo del centro e inscrito que subtiende el mismo arco

Es decir, $m(\measuredangle BAC) = \frac{1}{2} m(\measuredangle BOC) = \frac{1}{2} m(\widehat{BC})$.
La última igualdad usando radianes como medida de ángulos.

Al finalizar estas dos actividades se procederá a realizar las situaciones de validación e institucionalización.

Situación de validación

Algunos integrantes de los grupos deberán someter a evaluación las formulaciones propuestas en cada una de las actividades, indicando las estrategias que utilizaron para determinar la medida de los ángulos solicitados, de esta forma deberán mostrar a sus compañeros las pruebas que les permitan demostrar al resto de sus compañeros la validez de sus conjeturas.

Para producir esta situación de validación el docente deberá preguntar si existe algún voluntario o voluntarios de un grupo que quiera o quieran exponer al resto de sus compañeros las formulaciones establecidas. De no haber voluntarios el docente deberá escoger un grupo y luego a alguno de sus representantes para realizar la exposición, también el docente deberá conducir la puesta en común promoviendo interacciones entre los alumnos que exponen y los que están observando.

Situación de institucionalización

El docente deberá recoger las conclusiones obtenidas en torno a la conjetura de la relación del ángulo inscrito y del ángulo del centro que subtienden el mismo arco, para lo cual procederá a realizar la demostración del teorema considerando las distintas posiciones en que se puede encontrar el centro de la circunferencia en relación al ángulo inscrito. Al realizar las demostraciones en los distintos casos, el docente deberá recoger los argumentos y estrategias utilizadas por los alumnos para conectarlas con las demostraciones. Entonces será importante que el docente pregunte a los alumnos ¿qué elemento de la construcción permitió relacionar la medida de los ángulos conocidos? Y así comenzar a construir la demostración conjuntamente con ellos.

Análisis a priori Actividad III

Descripción de la actividad

La actividad III consta de una secuencia de 8 subactividades, las cuales se detallan a continuación.

Actividad III

Instrucciones

- Abre el documento de GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb" ubicado en el escritorio.
- Explora la animación según las instrucciones entregadas, y responde a las preguntas en el siguiente espacio designado:

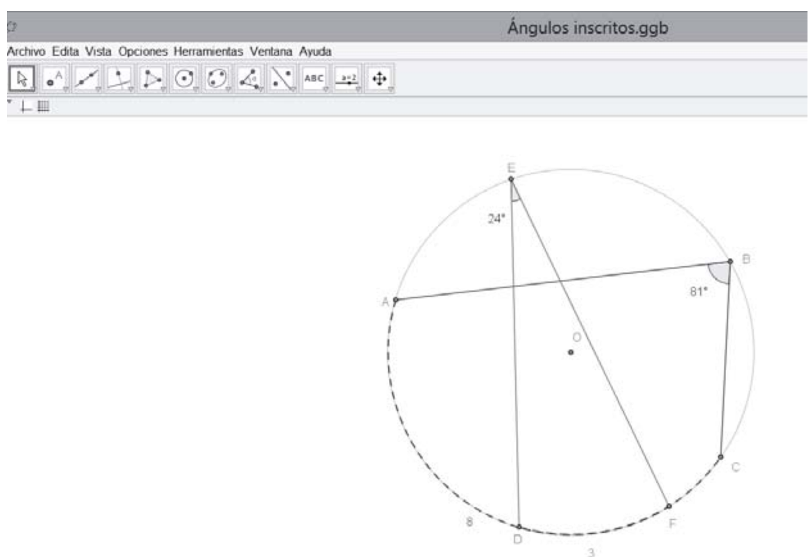


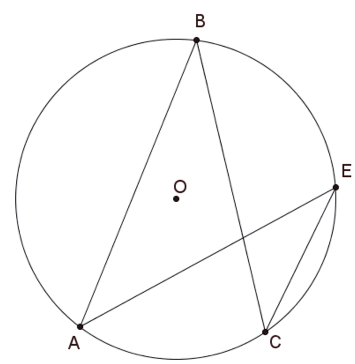
Figura 44. Imagen de la construcción inicial que observan los alumnos al abrir el documento GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb"

1) Desliza los puntos A, C, D y F de modo que los ángulos inscritos sean congruentes (igual medida). Si los ángulos inscritos son congruentes, ¿cómo son las medidas de los arcos que subtienden estos ángulos? **Explica tu respuesta**.

2) Si haces coincidir el punto A con D y el punto C con F, ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos inscritos?

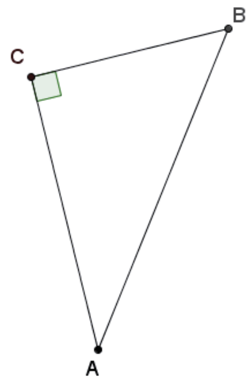
3) Si dejas los puntos A, D, C y F fijos en la posición anterior, y deslizas los puntos B y E, ¿qué ocurre con las medidas de los ángulos inscritos?

4) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.



5) Traza el diámetro que pasa por el punto A (el cual coincide con el punto D), y designa por G al punto de intersección entre el diámetro AO y la circunferencia. Luego, si los vértices de los ángulos inscritos (punto E y punto B) se encuentran en el arco **GA**, desliza los puntos F y C de tal forma que coincidan con el punto G. **¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

6) Si deslizas los puntos E y B sobre el arco **GA, ¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.
8) Dado un triángulo rectángulo ABC, construye la circunferencia que pasa por sus vértices. **Explica las pasos de la construcción**. 

Situación de acción: subactividades III.1), III.2), III.3), III.5) y III.6)

En las actividades III.1) y III.2) y III.3) el objetivo es que los alumnos puedan experimentar con la medida de los ángulos inscritos presentes en el archivo de GEOGEBRA, tomando decisiones en relación a donde ubicar los puntos extremos de las cuerdas de los ángulos inscritos de tal forma que subtiendan arcos congruentes, y por otro lado que subtiendan el mismo arco para posteriormente conjeturar en relación a sus medidas en cada uno de los casos.
En relación a la actividad III.5) deberán tomar decisiones en relación a que herramienta de GEOGEBRA utilizar para trazar el diámetro que pasa por el punto de intersección entre las cuerdas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco y la circunferencia de centro O (este punto de intersección de las cuerdas no corresponde a los vértices de los ángulos). Para luego a través de la herramienta *elige y nueve* de GEOGEBRA, deslizar los otros puntos y tomar decisiones en relación a la interrogante ¿en qué parte de la circunferencia de centro O se deben ubicar los vértices de los ángulos inscritos para cumplir con las instrucciones entregadas? De tal forma de que estos ángulos inscritos subtiendan la semicircunferencia AG. En consecuencia conjeturar en relación a la medida de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.
En este sentido, el uso de la herramienta *elige y nueve* permite que la situación de acción se realice de una forma más eficiente y rápida, ya que el objetivo principal de la Actividad III consiste en:

- Formular una conjetura en relación a la medida de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, y en relación a la medida del ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- Validar el teorema del ángulo inscrito que fue institucionalizado ya que este es el conocimiento clave para la formulación de la justificación pedida en la actividad.

Situación de formulación: subactividades III.4), y III.7)

En la actividad III.4) los alumnos deben determinar que propiedades de los objetos geométricos de la representación en GEOGEBRA que han manipulado les permite justificar la relación establecida en la situación de acción, en relación a la medida de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco

Para justificar lo anterior deberán visualizar el ángulo del centro que relaciona las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, a través de la transformación de la construcción ya que este ángulo no se encuentra en el dibujo, y en consecuencia deberán utilizar el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia que fue anteriormente institucionalizado. A partir de lo cual, los alumnos estarán validando este teorema al colocarlo en acto para dar respuesta a la actividad.

En relación a la actividad III.7), los alumnos deberán recurrir al teorema del ángulo inscrito para formular una justificación de por qué los ángulos inscritos en una semicircunferencia son ángulos rectos. En consecuencia, en esta actividad también los alumnos estarán validando el teorema del ángulo inscrito.

Situación de validación: subactividad III.8)

En la actividad III.8) los alumnos deberán utilizar la conjetura establecida en relación a la medida del ángulo inscrito en una semicircunferencia ya que de esta forma podrán construir la circunferencia que contiene los vértices de un triángulo rectángulo, determinando que la hipotenusa de este triángulo corresponde al diámetro de la circunferencia y que su punto medio es el centro de ésta. En consecuencia, los alumnos estarán validando el corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia al colocarlo en acto para dar respuesta a la actividad.

Respuesta experta Actividad III

1) Desliza los puntos A, C, D y F de modo que los ángulos inscritos sean congruentes (igual medida). Si los ángulos inscritos son congruentes, ¿cómo son las medidas de los arcos que subtienden estos ángulos? **Explica tu respuesta**.

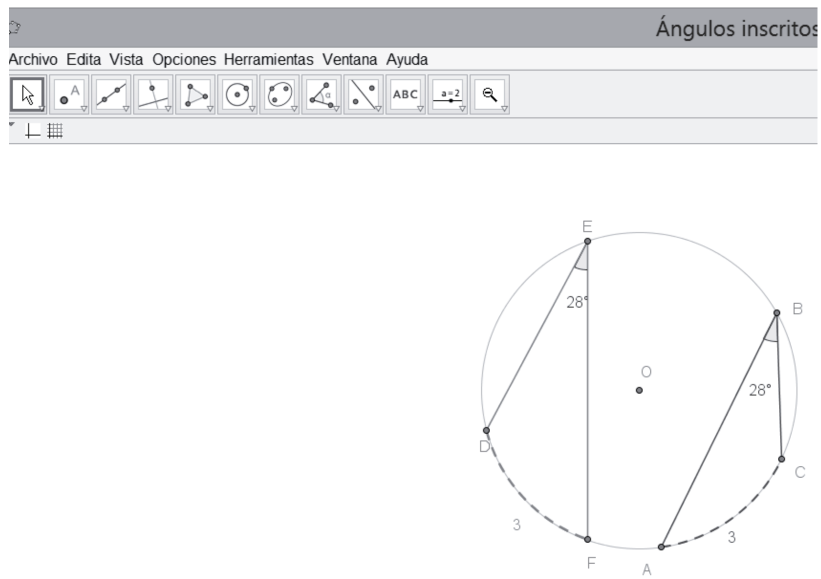


Figura 45. Imagen que se obtiene al manipular el documento de GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb", según las instrucciones dadas en la actividad III.1) por la autora

Respuesta actividad III.1)

A partir de la manipulación anterior, es posible determinar que las medidas de los ángulos inscritos que subtienden arcos congruentes son iguales, ya que los ángulos del centro que subtienden los mismos arcos que los ángulos inscritos, subtienden arcos congruentes.

2) Si haces coincidir el punto A con D y el punto C con F, ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos inscritos?

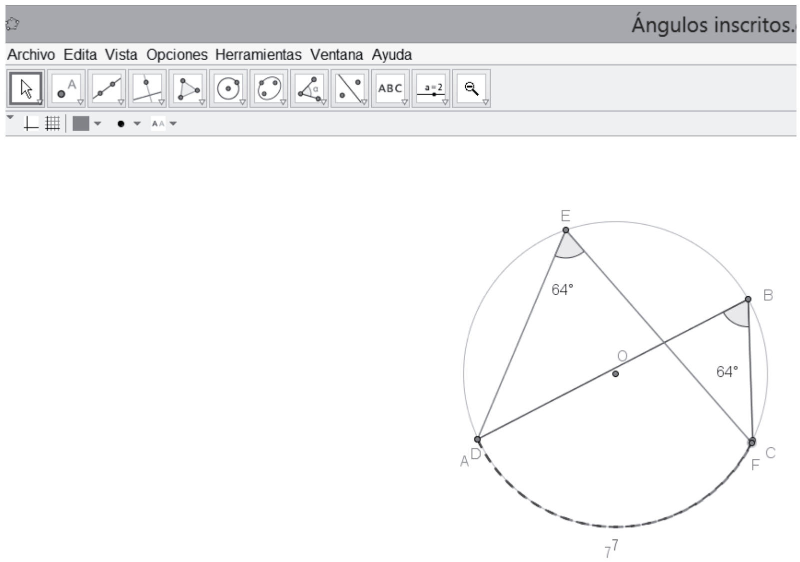


Figura 46. Imagen que se obtiene al manipular el documento de GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb", según las instrucciones dadas en la actividad III.2) por la autora

Respuesta actividad III.2)

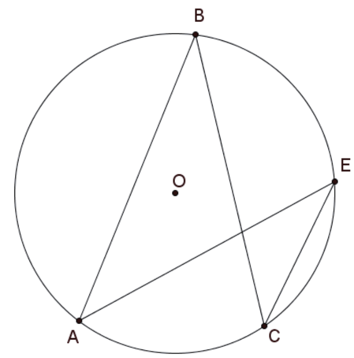
La medida de los ángulos inscritos es congruente.

3) Si dejas los puntos A, D, C y F fijos en la posición anterior, y deslizas los puntos B y E, ¿qué ocurre con las medidas de los ángulos inscritos?

Repuesta actividad III.3)

Los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco siguen midiendo lo mismo.

4) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.



Respuesta actividad III.4)

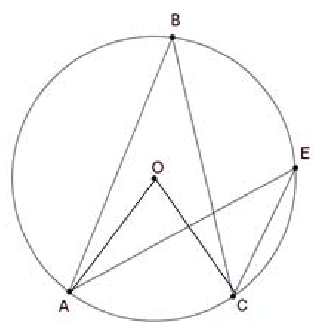


Figura 47. Modificación Figura actividad III.4)

Si se traza el radio OA y el radio OC, se forma el ángulo del centro AOC, además si $m(\measuredangle AOC) = \alpha$ entonces por teorema del ángulo inscrito se tiene que $m(\measuredangle ABC) = m(\measuredangle AEC) = \frac{1}{2}m(\measuredangle AOC) = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ ya que el $\measuredangle ABC$ y el $\measuredangle AEC$ son ángulos inscritos que subtienden el arco AC, y el $\measuredangle AOC$ es ángulo del centro que también subtiende el arco AC.

5) Traza el diámetro que pasa por el punto A (el cual coincide con el punto D), y designa por G al punto de intersección entre el diámetro AO y la circunferencia. Luego, si los vértices de los ángulos inscritos (punto E y punto B) se encuentran en el arco **GA**, desliza los puntos F y C de tal forma que coincidan con el punto G. **¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

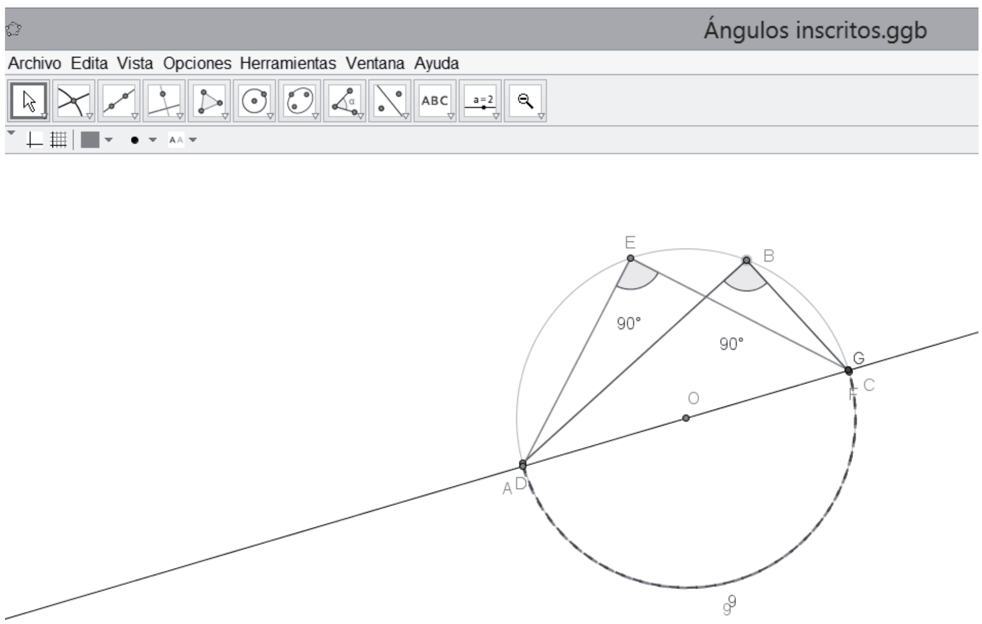


Figura 48. Imagen que se obtiene al manipular el documento de GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb", según las instrucciones dadas en la actividad III.5) por la autora

Respuesta actividad III.5)

Los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG miden 90°

6) Si deslizas los puntos E y B sobre el arco **GA, ¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

Repuesta actividad III.6)

Siguen midiendo 90°

7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.

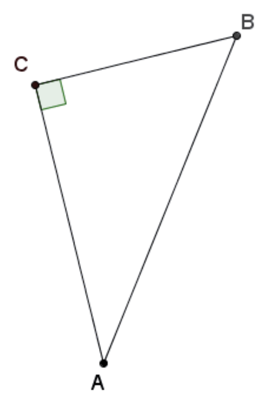
Respuesta actividad III.7)

El ángulo del centro AOG mide 180° y subtiende el arco AG, el mismo arco que subtienden el ángulo inscritos AEG y el ángulo inscrito ABG, y por teorema del ángulo inscrito se tiene:

$m(\measuredangle AEG) = m(\measuredangle ABG) = \frac{1}{2}m(\measuredangle AOG) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$

Por lo tanto los ángulos inscritos en una semicircunferencia, son ángulos rectos.

8) Dado un triángulo rectángulo ABC rectángulo en C, construye la circunferencia que pasa por sus vértices. **Explica las pasos de la construcción**.



Respuesta actividad III.8)

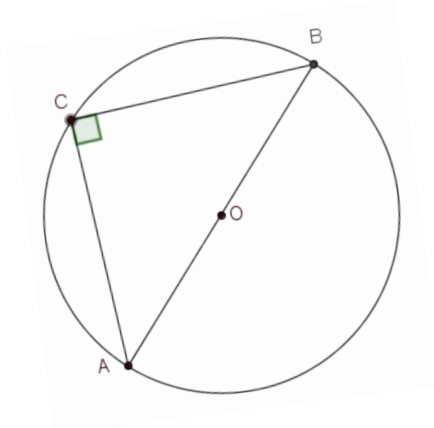


Figura 49. Elaboración de la autora desde GEOGEBRA

Al ser el triángulo ABC un triángulo rectángulo en C, se tiene que el ángulo ACB debe ser un ángulo inscrito en una semicircunferencia (por corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia) cuyo diámetro es la hipotenusa AB del triángulo rectángulo ABC. A partir de lo cual el centro de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC corresponde al centro del segmento AB, el cual lo designaremos por O y la longitud de su radio corresponde a la longitud del segmento AO. Finalmente conociendo el centro de la circunferencia y la longitud de su radio, es posible construirla.

Además para determinar el punto medio del segmento AB se pueden utilizar las siguientes técnicas:

- A través del compás siguiendo las siguientes instrucciones:
  1. Con el compás se toma una distancia r de modo que ésta sea mayor que la mitad del segmento AB.
  2. Luego trazar las circunferencias de centro A y radio r y la circunferencia de centro B y radio r.
  3. Ambas circunferencias se cortan en dos puntos, luego trazar el segmento que une estos puntos.
  4. Finalmente, el punto medio del segmento AB será el punto de intersección entre el segmento trazado y el segmento AB.

- A través de una regla, midiendo la longitud del segmento AB y luego calcular aproximadamente la distancia a la cual debe estar desde el punto A, que es la misma a la cual debe estar desde el punto B.

Conocimientos en juego

- Teorema del ángulo inscrito.
- Teorema: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, los arcos congruentes son subtendidos por ángulos centrales congruentes.
- Corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- Corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Conocimientos previos

- Conocimiento y manejo básico de las herramientas del software de geometría dinámica GEOGEBRA.
- Construcción de circunferencias con compás dada la medida de su radio.
- Construcción del punto medio de un segmento.
- Elementos de la circunferencia como arcos, radios, diámetro, ángulos del centro y ángulos inscritos. Para lo cual es necesario conocer sus características.
- Teorema del ángulo inscrito.

Posibles dificultades y errores

Posibles dificultades

- Dificultades en seguir las instrucciones de la actividad III.5) para deslizar los ángulos inscritos en la circunferencia de tal forma que subtiendan una semicircunferencia.
- No intervenir la figura de la actividad III.4) para modificar la figura original y construir el ángulo del centro que subtiende el mismo arco que los ángulos inscritos, para de esta forma relacionar la medida de estos ángulos a través del teorema del ángulo inscrito.

Intervención del docente:
El docente deberá preguntarles a los alumnos ¿qué tipo de ángulo son los que están presentes en la construcción? Y posteriormente les preguntará ¿con qué propiedades vistas o utilizadas es posible relacionar las medidas de estos ángulos inscritos?

- No relacionar la medida de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia con la medida del ángulo central a través del teorema del ángulo inscrito, para realizar la formulación.

Intervención del docente:
El docente deberá guiar a los alumnos en la búsqueda de los argumentos de la formulación con la siguiente pregunta, ¿cómo es posible relacionar el trabajo realizado en las actividades anteriores con los ángulos inscritos en la semicircunferencia?

- Dificultades en determinar cómo construir la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo rectángulo de la actividad III.8), es decir, no determinar cuál punto debe ser el centro de esta circunferencia.

Intervención del docente:
El docente deberá guiar a los alumnos en la búsqueda de los argumentos de la formulación con la siguiente pregunta, ¿cómo es posible relacionar el trabajo realizado en las actividades anteriores con la construcción de la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo rectángulo?

Posibles errores

- No conocer las herramientas de GEOGEBRA que les permite construir el arco de circunferencia

Intervención del docente:
El docente les deberá preguntar a los alumnos lo siguientes ¿qué necesitan construir? Y en relación a su respuesta les deberá mostrar y explicar cómo funciona la herramienta que deberán utilizar.

- Determinar que el centro de la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo rectángulo, está ubicado en uno de sus vértices, y por lo tanto no construir de forma correcta la circunferencia.

- Errores al estimar el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo para determinar el centro de la circunferencia que contiene a los vértices de éste, y por lo tanto no construir de forma correcta la circunferencia.

Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad

- Coralario del ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- Corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.
- El triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Análisis a priori Actividad IV

Descripción de la actividad

La actividad IV consta de una secuencia de 3 subactividades, las cuales se detallan a continuación.

Actividad IV

Instrucciones

- Abre el documento de GEOGEBRA titulado “Visualización de un escenario.ggb” ubicado en el escritorio.
- Explora la animación según las instrucciones entregadas, y responde a las preguntas en el siguiente espacio designado:

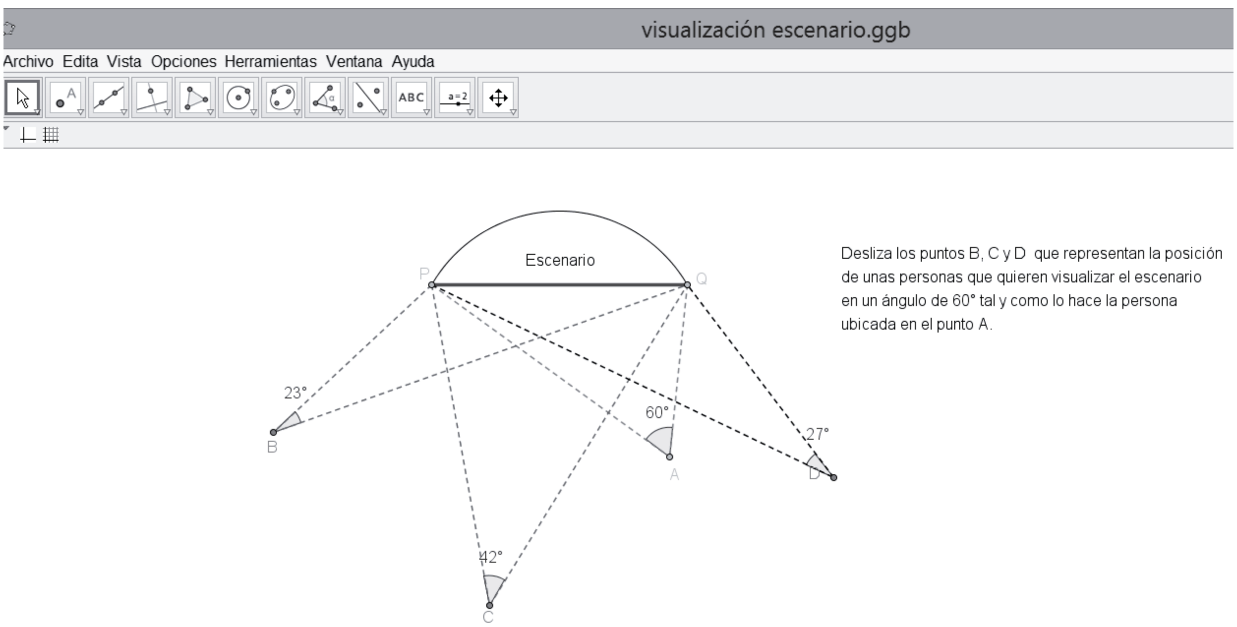


Figura 50. Imagen de la construcción inicial que observan los alumnos al abrir el documento de GEOGEBRA “visualización de un escenario.ggb”

1) Compara con tus compañeros las posiciones que permiten a las personas A, B, C y D, visualizar un escenario de longitud PQ en un ángulo de 60°
2) ¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?
3) ¿Cómo se puede construir la figura que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°? Además, **realiza la construcción en el archivo y guárdalo en el escritorio con tu nombre y apellido**.

Situación de acción: subactividades IV.1) y IV.2)

En estas actividades a través de la función selecciona y arrastre de GEOGEBRA, los alumnos podrán decidir si las posiciones de las personas que quieren ver el escenario en un ángulo de 90° son únicas o no, al comparar sus producciones con las de sus compañeros de grupo, tomando en consideración la decisión tomada al seleccionar y arrastrar el punto A (que siempre está en un ángulo de 60° con respecto al escenario) entre los puntos extremos del escenario. En consecuencia a través de la experimentación, los alumnos podrán determinar cuál es la figura que contiene a los puntos A, B, C y D que representan las posiciones de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°.
A través de la función arrastre la situación de acción se realizará de una forma más eficiente y rápida, ya que el objetivo principal de la actividad IV es que el alumno pueda validar el teorema institucionalizado es decir colocarlo en acto para dar respuesta al problema.

Situación de formulación: subactividad IV.3)

Los alumnos deberán recurrir a los conocimientos en relación a cuales son los elementos necesarios para construir una circunferencia (Centro y radio, centro y uno de sus punto) y utilizar el teorema del ángulo inscrito y el corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia para poder establecer ideas o hipótesis en relación a ¿cómo determinar los elementos claves para construir el arco de circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D que representan las posiciones de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°. De esta forma entre los alumnos se producirá un intercambio de hipótesis codificadas en lenguaje matemático, las cuales deben ser plasmadas en la descripción de la construcción y ejecutadas en el archivo de GEOGEBRA. A partir de lo anterior, los alumnos validarán el teorema institucionalizado del ángulo inscrito, ya que lo colocaran en acto para dar respuesta al problema.

Respuesta experta Actividad IV

1) Compara con tus compañeros las posiciones que permiten a las personas A, B, C y D, visualizar un escenario de longitud PQ en un ángulo de 60°

Respuesta actividad IV.1)
Las posiciones que permiten a las personas A, B, C y D, visualizar un escenario de longitud PQ en un ángulo de 60° son distintas a las de mis compañeros, es por esto que no son únicas.

2) ¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?

Respuesta actividad IV.2)

Las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60° forman un arco de circunferencia.

3) ¿Cómo se puede construir la figura que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°? Además, **realiza la construcción en el archivo y guárdalo en el escritorio con tu nombre y apellido**.

Respuesta actividad IV.3)

El arco que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60° se construye siguiendo las siguientes consideraciones:

1) Si el ángulo en el que las personas visualizan el escenario mide 60° (ángulos inscritos de una circunferencia) entonces el ángulo del centro que subtiende el mismo arco QP es de 120° (por teorema del ángulo inscrito).
2) Además, el triángulo que se forma considerando el centro del arco punto O y los puntos P y Q es isósceles (formado por los radio PO y QO) tiene ángulos basales sobre el segmento PQ de 30° cada uno ya que su ángulo en O mide 120° (ángulo del centro).
3) Así al construir los ángulos basales del triángulo isósceles de 30°, se determinará el centro O del arco en el punto de intersección de los lados de los ángulos basales, es decir, segmentos PQ' y QP'.
4) Luego se traza el arco con centro en O y radio OP.

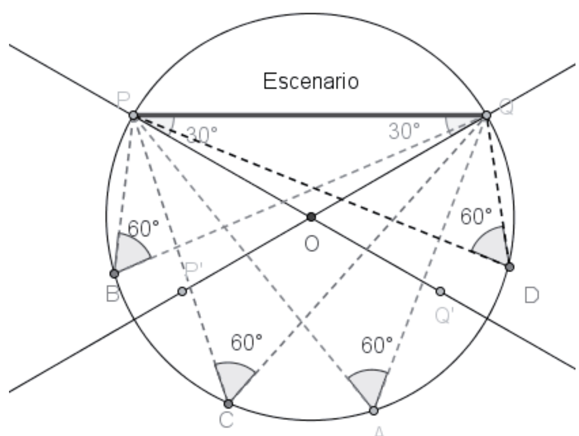


Figura 51. Construcción del arco de circunferencia desde GEOGEBRA realizado por autora según indicaciones de la respuesta experta

Otra respuesta a la actividad IV.3)

El arco que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60° se construye siguiendo las siguientes consideraciones:

1) Se construye un ángulo de 90° (ángulo PQP') sobre el segmento PQ con vértice en Q (en sentido horario).
2) Luego se hace traslada el punto A hasta el lado QP', el cual es uno de los lados del ángulo de 90° que se construyó. En consecuencia, se forma el triángulo rectángulo PQA rectángulo en Q cuyos vértices corresponden a los puntos por donde debe pasar el arco de circunferencia que se debe construir (por teorema del ángulo inscrito en una semicircunferencia), y cuyo centro se encuentra en el punto medio del segmento PA que es la hipotenusa del triángulo rectángulo PQA. Además, en el triángulo rectángulo PQA, el ángulo interior en el vértice P mide 30°, en el vértice Q mide 60° y en el vértice A mide 90°.
3) Como el punto A no es un punto fijo (es posible desplazarlo mediante la herramienta *elige y mueve*) es necesario construir el triángulo rectángulo, en donde el vértice del ángulo recto esté en el punto Q. De lo contrario, la construcción que se realice sobre el triángulo PQA perderá sus propiedades al deslizar el punto A. Es así, que se debe construir en primer lugar el ángulo en el vértice P de 30°, luego se determina el punto G, el cual es el punto de intersección entre el lado QP' del ángulo de 90° (ángulo inscrito) y el lado PQ' que es uno de los lados del ángulo de 30° en el punto P, construyendo así el triángulo rectángulo PQG rectángulo en Q.
4) Como el ángulo PQG es ángulo inscrito de circunferencia cuya medida es de 90°, se tiene que este ángulo corresponde a un ángulo inscrito en una semicircunferencia cuya hipotenusa PG corresponde al diámetro de ésta. Es por esto que se determina el punto O, el cual es el punto medio del segmento PG, y también corresponde al centro del arco.
5) Luego se traza el arco con centro en O y radio OP.

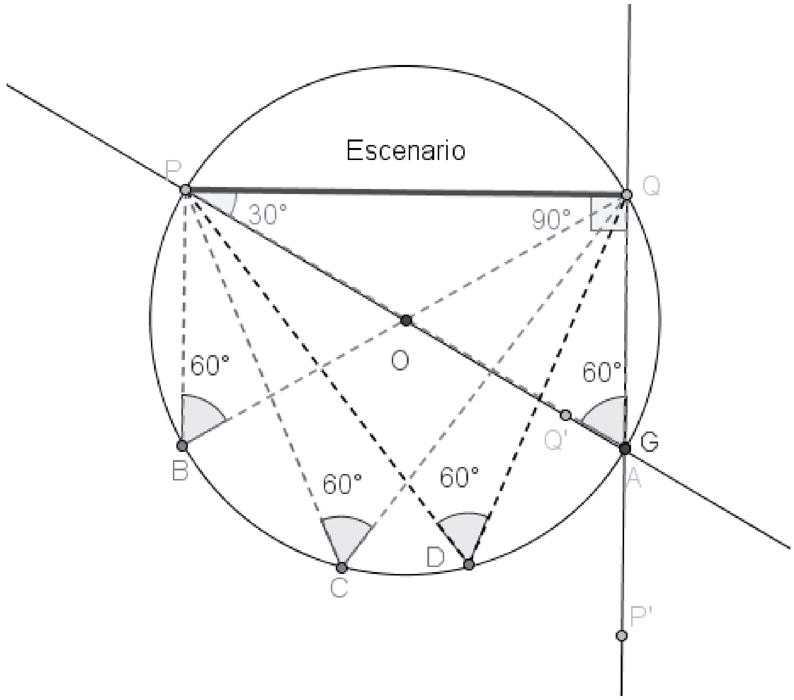


Figura 52. Construcción del arco de circunferencia desde GEOGEBRA realizado por autora según indicaciones de la respuesta experta

Otra respuesta a la actividad IV.3)

El arco que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60° se construye siguiendo las siguientes instrucciones:

1) Se construye un ángulo de 60° sobre el segmento PQ (ángulo QPR) en sentido antihorario.
2) Se traza la perpendicular por P a PR (que formará un ángulo de 30° con PQ).
3) Se traza la mediatriz o simetral de PQ (La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio) que cortará en O a la recta PQ.
4) Luego O corresponde al centro del arco.
5) Luego se traza el arco con centro en O y radio OP.

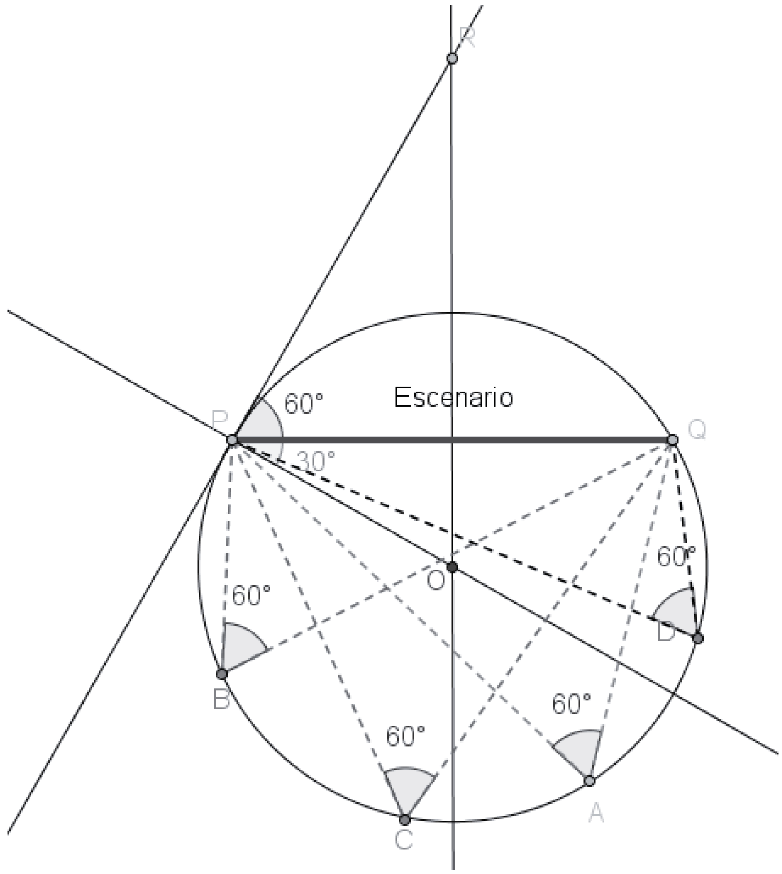


Figura 53. Construcción del arco de circunferencia desde GEOGEBRA realizado por autora considerando las instrucciones de la respuesta experta presentada

Conocimientos en juego

- Teorema del ángulo inscrito.
- Coralario del ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- Corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Conocimientos previos

- Conocimiento y manejo de las herramientas del software de geometría dinámica GEOGEBRA.
- Concepto de circunferencia, y los elementos necesarios para construirla (centro y radio, centro y uno de sus punto).
- Elementos de la circunferencia como arcos, radios, diámetro, ángulos del centro y ángulos inscritos. Para lo cual es necesario conocer sus características.
- Teorema del ángulo inscrito.
- Coralario del ángulo inscrito en una semicircunferencia.
- Corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.
- Propiedades de un triángulo isósceles en relación a la medida de sus lados y medida de sus ángulos interiores.
- Teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.
- Mediatriz.
- Recta perpendicular a otra.
- Punto medio de un segmento.

Posibles dificultades y errores

Posibles dificultades:

- No conocer las herramientas de GEOGEBRA que les permite construir el arco de circunferencia

> **Intervención del docente:**
> El docente les deberá preguntar a los alumnos lo siguientes ¿qué necesitan construir? Y en relación a su respuesta les deberá mostrar y explicar cómo funcionan las herramientas que deberán utilizar.

- No poder determinar los datos que se necesitan para formar el arco de circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D (los cuales deben estar en un ángulo de 60° con respecto al escenario)

Intervención del docente:
El docente les deberá preguntar a los alumnos cual fue su respuesta a la pregunta ¿qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?
Si la respuesta de los alumnos es que estos puntos forman un arco de circunferencia. El docente deberá guiar a los alumnos sus construccines preguntando lo siguiente, ¿Qué elementos necesitan conocer para construir este arco? Si la respuesta es negativa les deberá preguntar ¿Qué datos necesitan conocer para construir una circunferencia? y por lo tanto ¿estos datos serán los mismos que necesitan para construir el arco?

- A pesar de saber que se necesita determinar el centro del arco para poder construirlo, no determinar una estrategia para poder ubicarlo en el plano. En consecuencia no construir el arco.

Intervención del docente:
Si los alumnos no saben qué estrategia utilizar para determinar la posición del centro del arco en el plano, el docente los debe guiar preguntándoles lo siguiente, ¿Dónde estiman que debe estar el centro del arco?, ¿Al interior del arco que contiene los puntos A, B, C y D? o ¿en el exterior del arco que contiene a los puntos A, B, C y D?
Para estimar la posición del centro del arco es docente les pude solicitar a los alumnos que deslicen alguno de los puntos B, C o D y que posteriormente relacionen los datos presentes en la construcción.

- Dificultades al redactar los pasos que siguieron en la construcción.

Posibles errores:

- Determinar que los puntos que determinan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60° son únicos y por lo tanto corresponden a los vértices de un polígono que contiene a esos puntos y los puntos extremos del escenario P y Q, y en consecuencia construir un polígono.

Intervención del docente:
Si se presenta el error anterior en los alumnos, el docente les deberá preguntar lo siguiente: ¿la ubicación de los puntos A, B, C y D es única? Para verificar su respuesta el docente les debe pedir a los alumnos que deslicen el punto A (el cual está en un ángulo fijo de 60° en relación al escenario) para que de esta forma observen la figura que se forma con las distintas posiciones de este punto.

- Al construir los ángulos con la herramienta de GEOGEBRA ángulo dada su amplitud, no reconocer si los ángulos que se quieren construir son en sentido horario o antihorario.
- Al momento de construir el ángulo recto en Q, para formar el triángulo rectángulo no hacer coincidir uno de sus vértices con el punto A, por lo tanto no construir el triángulo rectángulo que se requiere y en consecuencia ubicar de forma incorrecta el centro del arco, lo que implicará que se construirá un arco que no contiene a los puntos A, B, C y D.

Conocimiento o propiedad nueva que podría surgir a partir de la actividad

Definición y construcción de un arco capaz.

Capítulo VII: Análisis a posteriori de la secuencia de situaciones didácticas

El análisis a posteriori de las actividades se realiza considerando los objetivos planteados, las respuestas expertas, los posibles errores y dificultades que se describieron en cada una de las actividades en el análisis a priori. Además, se analizará las interacciones que se establecieron entre los alumnos con el medio a través de la secuencia de actividades didácticas (situación de acción, situación de formulación, situación de validación) confrontándolas con las diseñadas en el análisis a priori.
Finalmente se describirán los componentes esenciales de las situaciones didácticas, devolución e institucionalización que se desarrollaron durante la aplicación de la secuencia de actividades didácticas.

Los 35 alumnos participantes en la aplicación de la secuencia de actividades didácticas, trabajaron en grupos de 2 o 3 integrantes, formándose así 15 grupos en total.
Para designar a los alumnos participantes se utilizará la siguiente nomenclatura.
AiGk con $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq k \leq 15$; Ai: identifica al integrante del grupo; Gk: identifica el grupo al cual pertenece el alumno.
Ejemplo: A1G2: Alumno 1 del grupo 2.

Análisis Actividad I

Actividad I.1) y I.3)

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 3cm. En ésta realiza las siguientes construcciones: a) traza el diámetro AB. b) determina un punto C en el arco **AB**, de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 40°. c) traza la cuerda BC.
3) En la circunferencia construida determina un punto D en el arco **BA**, de tal forma que el ángulo inscrito DBC mida 50°.

No todos los alumnos logran realizar las construcciones pedidas en estas actividades. Lo cual se puede evidenciar a través de los siguientes resultados.
En relación a la actividad I.1), 33 alumnos logran realizar de forma adecuada la construcción de esta actividad, sin embargo 2 alumnos no son capaces de determinar el punto C el en el arco AB, de tal forma que el ángulo AOC mida 40°,

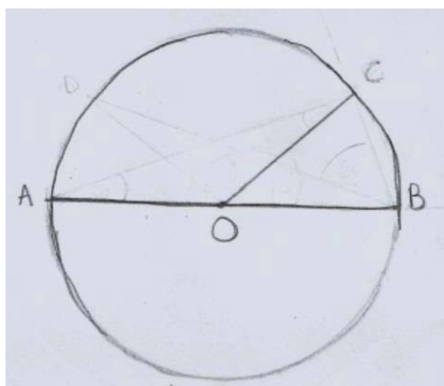


Figura 54. Construcción errónea de la actividad I.1) realizada por A1G11

En la Figura 54, se puede observar que el alumno A1G11 realiza la construcción del ángulo BOC de 40° y no del ángulo AOC de 40°, lo anterior es debido a que no identifica que el ángulo AOC se debe construir sobre el radio AO ya que este es uno de sus lados.

En cuanto a la actividad I.2), solo 25 alumnos de los 35 realizaron la construcción de forma correcta según las indicaciones entregas en ésta. Los 10 alumnos que no pudieron realizar la construcción de forma correcta, no ubicaron adecuadamente el punto D en el arco BA de forma tal que el ángulo DBC mida 50°. Algunos de los errores cometidos por estos alumnos son:

Los alumnos A1G10 y A2G10 determinaron el punto D en el arco AB construyendo el ángulo BOD de 50°, de esta forma no determinaron que el ángulo DBC que se les pedía construir tiene su vértice en el punto B y no en el centro de la circunferencia. Lo anterior se evidencia en la siguiente respuesta.

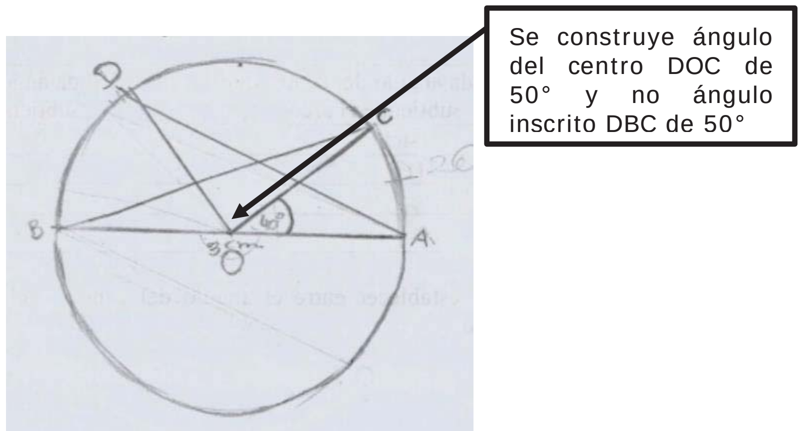


Figura 55. Construcción errónea de la actividad I.2) realizada por A1G10

En la figura 55, se puede observar que el alumno A1G10 realiza adecuadamente la construcción de la actividad I.1), construyendo el ángulo AOC de 40° en arco AB, sin embargo construye de forma incorrecta la actividad I.2) cometiendo los siguientes errores: ubica el punto D en el arco AB y no en el AB: construye un ángulo del centro DOC de 50° y no el ángulo inscrito DBC de 50°.

2 alumnos determinaron el punto D en el arco BA pero de forma que el ángulo DBC mida menos de 30°, y no 50° como se pedía en las instrucciones.

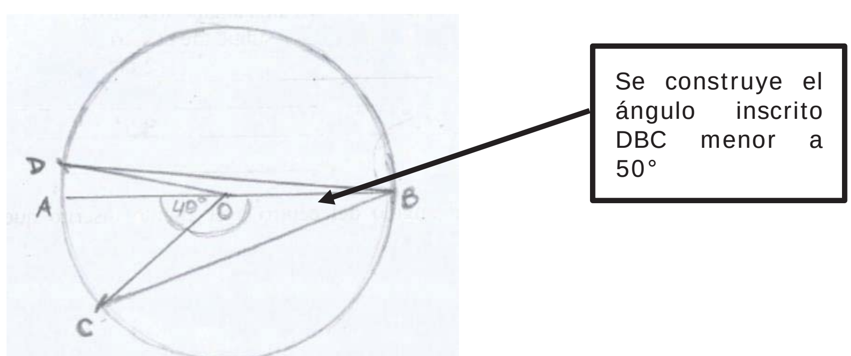


Figura 56. Construcción errónea de la actividad I.2) realizada por A1G6

A partir de las evidencias anteriores y de la observación de clase[8], se observa que los alumnos tuvieron dificultades al realizar las construcciones de los ángulos pedidos, no identificaron en algunos casos donde ubicar el vértice de estos y en otros casos construyeron los ángulos con medidas distintas a las pedidas.
Además, se observó que el docente guió algunos grupos en cuanto a la utilización del transportador según las indicaciones realizadas en el análisis a priori.

Es importante mencionar que algunos grupos como G4, G7, G9 y G14 lograron realizar la construcción de forma adecuada y autónoma, es decir, sin la intervención del docente. Se observó también, que entre los integrantes de estos grupos se apoyaban en la toma de sesiones para utilizar el transportador. Se presenta a continuación una adecuada construcción de la actividad I.1) y I.3)

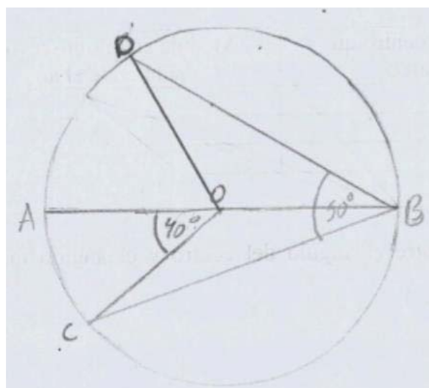


Figura 57. Construcción correcta de la actividades I.1) y I.3) realizadas por A1G1

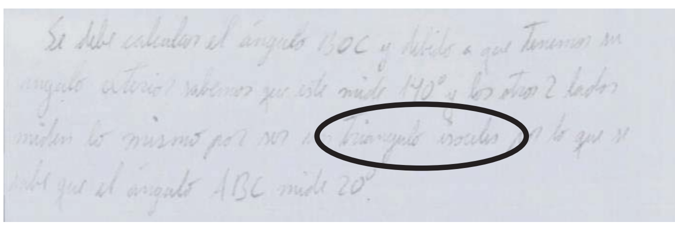
[8] En el anexo 2 se encuentran las notas de campo de las clases realizadas.

Actividad I.2) y I.4)

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ABC? Explica tu respuesta**.
4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro **DOC? Explica tu respuesta**.

Con respecto a la actividad I.2), 23 alumnos de los 35 logran determinar que el ángulo ABC mide 20°, pero alguno de ellos utilizó el transportador para dar respuesta a la situación planteada, además, no presentan registro de formulación de esta actividad y solo responden que el ángulo mide 20°.

Solo 20 alumnos pertenecientes a los grupos G1, G4, G7, G9, G14, G15 entre otros, visualizaron el triángulo isósceles COB y determinaron la medida del ángulo inscrito ABC relacionando las medidas del ángulo del centro AOC (ángulo exterior del triángulo COB), con las medidas de los ángulos interiores del triángulo, tal y como se muestra en las siguientes respuestas.

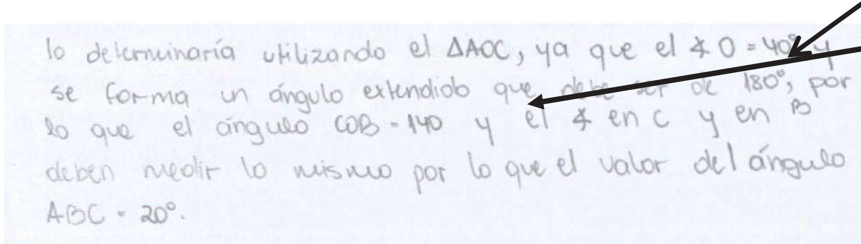

Se debe calcular el ángulo BOC y debido a que tenemos un ángulo exterior sabemos que este mide 140° y los otros 2 lados miden lo mismo por ser un triángulo isosceles por lo que se sabe que el ángulo ABC mide 20°.

Reproducción de la formulación del alumno A1G14.

"Se debe calcular el ángulo BOC y debido a que tenemos un ángulo exterior sabemos que este mide 140° y los otros 2 lados miden lo mismo por ser un triángulo isósceles por lo que se sabe que el ángulo ABC mide 20°"

Figura 58. Formulación correcta actividad I.2) del alumno A1G14

Se debe considerar que en la formulación de la Figura 58, existen algunas imprecisiones con respecto a que no se nombra cual es el ángulo exterior y exterior a qué figura.


lo determinaría utilizando el ΔAOC, ya que el ∢O = 40° y se forma un ángulo extendido que debe ser de 180°, por lo que el ángulo COB = 140 y el ∢ en C y en B deben medir lo mismo por lo que el valor del ángulo ABC = 20°.

Se identifica triángulo isósceles y se identifica ángulo exterior a éste, aunque no se utiliza una adecuada nomenclatura

Figura 59. Formulación correcta actividad I.2) del alumno A2G7

Además fue posible observar que entre los grupos que lograron responder a la actividad 2) de formulación, fue posible observar que se originó en ellos la búsqueda de estrategias y la comunicación de estas para determinar la medida del ángulo inscrito ABC, como se evidencia en el siguiente registro de formulación del grupo G14.

> "*A2G14: ¿cómo determinaste la medida del ángulo ABC?*
> *A1G14: mira el ángulo BOC es exterior del triángulo OCB que se forma con los radio OC y OB que es isósceles entonces sabemos que el ángulo COB mide 140° porque el ángulo exterior de este mide 40°, y como los otros dos ángulos del triángulo miden lo mismo el ángulo ABC mide 20°.*
> *A3G14: Pero también se puede hacer así, el ángulo BOC es exterior del triángulo COB, y su medida es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él, estos, que miden lo mismo porque son ángulos interiores del triángulo isósceles, entonces cada uno mide 20°, entonces el ángulo ABC mide 20°.*
> *A1G14: si también se puede hacer de esa forma.*"

Sin embargo, no todos estos alumnos logran explicar verbalmente en lenguaje matemático su respuesta, pero si son capaces de relacionar las propiedades de los elementos de la construcción, colocando en la figura las medidas de los ángulos tal y como se muestra a continuación. Es decir, son capaces de realizar una formulación pero ocupando la figura de la construcción como apoyo.

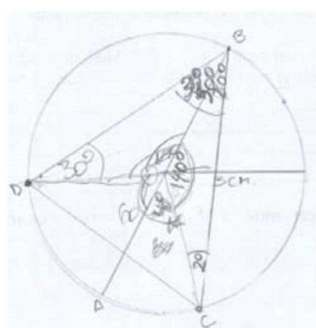
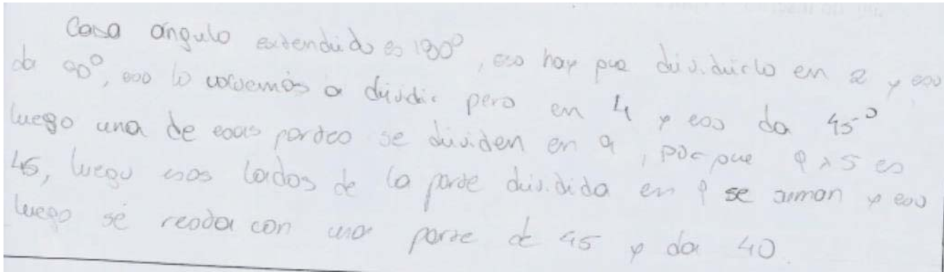


Figura 60. Formulación actividad I.2) realizada por A1G4

En relación a los 12 alumnos que no logran dar respuesta, o responden de forma incorrecta se tiene lo siguiente:
Los 2 alumnos que no lograron realizar la construcción de la actividad I.1) no dieron respuesta a esta actividad, y 10 alumnos determinan de forma errónea que la medida del ángulo ABC es de 40° y no de 20° como corresponde, justificando su respuesta como se muestra a continuación:



Cada ángulo extendido es 180°, eso hay que dividirlo en 2 y eso da 90°, eso lo volvemos a dividir pero en 4 y eso da 45° luego una de esas partes se dividen en 9, porque 9 x 5 es 45, luego esos lados de la parte dividida en 9 se suman y eso luego se resta con una parte de 45 y da 40.

Figura 61. Formulación errónea actividad I.2) realizada por A1G2

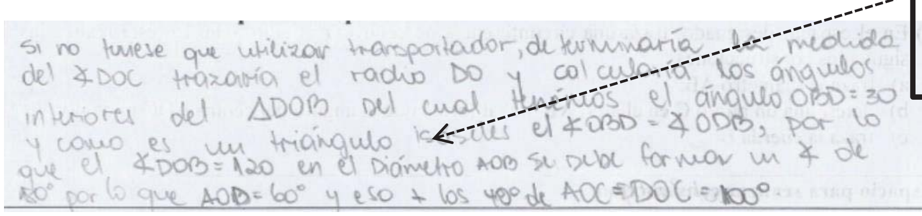
Reproducción de la formulación del alumno A1G2.

"Cada ángulo extendido es 180° eso hay que dividirlo en 2 y eso da 90°, eso lo volvemos a dividir pero en 4 y eso da 45° Luego una de sus partes se divide en 9, porque nueve por 5 da 45, luego esos lados de la parte dividida en 9 se suman y eso luego se resta con una parte de 45 y da 40"

Los alumnos de G2 que formularon de forma incorrecta, ver figura 61, utilizan argumentos no válidos para determinar una relación algebraica que les permita obtener la medida del ángulo ABC, la cual no es posible de establecer sin relacionar las medidas de los ángulos interiores del triángulo isósceles COB.

En relación a estos resultados, se puede determinar que los alumnos que no logran formular una respuesta a la pregunta ¿por qué el ángulo inscrito ABC mide 20°?, es debido a que no relacionan las propiedades de las figuras presentes en la construcción como son el triángulo isósceles COB y el ángulo exterior AOC de 40°.

Con respecto a la actividad I.4), 22 alumnos determinaron que la medida del ángulo del centro DOC es de 20°, sin embargo, algunos de estos alumnos utilizaron el transportador para dar respuesta a la situación y por lo tanto no justificaron su respuesta. Otros 19 alumnos pertenecientes a los grupos G1, G4, G7, G9, G14, G15, visualizaron el triángulo isósceles DBO y determinaron la medida del ángulo del centro DOC relacionando las medidas de los ángulos interiores del triángulo isósceles, como se muestra en la siguiente respuesta.



Si no tuviese que utilizar transportador, determinaría la medida del ∢DOC trazaría el radio DO y calcularía los ángulos interiores del ΔDOB del cual tenemos el ángulo OBD = 30 y como es un triángulo isósceles el ∢OBD = ∢ODB, por lo que el ∢DOB = 120 en el Diámetro AOB se debe formar un ∢ de 180° por lo que AOB = 60° y eso + los 40° de AOC = DOC = 100°

Figura 62. Formulación correcta actividad I.4) realizada por A2G7

Además, entre los grupos que lograron formular una respuesta a la actividad I.4), se observó en ellos que se originó la búsqueda de estrategias y la comunicación de éstas para determinar la medida del ángulo del centro DOC, como se evidencia en el siguiente registro de formulación del grupo G7.

> "*A1G7: mira sé que el triángulo DBO es isósceles pero no sé cómo calcular la medida de sus ángulos ya que no se ninguna medida.*
> *A2G7: mira el ángulo CBD mide 50° entonces si el ángulo ABC mide 20°, el ángulo OBD mide 30°, ya que es lo que falta para completar los 50°,entonces ya sabemos la medida de un ángulo del triángulo.*
> *A1G7: ah sí, entonces el ángulo BDO mide también 30° ¿cierto?*
> *A2G7: si es de igual medida que el ángulo OBD, entonces calcula la medida del ángulo DOB.*
> *A1G7: mide 180, 60, 120, entonces el ángulo el ángulo DOC mide 60 para completar los 180 del ángulo extendido"*

Algunos grupos como el G4 determinan que el ángulo del centro DOC mide 60° pero no logran formular verbalmente con lenguaje matemático su respuesta, sin embargo son capaces de relacionar las propiedades de los elementos de la construcción, colocando en la figura las medidas de los ángulos como se muestra a continuación.

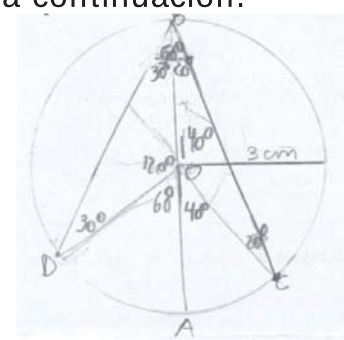


Figura 63. Formulación actividad I.4) realizada por A2G4

En total 13 alumnos de un total de 35 no lograron determinar que el ángulo DOC mide 60°, alguno de ellos porque no lograron realizar la construcción, otros porque determinaron de forma errónea que la medida de este ángulo era de 50°, justificando como se muestra en la siguiente respuesta.

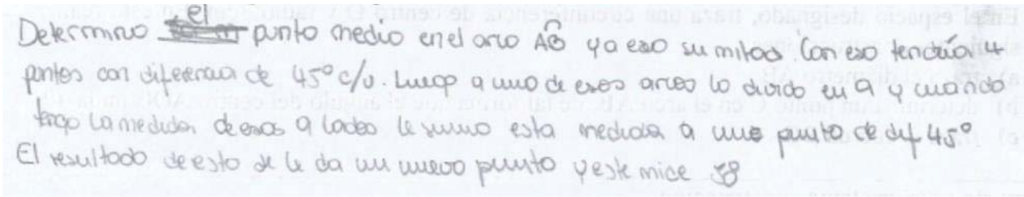

Determino ~~[illegible]~~ el punto medio en el arco AB y a eso su mitad. Con eso tendría 4 puntos con diferencia de 45° c/u. Luego a uno de esos arcos lo divido en 9 y cuando tengo la medida de esos 9 lados le sumo esta medida a un punto de dif 45°
El resultado de esto de le da un nuevo punto y este mide 50

Figura 64. Formulación incorrecta actividad I.4) realizada por A1G8

Los alumnos de G8 formularon de forma incorrecta, utilizando argumentos no válidos para determinar una relación algebraica que les permitiera determinar la medida del ángulo ABC, tal y como se muestra en la figura 64. Además, se evidencia que estos alumnos no pudieron visualizar el triángulo isósceles BOD, para relacionar las medidas de sus ángulos interiores con las medidas de los ángulos inscritos y del centro. De la misma forma los otros alumnos que no pudieron dar respuesta a la situación de formulación no lograron este proceso de visualización.

En cuanto a las actividad I.5), solo los 23 alumnos que determinaron la medida de los ángulos pedidos pudieron completar de forma correcta la tabla y conjeturar en relación a la medida de los ángulos inscritos y del centro que subtienden el mismo arco de la actividad I.6).

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AC	40°	20°
DC	100°	50°
DA	60°	30°

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

Que el angulo del centro mide el doble de lo que mide el angulo inscrito, eso solo si ambos angulos subtienden al mismo arco

Figura 65. Respuestas correctas a las actividades I.5) y I.6) realizadas por A1G14

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

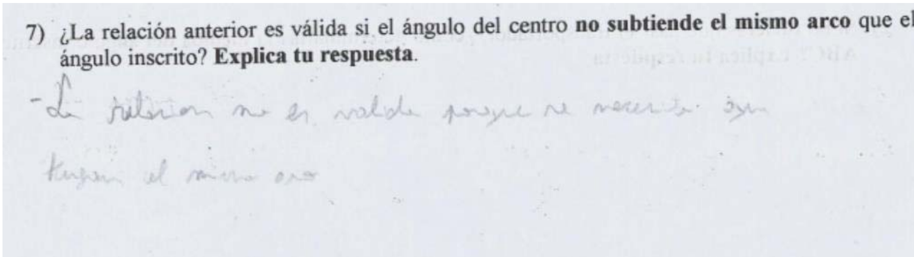
Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AC	40°	20°
DC	100°	50°
DA	60°	30°

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

En que la medida de los angulos inscritos miden la mitad que el angulo del centro

Figura 66. Respuestas correctas a las actividades I.5) y I.6) realizadas por A2G1

En relación a la actividad I.7) los 23 alumnos que realizaron la conjetura de que el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del ángulo del centro formularon que la relación solo es válida si estos ángulos subtienden el mismo arco.


7) ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro **no subtiende el mismo arco** que el ángulo inscrito? **Explica tu respuesta**.

- La relación no es valida porque se necesita que tengan el mismo arco

Reproducción de la formulación del alumno A2G1.

"La relación no es válida porque se necesita que tengan el mismo arco"

Figura 67. Formulación actividad I.7) realizadas por A2G1

Además, es importante mencionar que al finalizar la Actividad I debido al poco tiempo que quedaba para finalizar la clase se realizó la situación de validación de la actividad I.1) y I.2).
En cuanto a la actividad I.1), el alumno A1G14 explicó al resto de sus compañeros como realizó la construcción solicitada, enfatizando cómo utilizó el transportador para construir los ángulos pedidos. Además, este alumno, realizó la puesta en común en relación a cómo determinar la medida del ángulo inscrito ABC, según el siguiente registro, realizado a partir de la evidencia audiovisual.

> "*La construcción se realiza a mano alzada, es decir, sin la utilización de herramientas como regla y compás.*
> *Dos alumnos del grupo G14 van hacia la pizarra a realizar el dibujo que representa la construcción.*
> *A1G14: primero se realiza un radio de 3cm y luego con compás se construye una circunferencia de 3cm. A2 G14 realiza a mano alzada el dibujo.*
> *A1G14: se traza el diámetro sobre el radio. A2G14 ubica los puntos A y B entre las intersecciones de la circunferencia y el diámetro.*
> *A1G14: se dibuja el ángulo AOC de 40°. A2G14: dibuja es ángulo*
> *Docente: ¿cómo se tiene que realizar este ángulo?*
> *A1G14: con un transportador hicimos el ángulo desde AO formando 40° y se ubica C.*
> *Docente: ¿Dónde ubicaron el centro del transportador?*
> *A1G14: en O.*
> *Docente: ¿por qué?*
> *A1G14: Porque es el centro de la circunferencia y pedían un ángulo del centro. Luego se dibuja BC. A2G14 dibuja cuerda BC."*

Validación actividad I.2) según el siguiente registro, realizado a partir de la evidencia audiovisual.

> "*A1G14: primero se ve que se forma un triángulo en el lado de aquí, (El alumno señala los vértices de este triángulo, es decir, los puntos C, O y B), el cual posee dos ángulos lados de igual medida OC y OB*
> *Docente: ¿por qué son de igual medida?*
> *A1G14:Puesto que son radios, por lo tanto es un triángulo isósceles, luego se ve que el ángulo de 40° AOC es el ángulo exterior del triángulo por lo tanto el ángulo OCB y el OBC miden lo mismo y su suma da 40° por lo que el ángulo ABC mide 20°*"

A partir de lo anterior, y de los registros de observación de clase, es posible mencionar que el docente realiza el proceso de devolución solo en la situación de formulación haciendo responsables a los alumnos en la tarea de dar respuesta a las actividades planteadas, pero no así en la situación de validación, ya que no es capaz de responsabilizar a los alumnos en el debate de las estrategias que plasmaron en las situaciones de formulación, de hecho es el docente quien realiza los cuestionamientos de las estrategias entregadas por el alumno.

La segunda clase comenzó con la situación de la puesta en común de los resultados de la actividad I, donde un alumno A1G4 explicó como determinar la medida del ángulo ABC, utilizando como base la representación de la construcción a través de GEOGEBRA.

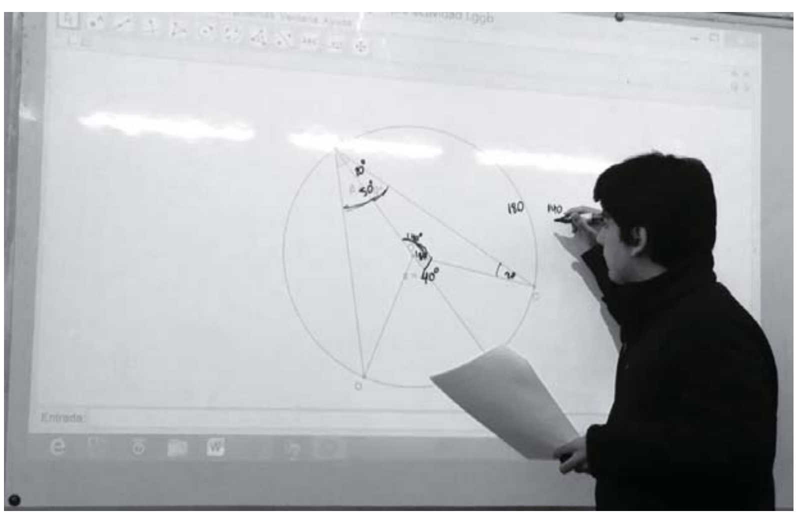


Figura 68. Explicación al pleno de la determinación del ángulo ABC ocupando la proyección de la construcción en GEOGEBRA, alumno A1G4.

Posteriormente, alumno A3G14, explica cómo es posible determinar la medida del ángulo DOC de la actividad I.4), utilizando la siguiente estrategia.

> "*A3G14: Por construcción sé que el ángulo ABD mide 30° porque el total mide 50° (señalando el ángulo CBD) y como el triángulo OBD es isósceles.*
> *Docente: ¿Por qué el triángulo es isósceles?*
> *A3G14: porque está formado por dos radios entonces, el ángulo OBD y ODB miden lo mismo 30°. Entonces por la propiedad del ángulo exterior el ángulo DOC mide 60°, la suma de los ángulos no adyacentes a él (señala ángulos OBD y ODB)*"

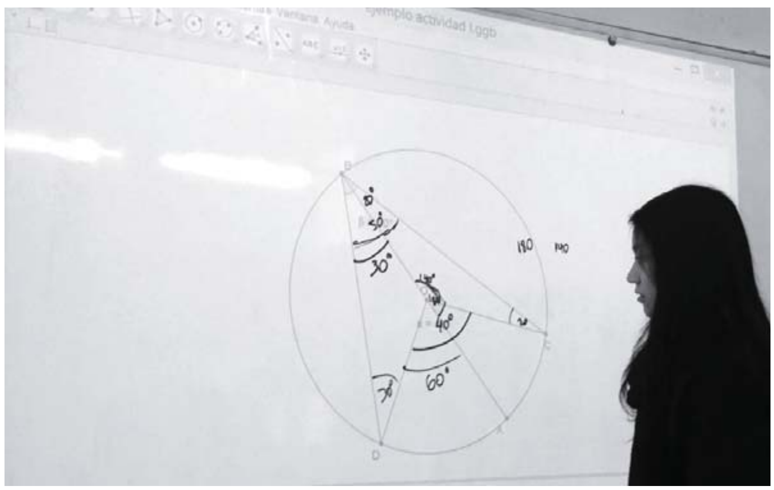


Figura 69. Explicación al pleno de la determinación del ángulo DOC ocupando la proyección de la construcción en GEOGEBRA, alumna A3G4.

Además, se observó, que luego se comentaron los resultados de la actividad I.5), I.6) y I.7) donde la mayoría de los alumnos fue capaz de completar la tabla con la medida de los ángulos y conjeturar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco, ya que si no lo subtiende no se cumple la relación. Posteriormente se dio inicio a la resolución de la Actividad II, la cual obtuvo los siguientes resultados.

Análisis Actividad II

Actividad II.1) y II.3)

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
   a) un ángulo del centro AOB de 50°
   b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 90° y el punto B esté en el arco que subtiende este ángulo.
   c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.

3) En la circunferencia construida:
   a) determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro BOD mida 100° y el punto C esté en el arco que subtiende este ángulo.
   b) traza la cuerda DB y la cuerda DC.

En relación a la Actividad II.1) 24 alumnos de 35 en total lograron realizar de forma correcta la construcción solicitada.
En relación a los alumnos que no lograron realizar la construcción, 3 alumnos solo realizaron la construcción del ángulo del centro AOB, y 8 alumnos no lograron realizar la construcción correctamente, es decir, construyeron el ángulo AOB de 50° pero no ubicaron en la circunferencia el punto C de forma correcta, ya que construyeron el ángulo AOC de 140°, construyendo este ángulo sobre el radio BO y no sobre el radio AO, tal y como se presenta a continuación en la siguiente respuesta.

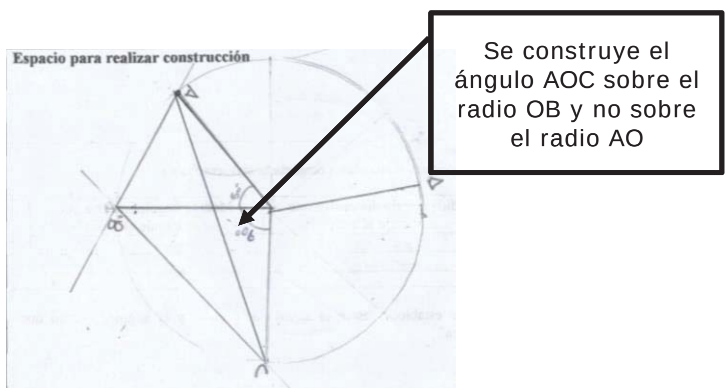


Figura 70. Construcción errónea de la actividad II.1) realizada por A1G13

Además, otro error presentado por los alumnos es que construyeron el ángulo AOC de 50°, sin que el punto B esté en el arco que subtienda este ángulo, tal y como se presenta a continuación.

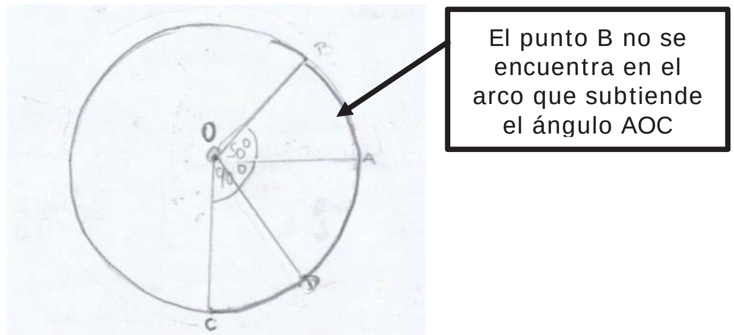


Figura 71. Construcción errónea de la actividad II.1) realizada por A2G12

Con respecto a la actividad II.3) 23 alumnos lograron realizar la construcción de esta actividad de forma correcta, tal y como se presenta en las siguientes respuestas.

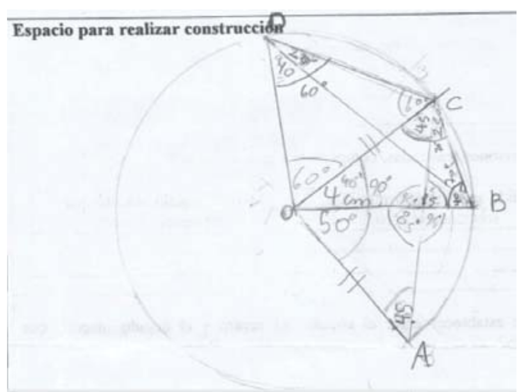


Figura 72 Construcción correcta de las actividades II.1) y II.3) realizada por A2G4

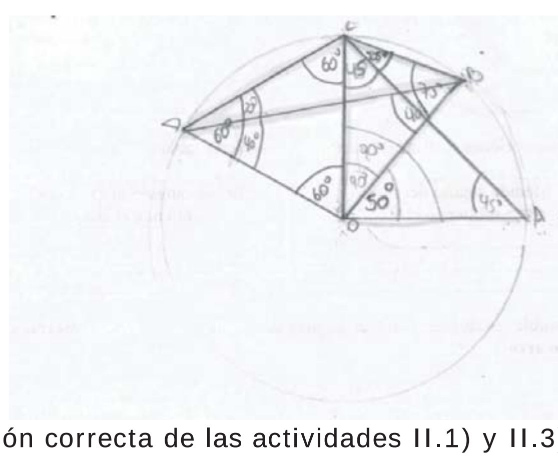


Figura 73. Construcción correcta de las actividades II.1) y II.3) realizada por A3G14

Sin embargo 7 alumnos no realizan la construcción y 5 alumnos ubicaron de forma incorrecta el punto D ya que el ángulo BOD no mide 100° como lo solicitado, tal y como se muestra en las siguientes respuestas.

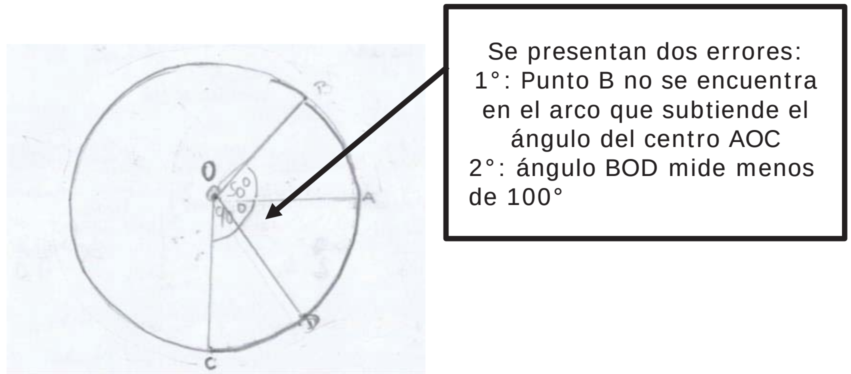


Figura 74. Construcción errónea de la actividad II.3) realizada por A2G12

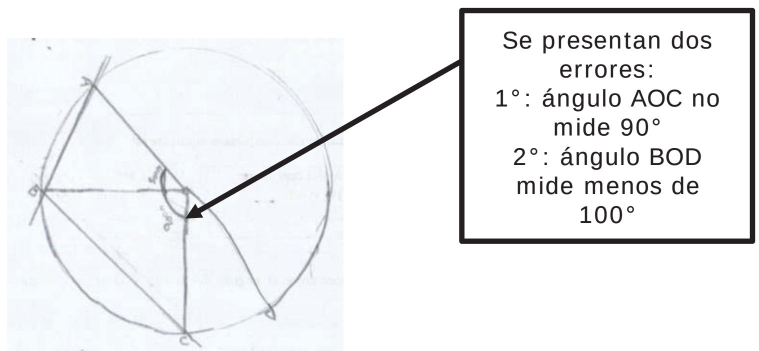


Figura 75. Construcción errónea de la actividad II.3) realizada por A2G13

En esta parte de la actividad se observó un mayor trabajo colaborativo al interior de los grupos y entre los grupos, es decir, algunos alumnos recibieron la ayuda de integrantes de otros equipos que lograron realizar la actividad. También, se observó que el docente guió algunos grupos en cuanto a la utilización del transportador según las indicaciones realizadas en el análisis a priori.

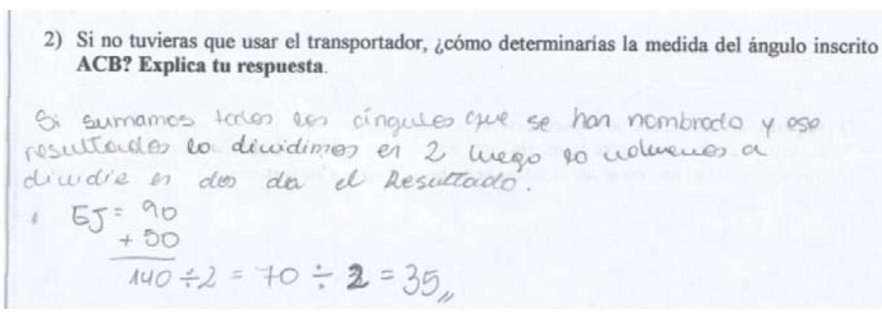
Los grupos como G4, G7, G9, G14, realizaron la construcción de forma autónoma, es decir, sin la intervención del docente, y la de un integrante de otro equipo.

Actividad II.2) y II.4)

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ACB? Explica tu respuesta**.
4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **BDC? Explica tu respuesta**.

En relación a la actividad II.2) los 12 alumnos que no lograron realizar la construcción o la hicieron de forma incorrecta no dan respuesta a la actividad.

De los 23 alumnos que lograron realizar la construcción de las actividades II.1) y II.3), tienen los siguientes resultados:
2 alumnos no dan respuesta a la actividad.
2 alumnos determina de forma incorrecta que el ángulo inscrito ACB mide 35°, formulando una estrategia algebraica que relacione las medidas de los ángulos que fueron entregadas en las instrucciones, como lo establecen los alumnos de G8 en la siguiente respuesta.


2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ACB? Explica tu respuesta**.

Si sumamos todos los ángulos que se han nombrado y ese resultado lo dividimos en 2 luego lo volvemos a dividir en dos da el Resultado.

EJ = 90 + 50 = 140 ÷ 2 = 70 ÷ 2 = 35

Figura 76. Construcción errónea de la actividad II.2) realizada por A2G8

3 alumnos determinan la medida del ángulo ACB con la ayuda del transportador, sin poder realizar una formulación de por qué ese ángulo mide 25°.
16 alumnos dan respuesta a la actividad relacionado la medida de los ángulos interiores de los triángulos isósceles presentes en la construcción, plasmando en ésta las medidas de los ángulos que van calculando a través de las relaciones de los elementos, lo cual queda reflejada en las distintas formulaciones que se presentan a continuación.

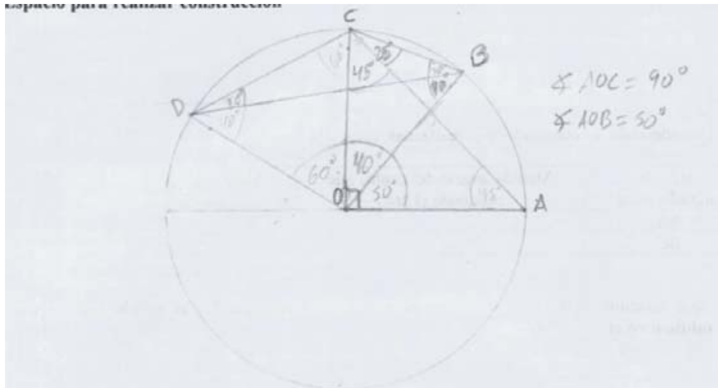
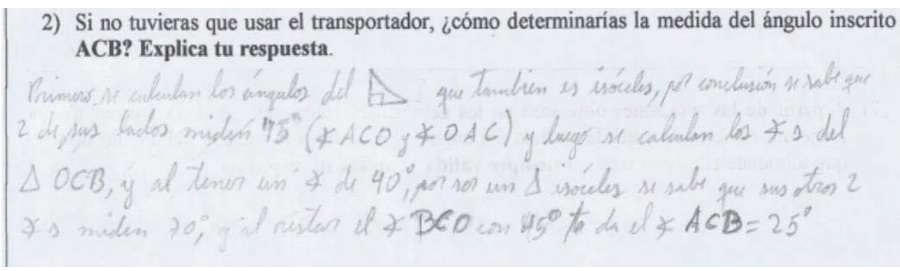


Figura 77. Formulación correcta de la actividad II.2) realizada por A1G14, utilizando la construcción como apoyo.



2) **Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito ACB? Explica tu respuesta.**

Primero se calculan los ángulos del ◺ que tambien es isóceles, por conclusión se sabe que 2 de sus lados miden 45° (∡ACO y ∡OAC) y luego se calculan los ∡s del Δ OCB, y al tener un ∡ de 40°, por ser un Δ isóceles se sabe que sus otros 2 ∡s miden 70°, y al restar el ∡ BCO con 45° te da el ∡ ACB = 25°

Figura 78. Formulación correcta de la actividad II.2) realizada por A1G14, en lenguaje matemático.

Reproducción de la formulación del alumno A1G14.

"Primero se calculan los ángulos del triángulo rectángulo que también es isósceles, por conclusión se sabe que 2 de sus ángulos miden 45° (∡ACO y ∡OAC) y luego se calculan los ∡s del Δ OCB, y al tener un ∡ de 40°, por ser un Δ isósceles se sabe que sus otros 2 ∡s miden 70°, y al restar el ∡BCO con 45° te da el ∡ACB = 25°"

En la formulación de la figura 78 se puede observar, que se visualizan los triángulos isósceles AOC y BOC, con lo cual es posible relacionar la medida de estos triángulos con los ángulos del centro e inscritos de la circunferencia.

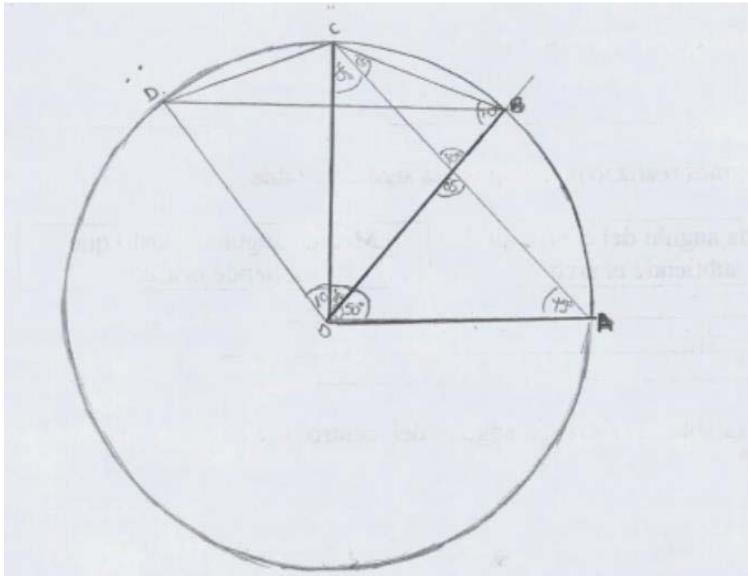
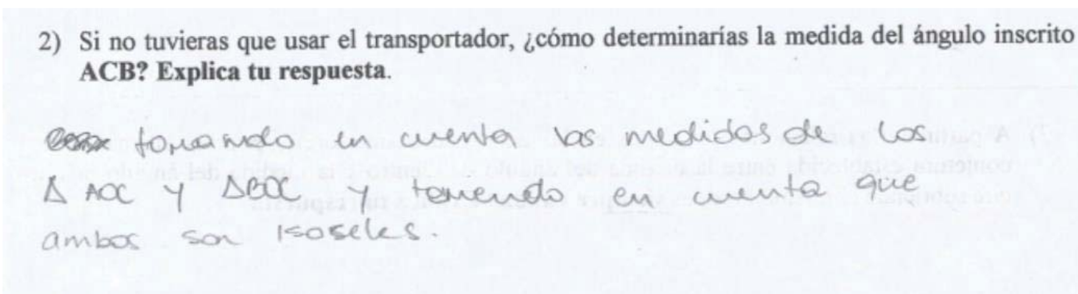


Figura 79. Formulación de la actividad II.2) realizada por A2G7, utilizando la construcción como apoyo.



2) **Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito ACB? Explica tu respuesta.**

tomando en cuenta las medidas de los Δ AOC y ΔBOC y teniendo en cuenta que ambos son isoseles.

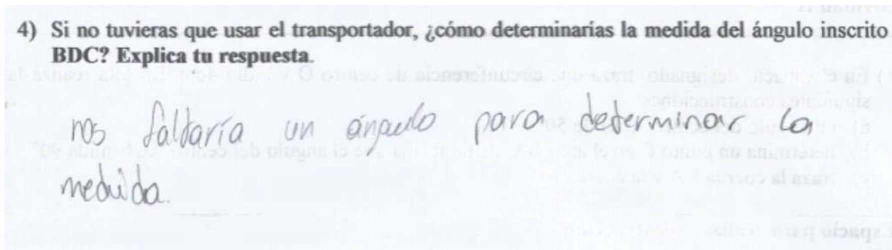
Figura 80. Formulación incompleta de la actividad II.2) realizada por A2G7, en lenguaje matemático.

En la formulación de la Figura 80 se puede observar, que el alumno visualiza también los triángulos isósceles presentes en la construcción, aunque no es capaz de explicar en lenguaje matemático la formulación desarrollada en la construcción.

En cuanto a la actividad II.4) los 12 alumnos que no dan respuesta a la actividad II.2), tampoco dan respuesta a esta actividad.

De los 23 alumnos que lograron realizar la construcción de las actividades II.1) y II.2), tienen los siguientes resultados en relación a formular una estrategia que les permita determinar la medida del ángulo inscrito BDC.

3 alumnos determinan la medida del ángulo BDC con la ayuda del transportador, sin poder realizar una formulación de por qué ese ángulo mide 25°.
2 alumnos no logran determinar la medida del ángulo inscrito BDC argumentando de la siguiente forma.


4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito BDC? Explica tu respuesta.

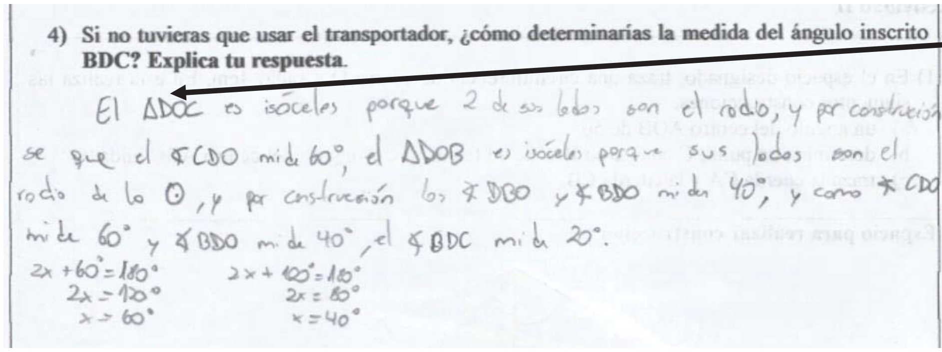
nos faltaría un ángulo para determinar la medida.

Figura 81. Formulación errónea de la actividad II.4) realizada por A1G2

La situación de formulación que se registró al interior de este grupo, la cual plasma como respuesta que no se pude determinar la medida de este ángulo es la siguiente.

> *"A2G2: ¿cómo calculamos la medida del ángulo BDC?*
> *A1G2: No es posible determinar la medida del ángulo BDC ya que nos faltaría un ángulo para determinar la medida, se debería realizar igual que en el ejercicio anterior donde había dos ángulos, y para este caso falta un ángulo, solo se da la medida de un ángulo.*
> *A2G2: entonces la respuesta que colocamos es que no se pude calcular porque nos falta la medida de un ángulo"*

18 alumnos dan respuesta a la actividad relacionado la medida de los ángulos interiores de los triángulos isósceles presentes en la construcción, plasmando en ésta las medidas de los ángulos que van calculando a través de las propiedades de las figuras, lo cual queda reflejada en las distintas formulaciones que se presentan a continuación.


4) **Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito BDC? Explica tu respuesta.**

El ΔDOC es isósceles porque 2 de sus lados son el radio, y por construcción se que el ∢CDO mide 60°, el ΔDOB es isósceles porque sus lados son el radio de la O, y por construcción los ∢DBO y ∢BDO miden 40°, y como ∢CDO mide 60° y ∢BDO mide 40°, el ∢BDC mide 20°.

$2x + 60° = 180°$ $\quad$ $2x + 100° = 180°$

$2x = 120°$ $\quad$ $2x = 80°$

$x = 60°$ $\quad$ $x = 40°$

Se identifican los triángulos isósceles DOC y BOD y luego se relacionan la medida de sus ángulos interiores con la medida de los ángulos de la circunferencia.

Figura 82. Formulación correcta de la actividad II.4) realizada por A3G14

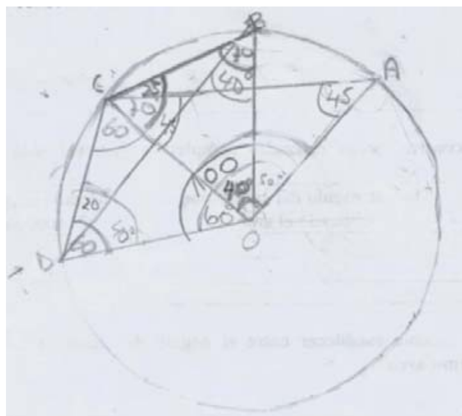
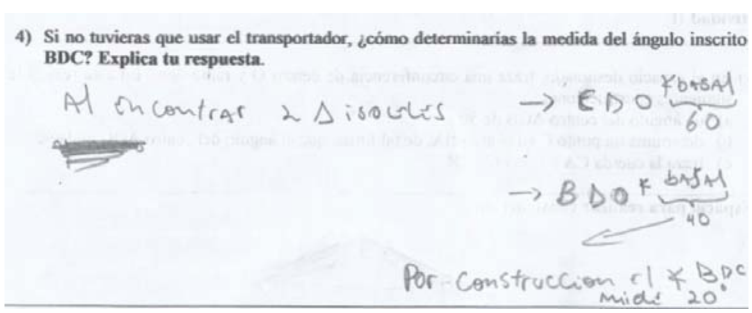


Figura 83. Formulación correcta de la actividad II.4) realizada por A1G3, utilizando la construcción como apoyo.


4) **Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito BDC? Explica tu respuesta.**

Al encontrar 2 Δ isósceles → EDO ∢basal 60

→ BDO ∢basal 40

Por construcción el ∢BDC mide 20°

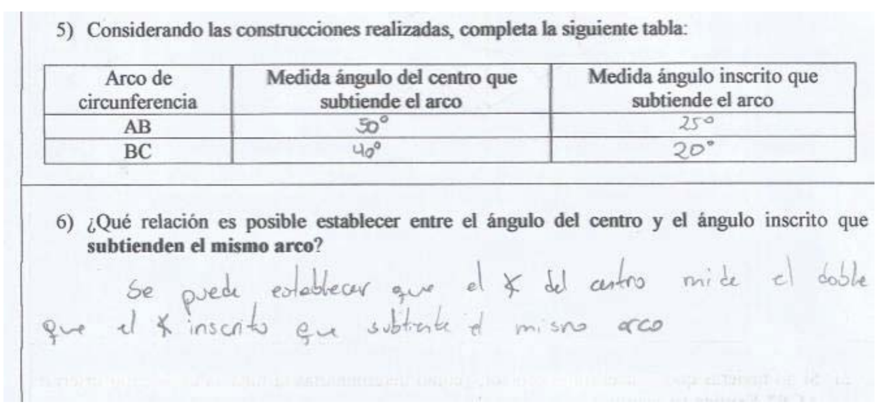
Figura 84. Formulación de la actividad II.4) realizada por A1G3, utilizando lenguaje matemático

Se puede apreciar en los resultados que los alumnos presentan distintos niveles de formulación, algunos logran expresar en lenguaje matemático los pasos que van realizando para determinar la medida del ángulo pedio, en otros casos (la mayoría) su formulación se centra básicamente en ir plasmando en el dibujo la medida de los ángulos que van descubriendo mediante la visualización de los triángulos isósceles.

En relación a la situación de formulación, se observó que los alumnos al interior de los grupos fueron apoyándose en la identificación de los elementos que le permitían relacionar la medida de los ángulos dados, en especial sus discusiones se centraban en la identificación de los triángulos isósceles, tal y como se plasma en el siguientes registro de formulación al interior del grupo G9

> “*A2G9: mira tienes que ver los triángulos isósceles en el OBD hay un ángulo de 100°, entonces los otros dos ángulos de igual medida ¿cuánto miden? (señala los ángulos basales congruentes del triángulo)*
> *A1G9: 80 dividido en 2 40 cada uno.*
> *A2G9: ya entonces anótalo, y ¿cuál otro triángulo isósceles ves?*
> *A1 G9: el BOC, pero ya sabemos las medidas de sus ángulos y …..*
> *A2G9: pero mira el triángulo OCD también es isósceles ¿cierto?, si uno de sus ángulo mide 60 entonces los otros dos miden 60.*
> *A1G9: a.. entonces mira si una parte de ese ángulo (señala ángulo CDO) mide 40° la otra mide 20 para completar los 60,*
> *A2G9: entonces ya sacaste cuanto mide el ángulo BDC mide 20°.*”

En cuanto a las actividad II.5), solo los 23 alumnos que lograron realizar la construcción de las actividades II.1) y II.2) pudieron completar de forma correcta la tabla y conjeturar en relación a la medida de los ángulos inscritos y del centro que subtienden el mismo arco de la actividad II.6), tal y como se muestra a continuación.


5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

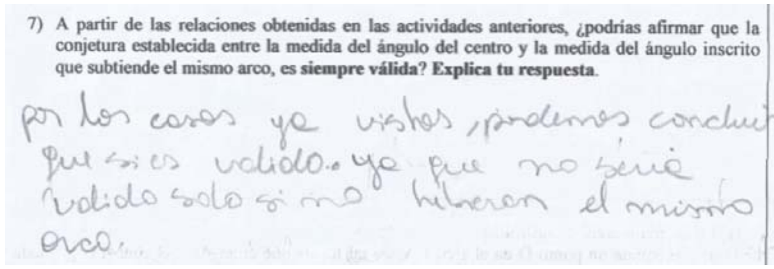
Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AB	50°	25°
BC	40°	20°

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que subtienden el mismo arco?

Se puede establecer que el ∡ del centro mide el doble que el ∡ inscrito que subtiende el mismo arco

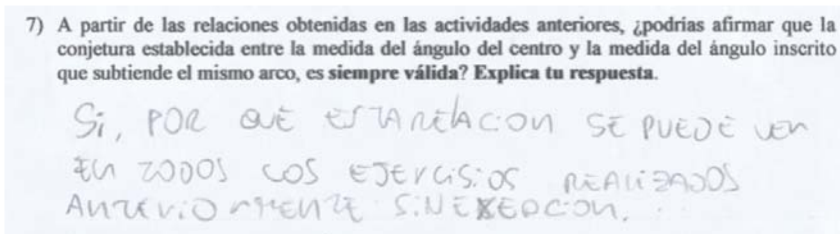
Figura 85. Formulación correcta de las actividad II.5) y II.6) realizada por A1G3

En relación a la actividad II. 7) los 23 alumnos que realizaron la conjetura de que el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del ángulo del centro formularon que la relación es siempre válida, ya que se cumple siempre. Alguna de las justificaciones realizadas son las siguientes:


7) A partir de las relaciones obtenidas en las actividades anteriores, ¿podrías afirmar que la conjetura establecida entre la medida del ángulo del centro y la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, es **siempre válida**? **Explica tu respuesta**.

por los casos ya vistos, podemos conclui[r] que si es valido. ya que no seria valido solo si no tuvieran el mismo arco.

Figura 86. Formulación correcta de la actividad II.7) realizada por A1G5


7) A partir de las relaciones obtenidas en las actividades anteriores, ¿podrías afirmar que la conjetura establecida entre la medida del ángulo del centro y la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, es **siempre válida**? **Explica tu respuesta**.

Si, POR QUE ESTA RELACION SE PUEDE VER EN TODOS LOS EJERCISIOS REALIZADOS ANTERIORMENTE SIN EXEPCION.

Figura 87. Formulación correcta de la actividad II.7) realizada por A2G14

Al finalizar la actividad II se realiza la situación de validación, de la actividad II.2) y II.4) el grupo G9 expuso sus resultados utilizando la construcción de la actividad II.1) y II.2) realizada en GEOGEBRA y proyectada en la pizarra para plasmar su estrategia de acuerdo a lo siguiente.

> "*A2G9: Como el triángulo COA es triángulo isósceles*
> *Docente: ¿por qué el triángulo es isósceles?*
> *A2G2: porque comparte dos radio, formado por dos radio, entonces nos faltaría 90° para completar los 180° y los ángulos (señala el ángulo ACO y el ángulo OAC) miden 45° cada uno. Además el triángulo OBC es isósceles y sus ángulos miden 70° cada uno (señala ángulos CBO y BCO). Entonces tendríamos que sacar la diferencia entre 70° y 45°, 25°. Entonces el ángulo ACB mide 25°*"
> Luego se une a la explicación de la estrategia para la actividad II.2) el alumno A1G9, y realizan la siguiente validación:
>
> "*A1G9: Hay que ver buscar los triángulos isósceles el CDO y el BDO, luego hay que buscar los ángulos basales.*
> *A2G9: Entre BOD hay 100°, y entre COB hay 40°, entonces el ángulo DOC mide 60°………….*
> *Docente: ¿entonces los ángulos basales cuánto miden?*
> *A1G9: 60, para completar los 180°, entonces por diferencia el ángulo BDC mide 20°*"

A partir de la evidencia, el docente es quien realiza los cuestionamientos de las estrategias que utilizaron los alumnos, ya que no es capaz de producir un debate entre los alumnos.

Además, se observó que luego se comentaron los resultados de la actividad II.5), II.6) y II.7) donde la mayoría de los alumnos (23 alumnos de un total de 35) fue capaz de completar la tabla con la medida de los ángulos y conjeturar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco, relación que es válida en todos los casos.

Posteriormente se realiza la situación de institucionalización solo en los casos en que el centro se encuentra en una de las cuerdas del ángulo inscrito y en el interior de éste, debido a que solo quedaban 20 minutos para terminar la clase.

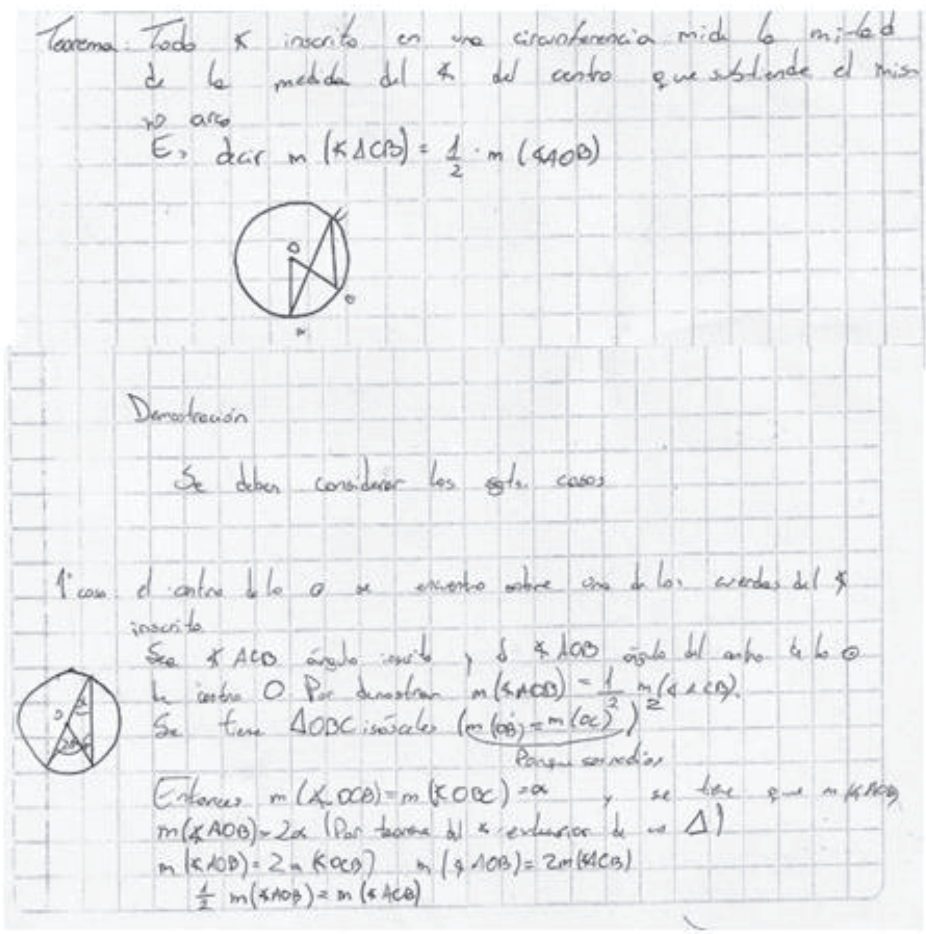
De acuerdo al registro de las notas de campo y del registro de algunos cuadernos de los alumnos el docente realizó lo siguiente en la situación de institucionalización:

Extracto nota de campo de la segunda clase:

> *El docente escribe en la pizarra el teorema realizando a un costado un dibujo que lo represente, posteriormente le pregunta a los alumnos, ¿en las construcciones realizadas el centro de la circunferencia donde se ubicaba con respecto al ángulo inscrito?*
> *Un alumno contesta que en el primer caso en el interior y en el diámetro, y el docente le pregunta a ese alumno ¿y qué relación existe entre el diámetro y el ángulo inscrito? Y el alumno contesta que es uno de sus lados.*
> *El docente luego pregunta de forma general al curso ¿en las últimas actividades donde estaba ubicado el centro con respecto al ángulo inscrito? Otro alumno contesta en el exterior.*
> *Luego el docente vuelve a preguntar de forma general al curso ¿y en todos estos casos el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco? Los alumnos revisan sus guías y contestas que sí.*
> *Entonces el docente les dice a los alumnos que hay que considerar esos tres casos para hacer la demostración del teorema para formalizarlo, y que para eso se debe utilizar la misma estrategia que usaron para dar respuesta a las actividades, y les pregunta a los alumnos de forma general ¿cuál es la clave, cuál fue la estrategia*

utilizada?, y algunos alumnos contestas los triángulos isósceles, buscar los triángulos isósceles. Posteriormente parte la demostración del teorema con el caso 1: centro en una de las cuerdas del ángulo inscrito, y el caso 2: centro al interior del ángulo inscrito.

En el registro de este extracto de la nota de campo, se puede observar que el docente retoma lo realizado por los alumnos en las actividades, en especial la estrategia utilizada por ellos para dar respuesta a la medida de los ángulos pedidos, los hace participar en la identificación de estos triángulos y en la de sus lados y ángulos congruentes, y además en la justificación de los pasos de la demostración.
A continuación se presentan algunos registros de situación de institucionalización en base a los registro de los alumnos.


Teorema: Todo ∢ inscrito en una circunferencia mide la mitad de la medida del ∢ del centro que subtiende el mismo arco
Es decir $m(\measuredangle ACB) = \frac{1}{2} \cdot m(\measuredangle AOB)$

Demostración

Se deben considerar los sgts. casos

1° caso: el centro de la ⊙ se encuentra sobre una de las cuerdas del ∢ inscrito.
Sea ∢ACB ángulo inscrito, y ∢AOB ángulo del centro de la ⊙ de centro O. Por demostrar $m(\measuredangle AOB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle ACB)$.
Se tiene ΔOBC isósceles ($m(\overline{OB}) = m(\overline{OC})$) Porque son radios
Entonces $m(\measuredangle OCB) = m(\measuredangle OBC) = \alpha$ y se tiene que $m(\measuredangle AOB)$
$m(\measuredangle AOB) = 2\alpha$ (Por teorema del ∢ exterior de un Δ)
$m(\measuredangle AOB) = 2m(\measuredangle OCB)$ $m(\measuredangle AOB) = 2m(\measuredangle ACB)$
$\frac{1}{2} m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle ACB)$

Figura 88. Registro cuaderno del alumno A3G14

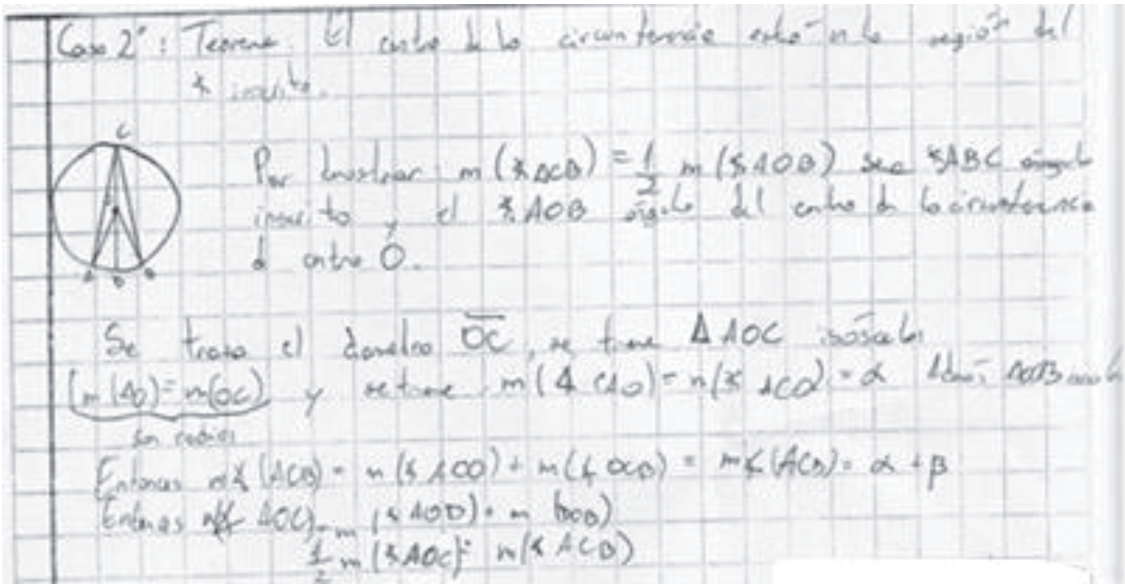


Figura 89. Registro cuaderno del alumno A3G14

La tercera clase comenzó con la demostración del teorema del ángulo inscrito para el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra en el exterior de la región del ángulo inscrito. Nuevamente en esta ocasión el docente hace participar a los alumnos en la visualización de los triángulos isósceles, de sus ángulos congruentes y de la resolución de la ecuación que se plantea para relacionar la medida de los ángulos interiores de los triángulos. Lo anterior se refleja en el siguiente registro de un alumno.

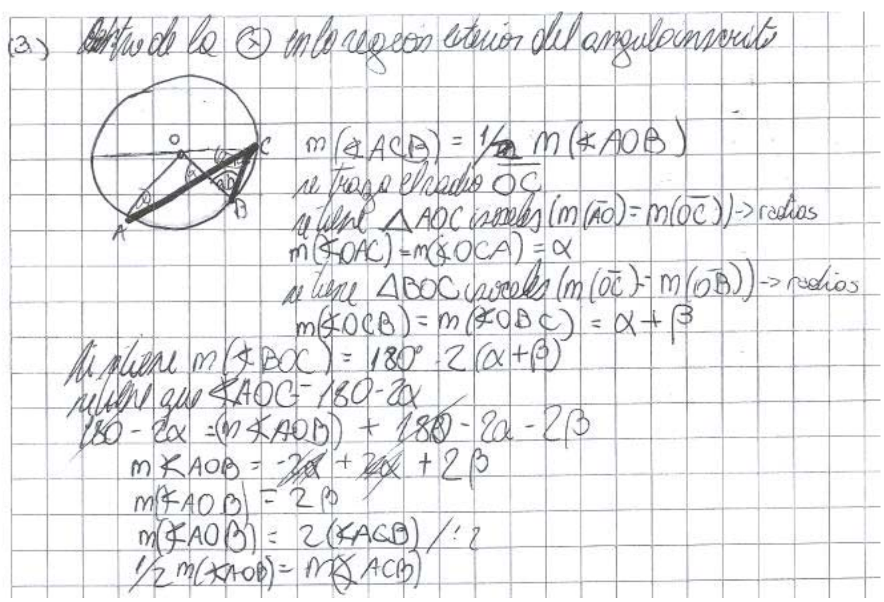


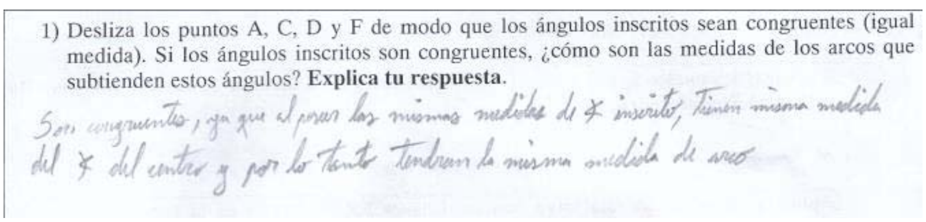
Figura 90. Registro cuaderno del alumno A2G6

Posteriormente cada alumnos trabaja con un computador los archivo que están en una carpeta ubicada en el escritorio, la cual contiene el archivo "Ángulos inscritos.ggb" que se trabaja según las instrucciones de la actividad III y el archivo "visualización escenario.ggb" el cual se trabaja según las instrucciones de la actividad IV.

Análisis Actividad III

1) Desliza los puntos A, C, D y F de modo que los ángulos inscritos sean congruentes (igual medida). Si los ángulos inscritos son congruentes, ¿cómo son las medidas de los arcos que subtienden estos ángulos? **Explica tu respuesta**

Los 35 alumnos contestan que si los ángulos inscritos son iguales entonces la medida de los arcos son iguales, pero 2 alumnos responde que lo anterior ocurre debido a que los ángulos del centro de estos ángulos inscritos miden lo mismo. El resto de los alumnos no logra justificar su respuesta.


1) Desliza los puntos A, C, D y F de modo que los ángulos inscritos sean congruentes (igual medida). Si los ángulos inscritos son congruentes, ¿cómo son las medidas de los arcos que subtienden estos ángulos? **Explica tu respuesta.**

Son congruentes, ya que al pasar las mismas medidas de ∡ inscrito, Tienen misma medida del ∡ del centro y por lo tanto tendran la misma medida de arco

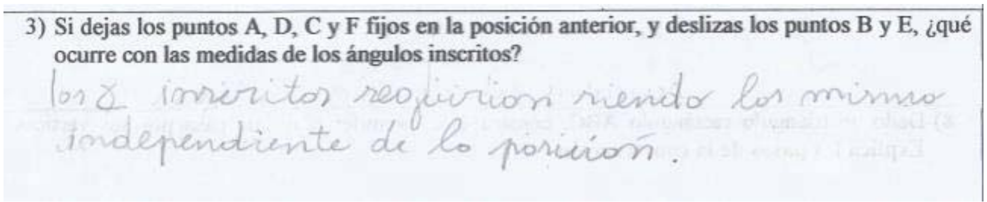
Figura 91. Respuesta actividad III.1) realizada por A1G14

2) Si haces coincidir el punto A con D y el punto C con F, ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos inscritos?

Los 35 alumnos responden que los ángulos inscritos miden lo mismo

3) Si dejas los puntos A, D, C y F fijos en la posición anterior, y deslizas los puntos B y E, ¿qué ocurre con las medidas de los ángulos inscritos?

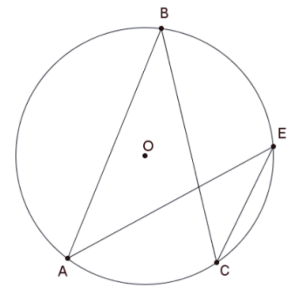
Los 35 alumnos responden que la medida sigue siendo la misma independiente de la posición de B y E, tal y como se muestra en la respuesta de un alumno.


3) Si dejas los puntos A, D, C y F fijos en la posición anterior, y deslizas los puntos B y E, ¿qué ocurre con las medidas de los ángulos inscritos?

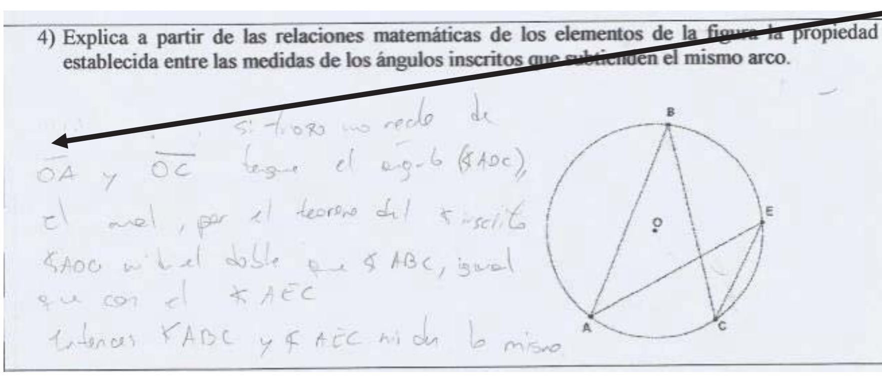
los ∡ inscritos seguirion siendo los mismo independiente de la posicion.

Figura 92. Respuesta actividad III.3) realizada por A2G4

4) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.



15 alumnos de un total de 35 logran justificar por qué la medida de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes, para lo cual utilizaron como fundamento el teorema del ángulo inscrito, es decir, estos alumnos validan el teorema colocándolo en acto para dar respuesta a la situación planteada.


4) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Si trazo una recta de OA y OC tengo el ángulo (∡ADC), el cual, por el teorema del ∡ inscrito ∡AOC mide el doble que ∡ABC, igual que con el ∡AEC

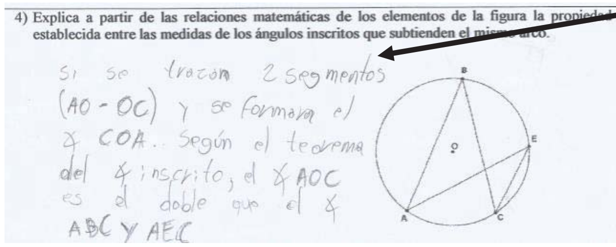
Entonces ∡ABC y ∡AEC miden lo mismo

Alumno visualiza los radios OA y OC se forma el ángulo del centro AOC el cual subtiende el mismo arco que los ángulos inscritos ABC y AEC

Figura 93. Respuesta correcta a la actividad III.4) realizada por A2G4

Reproducción de la formulación del alumno A2G4.

"Si trazo una recta de OA y OC tengo el ángulo (∡ADC), el cual, por teorema del ángulo inscrito ∡AOC mide el doble que el ∡ABC, igual que con el ∡AEC. Entonces ∡ABC y ∡ AEC miden lo mismo"



Alumno visualiza ángulo del centro AOC y relaciona su medida con la de los ángulos inscritos ABC y AEC que subtiende el mismo arco a través del teorema del ángulo inscrito.

Figura 94. Respuesta correcta a la actividad III.4) realizada por A3G7

El resto de los alumnos (20 alumnos), no logra responder a la situación.

5) Traza el diámetro que pasa por el punto A (el cual coincide con el punto D), y designa por G al punto de intersección entre el diámetro AO y la circunferencia. Luego, si los vértices de los ángulos inscritos (punto E y punto B) se encuentran en el arco **GA**, desliza los puntos F y C de tal forma que coincidan con el punto G. **¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

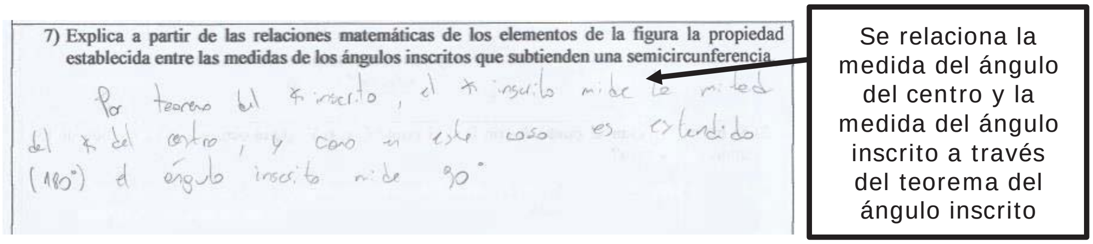
Los 35 alumnos responden que los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG miden 90°

6) Si deslizas los puntos E y B sobre el arco **GA, ¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

Los 35 alumnos responden que los ángulos inscritos siguen midiendo 90°

7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.

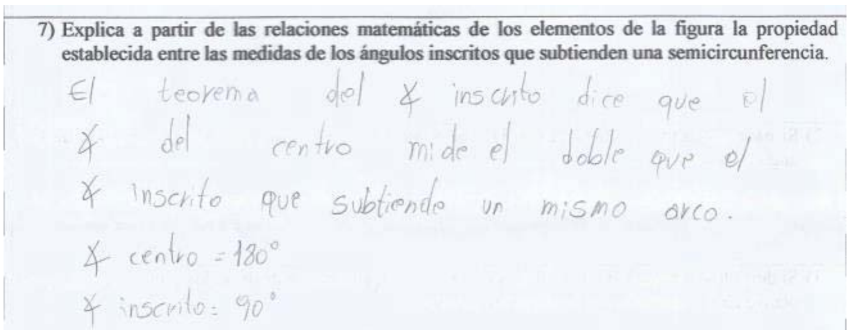
20 alumnos justifican que los ángulos inscritos en la semicircunferencia miden 90° debido a que el ángulo del centro que subtiende el mismo arco mide 180°. Por lo tanto, estos alumnos al formular su respuesta están validando el teorema del ángulo inscrito ya que lo colocan en acto para dar respuesta a la situación planteada. Algunas de las respuestas de los alumnos corresponden a las siguientes.



7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia

Por teorema del ∡ inscrito, el ∡ inscrito mide la mitad del ∡ del centro, y como en este caso es extendido (180°) el ángulo inscrito mide 90°

Figura 95. Respuesta correcta a la actividad III.7) realizada por A3G14



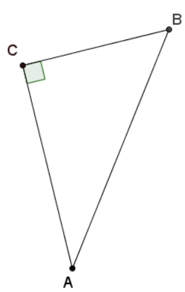
7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.

El teorema del ∡ inscrito dice que el ∡ del centro mide el doble que el ∡ inscrito que subtiende un mismo arco.
∡ centro = 180°
∡ inscrito: 90°

Figura 96. Respuesta correcta a la actividad III.7) realizada por A3G7

El resto de los alumnos (15 alumnos) no logra responder a la situación

8) Dado un triángulo rectángulo ABC, construye la circunferencia que pasa por sus vértices. **Explica las pasos de la construcción**.



21 alumnos logran dar respuesta a la actividad, construyendo la circunferencia que contiene a los vértices del triángulo rectángulo. Además ellos logran explicar que el diámetro de la circunferencia es el lado AB, y que el centro está en el punto medio de este segmento. Debido a lo anterior, los alumnos vuelven a validar el corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia al identificar que el diámetro de la circunferencia tiene que ser el lado AB. Algunas respuestas de los alumnos se presentan a continuación.

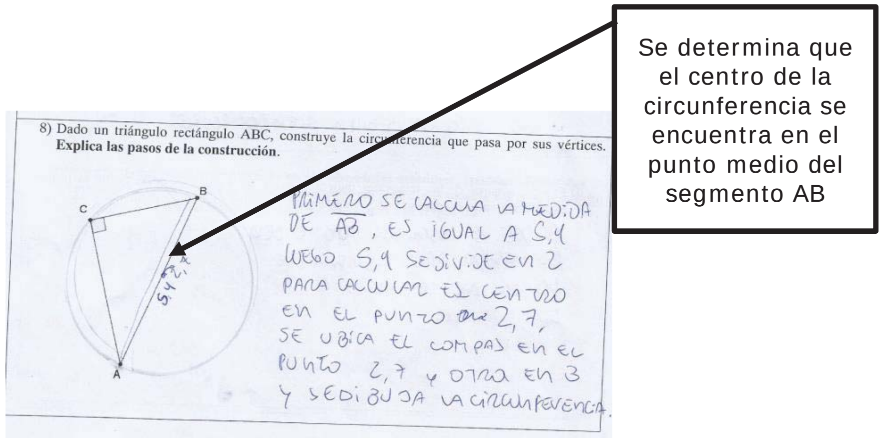


Figura 97. Construcción y formulación correcta a la actividad III.8) realizada por A2G14

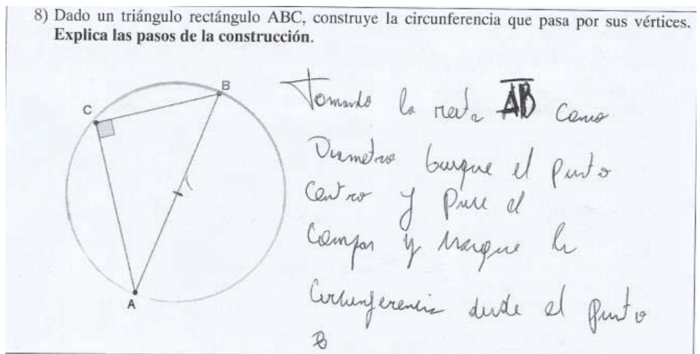


Figura 98. Construcción y formulación correcta a la actividad III.8) realizada por A2G6

Además 2 alumnos construyen de forma incorrecta la circunferencia tomando como radio el lado CB. El resto de los alumnos no da respuesta a la actividad.

Figura 99. Construcción incorrecta a la actividad III.8) realizada por A1G13

Además, a través de la observación de esta clase, se puede determinar que el docente solo participó aclarando las instrucciones de las actividades que requerían el uso de GEOGEBRA. Es por esto que los alumnos realizaron el trabajo de forma más autónoma en comparación con las dos clases anteriores, donde el profesor tuvo que intervenir en la realización de las construcciones como se explicó anteriormente. También, se observó que los alumnos se colaboraban mutuamente al interior de los grupos y entre los grupos en el desarrollo de las actividades, logrando de esta forma plasmar las formulaciones de las actividades III.4) y III.7)

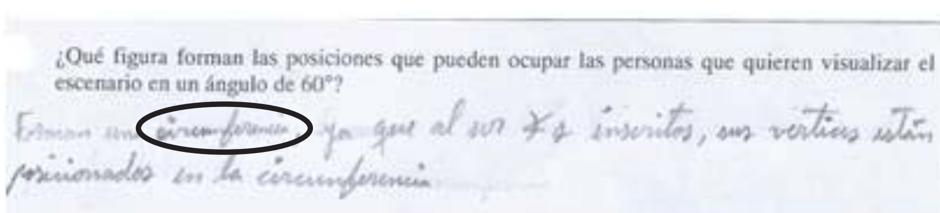
Análisis Actividad IV

1) Compara con tus compañeros las posiciones que permiten a las personas A, B, C y D, visualizar un escenario de longitud PQ en un ángulo de 60°

Los 35 alumnos responden que no son las mismas posiciones que la de sus compañeros, es decir, que estas no son únicas.

2) ¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?

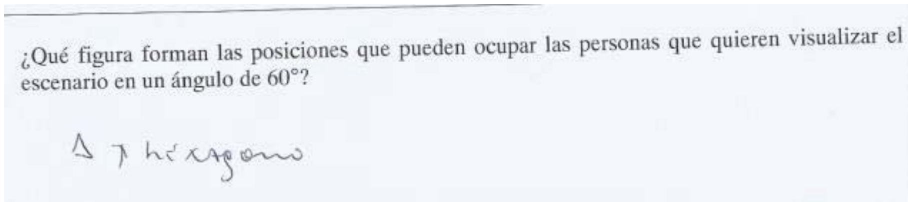
19 alumnos de 35 contestan que la figura que forma la posición de las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60° es un arco.
1 alumno contesta que es una circunferencia, justificando que los vértices de los ángulos inscritos están en ésta.


¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?

Forman una circunferencia, ya que al ser ∡s inscritos, sus vértices están posicionados en la circunferencia

Figura 100. Repuesta parcialmente correcta de la actividad IV.2) realizada por A1G14

5 alumnos contestas que es un triángulo, y otros 5 alumnos contestan que es un hexágono. El resto de los alumnos no da respuesta (5 alumnos).

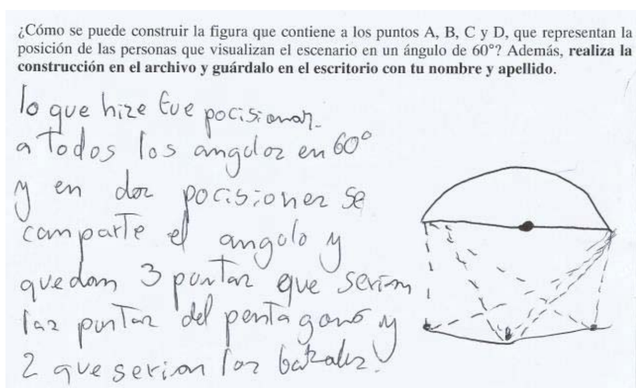

¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?

Δ y héxagono

Figura 101. Repuesta incorrecta de la actividad IV.2) realizada por A1G3

3)	¿Cómo se puede construir la figura que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°? Además, realiza la construcción en el archivo y guárdalo en el escritorio con tu nombre y apellido.

Esta actividad fue contestada solamente por 19 alumnos, 5 de ellos pertenecientes a los grupos G2 y G3 contestan de forma inadecuada, ya que formulan que la figura que forman las posiciones de los puntos A, B, C y D que observan el escenario en un ángulo de 60° corresponde a polígono, es decir, no consideran que estos puntos pueden ocupar infinitas posiciones siempre y cuando los ángulos inscritos que subtienden el arco QP midan 60°. De esta forma, para estos alumnos los puntos A, B, C y D que observan en el archivo de GEOGEBRA, tienen una posición fija. La justificación y la construcción que realizan se observa a continuación.


¿Cómo se puede construir la figura que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°? Además, **realiza la construcción en el archivo y guárdalo en el escritorio con tu nombre y apellido.**

lo que hize fue pocisionar a todos los angulos en 60° y en dos pocisiones se comparte el angulo y quedan 3 puntos que serian las puntas del pentagono y 2 que serian los lados!

Figura 102. Formulación incorrecta de la actividad IV.3) realizada por A2G3

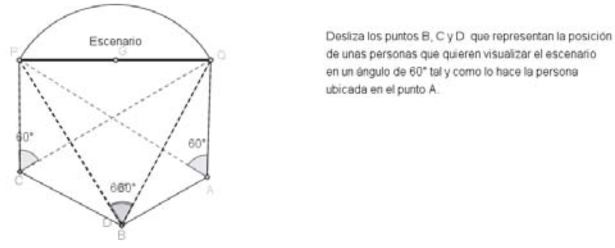
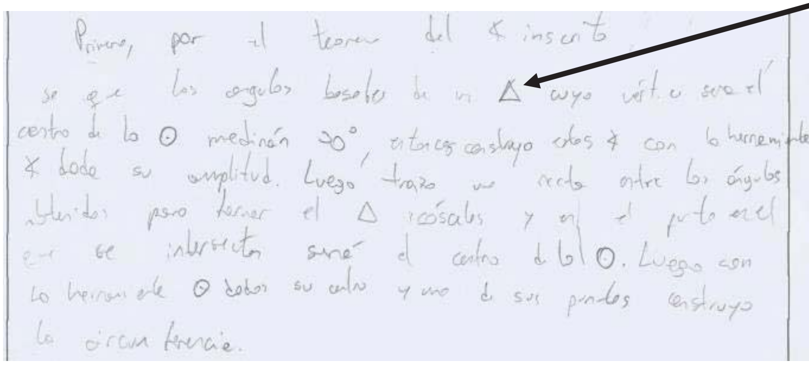


Figura 103. Repuesta incorrecta de la actividad IV.3) realizada por A2G3 desde el archivo de GEOGEBRA

En esta construcción se observa además, que para formar el pentágono hacen coincidir dos de los puntos, el punto D y el punto B, lo cual no es posible ya que estos puntos representan posiciones de personas por lo tanto no pueden estar en el mismo lugar. Con lo anterior, se pude determinar que los alumnos no realizan una adecuada interpretación de la información entregada en la situación.

Los otros 14 alumnos pertenecientes a los grupos G4, G7, G5, G9, G14, G15 realizan de forma adecuada la construcción del arco de circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D que representan las posiciones de las personas que pueden visualizar el escenario en un ángulo de 60°. Alguna de las formulaciones y construcciones realizadas por estos alumnos corresponde a las siguientes.


Primero, por el teorema del ∢ inscrito se que los ángulos basales de un △ cuyo vértice será el centro de la ⊙ medirán 30°, entonces construyo estos ∢ con la herramienta ∢ dado su amplitud. Luego trazo una recta entre los ángulos obtenidos para formar el △ isósceles y en el punto en el que se intersectan será el centro de la ⊙. Luego con la herramienta ⊙ dados su centro y uno de sus puntos construyo la circunferencia.

Se identifica que el centro de la circunferencia corresponde a uno de los vértice del triángulo isósceles que tiene ángulos basales de 30°, lo anterior se concluye al relacionar la medida de los ángulos inscritos de 60°con la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco a través del teorema.

Figura 104. Formulación correcta de la actividad IV.3) realizada por A3G14

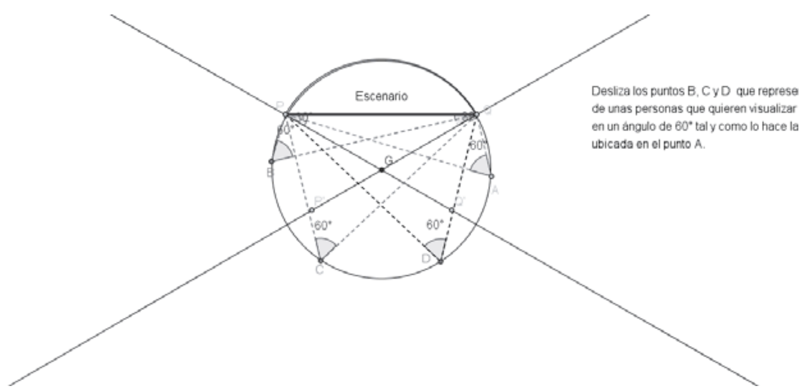
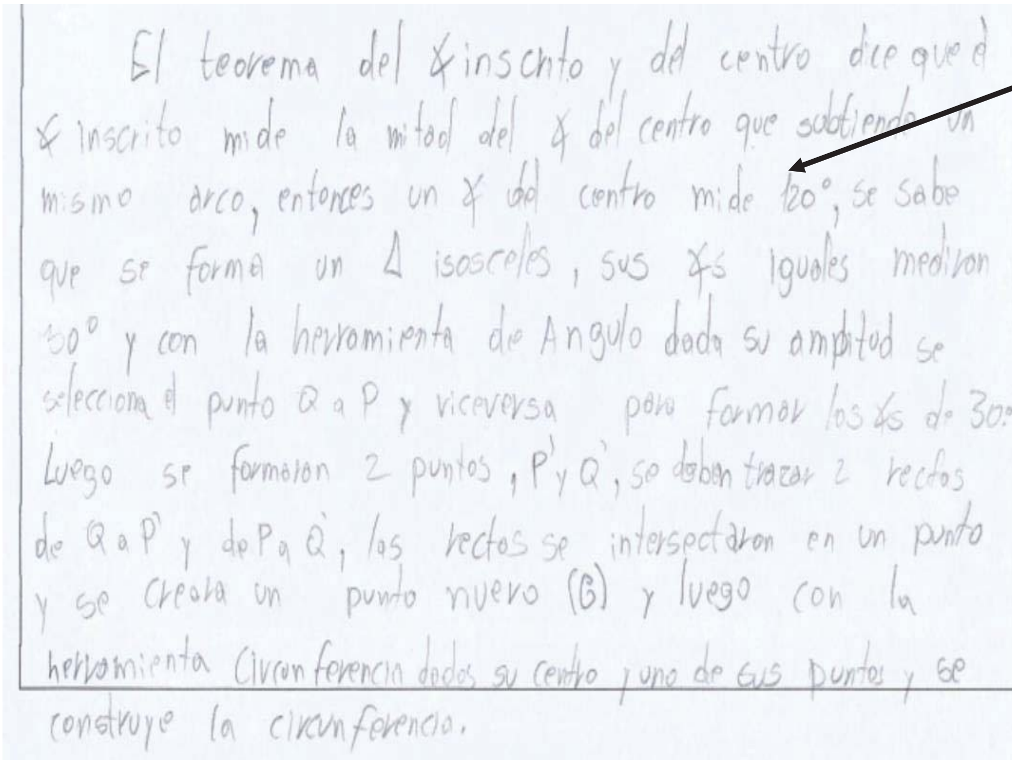


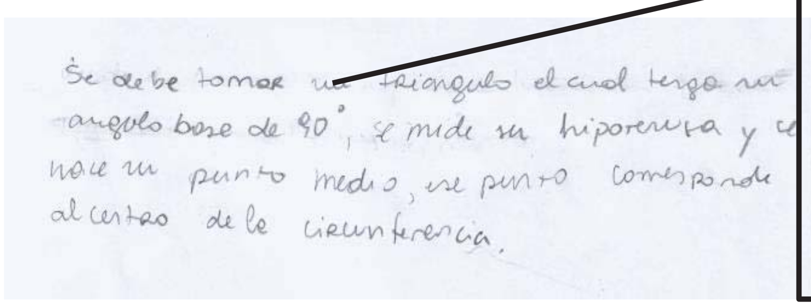
Figura 105. Construcción correcta de la actividad IV.3) realizada por A3G14 desde el archivo de GEOGEBRA


El teorema del ∡ inscrito y del centro dice que el ∡ inscrito mide la mitad del ∡ del centro que subtienden un mismo arco, entonces un ∡ del centro mide 120°, se sabe que se forma un Δ isósceles, sus ∡s iguales medirán 30° y con la herramienta de Angulo dada su amplitud se selecciona el punto Q a P y viceversa para formar los ∡s de 30°. Luego se formaron 2 puntos, P' y Q', se deben trazar 2 rectas de Q a P' y de P a Q', las rectas se intersectaron en un punto y se creara un punto nuevo (G) y luego con la herramienta Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos y se construye la circunferencia.

Se visualiza que el ángulo del centro que relaciona las medidas de los ángulos inscritos de 60° debe medir 120°, luego a través de la construcción del triángulo isósceles se busca el centro del arco

Figura 106. Formulación correcta de la actividad IV.3) realizada por A3G7

Al observar la construcción del alumno en la figura 106, se puede evidenciar que utiliza el teorema del ángulo inscrito para construir el arco, para lo cual determina que el ángulo del centro que subtiende el mismo arco que los ángulos inscritos de 60° debe medir 120°, luego determina que para construir el centro del arco se debe construir el triángulo isósceles PQG donde en el punto G debe corresponder al vértice del ángulo interior que mide 120°, y en consecuencia este punto corresponde al centro del arco.


Se debe tomar un triangulo el cual tenga un angulo base de 90°, se mide su hipotenusa y se hace un punto medio, ese punto corresponde al centro de la circunferencia.

La construcción del arco se realiza utilizando el teorema del ángulo inscrito en una semicircunferencia, para lo cual se construye un triángulo rectángulo sobre el segmento PQ

Figura 107. Formulación correcta de la actividad IV.3) realizada por A2G9

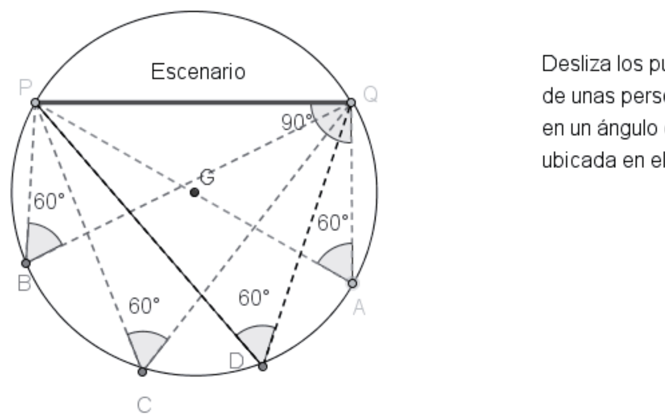


Figura 108. Construcción correcta de la actividad IV.3) realizada por A2G9 desde el archivo de GEOGEBRA

Al observar la construcción del alumno en la figura 108, se puede evidenciar que utiliza el corolario del teorema del ángulo inscrito en una semicircunferencia para poder construir el arco, para lo cual posiciona el punto A (este punto representa la posición de una persona que observa siempre el escenario en un ángulo de 60°) en un ángulo de 90° con respecto al escenario (segmento PQ), y luego ubica el punto medio de segmento AP que es el diámetro de la circunferencia y posteriormente con los datos construye el arco.

Aunque la mayoría de los alumnos logra determinar que la figura que se forma con la posición de estos puntos corresponde a un arco, la construcción de este resulta de gran dificultad, a pesar de que el docente guio algunos de los grupos en relación a las indicaciones del análisis a priori, es decir, realizó las siguientes preguntas:
¿Qué elementos necesitan conocer para construir este arco?, ¿cómo es posible poder obtenerlos?

Finalmente, a través de la observación de esta clase, se puede determinar que el docente intervino en los grupos para aclarar las dudas con respecto a la utilización de las herramientas de GEOGEBRA, y para tratar de guiarlos en la construcción del arco en los casos en que los alumnos respondieran que la figura que querían construir correspondía a esta, haciéndolos responsables de dar la respuesta a la situación planteada.
Además, se observó que los alumnos que lograron realizar la actividad, mostraron una gran colaboración entre ellos.

Capítulo VIII: Conclusiones

Conclusiones

Con fundamentos en el análisis histórico epistemológico del objeto matemático y de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau se diseñó y aplicó una secuencia de actividades para la enseñanza y aprendizaje del teorema ángulo inscrito en una circunferencia.
En relación al primer objetivo específico:

1. Realizar un análisis epistemológico histórico del objeto matemático que fundamente el diseño de una secuencia de aprendizaje.

Este objetivo fue logrado, ya que el diseño de la secuencia de actividades fue guiado por este estudio, al considerar los procesos de construcción y visualización que realizaron los griegos en su época para la demostración de los teoremas en geometría. Permitiendo de esta forma, que los alumnos realicen un trabajo de formulación y validación de nuevos teoremas a partir de las relaciones de las propiedades de las figuras presentes en la construcción y conduciéndolos también, a entender las figuras como el conjunto de relaciones o propiedades que la caracterizan tal y como lo plantea Itzcovich (2005).

En cuanto al segundo objetivo específico:

2. Diseñar y aplicar una secuencia de aprendizaje que propicie el aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia.

Este también fue alcanzado con los siguientes resultados en su implementación.
Durante el desarrollo de las tres clases (90 minutos cada una) se involucró a los alumnos en un nuevo trabajo matemático, ya que se les pidió desarrollar razonamientos del trabajo geométricos, es decir, los alumnos tuvieron que desarrollar actividades donde tenían que utilizar propiedades de los objetos geométricos presentes en sus construcciones para poder anticipar relaciones no conocidas como el teorema del ángulo inscrito, el corolario del ángulo inscrito en una semicircunferencia, y el corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. En este sentido, los alumnos a pesar de tener dificultades en las situaciones de acción, donde tuvieron que tomar decisiones en relación a la construcción de los ángulos pedidos, sí pudieron en su mayoría realizar deducciones a través de la visualización de las figuras claves como los triángulos isósceles, y utilizar sus propiedades para conjeturar el teorema del ángulo inscrito y validarlo en actividades de formulación donde lo utilizaron para explicar por qué un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, y al colocarlo en acto en la resolución de la actividad más compleja de la secuencia, la cual consistía en construir un arco de circunferencia a partir de la medida de los ángulos inscritos (Actividad IV).

En relación al análisis realizado podemos concluir que a pesar de las dificultades que tuvieron los alumnos en las construcciones por desconocer u olvidar el cómo utilizar el transportador para construir un ángulo, es posible decir que ellos sí pudieron conjeturar en relación al teorema y formalizar que éste es válido si estos ángulos subtienden el mismo arco. Es importante destacar que los alumnos presentaron distintos niveles de formulación, donde se pueden destacar las formulaciones utilizando lenguaje matemático para explicar las relaciones de las figuras presentes en sus construcciones a través de propiedades o teoremas, y las formulaciones donde no se utiliza el lenguaje matemático pero si se plasma la relación de los ángulos presentes en la construcción usando ésta como apoyo. En relación al nivel de validación es posible mencionar, que éste estaba centrado solo en exposición de las estrategias utilizadas para dar respuesta a las actividades y no en el debate de estas mismas, ya que los alumnos no se responsabilizaron por cuestionar y justificar las formulaciones realizadas por sus compañeros.
En consecuencia, con el diseño de esta secuencia de actividades los alumnos fueron los protagonistas en la construcción de su aprendizaje, ya que aceptaron la responsabilidad de responder al desafío de las actividades de acción y formulación. Así es posible concluir que se cumple el segundo objetivo específico.

En cuanto al desarrollo del tercer objetivo específico el cual es:

3. Describir los componentes esenciales de las situaciones didácticas del docente, devolución e institucionalización en la aplicación de la secuencia de enseñanza aprendizaje del teorema ángulo inscrito en la circunferencia

Es importante mencionar en torno a éste, que durante el análisis a priori se describieron las componentes esenciales de las situaciones didácticas, la institucionalización y la devolución. En cuanto a la devolución, se observó que durante la realización de las situaciones de acción y formulación el docente que implementó la secuencia de aprendizaje, en cada una de sus intervenciones de acuerdo a las diseñadas en el análisis a priori, es capaz de devolverle al alumno la responsabilidad de ser él quien resuelva las actividades. Sin embargo, durante la situación de validación no realiza esta devolución debido a que no pudo responsabilizar a los alumnos en el compromiso por participar en la discusión de las estrategias utilizadas al resolver las actividades. En consecuencia, en las situaciones de validación el docente fue quien rebatía los argumentos entregados por los integrantes de los grupos.
Es por esto que en el análisis a priori se debería haber planificado preguntas que le permitieran al docente producir entre los alumnos el debate de las estrategias que plasmaron en las situaciones de formulación.

En relación a la institucionalización, el docente logró retomar los resultados y las estrategias de los alumnos para formalizar mediante la demostración del teorema del ángulo inscrito, haciéndolos participar en este proceso tal y como se describió en el análisis a posteriori. Así es posible concluir que también se cumple el tercer objetivo específico.

También es importante mencionar, que la secuencia de actividades contempló un trabajo de construcción manual y digital, en donde en ambos casos el desconocimiento del uso de las herramientas produjo dificultades en el desarrollo de las construcciones solicitadas. Sin embargo, es importante destacar que una de las ventajas que tiene el uso del software de geometría dinámica GEOGEBRA es que a través de la función *elije y nueve* se puede modificar la construcción inicial, manteniendo las propiedades de las figuras que se hayan definido, así es posible experimentar varios casos de una forma mucho más rápida y sencilla para conjeturar una propiedad o relación de las figuras presentes en la construcción. Lo anterior, se evidencia en que al manipular las construcciones con la función *elije y nueve* de los archivos de GEOGEBRA de las actividades III y IV, los alumnos pudieron desarrollar las situaciones de acción de una forma mucho más rápida y eficiente en comparación con las otras actividades.
No obstante, tanto en las construcciones realizadas de forma manual como digital estuvo presente en los alumnos el fenómeno de *rigidez geométrica*, es decir, algunos alumnos no fueron capaces de visualizar figuras como triángulos, ángulos, entre otras, para relacionar sus propiedades y determinar la medida de los ángulos pedidos.

Para finalizar, queremos enfatizar que sí es posible diseñar y aplicar situaciones donde los alumnos realicen un verdadero trabajo geométrico en el cual esté presente la construcción, visualización y demostración tal y como lo plantea Duval, y que por lo tanto puedan explorar, relacionar y conjeturar en relación a una propiedad o un teorema de la geometría. De esta forma se les da la posibilidad de responsabilizarse por la búsqueda en la argumentación de sus estrategias, contribuyendo así en el camino hacia el trabajo de demostración matemática.

Recomendaciones y perspectiva para futuras investigaciones

A partir de los resultados obtenidos en nuestra investigación, entregamos las siguientes sugerencias didácticas para el aprendizaje del teorema del ángulo inscrito en la circunferencia en alumnos de II medio.

Se debe iniciar las clases con la activación de los conocimientos previos, relativos a la circunferencia y sus elementos, teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, propiedades del triángulo isósceles, teorema del ángulo exterior de un triángulo, entre otros. Estas actividades deben estar orientadas a que los alumnos se enfrenten a situaciones en donde se les pida relacionar las medidas de los ángulos presentes en las figuras, pero que además plasmen de forma verbal utilizando el lenguaje matemático las estrategias, teoremas o propiedades que utilizan, ya que es primordial ir enfatizando en ellos el trabajo de argumentación, el cual es fundamental para la demostración en el trabajo geométrico. Además, en estas actividades previas se sugiere que los alumnos también realicen actividades de construcción manual con regla y compás de ángulos, circunferencia y triángulos, ya que esta actividad en geometría se realiza solo en 7° básico y no se vuelve a retomar en enseñanza media con lo cual, esta falta de experiencia en la construcción se convertirá en una barrera para que los alumnos puedan realizar la actividad diseñada.

Si se aseguran estas condiciones mínimas, el trabajo geométrico que realizaran los alumnos utilizando instrumentos de geometría, les permitirán explorar, conjeturar y validar las propiedades de las figuras geométricas tal y como lo plantea Itzcovich (2005). De esta forma, los alumnos podrán ser los protagonistas de su aprendizaje al conjeturar, formular y validar el teorema del ángulo inscrito, y por lo tanto les permitirá realizar un trabajo geométrico, el cual no está presente en las aulas como se plasmó en los antecedentes.

Para permitir que los alumnos realicen este trabajo geométrico, es importante que los docentes tengan en consideración que el tiempo que requieren para realizar las construcciones, la formulación de sus estrategias y la validación de ellas es más extenso que el destinado para la enseñanza de este teorema actualmente, ya que para la aplicación de la propuesta presentada como mínimo se necesitan tres clases de 90 minutos cada una.

Finalmente sería importante complementar las actividades propuestas con problemas donde los alumnos puedan construir, visualizar y aplicar el teorema del ángulo inscrito, los corolarios del ángulo inscrito en una semicircunferencia, y el corolario de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco, además de proponerles a los alumnos validar el teorema del ángulo inscrito al colocarlo en acto para justificar la propiedad de los ángulos opuestos en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia.

Bibliografía

Andreoli, D. (2009). *Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad*. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México.

Arenas, F., Masjuán, G. & Villanueva, F. (1993). *Geometría elemental*. Chile. Ediciones Universidad Católica de Chile.

Bagazgoitia, A. (2003). Geometría con Cabri. *Revista Sigma*, 2(22), 83-98.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. *Vingt ans de didactique des mathematiques en France: hommage a Guy Brousseau et Gerard Vergnaud*, 364-370.

Boyer, C. (1999) *Historia de la matemática.* Versión de Mariano Martínez Pérez. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Del Hoyo, M. (1994). La geometría como matemática aplicada en su evolución histórica: de Euclides a Mandelbrot. *Revista Suma*, 1(14 y 15), 105-110.

DEMRE (2012). Resolución Matemática - Parte IV. Recuperado desde http://www.demre.cl/text/publicaciones2013/octubre/publicacion22(04102012).pdf

Douady R., (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre saberes programas y prácticas*. (pp. 241-246). Francia: Topiques éditions.

Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle.

Euclides (1991), *Elementos* (vol. 1: libros I-IV). Madrid: Gredos. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana*. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. Buenos Aires: El Zorzal.

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 361-382.

Marin, E. y Corica, A. (2011). Dispositivo didáctico para el estudio del teorema de ángulos inscritos en una circunferencia. Conferencia impartida en el I congreso internacional de enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Recuperado el 29 de septiembre de 2013, de http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/.../ActaArg2011.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2011). *Programa de Estudio de Matemáticas Segundo Año Medio*.

Moise, E. (1989). *Geometría moderna*. E.U.A.: Addison Wesley Iberoamericana S. A.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.

Anexos

Anexo 1: Secuencia de actividades

Nombre del estudiante: ____
Nivel que cursa: ______________
Nombre del establecimiento: ____
Fecha: ____________

Actividad I

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 3cm. En ésta realiza las siguientes construcciones: a) traza el diámetro AB. b) determina un punto C en el arco **AB**, de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 40°. c) traza la cuerda BC.
Espacio para realizar construcción
2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ABC? Explica tu respuesta**.
3) En la circunferencia construida determina un punto D en el arco **BA**, de tal forma que el ángulo inscrito DBC mida 50°.

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo del centro **DOC? Explica tu respuesta**.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AC		
DC		
DA		

6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

7) ¿La relación anterior es válida si el ángulo del centro **no subtiende el mismo arco** que el ángulo inscrito? **Explica tu respuesta**.

Actividad II

1) En el espacio designado, traza una circunferencia de centro O y radio 4cm. En ésta realiza las siguientes construcciones:
    a) un ángulo del centro AOB de 50°
    b) determina un punto C de tal forma que el ángulo del centro AOC mida 90° y el punto **B** esté en el arco que subtiende este ángulo.
    c) traza la cuerda CA y la cuerda CB.

Espacio para realizar construcción

2) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **ACB? Explica tu respuesta**.

3) En la circunferencia construida:
    a) determina un punto D de tal forma que el ángulo del centro BOD mida 100° y el punto **C** esté en el arco que subtiende este ángulo.
    b) traza la cuerda DB y la cuerda DC.

4) Si no tuvieras que usar el transportador, ¿cómo determinarías la medida del ángulo inscrito **BDC? Explica tu respuesta**.

5) Considerando las construcciones realizadas, completa la siguiente tabla:

Arco de circunferencia	Medida ángulo del centro que subtiende el arco	Medida ángulo inscrito que subtiende el arco
AB		
BC		

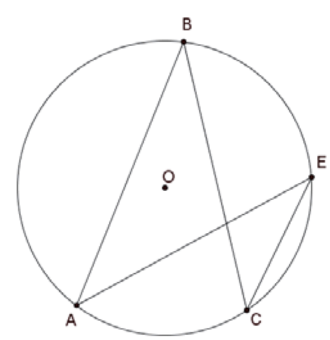
6) ¿Qué relación es posible establecer entre el ángulo del centro y el ángulo inscrito que **subtienden el mismo arco**?

7) A partir de las relaciones obtenidas en las actividades anteriores, ¿podrías afirmar que la conjetura establecida entre la medida del ángulo del centro y la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco, es **siempre válida**? **Explica tu respuesta**.

Actividad III

Instrucciones

- Abre el documento de GEOGEBRA titulado "Ángulos inscritos.ggb" ubicado en el escritorio.
- Explora la animación según las instrucciones entregadas, y responde a las preguntas en el siguiente espacio designado:

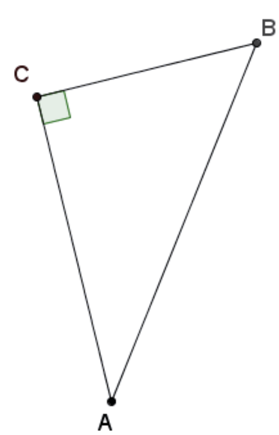
1) Desliza los puntos A, C, D y F de modo que los ángulos inscritos sean congruentes (igual medida). Si los ángulos inscritos son congruentes, ¿cómo son las medidas de los arcos que subtienden estos ángulos? **Explica tu respuesta**.
2) Si haces coincidir el punto A con D y el punto C con F, ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos inscritos?
3) Si dejas los puntos A, D, C y F fijos en la posición anterior, y deslizas los puntos B y E, ¿qué ocurre con las medidas de los ángulos inscritos?
4) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco. 

5) Traza el diámetro que pasa por el punto A (el cual coincide con el punto D), y designa por G al punto de intersección entre el diámetro AO y la circunferencia. Luego, si los vértices de los ángulos inscritos (punto E y punto B) se encuentran en el arco **GA**, desliza los puntos F y C de tal forma que coincidan con el punto G. **¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

6) Si deslizas los puntos E y B sobre el arco **GA, ¿Cuál es la medida de los ángulos inscritos en la semicircunferencia AG?**

7) Explica a partir de las relaciones matemáticas de los elementos de la figura la propiedad establecida entre las medidas de los ángulos inscritos que subtienden una semicircunferencia.

8) Dado un triángulo rectángulo ABC, construye la circunferencia que pasa por sus vértices. **Explica las pasos de la construcción**.



Actividad IV

Instrucciones

- Abre el documento de GEOGEBRA titulado “Visualización de un escenario.ggb” ubicado en el escritorio.
- Explora la animación según las instrucciones entregadas, y responde a las preguntas en el siguiente espacio designado:

1) Compara con tus compañeros las posiciones que permiten a las personas A, B, C y D, visualizar un escenario de longitud PQ en un ángulo de 60°
2) ¿Qué figura forman las posiciones que pueden ocupar las personas que quieren visualizar el escenario en un ángulo de 60°?
3) ¿Cómo se puede construir la figura que contiene a los puntos A, B, C y D, que representan la posición de las personas que visualizan el escenario en un ángulo de 60°? Además, **realiza la construcción en el archivo y guárdalo en el escritorio con tu nombre y apellido**.

Anexo 2: Notas de campo clase.

Clase 1

La clase se desarrolla en las sala del II medio, los participantes de esta son los alumnos de este curso y el docente de matemática.

El desarrollo de la clase comienza con la instrucción por parte del docente de conformar grupos de 2 o 3 integrantes, los cuales se forman de acuerdo a los intereses de los alumnos.

Posteriormente, el docente les entrega a los alumnos el material para realizar la Actividad I (regla, compás y guía con las actividades)

Se observa que los integrantes de varios grupos tienen dificultades para seguir las instrucciones de las construcciones y también en el uso del transportador para la construcción de los ángulos, ya que no sabían dónde ubicar el centro del transportador y qué radio de la circunferencia utilizar para construirlo. A partir de lo cual, el docente a cargo de la clase, guió a los alumnos con dificultad en cómo se debe utilizar el transportador, realizando preguntas como: *¿dónde debe estar ubicado el centro del vértice del ángulo?, entonces ¿dónde se debe ubicar el centro del transportador?*

Sin embargo, algunos grupos (G4, G7, G9 y G14) de alumnos realizan la actividad de forma autónoma, es decir, sin la intervención del docente, y también se observa en estos grupos un trabajo colaborativo.

Al momento de responder a las preguntas de formulación de la actividad, relacionadas con la búsqueda de estrategias para determinar la medida de ciertos ángulos, se destaca que algunos alumnos utilizan el transportador para dar respuesta, aunque en la actividad se solicita que no lo utilicen. Sin embargo, el resto de los alumnos intenta buscar estrategias para encontrar la medida de estos ángulos, las cuales se centran en la visualización de triángulos isósceles.

Registro de formulación del grupo G14.

> "*A2G14: ¿cómo determinaste la medida del ángulo ABC?*
> *A1G14: mira el ángulo BOC es exterior del triángulo OCB que se forma con los radio OC y OB que es isósceles entonces sabemos que el ángulo COB mide 140° porque el ángulo exterior de este mide 40°, y como los otros dos ángulos del triángulo miden lo mismo el ángulo ABC mide 20°.*
> *A3G14: Pero también se puede hacer así, el ángulo BOC es exterior del triángulo COB, y su medida es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes a él, estos, que miden lo mismo porque son ángulos interiores del triángulo isósceles, entonces cada uno mide 20°, entonces el ángulo ABC mide 20°.*
> *A1G14: si también se puede hacer de esa forma.*"

También, se observa que algunos grupos solicitan ayuda del profesor para dar respuesta a la actividad de formulación, pero el docente solo los guía en relación a que ellos visualicen las figuras claves, realizando preguntas como: *¿qué elementos geométricos es posible observar en sus construcciones?, ¿solo observan ángulos?, ¿cuáles son sus propiedades? y ¿cómo es posible relacionar estas con la medida de los ángulos de la circunferencia?*
De esta forma el docente les entrega la responsabilidad a los alumnos de ser ellos quienes deben responder a las actividades.

Formulación de la actividad I.4) al interior de G7

> "*A1G7: mira sé que el triángulo DBO es isósceles pero no sé cómo calcular la medida de sus ángulos ya que no se ninguna medida.*
> *A2G7: mira el ángulo CBD mide 50° entonces si el ángulo ABC mide 20°, el ángulo OBD mide 30°, ya que es lo que falta para completar los 50°,entonces ya sabemos la medida de un ángulo del triángulo.*
> *A1G7: ah sí, entonces el ángulo BDO mide también 30° ¿cierto?*
> *A2G7: si es de igual medida que el ángulo OBD, entonces calcula la medida del ángulo DOB.*
> *A1G7: mide 180, 60, 120, entonces el ángulo el ángulo DOC mide 60 para completar los 180 del ángulo extendido"*

Se observa que no todos los alumnos son capaces de responder verbalmente utilizando lenguaje matemático las formulaciones pedidas en la actividad. Sin embargo, utilizan la construcción como apoyo para ir incorporando en ellas la medida de los ángulos que van calculando según las propiedades de las figuras que visualizan en sus construcciones.
También, es importante destacar que existe bastante compromiso por parte de los alumnos en la realización de las actividades.
Luego de 60 minutos de trabajo aproximadamente, el docente a cargo de la clase, les comunica a los alumnos que se finaliza el tiempo para realizar la Actividad I, los alumnos piden un tiempo más para completar las respuestas, y el profesor les entrega 5 minutos más para finalizar.
Al finalizar la Actividad I debido al poco tiempo que quedaba para el toque de timbre, se realizó la situación de validación de la actividad I.1) y I.2), para lo cual el docente solicita algún voluntario para realizar la puesta en común de los resultados, como no hubo voluntarios se escoge al alumno A1G14, el cual a mano alzada realiza la construcción de las actividades, explicando a sus compañeros cómo utilizó el transportador para construir los ángulos pedidos, y qué estrategia utilizó para determinar la medida del ángulo solicitado. La validación de esta actividad solo se realiza a través de los cuestionamientos por parte del docente en relación a las decisiones tomadas por el alumno, en este sentido el profesor no promueve que el

resto de los alumnos participe en este debate, por lo que ellos son solo observadores.
Luego de esta exposición se finaliza la clase, explicando que en la próxima se realizaran las exposiciones de los resultados del resto de las actividades, además se solicita devolver los materiales entregados (regla, compás y guía)

Clase 2

La clase se desarrolla en las sala del II medio, los participantes de esta son los alumnos de este curso y el docente de matemática.

El desarrollo de la clase comienza con la instrucción por parte del docente de formar los mismos grupos de 2 o 3 integrantes que se conformaron el la clase 1, luego les entrega los materiales (regla, compás y guías).

Posteriormente, se realiza la situación de validación de la Actividad I, es decir, la puesta en común de los resultados de ésta, donde un alumno A1G4 explicó como determinar la medida del ángulo ABC de la actividad I.2), utilizando como base la representación de la construcción a través de GEOGEBRA. Luego, utilizando como apoyo lo realizado por A1G14 la alumna A3G14 expone la estrategia utilizada para determinar por qué el ángulo DOC mide 60° (resultado actividad I.4), realizando la siguiente exposición.

> "*A3G14: Por construcción sé que el ángulo ABD mide 30° porque el total mide 50° (señalando el ángulo CBD) y como el triángulo OBD es isósceles.*
> *Docente: ¿Por qué el triángulo es isósceles?*
> *A3G14: porque está formado por dos radios entonces, el ángulo OBD y ODB miden lo mismo 30°. Entonces por la propiedad del ángulo exterior el ángulo DOC mide 60°, la suma de los ángulos no adyacentes a él (señala ángulos OBD y ODB)*"

Nuevamente en esta situación de validación, el docente a cargo no es capaz de responsabilizar a los alumnos en cuestionar la validez de los argumentos utilizados por la alumna, de hecho, es el docente el que está constantemente realizando las preguntas.

Al finalizar la exposición se comentaron los resultados de la actividad I.5), I.6) y I.7) donde la mayoría de los alumnos fue capaz de completar la tabla con la medida de los ángulos y conjeturar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco, además, algunos alumnos hacen notar al grupo curso que esta relación es válida si los ángulos sostienen el mismo arco.

Posteriormente, se dio inicio a la resolución de la Actividad II. En el desarrollo de las actividades de construcción se observa un mayor trabajo colaborativo al interior de los grupos y entre los grupos, es decir, algunos alumnos de los grupos G4, G14 ayudaron en las construcciones de los alumnos de otros grupos. También, se observa que el docente guió algunos grupos en cuanto a la utilización del transportador según las indicaciones que se entregaron en la clase 1.

Además, los grupos como G4, G7, G9, G14, realizaron la construcción de forma autónoma, es decir, sin la intervención del docente, y la de un integrante de otro equipo.

En cuanto a la realización de las actividades de formulación de las estrategias para determinar la medida de los ángulos pedidos, se observa un trabajo colaborativo al interior de los equipos y entre los grupos, es decir, los integrantes de los equipos comparaban sus resultados y las estrategias utilizadas, ayudándose mutuamente. En general las discusiones se centran en visualizar triángulos en la construcción y desde ahí relacionar las medidas de los ángulos que se conocen. A partir de la colaboración el trabajo de los alumnos se realiza de una forma más óptima y rápida en comparación con el trabajo realizado en la clase 1.
Registro de formulación de G9 que logra determinar la medida del ángulo BDC (actividad II.2)

> "*A2G9: mira tienes que ver los triángulos isósceles en el OBD hay un ángulo de 100°, entonces los otros dos ángulos de igual medida ¿cuánto miden? (señala los ángulos basales congruentes del triángulo)*
> *A1G9: 80 dividido en 2 40 cada uno.*
> *A2G9: ya entonces anótalo, y ¿cuál otro triángulo isósceles ves?*
> *A1 G9: el BOC, pero ya sabemos las medidas de sus ángulos y …..*
> *A2G9: pero mira el triángulo OCD también es isósceles ¿cierto?, si uno de sus ángulo mide 60 entonces los otros dos miden 60.*
> *A1G9: a.. entonces mira si una parte de ese ángulo (señala ángulo CDO) mide 40° la otra mide 20 para completar los 60,*
> *A2G9: entonces ya sacaste cuanto mide el ángulo BDC mide 20°.*"

Registro de formulación de G2 que no logra determinar la medida del ángulo BDC (actividad II.2)

> *"A2G2: ¿cómo calculamos la medida del ángulo BDC?*
> *A1G2: No es posible determinar la medida del ángulo BDC ya que nos faltaría un ángulo para determinar la medida, se debería realizar igual que en el ejercicio anterior donde había dos ángulos, y para este caso falta un ángulo, solo se da la medida de un ángulo.*
> *A2G2: entonces la respuesta que colocamos es que no se pude calcular porque nos falta la medida de un ángulo"*

También, se observa que el docente guía algunos grupos en el trabajo de visualización de las figuras presentes en la construcción, realizando preguntas como: *¿qué figuras observan en sus construcciones?, ¿solo observan ángulos?, ¿es posible observar otras?, ¿cómo se relacionan sus propiedades con los datos que ya conocen de la construcción?*
A partir de lo cual, el docente nuevamente hace responsables a los alumnos de que sean ellos los encargados de dar respuesta a la actividades.

También, se observa que la mayoría de los grupos intenta visualizar los triángulos isósceles para relacionar la medida de los ángulos, aunque otros alumnos usan el transportador para determinar la medida de los ángulos pedidos.
Se observa además, que no todos los alumnos son capaces de responder verbalmente utilizando lenguaje matemático las formulaciones pedidas en la actividad. Algunos realizan esquemas indicando que a través de los triángulos isósceles es posible determinar la medida de los ángulos, otros utilizan la construcción como apoyo para ir incorporando en ellas las medidas de los ángulos que van calculando según las propiedades de las figuras que visualizan en sus construcciones.
Luego de 40 minutos de trabajo aproximadamente el profesor pide que se realice la puesta en común de las actividades, produciéndose la situación de validación de las actividades II.2) y II. 4)
El grupo G9 expone sus resultados utilizando la construcción de la actividad II.1) y II.2) realizada en GEOGEBRA y proyectada en la pizarra.
Registro situación de validación de grupo G9.

> "*A2G9: Como el triángulo COA es triángulo isósceles*
> *Docente: ¿por qué el triángulo es isósceles?*
> *A2G2: porque comparte dos radio, formado por dos radio, entonces nos faltaría 90° para completar los 180° y los ángulos (señala el ángulo ACO y el ángulo OAC) miden 45° cada uno. Además el triángulo OBC es isósceles y sus ángulos miden 70° cada uno (señala ángulos CBO y BCO). Entonces tendríamos que sacar la diferencia entre 70° y 45°, 25°. Entonces el ángulo ACB mide 25°*"

Luego se une a la explicación de la estrategia para la actividad II.2) el alumno A1G9, y realizan la siguiente validación:

> "*A1G9: Hay que ver buscar los triángulos isósceles el CDO y el BDO, luego hay que buscar los ángulos basales.*
> *A2G9: Entre BOD hay 100°, y entre COB hay 40°, entonces el ángulo DOC mide 60°…………..*
> *Docente: ¿entonces los ángulos basales cuánto miden?*
> *A1G9: 60, para completar los 180°, entonces por diferencia el ángulo BDC mide 20°*"

En todo el proceso de validación de las estrategias utilizadas por los alumnos se observa que el docente es quien realiza los cuestionamientos de las estrategias que utilizaron los alumnos, y no incorpora al resto del curso en el cuestionamiento de éstas. Es así que los alumnos que no exponen son solo observadores.
Luego de la exposición se comentaron los resultados de la actividad II.5), II.6) y II.7) donde la mayoría de los alumnos está de acuerdo con los resultados, y por lo tanto son capaces de determinar que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco en las dos actividades que se realizaron.
Posteriormente se realiza la situación de institucionalización solo en los casos en que el centro se encuentra en una de las cuerdas del ángulo inscrito y en el interior de éste debido a que solo quedan 20 minutos para terminar la clase.
El docente realiza lo siguiente en la situación de institucionalización:

El docente escribe en la pizarra el teorema realizando a un costado un dibujo que lo represente, posteriormente le pregunta a los alumnos, ¿en las construcciones realizadas el centro de la circunferencia donde se ubicaba con respecto al ángulo inscrito?
Un alumno contesta que en el primer caso en el interior y en el diámetro, y el docente le pregunta a ese alumno ¿y qué relación existe entre el diámetro y el ángulo inscrito? Y el alumno contesta que es uno de sus lados.
El docente luego pregunta de forma general al curso ¿en las últimas actividades donde estaba ubicado el centro con respecto al ángulo inscrito? Otro alumno contesta en el exterior.
Luego el docente vuelve a preguntar de forma general al curso ¿y en todos estos casos el ángulo inscrito mide la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco? Los alumnos revisan sus guías y contestas que sí.
Entonces el docente les dice a los alumnos que hay que considerar esos tres casos para hacer la demostración del teorema para formalizarlo, y que para eso se debe utilizar la misma estrategia que usaron para dar respuesta a las actividades, y les pregunta a los alumnos de forma general ¿cuál es la clave, cuál fue la estrategia utilizada?, y algunos alumnos contestas los triángulos isósceles, buscar los triángulos isósceles. Posteriormente parte la demostración del teorema con el caso 1: centro en una de las cuerdas del ángulo inscrito, y el caso 2: centro al interior del ángulo inscrito.

En este proceso de demostración se observa que el docente retoma lo realizado por los alumnos en las actividades, en especial la estrategia utilizada por ellos para dar respuesta a la medida de los ángulos pedidos,

los hace participar en la identificación de estos triángulos y en la de sus lados y ángulos congruentes, y la justificación de los pasos de la demostración, preguntándoles algunos alumnos del curso.
Luego de la demostración de estos dos casos se finaliza la clase comunicándoles a los alumnos que en la próxima se demostrara el tercer caso, y se les pide además que entreguen los materiales (guías, regla y compás)

Clase 3

Antes de las observaciones de la clase, es importante mencionar que en el recreo anterior a la clase se lleva a la sala el “laboratorio móvil” que consta con 40 notebook, los cuales con anterioridad tienen instalados el software GEOGEBRA y la carpeta “actividades geogebra” la cual contiene los archivos de GEOGEBRA que se trabajaran en esa clase.

En cuanto al desarrollo de la clase, esta se realiza en la sala del II medio y los participantes de ésta son los alumnos de este curso y el docente de matemática.

El desarrollo de la clase comienza con la demostración del teorema del ángulo inscrito para el caso en que el centro de la circunferencia se encuentra en el exterior de la región del ángulo inscrito (tercer caso). Nuevamente se observa, que el docente hace participar a los alumnos en la visualización de los triángulos isósceles, solicitándoles a algunos de ellos que identifiquen cuales son estos ángulos congruentes y por lo tanto que calculen la medida de sus ángulos a través de los datos que se conocen. De esta forma, se evidencia que el docente hace participar de forma activa a los alumnos en la demostración del teorema.

Al finalizar la demostración el docente les pide a los alumnos que conformen los mismos grupos de 2 o 3 integrantes con los cuales han trabajado las clases anteriores, y luego se les entrega las guías, el material de construcción (regla y compás) y los notebook.

Cada alumno trabaja con un notebook los archivos que están en el escritorio según las instrucciones entregadas en las guías, el trabajo de exploración de las construcciones en estos archivos se realiza de forma óptima y rápida. Se observa en los grupos colaboración entre ellos al momento de que algún integrante del grupo o integrante de otro grupo tenga alguna dificultad con el uso de las herramientas del software GEOGEBRA. En esta etapa, el docente solo participó aclarando las instrucciones de las actividades.

No todos los alumnos logran realizar la formulación de la actividad III.4) solo algunos son capaces de justificar por qué los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son congruentes, recurriendo al teorema del ángulo inscrito.

En relación a la actividad III.5) se observa que todos los alumnos son capaces de conjeturar que los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos, sin embargo no todos logran justificar por qué ocurre esta relación, y los que lo logran realizar lo hacen justificando a través del teorema del ángulo inscrito.

También, se observa que la mayoría de los alumnos logran construir la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo rectángulo de la actividad III.8) y para determinar el centro de ésta miden con la regla la hipotenusa de este triángulo y ubican aproximadamente el punto medio.

Sin embargo otros alumnos comienzan a explorar con el compás un punto de la figura para fijarlo y por lo tanto para ubicar el centro de la circunferencia y construirla. A pesar de esta exploración no son capaces de realizar la construcción correctamente.
En relación al desarrollo de la Actividad IV se observa que la mayoría de los alumnos al utilizar la herramienta *elije y nueve* de GEOGEBRA logran identificar que la figura que deben construir es un arco de circunferencia, sin embargo no son capaces de realizar la construcción a pesar del proceso de experimentación que realizaron con la construcción.
Además, el docente solo intervino en los grupos para aclarar las dudas con respecto a la utilización de las herramientas de GEOGEBRA, y también los guio en la construcción del arco cuando los alumnos sabían que esta era la figura que debían construir, realizando las siguientes preguntas: *¿qué datos o elementos necesitan conocer para la construcción de este arco?, ¿cómo es posible conocer su ubicación?, ¿cómo pueden relacionar esta actividad con todo lo que han aprendido en las actividades anteriores?*. Sin embargo a pesar de que el docente guio a algunos grupos con estas preguntas, estos no logran construir el arco solicitado.
Se observa además, que en los grupos que lograron construir el arco, existió un trabajo colaborativo entre los integrantes, realizándose así el proceso de formulación de esta actividad al interior de ellos.
10 minutos antes de finalizar la clase el docente les pide a los alumnos que comiencen a terminar las actividades y que no olviden guardar el archivo de la actividad IV) con su nombre.