Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Estudio de actividades que permiten el tránsito entre los conceptos razón, proporción y función lineal en estudiantes de octavo grado

Tesis para optar al Grado de

Magíster en Didáctica de la Matemática

De: Mónica Elena Carreño Adasme

Profesor Guía: Sr. Raimundo Olfos Ayarza

2014

Agradecimientos

A mis padres por su infinito amor, apoyo incondicional y su profunda comprensión.

A mis amigos, por entender mis ausencias desde que comenzó este proyecto, en especial a Karla Sánchez y Katherine Fariña, por escucharme cuando las necesité.

Y en espacial a ti, con inmenso amor.

Índice General

Capitulo 1
Problema de investigación

1.1 Planteamiento del problema

Una de las problemáticas en el estudio de la Matemática Educativa, hace referencia a las dificultades que presentan los estudiantes al aprender un concepto matemático. Dichos problemas se pueden entender desde la mirada de los docentes, del estudiante mismo o desde el saber.

La disciplina que aborda esta problemática es la Didáctica de las Matemáticas, la que se viene consolidando desde hace cuatro décadas aproximadamente. En Francia, se encuentra a un grupo de investigadores, dentro de los cuales se destacan en esta investigación a Michèle Artigue, Guy Brousseau e Ives Chevallard. Estos autores han levantado teorías sobre la problemática principal de esta ciencia social, encontrando resultados para la metodología de enseñanza como en las problemáticas mismas del aprendizaje.

La Didáctica de la Matemática tiene un enfoque científico, centrándose en las investigaciones y teorías relacionadas a los comportamientos cognitivos y sociales de la enseñanza y el aprendizaje.

Los resultados que nacen de esta ciencia, han llevado a una constante reformulación de currículos escolares, y Chile no es una excepción. Este estudio pretende ser un aporte en la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque didáctico.

La investigación analiza el estudio de la relación existente entre la razón, la proporcionalidad y la función lineal, y cómo dicha relación influye en el aprendizaje de los estudiantes del 8° grado.

Para la realización de esta investigación, se toman los antecedentes históricos y epistemológicos sobre el concepto de razón, la proporcionalidad y la función lineal. A partir del análisis realizado, se confeccionan tres actividades que permiten entender los conceptos anteriormente mencionados.

La metodología de investigación utilizada es la Ingeniería Didáctica, que dicta la realización de un análisis a priori sobre las actividades y compararlas con los resultados posteriori, para contrastar lo esperado con lo que realmente realizan los estudiantes. Esto permite observar el nivel de adquisición de los aprendizajes en los estudiantes.

Dicha metodología, permite obtener y analizar resultados que se comparan con los objetivos de la investigación realizada, entregando así información valiosa para la práctica de la enseñanza y el aprendizaje, lo que se puede observar en la fase de experimentación, a través de los registros realizados por parte de los estudiantes.

Efectuando un estudio epistemológico, manteniendo un suficiente cuidado en la transposición del conocimiento, y generando una secuencia de situaciones didácticas, es posible generar este trabajo de investigación que responda a la problemática planteada, entregando resultados que permiten abordar una propuesta distinta de enseñar los conceptos de razón, proporcionalidad y función lineal.

1.2. Problemática de investigación

La noción de linealidad se viene tratando desde la matemática antigua, relacionado al concepto de proporcionalidad, desde las culturas ancestrales como los egipcios y babilonios, además de la grecia clásica, la cultura china, árabe entre otros. En el siglo XVII es el período donde se inicia la distinción entre la proporcionalidad y función lineal. Es en el siglo XIX el periodo en el cual emerge la concepción de linealidad como fundamentos del álgebra lineal (Gómez, 2011).

Los problemas relacionados a estructuras multiplicativas se encuentran presenten con fundamentos teóricos matemáticos, que se relacionan al concepto de razón y proporción. Piaget (1958) afirma que "*el razonamiento proporcional, junto con la habilidad de formular hipótesis y trabajar con un cierto número de variables en un problema, resultaban especialmente indicativos de la habilidad para razonar formalmente*". El uso del razonamiento proporcional es considerado como uno de los más importantes, principalmente por sus numerosas aplicaciones en la matemática escolar, en todo nivel, transitando desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada, la cual se relaciona con la aritmética, el álgebra a su vez con la geometría, por medio de procesos de variaciones y cambios en dos o más espacios de medida. Además, fortalece el entendimiento conceptual de la función lineal de una forma más natural y contextualizada para el estudiante. Por último, el razonamiento proporcional, permite no solo resolver problemas relacionados a conceptos matemáticos, sino también construir modelos simples y demostraciones en geometría, o bien, de su uso en la física relacionado a concepto de velocidad, aceleración, tiempo y en la química en concentración o balanceo de ecuaciones (Ceballos, Sánchez, Oller, 2012) entre otros.

No obstante, en la matemática escolar actual chilena, se puede observar a través de los planes y programas de 7° y 8° grado que existe una relación entre concepto de proporcionalidad y la noción de linealidad. Sin embargo, la experiencia personal me ha demostrado que esta relación no es llevada al aula. El concepto de proporción es enseñado por medio de la regla de tres, impidiendo que los estudiantes reflexionen sobre la relación existente entre razón, proporcionalidad y función lineal.

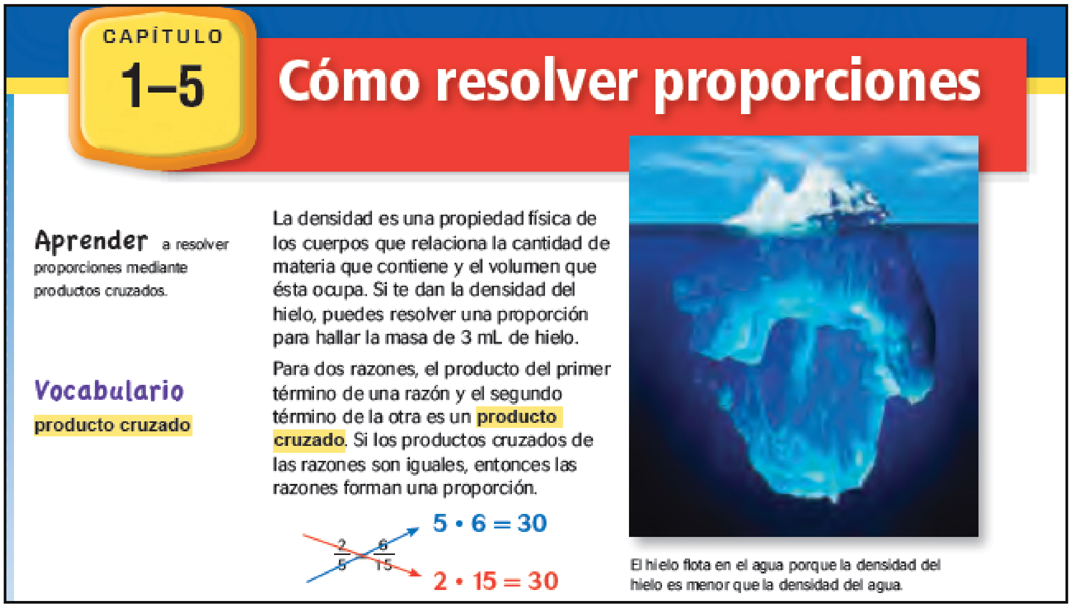
Además, Gómez (2006) evidencia a través de datos empíricos que no se profundiza en las definiciones de razón ni de magnitudes, sino que se expresa solamente como número, no estableciendo la relación entre estos conceptos, generando de esta manera en el estudiantado la dificultad para su comprensión en estudios superiores.

Dicha problemática se puede observar en los textos escolares chilenos, donde el inicio del concepto de proporción se define inmediatamente como una *regla de tres,* lo que se evidencia en las siguientes figuras.

En el texto escolar de 7° grado (Alfaros y otros 2013), la enseñanza de la proporción se encuentra enseñada como productos cruzados, tal y como se evidencia en la figura 1.

En esta, podemos observar que se presenta inmediatamente la forma en que se debe usar la regla de tres. De esta forma, se pierde totalmente el sentido de aprender el concepto de razón y sus relaciones de equivalencia para conformar una proporción.

En la figura 2, se observa nuevamente la problemática señalada anteriormente en donde se hace referencia técnica de la regla de tres de para resolver problemas de carácter proporcional (Calderón y otros, 2012).


CAPÍTULO 1–5

Cómo resolver proporciones

Aprender a resolver proporciones mediante productos cruzados.

Vocabulario

producto cruzado

La densidad es una propiedad física de los cuerpos que relaciona la cantidad de materia que contiene y el volumen que ésta ocupa. Si te dan la densidad del hielo, puedes resolver una proporción para hallar la masa de 3 mL de hielo.

Para dos razones, el producto del primer término de una razón y el segundo término de la otra es un **producto cruzado**. Si los productos cruzados de las razones son iguales, entonces las razones forman una proporción.

$\frac{2}{5} \quad \frac{6}{15}$

$5 \cdot 6 = 30$

$2 \cdot 15 = 30$

El hielo flota en el agua porque la densidad del hielo es menor que la densidad del agua.

Figura 1: Técnica para la enseñanza de proporcionalidad en 7° grado.

Proporción directa $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ cociente constante

$$a \cdot c = x \cdot b$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = x$$

Figura 2: Regla de tres.

En la Figura 3 se extrae un ejemplo del texto escolar de 8° grado (Dittborn y otros 2012), en donde también, se realiza el uso de esta técnica para la resolución de ejercicios.

Al enseñar la regla de tres se pierde el sentido de estudiar las razones y las proporciones, dificultando el desarrollo del pensamiento proporcional (Vergnaud, 1988), simplificando los conceptos a un perfil utilitario, es decir, es una regla en la cual se obtiene una respuesta rápida.

1. ¿Para qué valor de x las razones $\frac{36}{x}$ y $\frac{24}{8}$ forman una proporción?

Para que $\frac{36}{x}$ y $\frac{24}{8}$ formen una proporción, el valor de las razones debe ser el mismo número, es decir:

$\frac{36}{x} = \frac{24}{8}$

Además, la igualdad anterior se cumple si y solo si:

$x \cdot 24 = 36 \cdot 8$ .... Despejamos x y calculamos su valor.

$x = \frac{36 \cdot 8}{24} = \frac{288}{24} = 12$

Por lo tanto, si $x = 12$, las razones $\frac{36}{x}$ y $\frac{24}{8}$ forman una proporción.

Figura 3: Ejercicio extraído de un texto escolar chileno, nivel de 8º grado.

1.3 Clarificación de conceptos

Para efectos de esta tesis se entenderán los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad de la siguiente forma:

Razón.

La definición de la razón es tratada desde los *Elementos* de Euclides, en el libro V como “una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad” *y que “guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra” (Oller 2012).*

Sin embargo, Freudenthal (1983) define la razón como la comparación entre magnitudes y cantidades de magnitud.

Proporción y proporcionalidad

En Cano (2012) se cita a Karplus *et al.* (1983) para definir la proporcionalidad, la que se establece como:

> *"Por otra parte, se tiene que la esencia natural de la proporcionalidad de la interdependencia lineal de dos variables x e y, se puede describir como sigue: para cualquier correspondencia existente entre x e y, existe la misma correspondencia entre todos los múltiplos iguales de x e y. Dicho de otra forma, la proporcionalidad no puede estar divorciada de la comprensión de funciones lineales (Karplus, et al, 1983)."*

El razonamiento proporcional es un tipo de pensamiento complejo que involucra el reconocimiento de comparaciones entre magnitudes y comparaciones múltiples. También, se considera al razonamiento proporcional como la base del pensamiento y desarrollo de la aritmética en niños (Holguín, 2012)

Para Piaget, el pensamiento proporcional (razonamiento proporcional) es una habilidad cognitiva del ser humano y que marca la diferencia entre sus etapas pre-operacional y operacional. Con respecto al razonamiento proporcional lógico y matemático, (Obando *et al.* 2013) dice:

> *Bajo el aspecto lógico, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón es una relación entre dos variables, y la proporción una relación de equivalencia entre dos razones) e implica el recurso a una lógica de segundo orden. Bajo el aspecto matemático, las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas*

proposicionales de equivalencia (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto (si $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, entonces $xy' = x'y$).

Por tanto, es importante generar el *razonamiento proporcional* en estudiantes de temprana edad, desde la enseñanza de figuras y patrones hasta una matemática más formal. Sin embargo, se debe ser cuidadoso con la edad en que se enseñan para implementar su desarrollo, puesto que si se adelanta la enseñanza cuantitativa, puede generar que no se comprendan los conceptos al transcurrir el tiempo (Piaget, 1958). Por el contrario, si se omite esta enseñanza, los resultados posiblemente sean una mera entrega de tecnisismos. Al ocurrir lo anteriormente mencionado, estamos frente a la ausencia de desarrollo de la habilidad del razonamiento proporcional.

1.4 Objetivos de investigación

Objetivo general:

Estudiar actividades de aula que faciliten en el alumno el tránsito entre la razón y la proporcionalidad hasta la función lineal.

Objetivos específicos:

1. Estudiar 3 situaciones de clases que faciliten en estudiantes de 8° grado avanzar en la comprensión de relaciones funcionales.
2. Potenciar en estudiantes de 8° grado la comprensión de la estructura multiplicativa de los números racionales positivos, dando significado a las operaciones con cantidades de magnitud, en relación a las unidades de medida.

Capítulo 2

Marco teórico y Metodología de la investigación

2.1 La Transposición Didáctica

La transposición didáctica se comprende como la transformación del conocimiento del saber sabio al saber enseñado. Para que ello sea posible, se deben modificar ciertos contenidos que son seleccionados para ser transformados en contenidos enseñables, en este proceso el concepto sufre de una descontextualización y una recontextualización cuando es enseñado. Chevallard (2007) define a una transposición didáctica como "*la transformación del saber científico o saber erudito en un saber posible de ser enseñado.*"

Es todo el proceso de trasformación que se hace desde que se designan los contenidos de saberes y pasan a ser contenidos a enseñar, surgiendo así el proyecto social de enseñanza-aprendizaje. Estos contenidos a enseñar pre-existen al movimiento que los designa como tales (a la noosfera), pero a veces son producto de verdaderas creaciones didácticas. Vemos entonces que cuando un saber a enseñar ha sido designado sufre un conjunto de trasformaciones adaptativas hasta llegar a ser un objeto de enseñanza. Desde el momento en que la noosfera designa qué conocimiento será un saber a enseñar, éste debe ser expuesto a la transposición didáctica que trasforma dicho saber a enseñar, como ya se ha mencionado, en un objeto de enseñanza.

El mecanismo de transposición deja a la luz cuáles son los saberes aptos para ser enseñados y aquellos que no pueden ser llevados a la escuela. La transposición didáctica ha reformulado constantemente en el marco escolar los conceptos que deben ser enseñados, siendo un proceso de renovación sobre los conceptos a enseñar desde los conocimientos académicos, el cual llega a descontextualizarse para contextualizarse y ser enseñado.

En relación a la enseñanza, la Transposición Didáctica define la *vigilancia epistemológica*, siendo la actitud crítica relativa a los modos del saber y sus transformaciones. Es la posibilidad que tiene el profesor ante algunas enseñanzas de ser capaz de reflexionar sobre su práctica pedagógica, aludiendo a la atenta mirada que debe haber entre el saber sabio y el saber enseñar. A ello, el docente debe preguntarse, criticar y reflexionar sobre su práctica. Por tanto, todos aquellos cuestionamientos conceptuales en relación a su práctica se validan constantemente.

El ejercicio del docente de mantenerse reflexivo (vigilancia epistemológica) posibilita el análisis científico del sistema didáctico y sirve para hacer evidente lo que no se ve, para hacer más claro lo que no lo es tanto. En general el docente no le presta mucha atención a esta transposición y en el caso de que la reconozca lo hará con la actitud de que está descubriendo algo oculto y con la sensación de culpabilidad ante la verdad matemática. Tal vez, por eso se observa una cierta resistencia a ver, admitir o aceptar el análisis didáctico.

Un conocimiento científico llega hasta el docente como un objeto de enseñar útil para la economía del sistema didáctico, producto de la transposición didáctica, cuyo trabajo continúa después de la introducción didáctica del objeto a saber.

Chevallard (2000), en su teoría distingue tres tipos de objetos de saber en el campo de las matemáticas con el fin a ser utilizada para el análisis epistemológico del funcionamiento didáctico del saber. Estos se clasifican en:

- Noción matemática: Generalmente son construidas y pueden adoptar la forma de una definición o una construcción (la construcción también puede ser una definición) y poseen propiedades y ocasiones de uso. El profesor espera frente a estos objetos de saber, que son las nociones matemáticas (objetos y herramientas de estudio), que el alumno sepa reconstruir una definición, demostrar una propiedad, reconocer ocasiones de uso. Solamente las nociones matemáticas son candidatos para ser objetos de enseñanza o de saber.
- Nociones paramatemáticas: Son pre-construidas por mostración, y que sirven como herramienta de la actividad matemática (y no como objeto de saber), que ayudan en la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemático. Estas nociones no son enseñadas, más bien son objetos de estudio que entran en el campo de percepción didáctica, de manera que el docente toma conciencia de ellos y les da un nombre.
- Nociones protomatemáticas: son movilizadas implícitamente en el contrato didáctico, y que están referidas a las competencias o capacidades del alumno, mantenida generalmente en forma implícita (oculta). Si bien el profesor no explicita estas capacidades, si están definidas entre los objetivos de la enseñanza como parte de las capacidades que el estudiante debe tener. Sus propiedades se utilizan para resolver cierto tipo de situaciones

problemáticas, pero no se reconocen ni como objeto de estudio ni como herramienta.

2.2 Teoría de Situaciones Didácticas

Para dar sentido a la realización de la secuencia didáctica, se utilizará la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brosseau. Esta teoría se contrapone a la enseñanza tradicional donde el estudiante solo recibe los conocimientos que son entregados por el docente y siendo un agente pasivo en el proceso de aprendizaje, comprendiéndose este tipo de enseñanza como el acto de transmitir saberes. Sin embargo, la teoría de situaciones didáctica propone a la enseñanza como eje articulador de conocimientos, es decir que la enseñanza de un objeto matemático genere conocimientos, en la cual se puedan establecer relaciones para transformarla y reorganizarla en un nuevo saber.

Brusseau (2007), toma ciertos componentes de la epistemología de Piaget para explicar que el conocimiento matemático no se genera de forma espontánea, sino que se requiere de tres componentes: el docente, el estudiante y el medio didáctico. El docente proporciona el medio didáctico y el estudiante interactúa con este medio para construir conocimientos. La adquisición del conocimiento es un proceso dentro de un sistema, el que a su vez se encuentra formado por diversos subsistemas que se relacionan entre sí.

En la teoría se considera que cada conocimiento matemático posee una situación que la caracteriza, y desde ahí es posible articular una situación didáctica que responda a las necesidades sobre lo que se desea que el estudiante adquiera. Para ello es importante que las estrategias que aportarán a la construcción de un conocimiento sean diseñadas por el docente con la intencionalidad de lograr un objetivo previamente establecido. Algunas situaciones requieren de los conocimientos previos de los estudiantes para la construcción de un saber, sin embargo hay otras que permiten al estudiante construir por sí mismo un nuevo conocimiento.

Se identifican dos formas de articular las situaciones para generar conocimientos; la situación didáctica y la a-didáctica; la primera hace referencia a que una situación está construida de manera intencional por parte del docente con el fin de que el estudiante adquiera un saber determinado, por medio de la interacción entre el docente y el estudiante. En cambio, en la segunda el estudiante interactúa con una problemática y es él quien decide qué estrategia utilizará y cuál será más eficaz sin la intervención del docente en lo que concierne al saber que está en juego.

Dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas se pueden identificar las fases por la cuales debe transitar el estudiante para la construcción progresiva de un conocimiento. Estas son: acción, formulación, validación e institucionalización.

- La situación acción: El estudiante interactúa sobre un medio didáctico y aplica sus conocimientos previos y desarrolla un determinado saber.
- La situación de formulación: El estudiante debe comunicar las estrategias que consideró apropiada.
- La situación de validación: se pone en juicio los conocimientos obtenidos por los estudiantes y el docente se cerciora si estos conocimientos son correctos.
- La situación de institucionalización: se relaciona las conclusiones obtenidas por los estudiantes con el saber matemático.

2.2.1 Obstáculos

El Obstáculo para Brousseau (2007) es un conocimiento que en un ámbito da resultados correctos, pero que resulta falso o inadaptado en un ámbito nuevo o más amplio, y donde se establece un nuevo conocimiento en contra del anterior de manera que no existe relaciones lógicas y evidentes entre ambos, más bien existe una relación de competencia. Estos conocimientos no son construcciones personales, son respuestas universales en ámbitos precisos y aparecen necesariamente en la génesis histórica o didáctica de un saber. Se manifiestan a través de errores del estudiante, errores unidos por una fuente en común, una manera de conocer, una concepción característica coherente, aunque no correcta a un conocimiento anterior que tuvo éxito en otro dominio, pero no en el que se está usando en ese momento.

Los obstáculos son parte del acto mismo de conocer y no desaparece con el aprendizaje de un nuevo conocimiento, sino que pone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y cuando las circunstancias lo permiten reaparece, por lo que el obstáculo es constitutivo del saber y como tal, no hay que rechazarlo, es un conocimiento legítimo e inevitable. No se pueden ni se deben evitar, son constitutivos del conocimiento mismo.

2.3 Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación fundamentada por Artigue (1995), y se basa en la teoría de situaciones didácticas Brousseau (2007) y en la transposición didáctica Chevallard, (2000). Esta metodología de investigación nace a comienzos de los ochenta en la escuela didáctica francesa y su aporte ha sido fundamental en el estudio de situaciones didácticas para evidenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de contribuir con estudios científicos sobre la disciplina.

Artigue (1995) define a

> *"la ingería didáctica con este término a una forma de trabajo didáctica equiparable con el trabajo del ingeniero quien para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta a someterse a un control de tipo científico, Sin embargo al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos muchos más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo"* (p.34).

La ingeniería didáctica como proceso integra tres dimensiones: *la epistemología* como eje de la investigación, relacionado a los saberes que se encuentran en juego, *la cognitiva* en relación al saber en funcionamiento, es decir, los procesos cognitivos que se encuentran al momento del aprendizaje y *la didáctica* que se relaciona al sistema de enseñanza-aprendizaje en el cual se ve inmerso el estudiante.

Como metodología de investigación, se caracteriza por la observación y el análisis de secuencias de enseñanzas. Sin embargo, va a depender de la investigación didáctica que se desee llevar a cabo. En la investigación didáctica se distinguen dos grandes niveles: la *micro y macro-ingeniería.* Las investigaciones relacionadas a la micro-ingeniería son más prácticas y locales en cuanto a los fenómenos de clases, en cambio, la macro-ingeniería estudia los fenómenos con mayor profundidad. A pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales que impone, esta se hace indispensable.

2.3.1 Fases de la metodología de una Ingeniería didáctica

Artigue (1995) define cuatro fases temporales en el proceso experimental, las cuales son:

Primera fase: Análisis Preliminares (describe el contexto). Hace referencia a los conocimientos teóricos didácticos generales como específicos del campo de estudio como son: el análisis epistemológico sobre el objeto matemático que se encuentre en estudio, la enseñanza tradicional y sus efectos, los estudiantes, los obstáculos y dificultades que determinan su evolución, las condiciones donde se presenta el estudio didáctico y los objetivos en que se enmarca la investigación, entre otros análisis. Los análisis preliminares enmarcan la investigación y son la base de la ingeniería didáctica.

Segunda fase: Concepción y análisis a *priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería. En esta segunda fase, el investigador debe tomar decisiones sobre las variables del estudio y elige sobre las cuales desea trabajar, además de dejar otras como modo de restricción. Las variables que se consideren pertinentes para el investigador se clasificarán en dos niveles una de manipulación y otra de comando.

- Las macro-didácticas o globales concernientes a la organización global de la ingeniería didáctica
- Las variables micro-didácticas o locales concernientes a la organización de una secuencia o de una fase.

Los análisis a priori están conformados por una parte que es descriptiva y otra predictiva, la primera se centra en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se generan, en cambio la segunda corresponde a los resultados que se espera producir, tanto probable como segura.

Tercera fase: Experimentación o realización didáctica. En esta fase se lleva a cabo la situación didáctica sobre el grupo de estudiantes.

- La explicitación de los objetivos y condiciones sobre la realización de la investigación a los estudiantes que serán sometidos a la investigación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- Aplicación del instrumento de investigación.
- Se registran los datos observados mientras dura la experimentación.

Durante el transcurso de esta fase se respetan las decisiones abordadas en el análisis a priori.

Cuarta fase: Análisis a posteriori y validación. Esta fase, sigue un análisis *a posteriori* que se basa en los datos recogidos a los largo de la experimentación, de las observaciones realizadas en la secuencia de enseñanza y las producciones realizadas por los estudiantes, tanto en clase como fuera de ella. Todos estos datos son complementados con los de metodologías externas, es decir, con cuestionarios, entrevistas individuales o grupales que fueron aplicadas en el momento de enseñanza o en el transcurso de esta. Al recoger los datos, estos son confrontados entre el análisis a priori y a posteriori, validándose de la hipótesis formulada por la investigación.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación ha permitido contribuir a la didáctica desde un enfoque científico, en donde el investigador se sumerge en la enseñanza de los sistemas educativos y da respuestas a necesidades permanentes que se encuentran en el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de generar innovación en situaciones de aprendizaje sobre un objeto matemático en estudio. Ante esta noción, Douady (1995) señala que:

> *" ... el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumno"*

Por último, a diferencia de otro tipo de investigación la ingeniería didáctica tiene la capacidad de validarse en sí misma, por medio de la comparación del análisis *a priori* y *posteriori*, lo cual permite rectificar la hipótesis planteada anteriormente en el análisis *a priori*.

Capítulo 3

Análisis preliminar

Para el análisis de investigación asociado a la ingeniería didáctica se tomaron a considerar los siguientes componentes.

La realización de este análisis preliminar será de carácter sistemático, en el cual se abordarán las siguientes dimensiones:

- Epistemológica. En esta dimensión se realiza un estudio histórico sobre los conceptos matemáticos analizados en este escrito (razón, proporcionlidad y función lineal). Dicho estudio tiene como finalidad el conocimiento de las características matemáticas de los conceptos mencionados anteriormente.
- Didáctica. En esta dimensión se mencionan los programas de estudios chilenos, específicamente los contenidos mínimos obligatorios.
- Cognitiva. En esta dimensión, se describe el contexto que se encuentra inserto el grupo de estudio y se muestran resultados sobre las dificultades y errores sobre los conceptos en estudio.

3.1 Dimensión epistemológica

Se identifican tres grandes hitos en la historia sobre la iniciación y desarrollo del concepto de razón y proporción. Estos son Elementos de Euclides (s. III a. C), el comentario de Lui al Jiu zhang suan shu (s. III), y en los comentarios de Ommar al- Khayyan a Elementos (s. XI).

El primer tratamiento sobre razón y proporción se encuentra en la cultura egipcia en el papiro de *Rhind donde su uso se centraba en problemas de uso cotidiano, también se encuentran evidencias en* los textos hindúes en el manuscrito de *Bakshali,* formado en los primeros siglos de esta era. De igual forma se encuentran escritos en la cultura china en el siglo I, y en textos de la matemática árabe, en la obra de *AL-Biruni (s.X),* aunque se encuentra en un periodo más tardío. En la matemática babilónica, que es anterior a la griega, el uso de la proporcionalidad se encontraba en problemas de carácter tanto como astronómicos, de área, de volumen y mercantil (Acosta, 2011). También se encuentran escritos sobre el uso de la razón y la proporción en la cultura griega. Dicha cultura obtuvo resultados primitivos de linealidad, los cuales fueron adoptados por las culturas china, hindú, árabe y en la Europa medieval (Ceballo 2012).

Desde entonces, los problemas relacionados a estructuras multiplicativas, no han dejado de estar presente con un fundamento matemático que se relaciona con los conceptos de razón y proporción de Euclides. El uso del razonamiento proporcional, es considerado como una de las más importantes por sus numerosas aplicaciones desde la práctica ancestral (Gómez 2006). Estos son algunos ejemplos prácticos:

- La regla de compañías (reparto de beneficio).
- La regla conjunta (trueques).
- Los cambios de una moneda por otra

- Las escalas.
- La tara, el seguro, el descuento, la avería (porcentaje).
- Las acciones simultáneas (problemas de de grifos, relojes, móviles, trabajos en conjunto y similares.
- Los arrendamientos, entre otros.

En los libros V y VII de Elementos de Euclides se encuentran los tratamientos teóricos de los conceptos de razón y proporción.

3.1.1 Razón y proporción en los Elementos de Euclides

Se utilizará como sustento teórico la tesis doctoral de Antonio Oller (2012) obteniendo conceptos epistemológicos sobre el uso de la razón.

De los trece libros que conforman la obra de Euclides, en el V se define el concepto de razón como *"…una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas" (V, Def. 3).* Esta definición permite comprender el carácter no numérico que presentaban las razones y que no expresa el concepto de igualdad entre estas, expresándolas *"…que guardan razón entre si las magnitudes, que al multiplicarse, pueden exceder una a otra" (V, Def. 4),* reforzando el hecho que no hay una forma sistemática de definir las operaciones entre razones, y solo se considera razones de la misma especie, es decir entre número o magnitudes homogéneas, pero no entre número y magnitud; no es considerado por el paradigma griego. En el libro VII se presenta la razón entre dos números o magnitudes homogéneas como un proceso definido como *antifairesis.*

> *"El proceso se lleva a cabo del siguiente modo: dado dos números o magnitudes homogéneas, se resta el menor al mayor tantas veces como se pueda hasta que quede con resto menor que el menor de los números de partida. Entonces se*

> *repite el proceso tomando como partida el menor de los números iníciales y el resto de forma sucesiva" (Oller, 2012).*

El proceso de *antifairesis* permite comprender el carácter no numérico que presentaba las razones, pero si como un proceso de medida, en el cual se debía utilizar regla y compás para su realización. No obstante el uso de este procedimiento era complejo, ya que traía dificultades en su manejo. Es importante destacar que para el caso de números el proceso tiene un carácter finito, en cambio en magnitudes homogéneas no necesariamente debiese ser así, debido a que la sucesión definida por la *antifairesis* en algunos casos eran infinitas y periódicas.

La definición entregada por Euclides sobre el concepto de razón permite construir toda la teoría de las proporciones del libro VII, sin embargo la teoría original de ámbito aritmético se encuentra en el libro V, pero para el caso de las magnitudes se tuvo que idear una nueva teoría que Eudoxio 370 A.C. da solución y tomando algunos elementos para la definición de razón entre magnitudes homogéneas considerando solo las de carácter geométrico, definiéndose "*guardar la misma razón" y "guardar una razón mayor"* como:

> *"Una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda y una tercera con una cuarta, cuando cualquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomadas en el orden correspondiente"* (V def. 5)

Esta definición da validez a cualquier tipo de magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables, permitiendo dejar de lado sucesiones definidas por la*. antifairesis.* El problema surge en la existencia de dos teorías; una para el uso de números y otra para el uso de magnitudes, teniendo como consecuencia dos tratamientos radicalmente diferentes, en el cual hay que probar resultados similares dos veces. Todo esto debido a que lo griegos no ideaban la relación entre número y magnitud. No obstante, en el libro X se concibe que dos magnitudes sean conmensurables si guardan la misma razón con un número y otro.

3.1.2 La razón y la proporción desde el enfoque Chino

La cultura griega no es la única en donde se pueden encontrar intentos de fundamentar esta teoría, como es el caso de los *Elementos* de Euclides, sino también en la cultura oriental donde el uso de la proporción es de carácter funcional pero con la necesidad de fundamentar teóricamente el método y los algoritmos utilizados.

En el texto matemático chino *Jiu Zhang Suan Shu* (Arte de las matemáticas) se encuentran problemas de carácter proporcional. Estos son descrito por el matemático Liu Hui (s. III) que en sus comentarios aclara los métodos utilizados sobre el concepto de proporción, y lo define como *"una conjunto de números correlacionados"* y enumera algunas propiedades y operaciones, las que define como:

> *"Las lü pueden convertirse unas en otras. Si hay fracciones es una Lü, esta puede convertirse en otras en enteros multiplicando por un número adecuado. La lü se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador" (Kangshen, 1999, p 80)*.

La *lü* se comprende como el conjunto de magnitudes directamente proporcional y se interpreta a la razón entre dos magnitudes como su *lü,* cuando una de ellas toma el valor unitario. Este procedimiento no se asemeja al utilizado por *antifairesis* de Euclides, pero es idéntico al algoritmo de la simplificación de fracciones utilizado por el paradigma griego. Este contexto permite la relación directa entre dos magnitudes distintas (razones externas frente a las internas) a diferencia del enfoque griego que no concebía esta relación debido a que solo se considera entre magnitudes homogéneas de la forma a:c y b:d. El método descrito por Liu Hui será conocido posteriormente como la regla de tres, de cinco y superior.

De los dos enfoques ya mencionados, se mantiene en la posterioridad la potente teoría griega y el uso de la técnica oriental que es abordado por la cultura árabe. Los árabes tienen la inquietud de fundamentar teóricamente el algoritmo y la técnica oriental, la cual no podía ser justificada por la teoría griega de las proporciones, debido a que solo se consideran magnitudes homogéneas. En la Baja Edad Media surgen algunas respuestas al problema sobre la definición y la naturaleza de las razones debido a la difusión sobre los *Elementos* de Euclides, por medio de traducciones y copias, pero aún no era suficiente para formar una teoría. De estas dos corrientes culturales surge la problemática de fundamentar teóricamente las razones y proporciones, debido a su origen práctico utilizado por la tradición oriental.

3.1.3 Los árabes hacia la aritmetización del uso de la proporción

La cultura árabe propone una visión numérica de la teoría de la proporciones, a diferencia a la descrita en los *Elementos*. El matemático Omar al Khayyam quien en su obra *Comentarios y Dificultades del Postulado del Libro de Euclides* estudia detalladamente el libro IV y V, definiendo elementos de la geometría euclidiana y extiende sus resultados sobre el concepto de razón, desarrollando la multiplicación entre razones y probando la noción de igualdad propuesta por Eudoxio (s. III a.c.), basada en las fracciones enteras equivalentes. Su aporte se centra en el concepto de igualdad entre razones definidas por Euclides y la sustituye por un igual, recurriendo a un procedimiento similar al límite. Omar al Khayyam define:

> *"Toda razón de magnitudes tanto conmensurable como inconmensurable puede ser considerada como un número y dos razones son iguales si pueden expresadas mediante la razón de números enteros, con un nivel de precisión tan grande como se desee"* (Solaeche 2002).

El carácter inductivo que realiza Omar al Khayyam contribuye y amplía la definición de razón, además de considerar la razón entre el lado del cuadrado y su diagonal ($\sqrt{2}$) -ya expuesto con anterioridad por Euclides- da la razón entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro (π) no pueden igualarse nunca a otra razón, lo que no se encontraba definido en los *Elementos* de Euclides. El aporte de Omar al Khayyam consistió en ampliar el concepto de número e incluir los racionales positivos (Mora 2000).

Por último, el uso del algebra en la resolución de los problemas aritméticos, algebriza la proporción en los procedimientos, esto se aprecia en el tercer capítulo del álgebra de *al- Khwarizmi* y posteriormente en el siglo XV cuando se incorpora la utilización del simbolismo para la representación de una proporción.

3.1.4 Uso de la *regla de tres* y el orden de términos

Desde sus inicios se adoptó una forma estándar para ordenar los datos desde *Bakshali,* se ha mantenido la formación de estos. Para esta ordenación se tenían dos condiciones: que el primer y el tercer término fueran de la misma especie o denominación[1], y en segunda condición que el resultado del cuarto y término, que se obtiene al hacer el producto del segundo por el tercero, fuera de la misma especie del segundo término. Por otra parte, en los *Elementos* ya se encontraban tratamientos teóricos de los conceptos de razón y proporción, que se aproximan a los utilizados en la actualidad. Este tipo de ordenación se mantuvo hasta el siglo XIX siendo considerada fundamental en la aritmética (Oller, 2012).

Sin embargo, en las costumbres aritméticas italianas durante el periodo del Renacimiento, se separan los números con una línea horizontal como se presenta en el siguiente ejemplo: $a - b - c$. De esta misma forma también era realizado en España. Pero otros autores, como Tartaglia (citado en Gómez, 2006), plantea a la proporción con líneas verticales $a\|b\|c$ para resaltar la proporción que subyace a la regla de tres y se recurre a los signos que denotan como la razón y a la igualdad de razones: el punto y los dos puntos representados de la siguiente forma $a.b:c$.

Posteriormente, para distinguir la proporción geométrica de la aritmética, se distinguió por el punto en un caso, y por el doble punto en el otro, para separar los términos de la razón. Dos dobles puntos indicaban la igualdad de razones. Esta es la manera universalmente empleada $a.b: \,:c:$. Por último, se introdujo la línea fraccionaria para indicar la proporción de la forma de ecuación $a/b = c/x$ empleada por Vallejo (1841 citado en Gómez 2006).

Al inicio del siglo XIX el método algebraico era considerado como la principal forma para resolver determinados problemas de larga tradición aritmética. Este método se aplicaba a problemas de razón y proporción

[1] Se comprende como la relación entre número o magnitudes

cuando se planteaba su resolución considerando las razones como fracciones y la proporción como una ecuación. El álgebra comenzó un proceso de cambio de ubicación de problema de regla de tres, y las que dependen de ellas, como es el paso de la aritmética al álgebra, para posteriormente el estudio de ecuaciones.

La incorporación del álgebra modificó los aspectos del método de la proporción de dos formas, donde antes se utilizaba el lenguaje de puntos, ahora se utilizará la igualdad de razones y la incógnita ($a.b::c \rightarrow a/b = c/x$); donde anteriormente se aplicaban las propiedades de proporción ahora se despeja la incógnita.

Ulteriormente se produce un periodo donde surge el método de reducción de la unidad. Es una etapa de resistencia de sacar los problemas de regla de tres de la aritmética para introducirlos al álgebra. Se impuso un método para resolver este tipo de problemas, basado en el razonamiento, el cual no depende de las proporciones ni de las ecuaciones, sino se encuentra centrado en el análisis. En síntesis, el método consiste en encontrar el valor de la magnitud de la misma especie de la incógnita que corresponde a un valor de la otra magnitud con valor uno.

Vallejo (1841) utiliza el método de la reducción de la unidad y da un fundamento matemático a lo que hoy conocemos como la regla de tres. Sin embargo, no confía en su potencialidad como método de resolución de problemas, debido a que produce errores cuando no se ordenan los términos de forma correcta. A pesar de dicha dificultad, con el tiempo este método es utilizado en la resolución de problemas, y ocupa un espacio predominante tanto en la enseñanza de la aritmética como en el álgebra (Gómez, 2006).

En el siglo XIX el uso del la regla tres se encuentra desplazada por la función lineal, la tabla de doble entrada y las representaciones gráficas. La noción de linealidad surge desde que se trabajan las ecuaciones lineales -desde los egipcios- y de forma implícita en los Elementos de Euclides.

3.1.5 Hacia la Función lineal

Se identifica un sustento teórico acerca de la noción de proporcionalidad directa sobre la linealidad, evidenciable en las culturas ancestrales. Hay que resaltar que las primeras culturas que exponen sobre el concepto de proporción tienen un uso más práctico, de carácter cotidiano, como es de la cultura oriental. En cambio, en la Grecia clásica se presenta un enfoque de ámbito teórico, junto con la idea naciente de linealidad, con características científicas relevantes para el periodo histórico. Mas, el concepto de linealidad no emerge con naturalidad, debido a la inconmensurabilidad de la proporcionalidad, ya que se disocia entre número y magnitud; el uso del álgebra. La visión estática de la matemática y la comparación entre magnitudes homogéneas, impedía observar la dependencia entre las variables asociadas, ya que existe una fuerte relación de la geometría como sustento teórico, como los demuestran los escritos Euclides, Arquímedes Eudoxio, Apolonio (s. III y V) entre otros.

A partir de la evolución sobre el concepto de proporcionalidad, la noción de linealidad emprende una estructura más formal, por medio de postulados y demostraciones de teorema geométricos, desprendiéndose de la proporcionalidad directa. Los siglos XVII y XIX definen el período donde se inicia la distinción conceptual entre proporcionalidad directa y la línea recta, lo que se explicita en los trabajos de Oresme, Galileo, Descartes, Leibniz, Newton, Euler, hasta llegar a las concepciones más recientes relacionadas con la teoría de conjuntos (Vargas, 2011).

Descartes (1596-1650) funda el primer sistema matemático sobre método de investigación de lo sencillo al abstracto, de la hipótesis a la evidencia. Prosigue lo estudios realizados por Viéte sobre la relación entre el álgebra y la geometría, Descartes aporta con la ordenación y medida, estableciendo que los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático se pueden resolver usando regla y compás, considerando como problemas en el plano cartesiano. También es el primero en desarrollar el concepto de función de forma analítica, al relacionar una curva con una expresión algebraica. Además, establece que una ecuación se representa de la forma *x* e *y*, mostrando el concepto de dependencia entre cantidades, en donde los valores de una pueden calcularse a partir de los valores de la otra, generando un lugar geométrico (en términos modernos $f(x,y)=0$) representando un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta una representación analítico-geométrica, lo cual permite representar lo geométrico por medio del álgebra permitiendo el tránsito entre una y la otra.

Leibniz (1646-1716) describe una función como una cantidad formada a partir de cantidades indeterminadas y constante, lo considera como el Cálculo de Variaciones. Siendo la teoría matemática que desarrolló más la conexión con el concepto de función.

Gousat (1858-1936) da la definición que para el presente es la más utilizada. *"Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y, esta correspondencia se indica mediante la expresión y =f(x)"* Vargas (2011).

Gómez (2011) especifica que en los libros de textos escolares se utilizan dos definiciones, como las siguientes:

> "*Dados dos conjunto de objeto el conjunto A y el conjunto B, una función es una ley que asocia a cada objeto A uno y solo un objeto en B. Y la otra, fundamentada en el producto*

cartesiano y en consecuencia relacionada con la geometría cartesiana y los sistema de coordenadas".

En relación a la definición de función lineal en el libro de Apostol (1967) se asocia el término de una función lineal como aquella que se determina por la fórmula $y = mx + b$ y tienen como gráfica una línea recta, que define el enfoque cuando se asocia la función lineal a la relación de proporcionalidad directa entre dos variables, estableciendo la diferencia entre función lineal y afín.

En relación a los conceptos epistemológicos estudiados, cabe mencionar los obstáculos asociados que se han generado.

3.1.6 Obstáculos

1. Razón. Desde los griegos hasta el s. XV la proporción era escrita como una forma discursiva (*antifairesis*) y no como una relación de equivalencia de razones, de tal forma el aspecto funcional de la proporción queda totalmente oculto.
2. La homogeneidad de las variables. Los griegos no concebían la relación entre magnitudes que no fueran de la misma especie, esto impedía encontrar la dependencia entre variables de diferentes magnitudes.
3. La concepción geométrica de las variables. La matemática griega emerge desde la concepción geométrica cuyos elementos primarios son los segmentos, con ello definieron todas las operaciones básicas matemática, pero no podía considerar el producto de un número mayor de segmento, y en la división solo era posible cuando el dividendo era mayor. Por tanto, el concepto de linealidad no emerge con naturalidad debido a la inconmensurabilidad entre magnitudes.

4. La disociación entre la proporcionalidad y la función lineal. Las ideas de cambio y de cantidad variable se encontraban en el pensamiento griego, sin embargo eran consideradas como algo externo a la matemática, y solo establecen relaciones estáticas en términos de incógnitas más que en términos de variables. Esto condujo a tratar la proporcionalidad y ecuaciones, y no a las funciones del tipo lineal.

3.2 Dimensión didáctica

Se observa en los programas de 7° grado que se propone el estudio de la proporción, la cual se encuentra centrada en el eje número y operaciones. Este eje abarca tanto el desarrollo del concepto de número, como también la destreza del cálculo mental y escrito. El objetivo es que lo estudiantes utilicen conocimientos adquiridos en años anteriores, para la comprensión y el aprendizaje de variaciones proporcionales, operatoria con números naturales y racionales (fracciones y números decimales). A su vez, es importante que los estudiantes recuerden propiedades de figuras geométricas, especialmente, en aquellas centradas en el cálculo de área y perímetro en triángulos y cuadriláteros. Con esto se espera que comprendan el comportamiento proporcional de estas figuras, considerando las características específicas de cada polígono y de las situaciones particulares planteadas.

Contenidos Mínimos Obligatorios.

- Empleo de procedimientos para identificar magnitudes que varían en forma proporcional, interpretación de una proporción como una igualdad entre dos razones cuando las magnitudes involucradas varían en forma proporcional, y sus aplicaciones en diversas situaciones.

- Resolución de problemas en contextos variados en los que se utilizan proporciones enfatizando en aspectos relativos al análisis de las estrategias de resolución, la evaluación de la validez de dichas estrategias en relación con la pregunta, los datos y el contexto del problema.

En 8° grado el estudio de la proporcionalidad directa se orienta en el estudio de funciones en diversos contextos y los reconocimientos de sus elementos constituyentes. Se pretende que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos sobre el lenguaje algebraico, ecuaciones y representaciones en situaciones diversas y significativas, así como también, en actividades que involucren los conceptos de razón y proporción.

También, se estudian situaciones que incluyen magnitudes proporcionales y no proporcionales, relaciones de proporcionalidad directa e inversa como una función. Su objetivo se centra en que lo estudiantes planteen y analicen algunas funciones sencillas, y comparen variables relacionadas en forma proporcional y no proporcional, que representen como una función relaciones de proporcionalidad directa e inversa mediante el uso de tablas y gráficos.

Contenidos Mínimos Obligatorios.

- Planteamiento de ecuaciones que representen la relación entre dos variables en situaciones o fenómenos de la vida cotidiana y el análisis del comportamiento de dichos fenómenos a través de tablas y gráficas.
- Reconocimiento de funciones en diversos contextos, distinción entre variables dependientes e independientes en ellas e

identificación de sus elementos constituyentes dominio, recorrido uso e interpretación de la notación de funciones.

- Reconocimiento y representación como una función de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre dos variables en contextos significativos.
- Comparación con variables relacionadas en forma no proporcional y argumentación acerca de la diferencia con el caso proporcional.
- Análisis de diversas situaciones que representan magnitudes proporcionales mediante el uso de software gráfico.
- Resolución de problemas en diversos contextos que implican el uso de relación proporcionalidad como modelo matemático.
- Reconocimiento de funciones en diversos contextos.

3.3 Dimensión Cognitiva

3.3.1 Características de la institución educacional

El Colegio San Alberto Hurtado, Fundación Belén Educa, es un establecimiento católico, ubicado en la comuna de Pudahuel, Región Metropolitana.

El colegio está inserto en un sector vulnerable, en donde la mayoría de sus estudiantes pertenecen a un grupo socioeconómico bajo y de riesgo social. Sin embargo, existe un porcentaje de estudiantes que pertenecen a grupos socioeconómicos medios y altos (este último, en muy contados casos).

El colegio San Alberto Hurtado entrega enseñanza desde pre-Kinder hasta cuarto medio. Es un establecimiento técnico, en el que los estudiantes pueden elegir entre dos especialidades: Gastronomía y Telecomunicaciones. El grupo de estudiantes ha ido en aumento, es decir, que este año hay dos cursos por nivel desde primero medio y a partir del próximo serán tres curso. Esto implica que a partir del año 2017 las especialidades deben aumentar a tres.

La estructura del colegio se divide de la siguiente manera: Equipo directivo, centro de atención pedagógica (CAP), encargadas de área por ciclo y por asignatura, docentes y equipo de integración.

3.3.2 Análisis de conocimientos previos

Con la finalidad de poder analizar los procesos cognitivos, se ha diseñado y aplicado una evaluación de conocimientos previos a los alumnos de 8°grado del colegio "San Albero Hurtado", donde se ha considerado conocimientos y habilidades que el alumno debe manejar para el aprendizaje del objeto matemático.

Aprendizajes previos.

- Resuelven problemas multiplicativos.
- Organizan datos en una tabla de valores.
- Utilizan razones internas para calcular valores desconocidos en situaciones de proporcionalidad directa.
- Identifican relaciones de dependencia entre dos variables.

A fin de lograr mayor objetividad en el análisis de los conocimientos previos que poseen dichos alumnos, se presentan en detalle los resultados de la evaluación de conocimientos previos que se les aplicó. En la evaluación denominada "Diagnóstico" (Anexo 1), se evaluaron cuatro preguntas de respuestas abiertas con una duración de 45 minutos, y se aplicó a un total de 15 alumnos elegidos al azar a estudiantes que cursan en nivel de 8° grado.

A continuación, presentamos las respuestas por alumno de cada una de las preguntas realizadas (Tabla 1) y el resultado general (Tabla 2), indicando la cantidad de alumnos que llegaron a

A. Respuestas correctas.

B. Respuestas incorrectas.

C. Respuestas en blanco.

	Estudiantes														
Preguntas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	C	A	A	B	A	A	A	A	A	B	B	B	C	C
B	A	C	B	A	B	A	B	A	C	C	B	B	B	C	C
C	A	B	B	A	A	A	C	A	C	C	B	B	C	C	C
D	A	B	B	B	B	B	C	B	C	C	C	C	C	C	C

Tabla 1. Respuesta por alumno por cada pregunta.

Preguntas	CORRECTAS%	INCORRECTAS%	EN BLANCO%
A	53,3%	26,7%	20%
B	26,7%	40%	33,3%
C	33,4%	26,7%	40%
D	6,7%	40%	53,3%

Tabla 2: Resultado general por pregunta.

Conocimiento previo evaluado: Identifican relaciones de dependencia entre dos variables.

Análisis: Solo 53,3 % identifican las variables asociadas y la relación de dependencia entre las variables. Sin embargo, el resto de los estudiantes no identifica o no contesta relación de dependencia entre variables asociadas en relaciones proporcionales.

Conocimiento previo evaluado: Organizan datos en una tabla de valores.

Análisis: Solo el 26,7% organizan los datos en una tabla. Sin embargo, el 73,3% utiliza de forma incorrecta la tabla y/o no la utiliza.

Conocimiento previo evaluado: Utilizan razones internas para calcular valores desconocidos en situaciones proporcionales.

Análisis: Solo 33,3 % de los estudiantes utiliza las razones internas para calcular valores desconocidos en el uso de tabla, en su mayoría los estudiantes calcula de forma aditiva para encontrar los valores desconocidos.

Conocimiento previo evaluado: Resuelven problemas multiplicativos.

Análisis: Los estudiantes en su mayoría identifican relaciones proporcionales de forma aditiva y solo 6,6 % de los estudiantes realiza operatoria de forma multiplicativa.

A partir de los resultados anteriormente expuestos se deduce que las concepciones de los estudiantes en referencia a la proporcionalidad:

- En general los estudiantes al enfrentarse a problemas proporcionales lo resuelven de forma aditiva.
- Los estudiantes no identifican relaciones multiplicativas en variaciones proporcionales.
- Utilizan reglas y algoritmos para encontrar términos desconocidos como es el uso de la regla de tres, no organizando los datos de forma adecuada.

3.4 Análisis matemático

3.4.1 El estatus lógico de la razón

En Godino & Batanero (2004) se describe el tema "fracciones y números racionales", en donde se especifica que uno de los usos de las fracciones es el de la razón comprendida de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra. Es importante destacar que el uso que se le da a la razón no es equivalente a la de fracción, es decir *"la razón es un par ordenado de cantidades"* de magnitudes, en cambio *"la fracción es cualquier par ordenado distinto de cero".*

Freudenthal (1983) define a la razón como la comparación entre magnitudes y cantidades de magnitud.

> "*el concepto de razón aparece cuando se habla de igualdad de razones sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido a es b como c es a d, sin anticipar que "a es b" puede reducirse a un número o valor de magnitud a/b. La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o dos valores de magnitud)… Los cocientes y las fracciones constituyen una forma de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de lucidez".*

A partir de esta cita, se entiende el concepto de proporción como una relación de equivalencia sobre el conjunto de los pares ordenados de números (o valores de magnitud), indicada formalmente como $a : b = c : d$ si el par (a,b) es equivalente al par (c, d) si y solo si ad=bc (cumpliendo con las propiedades de equivalencia, que son: refleja, simétrica y transitiva).

Es un hecho que una vez elegida una unidad e, la clase de equivalencia del par (a, b) puede expresarse mediante un número (un valor de magnitud), específicamente algún u racional, para que $a : b = u : e$. Cuando una razón es igual a otra, se dice que existe una proporción (Freudenthal 1983). Es decir, es una relación entre cuatro cantidades dadas por la igualdad de dos razones.

3.4.2 Proporcionalidad

Sánchez (2012) define la proporcionalidad de dos maneras: como una igualdad de razones, lo que condujo a definir el concepto de razón; y como una función lineal, con las características heredadas por la definición de este tipo de funciones.

Se entiende la proporcionalidad como: Para toda correspondencia existente entre x e y, consta la misma correspondencia entre todos los múltiplos iguales de x e y. Por consiguiente, la proporcionalidad no puede estar separada de la comprensión de funciones lineales.

3.4.3. Función lineal

Sea f una función, f es una función lineal si satisface las siguientes propiedades.

1. Si $f(x)\ y\ f(y)$ existen, entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Estos se conoce como la propiedad aditiva.
2. $f(cx) = cf(x)$, para todo número real c. Esto se conoce como la propiedad homogénea.

Consideremos la situación en que las variables $x\ e\ y$ están en una relación de proporcionalidad. Sean $x_1, x_2 \ldots x_n\ e\ y_1, y_2 \ldots y_n$ valores de las variables $x\ e\ y$ respectivamente, por tanto estas variables son proporcionales si "$x_1\, es\, a\, y_1$", de igual manera que "$x_2\, es\, y_2$", en cada pareja "$x_n\, es\, y_n$". Se puede establecer la igualdad entre las variables, ya sea multiplicando o dividiendo entre un valor constante, denominado constante de proporcionalidad estará dado por $y = kx$. Cabe recalcar que la constante de proporcionalidad juega un rol importante en la conceptualización de la proporcionalidad, tal como lo dice Lamon (2007).

Otra forma de definir las relaciones de proporcionalidad es la siguiente:

- A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
- La constante de proporcionalidad se obtiene realizando la división entre valores de la variable dependiente por valores correspondientes de la variable independiente $y{:}x = k$.
- El gráfico que representa la relación es una línea recta no vertical que pasa por el origen del sistema de coordenadas. La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes cuando estén definidos.

Por tanto, cuando la razón se expresa como una relación entre dos cantidades y no como un solo número, se comprende la relación entre el número de veces constituida entre el antecedente y el consecuente de la razón. El funcionamiento de la razón ha sido objeto de estudio desde la perspectiva del desarrollo del razonamiento proporcional, cabe destacar que son más de treinta años de investigación en este campo. Un exponente principal es Jean Piaget, que a partir de sus estudios evidenció la habilidad de los niños para trabajar con ideas de proporcionalidad sobre el razonamiento cualitativo y cuantitativo (Sánchez, 2012). También se encuentran Brousseau (1998) y Vergnaud (1988) sobre el campo conceptual de estructuras multiplicativas.

Al establecer relaciones de equivalencia entre las razones para conformar una proporción se identificarán dos tipos de relaciones multiplicativas, a las se les denominarán como operador escalar y operador función (Block, 2006). El operador escalar es una operación equivalente a sumas iteradas, que se comprende como un factor de multiplicación entre los pares ordenados, a partir de situaciones sencillas de proporción. Sin embargo cuando las magnitudes son distintas, el operador función lleva a un cambio de magnitudes y a establecer la relación constante entre los pares ordenados.

3.4.4 La razón como operador escalar

La razón también cumple característica de las fracciones en que se puede amplificar y simplificar, y será visto como un operador. Sean $M_1 \; y \, M_2$ dos magnitudes; a_1, b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a $M_1 \; y \, M_2$ respectivamente. Existe una operación O, que se representa de la forma

$$O: M_1 \; \rightarrow \; M_2$$
$$a_1 \rightarrow O(a_1) = \rho \times a_1 = b_1.$$

Entonces si $M_1 \; y \, M_2$ son magnitudes homogéneas, entonces ρ es un factor de ampliación y reducción, que al ser aplicado sobre la cantidad a_1 produce la cantidad b_1. Si $M_1 \; y \, M_2$ son magnitudes heterogéneas, el operador ρ transforma la cantidad de la magnitud a_1 en la cantidad de la magnitud b_1.

3.4.5 Razón como operador función

A partir de la definición de una transformación lineal, y la de enunciación de su propiedad, se establece una relación de proporcionalidad, se comprende, si se tienen dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitudes que se correlacionan linealmente, mediante una relación funcional, expresada como:

$$f: M_1 \to M_2$$
$$a_1 \to f(a_1) = k \times a_1 = b_1$$

La k es denominada como la constante de proporcionalidad, y f una función lineal que representa a la proporcionalidad.

Se pretende por medio del análisis histórico, epistemológico y el referente matemático comprender cómo el concepto de proporcionalidad se relaciona sobre la transformación lineal, la cual es el sustento teórico sobre la función lineal, y a su vez favorece la comprensión de los obstáculos epistemológicos sobre el concepto de proporcionalidad y la desarticulación de este sobre el concepto de función lineal. El tener en consideración estos aspectos permitirá construir una situación didáctica que favorezca la comprensión significativa, y la transposición de este concepto en la enseñanza de la función lineal que sea realizará a nivel de 8° años básico en el curriculum escolar chileno.

Capítulo 4
Concepción y análisis a priori

4.1 Diseño de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica se centra en generar un tránsito entre el concepto de razón, proporcionalidad y la función lineal. Para efecto de esta investigación se comprende como tránsito, a la transposición entre cada uno de los conceptos matemáticos ya señalados. Se espera que los estudiantes resuelvan situaciones referidas a repartos proporcionales, en la cual no se les hará explicito de qué forma se debe resolver, sino que ellos deben determinar por medios de sus conocimientos previos si las situaciones son o no proporcionales y generar las técnicas apropiadas para su desarrollo de los concepto asociados.

En relación a las técnicas adecuadas, se espera que los estudiantes puedan coordinar dos variables para dar cuenta de la relación entre ellas (conformar una razón), distinguiendo las relaciones multiplicativas de las aditivas y poner en juego relaciones aritméticas adecuadas. La noción de razón se manifiesta principalmente en situaciones en que las cantidades varían y la razón que se establezca entre ellas se conserve.

La cantidad de variables con razón constante corresponden a los problemas de proporcionalidad en que se busca el valor faltante. Para este tipo de actividad propuesta, se espera que los estudiantes utilicen el operador escalar para agrandar o disminuir las razones internas y en aquellas que las magnitudes sean distintas, es decir, razones externas, utilicen el operador función para encontrar la constante. Al encontrarla, permitirá que los estudiantes puedan generalizar la problemática y la función lineal.

4.2 Descripción del proceso por etapas

Propósito didáctico: Generar la noción de razón en los estudiantes para establecer relaciones de equivalencia y establecer la proporcionalidad, y la función lineal.

Técnicas asociadas:

- La obtención de razones equivalentes con un factor en común mediante la conservación de las razones internas.
- La expresión de la razón externa mediante el operador función.

Aspectos a considerar:

Los estudiantes deben tener algunas nociones de conceptos previos, tales como: magnitud y tipos de magnitudes, procesos de amplificación y simplificación de fracciones, ecuación lineal (con una incógnita) y solución de ecuaciones lineales, ubicación de parejas ordenadas en el plano cartesiano.

La secuencia didáctica se encuentra conformada por tres actividades que tienen como sentido que los estudiantes establezcan la razón en situaciones problemática que hacen referencia a la utilización de proporción, por medio del uso de razón y sus relaciones de equivalencia y la proporcionalidad para establecer la función lineal. Cada una de las actividades se realizó en un tiempo de 90 minutos.

4.3 Características de las actividades

Cada una de las actividades toma un elemento en particular.

En la primera actividad, a los educandos, se les presenta un puzzle, donde se amplían las figuras para formar un nuevo puzzle. Esta actividad se focaliza en establecer la razón y la constante de proporcionalidad para multiplicar cada valor y ampliar la figura.

La segunda actividad tiene relación con que los estudiantes expresen la razón, establezcan relaciones de equivalencia para así conformar una proporción.

Esta actividad se divide en tres etapas:

1.- Se les entrega a los estudiantes las medidas de una figura (Cuadro “La Mona Lisa”) y se espera que ellos, a través de dichas medidas reduzcan el cuadro.

2.- Se presentan cuatro imágenes con diferentes reducciones realizadas a la figura mencionada anteriormente. Se les pide a los estudiantes que determinen cuál de ellas es una reducción correcta y que la corroboren de forma matemática, estableciendo la razón y relaciones de equivalencia para establecer la proporción.

3.- Se les presenta una reducción en la figura de “La Mona Lisa” omitiendo un valor. Se les solicita a los estudiantes que encuentren el valor faltante de la reducción. Además de argumentar las estrategias que utilizarán para encontrar dicho valor. Para estas actividades se espera que los estudiantes implícitamente utilicen un operador escalar o un operador función para dar solución a la problemática.

En la tercera actividad se presenta un problema de experimentación (construcción de marcos del carpintero), en donde se espera que los estudiantes reconozcan la relación de proporcionalidad. Para encontrar los valores faltantes de la figura planteada, utilicen de manera implícita el operador escalar y el operador función. Este último permite encontrar la constante favoreciendo la obtención de la representación de la función lineal de la forma $y=kx$. Además, se espera que los estudiantes organicen los datos dentro de una tabla de valores, que permite observar la secuencia proporcionalidad de la figura señalada.

Las tres actividades aportan a que los estudiantes comprendan la razón, la proporción y la proporcionalidad para establecer función lineal.

En cada una de las actividades propuesta se encuentran las fases de la situación adidáctica, definidas por Brousseau (2007).

- En la fase de *acción,* el estudiante interactúa sobre la actividad propuesta de forma individual y considera cuáles serán las estrategias a abordar para dar solución a la situación problemática.
- Los estudiantes deben reunirse con su grupo de trabajo, de tres integrantes, para la fase de *formulación*, en donde cada uno de ellos debe comunicar la estrategia que consideró apropiada, para dar solución a la problemática y debatir con su grupo de trabajo, confrontándolas entre ellos, tomando una decisión.
- En la fase de *validación*, los estudiantes dan a conocer sus estrategias utilizadas durante el trabajo, reflexionando, argumentando y validando sus propios resultados.

También encontramos la situación didáctica, entendiéndola como:

- La *institucionalización*, donde el profesor realiza una recogida de todas las conclusiones obtenidas por los grupos y las institucionaliza con el saber matemático.

Estas fases permiten que el estudiante tenga una mayor autonomía en el desarrollo de las actividades.

4.4 Comportamiento esperado en las interacciones con el medio

A continuación, se presentan las características fundamentales que se desean desarrollar en las tres actividades:

Situación 1.

Objetivo: Reconocer proporciones como una igualdad de razones.

1.- Reúnete con tres compañeros y realiza los siguientes procedimientos. Realiza las instrucciones paso a paso.

A) Calcula el perímetro y área de la figura.

B) Recortar el puzzle y distribuir dos piezas a cada una de los integrantes del grupo.

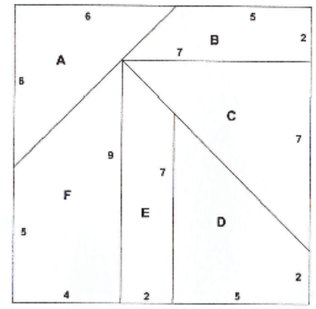
C) Construir en una cartulina este puzzle pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4cm tenga una longitud de 7cm.

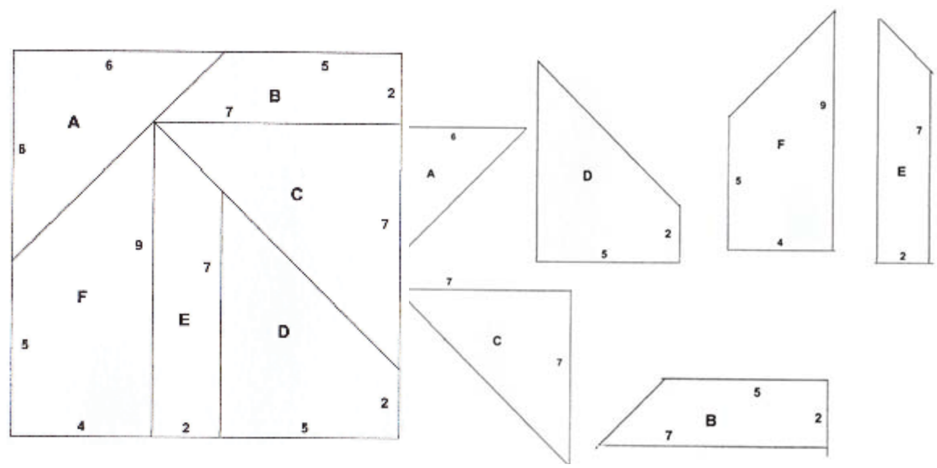
D) Ensambla el nuevo puzzle y determina el área y el perímetro del nuevo puzzle.

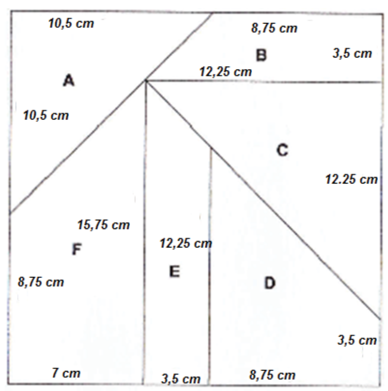
E) Justifique paso a paso el procedimiento utilizado por tu grupo de trabajo.

¿Cuáles fueron las dificultades qué tuviste para realizar el nuevo puzzle?

¿Cuál fue la estrategia que utilizaron para ampliar el puzzle?



Item	Comportamiento esperado.
A	Se espera que los estudiantes obtengan el área del puzzle original de 121 cm^2 y el perímetro de 44 cm.
B	A) Recortar el puzzle y distribuir dos piezas a cada uno de los integrantes del grupo 
C	Es muy probable que muchos planteen en sus soluciones sumar 3 cms. a cada lado de la figura, y no logren ensamblar las figuras del nuevo puzzle. Otros tal vez sumen 3 cms. a cada lado, pero al ensamblar se den cuentan que las figuras no calcen y las recorten hasta lograr tener la figura ensamblada. Afirmaran que no es posible realizar la construcción solicitada, producto de varios intentos pero no argumentan el error cometido. Pueden surgir dificultades en la construcción del nuevo puzzle al no utilizar bien los instrumentos de medidas.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Se cree probable que propongan doblar la longitud del modelo y restar 1 cm.
$4 \rightarrow (2 \bullet 4) - 1 = 7$
$6 \rightarrow (2 \bullet 6) - 1 = 11$
$2 \rightarrow (2 \bullet 2) - 1 = 3$
Consideran establecer la razón de $4\, cms \rightarrow 7\, cms$ y obtienen la constante de proporcionalidad 1,75 y lo utilizan para multiplicar cada uno de los valores. Al ensamblar el puzzle ya ampliado las figuras calzan.


</td>
</tr>
<tr>
<td>D</td>
<td>
Al no lograr ensamblar el nuevo puzzle no determinan el valor del área ni del perímetro de la nueva figura.
Establecen el perímetro de la nueva figura sumando las longitud de los lados para obtener como medida el valor de 77 cms, también deben establecer el área de la figura utilizando el valor de la base por la altura, obteniendo como resultado 370,625 cm^2.
</td>
</tr>
</table>

E	Se espera que los estudiantes detallen con exactitud las estrategias que ellos abordaron para dar solución a la ampliación del puzzle, los estudiantes deben encontrar el valor de la constante y utilizarlos para multiplicar cada de uno de sus valores.
F	Al ensamblar el nuevo puzzle las figuras no calcen al sumar a cada lado 3 cm, en vez de utilizar un operador para multiplicar cada uno de los valores de los lados de las figuras.
G	Sumar cada lado 3 cm. por cada lado para construir el nuevo puzzle. Determinar la razón entre $\frac{7}{4}$ $y\ obtener\ la\ constante\ 1{,}75$ como un operador entre los valores de cada lado del puzzle.

Actividad 2.

Objetivo: Usar relaciones de equivalencia para obtener el concepto de proporción.

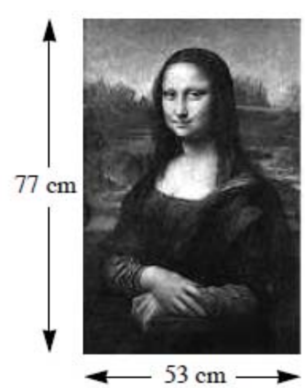
A.-La profesora de arte te pide hacer una reducción del cuadro la "Mona Lisa" de Leonardo Da Vinci. El cuadro original tiene las medias que se muestran en el dibujo.¿Cuál estas cartulinas sirve para que la reducción sea exacta, y cubra toda la superfice de esta?

Amarilla de 38, 5 cm x 26, 5 cm

Verde 70 cm x 53 cm

Roja 71,5 cm x 47,5 cm

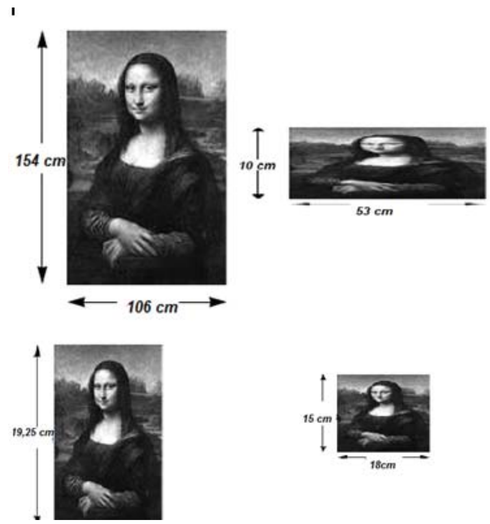
Blanca 77 cm x 77 cm



¿Qué estrategia utilizaste para encontrar la reducción

Ítem	Comportamiento Esperado
A	Es probable que los estudiantes identifiquen como correcta la cartulina blanca, al restar los lados de la figura original. Puede incurrir en problemas de cálculo. Es probable que identifique cualquier cartulina y saque los sobrantes como forma de explicación. Se espera que los estudiantes respondan que es la cartulina amarilla realizando la discriminación entre los valores de en relación a las otras, lo cual propiciará que los estudiantes encuentren las estrategias que considere más eficiente para reducir la figura.
B	Estrategia: Se espera que los estudiantes realicen la razón entre la base y la altura $\frac{77\ cm \div 2}{53 cm \div 2} = \frac{38{,}5\ cm}{26{,}5\ cm}$ utilicen de un operador escalar para reducir la figura y encontrar la proporción entre los valores establecidos.

B.- Algunos estudiantes no comprendieron la instrucción del profesor de arte, y ellos realizaron estas producciones de la Mona Lisa. ¿En cuál de estas producciones corresponde una buena reducción? Argumenta con tu grupo de trabajo y justifica el procedimiento utilizado.



Ítem	Comportamiento Esperado
B	Tiene la intención de que los estudiantes identifiquen que no es suficiente considerar solamente la ampliación o reducción de los lados para estimar si es una proporción. Es probable que los estudiantes discriminen a simple vista si las imágenes se distorsionan. Es muy probable que resten a los lados de la figuras para corroborar las medidas. Otros establecerán la razón para corroborar los valores, si son correctos. Se espera que los estudiantes establezcan la proporción

	para determinar si son correctas las imágenes reducidas, utilizando como estrategia la siguientes: $$\frac{77\ cm \div 4}{53\ cm \div 4} = \frac{19{,}25\ cm}{13{,}25\ cm}$$ Para establecer la proporcionalidad entre dos cantidades de la forma más simple, se puede dividir ambas cantidades por un mismo número. $\div 4$ $77cm \rightarrow 53cm$ $\div 4$ $19{,}25cm \rightarrow 13{,}25\ cm$

C.-Eduardo realizó la reducción de la Mona Lisa, pero se le borro una de las medidas y no recuerda su valor. Ayuda a Eduardo a encontrar este valor. Y explícale paso a paso qué procedimiento utilizaste. (Recuerda que no puedes utilizar regla para medir)

Ítem	Comportamiento Esperado
C	• Restar los valores para encontrar la medida desconocida.

- Pueden incurrir en errores de establecer la razón y no encontrar los valores estimados.
- Al realizar las operaciones pueden establecer errores en la multiplicación o división.
- Se espera que los estudiantes utilicen estrategias como la siguiente para encontrar el valor desconocido de una proporción. $\frac{77\ cm \div 4}{53\ cm \div 4} = \frac{19{,}25\ cm}{13{,}25\ cm}$

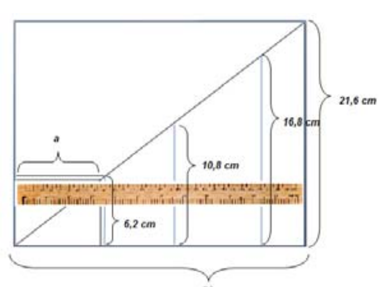
$$\div 5 \qquad \begin{array}{l} 77cm \ \rightarrow 53\ cm \\ ?\ cm \ \rightarrow 10{,}6\ cm \end{array} \qquad \div 5$$

Situación 3

Objetivo: Construir el concepto de función lineal.

Un carpintero habitualmente realiza marcos para montar reducciones de un cuadro de 21, 6 cm de altura por 28 cm de base. Él desarrollo una nueva estrategia para determinar el ancho de una reducción del cuadro conociendo sólo la altura: construye la diagonal de una hoja del tamaño del cuadro original, dibuja las alturas, las bases y posteriormente mide cada uno de sus lados con una regla, como se muestra en la figura

El carpintero recibe un llamado telefónico solicitando un pedido de distintos tamaños de marco y el cliente solo le entrega las medidas de las alturas.



Posteriormente el carpintero recibe otro llamado telefónico y le solicitan realizar otro marco, pero solo le dan la medida de la altura de 7,2 cm ¿cuál será la medida de la base? ¿Cuál será el procedimiento matemático para encontrar las medidas de a y b sin tener que medir?

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Comportamiento Esperado</th></tr>
<tr><td>A</td><td>

- Es probable que identifiquen los valores pero lo resten o los sumen para obtener los valores faltantes.
- Consideren la figura que se les entregue y la midan, sin obtener los valores correctos.
- Establecer la razón entre las medidas y conformar la proporcionalidad para encontrar los valores faltantes.
- Identifican los datos relevantes para establecer la función lineal.
- Es probable que no identifique los datos relevantes para obtener la función lineal.
- Se espera que utilicen una tabla para ordenar los pares de valores, en relación a la base y la altura de la figura. Los estudiantes deben establecer las relaciones entre las razones externas para identificar el operador función. *Las razones externas permanecen constantes.*

<table>
<tr><th>Altura cm</th><th>Base cm</th><th>Base:Altura=k</th></tr>
<tr><td>21,6</td><td>28 cm</td><td>1,296</td></tr>
<tr><td>6,2</td><td>8,03</td><td>1,296</td></tr>
<tr><td>7,2</td><td>9,33</td><td>1,296</td></tr>
<tr><td>10,8</td><td>13,99</td><td>1,296</td></tr>
<tr><td>16,8</td><td>21,7</td><td>1,296</td></tr>
</table>

Los estudiantes al establecer la constante de proporcionalidad pueden generalizar por medio de la función lineal y=kx.
</td></tr>
</table>

Capítulo 5
Fase experimental

Las tres actividades se llevaron a cabo en octavo grado, conformado por 8 grupos de tres estudiantes cada uno elegidos al azar. Los estudiantes de este nivel ya presentaban nociones sobre la razón y la proporción adquirida en nivel anterior.

5.1 Aplicación de la actividad

La primera sesión, donde se realizó la actividad del puzzle, los alumnos de cada grupo dieron sus respuestas por cada pregunta y sus posibles soluciones a la problemática de ampliar el puzzle. En esta actividad los estudiantes debían establecer la razón de $4 \rightarrow 7$ para realizar la ampliación del puzzle con las medidas exactas.

En la segunda sesión, se realizó la actividad de reducir la imagen de la Mona Lisa. Los estudiantes de cada equipo realizaron los procedimientos que consideraron pertinentes, se hace hincapié a las estrategias que se expuso por cada grupo.

En la tercera sesión, se realizó la actividad de reducir y ampliar los marcos realizados por un carpintero, y por medio de los datos relevantes de la situación deben establecer la función.

5.1.1 Actividad 1

En la actividad 1 solo se considerarán el trabajo de tres equipos. La elección de esto se debe a que los otros grupos utilizaron estrategias similares, por tanto no aportan datos que sean relevantes.

Los estudiantes se organizaron en grupo de tres integrantes, se les entregó en sobre las instrucciones de la actividad y el puzzle original con las medidas de 11 por 11 [u^2]. Los estudiantes recortaron las piezas del puzzle y se entregaron dos figuras a cada integrante y comenzaron a discutir entre ellos para encontrar las estrategias para ampliar el puzzle.

Comentario de experimentación grupo 1.

El equipo 1 trabajó con el puzzle completo sin recortarlo. Establece la razón de 7:4 obteniendo como resultado 1,75. Posteriormente multiplican este valor por cada una de las medidas de la figura. Luego recortaron y entregaron dos figuras por cada integrante, construyen las nuevas figuras y ensamblan el nuevo puzzle, teniendo como resultado que cada figura calza.

El razonamiento descrito por los estudiantes:

> *"No se puede sumar 3 cm a los lados, porque si sumamos no se estaría ampliando, sino añadiendo más cm, y lo que deseamos es ampliar la figura, porque es proporcional, es*

necesario establecer la razón de 7:4 y encontrar la constante para multiplicar cada lado, y listo obtenemos la nueva figura ampliada y esta calza".

Comentario y experimentación del grupo 2

El grupo 2 analizó la actividad de forma individual, buscando las soluciones para ampliar el puzzle. A continuación establecieron estrategias de forma grupal. Uno de los integrantes no fue fácil de convencer, puesto que consideraba que se debía dividir el puzzle en muchas más partes buscando el valor de cada uno de los lados. La estudiante realiza el esquema que desea realizar, pero se da cuenta que tenía muchos segmentos en que debía encontrar sus medidas, por tanto su estrategia no fue válida por el grupo.

El grupo ideó una segunda estrategia de forma general, apoyándose del concepto de patrón estudiado en clases. Considera que la medida de 4 cm tiene que ser ahora 7 cm, expresando que debía existir una fórmula para obtener el valor 7. El grupo considera la generalización de 2n-1, en donde n será la medida de 4 cm, por tanto obtiene los siguientes valores.

$$2n - 1 \rightarrow (2 \bullet 4) - 1 = 7$$

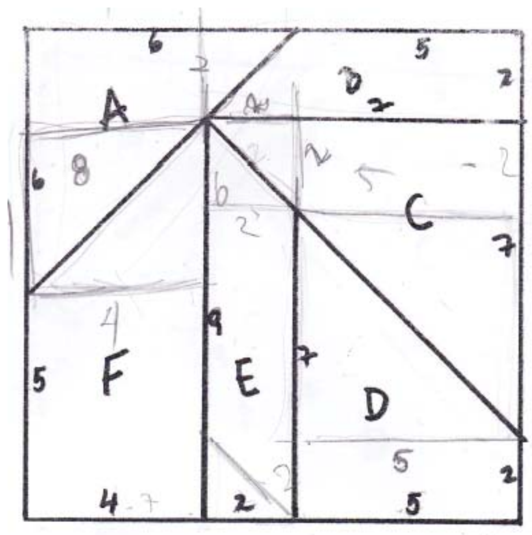


Figura 5: Estrategia utilizada por la estudiante para convencer al resto de los integrantes en la experimentación del grupo 2.

El razonamiento descrito explica

> *"nos dimos cuenta que al valor de 4cm se multiplicaba por 2 y se le restaba 1 se obtenía 7, era un patrón, pero cuando se ensamblo el nuevo puzzle habían dos figuras que no calzaron bien, creemos que una de las compañeros no recorto bien las figuras que le tocaron".*

El grupo se convence que dos de las figuras del puzzle no estaban bien recortadas, por tanto vuelve a realizar el puzzle. Tuvieron varios intentos para la construcción de la figura, pero aún así no lograron que las figuras calzaran con exactitud.

Comentario y experimentación del grupo 3

El grupo recortó el puzzle y se entregaron dos figuras a cada integrante y consideraron que a cada lado se le debía sumar 3 cm.

El razonamiento descrito explica

> *"el comienzo fue difícil, porque nos complico las medidas, ya que no nos dio una que es 4 cm y ahora 7 cm, y nosotros pensamos que al aumentar 3 cm a cada medida de la figura, pero al armar el puzzle, pero no nos calzo".*

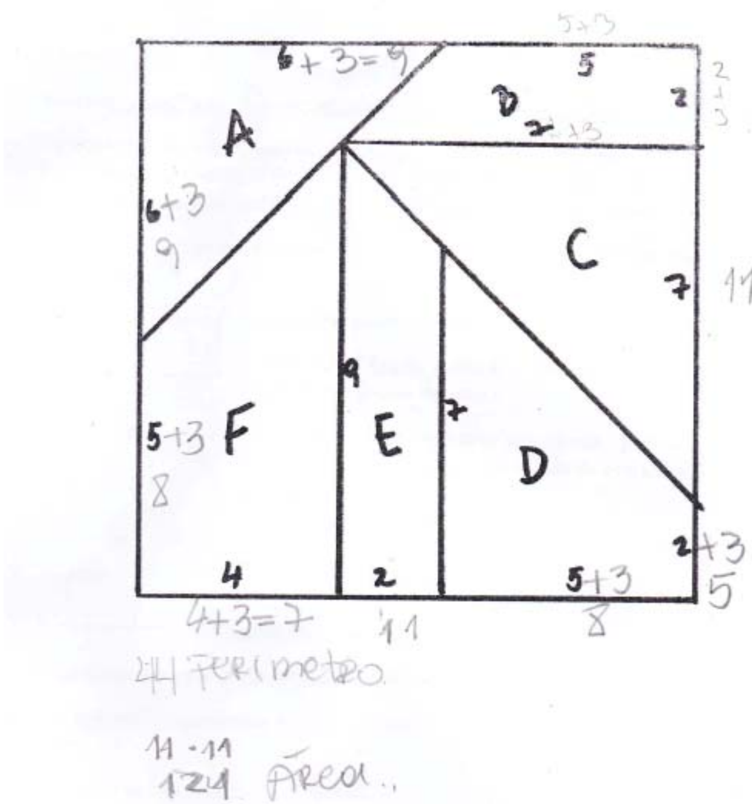


Figura 6: Evidencia de aumentar tres centímetros al puzzle por los estudiantes.

En la generalidad de los grupos al intentar armar el rompecabezas, se observaba que la estrategia utilizada era de sumar 3 cm por cada medida, pero al realizar el nuevo puzzle este no encajaba como en la figura original. Los estudiantes revisan las medidas y no encuentran el error. Cada grupo vuelve a buscar una nueva estrategia para poder ensamblar el puzzle, sin embargo las estrategias utilizadas no obtienen los resultados deseados.

Los integrantes de los grupos no encontraron los argumentos para defender o rechazar las construcciones realizadas. Detectaron que las piezas no calzaban, pero no identificaban el error que cometían.

Cierre de clase

Al finalizar el tiempo de trabajo, cada grupo da sus argumentos de cómo realizaron el puzzle y en su mayoría coinciden que se debía sumar 3 cm a cada una de las medidas. Sin embargo el grupo 2 expresa que la estrategia que ellos utilizaron fue usar la expresión de 2n-1 y explica el procedimiento que utilizó. Por último el grupo 1 discrepa de los demás integrantes del curso. *"si establecemos la razón de 7:4 obtenemos la constante de proporcionalidad y este valor se multiplicara por cada medida, porque se debe ampliar no añadir 3cm".*

5.1.2 Actividad 2

En la actividad 2 solo se considerarán el trabajo de un equipo. La elección de esto se debe a que todos los grupos utilizaron estrategias similares, por tanto no aportan datos que sean relevantes.

Se entrega la actividad y las instrucciones de estas, primero los estudiantes deben trabajar de forma individual durante 15 minutos para analizar la actividad e identificar las estrategias que ellos utilizarían. Posteriormente se reúnen con su grupo e identifican el plan de trabajo para dar solución a las situaciones planteadas.

En la primera actividad, los grupos no tuvieron mayor dificultad en establecer acuerdos y estrategias en relación a la actividad propuesta e identifican sin dificultad la cartulina que permite la reducción de la Mona

Lisa (figura 7), cada estudiantes escribe las estrategias utilizadas por su grupo de trabajo.

En la siguiente actividad los estudiantes deben identificar entre cuatro figuras, cuál de ellas se realizó una buena reducción de la Mona lisa. Los estudiantes identifican a simple vista la reducción correcta de la Mona Lisa (figura 8) y dan sus argumentos de porqué esa imagen era la correcta en relación a las demás, escriben sus estrategias y las comparten con su grupo de trabajo.

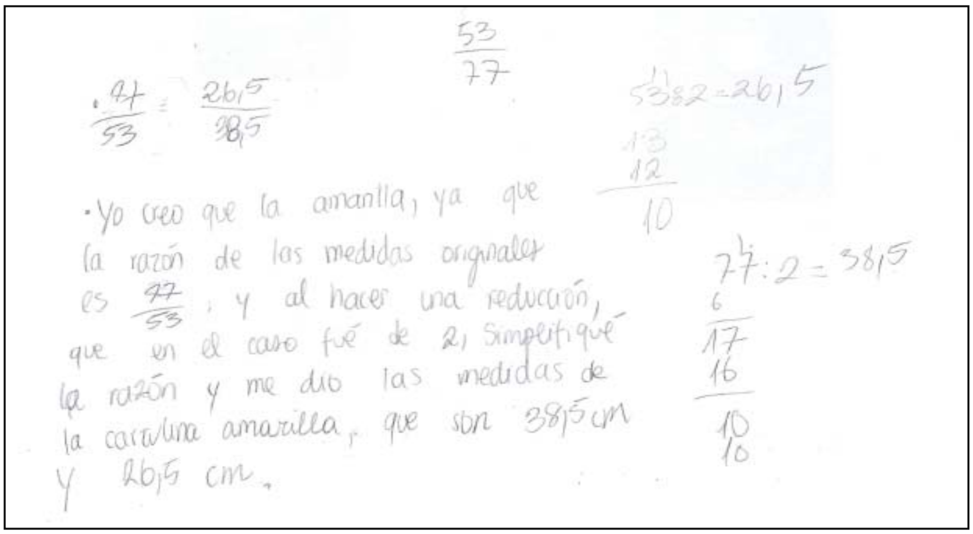


Figura 7: Los estudiantes expresan razones por medio de relaciones de equivalencia.

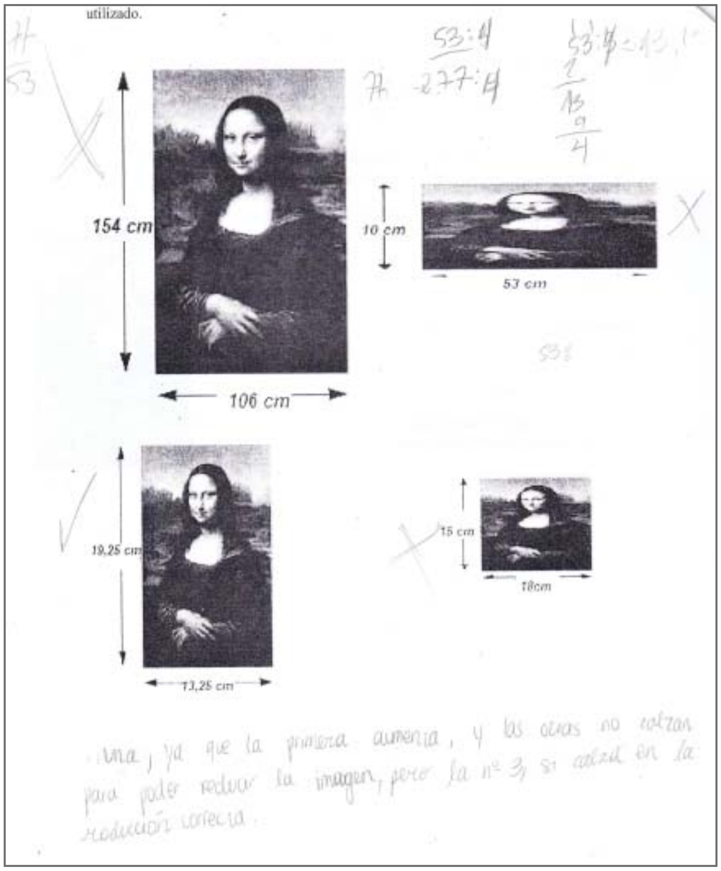


Figura 8: Realizan relaciones proporcionales para identificar la reducción de la figura.

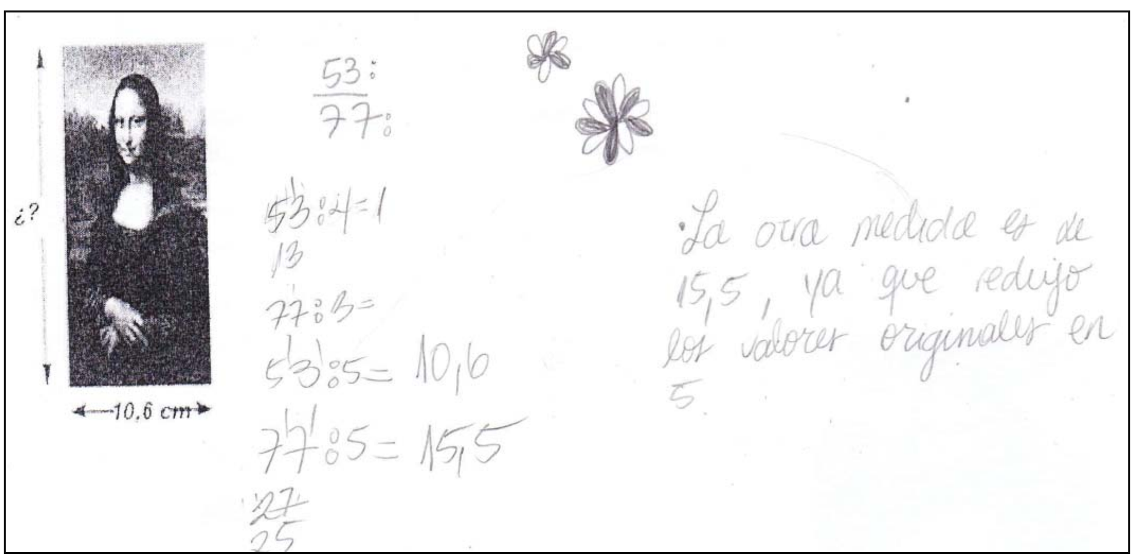


Figura 9: Para encontrar un valor faltante, forman una proporción y utilizan un operador.

En la última actividad se presenta una imagen de la Mona Lisa a la que se le ha efectuado una reducción (figura 9). Sin embargo a esta figura no presenta una de sus medidas. Los estudiantes no presentan mayor dificultad en encontrar el valor faltante, utilizan como estrategia la razón de la figura inicial en relación de equivalencia con la razón de la figura reducida. Utilizan como estrategia la simplificación de los valores. No obstante, no todos los grupos llegaron a la misma conclusión ya que restaron los lados de la figura.

Cierre de actividad.

Los estudiantes por grupo compartieron sus razonamientos y conclusiones sobre la secuencia de actividades realizadas, en sus mayoría utilizan el operador escalar para la reducción de la razón, además de comprender si se tienen dos razones en relación de equivalencia se conforma una proporción.

5.1.3 Actividad 3

En la actividad 3 se considerarán el trabajo de prácticamente todos los equipos. La elección de esto se debe a que hubo mayor diversidad en las respuestas de los estudiantes.

A los estudiantes se les presenta una situación de un carpintero que construye cuadros de diferentes tamaños, reducción y ampliación de estos, pero el carpintero siempre tiene que realizar un esquema para construirlos, luego mide, determina la medida de la base y la altura.

Se les pregunta a los estudiantes ¿cuál será el procedimiento matemático para encontrar las medidas de la base y la altura sin tener que medir?

Los estudiantes durante los primeros 15 minutos trabajan de forma individual, deben identificar las supuestas soluciones que darían para resolver la situación planteada, para posteriormente reunirse con su grupo de trabajo.

Transcurrido el tiempo y teniendo ideada las supuestas soluciones, se reúnen con su grupo de trabajo y analizan. Todos los grupos se encuentran debatiendo, aportando en soluciones para establecer la estrategia que ellos consideran pertinente. Algunos grupos dudan de las estrategias expuestas por sus compañeros y surgen dificultades por la falta de argumentación de los integrantes del grupo.

Para este apartado solo se considerarán 3 grupos. La elección de esto se debe que los otros grupos utilizaron estrategias similares, por tanto no aportan datos que sean relevantes.

Comentario y experimentación grupo 1.

El grupo 4. Encontró una variedad de soluciones, pero no tenían los argumentos para justificarlas, por lo que decidieron quedarse con la demostración que realizó uno de los estudiantes que dio mayor justificación (figura 10). El estudiante explica *"dividir la base que es 28 y por las alturas de los lados y luego dividir la base de los tamaños de los cuadrados y dará el resultado de la altura y comparar que calcen las medidas, por tanto, a es 4,5".*

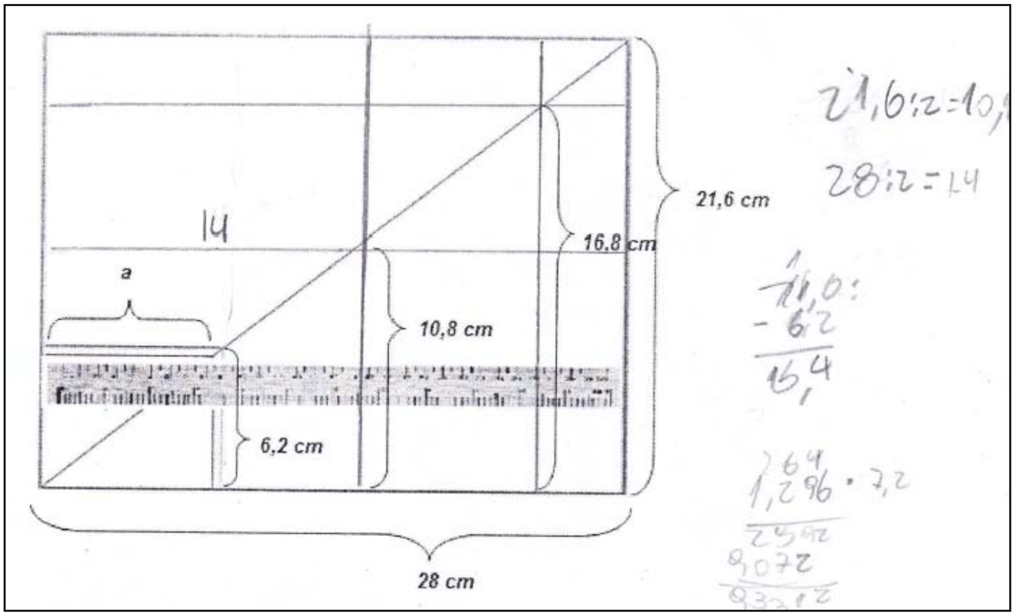


Figura 10: Sustraen los valores en una situación de proporcionalidad.

Comentario y experimentación grupo 2.

El grupo 2 también tiene diferentes soluciones, pero ellos consideran que hay una proporcionalidad en el trabajo que realiza el carpintero, y justifican:

> *"En la primera actividad del puzzle ampliamos, en la segunda actividad reducimos así que dividimos la razón y ahora hay que ampliar y reducir, es una proporcionalidad. Entonces la razón es 28:21,6 y eso nos da* $1,\overline{296}$*, este valor es la constante la multiplicamos por la altura y nos da la base del marco a y así encontramos todos los valores".*

Además este grupo decide organizar los valores en tabla de datos para establecer la secuencia de estos y modelar la problemática de la forma k•A=L (figuras 11a y 11b).

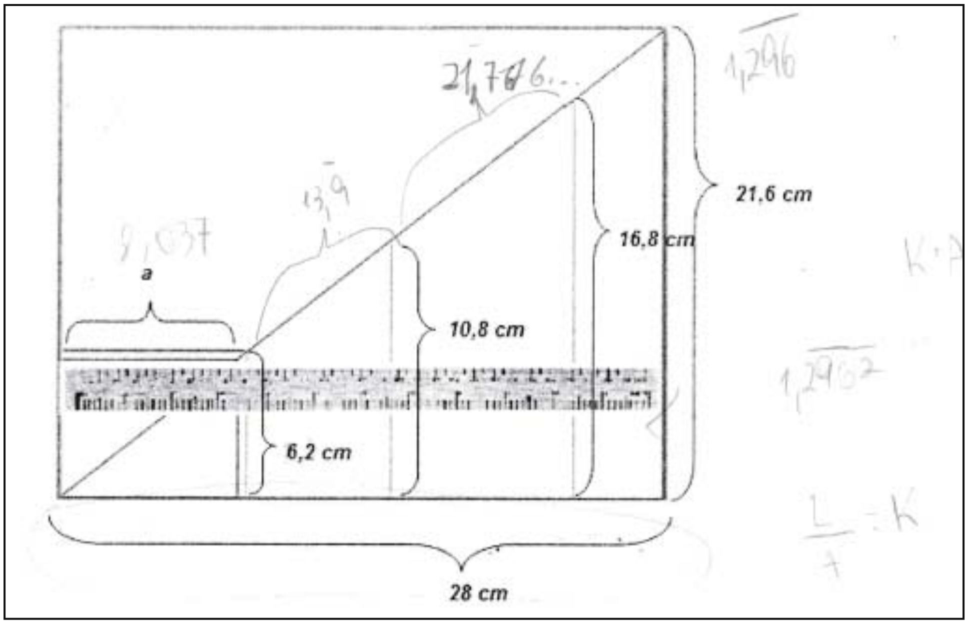


Figura 11a: Utilizan un operador función para encontrar los valores faltantes.

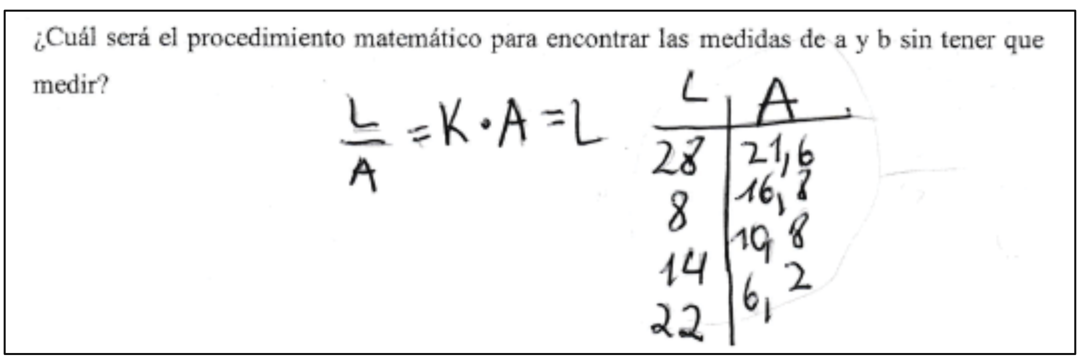


Figura 11b: Construyen y utilizan tabla para ordenar los datos.

Grupo 3: primero decide estimar valores y también considerar que existe la proporcionalidad en el trabajo que realiza el carpintero, y expresan:

"El marco se debe reducir y ampliar, por tanto nos deja ver que existe una razón para comparar los valores, por lo que hay que reducir la razón $\frac{21,6 \div 2}{28 \div 2} = \frac{14}{10,8}$ *(figura 12), lo cual me dio la altura del marco del medio, ahí puede sacar la distancia entre una y otra y así reste o sume a 14 encontrando todos los valores".*

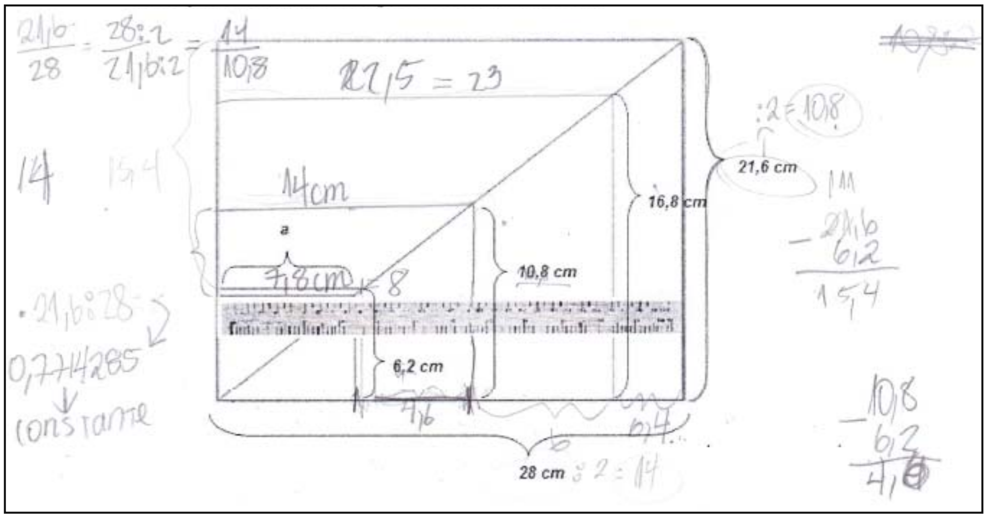


Figura 12: Utilizan un operador para disminuir los lados de la figura.

Posteriormente, después que todos los grupos tienen realizadas sus estimaciones sobre el trabajo ejecutado por el carpintero, se les entrega el esquema original que este utilizaba para la reproducción de los marcos, en el cual pueden medir utilizando la regla y corroborar los valores que ellos estimaron en sus producciones. La mayoría de los grupos dicen:

G7*"Viste que eso no daba" hay que reformular la estrategia" "no era si".*

G4 *"Tenemos los mismo valores que el carpintero, teníamos que solo aproximar".*

G5 *“Esta correcto” “era una proporcionalidad al igual que los otros trabajos”.*

Cierre.

Los grupos de trabajo discuten sus estrategias utilizadas para encontrar los valores que le faltaban al carpintero sin tener que medir. Un integrante de G1 explica el procedimiento que él utilizó, explicando que ellos habían dividido los lados de la figura y que así había obtenido 14cm. que era la medida del marco que se encontraba en el centro, pero no se dio cuenta que al restar una de los lados, la otra medida no se reducía.

El resto de los grupos no considera la estrategia del G1 e interviene una integrante de G3. Este explica a sus compañeros la estrategia que ellos utilizaron. Consiste en que en esta ocasión no se debía restar, porque era una proporcionalidad, y que la razón era entre la medida de la bases en relación a la altura 28 es a 21,6. Al simplificar estos valores por 2 se obtenía el valor del marco que se encontraba al centro. En el grupo de estudiantes se genera una exclamación “aahhh” al terminar de explicar la estudiante.

Un integrante de G2 interrumpe a la integrante de G3 y le dice *“Es más fácil encontrar la constante”.* El profesor interviene y le solicita que explique a sus compañeros la estrategia que el considero más pertinente.

El estudiante organiza los valores en una tabla de datos (figura 13) y le explica a sus compañeros que es una proporcionalidad y que la razón es entre ancho y el largo, pero al dividir estos valores se encuentra la constante de proporcionalidad, con este valor se multiplican todos las medidas de la altura y obtenemos el ancho, el estudiante escribe en la

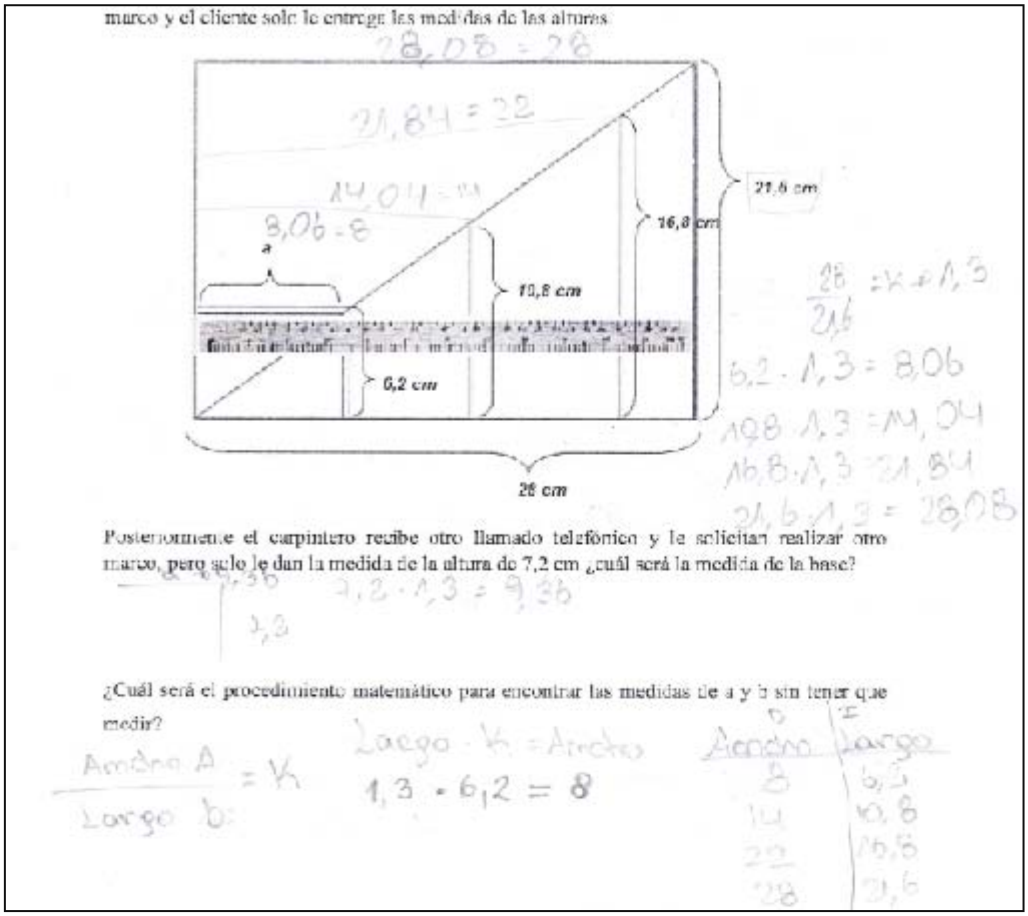


Figura 13: Modelan la función lineal y utilizan tabla para relaciones proporcionales.

pizarra la siguiente expresión k•A=L, pero los integrantes de G5 intervienen y le dicen *"está mal esta expresión" "No se generaliza así".*

El profesor intervine: *"Por qué no es así?"*, el estudiante responde

> "*Primero está mal porque A es el ancho y cómo voy a multiplicar por el ancho si no tengo la medida, si la constante se debe multiplicar al largo para obtener el ancho"* el estudiante escribe en la pizarra *K•L=A, "por tanto para generalizar es* $1,\overline{296}$ *• 6,2= 8,03 que se redondeamos es 8".*

El profesor posteriormente institucionaliza los conocimientos abordados por el grupo de curso, rescatando las estrategias utilizados por sus compañeros. Al concluir la actividad se indica que la clase tenía como objetivo construir una función que es del tipo lineal, por medio del uso de la proporcionalidad.

5.2 Análisis de resultados

En este capítulo se realizará el análisis a posteriori, considerando los reportes de cada equipo y se confecciona una tabla comparativa de sus respuestas.

5.2.1 Análisis de resultados actividad 1

Como se mencionó con anterioridad, esta secuencia se aplicó a 24 estudiantes que se organizaron en grupos de a tres, manteniendo el mismo grupo de trabajo durante las tres secuencias didácticas implementadas.

A continuación se analizarán las respuestas de las 6 preguntas de la primera actividad propuesta por todos los equipos.

A) Calcula el perímetro y área de la figura.

B) Recortar el puzzle y distribuir dos piezas a cada una de los integrantes del grupo.

C) Construir en una cartulina este puzzle pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4cm tenga una longitud de 7cm.

D) Ensambla el nuevo puzzle y determina el área y el perímetro del nuevo puzzle.

E) Justifique paso a paso el procedimiento utilizado por tu grupo de trabajo.

F)¿Cuáles fueron las dificultades qué tuviste para realizar el nuevo puzzle?

En la pregunta A) todos los estudiantes determinaron el área y el perímetro del puzzle inicial determinando que el área era 121 cm^2 y perímetro 44 cm. En relación a la pregunta B), los estudiantes no tuvieron problemas en recortar las piezas y repartirse dos para cada integrante y buscar la estrategia para ampliar cada figura.

La dificultad se presentó en los estudiantes cuando tuvieron que ampliar la figura de 4 cm. a 7 cm, 6 grupos la trabajaron de forma aditiva, agregando 3 cm. a cada medida de las figuras.

En relación a los datos obtenidos se organizaran los grupos en la siguiente tabla de indicadores.

	GRUPOS		
PREGUNTA	G:1	G:2	G3-G4-G5-G6-G7-G8
C	Establecieron la constante $4cm \rightarrow 7cm$ y multiplicaron su valor por cada una de las medidas.	Estableció un patrón 2n-1. Solo dos de las figuras no calzaban al ensamblar el puzzle.	Sumó 3 cm. a cada medida. No logra ensamblar el puzzle como la figura original.
D	Determina el área y perímetro de la figura ampliada A= 370,625 cm^2 y p=77 cms.	No determina el área ni el perímetro de la figura ampliada.	No determina el área ni el perímetro figura ampliada.

Solo un grupo establece la razón entre los valores $4cm \rightarrow 7cm$ y expresa la constante de proporcionalidad de 1,75 y construye el puzzle con las medidas consideradas. Se advierte que la mayoría de los estudiantes entiende el concepto de ampliar de forma aditiva (sumar a la segunda magnitud la diferencia de las cantidades).
En su mayoría los estudiantes justifican los procedimientos utilizados en sus escritos. A continuación, algunos comentarios:

G1: *"Sacamos la constante de la razón de 7:4, la cual era 1,75, después multiplicamos la constante por cada medida de la figura original. Armamos la nueva figura recortamos y ensamblamos, y que do perfecta como la original".*

G2 *"Nos dimos cuenta que al valor se le multiplicaba por 2 y se le restaba 1, era un patrón y obteníamos 7y luego eso hicimos con todas las medidas".*

G3: "A *cada lado de la figura le sumamos 3cm. No quedo como queríamos que quedara, no quedo como un cuadrado, tal vez se debería aumentar unos de sus lados, básicamente quedo disparejo. Se podría disminuir, pero quedaría pequeño, pero nos puede porque tiene que ser grande*".

G4: "*Sumar a todos los lados 3cm, ya que nos decía que el lado 4cm aumentaba en 7 cm".*

G5: "Recortamos las figuras con 3 cm más, intentamos que calzará. Hubieron dificultades *ya que no calzaban bien la figuras, y cambiamos de tamaño nuevamente, aun así no resultó".*

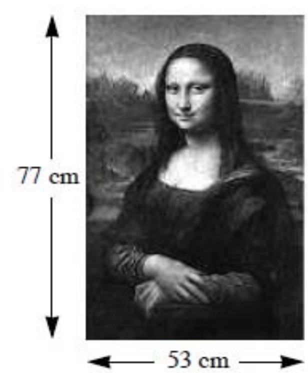
G6: "*Cuando armamos el primer puzzle no nos calzo como el original, así que nuevamente, construimos otro puzzle y lo realizamos de 20 cm* *por 20 cm y luego tomamos las medidas de la figura, y este sí, se ensamblaron las piezas como el puzzle original".*

G7: "le agregamos 3cm a la medida de 4 cm y asi sucesivamente con las otras medidas, pero no calzo al final, así que decimos recortar las piezas hasta que calzarán, pero no se logró".

G8: "*Al comienzo fue difícil porque nos complico las medidas, ya que nos dio una que era 4cm y ahora es 7 cm y nosotras pensamos que al aumentar era 3 cm. Nuestra estrategia era aumentar en 3cm cada medida de las figuras, pero no nos calzo de forma aditivamente".*

5.2.2 Análisis de resultados actividad 2

Item 1:-La profesora de arte te pide hacer una reducción del cuadro la "Mona Lisa" de Leonardo Da Vinci. El cuadro original tiene las medias que se muestran en el dibujo.¿Cuál de las cartulinas sirve para que la reducción sea exacta, y cubra toda la superfice de esta?



Amarilla de 38, 5 cm x 26, 5 cm

Verde 70 cm x 53 cm

Roja 71,5 cm x 47,5 cm

Blanca 77 cm x 77 cm

¿Qué estrategia utilizaste para encontrar la reducción adecuada?

En su mayoría los grupos coinciden al realizar la reducción, la cartulina que cubre toda la superficie es la amarilla.

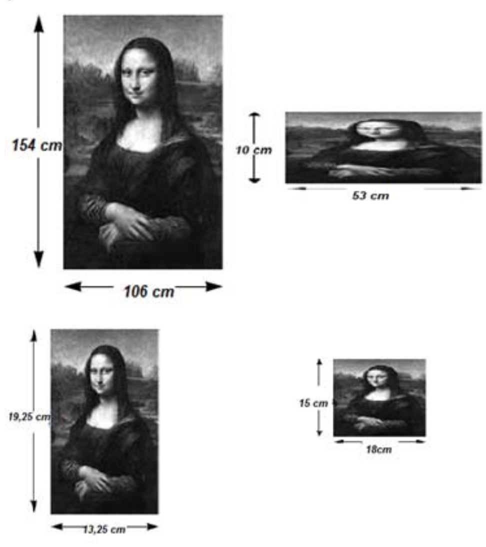
G5: "*calculamos la razón según las medidas originales 77 es a 53. A partir de esa razón podemos ampliar o reducir las medidas del cuadro. Finalmente, como grupo decidimos que a partir de las razones podemos* *ampliar y reducir cualquier figura, y también descubrimos medidas ocultas".*

Las estrategias que utilizan es establecer la razón de la figura original y aplicar un operador adecuado: $\frac{77 \div 2}{53 \div 2} = \frac{38,5}{26,5}$, se obtiene la reducción de la figura.

Solo dos grupos consideran la cartulina roja, en sus comentarios justifica que se debe restar los valores para obtener la figura reducida.

G3: "*Nosotros creemos que es la cartulina que tiene el valor exacto, es la cartulina roja, ya que creemos que es más proporcional. La estrategia que utilizamos fue que nos imaginamos como sería la imagen reducida con cada una de las medidas, además descartamos las cartulina blanca, porque se trata de reducir y la cartulina blanca no se reduce".*

Ítem 2.- Algunos estudiantes no comprendieron la instrucción del profesor de arte, y ellos realizaron estas producciones de la Mona Lisa. ¿En cuál de estas producciones corresponde una buena reducción? Argumenta con tu grupo de trabajo y justifica el procedimiento utilizado.



G7: “*La cartulina que puede cubrir todo el área de la figura, es la cartulina blanca. Al restarle el ancho de la figura quedaría exacto porque calza con 77 cm, pero el ancho es de 53cm, la cartulina blanca es 77 por 77 cm, así que solo debemos retirar el espacio sobrante. Reduje el ancho de la imagen a 24 cm para que calzara con la original*”.

En su mayoría los grupos descartaron la primera imagen, ya que esta no era la reducción de la Mona Lisa, afirmando que las medidas eran superiores a la figura original. También descartan las otras dos porque la imagen no era proporcional, por tanto la última imagen si es una reducción, y se confirman las medidas, estableciendo la razón de la figura original y la relación a la figura reducida. De esta forma $\frac{19,25}{13,25} = \frac{77}{13,25}$ los estudiantes utilizan un operador, multiplicando por 4 cada una de las medidas de la figura reducida y obtiendo las medidas de la figura original. Concluyendo que la reducción que se había realizado era 4 veces más pequeña que la figura original.

Ítem 3.-Eduardo realizó la reducción de la Mona Lisa, pero se le borro una de las medidas y no recuerda su valor. Ayuda a Eduardo a encontrar este valor. Y explícale paso a paso qué procedimiento utilizaste. (Recuerda que no puedes utilizar regla para medir)

Por medio del análisis realizado en las producciones de los grupos, se categorizan los resultados en los siguientes indicadores.

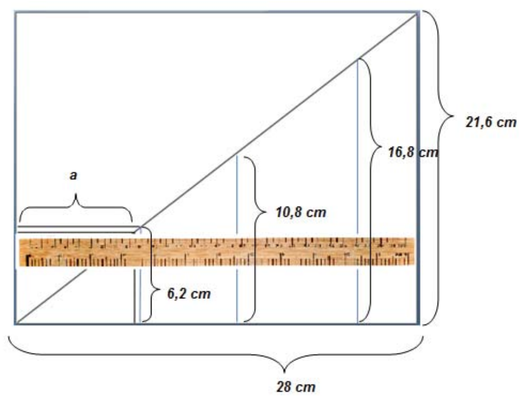
	G1-G2-G3 -G4 -G6	G5	G7-G8
	Determina la razón entre la figura original y la figura reducida y utiliza un operador para encontrar la medida que la falta.	Determina la razón, pero le resta una cantidad sin obtener la medida faltante.	No responden.
Estrategias utilizadas	$\frac{77cm \div 5}{53cm \div 5} = \frac{15,4\ cm}{10,6cm}$ Dividen por 5 ambas razones $77cm \rightarrow 53\ cm \quad \div 5$ $15,4\ cm \rightarrow 10,6cm$	$\frac{77cm}{53cm}$ 77-42,6= 34,4	No presenta ninguna estrategia.

En general los estudiantes comprenden que debe establecer la razón para ampliar y reducir las figuras y utilizan un operador para reducir las medidas. Sin embargo, todavía hay estudiantes que realizan una sustracción para encontrar los valores faltantes o no responden.

5.2.3 Análisis de resultados actividad 3

Un carpintero habitualmente realiza marcos para montar reducciones de un cuadro de 21, 6 cm de altura por 28 cm de base. Él desarrollo una nueva estrategia para determinar el ancho de una reducción del cuadro conociendo sólo la altura: construye la diagonal de una hoja del tamaño del cuadro original, dibuja las alturas, las bases y posteriormente mide cada uno de sus lados con una regla, como se muestra en la figura

El carpintero recibe un llamado telefónico solicitando un pedido de distintos tamaños de marco y el cliente solo le entrega las medidas de las alturas.



Según el análisis realizado en las producciones se organizaron los grupos utilizando los siguientes indicadores:

G1-G3-G4-G5	G-6	G2 –G7	G8
Determinan la constante de proporcionalidad y en datos que varían proporcionalmente y la utilizan para hacer cálculos.	Determinan la constante de proporcionalidad y en datos que varían proporcionalmente y los utilizan para hacer cálculos.	Determinan la razón entre las variables, pero utiliza un operador para encontrar los valores faltantes.	Suma o resta los valores asociados.
Construyen tablas	No construye la tabla asociada a	No construye la tabla asociada a	No construye la tabla asociada a

relaciones de proporcionalidad directa entre dos variables.	una proporcionalidad directa.	una proporcionalidad directa.	una proporcionalidad directa.
Identifica los datos relevantes y establecen la función asociada a la problemática.	Identifica los datos relevantes pero no establecen la función asociada a la situación.	Identifica los datos relevantes pero no establecen la función asociada a la situación.	No identifican los datos relevantes No establecen la función asociada a la situación.

Se identifica que la mayoría de los grupos establece que la actividad propuesta es una proporcionalidad y determinan la razón de la figura 28 es a 21,6, fijando la constante de proporcionalidad, para después multiplicar cada valor por la constante. Se destaca que la mayoría de los grupos realiza una tabla para organizar los datos obtenidos, lo que permitió poder generalizar la problemática y establecer la función lineal, siendo el objetivo de esta investigación. Es importante destacar que los estudiantes logran identificar la razón y la comprenden como una relación de equivalencia entre dos magnitudes de forma implícita, además de utilizar un operador para aumentar o disminuir las razones conformando una proporción.

En las siguientes producciones se demuestra el trabajo realizado por los grupos:

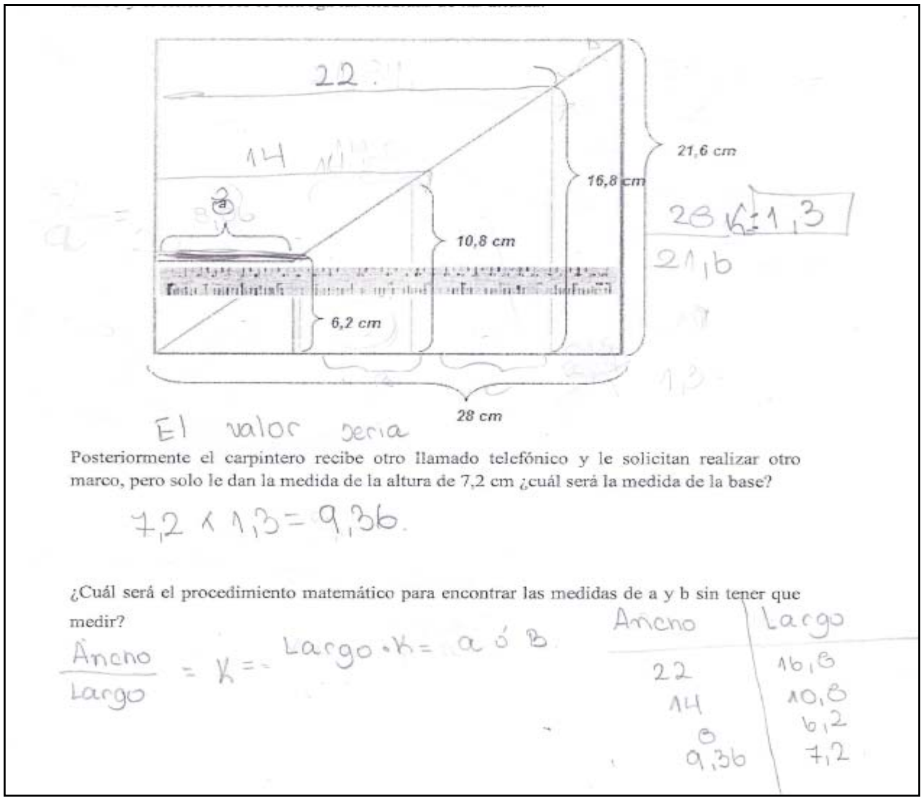


Figura 14a: Trabajo realizado por el G1.

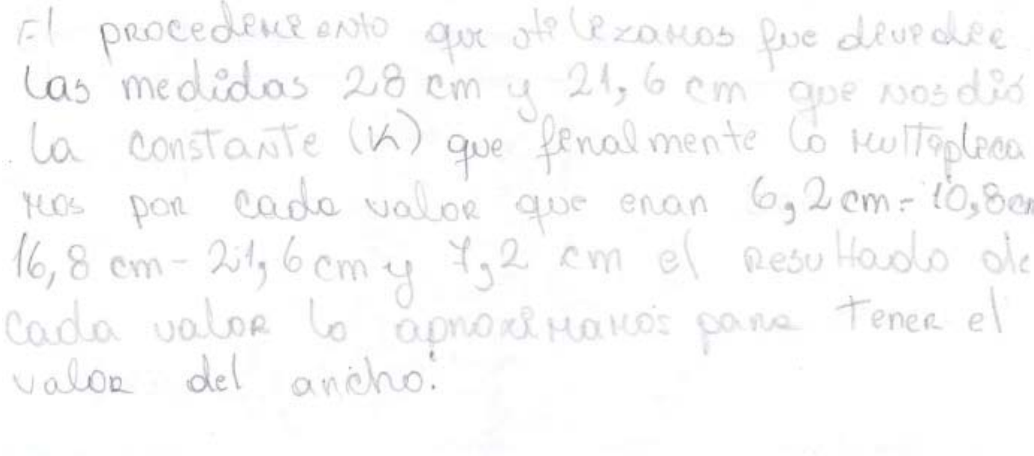
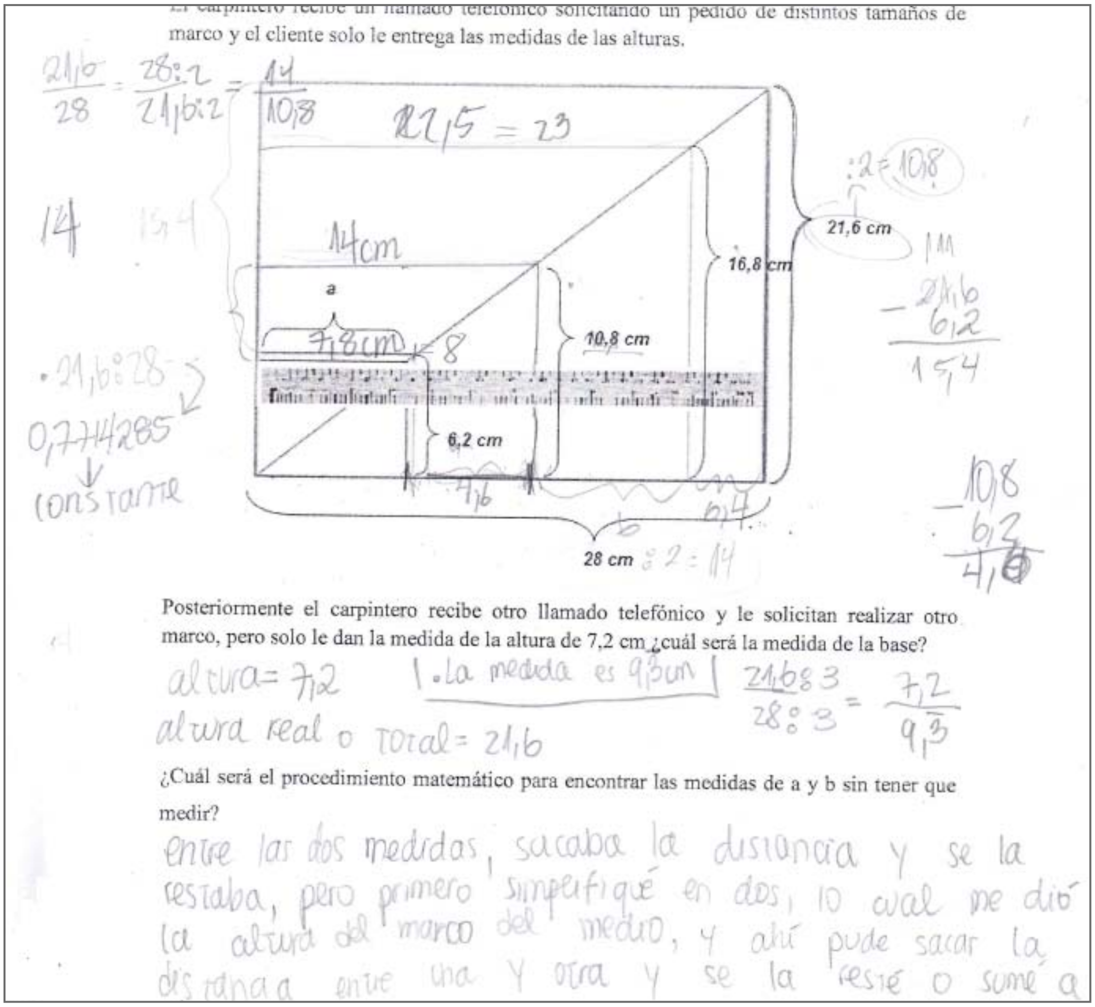


Figura 14b: Trabajo realizado por el G1


El carpintero recibe un llamado telefónico solicitando un pedido de distintos tamaños de marco y el cliente solo le entrega las medidas de las alturas.

Posteriormente el carpintero recibe otro llamado telefónico y le solicitan realizar otro marco, pero solo le dan la medida de la altura de 7,2 cm ¿cuál será la medida de la base?

altura= 7,2 | 1. La medida es 9,3cm | 21,6 : 3 / 28 : 3 = 7,2 / 9,3

altura real o total= 21,6

¿Cuál será el procedimiento matemático para encontrar las medidas de a y b sin tener que medir?

entre las dos medidas, sacaba la distancia y se la restaba, pero primero simplifiqué en dos, lo cual me dió la altura del marco del medio, y ahí pude sacar la distancia entre una y otra y se la resté o sumé a

Figura 15: Producción realizada por el G2.

Capítulo 6

Análisis a posteriori

6.1 Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados en esta experimentación

En la última fase de la Ingeniería Didáctica, se tomarán los datos recolectados en la fase de experimentación, las producciones de los estudiantes y los comportamientos esperados. Por tanto, se realizará una comparación entre el análisis a priori y a posteriori de la situación didáctica.

En el siguiente cuadro, detallaremos para cada ítem de las actividades, la comparación entre los comportamientos esperados y los comportamientos observados en la experimentación.

Actividad 1

Ítem	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados.
A	Tal y como se esperaba, en su totalidad los estudiantes determinaron el área y el perímetro de la figura del puzzle.
B	Como se esperaba, todos los estudiantes recortan las figuras y se entregan las piezas a cada integrante.
C	Al construir el nuevo puzzle solo un grupo logra ampliarlo, estableciendo la razón de la figura $4 \rightarrow 7$. Sin embargo, los siete grupos restantes realizan la ampliación de forma aditiva no calzando las figuras. Los estudiantes no logran identificar la proporción que existe para la ampliación de la figura.
D	La mayoría de los grupos no logran ensamblar el nuevo puzzle, a excepción de un grupo que sí lo realiza y determina el área y perímetro del nuevo puzzle.
E	La mayoría de los estudiantes describe las estrategias tal como se esperaba, los estudiantes tienden a sumar 3 cms. a cada lado de la figura por lo que no calzan las figuras del nuevo puzzle.

Actividad n° 2

Ítem 1	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados.
A	Tal como se esperaba, la totalidad de los grupos identifican como correcta la cartulina amarilla para la reducción adecuada de “la Mona Lisa”. También, utilizan del operador escalar para reducir la razón. Solo dos grupos utilizan como estrategia restar a los lados de la figura.
Ítem 2	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados.
A	Como se esperaba, los estudiantes realizaron discriminación de las figuras de manera visual reconociendo la distorsión de la imagen. Además de rectificar la reducción matemáticamente, expresan la proporción entre la figura inicial y la reducida, utilizando como estrategia: $\frac{77cm \div 4}{53cm \div 4} = \frac{19{,}25\ cm}{13{,}25\ cm}$.

Ítem 3. A	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados Se esperaba que los estudiantes determinaran la proporción entre la figura original y la reducida, utilizando del operador escalar para encontrar la medida faltante. Solo cinco grupos realizan la actividad como se esperaba. Sin embargo, un grupo resta los lados de la figura para encontrar el valor faltante. No se esperaba que dos grupos no respondieran, además de no establecer ninguna estrategia para desarrollar la actividad.

Actividad 3

Item 1	Comparación entre los comportamientos esperados y los encontrados.
A	En relación a lo que se esperaba, solo cuatro grupoS establecen la razón entre la medidas, determinando la cosntante de proporcionalidad. Utilizan tabla para organizar los datos e identifican los datos relavantes para la construir la función lineal. Un solo grupo determina la constante para establecer los valores faltantes. Dos grupos establecen la razón, pero no utilizan la constante, sino un operador escalar para establecer los valores faltantes. Solo un grupo sigue estableciendo relaciones aditivas para aumentar o reducir la imagen.

Observaciones.

En términos generales, se encuentra una semejanza entre lo esperado y observado; una dificultad para establecer la razón y la comprensión de problemás propocionales. Además, existe una dificultad en la resolución de actividades, evidenciado en que los estudiantes tienden a sumar o restar los valores establecidos para realizar reducciones o ampliaciones.

Sumado a lo anterior, se observa una dificultad en la última actividad, ya que solamente cuatro grupos son capaces de establecer la función lineal.

La implementación de las actividades, permitió a los estudiantes abordar el concepto de razón, proporcionalidad y función lineal de forma distinta a como se estudia en el discurso escolar e implementado en los actuales textos escolares chilenos. Se trata que por medio de la razón, se construya el concepto de proporción, a través de relaciones de equivalencia. Además, del uso de la proporcionalidad converja de forma más natural establecer la función lineal para generalizar la situación problemática que se les presentó.

Capítulo 7

Conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones

En este capítulo se expresarán las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos propuestos, posteriormente se darán algunas recomendaciones y perspectivas para futuras investigaciones en esta área.

Los resultados de esta investigación, arrojaron que gran parte de la muestra en estudio adquirió el concepto de función lineal, mediante el trabajo de la razón y de la proporcionalidad sin haber utilizado la regla de tres. Esto muestra que la realización de actividades, en donde los estudiantes son agentes activos y participativos de su propio aprendizaje, propicia el tránsito entre conceptos matemáticos.

En relación al primer objetivo especifico.

Estudiar 3 situaciones de clases que faciliten en estudiantes de 8° grado avanzar en la comprensión de relaciones funcionales.

Este objetivo se cumplió, ya que se ejecutó el diseño de tres situaciones didácticas, se aplicó y se realizó el análisis correspondiente, es decir, se confrontó el análisis a priori con el posteriori. En la construcción de las actividades se utilizó la Teoría de Situaciones Didácticas y los aportes de la Ingería Didáctica como metodología de investigación.

Las actividades propuestas contribuyeron a consolidar los aprendizajes relacionados al concepto de razón, proporcionalidad y función lineal, advirtiéndose que la totalidad de los estudiantes se sumó al trabajo en equipo. Todos ellos aportaban ideas y sugerencias en el desarrollo de las actividades propuestas. Estas participaciones fueron activas por parte de los estudiantes, lo que se debe a que la generalidad de las actividades no presentaba dificultad de comprensión, obteniendo un fuerte impacto motivacional en los estudiantes para tomar deciciones o conjeturas de cómo resolverlas. Además, al trabajar primero de forma individual y posteriormente en equipo, permitió que cada integrante defendiera sus razonamientos, o bien, refutar las de sus campañeros. Les resultó más sencillo extraer conclusiones a partir de las construcciones que ellos mismos fueron generando, sin la intervención del docente, permitiendo que ellos construyeran el concepto de razón y proporción.

Se destaca al finalizar cada actividad, que son los estudiantes los que dan a conocer las técnicas que utilizaron; donde fueron ellos los agentes activos de sus conocimientos, utilizando un lenguaje “matemático” para enunciar cada procedimiento, para después ser institucionalizado por el docente. La actividad les dio la posibilidad de reconstruir sus conocimientos previos adquiridos en otras etapas de su enseñanza, resolver situaciones y clarificar sus conceptos relacionando datos y operaciones que ellos consideraron adecuadas.

En relación al segundo objetivo especifico

Potenciar en estudiantes de 8° grado la comprensión de la estructura multiplicativa de los números racionales positivos, dando significado a *las operaciones con cantidades de magnitud, en relación a las unidades de medida.*

Al aplicar el diagnóstico de conocimientos previos, se extrae que solo el 33,4% de los estudiantes realizaban operaciones multiplicativas en situaciones proporcionales. Sin embargo, el estudio permitió que la mayoría de los estudiantes conocieran y comprendieran el concepto de razón, utilizándolos en las diversas actividades planteadas. Conjuntamente, establecieron las relaciones de equivalancia entre razones, conformando una proporción, evidenciado en los registros presentados en la fase de experimentación. Los estudiantes pudieron constatar que al ampliar y reducir una figura, les arrojaba el mismo valor al utilizar un operador escalar entre las razones, conformando una proporción.

En la última actividad creada, se logró que solo cuatro de ocho grupos establecieran la función lineal para generalizar la problemática del "carpintero". Sin embargo, es necesario propiciar un trabajo más prolongado en las actividades dirigidas al uso de operadores escalares, para que de este modo puedan llegar de una mejor manera al uso de operador función (teniendo un resultado similar en Block (2006)). Las dificultades conceptuales y procedimentales que tuvieron los estudiantes, se deben en gran parte a la falta de conocimientos previos o falta de apropiación. A los estudiantes en su mayoría les dificultó que no hubiera una fórmula o una estrategia explícita que se les pidiera desarrollar, ya que eran clases distintitas, sin que el profesor interviniera en la toma de decisiones del estudiante. Otra de las dificultades que presentaron los estudiantes fue la toma de decisiones, lo que se evidenció en la primera actividad, donde preguntaban con regularidad si su trabajo estaba bien realizado, esperando que el profesor les aprobara o no sus trabajos. Al darse cuenta que el docente solo se refería a algunos enunciados, los estudiantes tomaron decisiones por cuenta propia, logrando formular sus propias conclusiones.

Pese a lo anterior, la mayoría logró establecer la función lineal, aunque existió la dificultad de que algunos estudiantes siguiran viendo el concepto de ampliar o reducir de forma aditiva. Si bien, el concepto de proporción ya se había trabajado en años anteriores, es necesario replanterase el hecho de cómo es enseñado en la escuela para darle sentido al uso de la razón y su comprensión, tal como se hizo desde los primeros escritos encontrados, es decir, que el concepto de proporción nace del concepto de razón utilizado por la *antefairesis* de Elementos (Cap. V), lo que hoy es conocido como el clásico algoritmo de Euclides. La *antifairesis* es el incio del uso de las razones utilizado como un operador de ampliación y reducción de una razón. Este proceso fue simplificado por el uso de la *regla de tres* para calcular los valores faltantes de una proporción. Esta *regla de tres* hasta el día de hoy se sigue enseñando para resolver problemas de carácter proporcional.

Recomendaciones.

El tratamiento de la proporcionalidad es una tarea a incluir con mayor robustez en la secuencia didáctica, de esta manera, es posible optimizar el tránsito hacia la función lineal.

A partir del análisis de los resultados, se infiere que existen dos posibles opciones para fortalecer la secuencia didáctica. Estas son:

- Construir una actividad intermedia entre las actividades 2 y 3, prevaleciendo un proceso mucho más gradual hacia el tránsito de la función lineal, específicamente en el uso de la proporcionalidad.
- Fortalecer en las actividades 2 y 3 el uso de la proporcionalidad, facilitando el tránsito de la función lineal.

Capítulo 8

Referencia bibliográfica

Alfaro S., Espinoza Y., Cano S. Y Coll D. (2014). Texto del Estudiante Matemático 7º básico. Santiago: Galileo.

Apóstol, T.(1967) Calculo con funciones de una variable, con una introducción al Algebra Lineal, , Editorial Reverte, Col. S.A.

Artigue M., Douady R., Moreno L. y Gómez P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.*

Ben-Chaim D., Keret Y. And Ilany B. (2012). Ratio and Proportion. Research and teaching in mathematics teachear's education (pre- and in-service mathematics teachers of elementary and middle school calsses). Rotterdam: Sense Publishers.

Block, D. et al. (2006), "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria", en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las* *matemáticas. Un reporte iberoamericano*, México, Díaz de Santos de México, Clame, pp. 455-470.

Block, D. (2006), “Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad”, en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Montevideo, Uruguay, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, vol. 19, pp. 675-680.

Block, D. (2006), “Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón ‘múltiplo’ y su vinculación con la multiplicación de números naturales”, *Educación Matemática*, México, Santillana, vol. 18, núm. 2, pp. 5-36.

Brousseau, G. (2007) “Iniciación del estudio de la teoría de las situaciones didácticas” Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cano, M. (2011) Análisis del uso de conceptos y procedimientos de proporcionalidad en la resolución de problemas de física, y propuestas didácticas con tecnología. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Distrito Federal Departamento de Matemática Educativa. México.

Ceballos, E. (2012) Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de la Proporcionalidad en el Grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Chevallard, Y. (2007). La transposición didáctica. Del saber académico al saber enseñado. Editorial Aique. Bs. As.

De Faria, E. (2006) Ingeniería Didáctica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, año 1, número 2. Universidad de Costa *Rica.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/12/17.*

Dittborn M., Goldenberg M., Gatica A., Araneda V. Y Henríquez C. (2012). Texto de Revisión y Práctica 8º básico. Santiago: Santillana.

Freudenthal, H. (2001) Didactical Phenomelogy of Mathematical Stuctures. Dordrech: Reidel Traducción de Luis Puig en Fenomenología didáctica de las Estructuras matemáticas*.* Texto seleccionado*.* México: CINVESTAV.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luís Rico (Eds*.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación.*

Gómez, W. (2011). Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la comprensión del concepto de función lineal. Tesis de Maestria. Universisda Nacional de Colombia, Bogotá.

González, J.(2002) Fundamento de la matemática. Valparaíso: Universidad católica de Valparaíso.

Holguin, C. (2012) Razonamiento Proporcional. Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá, Colombia.

MINEDUC (2011). Programas de Estudio 8º año Básico. Recuperado: http://curriculumenlinea.mineduc.cl/sphider/search.php?query&t_busca=1&results&search=1&dis=0&category=1

Mora, E. (2000-2001) Las matemáticas del Islam Recuperado: http://matematicas.uclm.es/itacr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf

Obando G., Vasco C., Arboleda L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. Relime *17* (1): 59 – 81.

Olfos, R & Bauman, F. (2007) Consolidación de la Ingeniería Didáctica como Metodología de investigación. Apuntes PUCV. Viña del mar.

Oller, A (2012). Proporcionalidad Aritmética: Una Propuesta Didáctica para Alumnos de secundaria, Tesis Doctoral Universidad de Zaragoza, Valladolid.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Sánchez, E. (2012) Razones, Proporciones y Proporcionalidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol (1): 65-97.

Solaeche, M. (2002) Omar Khayyam: Las Matemáticas, La nada, El vino, El torno y la Amada, Divulgaciones matemáticas Vol. 10 No1, p 79-83 Recuperado:http://www.emis.de/journals/DM/vX1/art7.pdf

Vargas, M. (2011) El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. Tesis de Maestría. Universidad Nacional De Colombia, Bogotá.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structure. En Hiebert, James y Beh, M. (Eds., Number Concepts and Operations in the Middle Grades (p. 141-161), Nueva York: NCTM.

Anexo 1

Diagnóstico

Nombre ____

La pintura que se gasta para cubrir una vivienda es directamente proporcional a la superficie que se desea pintar. Para pintar una pared de 16 metros cuadrados se necesitan 0,8 litros de pintura.

Responde las siguientes preguntas.

A) ¿De qué depende la cantidad de pintura que se gaste?

B) Identifica las variables asociadas y construye una tabla con la siguiente información. Cuántos litros de pintura se necesitan para una Superficie de $2m^2$, $4m^2$, $8m^2$, $12m^2$ y $16m^2$ Construye una tabla y organiza los datos.

C) observa la tabla que construiste, ¿Se observan cambios en la cantidad de pintura? , por qué? Explica tu respuesta.

D) Según la tabla cuál es la diferencia de la cantidad de pintura entre el 2° y 1° termino, el 4° con el 3°, Se observan cambios ¿Los cambios son constante? ¿Qué puedes concluir?

Anexo 2

Secuencia didáctica

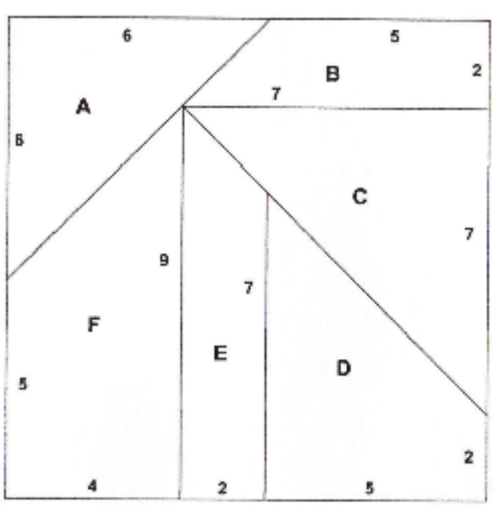
Situación 1 “El puzlze”.

Nombre del Grupo:____

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzzle 11 x 11 cm que contiene 6 piezas A, B, C, D, E y F según lo muestra la ilustración. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresados en centímetros.

1.- Reúnete en con tres compañeros y realiza los siguientes procedimientos.

2.- Realiza las instrucciones paso a paso.



A) Calcula el perímetro y área de la figura.

B) Recortar el puzzle y distribuir dos piezas a cada una de los integrantes del grupo.

C) Construir en una cartulina este puzzle pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4cm tenga una longitud de 7cm.

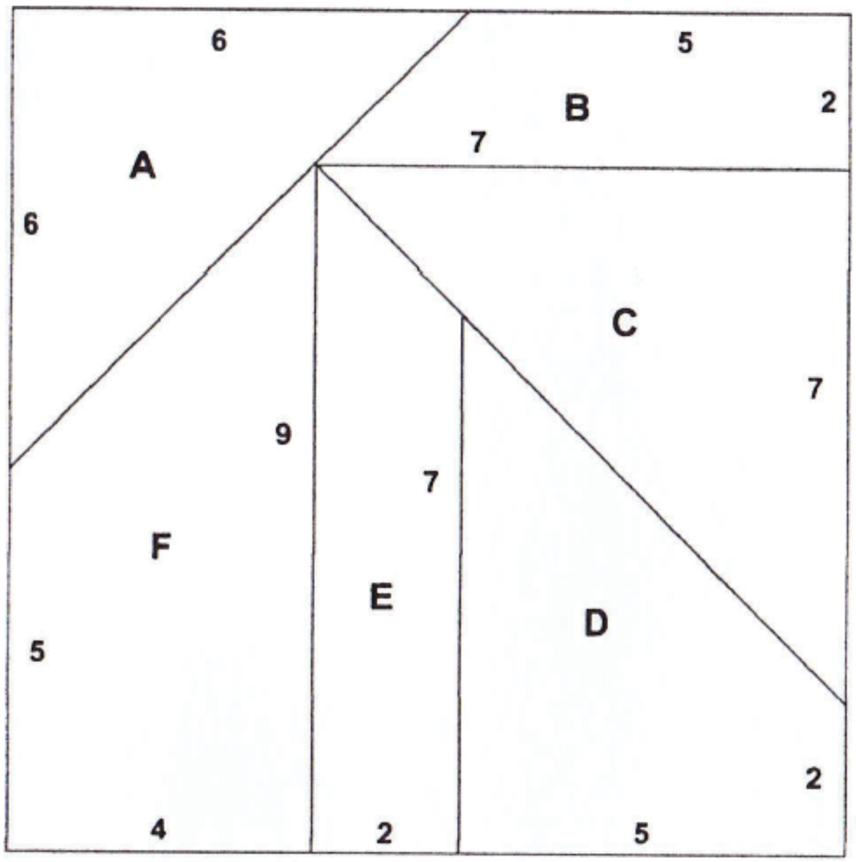
D) Ensambla el nuevo puzzle y determina el área y el perímetro del nuevo puzzle.

E) Justifique paso a paso el procedimiento utilizado por tu grupo de trabajo.

¿Cuáles fueron las dificultades qué tuviste para realizar el nuevo puzzle?

¿Cuál fue la estrategia que utilizaron para ampliar el puzzle?

Material para recortar. Puzzle de 11x 11 cm



Situación N° 2. “La Mona Lisa”.

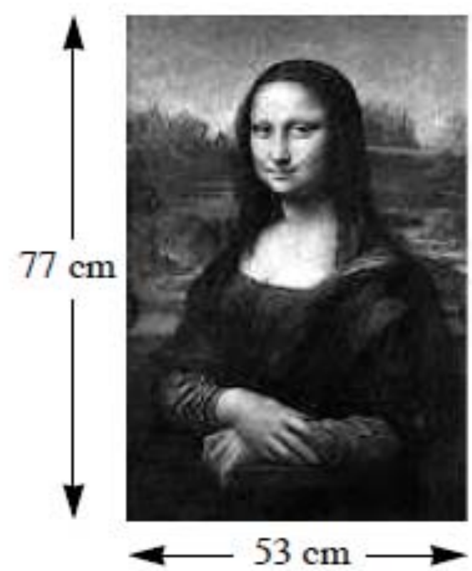
Nombre:____

Instrucciones

- **Para la siguiente situación no debes utilizar reglas para medir las lados de la figuras.**
- **Lee la situación problemática de forma individual (15 min) posteriormente reúnete con tu grupo de trabajo y verifica tus respuestas**.

La profesora de arte te pide hacer una reducción del cuadro la “Mona Lisa” de Leonardo Da Vinci. El cuadro original tiene las medias que se muestran en el dibujo.

¿Cuál de las cartulinas sirve para que la reducción sea exacta, y cubra toda la superfice de esta?



Amarilla de 38, 5 cm x 26, 5 cm

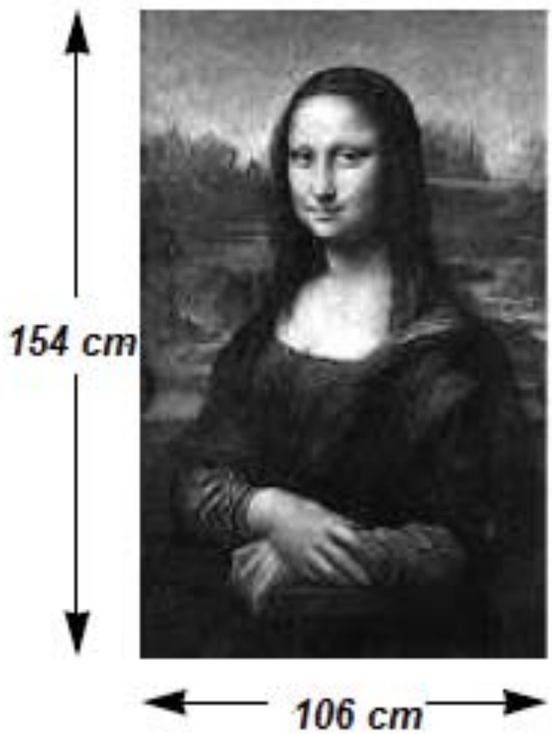
Verde 70 cm x 53 cm

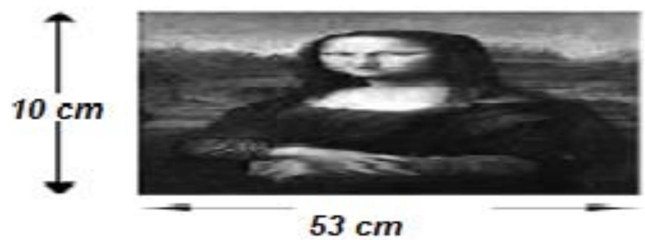
Roja 71,5 cm x 47,5 cm

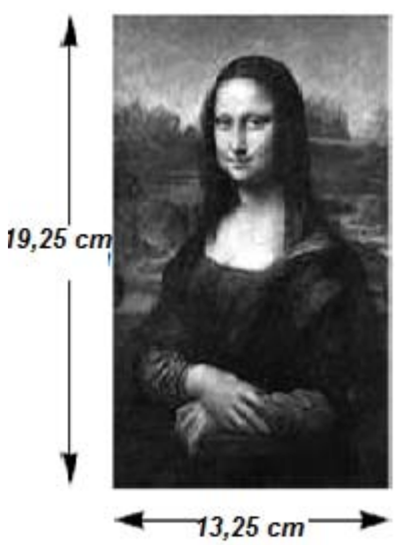
Blanca 77 cm x 77 cm

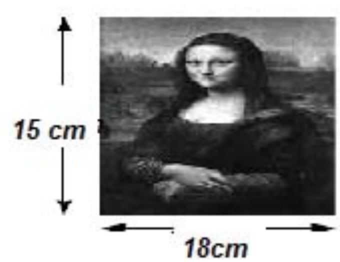
¿Qué estrategia utilizaste para encontrar la reducción adecuada?

Algunos estudiantes no comprendieron la instrucción de la profesora de arte, y ellos realizaron estas producciones de la Mona Lisa. ¿En cuál de estas producciones corresponde una buena reducción? Argumenta con tu grupo de trabajo y justifica el procedimiento utilizado.









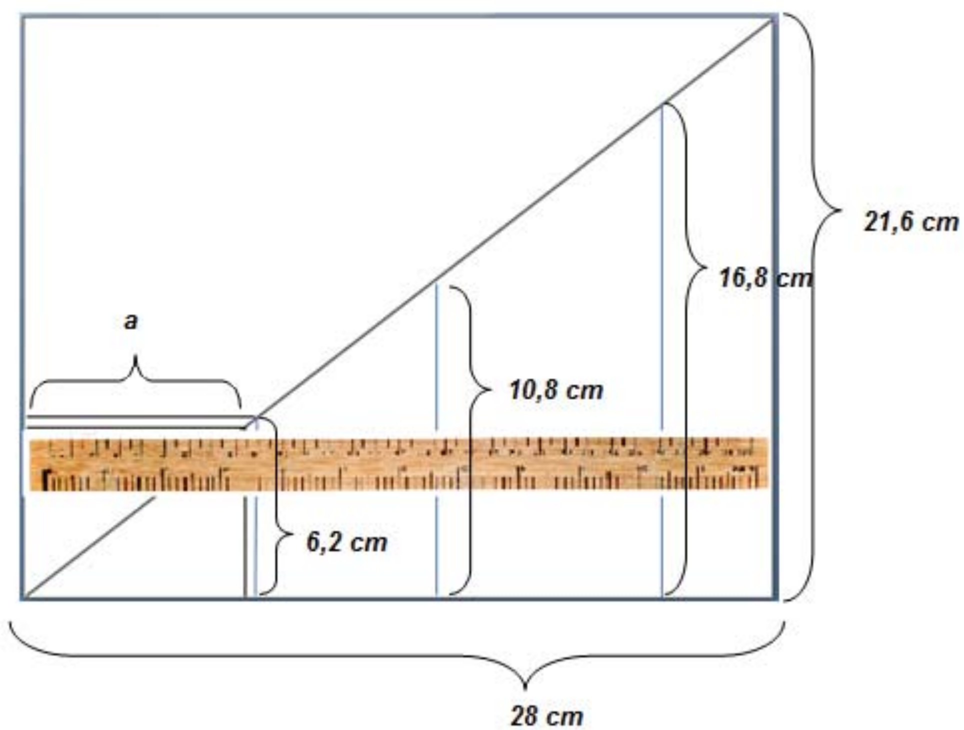
Eduardo realizó la reducción de la Mona Lisa, pero se le borro una de las medidas y no recuerda su valor. Ayuda a Eduardo a encontrar este valor. Y explícale paso a paso qué procedimiento utilizaste. (Recuerda que no puedes utilizar regla para medir)

Situación 3 “Construcción de Marcos”.

Nombre:____

Un carpintero habitualmente realiza marcos para montar reducciones de un cuadro de 21, 6 cm de altura por 28 cm de base. Él desarrollo una nueva estrategia para determinar el ancho de una reducción del cuadro conociendo sólo la altura: construye la diagonal de una hoja del tamaño del cuadro original, dibuja las alturas, las bases y posteriormente mide cada uno de sus lados con una regla, como se muestra en la figura

El carpintero recibe un llamado telefónico solicitando un pedido de distintos tamaños de marco y el cliente solo le entrega las medidas de las alturas.



Posteriormente, el carpintero recibe otro llamado telefónico y le solicitan realizar otro marco, pero solo le dan la medida de la altura de 7,2 cm ¿cuál será la medida de la base?

¿Cuál será el procedimiento matemático para encontrar las medidas de a y b sin tener que medir?