Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

El uso de las gráficas en una comunidad de físicos. Un estudio Socioepistemológico

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática

Alba Gabriela Lara Medina

Tesis dirigida por:

Dra. Astrid Morales Soto

Codirigida por: Dr. Francisco Cordero Osorio

Valparaíso – CHILE

2019

El uso de las gráficas en una comunidad de físicos. Un estudio Socioepistemológico

de

Alba Gabriela Lara Medina

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 13 de mayo del 2019 ante la Comisión de

Tesis integrada por:

- Dr. Marcos Barra Becerra, Universidad Alberto Hurtado, Chile. Profesor Externo.
- Dr. Arturo Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor interno.
- Dr. Jaime Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor interno.
-Dr. Francisco Cordero Osorio, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México. Codirector de tesis.
- Dra. Astrid Morales Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Director de tesis.

Año 2019

CHILE

Agradecimientos

Agradezco a las siguientes instituciones que ayudaron en la realización de este trabajo doctoral:

- Al Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, IMA-PUCV, por abrir sus puertas y dejarme ser parte de esta casa de estudios. Muchas gracias por estos años de formación y transformación en lo personal y profesional.
- A la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por haberme otorgado la “beca de arancel” y “beca de manutención” durante los primeros dos años que permanecí en el programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. El apoyo recibido es invaluable.
- Agradezco a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica por el apoyo brindado al desarrollo de la ciencia en Chile, y en particular por el financiamiento a este trabajo. Profundamente agradecida CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016-21161716.

Ha sido un largo camino, lleno de experiencias, aprendizajes y oportunidades. Son tantas personas a quienes agradecer, de alguna u otra manera han aportado al desarrollo de este trabajo de investigación.

Astrid Morales, mi profesora guía, quien ha sido un pilar fundamental en el desarrollo de esta investigación. Gracias por escucharme y apoyarme en lo académico, pero también en lo personal. Gracias por esa calidez humana que te caracteriza.

A Francisco Cordero por sus reflexiones, comentarios y críticas y sugerencias a la investigación. Por su valioso tiempo y contribuir a este trabajo.

A la comisión de tesis por compartir sus aportes, críticas y sugerencias, lo que ha contribuido a una mejor versión de este trabajo. Para ustedes mi más sincero agradecimiento.

A todos mis profesores, por compartir su experiencia y conocimiento; son un gran ejemplo de lo que es trabajar en comunidad.

A mis amigos y compañeros de Doctorado. Por sus comentarios, energía, entusiasmo y todo lo aprendido durante los seminarios.

Alicia, mi amiga, por todas esas charlas en el IMA, en los almuerzos y camino a casa. Gracias por escuchar y brindar fuerzas en todo momento.

A mis padres y hermanas, quienes a pesar de la distancia han estado conmigo; siento su apoyo incondicional en todo momento.

A mi pequeña pero amada familia: Rodrigo y Camila, ustedes son parte de este sueño alcanzado, esta tesis también es de ustedes. Rodrigo, mi compañero de vida, gracias por todo el amor y paciencia durante este proceso. Por estar para mí siempre.

A mis amigos y hermanos en la fe, gracias por sus oraciones que me han sostenido durante todo este proceso.

A Dios, mi refugio y fortaleza, gracias por permitirme concluir este ciclo. A Él sea la gloria siempre.

Índice

Resumen

En el currículo escolar chileno de matemática, se aprecia un escaso vínculo entre el cotidiano y la matemática que se enseña, situación que se evidencia en los programas de estudio y en los tratamientos centrados en el uso mecánico de algoritmos y técnicas (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011; Aravena y Caamaño, 2007). En este sentido, la Teoría Socioepistemológica (TSE) destaca la importancia de una relación recíproca entre la actividad matemática y la actividad del cotidiano[1]. Relación en la que tanto el cotidiano como la matemática se vean enriquecidas y den evidencia de la Resignificación de los conocimientos matemáticos a través de los usos.

El enfoque Socioepistemológico considera como problemática de fondo la exclusión del cotidiano con lo que sucede en las aulas (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015), generando así un discurso matemático escolar (dME) (que imposibilita participar en la construcción del conocimiento y niega la pluralidad epistemológica) debe ser trastocado, reconocer su carácter hegemónico permite ver la necesidad de incorporar otros marcos de referencia para resignificar las matemáticas (Cordero, Gómez, Silva y Soto 2015). Para abordar dicha problemática se plantea la necesidad de un rediseño del dME desde la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), donde se permita resignificar los conocimientos matemáticos, favoreciendo el uso de la matemática, propiciar el estudio de la funcionalidad del conocimiento (Cordero, 2016a).

Esta investigación busca contribuir con un marco de referencia en el que se considera el cotidiano como una fuente de saberes; evidenciando aspectos de la construcción del conocimiento donde las acciones del individuo responden y son influenciadas por el grupo social al que pertenece, debido a su experiencia en escenario. Para esta tarea, nos centramos en una comunidad de conocimiento matemático (CCM[2],) en que el uso de las gráficas no sea sólo utilitario[3]; en otras palabras, que transforme al sujeto y su realidad, que se integre a su vida, es decir que sea funcional (Cordero, 2008). Tenemos el supuesto que en la disciplina de la Física la gráfica la usan de manera funcional, así que nos hemos dado la tarea de investigar cual es el rol de la gráfica en este dominio, se considera el uso de las gráficas como una fuente de saberes, donde el conocimiento se construye. En otras palabras, nuestro objetivo es tomar elementos del uso de gráficas de una Comunidad de Conocimiento de Físicos (CCM_{Fis}) interesada en la enseñanza de dicha ciencia y conectarla con la matemática escolar.

Se diseñó una situación[4], cuyo centro es la variación. Ello nos permitió obtener evidencia del uso de las gráficas de una CCMFis, donde intencionalmente se

---

[1] En el Capítulo 1, p. 9 se describe lo que entendemos por cotidiano.

[2] Abordaremos con detalle este constructo en el Capítulo 3.

[3] Aquello que antepone o prevalece la capacidad que tiene una cosa de servir o de ser aprovechada para un fin determinado a cualquier otra cualidad.

[4] Nos referimos como aquella *pregunta que propicie una problematización* (Suárez, 2014, p. 118).

desarrollan argumentaciones gráficas (Arg(Graf)) de los Usos de las Gráficas que son propias de esta CCM, las cuales proveen elementos para contribuir a una relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano.

Como parte de los resultados, se mostrará que dichos usos tienen un carácter funcional y un sentido específico que no depende de alguna expresión analítica, sino de las formas gráficas observadas y la relación con la situación planteada en un problema donde el foco es la variación de las velocidades.

Introducción

La Socioepistemología llama la atención a la necesidad de incorporar marcos de referencia que den cuenta de la articulación del cotidiano del ciudadano con la matemática escolar (Cantoral 2013; Cordero et al., 2015; Cordero, Briceño, Méndez y Zaldívar, 2019). Esta Teoría aporta con constructos para analizar dicha articulación, principalmente con la noción de uso del conocimiento en una situación y escenario específico. La necesidad de provocar diálogo entre el cotidiano y la matemática escolar ubica la atención en el cotidiano de otros dominios, puesto que es en donde podemos encontrar elementos de cómo la gente (Cordero et al., 2015) usa y expresa su conocimiento, además de generar argumentos que dan evidencia del conocimiento funcional. Es decir, lo que interesa es reconocer el conocimiento que la comunidad tiene, pero además conocer las razones de lo que dice y hace con su conocimiento de tal manera que sea funcional.

La investigación toma esta postura y se enfoca en contribuir con un marco de referencia en el que se considera al cotidiano como una fuente de saberes, donde se pueda promover un discurso que incluya el uso del conocimiento de las gráficas de otro dominio tal como la Física. El objetivo es conectar la matemática escolar con elementos del uso de las gráficas de una comunidad de físicos en particular. El uso de la gráfica se manifiesta por sus funcionamientos y formas. El funcionamiento son las acciones, ejecuciones, u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, en cambio la forma son las clases de esas acciones, acciones u operaciones (Cordero y Flores, 2007).

En el Capítulo 1 se expone la problemática basal desde el enfoque Socioepistemológico que sustenta la investigación. Posteriormente, se exhibe la problemática de esta investigación en particular. Se presentan antecedentes relacionados con el uso de las gráficas de enfoque Socioepistemológico referentes a los usos de las gráficas hallados en el dME en los libros de texto del bachillerato mexicano, así como, la relevancia de las gráficas en el dominio de Física. Igualmente se hace referencia a estudios relacionados con los usos de las gráficas en otros dominios como la Economía, Ingeniería Química, Ingeniería Agrónoma y Física.

El Capítulo 2 se describe el marco teórico empleado en la investigación. Se abordan elementos de la postura Socioepistemológica basales en esta investigación, tales como el discurso matemático escolar y los fenómenos asociados, el binomio modelación-graficación. Se describe lo que se entiende por Uso de las Gráficas (U(Graf)), y la elección de esta postura teórica en la investigación desarrollada.

La investigación toma el caso específico de una comunidad de físicos, por lo cual se considera necesario destinar el Capítulo 3 para profundizar en los constructos del modelo CCM planteado por Cordero, se identifican los elementos que hacen que una comunidad sea reconocida como tal.

En el Capítulo 4 se destina un apartado para un breve análisis epistemológico de los Usos de las Gráficas, donde la obra de Nicolás Oresme toma relevancia debido a que las figuras geométricas alcanzaban un significado global asociado a la variación. También se describen los aspectos metodológicos empleados en esta investigación.

En el Capítulo 5 se describen las fuentes de datos y el análisis realizado a partir de los Usos de las Gráficas caracterizados a través del debate entre los funcionamientos y formas. Se identifican los Argumentos Gráficos (Arg(Graf)) generados al debatir los funcionamientos y formas de los U(Graf) adquiridos en este escenario, y se reconocen nuevos usos.

Las proyecciones y las conclusiones se encuentran en el Capítulo 6. Se presentan las reflexiones finales de la investigación, donde las Res(U(Graf)) nos dan luces para aportar a un rediseño del dME, dando evidencia de una epistemología de los U(Graf) opacado por el dME. También se exponen las prospectivas de investigación, las cuales nos invitan a seguir trabajando, en la misma línea, dentro de la Matemática Educativa.

Capítulo 1

Antecedentes y problema de investigación

Se presenta la problemática basal desde la teoría que sustenta la investigación para luego presentar la problemática de esta investigación en particular, para ello damos cuenta de antecedentes de investigaciones que nos brindan información, evidencias, datos y puntos de vista acorde a nuestro planteamiento.

1.1. Problemática

La enseñanza y aprendizaje de la matemática es un tema que ha interesado a la sociedad desde hace décadas. Dicho interés se ha enfocado en la formación de ciudadanos críticos y preparados para la toma de decisiones y así transformar su realidad, su día a día (Cordero, 2016a, 2016b; Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015; Henao, 2014; Mineduc, 2012, Mineduc 2013; Sánchez y Torres, 2017). Zaldívar (2015) afirma que aun cuando se asume que los conocimientos enseñados en el aula son transmitidos de manera natural donde desarrollan un pensamiento matemático que permite resolver problemas del día a día, y se ha hecho énfasis en que la matemática es parte de nuestro cotidiano y es importante en la formación de cada ciudadano, dicha conexión aún no es clara.

En otras palabras, *lo que se enseña en la escuela no responde a las situaciones del cotidiano, y peor aún el conocimiento del cotidiano no se parece nada al de la escuela* (Cordero, 2013, p. 6).

Nuestra investigación pretende contribuir con un marco de referencia en el que se pueda considerar el cotidiano como una fuente de saberes, el cual, a través de la experiencia los individuos usan el conocimiento de manera funcional. Nos centramos en una comunidad de conocimiento en que el uso de las gráficas no sea sólo utilitario. Tenemos el supuesto que en la disciplina de la Física la gráfica la usan de manera funcional, así que nos hemos dado la tarea de investigar cual es el rol de la gráfica en este dominio. En otras palabras, nuestro objetivo es tomar elementos del uso de gráficas de una comunidad de físicos y conectarla con la matemática escolar.

1.1.1. Desde el enfoque Socioepistemológico

La enseñanza y aprendizaje de la matemática, en algún momento, se enfocó en dar cuenta de la matemática o qué objetos matemáticos debe saber el profesor al enseñar matemática. Algunos marcos teóricos responden a aspectos cognitivos del aprendizaje en matemáticas (representaciones mentales o construcciones mentales de los conceptos), otros asumen la problemática en términos de las interacciones del sistema didáctico, es decir el saber, el alumno y el profesor enfocándose en situaciones específicas secuenciadas para el aprendizaje de conceptos matemáticos (Roa y Otack, 2012; Aravena y Caamaño, 2013). A modo de ejemplo podemos referirnos a las siguientes teorías: La Teoría de Representaciones Semióticas, iniciada por el francés Raymond Duval, en la cual se afirma que la construcción de los conceptos matemáticos depende de la capacidad de usar diversos registros de representación semióticas de dichos conceptos. La Teoría Antropológica de lo Didáctico, iniciada por Yves Chevallard en Francia, se centra en la relación entre la persona y el objeto (de conocimiento, en general; matemático, en particular); en esta teoría, lo fundamental es la actividad de las personas frente a la resolución de problemas, donde emergen los objetos (conceptos, términos, enunciados, relaciones, teorías, etc.), los cuales son relativos a los contextos personales e institucionales (D´Amore, 2005). La Teoría APOE, Acción, Proceso, Objeto y Esquema, iniciada por el estadounidense Ed Dubinsky, privilegia la existencia de una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente del individuo, lo que hace que sus explicaciones sean de orden epistemológico y psicológico, concluyendo en modelos de la construcción mental de un conocimiento.

Lo anterior ha sido un gran aporte a la Didáctica de la Matemática, sin embargo, difiere del aspecto que nos interesa en nuestra investigación, ya que no nos centraremos en el objeto matemático como problemática a investigar. Pero, de igual manera, surge la pregunta ¿Qué ha influido para que la centración sea en los objetos matemáticos? El currículo y los modelos educativos que se han establecido proporcionan un listado de temas y contenidos que deben ser abordados durante el ciclo escolar, y los libros de texto están relacionados con ese mismo listado. Es decir, la centración se encuentra en los objetos matemáticos, la mirada socioepistemológica declara que ello genera una manera de enseñar y aprender donde los conceptos carecen de funcionalidad. Lo anterior ha generado un discurso que conlleva a pensar en el conocimiento como algo acabado y lineal, que es preexistente al humano, y por lo tanto no considera el uso del conocimiento. En otras palabras, los *programas, sus currículos y sus modelos educativos genera un discurso (dME), una epistemología dominante, digamos así, la cual no considera, ni conoce el uso del conocimiento matemático de la gente (U(CM))*[5]*, por ende, ni de los estudiantes* (Cordero 2016a, p.4).

Desde el enfoque Socioepistemológico se entiende por discurso matemático escolar lo siguiente: *El dME se ha caracterizado como un sistema de razón que norma las maneras en que se relacionan los actores didácticos con el saber; asume un estatus hegemónico, carente de marcos de referencia para resignificar a las matemáticas, con carácter utilitario y su presentación obedece a una visión del conocimiento como acabado, continuo y lineal* (Cordero, et al 2015, p.90).

La Teoría Socioepistemológica identifica como problemática fundamental al dME, y para abordarla plantea la necesidad de un rediseño de éste basado en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM), el cual debe responder a los fenómenos provocados por el dME: adherencia, exclusión y opacidad. El rediseño traza un eje que los solventa y trastoca la matemática escolar (Soto, Gómez, Silva, y Cordero, 2012).

Ahora bien, los conocimientos matemáticos tienen sentido y significado tanto dentro del aula escolar como fuera, pero el dME no ayuda a alcanzar dicho propósito ni tampoco está generando un conocimiento funcional. Se presume que lo que se enseña en la escuela es para mejorar la vida: "*la matemática está siempre presente en la vida cotidiana, explícita o implícitamente, y juega un papel fundamental en la toma de decisiones. Es una herramienta imprescindible en las ciencias naturales, la tecnología, la medicina y las ciencias sociales, entre otras. Es, asimismo, un lenguaje*

[5] Significa Uso del Conocimiento Matemático

universal que trasciende fronteras y abre puertas para comunicarse con el mundo" (Mineduc, 2012, p.1). Pero entonces, ¿Por qué si la matemática se encuentra presente en la vida cotidiana, la matemática que se enseña parece tan ajena a ella? La matemática que se enseña no es la misma del cotidiano, ni los programas ni los modelos educativos han logrado conectarlas, aun cuando en las bases curriculares se haga énfasis en que así sea. Es decir, la matemática escolar y el cotidiano no logran relacionarse y mucho menos nutrirse mutuamente.

Un ejemplo de lo anterior es posible encontrarlo en el trabajo realizado por Carraher, Carraher y Schliemann (1991): *"En la vida 10, en la escuela 0".* Los autores se cuestionan ¿Por qué a tantos niños de las escuelas públicas les va tan mal en las pruebas de matemática? El estudio se llevó a cabo con niños y adolescentes, de 9 a 15 años, quienes respondieron 63 preguntas de matemática en un examen "informal" y 99 en un examen "formal". El examen informal involucraba contextos en que naturalmente resolvían problemas de matemática (en la feria, en los puestos de fruta, junto al carrito de maíz tostado, etc.). El entrevistador hacía preguntas y recibía las respuestas verbalmente, explicando la obtención de su resultado. En el examen formal, los problemas resueltos en el examen informal eran representados matemáticamente, se les ofrecía lápiz y papel. Los resultados obtenidos en términos globales son los siguientes: de los 63 problemas presentados en el examen informal, 98,2% fueron resueltos correctamente, mientras que en el examen formal apenas 36,8% de las operaciones y 73,7% de los problemas lo fueron. Los autores concluyen que la escuela nos enseña como deberíamos multiplicar, restar, sumar y dividir; esos procedimientos formales, cuando se siguen correctamente, funcionan. Sin embargo, esos niños y adolescentes demostraron que podían utilizar métodos de resolución de problemas que en su trabajo de comercio les funcionaba y llevaban al resultado correcto (aunque a la hora de resolver problemas matemáticos de la manera escolar, con lápiz fallan), pero éstos no eran aprovechados por la escuela.

Por un lado, las bases curriculares (Mineduc, 2011, p.11) consideran a la matemática como una herramienta que ayuda a la toma de decisiones de la vida y como un medio que abre puertas para comunicarse con la vida. Por otro lado, la investigación de Carraher, Carraher y Schliemann (1991) evidencia que niños y adolescentes no aprendieron en la escuela lo que necesitaban para resolver los problemas de la vida diaria. Repensando en ello, nos cuestionamos ¿Qué elementos del cotidiano, de la vida diaria, son los que estamos desaprovechando y que aportarían a la enseñanza de la matemática?

Otra pregunta que surge de manera natural y recurrente entre los estudiantes es ¿Para qué sirven las matemáticas?, esto quizá se debe a que el discurso matemático escolar lleva a aprender conceptos matemáticos que carecen de un significado o sentido y que no logran conectar con su realidad fuera del aula. A su vez, conlleva a pensar en la matemática con un fin utilitario, es decir responde a ciertas necesidades de la vida sin transformarla, pero no como un conocimiento funcional. El enfoque Socioepistemológico propone un rediseño del discurso matemático escolar (RdME) cuya base epistemológica consiste en los usos del conocimiento matemático de comunidades que suceden en la escuela, en el trabajo y en la ciudad (Cordero, 2016a y 2016b) (Figura 1.1).

Figura 1.1 Visión socioepistemológica del discurso matemático escolar (dME) (Gómez, 2015).

La mirada Socioepistemológica llama la atención a la necesidad de incorporar marcos de referencia (MR) en el sistema educativo en los cuales los constructos propios de la Teoría Socioepistemológica (TSE) se articulen con el cotidiano del ciudadano, principalmente con la noción de uso del conocimiento en una situación y escenario específico (Zaldívar, 2014, p.59).

Antes de continuar es pertinente mencionar lo que se entiende por cotidiano. Se describe como aquello que está compuesto por una interacción de comunidades de conocimiento, donde se desarrollan mantenimientos de rutinas para que permanezcan, esto último es lo que hace el día a día (Cordero y Zaldívar 2010).

Desde esta perspectiva, el cotidiano es un constructo teórico, que permite explicar con mayor fuerza y robustez los procesos sociales que intervienen en la construcción social del conocimiento. Un aspecto por considerar de dicho constructo es que no es estático, sino más bien permanece cierto tiempo. Cordero y Gómez (2009), indican al respecto, se cambia y mueve conforme a la sociedad; depende del humano, de su condición. Esto conlleva a dar importancia de mirar una situación y un escenario específico.

La necesidad de provocar una relación recíproca entre el cotidiano y el conocimiento matemático escolar hace que se ubique la atención en el cotidiano de otros dominios, puesto que es en donde podemos encontrar elementos de cómo usan y expresan su conocimiento, además de generar argumentos que dan evidencia del conocimiento funcional. Es decir, lo que interesa es reconocer el conocimiento que la comunidad tiene, pero además conocer las razones de lo que dice y hace con su conocimiento de tal manera que logran un conocimiento funcional.

La investigación que proponemos se encuentra dentro de una línea de investigación desarrollada por Cordero, en ella los trabajos están orientados en explicar el cotidiano y lo funcional. En palabras de Cordero sería: se *distinguen una serie de aspectos que permiten formular un modelo que explique los procesos de* *socialización del conocimiento matemático, rescatando el papel insoslayable de dos elementos teóricos mutuamente relacionados: el cotidiano y lo funcional* (Cordero, 2016a, p.11). Estos elementos expresan el ambiente propio del ciudadano y el conocimiento; la dialéctica entre el saber nativo y el académico: el de la gente (Cordero, 2016b).

En Cantoral (2013), se expone a la práctica social (PS) como un constructo medular de la teoría, *el cual en un sistema complejo de procesos de dimensión social se problematiza el saber matemático, considerando el saber sabio, culto y popular para sintetizarlo en la sabiduría humana.* Por su parte, Cordero considera que la PS ha proporcionado de un significado que considera en la problemática y que es necesario recuperar: el sujeto olvidado, en términos más genéricos la gente. El cotidiano, la realidad, los usos del conocimiento, son expresiones de esta tesis (Cordero *et al*., 2015; Cordero, 2016b).

Con la tesis del sujeto olvidado Cordero ha formulado el Programa Socioepistemológico llamado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a y 2016b). El principal objetivo de este programa consiste en evidenciar tanto los usos del conocimiento matemático como sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidades. Para ello, toma dos líneas de trabajo simultáneas: La Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo (Cordero, F., 2017) (Figura1.2). En la primera línea, las categorías de conocimiento matemático que ocurren se problematizan

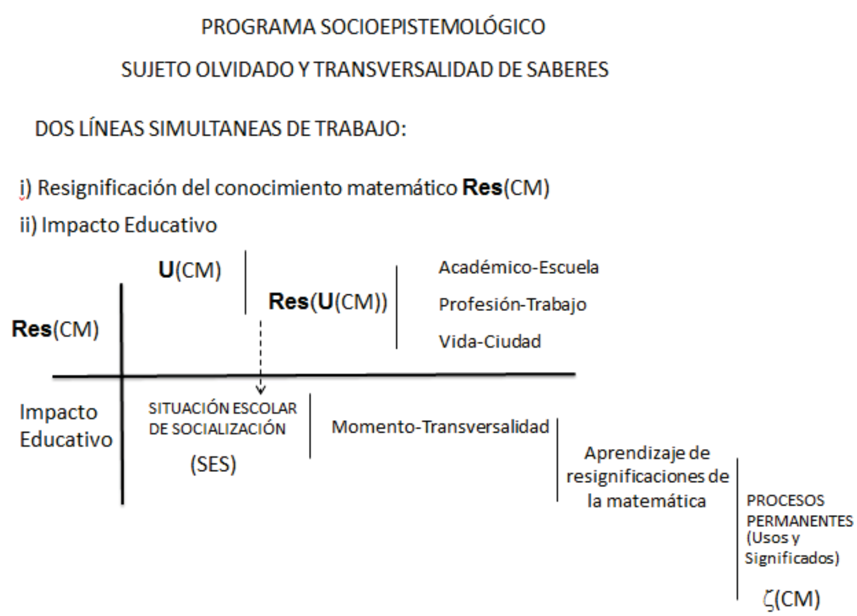


Figura 1.2 Programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Cordero, 2017).

De acuerdo con la Figura 1.2, lo referente a la Resignificación del conocimiento matemático Res (CM), *se problematizan las categorías de conocimiento matemático* *que acontecen en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. Y en la segunda se conforman los multi-factores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas* (Cordero 2016b, p. 1-3).

En nuestra investigación nos enfocamos en el cotidiano de una comunidad de físicos y en el uso de gráficas en términos de lo funcional.

1.2. La investigación

Nuestra investigación toma en cuenta el hecho de la falta de marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático y el objetivo de rediseñar el discurso matemático escolar. La importancia se enfoca en que el conocimiento sea integrado a la vida de tal manera que transforme al sujeto y su realidad, por ello nos centraremos en los usos de conocimiento. El siguiente diagrama refleja lo mencionado recientemente (Figura 1.3), la visión socioepistemológica mira como la matemática escolar carece de marcos de referencia que atiendan su justificación funcional y llama la atención a adentrarse en la CSCM que propicie el estudio de la función social[6] del conocimiento matemático.

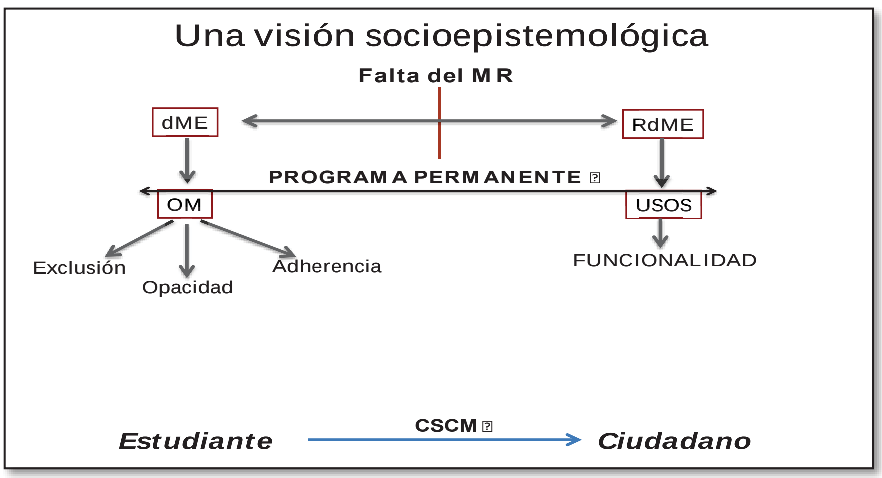


Figura 1.3 Enfoque Socioepistemológico (Gómez, 2015; Cordero et. al 2015).

El discurso matemático escolar (dME) ha generado ciertos fenómenos que se encuentran relacionados de manera sistémica. El fenómeno de adherencia no permite, tanto al estudiante como al docente, cuestionar ni trastocar la matemática escolar, se produce una especie de fidelidad absoluta que resulta nociva para reconocer otras epistemologías que permitan generar prácticas y usos del conocimiento matemático. Los fenómenos de exclusión y opacidad inhiben esas prácticas y usos de tal suerte que a los ciudadanos no les deja otra opción que

[6] *Reconocer la función social, significa entender cómo se constituye dicho conocimiento en un escenario específico, lo cual implica entender lo propio del conocimiento en un escenario, lo situado y lo vivencial.* (Zaldívar y Cordero, 2014, p. 1512).

adherirse a la epistemología dominante del dME (Cordero, Gómez, Silva, Soto, 2015; Cordero, 2016a).

A continuación, describimos brevemente dichos fenómenos:

- Exclusión: el dME se caracteriza por ser hegemónico, utilitario, sin marcos de referencia que permitan resignificar la matemática, la centración en los objetos matemáticos y su presentación lineal y acabada. Estas características en su conjunto hacen que el dME nos excluya de la construcción social del conocimiento matemático a través de la imposición de significados, argumentaciones y procedimientos matemáticos, es decir lleva a una violencia simbólica.
- Opacidad: es la falta de consideración de estas matemáticas del cotidiano en los MR para la matemática escolar
- Adherencia: relacionado con el hecho de universalizar el conocimiento, mismo que fue construido en y para necesidades específicas de regiones dominantes. Lo anterior trae como consecuencia que la función del conocimiento se ve afectada al ser usado con especificidades ajenas al que fue construido.

En la investigación que abordamos se destacan elementos relacionados con el fenómeno de opacidad (Figura 1.4). Cordero señala la existencia de dos epistemologías: la de la vida y la de la matemática escolar. La sociedad ha legitimado la de la escuela, sin embargo, esto no quiere decir que la epistemología de la vida no tenga importancia, ¿cómo hacerlas dialogar? En otras palabras, la vida cotidiana se ve opacada por la matemática escolar y por consiguiente en los marcos de referencia (MR) de la matemática escolar se halla opaco el conocimiento del cotidiano (Gómez, Silva-Crocci, Soto, y Cordero, 2014).

Por lo tanto, se reconoce como problemática el fenómeno de opacidad del conocimiento de la vida cotidiana. Esto es, la falta de consideración en los MR para la matemática escolar de estas matemáticas del cotidiano. En otras palabras, el actual dME opaca los argumentos del cotidiano, aunque que son más cercanos al conocimiento funcional, (Gómez, 2013; Gómez y Cordero, 2013; Gómez, et al., 2014).

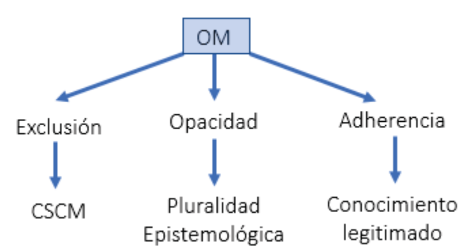


Figura 1.4 Fenómenos del discurso matemático escolar (Gómez, 2015).

1.3. Hipótesis de investigación

La mirada Socioepistemológica permite considerar al saber matemático, ya sea popular, técnico o culto puesto en uso en distintos escenarios (Cantoral, 2013), donde la matemática adquiere sentido y significación a partir de la matemática misma y también de las prácticas en la que se incluye el ser humano al hacer matemáticas (Buendía y Cordero, 2005).

En este sentido y tomando en cuenta lo anterior, asumimos como hipótesis que los usos de las gráficas generan conocimiento matemático. Las gráficas de las funciones son un conocimiento matemático: son expresiones que sistematizaron ciertos humanos, tienen su historia y se han desarrollado, han sido reinterpretadas permanentemente. En los cursos de matemáticas se habla de las gráficas cartesianas, sin embargo, no siempre se profundiza en reconocer su historia y su desarrollo. Además, se agrega el hecho que los estudiantes (niños, jóvenes, hombres, mujeres) tienen cierta cultura, vivencia, e incluso pensamiento de la vida que es posible que expresan en sus gráficas, puede decirse que hacen su propio conocimiento de las gráficas de las funciones (Méndez, 2013). Es probable que no se tome en cuenta lo anterior e incluso se les impone "lo que deben ser las gráficas de las funciones". El resultado es un discurso unilateral de lo que es correcto y de lo que no lo es. *La percepción de sus reinterpretaciones es tan insensible e insensata que provoca una exclusión del conocimiento matemático* (Cordero, 2016a), e incluso se niega la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático dejando de lado la matemática funcional[7]. Nuestro trabajo pretende dar evidencia que los usos de las gráficas tienen un carácter funcional dentro de una comunidad de físicos (CCM_{Fis}), y dichos usos provienen de un cotidiano en el cual tienen un significado y sentido. De esta manera, podemos retomar elementos de los usos de las gráficas de una Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) que permitan aportar elementos para proponer un rediseño del discurso matemático escolar (RdME) cuya base epistemológica consiste en los usos del conocimiento matemático que conecten la realidad de un físico con la matemática aprendida en el aula.

La investigación se centra en una comunidad en la cual las gráficas desempeñan un rol fundamental al momento de construir conocimiento. Para dar evidencia de lo anterior presentamos en el punto 2 de esta sección algunos antecedentes que involucran el uso de gráficas en distintas comunidades de conocimiento.

1.4. Objetivo y preguntas de la investigación

Actualmente podemos encontrar diversos trabajos de investigación que se centran en comunidades donde se construye conocimiento (Ariza y Llinares, 2009; Torres, 2013; Ulloa, 2013; Gómez, 2015; Zaldívar, 2014; Mendoza, 2013; Tuyub, 2008). Esto ha permitido tomar como referente dichos escenarios en los cuales el uso de conocimiento es funcional ante situaciones específicas en problemáticas propias del

[7] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello se opone al conocimiento utilitario (Cordero y Flores, 2007).

escenario y reflexionar respecto a que el aula no es el único referente de construcción de conocimiento matemático.

Considerar argumentos del cotidiano del ciudadano aportaría a la elaboración de herramientas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Gómez y Cordero (2014) invitan a promover el aprendizaje a través de la reflexión respecto a dichos argumentos y su incorporación como papel fundamental; es por ello que surge la necesidad de analizar la práctica del día a día de diferentes comunidades de conocimiento.

Es así como nuestro objetivo apunta a contribuir con un marco de referencia en el que se incluya elementos del uso de las gráficas del cotidiano de una comunidad de físicos y conectarlos con la matemática escolar. Redish (2005) y Tuminaro (2002) sostienen que la matemática, enseñada desde la física, es más como una herramienta, un lenguaje abstracto, lógico y perfecto que se encuentra desvinculada de la realidad de los estudiantes; al momento de ser puesta en uso afecta la comprensión de los estudiantes. Redish (2005) indica que en algunos resultados de investigaciones referentes a problemas conceptuales fundamentales a que los estudiantes pueden estar inseguros de cuándo usar sus conocimientos de física y cuándo acudir a su conocimiento cotidiano.

Nos interesa la comunidad de físicos en dos contextos: durante su formación, específicamente en las clases de Física, y en el ámbito de investigación, en otras palabras, en dos escenarios: la escuela y el trabajo. La decisión de elegir esta comunidad y los escenarios es porque tomamos como supuestos:

- Los físicos usan de manera funcional las gráficas.
- En los escenarios podemos encontrar elementos que permitan conectar la matemática escolar con el cotidiano.

El discurso matemático escolar que se encuentra no es funcional. ¿Cómo esperar que un profesor enseñe una matemática funcional si su realidad está dada por el currículo y libros de texto? Para ello habría que considerar un marco de referencia donde la matemática esté ligada a la realidad; así surge un nuevo cuestionamiento ¿Cómo contribuir con un marco de referencia? Para ello es necesario enfocarse en los usos del conocimiento en una situación específica. Nuestro objetivo se centra en el uso de gráficas y las argumentaciones que emerjan de éstas.

Es así como, nuestro trabajo queda inserto en el Programa Socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes*. Lo que queremos decir es lo siguiente; la Resignificación del conocimiento matemático de una Comunidad de Físicos, en la que las gráficas son usadas de una manera funcional, nos permitirá, desde una perspectiva teórica, reconocer cuáles son los usos de las gráficas que desde su cotidiano (como profesor y/o investigador) permiten lograr una resignificación del conocimiento matemático. Una vez obtenido esto, cómo ello puede aportar al Rediseño del discurso matemático escolar.

La Socioepistemología (SE) asume que la matemática se ve afectada por transformaciones y progresos epistemológicos, es producto de siglos de historia, y como tal, es construida socialmente como fruto de situaciones, necesidades, usos o experiencias vividas por los grupos humanos (Cordero y Silva, 2012). De ahí, la importancia de mirar la comunidad específica donde las situaciones y experiencias desempeñan un papel fundamental, ya que éstas permiten generar conocimiento matemático.

Las preguntas de investigación que hemos formulado son las siguientes:

1. **¿Cómo se caracteriza el uso de gráficas en una comunidad de físicos?**
2. **¿Cómo un académico físico usa las gráficas en su docencia para la formación de físicos y/o docentes de Física?**

Para dar respuesta a lo anterior, nos centramos en cada uno de los escenarios planteados anteriormente con los siguientes objetivos:

Escenario 1: Físico investigador	Escenario 2: Físico docente
Objetivo específico 1 Reconocer el(los) tipo(s) de uso de gráficas que sea propia del Físico en: ▸ sus publicaciones ▸ en una situación fuera del cotidiano laboral	***Objetivo específico 2*** Reconocer el tipo de uso de gráficas de la clase: ▸ Laboratorio de física ▸ Cátedra

Así mismo, se observan algunos de los libros de texto, ya que se considera un marco de referencia que aportan al discurso matemático del profesor sugeridos en los contenidos curriculares. Por otro lado, contribuyen para caracterizar los usos de las gráficas[8] a través de su funcionamiento y forma.

1.5. Antecedentes

1.5.1. La importancia del cotidiano y la matemática: el caso de la educación chilena

Las bases curriculares de educación básica y media de Chile han expresado que el aprendizaje de la matemática es de gran importancia para la sociedad.

> *Aprender matemática es fundamental para la formación de ciudadanos críticos y adaptables* (Matemática, Educación básica, Bases curriculares 2012, p.86).
>
> *Así, el proceso de aprender matemática ayuda a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, se trata de un conocimiento cuya calidad, pertinencia y amplitud afecta la calidad de vida de las personas y sus posibilidades de actuar en el mundo.* (Matemática, 7º básico a 2º medio, Bases curriculares 2013, p.104).

[8] La palabra “gráficas” la usaremos en un sentido amplio, incluyendo figuras y símbolos.

Así mismo, señala que la matemática es parte del cotidiano en el cual se desenvuelve el ciudadano:

> *"La matemática está siempre presente en la vida cotidiana, explícita o implícitamente, y juega un papel fundamental en la toma de decisiones."* (Matemática, Educación básica, Bases curriculares 2012, p.86).
>
> *"Estas Bases proponen formar un alumno que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él"* (Matemática, 7º básico a 2º medio, Bases curriculares 2013, p.104).

Anteriormente se mencionó que el cotidiano se renueva en sintonía con la sociedad, lo que conlleva a mirar una situación y un escenario específico. Y esto, se debe a que el cotidiano está relacionado a *ciertas formas culturales del conocimiento social e históricamente conformadas, que son particulares a un escenario, que se mantienen en cierta situación específica pero que son proclives a transformarse* (Zaldívar, 2014, p.23).

En el cotidiano de otros dominios donde podemos encontrar elementos de cómo usan y expresan su conocimiento, además de generar argumentos que dan evidencia del conocimiento funcional. Es decir, lo que interesa es reconocer el conocimiento que la comunidad tiene, lo que dice y hace con su conocimiento.

Los conocimientos matemáticos tienen sentido y significado tanto dentro del aula escolar como fuera de éste, sin embargo, el discurso matemático escolar (dME) que se encuentra hoy día no ayuda a alcanzar un conocimiento que en vez de ser utilitario sea un conocimiento que transforme su realidad, es decir, un conocimiento funcional.

Podemos decir que, coincidimos con lo mencionado por el Ministerio de Educación Chileno, al considerar lo relevante de la matemática, fundamental para la formación de ciudadanos valiosos y capaces de integrarse a la sociedad. Además de considerar necesaria la enseñanza de una matemática que no sea sólo escolar sino capaz de conectarse con el medio en que se desenvuelven los estudiantes. Sin embargo, ese no es un objetivo que se haya alcanzado, es ahí donde las investigaciones en Didáctica de la Matemática tienen gran importancia y relevancia, ya que con ellas es posible aportar con propuestas que muestren caminos viables para la formación de ciudadanos capaces de relacionar el conocimiento matemático escolar con su entorno.

1.5.2. Uso de gráficas

La Teoría Socioepistemológica se ha interesado en estudiar el uso de las gráficas, ya que ésta da evidencia que la graficación *es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. En sí misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica, con lo que transforma al objeto en cuestión* (Cordero, 2006, p.65). Entenderemos a la graficación en términos de Cordero, como la argumentación de ciertas situaciones de Cálculo. Ahí, las gráficas de las funciones formulan argumentos que se construyen según lo que el estudiante es capaz de hacer, es decir, con las operaciones y las condiciones que logran capturar y transformar, además de los conceptos que construyen progresivamente (Cordero, 2006, 2011).

Por ejemplo, en el caso de una Comunidad de Conocimiento Matemático de la Ingeniería Química (CCM(IQ)) en un escenario de trabajo, investigada por Torres (2013), se indica que la actividad profesional que ejecutan los lleva a producir y compartir discursos y significados en su comunidad, guiados por prácticas de referencia: específicamente, en el diagnóstico del estado de los transformadores eléctricos. Se reconocen usos de la gráfica y cierto en ellas. Inicialmente se emplean las gráficas como medio de control estadístico, posteriormente las gráficas se resignifican a modelos gráficos que permiten inferir información, interpretar y leer comportamientos, así como generar argumentos respecto al estado de un transformador, y por tanto se vuelve el método de diagnóstico.

La graficación permite ajustes en su estructura que producen patrones o generalizaciones deseables. *La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo*[9]*. Ahora bien, para que el continuo no se destruya se requiere lograr un estatus cultural de la argumentación gráfica* (Cordero, Cen, C. y Suárez, 2010, p.193).

Realizar un estudio desde el enfoque Socioepistemológico considera cuatro componentes, las cuales se ven de manera sistémica (Cantoral, 2013; Mirelli, Crespo y Buendía):

- La dimensión epistemológica ofrece las explicaciones sobre las nociones del conocimiento matemático, sobre la forma en que lo conocemos.
- La dimensión cognitiva hace referencia a cómo ese concepto es aprendido, es decir su función adaptativa.
- La dimensión didáctica se refiere a la manera en cómo ese saber es transmitido, es decir las vías de institucionalización que se dan a través de la enseñanza, en otras palabras, la herencia cultural.
- La dimensión social matizar a las anteriores: a cómo ese conocimiento se construyó, así también, a cómo se lo transmite y se lo aprende, se enfatiza el uso.

Por lo tanto, el estudio del uso de las gráficas con este enfoque conlleva a la dimensión social la cual considera a la graficación como práctica institucional, puesto que ha permanecido en el discurso matemático escolar y se ha ido transformando para establecerse tal como lo conocemos hoy en día; la cognitiva, asume al conocimiento como una serie de procesos sostenidos por mecanismos que se han desarrollado en el seno de las prácticas institucionales; la epistemológica, distingue(caracteriza) los usos y los ubica en escenarios específicos; la dimensión didáctica se encarga de la difusión del conocimiento a través del dME, examinando

[9] Lo continuo refleja su permanencia en la vida que es transformada por el conocimiento y, a su vez el conocimiento es modificado (Cordero, Cen, C. y Suárez, 2010).

las resignificaciones del conocimiento matemático y sus implicaciones didácticas (Cordero, Cen, Suárez, 2010).

Dada la importancia del uso de gráficas en nuestra investigación y la relevancia de la comunidad de conocimiento, a continuación, se presentarán algunas investigaciones que relacionan estos dos elementos.

a) Universo gráfico en el bachillerato mexicano

Cen (2006) realiza un estudio, en México, sobre el uso de gráficas en el bachillerato[10] en programas de estudios y en libros de texto[11] para conocer el momento en que se presenta curricularmente la gráfica. La autora analiza los seis semestres correspondientes al bachillerato mexicano, donde incluyen temas relacionados a Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, y Probabilidad y Estadística.

Los datos obtenidos los presentamos en la Tabla 1.1, donde se puede distinguir el semestre y el contenido esencial de cada programa de estudio lo que permite percibir el rol de la gráfica de la función:

[10] En México los niveles escolares se comprenden de la siguiente manera:
Educación Básica: preescolar (niños de 3-5 años), primaria (niños de 6-12 años) y secundaria (jóvenes de 13-15 de edad).
Educación Media: bachillerato (3 años de estudio), el certificado de bachillerato es obligatorio para ingresar a la educación de tipo superior, educación profesional técnica (de 2-3 años de estudio)
Educación Superior: técnico superior, licenciatura y posgrado.

[11] La fuente donde se obtuvieron las gráfica fueron: Para el Semestre 1, IPN (2004) y Gustafson (1996); para el Semestre 2, Swokowski (1998); para el Semestre 3, IPN (2003), Efimov (1969), Lehmann (1998) y Rider (1966); para los Semestres 4 y 5, Larson (1982) y Purcell (1992), y para el Semestre 6, Jonson La fuente donde se obtuvieron las gráfica fueron: Para el Semestre 1, IPN (2004) y Gustafson (1996); para el Semestre 2, Swokowski (1998); para el Semestre 3, IPN (2003), Efimov (1969), Lehmann (1998) y Rider (1966); para los Semestres 4 y 5, Larson (1982) y Purcell (1992), y para el Semestre 6, Jonson (1976). (1976).

Tabla 1.1 Usos de gráficas en el bachillerato mexicano.

Semestre		
1	Álgebra	Se enfoca en dominar modelos algebraicos lineales y cuadráticos a través de la solución de sistema de ecuaciones a partir de tablas y un intervalo de valores establecidos. Se menciona que al resolver los sistemas de ecuaciones de manera gráfica éstas se transforman en funciones. Hay un primer acercamiento a las funciones polinomiales y racionales, donde lo gráfico permite observar el comportamiento.
2	Geometría y Trigonometría	Se relacionan estos conocimientos con aritmética y álgebra. La geometría abordada es la Euclidiana, además se incluye la noción intuitiva de función, así como la función exponencial, logarítmica y trigonométrica; la representación de las funciones es a través de la tabulación con valores previamente establecidos. Además se solucionan ecuaciones exponenciales y logarítmicas de una variable.
3	Geometría Analítica	Se estudian relaciones entre la representación grafica y algebraica como los logares geométricos y sus propiedades. Se presenta interés en el rol de los parámetros al trazar varias ecuaciones en un mismo sistema coordenado de rectas y parábolas. Se presentan ejemplos de ecuaciones paramétricas en que se trazan punto a punto sus trayectorias, como la cicloide, la hipocicloide y la epicicloide. De igual forma se presenta al estudiante el trazado de curvas en coordenadas polares, con la finalidad de enriquecer el universo gráfico de formas geométricas.
4	Cálculo Diferencial	Se enfoca en el estudio de las funciones, sus gráficas, comportamientos, propiedades y aplicaciones. Se trata la función de manera tabular y gráfico, el análisis e interpretación de las relaciones entre las variables. Se pone atención a las nociones de dominio y rango y definición de función. Se estudian las características de la función y su grafica por medio de puntos críticos, ceros, se analiza el comportamiento gráfico a través de la primera y segunda derivada, se resuelven problemas de máximos y mínimos.
5	Cálculo Integral	Se estudian las funciones, comportamientos, propiedades y aplicaciones. Se relaciona la integral y la derivada de manera grafica, numérica y algebraica. *Se determinan áreas de regiones limitadas por gráficas de funciones mediante rectángulos inscritos y circunscritos. Para el cálculo de volumen se desarrolla la idea de sólido de revolución por el método del disco o capas y el cálculo de la longitud de arco. Para lo anterior, se ocupan los distintos métodos de integración.*
6	Probabilidad y Estadística	Se introduce el estudio de fenómenos aleatorios, enfocándose a la interpretación, tratamiento y aplicación; usan técnicas muestreo para el análisis e interpretación de datos numéricos y la apropiación de las reglas para el cálculo de probabilidades y distribuciones de probabilidad. *Se trabaja la toma de datos y su representación por medio de histogramas, diagramas de barras y polígono de frecuencias, entre otros, otros, así como las distribuciones normal y binomial para la toma de decisiones, la representación gráfica que puede tener una toma de datos y la lectura e interpretación de la representación gráfica.*

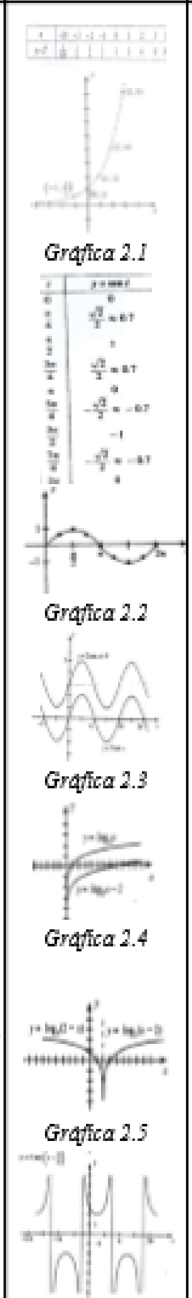
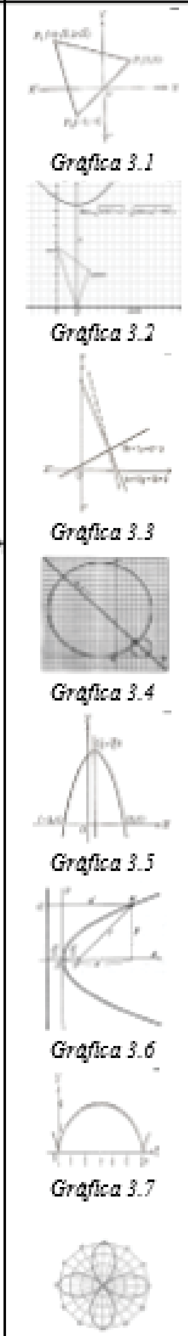
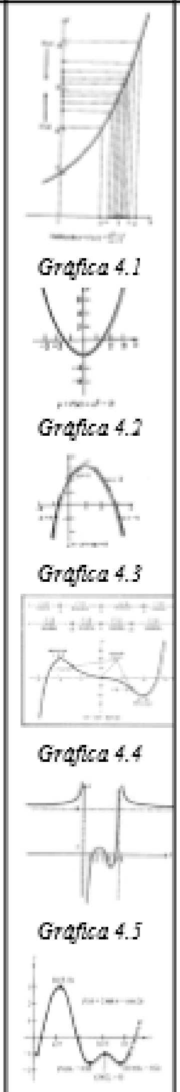
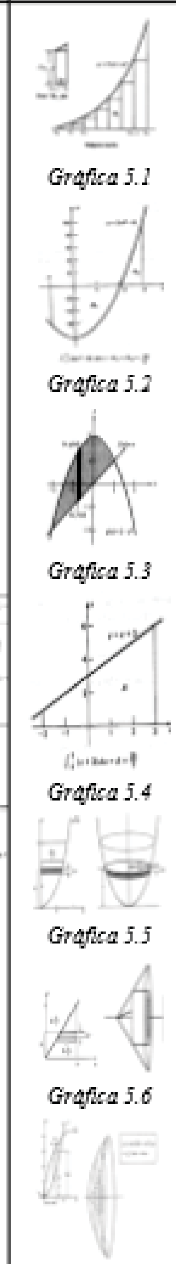
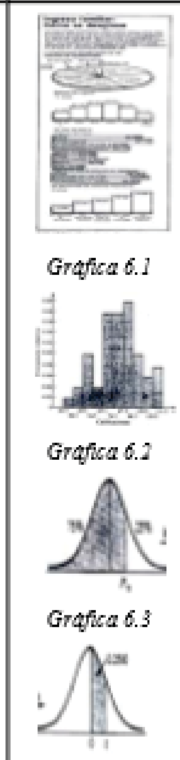
Del programa analizado lo que respecta al uso de gráficas es lo siguiente:

- La gráfica es usada como herramienta para desarrollar el concepto de función.
- El uso de la gráfica también comprueba o ilustra la solución de sistemas de ecuaciones.
- Observa cualitativamente el comportamiento de la función y permite representar cálculos como el área y el volumen.

Por la naturaleza de cada situación, los usos que aparecen tienen funciones específicas que conllevan formas específicas. Por ejemplo, cuando la situación está enfocada al análisis global de la curva, es decir a su variación surge el uso *análisis de la curva*. Los funcionamientos es el análisis del comportamiento (es creciente o decreciente) en los intervalos de la función para ubicar los puntos máximos y mínimos, los puntos de inflexión (si los hay) y la concavidad de la curva en ciertos intervalos. Las formas que se presenta lo anterior, es mediante una tabla de variación y los criterios de la primera y segunda derivada, que refieren las gráficas del curso de Cálculo Diferencial.

Los programas de estudios sugieren libros de texto, los cuales son analizados y considerados un marco de referencia que aportan al discurso matemático del estudiante y el profesor. La revisión de textos evidencia un *universo amplio de gráficas de funciones por las que transita el estudiante a lo largo de sus estudios de bachillerato* (Cordero, Cen y Suárez, 2010, p. 196). La Tabla 1.2 contiene el universo grafico que son parte del discurso matemático escolar durante el bachillerato. La tabla puede leerse de manera vertical, donde se puede apreciar el bagaje gráfico por semestre; o bien, analizarse horizontalmente, donde puede observarse el tránsito de gráficas entre semestres. Eso llevaría a pensar que el estudiante de bachillerato debería ampliar su dominio del concepto de función al estar con tal gama de gráficas en sus cursos de matemáticas.

Tabla 1.2 Gráficas en los libros de texto del bachillerato mexicano (Cordero, Cen, Suárez, 2010, p. 197).

Semestre 1 Álgebra	Semestre 2 Geometría y Trigonometría	Semestre 3 Geometría Analítica	Semestre 4 Cálculo Diferencial	Semestre 5 Cálculo Integral	Semestre 6 Probabilidad y Estadística
 *Gráfica 1.1* *Gráfica 1.2* *Gráfica 1.3* *Gráfica 1.4* *Gráfica 1.5* *Gráfica 1.6*	 *Gráfica 2.1* *Gráfica 2.2* *Gráfica 2.3* *Gráfica 2.4* *Gráfica 2.5* *Gráfica 2.6*	 *Gráfica 3.1* *Gráfica 3.2* *Gráfica 3.3* *Gráfica 3.4* *Gráfica 3.5* *Gráfica 3.6* *Gráfica 3.7* *Gráfica 3.8*	 *Gráfica 4.1* *Gráfica 4.2* *Gráfica 4.3* *Gráfica 4.4* *Gráfica 4.5* *Gráfica 4.6*	 *Gráfica 5.1* *Gráfica 5.2* *Gráfica 5.3* *Gráfica 5.4* *Gráfica 5.5* *Gráfica 5.6* *Gráfica 5.7*	 *Gráfica 6.1* *Gráfica 6.2* *Gráfica 6.3* *Gráfica 6.4*

El análisis por semestre de los libros de texto y los programas permitió identificar los siguientes usos de la gráfica en el bachillerato mexicano:

- o Distribución de puntos.
- o Comportamiento geométrico.
- o Análisis de la curva.
- o Cálculo de área y cálculo de volumen.
- o Análisis de información.

El debate de los funcionamientos y formas permite que los usos de la gráfica se vayan transformando y modificando de tal manera que hay un desarrollo del uso de la gráfica, es decir hay una resignificación.

Cen (2006) identifica desarrollo de los usos en escenarios: de la recta, la curva sinusoidal y la parábola. A continuación, describiremos el escenario de la recta (ver Figura 1.5) propuesto por la autora:

El discurso matemático escolar del bachillerato en México aborda la recta en la tercera unidad del primer semestre, el uso de la gráfica concierne a la distribución de puntos (ver gráfica 1.1), y su funcionamiento se enfoca en ubicar puntos en el plano cartesiano para trazar la recta a través de la forma tabular. Una vez reconocida la ecuación y la forma de la recta, este uso evoluciona para dar lugar al comportamiento geométrico (ver gráfica 3.3), su funcionamiento se basa en asociar la gráfica con la expresión algebraica, y la forma es la transformación de funciones (traslación vertical y horizontal, estiramientos y reflexión). Aquí el estudiante puede inferir la posición de la recta, que después usa para calcular el área y el volumen (ver gráficas 5.4 y 5.6); el funcionamiento de la gráfica reside en definir el área que genera la superficie del área a calcular, y sus formas surgen a través de la integración. El desarrollo del uso consiste en distribuir puntos, luego en establecer comportamientos geométricos y finalmente en calcular superficies.

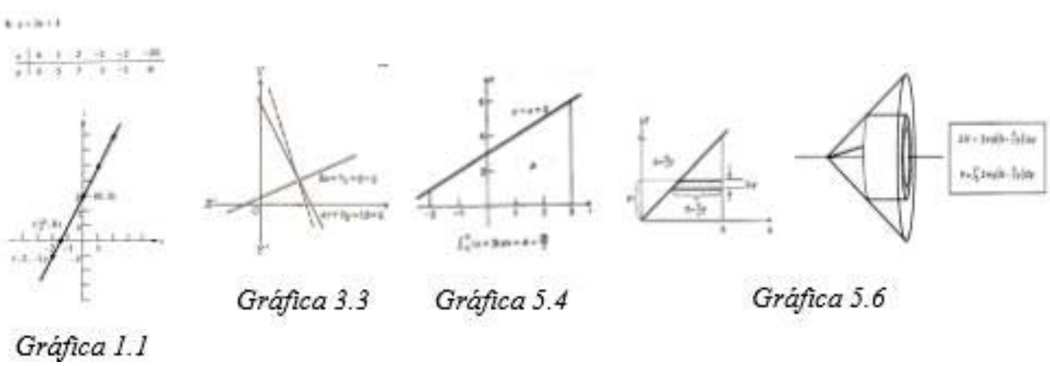


Figura 1.5. Escenario de la recta (Cordero, Cen, Suárez, 2010, p. 201).

Es indiscutible que las gráficas desempeñan un rol importante en el bachillerato, sin embargo, Cen (2006) cuestiona si para el estudiante conlleva un conocimiento matemático más fortalecido. La mirada Socioepistemológica, busca un significado al universo de gráficas del bachillerato para que se favorezca el desarrollo de una matemática funcional.

Lo anterior, aunque sea un estudio realizado en México, podría aportar a la realidad chilena. El universo gráfico existente es un elemento que se debe rescatar y aprovechar ya que en él también se produce conocimiento matemático.

b) Lo icónico en las gráficas

Entre las investigaciones relacionadas a las gráficas es posible encontrar no sólo gráficas cartesianas, sino que además aparece lo icónico desempeñando un rol importante (destacamos Flores, 2005; Cordero y Flores, 2007; Zaldívar, 2010; Zaldívar y Cordero, 2010; Carrasco, 2011, 2014).

En este apartado no pretendernos profundizar en todos los usos encontrados en estas investigaciones, sino enfocarnos y destacar lo icónico. Por ejemplo, destacamos lo siguiente:

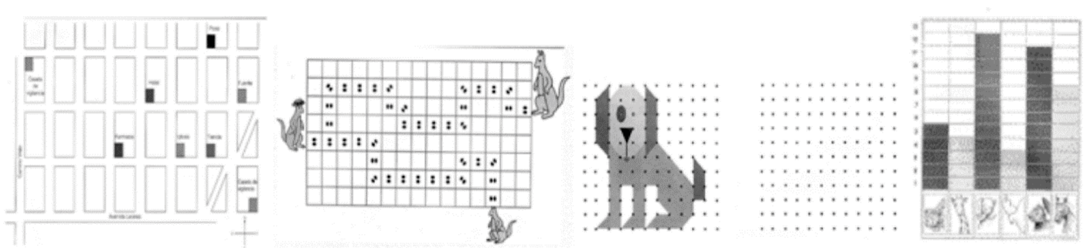
- Uso de gráficas en el nivel básico (Flores, 2005; Cordero y Flores, 2007)
- Lo icónico en un escenario de difusión (Zaldívar, 2010; Zaldívar y Cordero, 2010)
- Escenario de trabajo gráfico (Carrasco, 2011, 2014).

1.5.2.b.1. Uso de gráficas en el nivel básico

En la investigación desarrollada por Flores (2005) se encuentra un marco de referencia que describe el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar del nivel básico. Para ello realiza un análisis del discurso de los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaria).

La investigación dio como resultado la identificación y caracterización de tres momentos del uso de las gráficas:

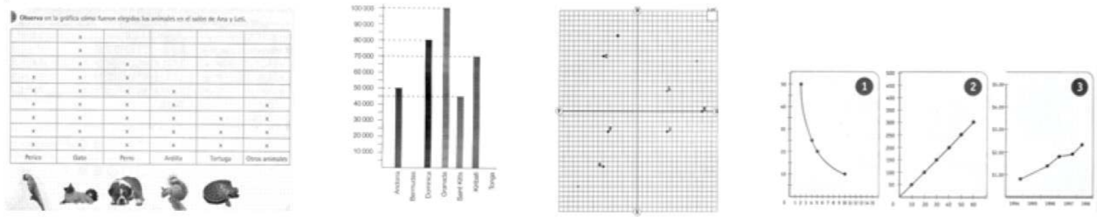
- o El uso del síntoma de la gráfica de la función: Curricularmente no se definen los conceptos gráfica y función. Aparecen actividades de ubicación, comparación y “optimización” de trayectorias, reproducción de figuras (Figura 1.6).



a b c d

Figura 1.6 Gráficas alusivas al momento del síntoma del uso de la gráfica de la función.

- El del uso de la gráfica de la función: Curricularmente se alude a la palabra gráfica pero no a la función, aunque aparecen gráficas de funciones. Las actividades son con formas de tablas, pictogramas, gráficas de barras, puntos en el plano con ejes cartesianos para localizar coordenadas (Figura 1.7).



e f g h

Figura 1.7 Gráficas alusivas al momento del uso de la gráfica de la función.

- El del uso de la curva: se incluyen actividades que aluden explícitamente a la función (Figura 1.8).

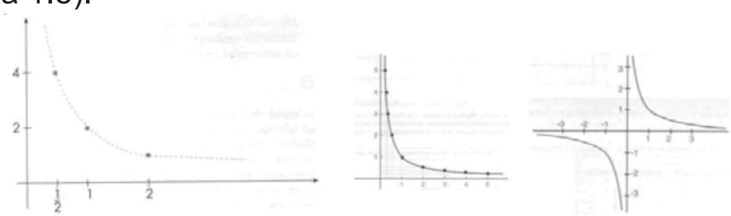


Figura 1.8 Gráficas alusivas al momento del síntoma del uso de la curva que discute comportamientos geométricos.

Con esta información se expresa un desarrollo del uso de las gráficas en donde el funcionamiento y forma de las gráficas dependen de los procesos institucionales, en este caso, en nivel básico. *El "uso" es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las "tareas" que componen la situación, y la forma del "uso" serán la clase de esas "tareas". Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios* (Cordero y Flores, 2007, p.13).

1.5.2.b.2. Escenario de difusión

Zaldívar (2010), trabaja una Situación de Modelación de Movimiento (SMM) basada en el Binomio Modelación-Graficación de Suárez (2008), que consiste en un sistema de Masa-Resorte-Amortiguamiento (Figura 1.9) en la cual los participantes hacen uso de gráficas que ellos mismos generan o bien por las generadas por calculadoras y sensores de movimiento. Dichos usos tienen un carácter funcional y un sentido específico que no depende de las propiedades analíticas de la función que ahí intervienen.

Figura 1.9 Instrumento de modelación.

Se crea un marco de referencia sobre los usos de las gráficas que los participantes manifiestan desde su cotidiano, *entendiendo a éste desde su "sentido común", sus "creencias"* (Zaldívar, Cordero, 2010).

Para aplicar la SMM se diseñó un taller, el cual se replicó 15 veces con una participación promedio de 15 personas por taller, el taller que se denominó "Conoce al señor Movimiento", el cual se llevó a cabo en escenarios como Cinvesniñ@s 1-2008 (Cinvestav-IPN), Platicando sobre ciencia (Instituto de Ciencia y Tecnología D.F. (ICyT DF), entre otros. Los participantes eran niños y adultos, por tratarse de un escenario de difusión la edad era una variable no controlada. El taller constaba de dos partes, una donde se abordaban aspectos de variación y otra donde se trataba la estabilidad. Las discusiones se dirigían hacia la predicción, anticipación e imitación de comportamientos, los cuales presentan una cierta tendencia.

La instrucción dada es *dibujar la gráfica del movimiento del resorte cuando se le pone una pesa*. Entre las producciones de los participantes es posible encontrar que dibujan aquello que se mueve y cómo se mueve, ya que las trayectorias continuamente aparecen acompañadas de dibujos del resorte con la pesa (Figura 1.10).

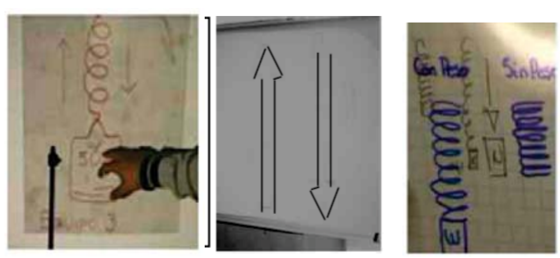


Figura 1.10. Movimiento del resorte al poner una pesa.

Dibujar el movimiento del resorte, de manera general y recurrentemente dio lugar a un uso de la gráfica sobre el fenómeno, que se denomina: orientar el movimiento (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero, 2014). La función de las gráficas en su uso era para indicar dirección y sentido del movimiento repetitivo. Lo anterior era a través de formular un patrón de ajuste de tipo icónico (las flechas indican dirección y sentido: arriba, abajo, sube, baja), gestual (indicar con la mano que el resorte sube y baja continuamente) o verbal. De manera general, los patrones de ajuste icónicos y gestuales sobre el comportamiento se agrupan en la Figura 1.11.

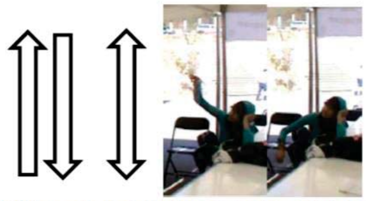


Figura 19. Patrones de ajuste en el momento de mantenimiento

Figura 1.11 Patrones de ajuste.

Las argumentaciones que aparecieron en el desarrollo de la actividad emplean como herramienta lo que se denominó Trayectoria (Figura 1.12). Entendiendo como trayectoria no sólo al lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento; llama la atención al tipo de interpretación, lectura y función de esta herramienta icónica o gestual.

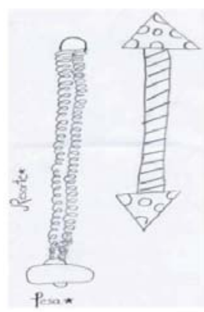


Figura 1.12 Ejemplo de producción de trayectorias.

Estos datos obtenidos en este momento de la situación y bajo el caso de la aparición de la trayectoria, indican que la estabilidad se resignifica como un modelo de permanencia en el uso de la gráfica para orientar el movimiento por patrones de ajuste basados en trayectorias. Es en este marco funcional que aparece lo estable (Zaldívar, 2014, p.129).

La argumentación de lo estable, para este caso, Zaldívar (2014) lo clasifica de la siguiente manera (Tabla 1.3):

Tabla 1.3 Argumentación sobre la estabilidad en el caso de la aparición de la trayectoria

<table>
<tr><th colspan="2">Caso 1. La aparición de la trayectoria</th></tr>
<tr><td colspan="2">Uso de la gráfica: orientar un movimiento repetitivo
Funcionamiento del uso: indicar dirección y sentido del movimiento repetitivo;
Forma del uso: formular un patrón de comportamiento o ajuste de tipo icónico/gestual/verbal que expresa lo observable</td></tr>
<tr><th>Elementos de construcción</th><th>Marco de argumentación de lo estable</th></tr>
<tr><td>SIGNIFICADOS</td><td>La estabilidad como permanencia</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMIENTOS</td><td>Construir un patrón de ajuste basado en flechas con dirección y sentido, secuencias temporales y la mano vertical</td></tr>
<tr><td>PROCESOS-OBJETOS</td><td>La estabilidad contenida en una trayectoria</td></tr>
</table>

El análisis realizado lejos de considerar si los participantes hacen trayectorias, curvas o gráficas; se enfoca a cómo aparece lo estable. La lectura e interpretación de la estabilidad a partir de los usos de las gráficas en la cual se consideran aspectos gestuales e icónicos que se generan, sirven para interpretar la manera en la que se problematiza el conocimiento matemático.

1.5.2.b.3. Escenario de trabajo gráfico

Carrasco (2011) presenta un estudio que *profundiza el saber sobre el rol que las gráficas de variación pueden desempeñar en la construcción de aprendizajes sobre el pensamiento y lenguaje variacional* (p.757).

Más que considerar a la gráfica como objeto matemático, la considera una herramienta centrándose en la actividad matemática que ella propicia en los estudiantes.

Aborda de manera sistémica el trabajo estudiantil referente a la graficación y sus significados, a su capacidad para argumentar desde ella.

Realiza un análisis a través del escenario de trabajo Gráfico, el cual está constituido por la interacción de las siguientes componentes:

- *El conjunto de prácticas presentes. Tanto aquellas que se propician en la actividad propia de quienes trabajan, en su individualidad y particularidad, así como aquellas prácticas sociales que están al seno de la condición social de quienes actúan.*
- *Las herramientas que concurren al trabajo. Entendiendo por herramientas a todos aquellos elementos matemáticos que concurren a entender lo que varía y cómo varía desde diferentes marcos conceptuales.*
- *Los significados que se portan en la gráfica. Los elementos que constituyen la gráfica son símbolos que portan significados particulares de quienes las construyen y que deben ser conocidos por quienes las interpretan.*
- *Las argumentaciones que se propician. Los sujetos involucrados en esta actividad especifican, levantan argumentaciones para convencer, explicar y llegar a consensos con otros. Ellas son articuladas desde los significados herramientas y prácticas ejercidas en el ambiente* (p.762).

Uno de los resultados obtenidos, en una puesta en escena en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa[12] llevada a cabo en Venezuela (Relme 21), tiene que ver con lo icónico. Se solicita a los estudiantes (y posteriormente a profesores) que representen la caída de una pelota, el resultado es un comic del movimiento, es decir, representan de manera icónica lo que cambia en la situación planteada (Figura 1.13).

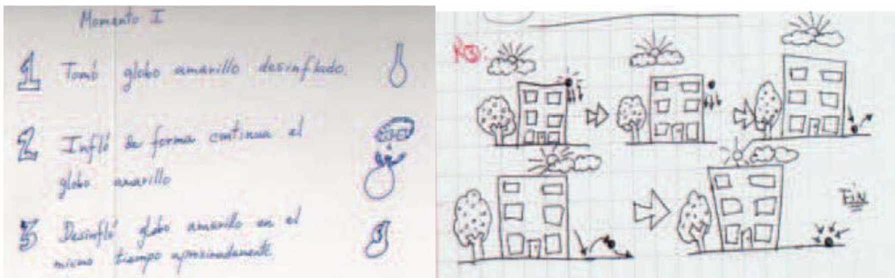


Figura 1.13 Representaciones de lo que cambia en una situación.

El análisis del escenario de trabajo gráfico a través de los componentes es el siguiente: Se reconoce el comic como un ambiente de trabajo gráfico que lleva a prácticas icónicas de representación. El uso de *herramientas* pictóricas es para la práctica de figurar lo que varía, se dibujan los momentos donde cambia algo que se observa (la pelota parte, cae al suelo, Figura 1.13). Hay dos tipos de variables: las que aparecen en la reproducción pictórica y las que se perciben con la mirada como el tiempo, la cual puede ser descrita con simbología particular o en una descripción anexa. *Los significados* surgen de reconocer al movimiento en una secuencia de imágenes, el tiempo queda incluido en la variación de las escenas (cambio de posición del sol respecto de la nube en la figura), lo que muestra una significación del tiempo como artefacto de sincronía. *Las argumentaciones*, son evocadas desde la sucesión de imágenes y desde la memoria visual y percepción, se argumenta desde un “yo lo vi”, “el globo se inflo” y se exige esas descripciones argumentaciones a la par de la escena.

Carrasco (2014) señala que el uso de lo icónico permite dar significados a los elementos de la gráfica a partir del fenómeno*, a la vez que los elementos del fenómeno se evidencian y significan desde la gráfica, conformando un ir y venir entre fenómeno y figura.* En las prácticas coinciden elementos tanto perceptivos, como gráficos y propios de su experiencia con el fenómeno.

Lo interesante de los trabajos mencionados, es el hecho de que lo icónico no es algo exclusivo de un nivel educativo específico. Flores (2005) se enfoca en el nivel básico (primaria y secundaria en México), Zaldívar (2010) en un escenario de difusión en el cual los participantes son niños y adultos también, mientras que Carrasco (2014)

[12] La Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme) es un encuentro anual de investigadores, profesores y estudiantes de licenciatura o posgrado interesados en matemática educativa, organizado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame).

evidencia las producciones de estudiantes y profesores en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 21.

c) Usos de gráficas en otras disciplinas

1.5.2.c.1. Economía

Situémonos en un dominio diferente a la matemática, por ejemplo, Economía. La derivada es empleada para modelizar fenómenos que los economistas estudian. La investigación realizada por Ariza y Llinares (2009) con estudiantes de 2° de bachillerato (curso de Economía) y 1° de Universidad (estudiantes de Ciencias Empresariales), enfocada en el uso de la derivada en conceptos económicos, destaca la relevancia de la matemática ya que muchos de sus conceptos son funciones y funciones derivadas particulares. Se señala la importancia que para aprender microeconomía es esencial el buen uso de la gráfica (Hey, 2005 mencionado en Ariza y LLinares 2009, p. 122).

Los autores proponen seis tareas, la tarea nº 4 es la que se presenta (Figura 1.14) donde las respuestas corresponden a dos alumnos de Administración y Dirección de empresas.

Tarea 4:

La función de producción a la que se enfrenta un empresario en el corto plazo viene definida por los siguientes datos:

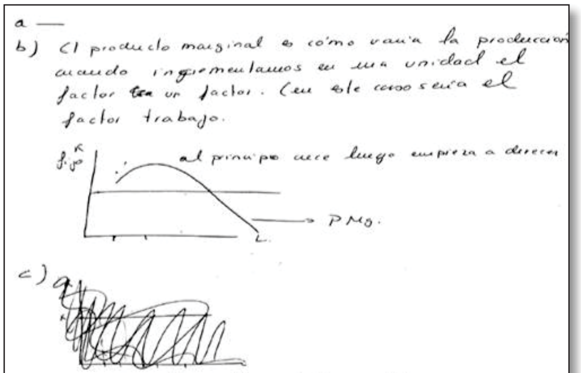
Producción	0	1	1,41	1,73	2	2,23	2,45
L (trabajadores)	0	1	2	3	4	5	6

a) Representa gráficamente la función y obtén una expresión algebraica de dicha función de producción.
b) Realiza un esbozo de cómo sería la función producto marginal (PMg): obtén también su expresión analítica qué indica el producto marginal (PMg)?
c) ¿Qué formas tiene ambas gráficas? ¿Encuentras alguna relación?

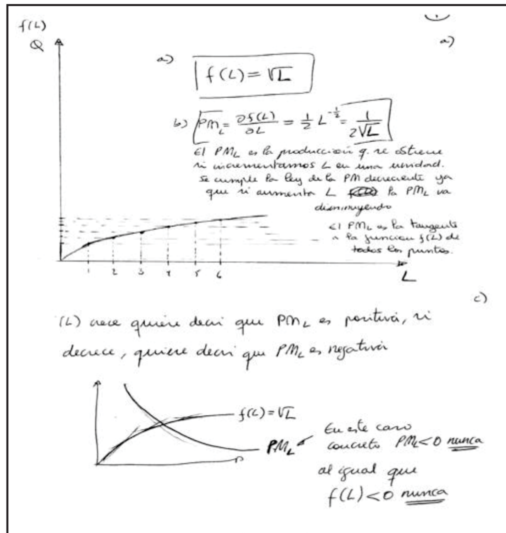
Figura 1.14 Tarea 4 propuesta por Ariza y Llinares (2009).

La tarea usa los conceptos de producto total y marginal, y para ello se requiere usar los significados de la idea de derivada de manera gráfica. En el apartado de análisis de resultados se pueden observar dos clases de respuestas, las cuales dan señales de cómo el alumno organiza su conocimiento, la forma en que interpreta la información que se le ha entregado y lo expresa a través de representaciones simbólicas.

Tomando una mirada desde la perspectiva de Duval, basa el análisis desde los registros algebraicos y gráficos (Figura 1.15), donde los autores concluyen que:



Fuente: **Tarea 4; Alumno A1.**



Fuente: **Tarea 4; Alumno A7**

Figura 1.15 Respuestas de la tarea 4.

- Se muestra un favorecimiento de lo algebraico y no se da el valor a lo gráfico.
- El buen manejo de ambos registros es el que garantiza un mayor grado de comprensión y aplicación de la derivada como concepto matemático en la mejor comprensión de los conceptos económicos.

Ahora, surge la pregunta ¿Por qué no existe una interpretación gráfica de la derivada que permita obtener información de las tablas o gráficos proporcionados? ¿Por qué si lo gráfico es de gran relevancia no se favorece en el discurso empleado en el aula?

Es así como nos cuestionamos ¿Por qué la argumentación gráfica no tiene un estatus relevante en el discurso matemático escolar? De ser así, ¿Por qué no se obtiene mayor provecho? Habitualmente las investigaciones concernientes a las gráficas son relacionadas a aspectos como las dificultades de los estudiantes con la interpretación, lectura o elaboración (Leinhardt, Zaslazvsky y Stein, 1990); la representación del concepto de función desde una perspectiva cognitiva (Dubinsky y Harel, 1992); las dificultades en la conversión de representación algebraicas a la gráfica (Duval, 1999), pero no de la argumentación.

1.5.2.c.2. Ingeniería Química

Torres (2013) realiza una investigación con sustento en la Socioepistemología, en la cual *se interesa en entender cómo un sujeto construye conocimiento, pero en su condición de sujeto situado, un sujeto que pertenece a una cultura y a una comunidad*. Para ello se enfoca en el trabajo de una Comunidad de Conocimiento: Ingenieros Químicos ubicada en la Gerencia Regional de Transmisión Peninsular de la Comisión Federal de Electricidad.

A continuación, se muestra un ejemplo del tipo de gráfica de las concentraciones de los gases que se obtiene mediante los equipos empleados en el laboratorio químico en el cual realizan análisis de Contenido de Gases, entre otros. Las gráficas describen el comportamiento de los gases producidos por el aceite del transformador (Figura 1.16).

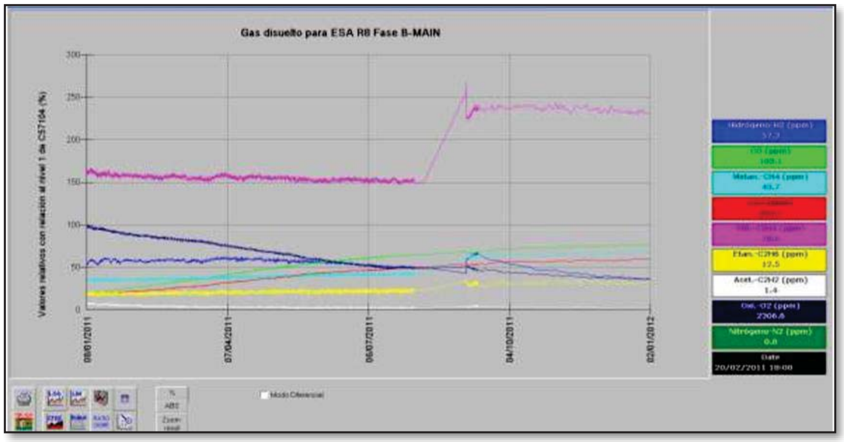


Figura 1.16 Comportamiento de los gases.

Es importante destacar cómo surge este método de análisis gráfico. Los datos de las diferentes concentraciones de gases reportadas por transformador eran graficados con el propósito de tener un control estadístico. Las gráficas obtenidas tenían relación entre los comportamientos gráficos y las posibles fallas en el transformador. Con esa base de datos, se decidió modificar el método de diagnóstico, centrándolo en las gráficas de comportamiento de la concentración de los gases en vez de uno empleado por una literatura que *en diferentes ocasiones al hacer el análisis de los gases y diagnosticar por medio de los métodos, estos indicaban un problema en el transformador y, al sacarlo de servicio y entrar a revisar, se daban cuenta que en realidad no existía ningún problema* (Torres, 2013, p. 72).

El análisis de Contenido de Gases tiene como propósito determinar el desgaste del transformador a través de la identificación de los niveles de concentración de los diferentes gases disueltos en el aceite. En el análisis se ve la idea de la simultaneidad de la derivada, ya que en él se considera cuánto y cómo está variando la concentración del gas; al mismo tiempo esta variación la relaciona con la estabilidad, ya que a fin de cuentas lo que se espera es que el transformador se encuentre estable, para que no ocurra alguna falla. Esto es importante debido a que determina el desgaste que tiene el transformador, es decir, si funciona de manera regular o presenta algún índice de falla. Una vez identificado que existe algún índice de falla, mediante la observación gráfica de un incremento en alguno de los gases, se procede a determinar dónde está ocurriendo el problema, esto es, qué parte del transformador está fallando.

Torres concluye que los ingenieros químicos usan las gráficas para un control estadístico, que al debatir y permitir el desarrollo del uso de las gráficas genera un nuevo uso donde se identifican parámetros y una relación entre las fallas y las gráficas; lo anterior al debatir y desarrollarse generan otro uso como modelos de comportamiento, que permite el análisis y diagnóstico de los transformadores eléctricos (Torres, 2013).

En la investigación se resignifican la simultaneidad y la estabilidad a través del análisis de modelos gráficos, donde no se mira movimiento, pero sí se hace un análisis profundo de las variaciones, en donde los argumentos de predicción y comportamiento tendencial se desarrollan en torno a dichos conocimientos.

1.5.2.c.3. Ingeniería Agrónoma

Gómez (2015) plantea al proceso de socialización del conocimiento matemático como un elemento para recuperar el uso del conocimiento matemático de la gente, el cual se ha olvidado a causa del fenómeno de opacidad ocasionado por el actual dME. Dicho proceso sería el núcleo que permita la relación recíproca entre el conocimiento matemático del cotidiano y el que vive en la matemática escolar. Gómez realiza un estudio de diferentes autores del cual reconoce tres características intrínsecas en todo proceso de socialización: lo orgánico, lo situacional y lo intencional.

Gómez caracteriza el proceso de socialización del conocimiento matemático en una comunidad de conocimiento de ingenieros agrónomos. Tomando como base la Categoría de Modelación, distingue dos problemáticas de estudio propias de esta comunidad: el añerismo en las plantas y el manejo de plagas. Las problemáticas permiten enmarcar las epistemologías que fundamentan la construcción social de su conocimiento, a saber: lo periódico y lo óptimo.

Con el trabajo de Gómez podemos ver el proceso de socialización en las problemáticas planteadas, y cómo el uso de las gráficas desempeña un papel importante en este proceso. Para ello nos enfocaremos en el añerismo de plantas.

La socialización del conocimiento y lo orgánico. Para esta comunidad, esta característica se expresa en la relación entre la Agricultura y la Agronomía. Con el fin de exhibir y hacer explicita esta relación para provocar la socialización de dicho conocimiento se emplearon instrumentos de análisis dentro de la Categoría de Modelación–Graficación (Cordero 2006, 2011; Suárez y Cordero, 2010; Suárez, 2014). Además, para caracterizar los usos de las gráficas en la Ingeniería Agrónoma, es necesario entender el funcionamiento y la forma de la gráfica en situaciones específicas (Se_i), así como el debate entre estos dos aspectos.

El añerismo es el proceso inherente a ciertas especies de plantas, que refleja la alternancia en los niveles productivos, es decir, para algunas plantas, la producción de cierta cantidad de fruto es por año o ciclo. Por lo que la primera situación específica (Se_1) es comprender el tipo de añerismo de la planta, es decir, reconocer ciclos y rangos de niveles de producción por ciclo. El uso de la gráfica es la identificación del ciclo de alternancia, el cual es la unidad de análisis que se empleará para estudiar el tipo de añerismo de la planta con respecto al tiempo. El funcionamiento es establecer patrones de comportamiento repetitivos en los ciclos de producción de la planta, el cual debate con la forma en que se presenta el registro de datos para la construcción gráfica de ciclos *on* y *off* (Figura 1.10).

Lo anterior lleva a una *Se*$_2$: decidir el tipo de raleo o poda, manual, mecánico o químico, según el tipo de planta y su comportamiento productivo. La poda permite que se modifique la calidad del cultivo. El uso de la gráfica se expresa en la comparación de las unidades de análisis de acuerdo con el tipo de raleo que se le aplica: sin raleo, raleo químico o raleo manual. La comparación no sólo es el tamaño del ciclo sino también del nivel de alternancia por ciclo. El funcionamiento es la regularización de la alternancia de los ciclos de producción *on* y *off*, y la forma en que se presenta es a través de las comparaciones locales y globales de dichos ciclos (Figura 1.17).

La *Se*$_3$ es el cálculo de la producción de la planta para un tiempo futuro, por ejemplo, para el año siguiente. Se espera que para futuras cosechas se pueda contar con un mejor control de la producción de la planta, de tal manera que se puedan prever costos, mercado y finalidades de la cosecha. El uso de la gráfica se caracteriza por el control de comportamientos, en este caso de la producción. El funcionamiento está dado por la predicción de la alternancia de la futura producción y la forma será a través de lograr el equilibrio de los ciclos de producción *on* y *off* (Figura 1.17).

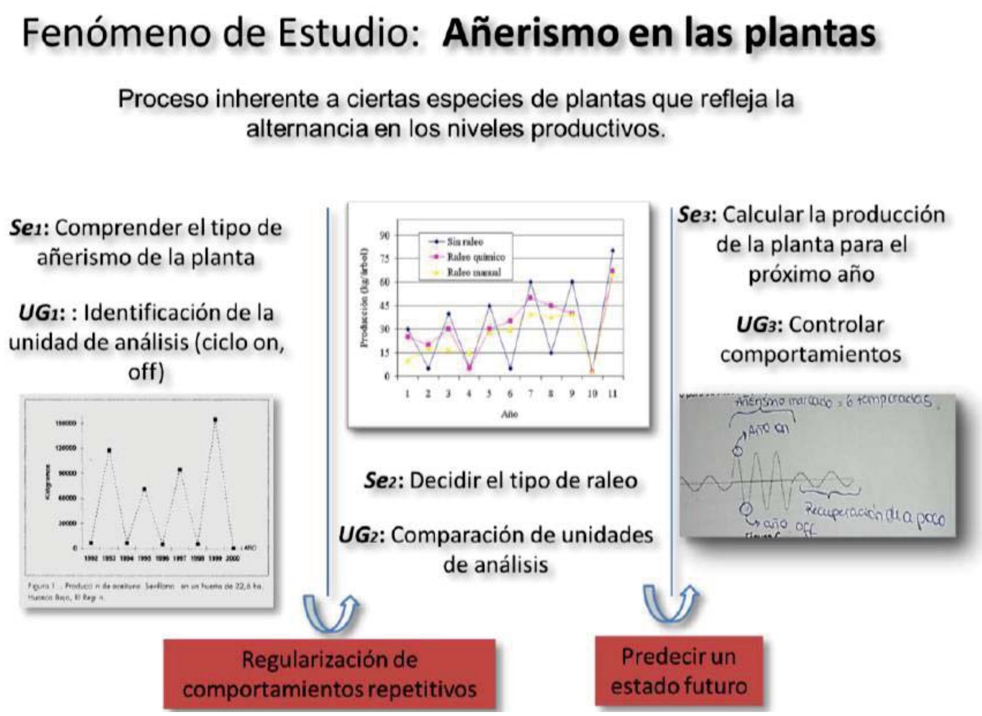


Figura 1.17 Desarrollo de uso de gráficas en el añerismo de las plantas.

La socialización del conocimiento y lo situacional. Esto consiste en poner en relieve el carácter situado del conocimiento, el cual se verá expresado en aquello que permite las resignificaciones de los usos de las gráficas. Lo que norma el debate entre los funcionamientos y formas del conocimiento que resignifican los usos de las gráficas son: La regularización de comportamientos repetitivos y la predicción de estado futuro. Es así como se evidencia que la epistemología de lo periódico permea el desarrollo de usos en el estudio del añerismo.

La socialización del conocimiento y lo intencional. Esta característica debe poner en juego intencionalmente la relación entre las epistemologías que se generan a partir de los usos de las gráficas con las situaciones que permiten su desarrollo. Para el añerismo en las plantas se distingue a la predicción como argumentación de la situación de periodicidad, es decir, es aquella práctica que motiva a la búsqueda de la unidad de análisis que permite informar sobre el comportamiento repetitivo; se distingue que los procedimientos se llevan a cabo a través de la identificación y el ajuste de la unidad de análisis, las significaciones se dan en términos de los comportamientos repetitivos y el instrumento, es decir, aquello que le es de utilidad a la comunidad, es la búsqueda de lo regular.

El hecho de poner en juego la relación entre lo periódico con la práctica de predicción dio paso a una Categoría del Conocimiento Matemático *periodicidad-predicción* que desarrolla la intencionalidad que caracteriza al proceso de socialización del conocimiento desde esta CCM de ingenieros agrónomos.

Este trabajo da muestra de los usos de gráficas que son propias de una comunidad específica: la Comunidad de ingenieros agrónomos. Aquí se señaló un ejemplo de la investigación de Gómez (2015) en la cual se evidencia lo periódico a partir de la problematización del saber en un proceso de socialización en una comunidad particular en una situación específica.

1.5.2.c.4. Física

Existe una gran variedad de investigaciones que se han enfocado en las gráficas usadas en Física, sobre todo relacionado a la cinemática en los que se da evidencia de diferentes dificultades relacionadas a ellas, por ejemplo: conectar las gráficas con conceptos físicos, conectar las gráficas con el mundo real, relacionar un tipo de gráfico con otro (McDermott, Rosenquist y van Zee, 1987; Hale, 2000; Lapp y Cyrus, 2000; Laverty y Kortemeyer, 2012) (Figura 1.18).

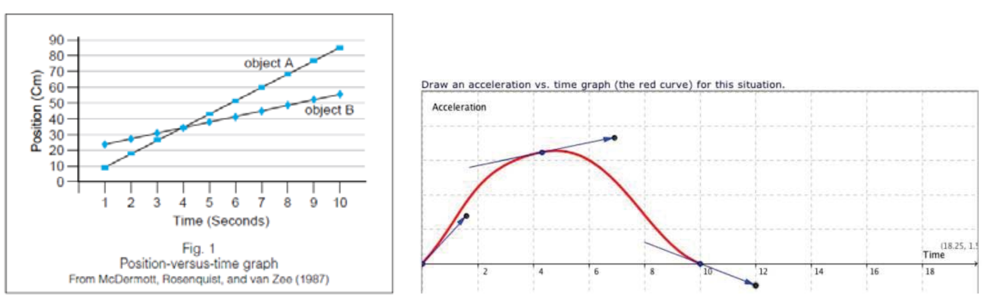


Figura 1.18 Ejemplos de gráficas de cinemática usadas en diversas investigaciones.

Hay quienes destacan el rol de la tecnología como elemento importante al momento de trabajar con las gráficas (Hale, 2000; Lapp y Cyrus, 2000; Laverty y Kortemeyer, 2012). La tecnología no sólo permite la eficiencia del tiempo, sino que permite construir, interactuar con el fenómeno físico.

McDermott, et al (1987) destaca la relevancia de las gráficas en el estudio de la física, tanto que señala que es una de las habilidades más importantes a desarrollar. Estos autores, además, mencionan que para los estudiantes el uso de gráficas durante la formación no es tan relevante como lo es en el trabajo académico futuro.

Lo anterior nos hace cuestionarnos respecto a porqué no se ve la importancia de las gráficas en el ámbito escolar, ¿Acaso se debe al discurso que el profesor mantiene durante sus clases?

Por su parte, Hale (2000) indica que, en las gráficas relacionadas con la cinemática, no logran hacer conexiones entre los conceptos matemáticas (aun cuando los comprenden) con sus respectivas gráficas. Estas dificultades muchas veces están basadas en ideas erradas que tienen origen en las experiencias de cada estudiante.

El trabajo de Laverty y Kortemeyer (2012) señalan que los estudiantes pueden ser eficientes al momento de trazar gráficas con funciones dadas o interpretar los valores de la misma, sin embargo, eso no quiere decir que sean hábiles para construir gráficas e interactuar con ellas. Los autores realizan una investigación en la cual se integra la tecnología, el objetivo es construir e interpretar gráficas que permitan generar una conexión de las gráficas con los conceptos físicos.

Idoyaga y Lorenzo (2014) se refieren a las representaciones gráficas en la enseñanza y en el aprendizaje de la física en la universidad, el estudio se lleva a cabo en Buenos Aires; el objetivo es describir las prácticas áulicas de enseñanza y de aprendizaje de las representaciones gráficas, interpretarlas y detectar posibles dificultades para así elaborar propuestas didácticas de intervención. Para ello realizan un estudio sobre el Conocimiento Didáctico de las representaciones gráficas que poseen los profesores y su relación con el uso que hacen de ellas.

Los autores destacan el rol transversal de las gráficas con otras disciplinas, considerándolo así un tema clave en física. Centrándose en las gráficas en Física, las consideran representaciones que desempeñan un papel central en la comunicación de esta disciplina; además, son cruciales en su enseñanza y en el trabajo experimental; el aprendizaje de muchos de los conceptos físicos se encuentra ligado al aprendizaje de las representaciones gráficas.

Las actividades del estudio permitieron detectar características manifiestas en el Conocimiento Didáctico del Contenido de los profesores, entre los que se destacan: predomina la elección por lo expositivo donde abunda la enunciación de directivas; la insistencia de los profesores por la construcción de las representaciones, esta tiene como consecuencia que se sobredimensiona lo estético del gráfico, dejando de lado aspectos relacionados con su análisis y finalidad. A los profesores se les realizaron algunas entrevistas, las respuestas mostraron que conciben las representaciones gráficas fundamentalmente como herramientas operativas, ignorando el potencial uso cognitivo que los estudiantes podrían hacer de éstas.

Los autores concluyen que *el uso didáctico que los profesores hacen de las representaciones corresponde al tipo explicativo o instrumental, este último aparece fuertemente relacionado a las instancias de trabajo práctico, MIENTRAS QUE el uso* *problémico de las representaciones ES ESCASO con la consecuente falta de actividades destinadas a que los estudiantes ejerciten las habilidades necesarias para la comprensión de las representaciones* (Idoyaga y Lorenzo, 2014, p. 369).

Los trabajos de los autores mencionados, aun cuando se han realizado en años diferentes, dan evidencia que las gráficas han sido y son importantes en el área de la Física y que a pesar del paso del tiempo existen elementos que no se han logrado aprovechar en el aula, por ejemplo: conectar los conocimientos de cálculo a la física, promover la construcción de gráficas e interactuar con las mismas.

Así mismo, si observamos con mayor detenimiento, podemos ver una especie de evolución relacionada a la importancia de la gráfica. Tenemos lo siguiente:

- McDermott et al. (1987) señala la importancia de la gráfica en el área de Física, evidenciado que desempeña un rol fundamental en la práctica.
- Por su parte Hale (2000) agrega la conexión entre dos áreas de conocimiento que se relacionan: Cálculo y Física. Reconocer dicha conexión contribuye a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y del fenómeno físico en cuestión.
- Laverty y Kortemeyer (2012) añaden la importancia de la construcción de la gráfica, entendiendo que es más complejo de lo que aparenta. No sólo se trata de ubicar puntos en el plano, requiere de comprensión de variables en juego y su relación, dada una gráfica obtener nuevos datos y/o la construcción de una nueva gráfica contrario a centrarse en lo algorítmico.

1.5.3. Tecnología y gráficas en Física

En la actualidad nos encontramos inmersos en un mundo donde la tecnología es parte fundamental de nuestro día a día. El desarrollo tecnológico exige que los profesionales manejen y usen los medios que tienen a su disposición, por ejemplo: el uso de software, empleo de distintos equipos o maquinarias, etc.; lo cual requiere cierto dominio de conocimiento, pero también de experiencia, donde se ponen en práctica los usos de conocimiento. Lo anterior, invita a pensar en que las necesidades de hoy no son las mismas de hace años y eso incluye la enseñanza. Por ejemplo, respecto a la enseñanza de las matemáticas, la aparición de herramientas tecnológicas y espacios virtuales de aprendizaje, han cambiado la forma en cómo los aprendizajes se entregan a los estudiantes, esto incluye la educación superior como destacan Juan, Steegman, Huertas, Martínez y Simosa (2011).

En el ámbito profesional la tecnología desempeña un rol trascendental ya que es un elemento que se encuentra inmerso en distintas áreas. Pero centrémonos en dominios que emplean tecnología relacionada con el uso de gráficas, por ejemplo: Química, Ingeniería, Física, etc. Los diferentes avances tecnológicos causan impacto no sólo en la capacitación profesional, también afecta la educación y el bienestar social[13] (Jiménez, Mora, Cuadros, 2016); Rojano, 2014).

Algunos autores (Hale, 2000; Sáez, Pintó y García, 2005; Laverty y Kortemeyer, 2012) señalan la importancia de emplear el *Microcomputer based Laboratory* (*MBL*) en la enseñanza de la cinemática. El uso de *MBL* está relacionado con herramientas que utilizan microcomputadoras para adquisición de datos, visualización y análisis.

El trabajo de Sáez *et al*., (2005) es un estudio que se centra en comprender un fenómeno físico relacionado con el movimiento. Para ello, deben establecer interrelaciones entre evolución de un sistema real, conceptos físicos (cinemática) y gráficas que describen tal evolución, elementos matemáticos para la descripción y conceptos físicos que lo explican (dinámica) (Sáez *et al.*, 2005, p.2). Es decir, lo que analizan son las argumentaciones que realizan, y las clasifican de acuerdo con paradigmas (Figura 1.19).

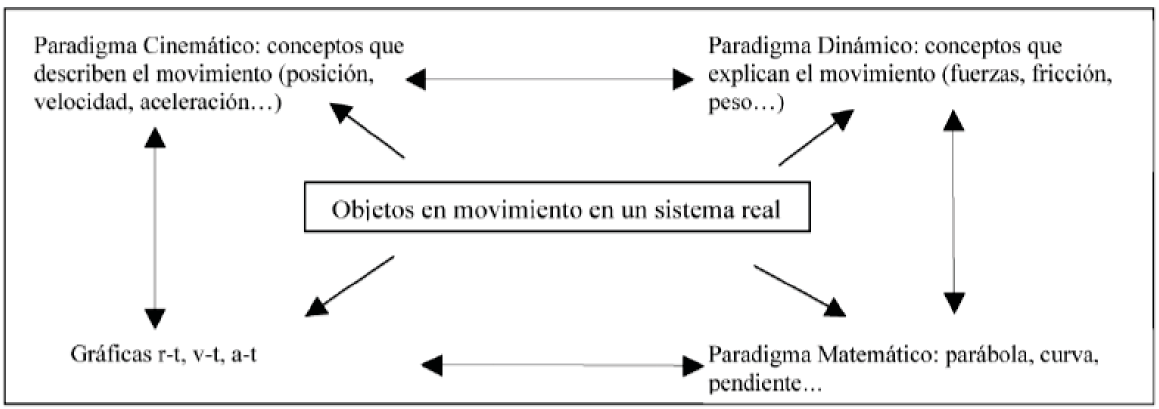


Figura 1.19 Paradigmas relacionados a un sistema real (Sáez, et al, 2005, p.1).

Las preguntas que realizan son las siguientes:

- ¿Desde qué paradigma argumentan la forma de una gráfica del movimiento a partir de la observación del sistema real que la produce?
- ¿Qué relaciones establecen entre los paradigmas para explicar la forma de esta gráfica?

Los autores Sáez *et al.* (2005) realizaron un estudio a 8 grupos de alumnos (un total de 205 alumnos) del 1° y 2° de Bachillerato, en el cual utilizan MBL entorno a la cinemática del movimiento del plano. El objeto en movimiento es un carrito que se desplaza sobre un carril después de haber sido lanzado con una goma elástica (Figura 1.20). Vuelve a su posición inicial mediante un contrapeso atado al carrito con una fina cuerda que pasa por una polea.

[13] Por ejemplo, la Fundación Proacceso (México) es una organización sin fines de lucro cuya misión es combatir la brecha digital en México, proveer herramientas educativas en áreas de bajos ingresos, así como catalizar el desarrollo económico y social a través de iniciativas tecnológicas, para más información ver https://proacceso.org.mx/

Figura 1.20 Objeto en movimiento y la gráfica obtenida.

Los datos obtenidos se clasificaron de acuerdo con los argumentos. Para los autores un *aprendizaje real* consiste en "*… permitir que los alumnos se muevan de un paradigma cinemático a otro dinámico o icónico con poca dificultad y partiendo de unas ideas centrales*" (Sáez, *et al*., 2005, p.2). La Tabla 1.4 muestra las argumentaciones surgidas al preguntar "Como has visto, la gráfica posición-tiempo del carrito no es simétrica. ¿Qué explicación puedes dar?". Los argumentos son de tres tipos: Físicos, matemáticos e icónicos:

Tabla 1.4 Clasificación de las argumentaciones de acuerdo con los paradigmas (Sáez, et al., 2005, p. 3).

Argumentos	
Físicos	a) tomar en consideración el objeto real y analizar su movimiento desde una perspectiva dinámica argumentando la composición de la fuerza de fricción y la fuerza debida a la tensión de la cuerda (**explicación dinámica cuantitativa**). Requiere disponer de una capacidad para analizar el sistema real, para analizar y componer las fuerzas actuantes y para darse cuenta del cambio de sentido de la fuerza de fricción. Puede utilizarse, pero no es imprescindible, utilizar también el dominio cinemático expresando la mayor o menor aceleración del móvil en su ida o vuelta.
	b) tomar en consideración alguna de las fuerzas actuantes que dan lugar a aceleraciones distintas en el movimiento de ida y en el de retorno (**explicación dinámica cualitativa**).
	c) tomar en consideración la obertura de las dos ramas de la parábola y explicar que una rama más cerrada corresponde a un cambio más rápido de la velocidad (la variación de la pendiente de la tangente sería mayor) y por tanto a una aceleración mayor (**explicación cinemática cuantitativa**). Requiere utilizar a la vez conceptos cinemáticos, matemáticos y de gráficas y por lo tanto, la integración de los distintos dominios.
	d) tomar en consideración que hay dos aceleraciones distintas, a la ida o a la vuelta (**explicación cinemática cualitativa**).
B**asados en términos matemáticos**	Parábola, ecuación cuadrática, Δx, etc.
I**cónicos**	Basados en la forma de la gráfica o en sus elementos: (segmentos, partes de la curva, etc.).

Los resultados dan evidencia que la interrelación de los conceptos se ven reflejadas en los argumentos. La mitad (51%) de los alumnos intentan dar una respuesta argumentada. El grupo más numeroso está formado por los alumnos con una respuesta entorno a la idea de fuerza. Unos (10%) efectúan razonamientos completos entorno a la composición de las fuerzas actuantes y las aceleraciones a que dan lugar mientras otros (14%) reducen la complejidad de las dependencias funcionales implicadas en la evolución. Recordemos que los autores indican que, para un aprendizaje real, es necesario la transición de un paradigma a otro (Figura 1.21), el porcentaje de alumnos que logra la integración de los distintos dominios es el 2,5%, es decir, el menor porcentaje.

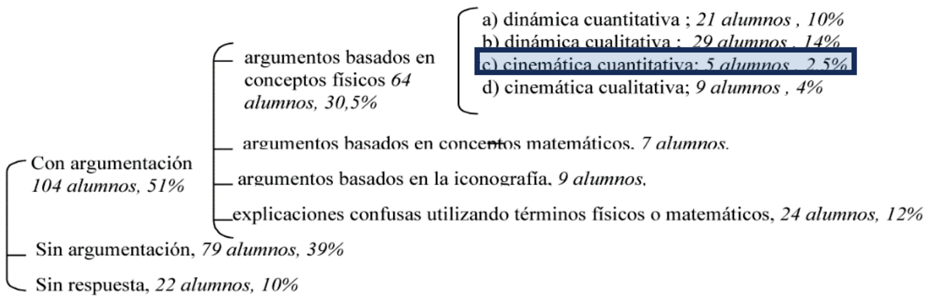


Figura 1.21. Clasificación de los datos obtenidos.

Los autores Sáez et al. (2005) concluyen que la gráfica es un punto relevante que tratar, ya que *la interpretación de la gráfica desde el paradigma cinemática necesita de una mayor relación conceptual entre conceptos físicos, matemáticos y los elementos de las gráficas* (p. 4), lo anterior evidenciaría la organización del conocimiento. Los autores dan relevancia al uso del *MBL*, sugiriendo que éste podría potenciar la organización del conocimiento y respecto a los estudios relacionados al *MBL* indican lo siguiente:

- Unos han analizado las ventajas de la simultaneidad en la obtención de la gráfica mientras el fenómeno físico se produce.
- Otros la mejora en las habilidades para la interpretación de gráficas que supone el uso de esta tecnología o la capacidad de razonar, o su eficacia para ayudar a la comprensión conceptual, etc.
- Otros estudios han puesto de manifiesto el problema epistemológico de diferenciar entre gráficas reales de movimientos reales y gráficas ideales de los mismos movimientos o han propuesto nuevas estrategias de enseñanza.

a) Una investigación con físicos

Morales, Mena, Vera y Rivera (2012) reportan el rol de tiempo en un proceso de modelación a través de la utilización de videos de experimentos físicos con estudiantes universitarios.

La investigación surge como parte del diálogo entre físicos y matemáticos en torno al proyecto *Galeria de Galileo* (ver Vera y Romanque 2009; Vera y Rivera, 2011) que cuenta con una variedad de experimentos simples de física disponible en el sitio www.GaleriaGalileo.cl para libre uso. Los experimentos son de corta duración y han sido grabados de manera de permitir la obtención de variables físicas directamente desde las imágenes en la página web en donde se visualiza cada experimento.

El proceso de modelación evidencia la funcionalidad de las gráficas para describir un fenómeno físico, usando la técnica *track moving objects*. En este proceso intervienen elementos que se articulan y ayudan a construir conocimiento.

Morales *et al.*, (2012) señalan que, en el ámbito de la física, la gráfica tiene un rol sobresaliente para entender, construir o profundizar en esa disciplina, ya que la argumentación gráfica permite entender el fenómeno bajo estudio y crear un modelo físico. Además, consideran la argumentación gráfica como un elemento relevante, en el aprendizaje de la física ya que posee un estatus privilegiado y se considera una *herramienta muy útil que permite poner los conocimientos en juego en un nivel funcional, estatus al que se da poca importancia o que no se reconoce en el DME* (Morales *et al*., 2012, p. 239). Por lo cual, habría que promoverla y validar la argumentación gráfica. Los argumentos gráficos insertos en expresiones como: creciente, decreciente, variación uniforme, etc., permiten al estudiante configurar el tipo de relación entre las variables (esencialmente, el comportamiento variacional).

Los autores utilizan un vídeo del lanzamiento de un proyectil que sigue una trayectoria parabólica, experimento generado por el Proyecto Galileo. Diseñan una situación donde el estudiante tiene que observar una órbita de un móvil y relacionarla con el tiempo, es decir, presenta el mismo tipo de obstáculo que tuvo Galileo. Los estudiantes capturan los datos mediante un *clic* y se les pide explicar el fenómeno.

En dicha actividad no se explicita el tipo de fenómeno físico (caída de cuerpos), ya que, se da la oportunidad al estudiante de utilizar su cotidiano (concepciones de la física) con la manipulación de los datos vía gráficas o cálculos variacionales.

El problema planteado en esta investigación hizo que los estudiantes tuvieran la necesidad de explicitar de alguna forma el tiempo para comprender mejor el movimiento del fenómeno observado. Al analizar las gráficas provenientes de datos obtenidos del fenómeno observado, acentúa el hecho de tener claro cuál es el rol del tiempo.

La necesidad de clarificar el rol del tiempo surge debido a que dos de las gráficas tienen al tiempo como coordenada independiente y los datos hacen referencia a un objeto en movimiento. Los estudiantes necesitan entender las gráficas y llevarlas a un nivel funcional.

En general, la variable *tiempo* se soslaya en los experimentos trabajados con tecnología (por ejemplo, con los sensores de movimiento). Morales, *et al.,* (2012), hace referencia a la vida cotidiana donde se puede encontrar ejemplos en los cuales el tiempo no aparece de manera explícita; *el velocímetro de un coche es uno de ellos: nos informa sobre la rapidez con la que se mueve el coche pero se encuentra oculto el principio de funcionamiento que necesita medir el tiempo* (p. 242). Esta investigación señala un camino viable para construir conocimiento en un proceso de modelación, incluyendo a la argumentación gráfica, que a su vez puede ser facilitada por el uso apropiado de la tecnología.

Capítulo 2

Marco Teórico

La Socioepistemología es una teoría que se encuentra en constante desarrollo, y con el paso del tiempo se ha ido fortaleciendo, sus constructos permiten abordar diferentes problemáticas relacionadas a la construcción del conocimiento matemático. En este capítulo se hace referencia a los elementos que serán de importancia en nuestra investigación, tales como el discurso matemático escolar junto con los fenómenos asociados y el binomio modelación graficación; se toma el caso particular de cómo este binomio, en una situación de movimiento, se enfoca en la variación y el cambio. Al final del capítulo se retoman estos elementos relacionándolos con la importancia de nuestra investigación.

2.1. La Teoría Socioepistemológica

Como se mencionó en el Capítulo 1 la investigación se desarrolla bajo la Teoría Socioepistemológica (TSE). Esta teoría busca intervenir en el sistema educativo incorporando al estudio la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003, Cantoral 2013). Al considerar los cuatro componentes (cognitivo, epistemológico, didáctico y social) de manera sistémica se conforma una perspectiva múltiple para construir explicaciones de los fenómenos didácticos.

La Socioepistemología asume al saber, o saberes, como construcción social del conocimiento, entendiéndolo como procesos deliberados para el uso compartido de conocimiento. Cantoral (2013) indica que trata de mecanismos constructivos de naturaleza social caracterizados por producir interacciones, implícitas o explícitas, entre conocimiento, cultura y mente. Esta teoría más que ver la matemática hecha por el ser humano, ve al ser humano haciendo matemática; considera que la matemática es construida socialmente como resultado de necesidades, usos, experiencias por los grupos, de tal manera que, es producto de siglos de historia (Cordero y Silva, 2012).

Esta teoría sostiene que las prácticas sociales son la base y orientación del conocimiento humano. La práctica social son *las acciones de un grupo social que tiene significados propios e intención, ubicado en un contexto histórico o actual, que actúa de acuerdo con ideologías predominantes y utiliza a la matemática como herramienta para construir conocimiento* (Cordero, Cen y Suárez 2010, p.190). Además, Cordero (2006), indica que es necesario considerarla como unidad de análisis la cual no examina a los participantes sino a sus usos (y costumbres), ya que lo que importa son las formas de construir conocimiento. Hablar de práctica social no se limita a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porqué lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en donde y porqué lo hace y cómo se auto concibe haciéndolo, es decir conocer el medio que utilizan para saber lo que hacen.

Se distingue como problemática fundamental la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, donde la última requiere interpretar y reorganizar a la primera (Cordero, 2001). Se propone hacer énfasis en la reorganización de la obra matemática, en la cual se permita resignificar los conocimientos matemáticos, favoreciendo el uso de la matemática, propiciar *el estudio no en sí del conocimiento sino de su función* (Cordero, 2016a, p.6).

Además de lo anterior, se debe indicar que la TSE descansa en los siguientes cuatro principios fundamentales (Cantoral, 2013, p. 152), los cuales forman una red nodal:

- Normativa de la práctica: se reconoce a las prácticas sociales como la base de la creación del conocimiento.
- Racionalidad contextualizada: *la relación del sujeto al saber es una función del contexto* (Cantoral, 2013, p. 158). Es decir, se reconoce que la racionalidad con la que se opera depende del contexto del momento y lugar determinado en el que se encuentre el individuo, desde el cual construye conocimiento.
- Relativismo epistemológico: La validez del saber es relativa al individuo y grupo cultural, es decir al entorno del cual surge el conocimiento y sus argumentaciones.
- Resignificación progresiva o de la apropiación situada: el dotar de significado a un conocimiento al ponerlo en uso en situaciones nuevas permite la producción de conocimientos, esta dinámica es la que se ha llamado resignificación progresiva. Este mecanismo de producción de significados permite la construcción de argumentaciones, espacios de uso y procedimientos dando paso al saber. La evolución y la interacción con los diversos contextos, permitirá la resignificación de los saberes enriqueciéndolos con nuevos significados.

2.2. El discurso matemático escolar

El discurso Matemático Escolar (dME) es un constructo de la TSE, el que a través de investigaciones se ha ido profundizando. El dME no se limita a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que incluye al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p.86).

Del Valle (2015) señala que la Socioepistemología ha diferenciado tres escenarios (Figura 2.1) de la matemática: el conocimiento matemático, el conocimiento escolar y del conocimiento cotidiano.

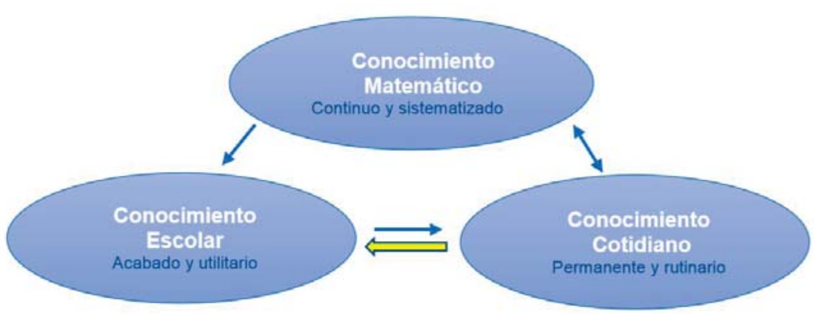


Figura 2.1 La matemática en sus tres escenarios.

Del Valle (2015) señala que estos escenarios están directamente relacionados, debido a que, en muchas ocasiones, el motor para construir conocimiento disciplinar son las condiciones del conocimiento cotidiano, tomando en cuenta que el conocimiento matemático está entre ellos. Así mismo, es necesario reorganizar la matemática para dar pie a la matemática escolar, la cual está interesada en la formación de ciudadanos cuyos conocimientos contribuyan a realizar sus actividades personales y sociales.

Repensemos en el hecho que el profesor de matemáticas tiene como referencia el dominio matemático, ya que de acuerdo con el currículo sólo cuenta con una lista explícita de conceptos y hechos matemáticos para cubrir un programa escolar. Es decir, no se considera la pluralidad epistemológica: la obra matemática, la matemática escolar, la matemática de otras disciplinas y la matemática del cotidiano no disciplinar, el de la gente. Lo anterior ocasiona que se favorezca una epistemología predominante. Cordero (2013) propone hacer un Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME) para crear un vínculo entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano, donde el núcleo principal es una matemática funcional basada en el uso del conocimiento matemático.

Lo anterior ha hecho que se plantee que el dME define la problemática fundamental de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con el enfoque Socioepistemológico se plantea un rediseño de este basado en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM), *el cual debe responder a los tres fenómenos provocados por el dME: adherencia, exclusión y opacidad* (Cordero, 2016a).

Esos tres fenómenos no son secuenciales, están entrelazados en forma sistémica. A continuación, se describen cada uno de estos fenómenos.

2.2.1. La adherencia

El fenómeno de adherencia es una especie de fidelidad absoluta a la matemática escolar, es decir, no permite (al estudiante y docente) cuestionar ni trastocarla. Lo anterior, lleva a no reconocer otras epistemologías que permitan generar prácticas y usos del conocimiento matemático. Los fenómenos de Opacidad y Exclusión incapacitan esos usos y prácticas llevando así a los ciudadanos a adherirse a la epistemología dominante del dME (Gómez, et al., 2014).

Este fenómeno se relaciona con el hecho de universalizar el conocimiento, ignorando que su función puede verse afectada al ser usado en un marco de referencia con características y cualidades ajenas al que fue construido. La adherencia implica actitudes no críticas a los contenidos matemáticos que se enseñan. Los autores señalan que este hecho mantiene a las comunidades latinoamericanas sin identidad disciplinar; lo que lleva a considerar históricamente a Latinoamérica, en lo que respecta al ámbito científico, como un consumidor en vez de creador de conocimiento. En consecuencia, surge la identidad disciplinar como programa de resistencia a tal herencia histórica, por lo que los autores instan a no universalizar el conocimiento, sino a resignificarlo de acuerdo con las problemáticas propias de Latinoamérica (Cordero y Silva, 2012; Cordero, *et al.*, 2015; Silva y Cordero, 2010).

Las teorías, en Matemática Educativa[14], nacen en una región específica, para responder necesidades propias de dicha región (Cordero, Gómez y Viramontes, 2009, p. 379). Los marcos de referencia son diferentes y, por tanto, los resultados pueden ser diferentes. Esta argumentación no quita que se enseñe e investigue sobre el conocimiento disciplinar construido en otras regiones, pero hay que tener presente que ese conocimiento ya se desvinculó del quehacer de su comunidad y de la naturaleza de los problemas de las sociedades que lo produjo. Sostenemos que este tipo de fenómeno nos ayuda a poner en el centro de la reflexión, y resaltar su importancia, a la generación y protección del conocimiento teórico disciplinar de regiones latinoamericanas.

Como se indicó anteriormente, en oposición a este fenómeno se habla de identidad a la luz del quehacer disciplinar de la comunidad de socioepistemólogos. Con este planteamiento, esta comunidad instaura un programa latinoamericano el cual queda inserto en el mundo disciplinar con una identidad; al construir su propio conocimiento teórico le permite debatir con las teorías construidas por las culturas de tradición científica dominantes. Tal identidad se interpreta como una categoría permitiéndole así enfrentar dicho fenómeno (Cordero y Silva, 2012).

2.2.2. La exclusión

Soto (2010) caracteriza el dME como un sistema de razón que norma las maneras en que se relacionan los actores didácticos con el saber, se caracteriza por ser hegemónico, carente de marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático, utilitario, lineal y estático, que se ha centrado principalmente en los objetos matemáticos. El estudio de estas características permite identificar el fenómeno: la exclusión.

Soto (2010) reporta en su investigación un ejemplo donde analiza el discurso matemático escolar que emerje el conocimiento de la regla de L’Hôpital. Señala que la *obra de L’Hôpital está fuertemente influenciada por el cálculo leibniziano, los infinitesimales y la noción de diferencial así como del análisis cartesiano, es decir, del estudio de las curvas mediante métodos algebraicos* (Soto, 2010, p. 83). Este dato es de gran relevancia ya que indica el estudio de las curvas y la propuesta realizada por L’Hôpital que es de carácter gráfico, a diferencia del discurso matemático escolar que está presente hoy día. El actual discurso presenta la propuesta de L´Hôpital como una regla utilitaria, donde el objeto matemático es una herramienta para resolver límites indeterminados, todo ello basado en definiciones y corolarios; además que en su mayoría se reduce a un procedimiento algebraico hallando el límite de las

[14] El nombre de Matemática Educativa da a nuestra disciplina una ubicación geográfica y conceptual: en el mundo anglosajón, el nombre que le han dado a la práctica social asociada es el de Mathematics Education, mientras que en la Europa continental le han llamado Didáctica de las Matemáticas, Didactique des Mathématiques, didaktik der Mathematik, por citar algunas de las escuelas más dinámicas (Cantoral y Farfán, 2003).

derivadas, donde el alumno muchas veces aplica la fórmula sin saber el por qué, en otras palabras, no es parte de la construcción de dicha regla.

El dME asociado al teorema de L'Hôpital muestra la necesidad de marcos de referencia que obliguen a resignificar la matemática escolar. Es necesario considerar explicaciones, además de aquellas que son desde la matemática misma, de otros campos del conocimiento a los cuales la matemática responde. *Es preciso rescatar argumentaciones que sean intrínsecas a la actividad humana, a las prácticas sociales, por ejemplo, graficación o predicción de fenómenos situados* (Cordero et al, 2015, p. 84).

El reconocer que la matemática vive en otros contextos conlleva a desarrollar investigación sobre los usos de los conocimientos en esos contextos; permitiendo así abrir *un abanico de significados, argumentaciones y procedimientos que ayuden para significar el conocimiento matemático* (Cordero et al, 2015, p. 71).

2.2.3. La opacidad

Cordero señala la existencia de dos epistemologías: la de la vida y la de la matemática escolar. La sociedad ha legitimado la de la escuela, sin embargo, esto no quiere decir que la epistemología de la vida no tenga importancia, ¿cómo hacerlas dialogar? En otras palabras, *la matemática escolar opaca la vida cotidiana y por consiguiente, el conocimiento del cotidiano se encuentra opaco en los marcos de referencia de la matemática (MR) escolar* (Gómez, et al., 2014, p. 1462).

El fenómeno de opacidad del conocimiento de la vida cotidiana es la falta de consideración de argumentos del cotidiano cercanos al conocimiento matemático funcional en los MR para la matemática escolar (Gómez, 2013; Gómez y Cordero, 2013; Gómez, et al., 2014).

El actual dME considera la matemática como *ente* objetivo, abstracto y generalizable, sin múltiples significados, sin desarrollo histórico, ni funcionalidad y mucho menos de manera transversal y multidisciplinar. Es decir, no considera la pluralidad epistemológica.

Para modificar el dME, es necesario desarrollar una pluralidad epistemológica en la cual se incluyan *argumentos de las diferentes disciplinas de conocimiento, argumentos del cotidiano del ciudadano, argumentos histórico-epistemológicos de conocimiento, de tal manera que no sólo se reflexione alrededor de cómo y qué conocimiento matemático enseñar sino también incluir el para qué y por supuesto, para quien; es decir, incluir al sujeto en la construcción de su conocimiento* (Cordero et al, 2015, de. 92), (Figura 2.2).

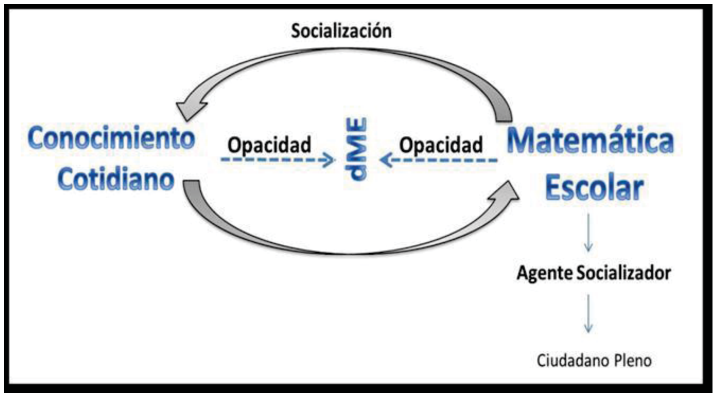


Figura 2.2 El fenómeno de la opacidad y la socialización del conocimiento matemático (Gómez, 2015, p.31).

El diagrama propuesto en Gómez ilustra el fenómeno de opacidad entre la matemática escolar y el conocimiento del cotidiano, para poder atender dicho fenómeno la socialización juega un rol importante, la idea es que se genere algo cíclico para que funcione el sistema educativo, esto a través de la socialización (Gómez y Cordero 2013, Cordero, et al., 2015). Por un lado, el ciudadano debe hacer del conocimiento matemático instrumento para su vida cotidiana, ya sea profesional o cultural y contribuir socialmente; sin embargo, el dME genera cierta opacidad de los argumentos del conocimiento en ambos escenarios. *Pareciera que se le exige a ese ciudadano dejar su cotidiano fuera de la clase para no ser tomado en consideración en la construcción de su propio conocimiento matemático* (Cordero et al, 2015, p. 96).

Gómez (2015) señala que el fenómeno de opacidad nos alerta a considerar los argumentos del cotidiano para los marcos de referencia de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar, ya que este fenómeno conlleva negar una epistemología plural del conocimiento; en otras palabras, la autora resalta la necesidad de hacer visibles los usos del conocimiento matemático.

En resumen, hay dos puntos que hay que destacar: la relación entre la educación y la vida, y el rol de la socialización. Respecto a esto, Cordero *et al.* (2015) afirman que las sociedades por medio de una reciprocidad epistemológica del conocimiento logran desarrollarse en sociedad, es decir, se condicionan a un proceso socialización. Además, el dME al normar la matemática escolar, provoca que ésta opaque lo matemático, por lo que enfatizan la necesidad de rediseñar el dME rescatando el proceso de socialización de conocimiento para así minimizar el fenómeno de opacidad.

2.3. Funcionalidad

En Cordero, et al. 2015, se puede ver una reflexión respecto a cómo los modelos educativos se han centrado a atender al conocimiento desde los conceptos, acorde con ello los currículos atienden los conceptos soslayando en gran medida los usos. Lo anterior, trae como consecuencia la falta de un referente específico para hablar de una funcionalidad del conocimiento. Sin el conocimiento funcional no podríamos crecer como seres humanos*, de alguna manera lo funcional conlleva sentir conocimiento, éste nutre y ayuda percibir una realidad diferente, mejora la sensibilidad y a su vez nos hace mejores personas* (Cordero et al, 2015, p. 22).

La funcionalidad del conocimiento matemático se contrapone a lo utilitario *en el sentido que el conocimiento emerge, vive y se transforma en una situación y contexto específico; es decir, su aplicabilidad es intrínseca al fenómeno.* A diferencia del dME que prevalece hoy día, donde se presentan las nociones para posteriormente aplicarlas a un contexto, la perspectiva Socioepistemológica busca *resaltar las argumentaciones del conocimiento que subyacen en una práctica particular y luego diseñar situaciones por comunidades específicas; en otras palabras, resignificamos a partir de los usos el conocimiento matemático* (Cordero et al, 2015, p. 70).

Algunos ejemplos de lo anterior se pueden encontrar en las investigaciones que consideran los funcionamientos y formas de las gráficas en una situación específica, proporcionando categorías de uso de la gráfica de la función (Flores, 2005; Cen, 2006; Cordero y Flores 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Morales y Cordero, 2014). En estos trabajos el uso del conocimiento matemático tiene la función de reflejar, tanto los procesos institucionales, como el de ser un mecanismo de construcción de conocimiento en una situación específica; además, dan evidencias, por una parte, de cómo el uso de la gráfica tiene un desarrollo al paso de la experiencia escolar, y por otra parte, de cómo los distintos funcionamientos y formas de las gráficas dependen de la situación específica.

Con lo anterior se evidencia el universo gráfico con el cual cuentan los estudiantes que les permite construir conocimiento, sin embargo, el dME no provee marcos de referencia que permita resignificar su conocimiento. Para lo anterior se propone un rediseño del dME (RdME).

Otras investigaciones que aportan en la misma dirección y considerando otros dominios son el de Lara (2007) la mecánica de fluidos, en un estudio a través de los libros de textos, Parra (2008) analiza la función argumentativa matemática en una situación relacionada a la conservación de la masa en la ingeniería. Por otra parte, Briceño (2008) enfoca la mirada hacia la construcción de conocimiento de los individuos, a partir del análisis de la producción matemática en una situación de modelación. Es decir, como indica García (2008), estas investigaciones muestran la necesidad de erigir nuevos constructos teóricos que permitan la articulación de los conocimientos en un estatus funcional.

Coincidimos con Cordero (2013) en que es necesario reconocer la matemática que se usa en otros dominios, aquella donde la obra matemática no es su objeto de estudio, pero se usa para ciertas explicaciones de su trabajo, y se destaca lo funcional.

El rescatar argumentos en diferentes escenarios provee elementos para formular MR que reconocen la pluralidad epistemológica de la matemática. Cordero (2001) señala que los marcos, se convino presentarlos en términos de situaciones: variación, transformación y aproximación; cada situación compone *un marco epistemológico del* *cálculo, respectivamente* (2001, p. 114); la Investigación desarrollada por Del Valle (2015) incorpora un nuevo MR que se presenta como una situación de selección.

Cada una de estas construcciones tienen asociados sus significaciones, procedimientos, instrumento útil al humano y argumentos: *La argumentación es la síntesis de la articulación de los elementos, pero al mismo tiempo es el hilo conductor, el eje de construcción* (Suárez, 2014, p.60).

Una socioepistemología del Cálculo y del Análisis

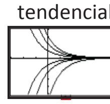
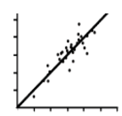
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	VARIACIÓN	TRANSFORMACIÓN	APROXIMACIÓN	SELECCIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación/ Resignificaciones	Predicción $E_0+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\dots$	Optimización 

Figura 2.3 Una Socioepistemología del Cálculo y el Análisis
(Cordero, 2008, p.282; Del Valle, 2015, p.84).

Esta epistemología pretende rediseñar el dME (Figura 2.3), promoviendo un discurso basado en aquellos MR que expresan el cotidiano de la gente que usa el conocimiento del cálculo y el análisis en situaciones específicas como la variación, transformación y aproximación (Morales y Cordero, 2014).

Es importante mencionar que estos elementos dependen de cada situación planteada. Por ejemplo, el Marco de Referencia de los usos de la optimización, la situación de selección propuesta por Del Valle (2015) busca distinguir cualidades a través de patrones de adaptación, dichas cualidades dependen de la tendencia hacia lo estable.

2.4. Usos de gráficas

2.4.1. Argumentación gráfica

La diversidad de trabajos realizados con el enfoque Socioepistemólogico, ha generado epistemologías que no centran su atención en los conceptos matemáticos. Un par de ejemplos de lo anterior son los siguientes: Domínguez (2003) trata con la situación de lo asintótico, en vez de la función asintótica; Rosado (2004) trata con la linealidad del polinomio, en vez de la derivada. Esto conllevó formular marcos de referencia que precisan un conocimiento funcional, dando un estatus a la argumentación gráfica como producto de la actividad humana para resignificar el conocimiento matemático en cuestión (Cordero y Silva, 2012, p.310).

De acuerdo con Morales et al. (2012) se da poca importancia o no se reconoce a la argumentación gráfica en el dME, esto a diferencia del estatus que posee en el aprendizaje de la física, ya que *se considera como una herramienta muy útil que permite poner los conocimientos en juego en un nivel funcional* (p. 239).

Asumimos como hipótesis que la argumentación gráfica genera conocimiento matemático. Sabemos que ésta no se entiende como un concepto, pero sí como un saber matemático por lo que requiere de cierto estatus en el discurso matemático escolar, que hoy no lo tiene porque está opaco, la epistemología que predomina no permite mostrar este saber. Desde esta postura es que se pretende dar evidencia que la argumentación gráfica habita en diferentes comunidades de conocimiento a nivel funcional. La importancia de tener presente aquello, es que podemos encontrar elementos importantes para ser incorporados en el rediseño del dME.

2.4.2. Modelación-graficación

El trabajo realizado por Suárez (2008) le permitió formular una epistemología en la cual se articulan la modelación, la graficación y la tecnología; realiza un diseño de situación de modelación en el cual el uso de las gráficas se favorece y analiza las producciones matemáticas de estudiantes de bachillerato a través del debate entre funcionamiento y forma; la situación planteada permite la construcción de conocimiento a través de la modelación y la simulación del movimiento. Se enfoca en el conocimiento relacionado a la modelación gráfica del cambio y la variación, en particular a la modelación del movimiento.

El enfoque Socioepistemológico permitió obtener una caracterización epistemológica subyacente al uso de las gráficas en la modelación del movimiento. Esta epistemología acuña el binomio modelación-graficación, el cual expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en una situación específica. Se caracteriza por tres elementos:

- Las realizaciones múltiples al graficar (Figura 2.4)

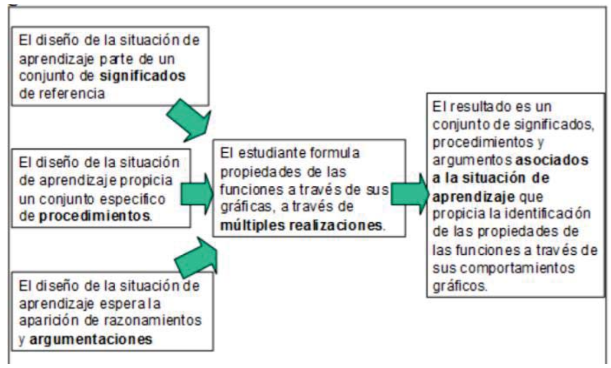


Figura 2.4 Elementos de un diseño de situación con múltiples realizaciones (Suárez, 2014, p. 72).

- Realización de ajustes en una estructura para construir un patrón deseable
- La graficación es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y la argumentación. En cuanto a la argumentación, ésta debe estar compuesta por significados, procedimientos, procesos.

La graficación puede potenciarse más si se considera en sí misma una modelación. Suárez y Cordero (2008) destacan las características siguientes: se obtienen a partir de una simulación que hace ajustes en su estructura para alcanzar un resultado deseable en la gráfica y lleva a cabo múltiples realizaciones; el carácter que posee es dinámico lo cual permite la creación de modelos gráficos que se transforman en argumentos para describir movimiento; favorece la búsqueda de explicaciones y acentúa los comportamientos invariantes en las situaciones.

El análisis realizado por Suárez permitió identificar aspectos distintivos en la modelación del cambio, en cuanto a sus aspectos de uso de las gráficas, a lo que logran los estudiantes en cuanto a su funcionamiento y forma. Todo lo anterior permite integrar los elementos nucleares en la modelación-graficación en el siguiente diagrama (Figura 2.5):

Figura 2.5 Elementos nucleares del binomio Modelación-Graficación (Suárez y Cordero, 2008, p. 56).

En el libro “Modelación-graficación para la matemática escolar”, Suárez (2014) provee de un ejemplo específico que contribuye a la conformación de un marco de referencia en el cual se favorece la justificación funcional, en él se da ejemplos de la modelación del movimiento en un ambiente tecnológico, en el cual se resignifica la variación con el funcionamiento y la forma del uso de las gráficas al reconocer patrones con múltiples realizaciones.

Los trabajos desarrollados por Suárez y Cordero (2008, 2010) dan muestra de las Situaciones de Modelación de Movimiento (SMM). El diseño de situación vincula la modelación y la graficación, a través de relacionar los significados, los procedimientos y los argumentos.

Una de las situaciones (Suárez y Cordero, 2008) se llevó a cabo con estudiantes de bachillerato mexicano (15-18 años). Se requirió de un espacio físico, materiales e instrumentos tecnológicos (Sensores de movimiento y calculadoras graficadoras). La situación se llevó a cabo con equipos de tres o cuatro estudiantes. Se les presenta la siguiente secuencia de tareas:

S1. Sesión 1. -Semana 1 Describir gráficamente el descenso de temperatura de un cuerpo que está previamente calentado a 30 grados centígrados y se retira la fuente de calor.

S2. Sesión 2. -Semana 2 Describir gráficamente el movimiento de un balón que 1) cae libremente, 2) se tira verticalmente hacia arriba, 3) se tira verticalmente hacia abajo con rebote.

S3. Sesión 3. -Semana 3 Describir gráficamente el movimiento de una persona que se aleja 500 metros de un punto de partida para regresar a él después de 9 minutos de recorrido. Durante el trayecto se detiene cuatro minutos.

S4. Sesión 4. -Semana 4 Describir gráficamente el movimiento de un elevador de un edificio habitacional a lo largo día cotidiano.

El análisis de los datos permitió reconocer que los estudiantes identifican intervalos de cambios de velocidad, con respecto a la pendiente que la inclinación de una recta se encuentra ligada a la velocidad, permite una transición entre diferentes representaciones como la verbal, la gráfica y la de la simulación. De acuerdo con Suárez y Cordero (2008), en esta experiencia particular, los estudiantes tuvieron una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, donde pudieron explorar y proveer explicaciones de lo que ocurre con la situación (Suárez y Cordero, 2008).

Los autores llevaron a cabo diversas situaciones de movimiento en las cuales exploraron el desempeño de los estudiantes y las analizaron en términos de los significados, los procedimientos y los argumentos. El diseño de la actividad de aprendizaje tiene la trayectoria de construcción siguiente (Suárez y Cordero, 2008, p.57), (Figura 2.6):

1. *Planteamiento de una* ***situación***
2. *Descripción a partir de la* ***modelación*** *de gráficas*
3. *Análisis a partir de la* ***simulación*** *de diversas características de la situación*
4. *Regreso a la* ***situación*** *de partida*

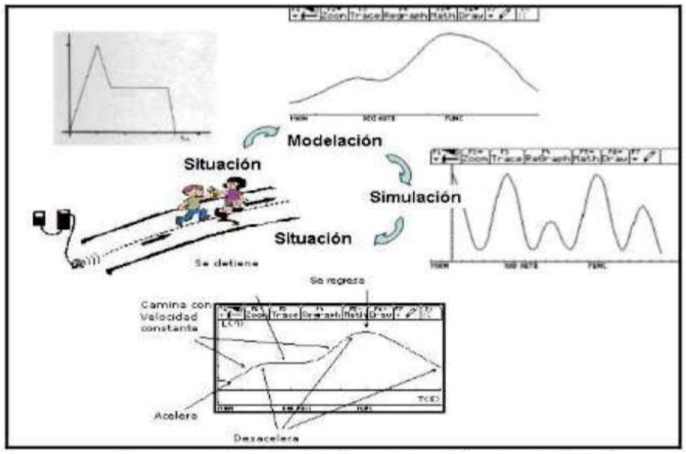


Figura 2.6 Ciclo de Situación-Modelación-Simulación-Situación.

Una Situación de Modelación del Movimiento propicia una resignificación de la variación. Suárez y Cordero (2008) identificaron que las actividades de graficación con tecnología *potencian el surgimiento de nuevos significados, procedimientos y argumentos* (p. 57).

De acuerdo con lo anterior, podemos repensar respecto al discurso existente en el aula, el cual debe cambiar; es decir, tenemos que rediseñar el discurso del aula respecto al conocimiento escolar con que los estudiantes universitarios se enfrentan en el área profesional, debido a que la formación universitaria del profesional es fundamental. El incorporar elementos tecnológicos a las aulas puede contribuir a los rediseños que permitan el surgimiento de nuevos significados, procedimientos y argumentos que contribuyan un conocimiento funcional.

Este trabajo nos provee de aspectos teóricos para analizar el uso de las gráficas y su funcionalidad en una situación específica y en una comunidad en particular.

2.5. La elección del marco teórico

Esta teoría responde a la problemática que visualizamos hoy día: necesidad de una relación recíproca entre la matemática escolar y una comunidad de conocimiento específica. Además, este enfoque permite llamar la atención a los ambientes no escolares en los cuales surjan saberes matemáticos y, así mismo, determinar cuál es la práctica que hace que emerja ese saber y no otro. Debido a lo anterior, existe una gran variedad de trabajos realizados bajo este enfoque; algunos de ellos han estado orientados al nivel universitario y su relación con el área profesional, (Ariza, y LLinares, 2009; Córdoba, 2011; Ulloa, 2013; Gómez, 2015). Estas investigaciones han dado evidencia de la falta de conexión de los saberes enseñados en el aula de matemáticas con los conocimientos empleados en el área profesional; el conocimiento se vuelve utilitario en vez de funcional, esto se debe a la ausencia de marcos de referencia (Cordero y Flores, 2007).

Es en el cotidiano de otros dominios donde podemos encontrar elementos de cómo el individuo usa y expresa su conocimiento, además de generar argumentos que dan evidencia del conocimiento funcional. Es decir, lo que interesa es reconocer el conocimiento que la comunidad tiene, lo que dice y hace con su conocimiento.

Es importante cuestionarse cómo se usa el conocimiento matemático en la práctica laboral, donde su objetivo no es aportar al desarrollo de la disciplina matemática sino contribuir al desarrollo de la sociedad resolviendo o anticipándose a problemas que la atañen directamente. Posiblemente no hay una epistemología intencional de ser enseñado y de ser aprendido, sino más bien, podríamos decir, una epistemología al servicio de una tarea específica.

Ahora, nuestra labor como investigadores bajo esta perspectiva es proponer actividades o situaciones que puedan ser llevadas al aula en las cuales se realce el rol de la práctica social como fuente de construcción de conocimientos matemáticos.

Cantoral (2013) realiza un cuestionamiento "¿Que le debe la producción del saber a la experiencia y al contexto?", esto surge al analizar obras matemáticas como fuente original de saber. De manera particular, nos hemos cuestionado, desde el rol de un Físico investigador, ¿Cómo su experiencia y su contexto aportan a la construcción del conocimiento matemático?, de manera más específica, ¿Cómo usa las gráficas?

Esta investigación pretende contribuir con un marco de referencia en el cual se pueda considerar el cotidiano como una fuente de saberes, el cual, a través de su experiencia, usa el conocimiento de manera funcional. Nos centramos en una comunidad de conocimiento en la cual el uso de las gráficas no sea sólo utilitario. Tenemos el supuesto que en Física la gráfica la usan de manera funcional, así que nos hemos dado la tarea de investigar cuál es el rol de la gráfica en este dominio. En otras palabras, nuestro objetivo es tomar elementos del uso de gráficas de una comunidad de físicos y conectarla con la matemática escolar; como se mencionó anteriormente, el dME se está viendo afectado por los fenómenos de exclusión, adherencia y opacidad, y es una necesidad contribuir de alguna manera a su rediseño. Abordar la construcción de conocimiento matemático no sólo desde un único individuo, sino considerarlo como parte de comunidad, donde interviene tanto lo social y cultural.

Hablaremos de comunidad en términos del modelo propuesto por Cordero (2013), en el siguiente capítulo profundizaremos en cada uno de los elementos de dicho modelo.

Capítulo 3

El modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático en una comunidad de Físicos

Se destina este capítulo al modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático que plantea Cordero en su programa socioepistemológico. Nuestra investigación toma el caso específico de una *comunidad de Físicos* donde ahondamos en los constructos del modelo para caracterizarla y reconocer su especificidad.

3.1. Comunidad de Conocimiento Matemático

Para analizar el uso de conocimiento matemático en una comunidad de conocimiento primero hay que entender lo que concebiremos por Comunidad de Conocimiento (*C*C). Se considera que un individuo en relación con el conocimiento siempre es parte de una comunidad, esto es, si hay conocimiento se deduce que hay una comunidad que lo construye. En ese sentido, el individuo construye su conocimiento de una forma específica de manera que eso da muestra de lo propio de la comunidad.

Para poder caracterizar a una comunidad de conocimiento debemos detallar lo propio de ella, es decir su naturaleza, para ello se requiere del *constructo comunidad de conocimiento como una triada* C*C (reciprocidad, intimidad, localidad)* (Cordero, 2016a). Se reconocen estos tres elementos ligados al saber (Cordero 2016a; Cordero, Méndez, Parra y Pérez, 2014; Torres, 2013).

Además, se consideran dos aspectos que son ejes transversales para la explicación de los elementos: la *institucionalización* y la *identidad*. Estos elementos, en conjunto, formulan un modelo que ayuda a analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento en una situación específica (Figura 3.1).

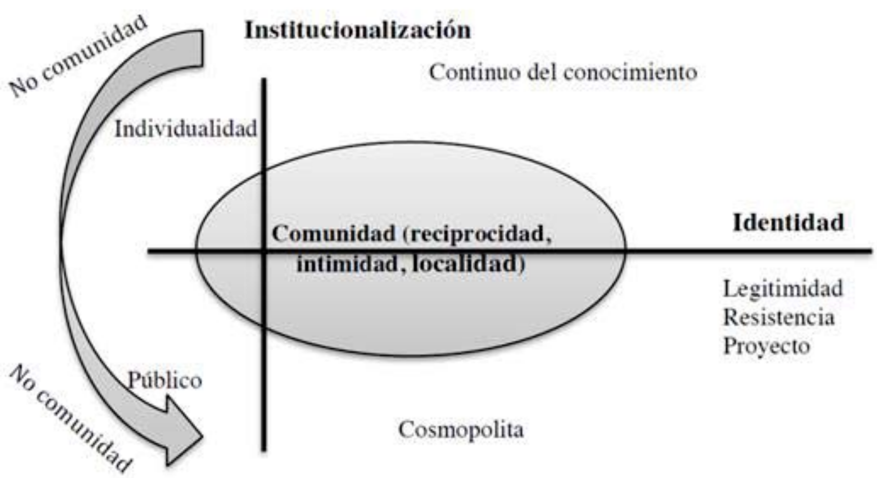


Figura 3.1 Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero 2016a).

A continuación, describiremos la comunidad de conocimiento a la cual estudiamos y detallaremos los elementos que menciona Cordero (2016a) en tres secciones. La primera entendiendo a la comunidad como una triada: reciprocidad, intimidad y localidad. La segunda en relación con el eje transversal: identidad, en que abordamos los momentos de legitimidad, resistencia y proyecto. La tercera en relación con el eje transversal: institucionalización, donde entra en juego la malla curricular y los libros de texto. Con esto ejemplificamos el modelo de Comunidad de Conocimiento en un caso particular.

Investigamos el uso de conocimiento matemático en una comunidad específica que está enfocada en su desarrollo. Distinguimos el trabajo del físico en dos escenarios: el trabajo como investigador, el cual se encuentra dentro de un marco disciplinar, su objetivo es aportar al desarrollo de la disciplina; pero también en el escenario escolar con la labor de docente, ya que su meta es contribuir al desarrollo de la sociedad resolviendo o anticipándose a problemas que involucran la enseñanza de la disciplina de la física. Nos interesa mirar cómo se construye conocimiento matemático dentro de una comunidad que no es propiamente matemática.

El uso del conocimiento en dichos escenarios nos permitirá ver la funcionalidad del conocimiento, en nuestro caso, el uso de gráficas y junto a ello la variación. Se verá la forma en la que vive tal conocimiento en un escenario del trabajo del físico articulado con una situación fuera de su cotidiano laboral, donde suceden cambios de situaciones para resignificar sus usos de gráficas; en el que se espera que el conocimiento matemático transforme su realidad y por tanto su práctica, es decir, esté integrado a su vida.

Con lo anterior es que se decidió la selección de físicos que cumplieran con los dos escenarios: investigador y docente. El trabajar en estos dos escenarios, ha permitido visualizar el rol que juega el tema de enseñanza de la disciplina, y esto se puede corroborar en sus investigaciones y proyectos enfocados al ámbito de la educación.

La Comunidad de Conocimiento Matemático de Físicos ($CCM_{Fís}$) que estudiamos se encuentra conformada por 5 profesores que trabajan en el Instituto de Física de una universidad chilena de Valparaíso, donde investigan en su disciplina y además realizan docencia en las carreras de licenciatura y pedagogía en Física. Nos interesa lo que el físico hace en su trabajo desde los roles que desempeña, como docente -cómo aborda y presentan las gráficas a sus estudiantes- desde su rol de investigador -qué papel desempeñan las gráficas en sus escritos ante la comunidad científica a la cual pertenecen-. En otras palabras, lo que nos incumbe es lo relacionado a qué hacen en su comunidad que pueda ser un aporte para el RdME.

A continuación, describiremos la comunidad de conocimiento a la cual estudiamos bajo el modelo que menciona Cordero (2016a) y detallaremos sus elementos con este caso en particular.

3.1.1. La Comunidad de Conocimiento Matemático de los Físicos. Un caso

a) Triada: Reciprocidad, Intimidad, Localidad

La Física se ocupa de los principios esenciales del Universo. Al inicio del libro "Física para ciencias e Ingeniería" Vol. 1 (Serway y Jewett, 2008) se señala a la física como el cimiento sobre el que se rigen las otras ciencias: geología, astronomía, biología y química. El autor resalta lo que considera la belleza de la física*: consiste en la* *simplicidad de sus principios cardinales y en la forma en que sólo un pequeño número de conceptos y modelos modifica y expande nuestra visión del mundo circundante* (p. 1).

Hablar de física newtoniana implica considerar al menos las siguientes áreas (Serway y Jewett, 2008):

1. Mecánica clásica, estudia el movimiento de los objetos que son grandes en relación con los átomos y se mueven con una rapidez mucho más lenta que la de la luz;

2. Relatividad, teoría que describe los objetos que se mueven con cualquier rapidez, incluso los que se aproximan a la rapidez de la luz;

3. Termodinámica, trata del calor, el trabajo, la temperatura y el comportamiento estadístico de los sistemas con gran número de partículas;

4. Electromagnetismo, le competen la electricidad, el magnetismo y los campos electromagnéticos;

5. Óptica, estudia el comportamiento de la luz y su interacción con los materiales;

6. Mecánica cuántica, un conjunto de teorías que conectan el comportamiento de la materia al nivel submicroscópico con las observaciones macroscópicas.

Es importante señalar que, los estudios y avances de la física no se limita a las áreas anteriormente mencionadas, la acotación realizada es sólo por indicar algunas.

La mecánica es uno de los primeros temas que se abordan al estudiar física, lo que puede verse en libros de texto (por ejemplo: Serway y Jewett, 2008; Tipens 2001; Tippler y Mosca, 2001). Su importancia radica en que sirve para describir muchos fenómenos naturales. Hemos acotado el estudio a la mecánica clásica, ya que puede considerarse trascendente para los estudiantes.

Es por ello la elección de físicos relacionados con la investigación que estén interesados en mecánica, esto debido al rol que desempeñan las gráficas en ese tópico, además de que ahí puede observarse la variación.

Como se indicó anteriormente, la comunidad estudiada está conformada por 5 profesores, sin embargo, nos centraremos en dos de ellos, ya que estos físicos son profesores de jornada completa en el Instituto de Física y creadores del Grupo de Tecnología Educativa (GTE) del Instituto de Física (2007). Con la creación del GTE se enfocaron a investigar en la enseñanza de la física de manera más específica, el proyecto La Galería de Galileo desempeña un rol importante.

Han publicado diversos artículos en revistas internacionales en educación y enseñanza de las ciencias; también, han recibido financiamiento por parte del gobierno para proyectos de investigación y de desarrollo enfocados en mejorar la docencia tanto universitaria como de enseñanza media.

Recordemos que de acuerdo con modelo de CCM no cualquier conjunto de personas juntas componen una comunidad, por lo que se propone distinguir a la comunidad de conocimiento de aspectos como la individualidad, lo público y la universalidad. En ese sentido son tres elementos que enmarcan el modelo y que detallaremos en la comunidad estudiada.

• **Reciprocidad.** El conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo.

Este elemento permite ver la relación que se crea en la comunidad, una relación en la que el beneficio y enriquecimiento es mutuo.

Dentro del GTE existe un compromiso académico preocupado por mejorar la docencia universitaria en la carrera de pedagogía en física, para ello el GTE, declara lo siguiente:

- Su objetivo se enfoca en mejorar la docencia y el perfil de egreso de los estudiantes de las carreras de licenciatura en Física y Pedagogía de Física.
- Han desarrollado materiales educativos que contribuyen a la enseñanza en dicha carrera o programa.
- Desarrollan experimentos de bajo costo y tecnologías que permitan medir y masificar el uso de estos experimentos en el laboratorio.
- Diseñan e investigan la eficacia del uso de las TICs como instrumento de laboratorio para superar las dificultades conceptuales en alumnos de cursos de física básica.
- Promover el uso de las TIC en la implementación de laboratorios interactivos e investigar los alcances de nuestra solución para la adquisición de coordenadas de objetos en movimiento, en el sistema educativo nacional.

El Grupo de Tecnología Educativa mantiene interacción académica con centros, grupos, redes o programas (dentro de Chile y con otras universidades de Estados Unidos y México) dedicados a la investigación formativa para mejorar la docencia, participando de manera colaborativa. Es decir, existe una relación tanto dentro como fuera del GTE en el que pone en juego los saberes; la existencia de una red y los frutos en esta relación da evidencia que existe un aporte de investigaciones, cursos y conocimientos que se comparten entre sí, y permiten generar nuevos saberes en la comunidad científica.

• **Intimidad**. Es el uso de conocimiento propio y privado que no es público.

La creación del propio grupo, identificarlos como GTE es parte del trabajo que han desarrollado y han conformado a lo largo del tiempo, el grupo consolida acciones en pos de su preocupación de dar una mejor explicación teórica cuando identifican errores en los textos, preocupándose en los conceptos básicos de Física.

• **Localidad.** El conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros.

Este elemento permite romper con la generalidad, y hablar de una comunidad específica. En este caso en particular, la comunidad que estudiamos pertenece al GTE, compuesto por cinco profesores de jornada completa en la universidad que laboran Este grupo, se formó por una necesidad que surgió durante su trabajo desarrollado en la universidad de integrar elementos tecnológicos y material (que algunas veces ellos mismos elaboran para el laboratorio) que tengan un enfoque educativo, no sólo para los estudiantes -en el caso de los estudiantes de pedagogía- que están formando sino para los futuros estudiantes que estos formarán. Se han preocupado de generar innovaciones para avanzar hacia una educación de mejor calidad, además, realizan publicaciones en revistas indexadas, presentan sus trabajos en congresos nacionales e internacionales y se adjudican proyectos tanto de la universidad como proyectos con financiamiento externo; esto es un dato relevante ya que indica una preocupación por el conocimiento. En la actualidad están en la búsqueda de un didacta de la Física que se integre al grupo.

De los dos físicos a los cuales se han observado en clases y realizado entrevistas, nos focalizaremos en uno de ellos como exponente relevante de la comunidad, quien es fundador del GTE, y lleva la dirección del grupo. El físico, quien será nuestro caso de estudio, se realizó una línea de tiempo para conocer lo que ha estado desarrollando, ésta incluye cuando comenzó su formación en Física (Licenciatura, Magister, Doctorado), algunos cargos académicos, formación del Grupo de Tecnología Educativa (GTE), algunos proyectos de investigación en los que colabora etc. Entre las investigaciones realizadas hay enfocadas a la enseñanza de ésta disciplina; además, se puede agregar que su labor como docente le ha permitido tomar cargos administrativos como Director de programas de Postgrado y, lo anterior les ha llevado, como grupo, a mirar con mayor detenimiento los libros de texto y así detectar algunos errores en estos; además, han estado involucrado con los planes de estudio, lo que ha permitido sugerir material como bibliografía y guías de estudio para las carreras de Física y Pedagogía en Física.

La relevancia de tomar y mirar con detenimiento un elemento de esta comunidad, se enmarca en el hecho de que, como individuos en algún momento de su formación académica y/o desempeño laboral coinciden en mirar, interesarse y trabajar en el mismo rumbo, fijarse una(s) meta(s) específicas.

A continuación, se presenta un cuadro con la información anterior (Figura 3.2):

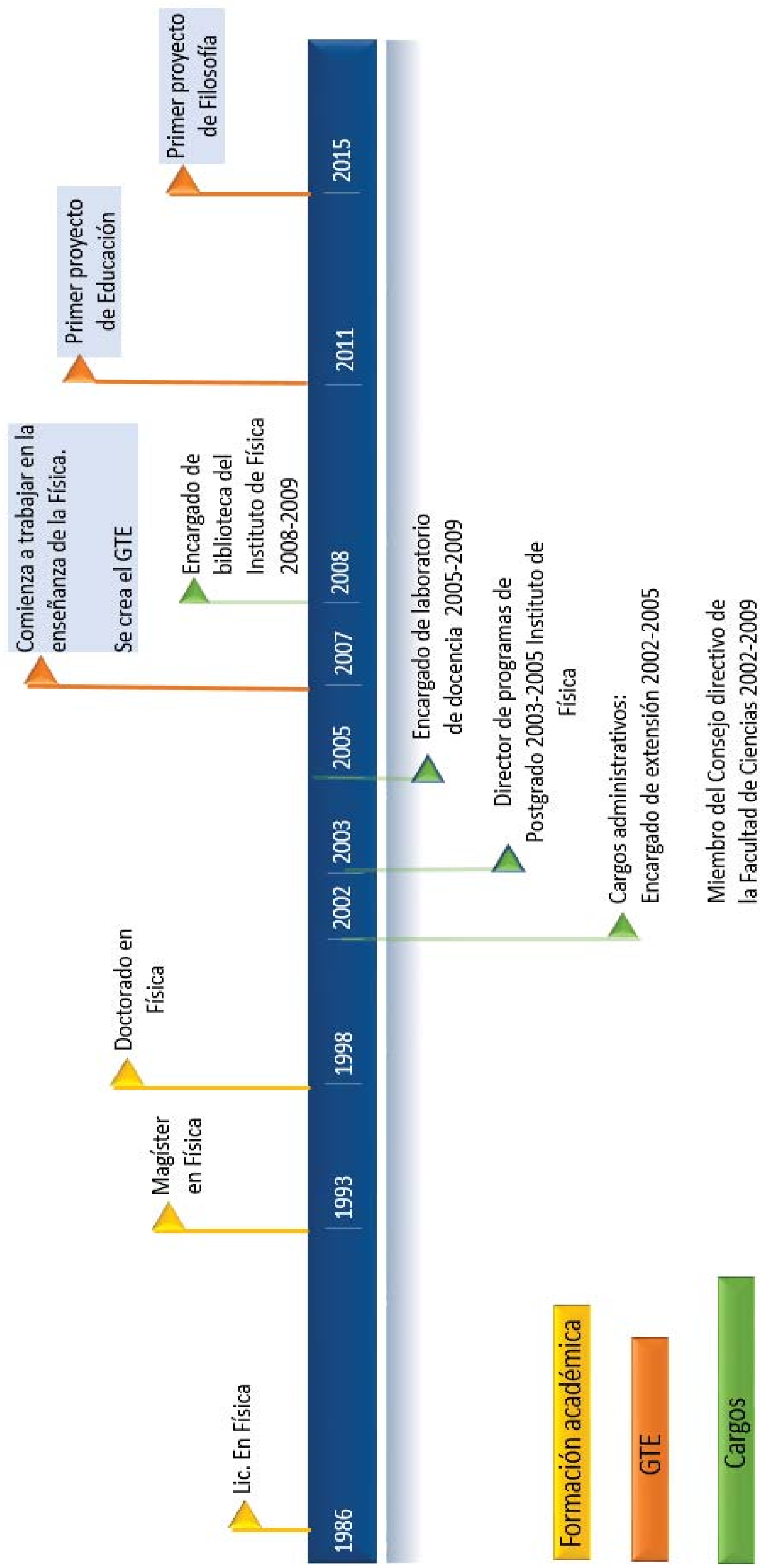


Figura 3.2 Línea de tiempo del académico Físico.

Los recuadros destacados con naranjo son parte de lo que el grupo de trabajo que esta comunidad han conformado.

En términos del componente teórico, el conocimiento es local, puede remitirnos a pensar en una ubicación geográfica, pero no debe reducirse a ello. El conocimiento generado por la comunidad se debe a la existencia de una coincidencia en ideas, trabajo u oficio, intereses, entre otros. Lo que permite notar que el conocimiento debe comunicarse de una comunidad a otra que compartan una misma jerga disciplinar.

b) Eje transversal: Momentos de Identidad

Una comunidad con adjetivo las distingue de otras, entonces se requiere de momentos de identidad: legitimidad, resistencia y proyecto. Así la identidad, con sus momentos, será otro eje transversal (Cordero, 2016a).

Es importante mencionar, que estos elementos no son separados, sino que de alguna manera convive uno con otro y también se encuentran de manera simultánea con los elementos de CCM.

Legitimidad

Una forma en que la CCM_{Fis} da evidencia que cree en lo que hace, y más aún valida lo que hace es a través de la investigación.

Entre los aspectos que trabajan como grupo se encuentran los siguientes:

- En su rol de investigadores, acuden a congresos de manera periódica, presentan talleres, dictan charlas y realizan publicaciones, además son parte de una red de investigadores tanto dentro y fuera de Chile.
- Como profesores, con la experiencia y los cargos adquiridos, han tenido la oportunidad de involucrarse en el proceso de modificación del plan de estudios. Permitiéndoles así sugerir la bibliografía recomendada a las carreras de licenciatura en Física y Pedagogía en Física.
- El grupo lleva trabajando desde 2007 con distintos proyectos, entre los que se pueden mencionar los siguientes (Tabla 3.1):

Tabla 3.1 Proyectos representativos del GTE

Explora-Conicyt 2007	Los Experimentos de Galileo en las Aulas de la Región de Valparaíso.
Mecesup 2008	Experimentos de Galileo: Formación a través de la indagación, innovación tecnológica aplicada a los cursos de Física de la universidad.
Tic Edu Fondef 2011-2012	La Galería de Galileo: Experimentos Interactivos de Física para la Enseñanza Media.
Fondecyt, Educación 2011-2013	Estudio de la efectividad del uso de la indagación y de videos de experimentos en el logro de un aprendizaje significativo de conceptos básicos de Cinemática y Dinámica.

Fondecyt, Educación 2015-2017	Estudio de la efectividad del uso de la indagación y videos en el logro de un aprendizaje significativo de conceptos básicos de electromagnetismo
Fondecyt, Educación 2015-2017	Mejorando las actitudes hacia la Ciencia en las asignaturas de formación inicial de futuros profesores de Física.
Fondecyt, Filosofía 2015-2018	Masa, emergencia y realismo estructural.

Se puede decir que el proyecto Explora- Conicyt 2007 forma un punto de inflexión en la creación del grupo, ya que dicho proyecto fue el que permitió comenzar y profundizar en la enseñanza de la Física, en particular de la Mecánica Newtoniana, en otras palabras, el proyecto La Galería de Galileo desempeña un rol importante. El fruto del proyecto consta de una serie de videos de experimentos de Física para la Enseñanza Media que cubre los contenidos de Física de 2° medio: El Movimiento, 3° medio: Mecánica, 3° medio: Fluidos. Se grabaron experimentos y se diseñaron guías de actividades para el alumno presentado a través de un "DVD La Galería de Galileo", el cual es de uso público y se encuentra disponible en el sitio www.GaleriaGalileo.cl (Vera, Rivera, Fuentes, 2013). Dicho material forma parte fundamental del curso de Mecánica Newtoniana para los alumnos de primer año de la carrera de Física de la universidad en la que trabajan, en donde los videos son usados en las clases de cátedra y las guías de carácter indagatorio son usadas en clases de cátedra y han sido el insumo básico para armar las guías de Laboratorio para este curso. Además, los autores consideran que dicho material puede ser *una posible columna vertebral para el desarrollo de una clase completa de dos horas pedagógicas, con la flexibilidad necesaria para que el docente pueda adaptar dichas actividades a su propia realidad* (Vera, Rivera, Fuentes, 2013, p.144).

Como grupo han diseñado material curricular que guíe al alumno en el análisis de situaciones experimentales planteadas por el profesor y al diseño de sus propias variaciones de éstas, todo esto dentro del marco teórico del constructivismo y poniendo un claro énfasis en la indagación por parte del estudiante. Además, afirman que el uso de la Indagación como metodología de trabajo con los alumnos fomenta el trabajo en equipo y el desarrollo de competencias transversales logrando así un aprendizaje significativo.

El trabajo desarrollado por el GTE ha dado fruto en diversas maneras, un punto a destacar es el rol de la investigación. Por lo tanto, el ser parte de una red de investigadores y dar a conocer lo que hacen es una manera de validar su trabajo, evidenciar y comunicar a la comunidad científica los avances de los trabajos que están desarrollando.

Resistencia

En cuanto a este punto, se puede indicar que los trabajos han llevado a debatir ciertos aspectos con otros colegas de otras comunidades. Podemos destacar el caso de las presiones negativas en un Sifón.

Por ejemplo, en Vera, Rivera, Romero y Villanueva, (2016), se hace referencia a la controversia sobre el mecanismo subyacente que explica el funcionamiento de un sifón.

Un sifón es un dispositivo que se usa para drenar un recipiente, con el agua subiendo dentro de una manguera en forma de U invertida y luego bajando hacia un punto de descarga situado debajo del nivel inicial del agua (Figura 3.3).

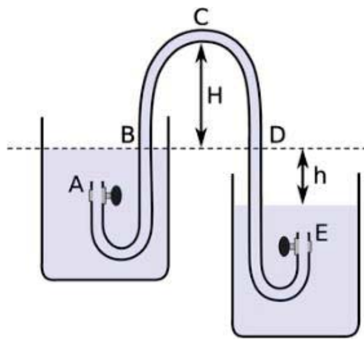


Figura 3.3 Diagrama de la disposición para el sifón utilizado en el experimento.

El principio de operación ha sido explicado desde los trabajos de Herón de Alejandría en sus tratados de Neumática hace unos dos mil años atrás. Vera *et al*., (2016) comentan lo que Herón explicó, esto es, que los sifones son impulsados por un desequilibrio de peso entre columnas de agua, en la actualidad existe un debate respecto si los sifones son impulsados por las diferencias de presión, o bien, por la fuerza de gravedad. Las discusiones respecto a la física de un sifón frecuentemente se refieren a conceptos como presiones negativas absolutas, la fuerza de la cohesión del líquido y la posibilidad de un sifón trabajando en vacío o en presencia de burbujas. El principio de funcionamiento del barómetro y la imposibilidad de bombear agua de pozos de más de 10,33 m. fue algo comprendido por Torricelli, siguiendo estas ideas, la construcción de un sifón que conduzca el agua pura a ascender más de 10,33 m sería imposible.

El trabajo de Vera *et al*., (2016) radica en que se informa del primer sifón que impulsa el agua con surfactante[15] a ascender más alto que el límite establecido por Torricelli. *Motivados por el surgimiento de la savia en los árboles, se construye un sifón de 15,4 m* (Figura 3.4) *que muestra que las presiones negativas absolutas no están prohibidas, que la cohesión juega un papel importante en la transmisión de fuerzas a través de un fluido y que los surfactantes pueden ayudar al transporte de agua en un régimen metaestable de presiones negativas* (Vera *et al.*, 2016, p. 1).

---

[15] Un **surfactante** es un elemento que actúa como detergente, emulsionante o humectante y que permite reducir la tensión superficial que existe en un fluido. Por lo general se trata de sustancias que ejercen influencia en la zona de contacto que se crea entre dos fases

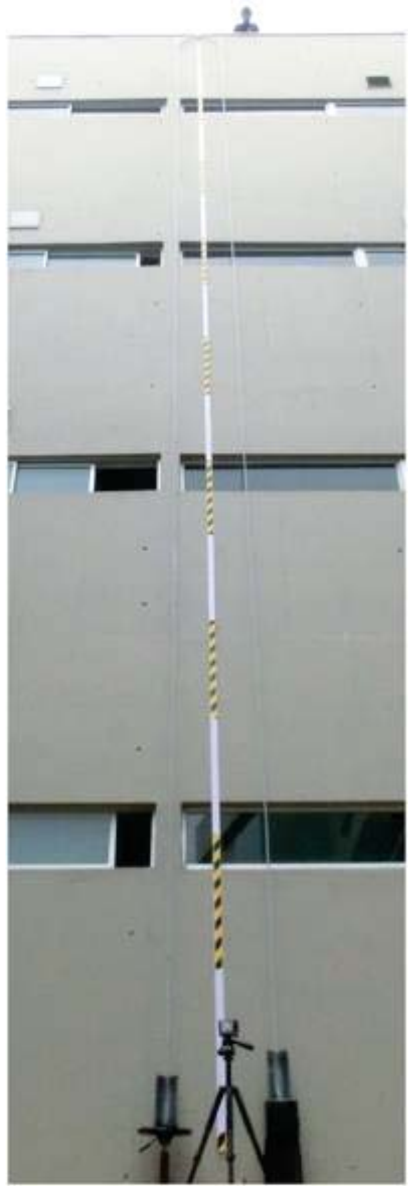


Figura 3.4 Fotografía del sifón de 15.4 metros.

Los autores señalan que, aunque su funcionamiento es muy simple es muy común que los profesores de física lo expliquen conceptualmente mal ya que se cree que es la diferencia de presión la que causa el movimiento del agua obligándola a subir por la manguera como se muestra en la Figura 3.3.

De acuerdo con lo que se reporta en el artículo, para los profesores es difícil darse cuenta de que es la fuerza de gravedad la que obliga al fluido a moverse. En el trabajo realizado con un alumno de Pedagogía en Física y con el nuevo miembro del grupo, se explica la causa del movimiento del agua, discuten la perspectiva histórica y además reportan en una revista de alto impacto el primer sifón que funciona levantando agua hasta una altura mayor a 10 metros cuando se suponía (según Torricelli) que esto era imposible. Este trabajo además es de mucha importancia para comprender como los árboles logran subir agua en regímenes de presión absoluta negativa.

Proyecto

Como grupo tienen un objetivo muy bien definido, el objetivo es llegar a la enseñanza básica, motivar a los estudiantes a estudiar y que se interesen por la ciencia, de manera particular por la física. Para lograr ese objetivo, se han enfocado en la formación de los futuros profesores de física, es decir en Pedagogía de Física.

Ahora bien, si retomamos el modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático propuesto por Cordero (2016a), e integramos los elementos que distinguen la comunidad estudiada, por lo tanto tenemos un ejemplo particular la cual se puede describir en la Figura 3.5

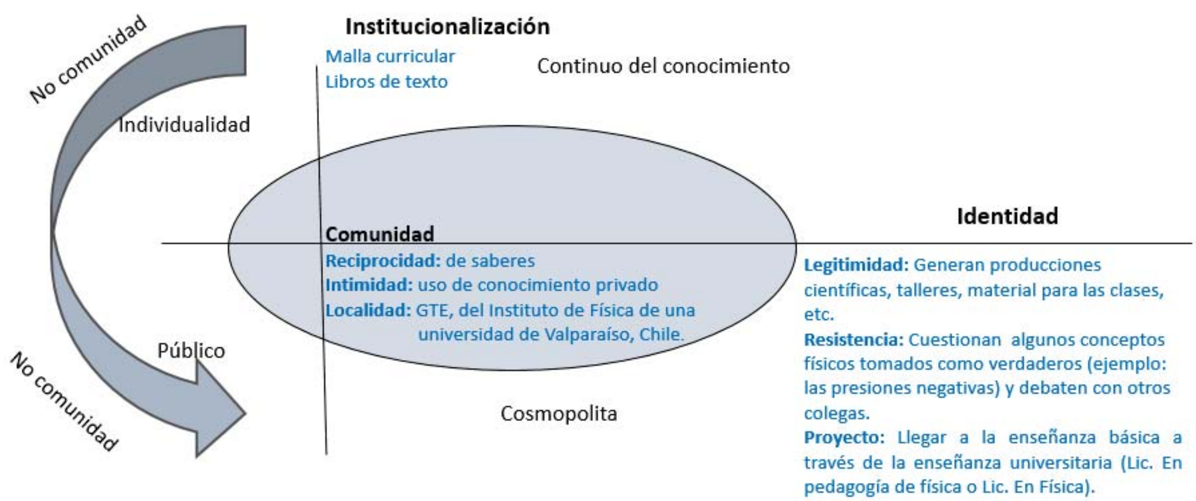


Figura 3.5 Comunidad de Conocimiento Matemático, el caso de una comunidad de Físicos.

c) Otro eje transversal: Institucionalización

El otro eje transversal está relacionado con la continuidad del conocimiento matemático: la institucionalización, para ello se requiere apreciar el uso del conocimiento matemático al seno de una comunidad. Cordero (2016a) indica que para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, al seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, la institucionalización como un eje transversal (Cordero, 2016a).

Para poder analizar este eje, en nuestro caso, nos centraremos en el uso del conocimiento matemático, en particular el uso de las gráficas, aspecto de importancia en esta disciplina. Para atender a este propósito presentamos una mirada a ciertos textos respecto al tipo de gráficas que aparecen y a la malla curricular de la carrera de Pedagogía en Física para ubicar los cursos de mecánica.

3.1.1.c.1. Una breve mirada a unos libros de texto

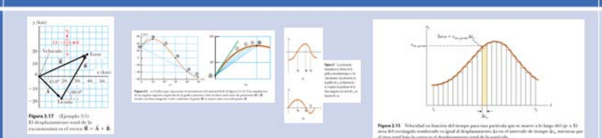
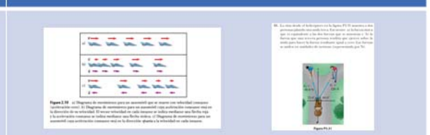
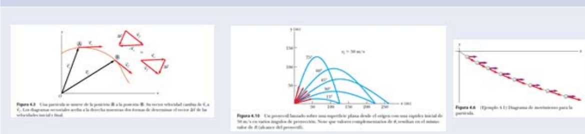
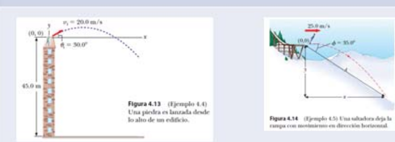
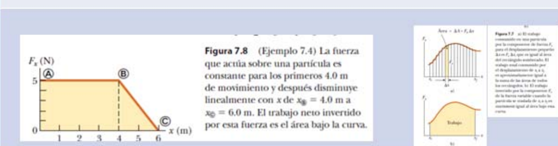
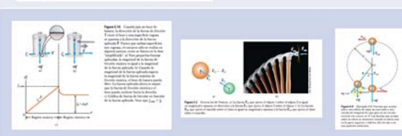
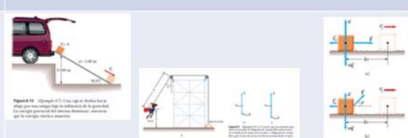
Lo que nos lleva a revisar los textos de Física es el interés en analizar cómo aparecen las gráficas en ellos. El porqué de estos textos y no otros, es porque uno de los académicos de Física menciona, desde su experiencia, el libro de Serway y Jewett (2008) es el más adecuado; incluso los programas se modificaron sugiriendo esta bibliografía. Además, se consulta por los textos de Física con mayor demanda en la biblioteca.

La revisión de libros de texto de Física se llevó a cabo en un campus de la Facultad de Ciencias de una universidad chilena de Valparaíso. Los libros más solicitados en la Biblioteca de dicho campus son:

- Serway, R., Jewett, J., (2008). Física para ciencias e ingenierías, vol. 1 y 2, 7ª. Ed. México: Thomson.
- Tipler, P., Mosca, G., (2010). Física para ciencia y tecnología. vol. 1 y 2 Barcelona: Reverté.
- Tippens, P., (2001). Física. Conceptos y aplicaciones 6ª. Ed. México: Mc Graw hill.

El más utilizado es el texto de Serway y Jewett (2008). La revisión mostró una gran variedad de gráficas. A continuación, se muestran algunas de las gráficas encontradas en Mecánica y que hemos clasificado en dos tipos: gráficas cartesianas (velocidad, aceleración, vectores) y diagramas del fenómeno (icónicas) (Tabla 3.2).

Tabla 3.2 Gráficas observadas en libros de texto de Física.

	Cartesianas	Diagramas, icónicas
Movimiento en una dimensión		
Movimiento en dos dimensiones		
Leyes de Movimiento, Energía		
Conservación de la energía		

Esta revisión nos permitió hallar una gran cantidad de gráficas cartesianas, pero surgieron aquellas que en muchas ocasiones se consideran esquemas o figuras. Lo anterior nos llevó a cuestionarnos ¿qué rol desempeñan lo icónico para un físico?

En el capítulo 1, se destinó un apartado relacionado a lo icónico de las gráficas (ver Flores, 2005; Cordero y Flores, 2007; Zaldívar, 2010; Zaldívar y Cordero, 2010; Carrasco, 2011, 2014). Anteriormente se destacó, el hecho de que lo icónico no es exclusivo de un nivel educativo específico. En el caso de la Física lo icónico desempeña un rol importante, y es posible percatarse de ello en los libros de texto, en los artículos relacionados a la disciplina e incluso en las clases.

Para el estudio del uso de las gráficas en esta comunidad nos apoyamos en el trabajo realizado por Suárez (2008, 2014), Suárez y Cordero (2010) ya que aporta en el desarrollo de razonamientos y argumentaciones de carácter funcional. Profundizaremos en este punto en el capítulo 4, donde podemos caracterizar algunos usos de las gráficas encontrados en los libros de texto.

3.1.1.c.2. Malla Curricular

Dado que las clases observadas fueron del grupo de Pedagogía en Física, nos enfocaremos a la malla curricular de dicha carrera (Anexo A).

Esta carrera tiene un plan de estudios de 9 semestres en total, donde en el último semestre llevan los ramos de Trabajo de titulación y Práctica Docente final.

Los ramos de Mecánica se llevan a cabo en los semestres 1, 2 y 4.

En cuanto a los ramos de Cálculo son los semestres 1,2, 3.

Por lo que, presentamos los semestres 1,2,3,4 en la siguiente Tabla 3.4 junto con los ramos enfocados en Matemáticas y Física respectivamente.

Tabla 3.4. Malla curricular

Primer año		Segundo año	
1 Semestre	**2 Semestre**	**3 Semestre**	**4 Semestre**
Introducción a la Física Historia de la Física Cálculo 1 Álgebra	Física Experimental Mecánica Física General Mecánica Cálculo 2 Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales	Cálculo 3 Física Experimental Termodinámica Física General Termodinámica	Física Experimental Electromagnetismo Física General Electromagnetismo Mecánica Clásica

En el programa de Cálculo 1 (Anexo B), los objetivos generales son los siguientes:

- Entregar a los estudiantes las herramientas fundamentales del Cálculo Diferencial en una variable.
- Desarrollar en los estudiantes la capacidad necesaria para afrontar situaciones problemáticas de variada complejidad.

Los objetivos específicos son: Al finalizar el curso el estudiante deberá ser capaz de manejar adecuadamente los tópicos relacionados con:

- Funciones: propiedades, clasificación;
- Encontrar los dominio y recorridos, especificar cuando una función continua
- Calcular límites de cualquier función dada
- Analizar la existencia de las derivadas considerando las definiciones y propiedades ligadas
- Calcular derivadas aplicando las reglas del álgebra de derivadas
- Aplicar la derivada a problemas de máximo o mínimo, análisis de curvas, resolver problemas de planteo
- Aplicar la derivada a algunos problemas específicos en Física, etc.

Los temas son:

1. Números Reales
2. Relaciones y Funciones
3. Límites y continuidad de funciones reales
4. Derivación

Es decir, 5 de 7 de los objetivos específicos están relacionados con la derivada, lo cual indica la relevancia de este tema. Sin embargo, la derivada es el último tema del semestre.

Capítulo 4

Reflexión de una epistemología del uso de las gráficas y aspectos metodológicos

En este capítulo se abordan elementos que se consideran relevantes en esta investigación: la noción de variación ligada a la derivada como aspecto central en lo que se observa de la comunidad de físicos estudiada, se reflexiona sobre algunas investigaciones de las gráficas en física y una epistemología del uso de las gráficas. Concluimos con los aspectos metodológicos empleados en la investigación. Se señala la elección de un estudio de caso intrínseco en conjunto con el esquema metodológico de la Socioepistemología.

4.1. La derivada como noción de variación

Dada la relevancia de la derivada para el curso de Cálculo 1 y la relación de esta con la Mecánica, en particular con velocidad, consideramos necesario hablar de la noción de variación ligada a la derivada como aspecto central que emerge de la comunidad de físicos investigada.

El rol de la derivada en los diferentes dominios es de gran importancia debido a que tiene diversas aplicaciones. En particular observamos que este aspecto es de importancia y quizás no se destaca tanto en las clases de matemáticas que se realizan para esta disciplina.

En Cantoral (2013) se señala que el modelo de D'Alambert es una propuesta que no tuvo fines didácticos, sin embargo, se usa para introducir la derivada. Dicha explicación construye una sucesión de secantes cuya pendiente converja a la recta tangente en P. Es decir, la tangente es el límite de las secantes tal como se puede ver en la Figura 4.1, como se señala en Spivak (1992, p. 199).

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

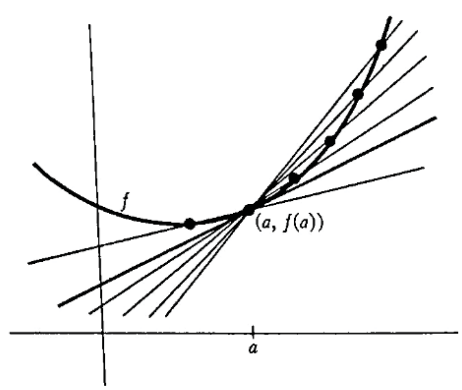


Figura 4.1 Ejemplo de límite dado en Spivak (1992, p. 200).

Esto ocasiona ciertas dificultades en los alumnos y es debido a que se conserva la idea de la matemática griega que asume que la recta es (toda ella) tangente a una curva si la toca, pero no la corta. *Esta concepción deviene obstáculo cuando se quiere tratar a la condición de tangencia localmente, así como la necesidad de mirar* *a la tangente dinámicamente y no estáticamente como en la geometría griega* (Cantoral y Mirón 2000, p. 270).

A continuación, se puede ver, que esto da pie a la definición de derivada de f en *x* (Spivak, 1992, p. 201):

La función f es **derivable en *a*** si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe.}$$

En este caso el límite se designa por $\boldsymbol{f'(a)}$ y recibe el nombre de **derivada de $\boldsymbol{f}$ *en a.*** (Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en *a* para todo a del dominio de f.)

Así mismo, presentamos la definición de derivada dada en Arancibia y Mena (2005, p.275), texto que es parte de la bibliografía del programa de Cálculo I:

Definición. Sea $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ y sea *p* un punto de acumulación. Diremos que *f* es derivable en el punto p cuando el siguiente límite existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{x-p}$$

En el caso que el límite exista, el valor de él se denota por $f'(p)$, indicando de esta forma que el valor depende del punto p. El valor $f'(p)$ es llamado **la derivada de** *f* en el punto *p* y se usan las siguientes notaciones.

$$f'(p), \ \frac{df}{dx}(x), \ \frac{df}{dx}\Big|_{x=p}, \ \frac{df}{dx}\Big|_{p}$$

Cantoral (2013) señala que normalmente en el aula se presenta como la definición de un límite y el empleo de la regla de ciertos pasos para desarrollar las técnicas de derivación:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- Se incrementa *f*, para quedar como $f(x+h)$
- Se calcula el incremento $f(x+h)-f(x)$
- Se dividen los incrementos $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Se calcula el límite siguiente $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Algunos autores (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza, Rodríguez, 2000) indican que generalmente, en clase la derivada se introduce como una medida de inclinación de la recta tangente a una curva. Posteriormente se pasa de lo algorítmico a lo teórico: derivar funciones y demostrar teoremas. ¿Pero porque se presenta de esa manera y no otra?

En el diseño empleado por Cantoral y Mirón (2000, p.271) se apoya en la idea de la derivada como un proceso al límite (Lagrange), mientras que habitualmente se apoya en el proceso de obtención en vez de la propiedad de tangencia (Cauchy) (Figura 4.2).

Cauchy: la derivada es entendida como el límite del cociente incremental

$$\frac{df(a)}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Lagrange: la derivada es entendida como coeficiente lineal del desarrollo de una serie de potencias de una función entorno de un punto dado

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots$$

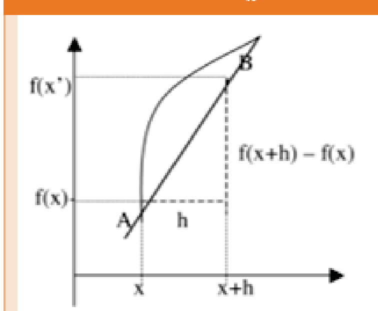
Figura 4.2 La derivada desde la postura de Cauchy y Lagrange (Cantoral y Mirón 2000, p. 272).

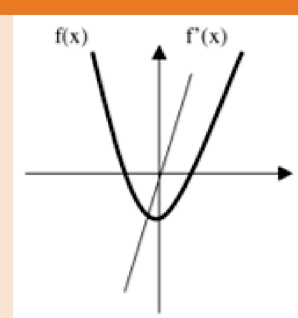
En otras disciplinas la derivada no se entiende como un cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o decrecimiento (Alanís et al., 2000,). En el caso de economía, la función de producto marginal permite conocer la variación de producción de un trabajador x.

Por ejemplo, Ariza y Llinares (2009) muestran que la derivada es fundamental en el caso de Microeconomía, rama de gran importancia ya que ella ayuda a la toma de decisiones. Por otra parte, la relación entre la función y su gráfica es de gran importancia ya que las gráficas proporcionan mucha información de las relaciones entre variables y la medida de variación de cambio dada por la derivada.

Algunos elementos matemáticos importantes se expresan en la siguiente tabla (Tabla 4.1).

Tabla 4.1 Conceptos matemáticos usados en Microeconomía

<table>
<tr><th>Tasa de variación media (TVM)
$TVM\ (x, x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$</th><th>Derivada en un punto
$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$</th><th>Función Derivada
$f'(x)$</th></tr>
<tr><td>

La TVM es la pendiente del segmento que une dos puntos A y B.</td><td>Gráficamente es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $(a, f(a))$</td><td>

Ayuda a visualizar las características del comportamiento de la función (crecimiento, decrecimiento, concavidad, etc.)</td></tr>
</table>

Los conceptos económicos relacionados a los conceptos matemáticos anteriores son:

- La *función de producción* describe la producción de la empresa dependiendo del número de trabajadores contratados.
- El coste de producción representa para una empresa la producción de una determinada cantidad de producto. La función *coste total*, depende de la cantidad producida. La función derivada del coste total que indica cómo crece el coste al aumentar la producción es el *coste marginal*.
- De manera hipotética cuando un país dedica sus recursos a la producción de dos bienes, si quiere aumentar la de uno de ellos deberá renunciar a una cantidad del otro. La función que representa esos costes es la frontera de posibilidades de producción (Tabla 4.2).

Tabla 4.2. Relación de conceptos económicos con conceptos matemáticos

Concepto Económico	**Derivada en un punto** $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**Función Derivada** $f'(x)$
La derivada de la función de producción es la ***función marginal***	Permite conocer la variación de producción generado por un trabajador	Permite conocer la variación de producción que generaría cualquier trabajador
Al derivar la función coste total se obtiene el ***coste marginal***	Permite conocer qué variación de costes genera producir una unidad x adicional	Permite conocer qué variación de costes genera producir cualquier unidad

Del trabajo realizado por Cantoral y Mirón, incorporamos una tercera postura respecto a la derivada: la de Newton. La orientación física de Newton radica en el concepto de velocidad, término central para desarrollar el concepto derivada, y elemento clave en nuestra investigación.

- Cauchy: La derivada es entendida como el límite del cociente incremental.
- Lagrange: Entiende la derivada como coeficiente lineal del desarrollo de una serie de potencias de una función entorno de un punto dado.
- Newton: Concibe la derivada de $y = f(x)$ como el cociente entre fluxiones $\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$ donde considera las fluxiones $\dot{i} \cdot \dot{y}$ como las velocidades en que cambian los fluentes x , y . Su concepción es cinemática.

Retomamos la idea de Alanís, *et al.* (2000) al que la derivada es una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o decrecimiento, dicho proceso de variación es el que se quiere retomar en la investigación con la $CCM_{Fís}$.

4.2. ¿Qué dicen las investigaciones de las gráficas en Física?

Algunos artículos han llamado la atención por la relevancia de las gráficas en la física, declarando que, desde el punto de vista desde esta disciplina, la gráfica cumple un rol fundamental y el hecho de que los estudiantes no comprendan su vinculación con los modelos físicos arroja ciertas dificultades (McDermott, et al., 1987; Hale, 2000; Laverty y Kortemeyer, 2012).

McDermott et al (1987) señalan la relevancia de las gráficas en el estudio de la física, destacando ésta como una de las habilidades a desarrollar más importantes. Los autores indican que existen dificultades al momento de conectar las gráficas con conceptos físicos y con el mundo real.

McDermott et al. (1987) y Hale (2000) señalan que los estudiantes pueden comprender los conceptos físicos, pero no logran hacer conexiones necesarias entre los conceptos matemáticos con sus respectivas gráficas que son importantes para relacionarlos con tópicos de la física, por ejemplo, con la cinemática. En esta misma dirección, Hale (2000) destaca en la cinemática dos aspectos, la relación entre las gráficas de variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) ya que son esenciales en los cursos de Física, y en Cálculo Diferencial, la cinemática es el ambiente natural para explicar el concepto tasa de cambio.

Por su parte, Laverty y Kortemeyer (2012) indican que aun cuando los estudiantes son eficientes al momento de graficar con funciones dadas o interpretar los valores de esta, eso no significa que sean hábiles para construir gráficas e interactuar con ellas. A lo que se refieren los autores, es que graficar un par de valores o una función particular es diferente a construir la gráfica de posición vs. tiempo para un auto moviéndose hacia atrás o construir la gráfica aceleración vs tiempo para un auto que alcanza su máxima velocidad en cierto tiempo. Los autores también indican que la habilidad de trabajar con gráficas puede aprovecharse en el aula y más aún si además de interpretar se interactúa con ellas, por eso la relevancia que no solo sepan gráficas sino también construir gráficas.

Idoyaga y Lorenzo (2014) presentan resultados del trabajo de investigación de tesis "Las representaciones gráficas en la enseñanza y en el aprendizaje de la física en la universidad" en desarrollo en el Centro de Investigación y Apoyo a la Investigación Científica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires (FFYB-UBA). Los autores rescatan el estudio de las gráficas ya que las consideran un tema clave para la física de gran transversalidad con otras disciplinas que conforman las formaciones universitarias en ciencia y tecnología de superior.

Idoyaga y Lorenzo (2014) consideran las representaciones gráficas*, como tipo particular de representación externa,* es una construcción en la cual el sujeto se refiere a objetos o fenómenos con los cuales ellos interactúan. La representación intenta reunir las características fundamentales de los objetos o fenómenos representados. *Se trata de representaciones permanentes que pueden ser conservadas en un soporte y ofrecen una representación visible de conceptos e ideas abstractas* (Idoyaga y Lorenzo, 2014, p.366). Las consideran como elemento central para comunicar, enseñar y en el trabajo experimental de la Física y en ciencias experimentales y como consecuencia de eso el aprendizaje de muchos de los conceptos de física y de ciencias están ligados al aprendizaje de las representaciones gráficas.

Otro aspecto que destacan, sobre todo las gráficas cartesianas, es el rol que tiene para comunicar los resultados en los trabajos científicos. *Entonces, sus características, su naturaleza y diversidad, al igual que las formas en que se construyen y transforman, deben ser consideradas como parte de los contenidos al aprender ciencias, lo que lo convierte necesariamente en un tema de investigación para la didáctica de las ciencias* (Idoyaga y Lorenzo, 2014, p.366).

Con lo anterior, se puede concluir que éstos dan evidencia que las gráficas han sido y son importantes en el área de la Física y que a pesar del paso del tiempo existen elementos que no se han logrado aprovechar en el aula, por ejemplo: conectar los conocimientos de cálculo a la física, promover la construcción de gráficas e interactuar con las mismas. Lo anterior nos hace cuestionarnos respecto a ¿cómo conectar con la matemática escolar para así lograr un rediseño del discurso matemático escolar?, y dar un nuevo estatus a las gráficas.

4.3. Rumbo a una epistemología del uso de las gráficas

El trabajo desarrollado por Leinhardt, Stein y Zaslavsky (1990) es una recopilación de investigaciones relacionadas a las funciones, gráficas y graficación. El tema central es el concepto de función. La idea básica gira en torno al interés en la enseñanza y aprendizaje de este concepto justifica la inclusión de las gráficas y el uso de la graficación en el sistema escolar. Destacan la articulación del mundo algebraico y del mundo gráfico para construir y definir conjuntamente le concepto de función.

Esta revisión por parte de las autoras permite reconocer tres perspectivas:

a) Lo relacionado a las características de las tareas. La tarea se refiere a una instrucción que se le da al estudiante.
   Distingue las acciones sobre las tareas en dos: de construcción e interpretación. De acuerdo con esas acciones, ubica cuatro tipos de tareas:
   De predicción: son tareas de construcción de los patrones que subyacen en las gráficas y las funciones.
   De clasificación: Son principalmente tareas de interpretación en las que se han identificado relaciones entre la definición formal de una función y las imágenes de las gráficas que tiene el estudiante.
   De traducción: pueden involucrar acciones de interpretación o de construcción, está relacionado con el pasar de la representación gráfica a otras representaciones.
   De escala: pueden involucrar acciones de interpretación o de construcción, relaciona las convenciones con las tensiones y las limitaciones del sistema coordenado cartesiano.
b) El desempeño del estudiante frente a estas tareas: la naturaleza del aprendizaje en términos de intuiciones y conceptos erróneos.
c) Una tercera perspectiva está relacionada con el cómo se enseñan las funciones, las gráficas y la graficación en los salones de clases y los ambientes tecnológicos.

Los trabajos involucrados en el análisis realizado por estos autores reconocen la necesidad de facilitar el estudio de las funciones, lo cual es un aporte. Por otro lado, existen investigaciones (Cen 2006, Flores, 2007, Suárez, 2008, 2014, Gómez, 2015) cuyo interés es caracterizar el uso de las gráficas como un conocimiento con estructura propia y susceptible de desarrollo, y para ello se apoyan en elementos como la forma y el funcionamiento. *La forma está relacionada con los significados y procedimientos asociados a cómo un estudiante las obtiene y el funcionamiento está asociado a los significados y argumentos que los estudiantes tienen como un medio y un propósito en uso de las gráficas* (Suárez, 2014, p. 48).

Suárez (2006) realizó un análisis del uso de las gráficas en la obra de Nicolás de Oresme, lo cual permitió formular una epistemología. El análisis se realizó en cuanto al aporte que hizo al generar una forma de representar las características de cosas que cambian, las cualidades. Para Oresme la palabra cualidad en si misma tiene incorporada la noción de variación.

La obra de Oresme tenía como propósito representar a través de figuras geométricas (rectángulos, trapecios, triángulos, semicircunferencias) el modo en que las cualidades varían. En términos de funcionamiento y forma, se puede decir que, el funcionamiento de las figuras no consistía en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que la esencia de la cualidad de cantidad continua eran las figuras mismas, es así que las figuras geométricas adquirían un significado global. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Por ello se puede afirmar que Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación (Figura 4.3): un rectángulo representa una variación uniformemente uniforme; un triángulo o trapecio representar una variación uniformemente deforme; y una figura irregular representa una variación deformemente deforme. Es decir, atribuye una nueva naturaleza a las figuras de la geometría para cumplir ahora con la función de describir el cambio y la variación.

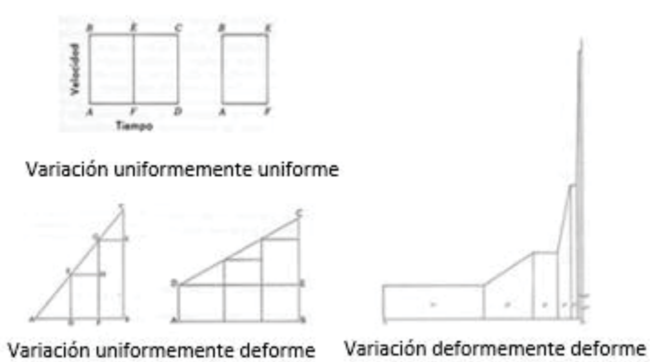


Figura 4.3. Las figuras geométricas representan variaciones.

El aporte de Oresme para el análisis cuantitativo del movimiento lo compone la representación geométrica del mismo. Atribuyó a las figuras una naturaleza que con ayuda de la imaginación permiten el conocimiento de la cualidad a representar.

Suárez señala que lo que respecta al estudio del cambio y la variación, aun cuando hasta el siglo XVII no se alcanzaron métodos matemáticos del Cálculo Diferencial para ello, sí se abrió paso para los desarrollos futuros en dos aspectos: lo conceptual y lo matemático; Oresme contribuyó en ambos. En lo conceptual, hace referencia a la posibilidad de estudiar de modo matemático aspectos de la naturaleza que no parecían tener relación con lo cuantitativo, o sea, las cualidades. En lo matemático, consistía en proveer instrumentos que, si bien requerían mejorarse, aumentaban las posibilidades efectivas de la física matemática.

El análisis del uso de las figuras se apoya en una distinción entre las características cuantitativas y cualitativas de una cualidad que provee una medida a través de su representación por segmentos. *La coordinación de este segmento, representado en forma vertical y el segmento asociado a la extensión de la variación, representado en forma horizontal, determina figuras geométricas que representan la situación de cambio y variación*. Como consecuencia se concibe una funcionalidad diferente de las figuras geométricas ya que se usan para representar diversas formas de variación (constante, uniforme, no uniforme), para caracterizar puntos extremos de la variación o para obtener el movimiento a través de la acumulación de sus cambios.

Aspectos distintivos en cuanto a forma y funcionamiento:

Forma	Funcionamiento
• La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos • La figuración de las cualidades	• Distinción entre calidad y cantidad de movimiento • La constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo • La suma continua para calcular la distancia como el área bajo la gráfica velocidad-tiempo

Estas características proporcionan un uso de las gráficas que depende de las propiedades geométricas para su descripción (medidas y razones). Además, proporcionan un funcionamiento y una forma de la gráfica diferentes a las asociadas a la representación gráfica de una función (Suárez, 2008, p. 7).

4.4. Aspectos metodológicos

La investigación tiene una perspectiva cualitativa (Hernández, Fernández y Baptista 2010), por lo que se decidió usar la metodología de estudio de caso desde la perspectiva de Stake (2010) y Yin (1989).

De acuerdo con Stake (2010) lo que distingue el estudio de casos es la comprensión de la realidad como objeto de estudio: donde se estudia la particularidad y complejidad de un caso singular, con el fin de comprender su actividad en circunstancias importantes.

Stake sugiere que el interés del estudio de Caso Intrínseco no radica en que con su estudio se aprenda sobre otros casos o de un problema general, sino porque surge la necesidad de aprender de un caso en particular (2010, p.16). Considerar un estudio de **caso intrínseco**, nos lleva a evidenciar, reconocer y caracterizar usos de las gráficas propios de una comunidad de físicos en particular (CCM_{Fis}).

Por otro lado, Yin (1989) enfatiza la contextualización del objeto de investigación, al entender que un estudio de caso es una investigación empírica dirigida a investigar un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real por la imposibilidad de separar a las variables de estudio de su contexto. En otras palabras, es un estudio que permite mirar el actuar de una persona en un contexto específico.

Un aspecto que es importante destacar es sobre la generalización en el estudio de caso, Yin (1989) señala que no es generalizable a poblaciones o universo, pero sí a las proposiciones teóricas y no a poblaciones o universos. Es decir, el objetivo del investigador no es la *generalización estadística* (lo que se puede relacionar a enumerar frecuencias), sino más bien es la *generalización analítica*: esto es, extender y generalizar las teorías. En otras palabras, más que generalizar los casos se generalizan patrones teóricos, donde la teoría generada es usada como patrón con el cual comparar los resultados de otros estudios.

Yacuzzi (2005, p.7-8) considera oportuno de hablar de transferencia más que hablar de generalización. El estudio de caso permite la transferencia "hacia la teoría" y no hacia otros casos, destacando la generación de ideas aprovechables en diferentes escenarios. En otras palabras, con este tipo de estudio se destaca la importancia de corroborar teóricamente lo analizado, también puede ayudar a desarrollar la teoría. El considerar este estudio permite articular el cotidiano de una CCM_{Fis} con los constructos de la TSE fortaleciendo la noción de uso de conocimiento en una situación y escenario específico.

Con lo anterior podemos mencionar que el estudio de caso intrínseco nos permite mirar a una comunidad específica (**CCM_{Fis}**) en un escenario particular (lo que hemos denominado como **cotidiano**) que nos permite reconocer los **usos de las gráficas** de ese caso en particular, usos analizados con la Teoría Socioepistemológica (**TSE)**, que nos permite ser un aporte para uno de los marcos de referencia (**MR**) de la teoría.

Definición del caso: Nos interesa lo que el físico hace respecto al uso de las gráficas en su trabajo desde los roles que desempeña, como docente: cómo aborda y presentan las gráficas a sus estudiantes; desde su rol de investigador: qué papel desempeñan las gráficas en sus escritos ante la comunidad científica a la cual pertenecen. En otras palabras, lo que nos incumbe es lo relacionado a qué hace en su comunidad que pueda ser un aporte para el RdME.

Las preguntas:

1. **¿Cómo se caracteriza el uso de gráficas en una comunidad de físicos?**
2. **¿Cómo un académico físico usa las gráficas en su docencia para la formación de Físicos y/o docentes de Física?**

Como se mencionó en el capítulo 1, para dar respuesta a lo anterior, se fijaron los objetivos en los dos escenarios planteados anteriormente:

Escenario 1: Físico investigador	Escenario 2: Físico docente
Objetivo específico 1 Reconocer el(los) tipo(s) de uso de gráficas que sea propia del Físico en: ▸ sus publicaciones ▸ en una situación fuera del cotidiano laboral	***Objetivo específico 2*** Reconocer el tipo de uso de gráficas de la clase: ▸ laboratorio de física. ▸ Cátedra

Informantes: nos centramos en una comunidad de conocimiento matemático ($CCM_{fís}$) compuesto por doctores que trabajan en el Instituto de Física de una universidad chilena de Valparaíso donde realizan investigaciones y docencia en las carreras de licenciatura y pedagogía en Física.

Los instrumentos: Los instrumentos que nos permiten obtener datos son: la entrevista (semi estructurada y el planteamiento de una situación), la observación de clases (cátedra y laboratorio) y el análisis de algunos documentos (libros de texto y publicaciones representativas).

Entrevistas	Observación de clases	Documentos
Semiestructurada	Cátedra	Libros de textos
Planteamiento de una situación	Laboratorio	Artículos publicados

4.4.1. Esquema metodológico en la TSE

Por su parte la Socioepistemología se ha constituido y preocupado en comprender y entender fenómenos relacionados con la difusión y la construcción del conocimiento matemático. El principio fundamental que radica en la problematización del saber matemático, lo que lleva a considerar como un actor de la unidad de análisis a la matemática en juego, cuestionando aquello que se debe aprender, reconociendo que lo que norman la CSCM son las prácticas sociales, y se hace necesario reconocer la manifestación de estas a través de sus usos en diferentes escenarios. Con la problematización se pretende la identificación de aquellas significaciones que se pierden, transforman o diluyen en el discurso escolar pero que son propias al saber, y que en escenarios específicos lo caracterizan como un saber funcional (Montiel y Buendía, 2012).

La TSE ha llevado a cabo sus investigaciones bajo distintos encuadres metodológicos (ver Cantoral, 2013, p. 167-177). Nuestra investigación se adapta al esquema propuesto por Buendía y Montiel (2012), el cual posee tres momentos o fases (ver Figura 4.4):

- La problemática y el fenómeno didáctico que se desea abordar.
- La epistemología de: prácticas -histórica, filosófica y genética.
- La situación problema en donde interviene la CSCM bajo consideraciones institucionales y de escenario

De acuerdo con Montiel y Buendía (2012) los nodos son momentos o fases de un proceso *de la investigación global que incluyen un conjunto de tareas propias y se singularizan por las circunstancias que le son particulares. Las flechas que lo componen representan acciones relacionantes entre los diferentes momentos y bien pudieran considerarse como relaciones en ambos sentidos; […] Se trata de un Esquema Metodológico pues permite justificar y visualizar diferentes métodos de investigación en Socioepistemología.* (Montiel y Buendía, 2012, p. 61-62).

No todos los trabajos de investigación transitan por todos los nodos, es decir, un trabajo puede estar compuesto por *un nodo y/o la combinación de algunos nodos de momentos y acciones relacionantes señalados en el Esquema.* En nuestro caso lo describiremos más adelante.

Planteamiento del problema:

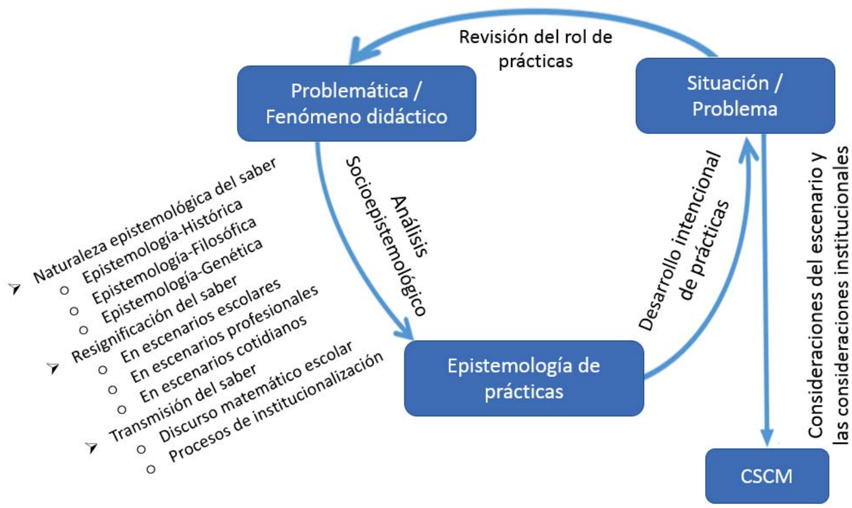


Figura 4.4 Esquema metodológico de la TSE (Montiel y Buendía, 2012, p. 63).

Los principios metodológicos del esquema señalan qué se estudia y desde donde se sitúa la perspectiva para hacerlo. Como se indicó antes, las investigaciones bajo esta perspectiva consideran la naturaleza social, y esto ha llevado a problematizar el saber en los siguientes aspectos: su naturaleza epistemológica, la resignificación y sus procesos de transmisión. Para caracterizar la naturaleza del saber matemático, se realizan revisiones y sus respectivos análisis, basados en las prácticas y los usos del saber, de cómo se logran las aprehensiones de estos saberes a través de sus significaciones contextualizadas y finalmente su transmisión. Estas revisiones pueden realizarse desde una o varias dimensiones (ver Figura 4.4).

La unidad de análisis (ver figura 4.5) está centrada en la actividad humana y en las circunstancias que lo rodean. Ella, de acuerdo con Montiel y Buendía, ha permitido identificar las prácticas que anteceden a la producción de conceptos. Es decir, l*o que se estudia es al ser humano usando y haciendo matemática, y no solo su producción matemática final; se proponen, en consecuencia, epistemologías de prácticas como fundamento del desarrollo del pensamiento matemático* (Montiel y Buendía, 2012, p. 64).

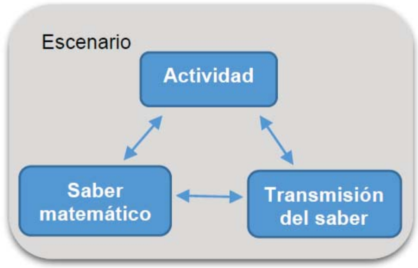


Figura 4.5 Unidad de análisis.

La unidad de análisis se puede inferir conforme a las dimensiones desde donde se hacen los estudios y considerando la diversidad de escenarios posibles (Figura 4.5) esta unidad plantea la interacción entre el saber matemático en juego relativo al escenario, la actividad observable de los individuos y la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento (Montiel y Buendía, 2012).

Para ejemplificar la interacción de los elementos que componen la unidad de análisis de la Figura 3.18 tomemos el caso de un estudio socioepistemológico cuyo escenario es de prácticas profesionales, el saber matemático se puede encontrar en forma de conceptos formales, fórmulas o algoritmos, pero también en forma de gráficos, íconos o tablas numéricas. En cuanto a la actividad se refiere, se caracterizará a través de la resolución de situaciones relativas a la profesión en cuestión y con base en el uso que se haga del saber para responder y explicar estas situaciones. Para finalizar, la transmisión (metafóricamente hablando) del saber, hay que identificar los mecanismos propios del grupo que ejerce las prácticas profesionales (tradiciones, costumbres, paradigmas, entre otros).

De acuerdo con Montiel y Buendía (2012), las premisas y los principios metodológicos caracterizan nuestro objeto de estudio, es decir, señalan aquello que se estudia y desde donde es factible estudiarlo. Ello dibuja el tipo de resultado que resignifica el saber matemático en juego.

Ahora detallaremos cómo nuestra investigación se apoya con el Esquema Metodológico propuesto por Montiel y Buendía.

Nuestra problemática se encuentra relacionada con la falta de una relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano, es decir, una relación que se nutra de manera mutua y continua. Consideramos una comunidad de físicos para ver como usan las gráficas en dicha comunidad, la cual se ha descrito en el capítulo anterior.

Para el análisis socioepistemológico nos apoyamos en el trabajo realizado por Suárez (2006) del análisis del uso de las gráficas en la obra de Nicolás de Oresme. El trabajo de Oresme concibe una funcionalidad de las figuras geométricas donde se usan para representar la situación de variación o para obtener el movimiento a través de la acumulación de sus cambios.

El considerar al académico físico en su cotidiano, como profesor e investigador, nos permitirá inferir los significados y los procedimientos que permiten la generación de argumentaciones gráficas que son propias de su formación y su trabajo como experto del área de Física, considerando que pertenece a una CCM particular y específica; lo anterior contribuirá con el MR relacionado a los U(Graf). Se elaborará un diseño de una situación de variación, el que intencionalmente debe desarrollar las Arg(Graf) de los U(Graf) que sean propias de la CCM_{Fis} que provean elementos para contribuir a una relación recíproca entre la matemática escolar y el cotidiano (Figura 4.6).

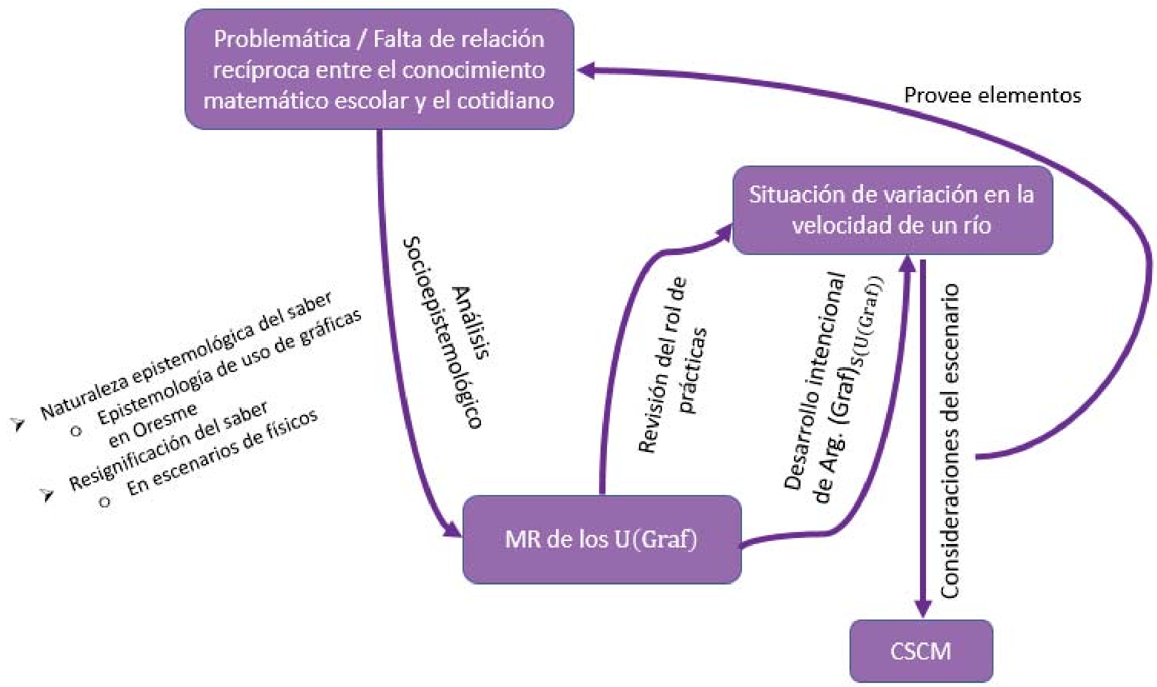


Figura 4.6 Esquema metodológico propuesto para nuestra investigación.

Los distintos instrumentos empleados nos permitirán caracterizar el uso de gráficas de la comunidad estudiada (ver Figura 4.7). Lo que dicen que hacen (entrevista), lo que observamos que hacen (clases observadas y la situación propuesta), lo que escriben que hacen (artículos publicados) y lo que el discurso escolar dice (libros de texto). Todo lo anterior da información del uso de las gráficas para esta comunidad, sin embargo, destacamos que la situación propuesta tiene una intencionalidad, desarrollar las argumentaciones gráficas que contribuyan al MR de los usos de las gráficas.

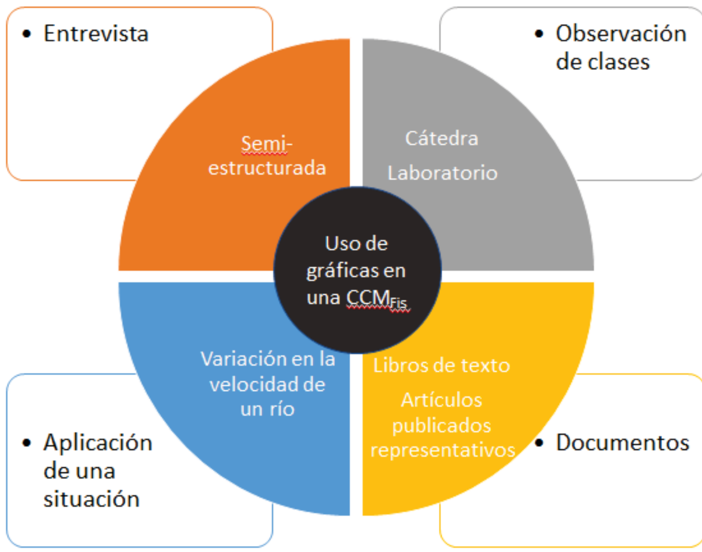


Figura 4.7 Instrumentos empleados para caracterizar el uso de gráficas en una CCM_{Fis}.

De acuerdo a los antecedentes del uso de las gráficas (ver capítulo 1), la revisión de algunos libros de texto de Física y algunos datos obtenidos en la entrevista con uno de los académicos físicos de la comunidad elegida, se puede determinar que la Mecánica es un tema fundamental para la física escolar en esta institución, por otra parte nuestros informantes estan interesados en la investigación de este tema. Se tomó la decisión de acotar al tópico de velocidad, ya que ahí se puede observar la variación. Lo anterior nos permitió aplicar una situación no escolar en la cual surja conocimiento matemático desde la practica del físico (ver Figura 4.8).

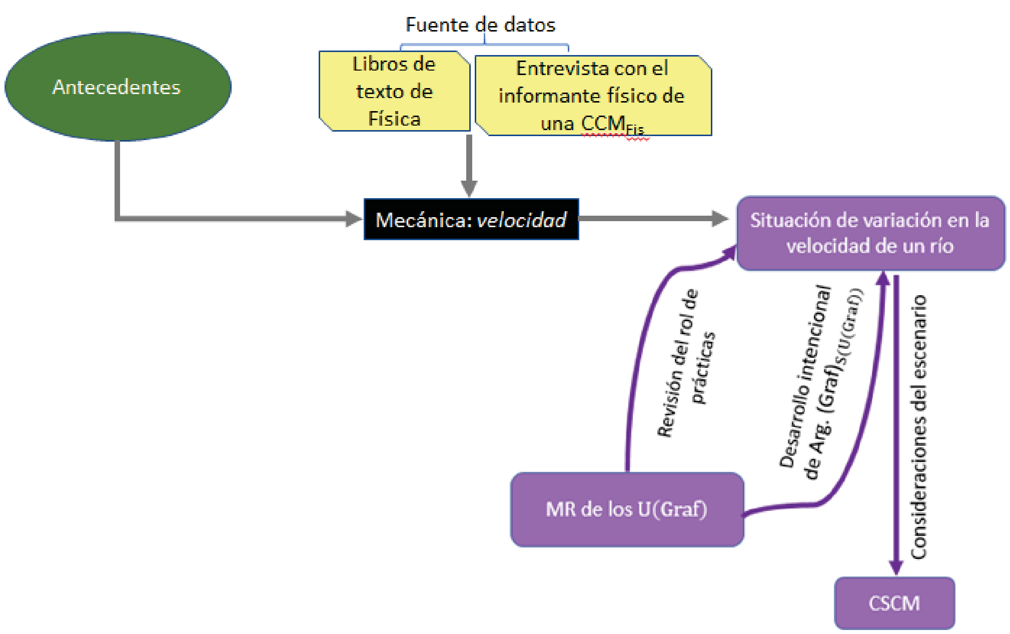


Figura 4.8 Diagrama metodológico empleado en la investigación.

Capítulo 5

Usos de las gráficas en una Comunidad de Conocimiento Matemático de Físicos

Este capítulo se describen las fuentes de datos y su análisis bajo los constructos teóricos de la Socioepistemología. Finalizamos el capítulo con una síntesis mostrando algunos aspectos que llamaron la atención como resultado de la situación propuesta.

5.1. Libros de texto

Para la elección de la bibliografía a revisar, se optó por la bibliografía obligatoria y la complementaria sugerida en los programas de estudio de los dos primeros semestres de la malla curricular de Pedagogía en Física.

Se revisan 5 textos, pero se explicitan dos debido a que aparecen en los programas anteriormente mencionados (Figura 5.1):

- Serway y Jewett. (2008) Física para Ciencias e Ingeniería, 7a Edición. México. Cencage Learning.
- Young, H.D. y Freeman R. A. (2009) Física Universitaria volumen 1 (Sears Zemansky), Decimosegunda edición, Pearson Education, México.

Figura 5.1 Portadas de los libros revisados en esta investigación.

El libro *Física para Ciencias e Ingeniería* se divide en dos volúmenes, el primer volumen consta de 22 capítulos de los cuales 14 son de Mecánica. En libro Física Universitaria volumen 1, consta de 20 capítulos y 14 están enfocados a Mecánica.

La revisión que se realizó fue para ver el tipo de gráficas que aparecen en estos libros de texto, específicamente de Mecánica. Seleccionamos algunas gráficas que aparecen en el libro de "*Física para Ciencias e Ingeniería*" para mostrar (Figura 5.2, Figura 5.3, Figura 5.4.

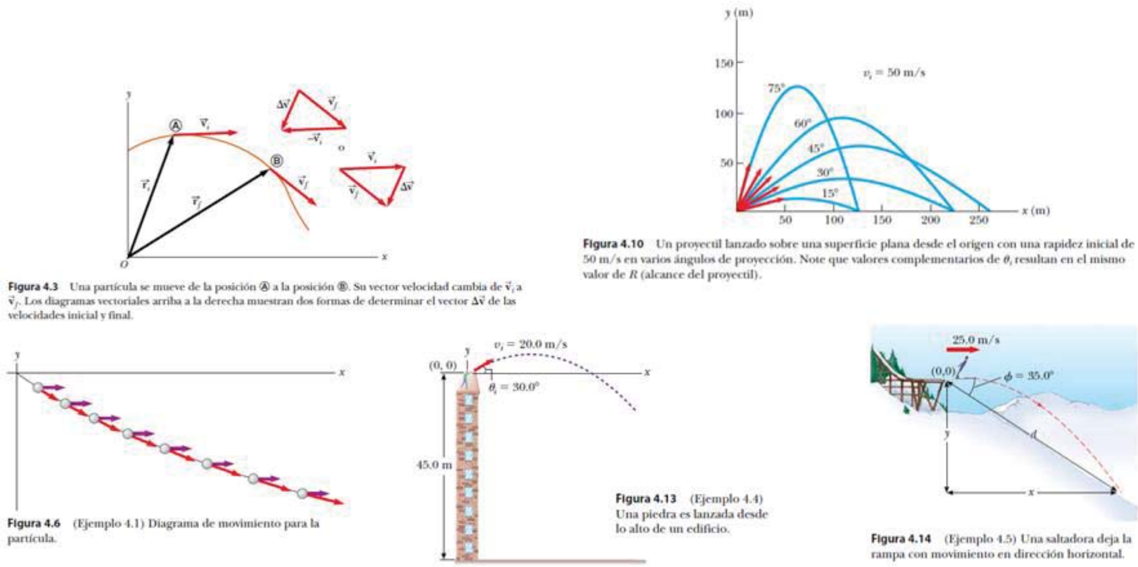


Figura 5.2 Gráficas relacionadas al Movimiento en dos dimensiones (Serway y Jewett, 2008).

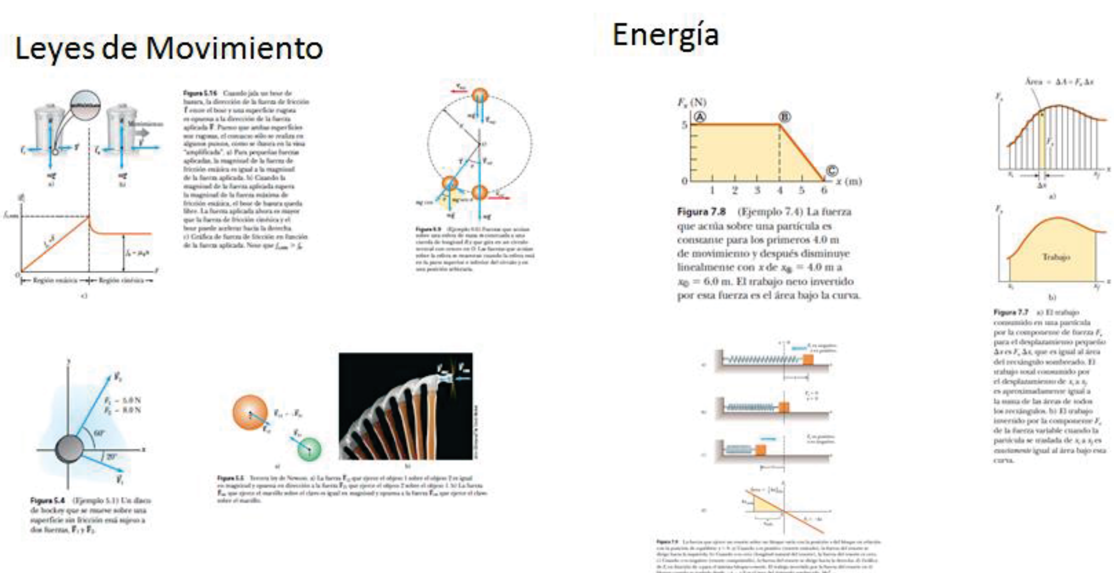


Figura 5.3 Gráficas relacionadas a las Leyes de Movimiento y Energía (Serway y Jewett, 2008).

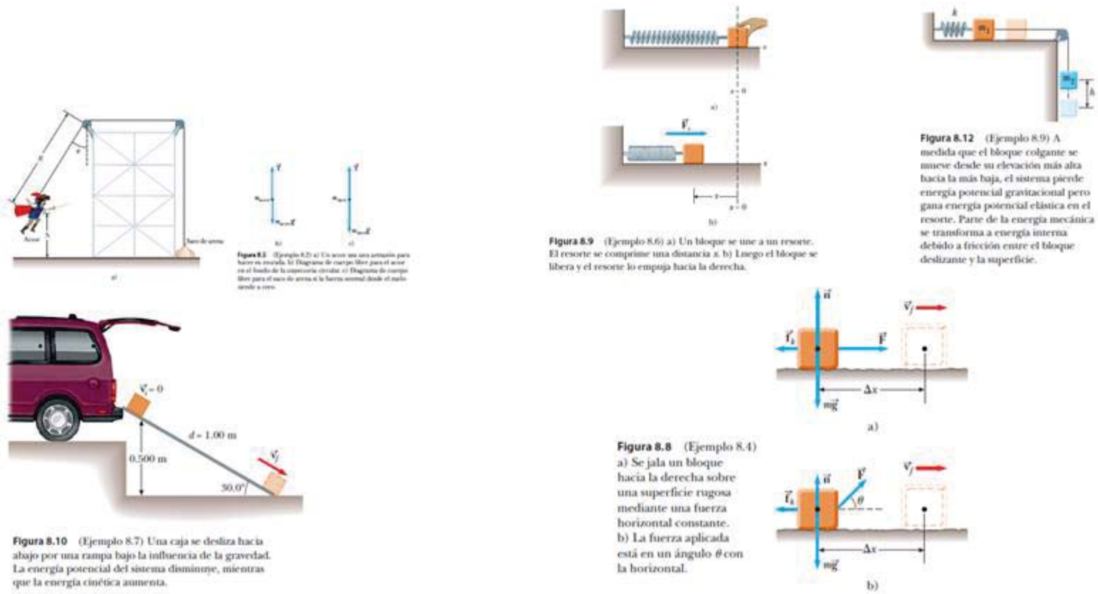


Figura 5.4 Gráficas relacionadas a la Conservación de la energía (Serway y Jewett, 2008).

Encontramos dos tipos de gráficas: cartesianas y diagramas. Podemos notar que en Física se emplea en diversas ocasiones los diagramas, ya sea para dar contexto al fenómeno a estudiar o bien para generalizar la situación. Por ejemplo, en el libro "Física para Ciencias e Ingeniería" (Serway y Jewett, 2008) p. 31-32, sección 2.5, se señala la utilidad de emplear diagramas de movimiento para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento. A continuación, en el recuadro aparece de manera textual las páginas indicadas[16].

2.5 Diagramas de movimiento

Con frecuencia los conceptos de velocidad y aceleración se confunden uno con otro, pero en realidad son cantidades muy diferentes. Al formar una representación mental de un objeto en movimiento, a veces es útil usar una representación pictórica llamada *diagrama de movimiento* para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento.

Un diagrama de movimiento se forma al considerar una fotografía *estroboscópica* de un objeto en movimiento, que muestra varias imágenes del objeto tomadas conforme la luz estroboscópica destella en intervalos constantes. La figura 2.10 representa tres conjuntos de fotografías estroboscópicas de automóviles que se mueven a lo largo de una autopista recta en una sola dirección, de izquierda a derecha. Los intervalos de tiempo entre los destellos del estroboscopio son iguales en cada parte del diagrama. De modo que, para no confundir las dos cantidades vectoriales, en la figura 2.10 se usa rojo para los vectores velocidad y violeta para los vectores aceleración. Los vectores se muestran en varios instantes durante el movimiento del objeto. Describa el movimiento del automóvil en cada diagrama.

En la figura 2.10a, las imágenes del automóvil están igualmente espaciadas, lo que muestra que el automóvil se mueve a través del mismo desplazamiento en cada intervalo de tiempo. Este espaciamiento igual es consistente con el automóvil que se mueve con *velocidad positiva constante* y *aceleración cero*.

[16]En este capítulo, lo que aparece en recuadros indica que son extractos de los libros revisados.

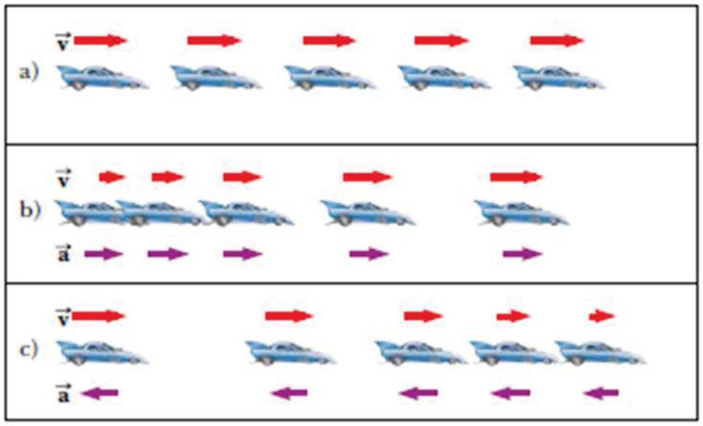


Figura 2.10 a) Diagrama de movimiento para un automóvil que se mueve con velocidad constante (aceleración cero). b) Diagrama de movimiento para un automóvil cuya aceleración constante está en la dirección de su velocidad. El vector velocidad en cada instante se indica mediante una flecha roja y la aceleración constante se indica mediante una flecha violeta. c) Diagrama de movimiento para un automóvil cuya aceleración constante está en la dirección *opuesta* a la velocidad en cada instante.

Se podría representar el automóvil como una partícula y describirlo con el modelo de partícula bajo velocidad constante.

En la figura 2.10b, las imágenes se separan más conforme avanza el tiempo. En este caso, el vector velocidad aumenta en longitud con el tiempo, porque el desplazamiento del automóvil entre posiciones adyacentes aumenta en el tiempo. Esta característica sugiere que el automóvil se mueve con una *velocidad positiva* y una *aceleración positiva*. La velocidad y la aceleración están en la misma dirección. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala al automóvil en la misma dirección en que se mueve: aumenta velocidad.

En la figura 2.10c, el automóvil frena conforme se mueve a la derecha porque su desplazamiento entre imágenes adyacentes disminuye con el tiempo. Este caso sugiere que el automóvil se mueve hacia la derecha con una aceleración negativa. La longitud del vector velocidad disminuye en el tiempo y eventualmente llega a cero. A partir de este diagrama se ve que los vectores aceleración y velocidad *no* están en la misma dirección. El automóvil se mueve con una *velocidad positiva*, pero con una *aceleración negativa*. (Este tipo de movimiento se muestra para un automóvil que derrapa hasta detenerse después de aplicar los frenos.) La velocidad y la aceleración están en direcciones opuestas. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala el automóvil en dirección opuesta a la que se mueve: frena.

Los vectores aceleración violeta en los incisos b) y c) de la figura 2.10 tienen todos la misma longitud. Por lo tanto, estos diagramas representan movimiento de una *partícula bajo aceleración constante*. Este modelo importante de análisis se discutirá en la siguiente sección.

Podemos encontrar varios ejemplos como el anterior en donde la representación pictórica cobra un rol importante para las explicaciones de la Física. Por ejemplo, el tamaño de las flechas indica cómo es la velocidad: de igual tamaño es constante, y si varía la velocidad entonces las flechas son de diferente tamaño. El empleo de las flechas es algo que aparece de manera recurrente en el discurso de la Física. Respecto a lo pictórico, se puede mencionar que ello permite dar significados, a partir del fenómeno, a los elementos gráficos; Carrasco (2014) indica que hay un ir y devenir entre la figura y el fenómeno, lo que permite generar significados.

Tomaremos un ejemplo particular para ver algunos de los usos de las gráficas en los libros de texto anteriormente citados. Nos referiremos a las gráficas de velocidad y rapidez instantánea.

En el libro de *Física para Ciencias e Ingeniería* (Serway, 2008) en las páginas 23-24 se habla sobre cómo conocer a velocidad de una partícula en un instante específico, lo que en el texto señala como: "*¿Qué significa hablar acerca de qué tan rápido se mueve algo si se "congela el tiempo" y sólo hablar acerca de un instante individual?*".

Para ello se apoya en un ejemplo dado previamente (Serway, Jewett, 2008, p. 20):

> Considere un automóvil que se mueve hacia adelante y en reversa a lo largo del eje x como en la figura 2.1a. Cuando comience a recopilar datos de posición, el automóvil está a 30 m a la derecha de una señal del camino, que usará para identificar la posición de referencia $x = 0$. Aplique el modelo de partícula para identificar algún punto en el automóvil, acaso la manija de la puerta delantera, como una partícula que representa a todo el automóvil.

Ahí la información aparece de la siguiente manera: en una tabla, representación pictórica y una gráfica cartesiana posición-tiempo (Figura 5.5).

TABLA 2.1

Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

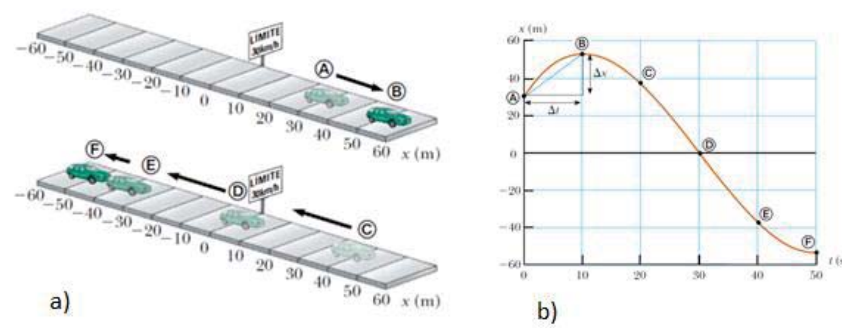


Figura 5.4 La tabla (2.1) es una exposición tabular de la información. a) Representación pictórica del movimiento del automóvil. b) Representación gráfica (gráfica posición-tiempo) del movimiento del automóvil (Serway, Jewett, 2008, p.20).

El ejemplo se emplea para hablar de los conceptos de posición, velocidad y rapidez. En este caso en el libro se puede observar un uso de distribución de puntos, en el cual la forma es a través de la tabla de valores y el funcionamiento es la ubicación de puntos en el plano cartesiano (Figura 5.6).

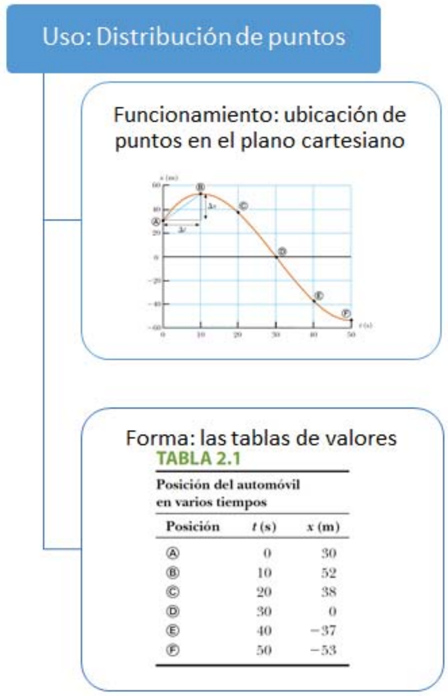


TABLA 2.1

Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

Figura 5.6 Funcionamiento y forma del uso Distribución de puntos.

Se retoma el ejemplo de la sección 2.2 del texto Serway y Jewett (2008, p.23-24) y se enfoca en la línea azul corta del punto A al punto B, desliza el punto B hacia la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto A, como en la figura 2.3b.

Aplique la ecuación 2.2 para encontrar la velocidad promedio:

$$v_{x,\,\text{prom}} = \frac{x_{\text{Ⓕ}} - x_{\text{Ⓐ}}}{t_{\text{Ⓕ}} - t_{\text{Ⓐ}}}$$

$$= \frac{-53\text{ m} - 30\text{ m}}{50\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{-83\text{ m}}{50\text{ s}} = \boxed{-1.7\text{ m/s}}$$

No es posible encontrar sin ambigüedad la rapidez promedio del automóvil a partir de los datos de la tabla 2.1, porque no se tiene información acerca de las posiciones del automóvil entre los puntos de datos. Si se adopta la suposición de que los detalles de la posición del automóvil se describen mediante la curva de la figura 2.1b, la distancia recorrida es 22 m (desde Ⓐ a Ⓑ) más 105 m (de Ⓑ a Ⓕ), para un total de 127 m.

Aplique la ecuación 2.3 para encontrar la rapidez promedio del automóvil:

$$v_{\text{prom}} = \frac{127\text{ m}}{50\text{ s}} = \boxed{2.5\text{ m/s}}$$

Note que la rapidez promedio es positiva, como debe ser. Considere que la curva café de la figura 2.1b fuese diferente de modo que entre 0 s y 10 s viaja desde Ⓐ a 100 m y luego regresa a Ⓑ. La rapidez promedio del automóvil cambiaría porque la distancia es diferente, pero la velocidad promedio no cambiaría.

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

Con frecuencia es necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante específico en el tiempo en lugar de la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo finito. En otras palabras, nos gustaría poder especificar su velocidad de manera tan precisa como detalla su posición al notar lo que ocurre en una lectura particular de reloj; esto es, en algún instante específico. ¿Qué significa hablar acerca de qué tan rápido se mueve algo si se "congela el tiempo" y sólo hablar acerca de un instante individual? A finales del siglo XII, con la invención del cálculo, los científicos empezaron a razonar las formas de describir el movimiento de un objeto en cualquier momento del tiempo.

Para ver cómo se hace esto, considere la figura 2.3a, que es una reproducción de la gráfica de la figura 2.1b. Ya se discutió la velocidad promedio para el intervalo durante el cual el automóvil se mueve desde la posición Ⓐ hasta la posición Ⓑ (dada por la pendiente de la línea azul) y para el intervalo durante el cual se mueve de Ⓐ a Ⓕ (representado por la pendiente de la línea azul más larga y que se calculó en el ejemplo 2.1). El automóvil comienza a moverse hacia la derecha, que se define como la dirección positiva. Debido a esto, al ser positivo, el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de Ⓐ a Ⓑ es más representativo de la velocidad inicial que el valor de la velocidad promedio durante el

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.2

Pendientes de gráficas

En cualquier gráfica de datos físicos, la *pendiente* es la relación del cambio en la cantidad representada en el eje vertical al cambio en la cantidad representada en el eje horizontal. Recuerde que *una pendiente tiene unidades* (a menos que ambos ejes tengan las mismas unidades). Las unidades de la pendiente de la figura 2.1b y la figura 2.3 son metros por segundo, las unidades de velocidad.

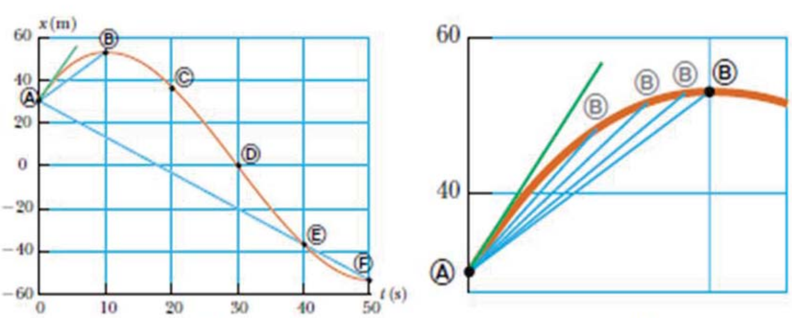


Figura 2.3 a) Gráfica que representa el movimiento del automóvil de la figura 2.1. b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica muestra cómo la línea azul entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ tiende a la línea tangente verde conforme el punto Ⓑ se mueve más cerca del punto Ⓐ.

intervalo de Ⓐ a Ⓕ, que se determinó era negativa en el ejemplo 2.1. Ahora enfóquese en la línea azul corta y deslice el punto Ⓑ hacia la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto Ⓐ, como en la figura 2.3b. La línea entre los puntos se vuelve cada vez más inclinada, y conforme los dos puntos se vuelven en extremo próximos, la línea se convierte en una línea tangente a la curva, indicada por la línea verde en la figura 2.3b. La pendiente de esta línea tangente representa la velocidad del automóvil en el punto Ⓐ. Lo que se hizo fue determinar la *velocidad instantánea* en dicho momento. En otras palabras, **la velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:**[1]

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

En notación de cálculo, este límite se llama *derivada* de x respecto a t, que se escribe dx/dt:

Velocidad instantánea ▶

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, como en cualquier momento durante los primeros 10 s en la figura 2.3, v_x es positiva y el automóvil se mueve hacia valores más grandes de x. Después del punto Ⓑ, v_x es negativa porque la pendiente es negativa y el automóvil se mueve hacia valores más pequeños de x. En el punto Ⓑ, la pendiente y la velocidad instantánea son cero y el automóvil está momentáneamente en reposo.

De aquí en adelante, se usa la palabra *velocidad* para designar velocidad instantánea. Cuando se esté interesado en *velocidad promedio*, siempre se usará el adjetivo *promedio*.

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada con ella. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de +25 m/s a lo largo de una línea dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de −25 m/s a lo largo de la misma línea, ambas tienen una rapidez[2] de 25 m/s.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.3
Rapidez instantánea y velocidad instantánea

En la *Prevención de riesgos ocultos* 2.1 se argumentó que la magnitud de la velocidad promedio no es la rapidez promedio. Sin embargo, la magnitud de la velocidad instantánea *es* la rapidez instantánea. En un intervalo de tiempo infinitesimal, la magnitud del desplazamiento es igual a la distancia recorrida por la partícula.

Pregunta rápida 2.2 ¿Los integrantes de la patrulla de caminos están más interesados en a) la rapidez promedio o b) la rapidez instantánea mientras usted conduce?

EJEMPLO CONCEPTUAL 2.2 La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos unidimensionales: **A)** una bola lanzada directamente hacia arriba llega al punto más alto y cae de vuelta hacia la mano del lanzador; **B)** un automóvil de carreras parte del reposo y aumenta su rapidez hasta 100 m/s; y **C)** una nave espacial navega por el espacio con velocidad constante. ¿Existen algunos puntos en el movimiento de estos objetos donde la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio durante todo el movimiento? Si es así, identifique el(los) punto(s).

SOLUCIÓN

A) La velocidad promedio para la bola lanzada es cero porque la bola regresa al punto de partida; por lo tanto, su desplazamiento es cero. Hay un punto donde la velocidad instantánea es cero: en lo alto del movimiento.

B) La velocidad promedio del automóvil no se puede evaluar sin ambigüedad con la información dada, pero debe tener algún valor entre 0 y 100 m/s. Puesto que el automóvil tendrá una velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún momento durante el intervalo, debe haber algún instante cuando la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio durante todo el movimiento.

C) Puesto que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en *cualquier* tiempo y su velocidad promedio durante *cualquier* intervalo de tiempo son iguales.

[1] Observe que el desplazamiento Δx también tiende a cero conforme Δt tiende a cero, de modo que la proporción parece 0/0. Como Δx y Δt se vuelven cada vez más pequeños, la proporción $\Delta x/\Delta t$ tiende a un valor igual a la pendiente de la línea tangente a la curva x en función de t.

[2] Como con la velocidad, se quita el adjetivo para rapidez instantánea. "Rapidez" significa rapidez instantánea.

A un costado del texto se puede notar la siguiente frase: "*En cualquier gráfica de datos físicos, la pendiente es la relación del cambio en la cantidad representada en el eje vertical al cambio en la cantidad representada en el eje horizontal*" (Serway, Jewett, 2008, p. 23).

La figura 2.3 que aparece en el libro de texto muestra como la velocidad instantánea es igual a la derivada de *x* respecto a *t*. Para explicar esto se apoya en una gráfica donde el uso es a través del análisis de la curva. El funcionamiento es a través de las secantes AB de intervalos cada vez más cortos entre los puntos A y B, la forma es a través de estas variaciones que A y B están tan cercanos que la línea se convierte en tangente a la curva (Figura 5.7).

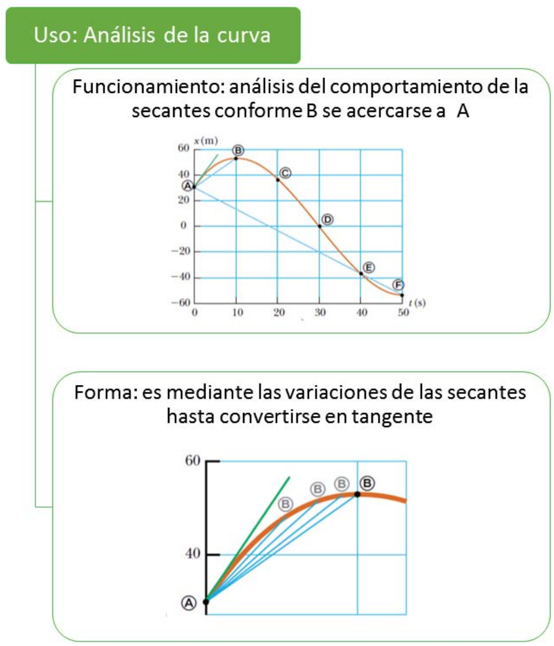


Figura 5.7 Funcionamiento y forma del uso Análisis de la curva.

Se puede notar, por lo visto en este tema específico, que el uso que se da a la gráfica es de la manera que aparece en el discurso matemático escolar: distribución de puntos y análisis de la curva.

En el libro "Física Universitaria" Vol. 1 (Young y Freeman, 2009), se puede observar la misma notación y definición en cuanto a la velocidad instantánea:

"*La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo*."

$$\boldsymbol{v_x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \text{(Young y Freeman, 2009, p. 40)}$$

Parte de un ejemplo de un auto de arrancones, el cual aparece previamente para hablar sobre la velocidad media ver Figura 5.8 muestra dos instantes del auto durante su recorrido.

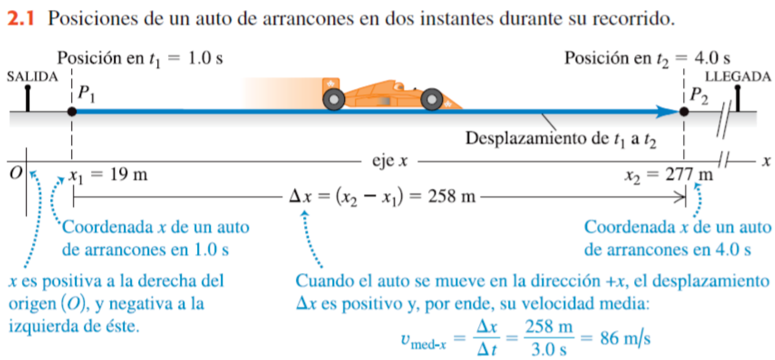


Figura 5.8 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido (Young y Freeman, 2009, p.37).

La gráfica posición-tiempo $x - t$, del ejemplo es la siguiente (Figura 5.9):

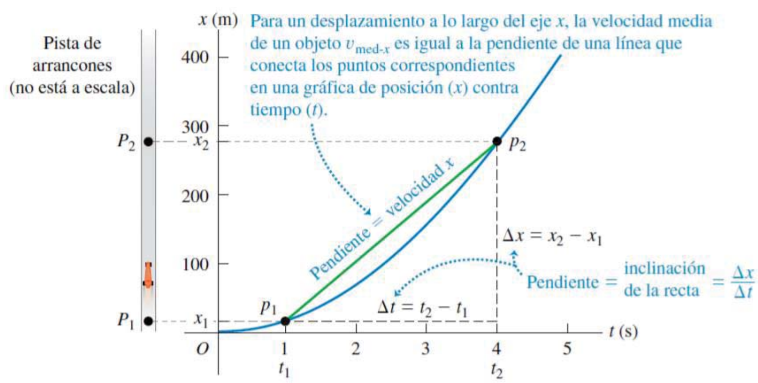


Figura 5.9 Gráfica posición-tiempo del auto de arrancones (Young y Freeman, 2009, p.39).

El texto (Young y Freeman, 2009, p.38) señala que l*a curva de la figura no representa la trayectoria del auto; ésta es una línea recta, como se observa en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del auto con el tiempo. Los puntos p_1 y p_2 en la gráfica corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del auto*.

El uso de las gráficas en este texto es similar al anterior, sin embargo, las gráficas en este caso aparecen con más información escrita y el diagrama de movimiento es por medio de segmentos y flechas. A continuación, podemos observar la pág. 42 del texto citado (Young y Freeman, 2009).

Obtención de la velocidad en una gráfica *x-t*

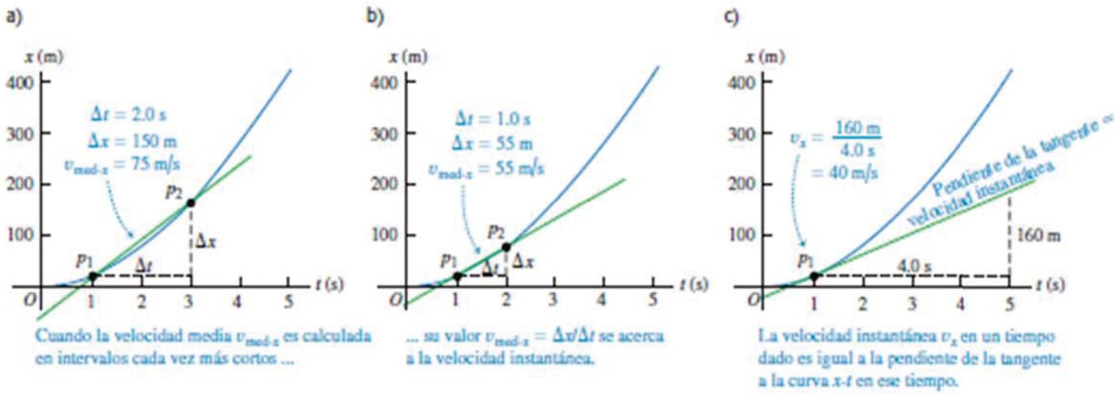
Activ Physics ONLINE
1.1 Análisis del movimiento usando diagramas

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del auto de la figura 2.1 en P_1. En la figura 2.1, conforme P_2 se acerca a P_1, el punto p_2 en la gráfica *x-t* de las figuras 2.7a y 2.7b se acerca al punto p_1 y la velocidad media se calcula en intervalos Δt cada vez más cortos. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, ilustrado en la figura 2.7c, la pendiente de la línea p_1p_2 es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto p_1. *Así, en una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.*

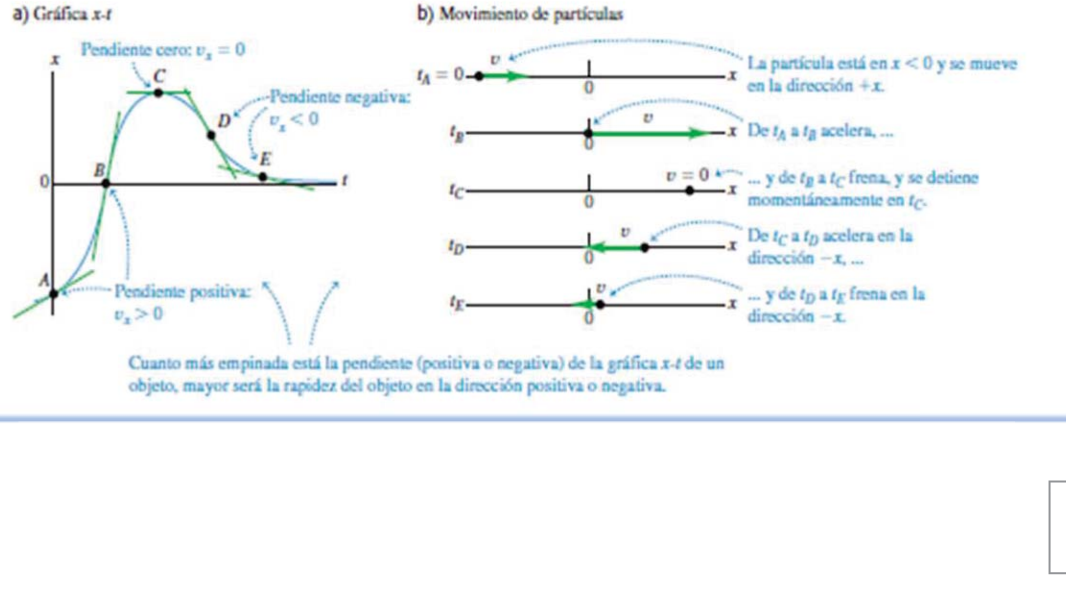
Si la tangente a la curva *x-t* sube hacia la derecha, como en la figura 2.7c, entonces su pendiente es positiva, la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente de la gráfica *x-t* y la velocidad son negativas, y el movimiento es en la dirección $-x$. Cuando la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

La figura 2.8 muestra el movimiento de una partícula en dos formas: como *a*) una gráfica *x-t* y como *b*) un **diagrama de movimiento** que muestra la posición de la partícula en diversos instantes, como cuadros de un filme o video del movimiento de la

2.7 Uso de una gráfica *x-t* al ir de a), b) velocidad media a c) velocidad instantánea v_x. En c) obtenemos la pendiente de la tangente a la curva *x-t* dividiendo cualquier intervalo vertical (con unidades de distancia) a lo largo de la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (con unidades de tiempo).



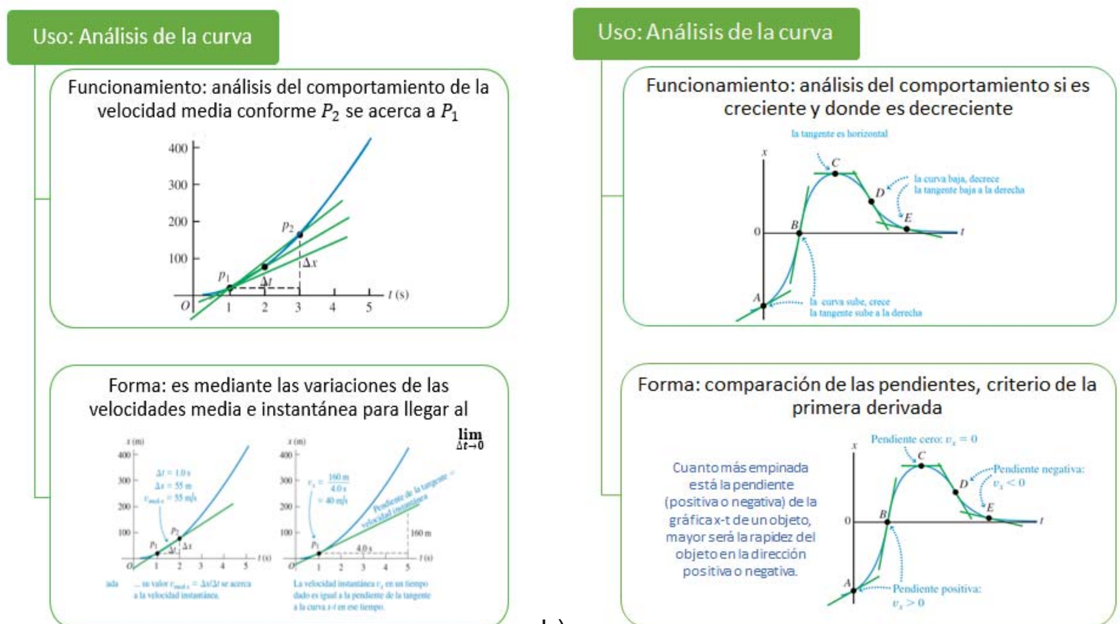
2.8 a) Gráfica *x-t* del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en los cinco instantes rotulados en el diagrama *x-t*.



Podemos encontrar dos usos del análisis de la curva (Figura 5.10):

a) En un caso el funcionamiento es a través del análisis del comportamiento de la velocidad conforme el punto P_2 se acerca a P_1, la forma es por medio de las variaciones de la velocidad media en lo intervalos que se hacen cada vez más pequeños hasta llegar al límite $\Delta t \to 0$ donde la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto (Figura 5.10a).

b) El funcionamiento aparece cuando señala que la pendiente sube por la derecha, lo que indica que la curva es creciente, o bien si la pendiente baja por la derecha la curva es decreciente, y para ello la forma es a través del criterio de la primera derivada, es decir analiza las pendientes (Figura 5.10b).



a) b)

Figura 5.10 Usos Análisis de la curva.

En el diagrama de movimiento también se puede encontrar un uso de la gráfica. Denominaremos a este uso comportamiento de puntos en una recta (Figura 5.11), donde la forma a través de las flechas en cada recta, la flecha indica dirección y la longitud de dicha flecha si acelera o frena, el funcionamiento es a través de la ubicación de los puntos (partículas) sobre una recta.

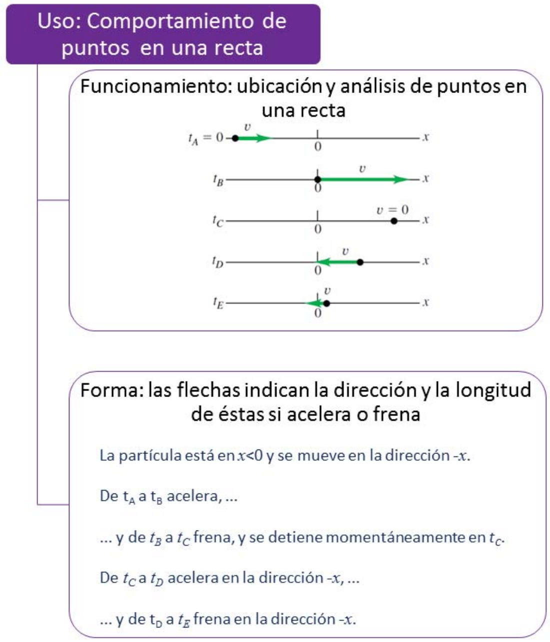


Figura 5.11 Funcionamiento y forma del uso Comportamiento de puntos en el trayecto de una recta.

En el texto (Young y Freeman, 2009, p. 43) se puede leer una aclaración respecto a los diagramas de movimiento, se usarán para entender el movimiento y recomienda al lector que hagan tanto la gráfica $x - t$ y el diagrama de movimiento para los problemas relacionados al movimiento.

Nuestra intención no es comparar los libros de texto sino ver los usos de las gráficas respecto al movimiento. De lo cual pudimos encontrar tres tipos de usos de las gráficas, dos de ellos pertenecientes al discurso matemático escolar y otro más que pertenece a la comunidad de la Física, donde los diagramas de movimiento desempeñan un rol importante y el empleo de las flechas tienen un sentido y significado para esta comunidad.

5.2. Clases teóricas y laboratorio

En total se observaron 5 clases, de las cuales, 4 fueron clases teóricas y 1 clase de laboratorio. Las clases teóricas tuvieron una duración de hora y media y fueron dictadas por uno de los profesores en estudio, mientras que la clase de laboratorio estuvo a cargo de otro profesor y tuvo una duración de 3 horas. Los profesores de las clases observadas están en continuo contacto para coordinarse con el mismo tema. Estas clases se grabaron en video y audio para su posterior análisis, esto se llevó a cabo con la autorización de los profesores y estudiantes.

Dentro de las actividades desarrolladas por el GTE se encuentran el desarrollo de materiales educativos que contribuyen a la enseñanza en las carreras que imparten clase; así como también el desarrollo de experimentos de bajo costo y tecnologías que permitan medir y masificar el uso de estos experimentos en el laboratorio. Es por ese motivo que existe una gran comunicación y coordinación en cuanto a las clases de cátedra y laboratorio; esto se pudo ver en las clases observadas ya que ambos casos se emplearon guías desarrolladas por el GTE que pertenecen a la Galería de Galileo.

Para el análisis Socioepistemológico de usos de gráficas nos apoyamos en el constructo binomio modelación-graficación (Suárez, 2014; Suárez y Cordero, 2008), y en los usos encontrados en Cen (2006); Cordero, Cen, y Suárez (2010); Cordero y Flores (2007). Estos trabajos nos proveen de aspectos teóricos para analizar el uso de las gráficas y su funcionalidad en una situación específica y en una comunidad en particular.

5.2.1. Clases teóricas observadas

El sistema empleado por el profesor es ocupar la pizarra, también realiza preguntas dando lugar a la reflexión y esperando una respuesta por parte de los alumnos propiciando la discusión; utiliza la pizarra para explicar el tema apoyándose con diagramas como los que aparecen en los libros de texto, expresiones algebraicas y algunas gráficas cartesianas.

Lo que se puede observar de las clases es el uso de una gran variedad de diagramas y figuras que expresan elementos y condiciones del fenómeno estudiado. Las gráficas cartesianas que aparecen permiten ejemplificar las condiciones del problema y en algunos casos corregir errores. Tomaremos algunos ejemplos para evidenciar el uso que da a las gráficas.

En estas clases se emplearon guías y videos de la Galeria de Galileo del tema relacionado a Trabajo y Energía. La serie de clases se inician con la definición de Trabajo con la ecuación $\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}$

Tomando como referencia el libro de texto de Física (Young, Hugh y Roger, 2009) mencionado por el profesor en clase, tenemos lo siguiente:

> *Definimos el trabajo W realizado por esta fuerza constante en dichas condiciones como el producto de la magnitud F de la fuerza y la magnitud s del desplazamiento:*
>
> $\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{s}$ *(fuerza constante en dirección del desplazamiento rectilíneo)*
>
> (Young y Freeman, 2009, p. 182)

Para explicar la definición anterior, el profesor considera un auto moviéndose de Valparaíso a Santiago, que recorre 120 km de distancia, lo cual se puede representar mediante un diagrama donde una partícula puntual se mueve entre dos puntos dados; la flecha indica la dirección. Una partícula a la cual se le aplica una fuerza F que se mueve una cierta distancia *d* (Figura 5.12).

Figura 5.12 Diagrama empleado por el profesor.

Continúa con una de las actividades pertenecientes a la Galería de Galileo (disponible en http://laplace.ucv.cl/GaleriaGalileoDVD/index.html), en el video se puede apreciar: “Tres masas iguales son sostenidas usando sistemas de una, dos y tres poleas. Cada sistema de poleas es accionado bajando los hilos con la misma rapidez constante.” (Figura 5.13).

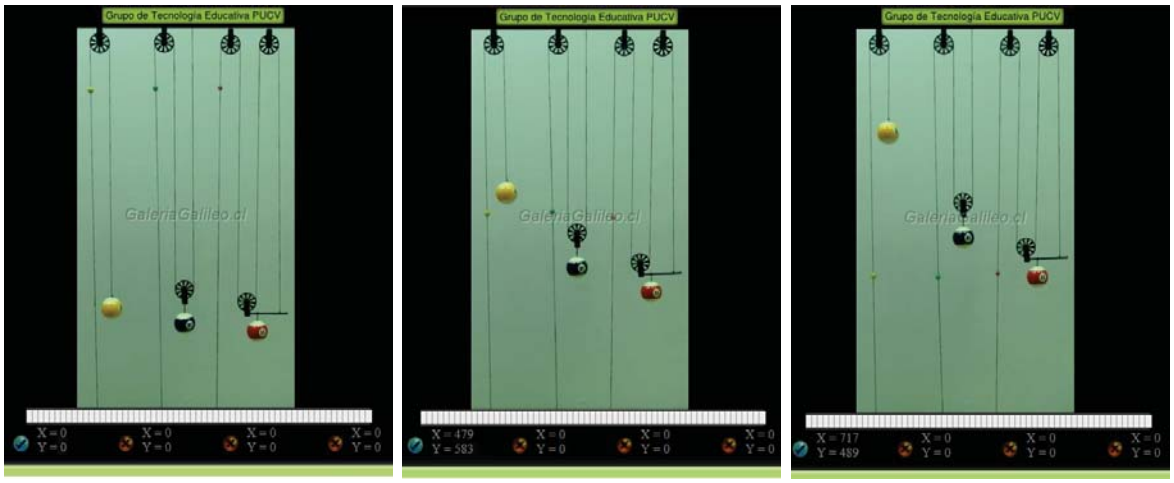


Figura 5.13 Secuencia del video del Sistema de poleas.

Pregunta ¿Cómo es el trabajo que se realiza en cada uno de los hilos que sostiene cada una de las masas? ¿Qué puede saber de las fuerzas que ejercen cada cordel (hilo)?

Para explicar esto, el profesor emplea un diagrama (Figura 5.14) en el cual considera un cuerpo donde hay dos fuerzas actuando, una hacia abajo y otra hacia arriba. Pregunta ¿Cómo saber cuál de esas dos fuerzas es más grande? Considera 2 opciones más, donde la tensión (fuerza) del hilo va hacia abajo y otra donde va hacia arriba.

Figura 5.14 Diagrama de tres poleas.

Uno de los estudiantes, responde que: la tercera (la figura de la derecha) va bajando, la segunda (la del medio) debe ir subiendo, y la primera (la de la izquierda) debe estar quieta. La frase “el cuerpo va subiendo”, está relacionado con el cambio de posición.

El profesor realiza preguntas relacionadas con la aceleración, velocidad y posición, teniendo en cuenta que el peso de las pelotas es el mismo en los tres casos.

El profesor señala que la velocidad puede ir aumentando, para ello emplea flechas, cuyo tamaño indica si la velocidad aumenta o disminuye (Figura 5.15) pero la aceleración va hacia abajo.

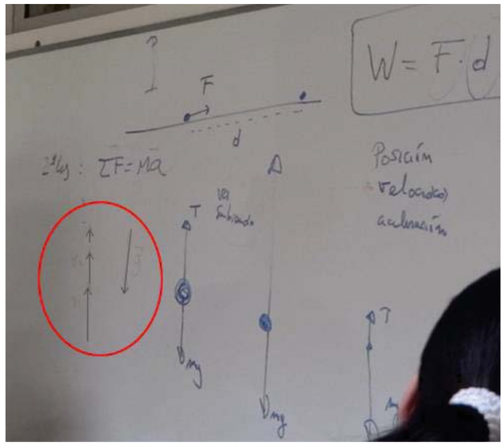


Figura 5.15 Diagrama empleado durante la explicación en clase.

Se mueven con velocidad constante, sin embargo, la velocidad de una partícula con respecto a la otra es el doble, la tensión es la misma y la aceleración es cero.

Fijándose en las poleas de la izquierda y la del medio (pelotas amarilla y negra respectivamente), el profesor señala que: “Del movimiento deduzco, que las fuerzas son iguales; como un cuerpo avanza el doble de distancia entonces el trabajo es el doble”

Para la explicación, el profesor se basa en analizar los conceptos físicos a través del diagrama, es decir podemos ver que hay un uso en el cual se analiza el movimiento de las poleas, donde el funcionamiento está dado por el análisis del trabajo ejercido en las poleas, para dicho análisis se comparan las distancias recorridas en dos de los casos presentados (las pelotas amarilla y negra) y en este caso las fuerzas es la misma en ambos casos. Lo anterior se puede resumir en la Figura 5.16, donde hemos denominado al uso análisis del trabajo ejercido en las poleas.

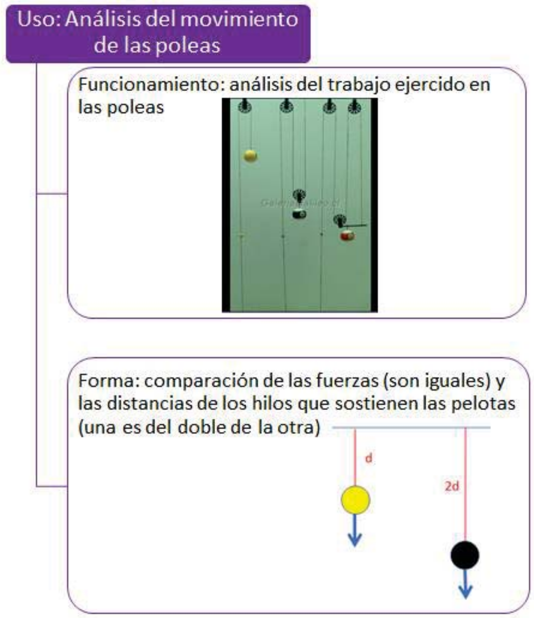


Figura 5.16 Funcionamiento y forma del uso Análisis del trabajo ejercido en las poleas.

Durante la explicación, el profesor indica que no presenta el problema típico: "Cuánto es el cambio de velocidad Δv_1 la partícula en el primer tramo" (Figura 5.17), que ello llevaría a aplicar una ecuación, $\Delta v_1 = g\Delta t_1$, en vez de hacer un análisis de los elementos que intervienen en el fenómeno, como el hecho que las aceleraciones son iguales.

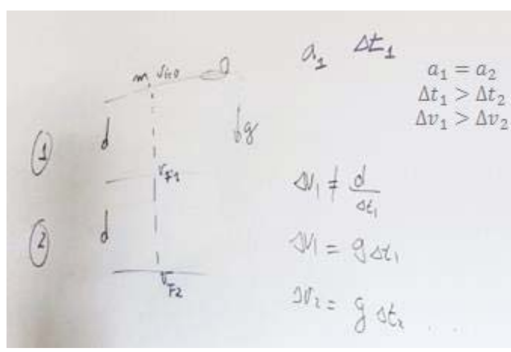
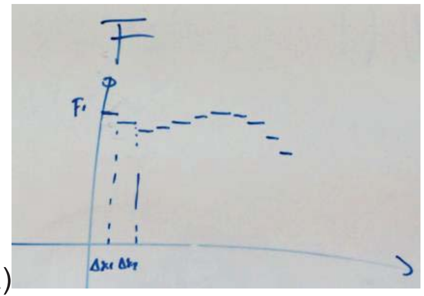


Figura 5.17 Diagrama empleado para un ejemplo típico de cambio de velocidad.

Los diagramas en conjunto con las expresiones algebraicas ocupan parte de las explicaciones en clase. Las gráficas cartesianas igual aparecen, los usos de las gráficas encontradas son del tipo análisis de la curva.

El profesor, en otro momento de la clase, hace uso de gráficas cartesianas para explicar el concepto de trabajo. Indica que la fuerza no depende explícitamente del tiempo sino de la posición donde está el objeto, dando como ejemplo el resorte.

Para explicar lo anterior, lo que hace es considerar distintas fuerzas (f_1, f_2, f_3,…) en pequeños intervalos de tiempo ($\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$) lo que permite obtener una sucesión de "pequeñas fuerzas" que ubica en el plano cartesiano (Figura 5.18 a); lo anterior puede aproximarse a una curva (Figura 5.18 b).

a) 

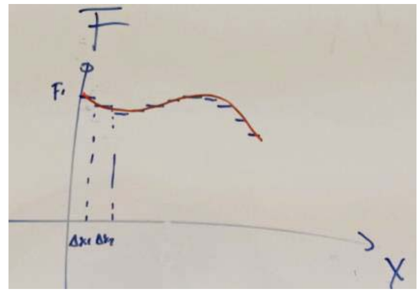
b) 

Figura 5.18 a) Ubicación de fuerzas en el plano cartesiano, b) aproximación a una curva de las fuerzas.

El profesor agrega que, dicho de otra manera, hay una zona de espacio donde un cuerpo que entra con una cierta rapidez por segundo (V_1) y se encuentra en esa parte de movimiento con una fuerza F_1, y en siguiente tramo sale con una rapidez V_2 con un afuerza F_2, y así en cada tramo de la zona hasta llegar a L con una velocidad final (vf) (Figura 5.19).

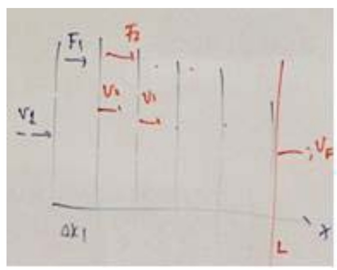


Figura 5.19 Diagrama que muestra en espacio dividido en tramos donde un cuerpo entre con cierta rapidez.

Lo que lleva a calcular el trabajo en los intervalos dados, que algebraicamente se obtiene lo siguiente, donde $\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética. El profesor, recurre al libro de texto para explicar que "*el trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula*" (Young, Freeman, 2009, p.187):

$$F_1\Delta x_1 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

$$F_2\Delta x_2 = \frac{1}{2}m{v_3}^2 - \frac{1}{2}m{v_2}^2$$

$$F_3\Delta x_3 = \frac{1}{2}m{v_4}^2 - \frac{1}{2}m{v_3}^2$$

$$\vdots$$

$$F_n\Delta x_n = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{1}{2}m{v_{n-1}}^2$$

Para calcular el Trabajo, se realiza la sumatoria de cada uno de los trabajos realizados en los intervalos de tiempo. Lo que permite concluir que el trabajo final es el área bajo la curva, donde la altura de cada franja representa la fuerza promedio en ese intervalo. Es decir, una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final. El porfesor enfatiza que matemáticamente puede calcularse con una integral (Figura 5.20).

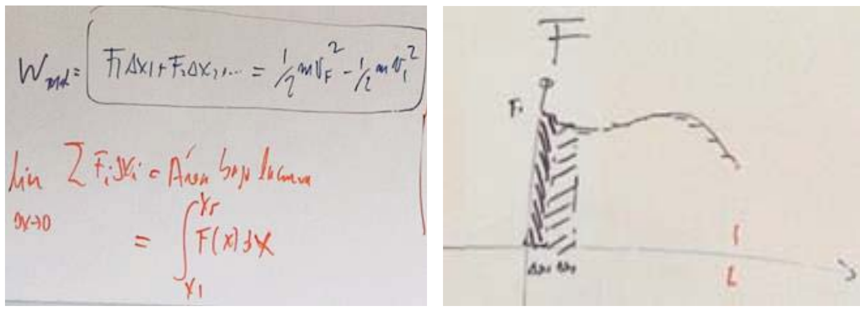


Figura 5.20 Porciones de lo pizarra durante la explicación del profesor.

Con lo anterior podemos ver un uso de las gráficas donde el funcionamiento es la distribución de “pequeñas fuerzas” en el plano cartesiano, y la forma es através de considerar rectángulos donde la altura de cada rectángulo representa la fuerza promedio en ese intervalo (Figura 5.21).

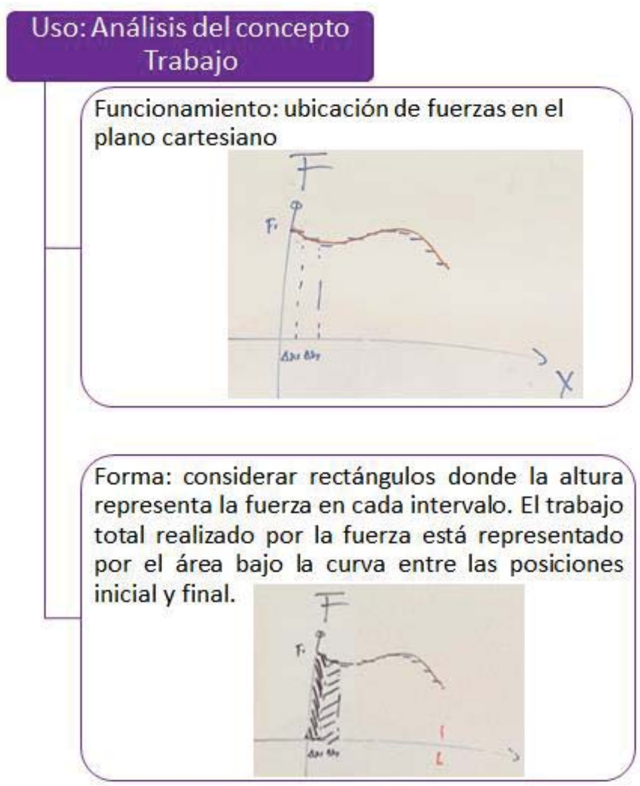


Figura 5.21 Funcionamiento y forma del uso Análisis del concepto de función.

5.2.2. Clase de laboratorio observada

El laboratorio cuenta con mesas redondas para promover la discusión entre los alumnos, con computadores como herramientas para graficar y obtener datos de un experimento. En ese ambiente se desarrollan experimentos; para los temas relacionados a Mecánica se emplean computadores en red con cámara web para grabar videos y con éstos hacer análisis de movimiento.

La sesión duró 3 horas, con grupos de 4 ó 5 personas (32 estudiantes en total), formándose 7 equipos, los cuales trabajaron con una guía proporcionada por el profesor. El tema era la Segunda Ley de Newton. La guía consta de cuatro actividades, con 3, 7, 5 y 6 preguntas respectivamente. Durante la sesión los grupos sólo alcanzaron a responder las dos primeras actividades, así que sólo nos enfocaremos a ellas en el presente reporte.

El profesor trabaja con una guía cuyo objetivo es entender cómo aplicar correctamente la Segunda Ley de Newton; para ello se analiza el movimiento de dos masas unidas por un cordel que pasa por una polea con poco roce. La guía es entregada a los estudiantes para que respondan de manera grupal, con el fin de generar discusiones entre ellos; el profesor interviene para generar un análisis más profundo de la gráfica: comparando datos con la gráfica obtenida, reflexionando en el fenómeno y el comportamiento de la gráfica, repensando en los posibles errores cometidos por los estudiantes y la gráfica del fenómeno.

La actividad 1 pide a) representar a través de un diagrama el experimento indicando las fuerzas que actúan sobre las masas. Además, deben proponer dos gráficas, b) la primera debe relacionar la coordenada y de la masa que baja en función del tiempo inicialmente con el sistema en reposo y c) la segunda gráfica con la coordenada v_y de la masa que baja en función del tiempo (Figura 5.22).

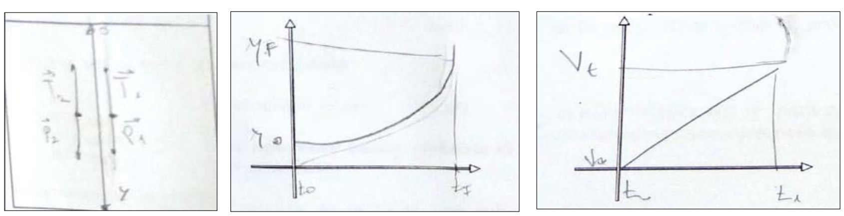


Figura 5.22 Diagrama y gráficas b y c propuestas.

Para realizar la actividad 2, los estudiantes tienen que desarrollar y grabar el experimento; con ayuda de las cámaras acceden a un software donde se ingresan los datos y éste arroja una gráfica. El grupo tiene que predecir respecto a la aceleración de la masa y la aceleración de la gravedad, para posteriormente comparar con los datos que da el software (Figura 5.23). También las gráficas de la actividad anterior deben coincidir con las del software.

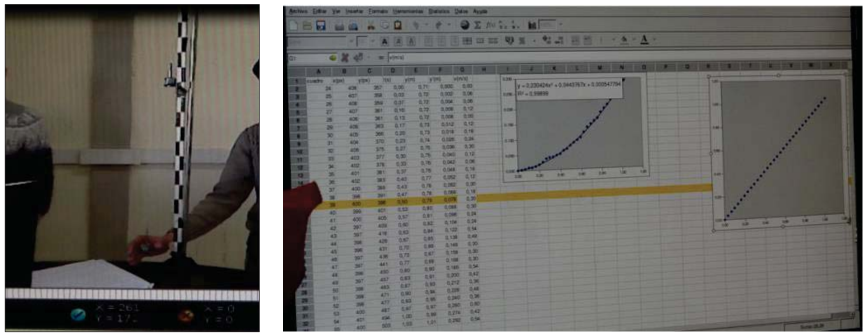


Figura 5.23 Grabando el experimento y usando el software.

El desarrollo de las actividades 1 y 2 otorga un rol trascendente a la gráfica. *Iniciar la actividad con el hecho de proponer una gráfica del fenómeno, no sólo ayuda a comprender cuales son las condiciones necesarias para que ocurra dicho fenómeno, además permite predecir* (Lara y Morales, 2017, p. 881). El profesor hace énfasis en el uso de la gráfica, tanto al inicio de la actividad como al momento de emplear el software, acentuando que la forma de ésta ayuda a reconocer errores ya sea en los datos o en la interpretación de éstos. La gráfica es un medio de análisis y argumentación. La mayoría de las gráficas propuestas (6 de 7 equipos) coinciden con las que ofrece el software.

De acuerdo con la manera de llevar la actividad en el laboratorio, es posible ver una trayectoria de construcción como la de modelación-graficación propuesta por Suárez y Cordero (2008, p.57). Lo que podemos expresar en el siguiente ciclo (ver figura 5.24):

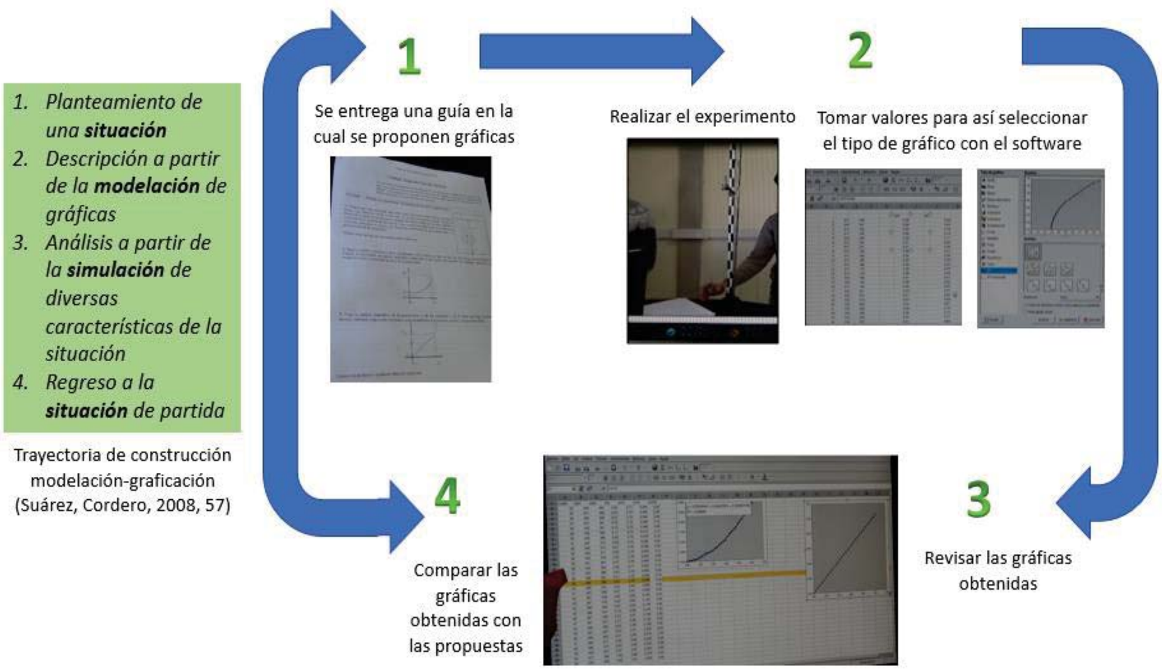


Figura 5.24 Ciclo modelación-graficación encontrado en el laboratorio.

Analizando con más detalle los usos de las gráficas podemos observar que aparecen dos tipos de usos: distribución de puntos y análisis de la curva (Cen, 2006) (ver Figura 5.25). Estos usos pertenecen al discurso matemático escolar que prevalece hasta ahora.

Distribución de puntos: Al grabar el experimento se almacena una serie de datos que aparecen en unas tablas, y que posteriormente se grafican en el plano cartesiano, si bien es el software que lo realiza, existe una gráfica propuesta previamente que hace referencia al experimento realizado; la forma son las tablas de valores, que se obtienen a través del software empleado al realizar y grabar el experimento; el funcionamiento es a través de la ubicación de puntos en el plano cartesiano (ver figura 5.25).

El análisis de la curva aparece cuando se hace un análisis global de la curva. El hecho de proponer unas gráficas iniciales permite tener una idea global del comportamiento del fenómeno, el análisis se enfoca en la aceleración con que baja la masa. Posteriormente utilizan la página web para obtener algunas coordenadas y a través del software se obtienen gráficas para *y(t)* y *v(t)*. El funcionamiento[17] es el análisis del comportamiento máximos y mínimos, si es creciente y dónde, la forma es mediante la tabla que muestra las variaciones (ver figura 5.25).

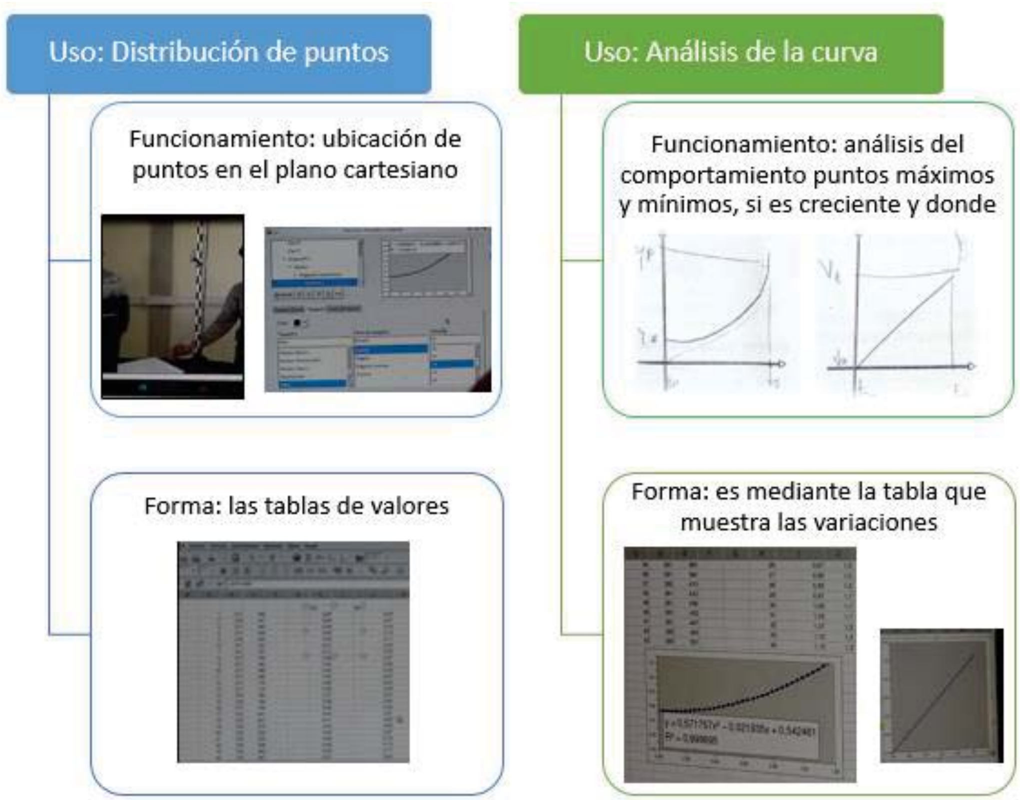


Figura 5.25 Uso Distribución de puntos y Análisis de la curva.

[17] El funcionamiento son las acciones, ejecuciones, u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, en cambio la forma son las clases de esas acciones, acciones u operaciones.

5.3. Artículos representativos

Para la revisión de artículos se seleccionaron los representativos en los cuales participaron los dos académicos físicos, y que forman parte de las investigaciones del GTE.

Estos artículos han sido publicados en revistas dedicadas a la Física y la enseñanza de la esta ciencia, tales como: *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, Fire Technology, European Journal of Physics, Estudios Pedagógicos, Science & Education, Journal of Physics: Conference Series.* Las publicaciones fueron realizadas dentro del período 2008-2015.

A continuación, describimos los artículos revisados. Destacamos el título de la publicación, el objetivo general del artículo y el rol identificado que desempeña la gráfica:

- En Vera, Rivera, Fuentes y Romero (2015) se presenta una secuencia de experimentos relacionados con el fenómeno de caída libre, a fin de mostrar el potencial que tiene el uso de experimentos. Los experimentos que muestran son: Caída libre de un zapato y una moneda (se acompaña de una imagen); Fricción y caída libre (se acompaña de una imagen y una gráfica); Un error de más de 100 años (se acompaña de una imagen y una gráfica); Una regla pivoteada (se acompaña de una imagen y una gráfica); Una versión alternativa de la regla pivoteada; Un martillo que se mueve en 2D (se acompaña de una gráfica). La gráfica se presenta en algunos experimentos, pero tiene un carácter informativo, no se trabaja la gráfica propiamente en el artículo, en otras palabras, no se desarrolla, ni se construye, solo se presenta a raíz de la realización de un experimento.
- Vera; Rivera y Núñez (2014) aborda la tercera Ley de Newton a través de un experimento relacionado con la fuerza del agua en la manguera de incendios. Los autores indican que hay una explicación errónea, la cual se ha difundido ampliamente y está presente. Citan algunos ejemplos: en empresas que venden las boquillas, en bomberos documentos de formación, en los libros de texto de física cursos de física y de conocidas universidades, indican una mala aplicación de la Tercera Ley de Newton.
  En este artículo la gráfica es solo informativa
- En Vera, Rivera y Ortíz (2013) se muestra el experimento de medir la ley del cuadrado inverso para la irradiación en función de la distancia a un punto fuente de luz. Para ello, se diseña un aparato simple de bajo costo que puede usarse en condiciones de luz diurna. La gráfica de iluminancia en función de la distancia del experimento realizado muestra un exponente de -1. 99, un valor muy cercano al exponente -2 de la inversa ley cuadrada, es decir, la gráfica da evidencia que respalda la construcción teórica de la ley de la inversa del cuadrado.
- La Galería de Galileo, es uno de los trabajos que han usado, en clases y en talleres, por ello Vera, Rivera y Fuentes (2013) elaboran un artículo abordando este proyecto. El foco se encuentra en la utilización de videos que permite a

los alumnos aprender en base a la indagación, haciendo predicciones, formulando hipótesis y contrastándolas luego con los resultados de los experimentos. La metodología utilizada en cada experimento puede resumirse como predecir–confrontar–resolver.
Las guías generadas dentro del proyecto están pensadas para ser proyectadas en una sala de clase tradicional y están diseñadas para que el profesor pueda guiar a los alumnos en una discusión del fenómeno observado. Al comienzo de cada situación se muestra el experimento, y luego de que el alumno hace predicciones se muestra el video del experimento y se discuten sus resultados. En este caso, la gráfica tiene un carácter informativo, no se desarrolla, ni se construye, solo se presenta a raíz de la realización de un experimento como algo que entrega información del todo.

- El experimento de caída libre se aborda en Vera y Rivera (2011). La idea central del artículo está relacionada con el experimento donde un pequeño trozo de papel se coloca sobre un libro y el sistema se deja caer. La intención de los autores es probar si un papel cae detrás del libro casi en caída libre movimiento o si es arrastrado por el libro. Para ello diseñan una versión de este experimento que incluye una pelota y un pedazo de papel sobre un libro que es forzado a caer mediante cordones elásticos. El propósito del artículo es demostrar el carácter erróneo de la actual explicación típica de este experimento y así impedir que se siga utilizando.
- La gráfica es obtenida a partir del video, el cual fue convertido en una secuencia de imágenes que se muestran en una página web que contiene un software que permite al usuario realizar un seguimiento de las coordenadas. Sin embargo, en el artículo aparece al final con un rol informativo, no se construye ni se centra en ella.
- En Vera, Rivera y Núñez (2011) se revisa brevemente la historia detrás del experimento de vela y su relación con algunos de las típicas explicaciones erróneas. Los autores realizan versiones de los experimentos, confirmando los resultados de Lavoasier. Aquí se puede observar que la gráfica aparece, pero sólo se presenta como parte de lo que el software ofrece.
- El experimento de caída libre se aborda en Vera y Romanque (2008). Se destaca la importancia de usar video(s), tomar secuencias de imágenes por medio de un software ubicar coordenadas y con ello analizar el experimento a través de una hoja de cálculo. En este caso, la gráfica tiene un carácter informativo, no se desarrolla, ni se construye, solo se presenta a raíz de la realización de un experimento.

En el caso de los artículos, encontramos que las gráficas desempeñan por lo general un rol informativo, incluso el escrito podría prescindir de la gráfica.

5.4. Entrevista

La elaboración de la entrevista fue llevada a cabo con el fin de situar al experto en dos momentos: M_1) En el aula y M_2) En investigación. La validación de esta fue realizada por dos expertos en el área. Se adoptó el formato semiestructurado para la entrevista, ya que nuestro interés fue el de explorar la postura del entrevistado, dando así la posibilidad de instalar un diálogo fluido con el entrevistado, quien puede agregar los comentarios que considere adecuadas.

Las transcripciones de la entrevista especialmente diseñada para este trabajo recogen información del rol de la gráfica asignado en la construcción del conocimiento científico relacionado a la física y de las experiencias personales del entrevistado en torno de este tema.

Los momentos y las preguntas planteadas fueron las siguientes:

M $_1$: En el aula

1. ¿Qué ramos de física imparte y a qué grupo?
2. ¿Cuál es la bibliografía que emplea y recomienda en clase?
3. ¿A qué se debe la elección de dicha bibliografía?
4. ¿Podría darnos un ejemplo de cómo explica el tópico relacionado a la velocidad?
5. ¿Surge algún tipo de dificultad con las variables en las gráficas?
6. Desde su perspectiva cómo usan las gráficas
7. ¿Cuáles son las dificultades que identifica con respecto a las gráficas en los estudiantes?

M $_2$: En investigación:

8. ¿A qué área de investigación se dedica?
9. ¿Qué tema es el que está desarrollando actualmente?

La entrevista se llevó a cabo en el laboratorio en el cual trabaja el experto para realizar diversos experimentos relacionados a sus investigaciones. La entrevista fue grabada en audio y video.

Las preguntas del M$_1$ son enfocadas a la labor en el aula del Físico (F) como profesor universitario. En este apartado se mostrarán extractos de algunas de las respuestas dadas al Entrevistador (E) que evidencian el rol de las gráficas al momento de impartir clases (pregunta 1).

De lo cual podemos resumir cuatro aspectos a destacar de la siguiente manera: los cursos, libros de texto, el tópico de velocidad, los errores respecto a las variables y la investigación del GTE.

Respecto a los cursos: El profesor imparte los ramos de Laboratorio de Introducción a la Física y el Laboratorio de Mecánica y en cursos avanzados algunos ramos de Pedagogía; por lo que en laboratorio desarrollan experimentos en su mayoría relativos a Mecánica. El profesor menciona que los cursos de Laboratorio y Teoría (el curso teórico es realizado por otro profesor) son separados pero complementarios, de manera que, los alumnos puedan medir lo que están avanzado en cátedra.

Respecto a los libros de texto: Se debe indicar que el profesor tuvo la oportunidad de trabajar directamente con el currículo de las Licenciatura y Pedagogía de Física de la universidad en la que trabaja.

> F: Finalmente es una idea mía de simplificar la bibliografía […] agarré los curriculum de la licenciatura y pedagogía y traté de que cada curso tuviera un libro guía […] que nos aseguremos

> que la materia se pase de acuerdo a los niveles de un libro [...] Nosotros usamos el Serway […]. La elección es porque es un libro estándar en donde está todo bien explicado, […] tiene introducción, un poco de historia. […]. El Serway es un libro estándar y no es muy complicado […] en clase se genera la discusión y los alumnos tienen el libro. […] ocupamos mucho lo que es el gráfico, cuando hay análisis de movimiento lo que ellos siempre tienen que hacer es graficar.

Respecto al tópico de velocidad el profesor dio un ejemplo de cómo abordan este tema:

> F: Al principio toman los datos a mano; les pasamos un autito de juguete que anda súper despacio […] existe una aplicación para el teléfono celular que es esencialmente un cronómetro de "time lap" donde tu cada vez que das una vuelta a una cancha tu marcas para ver a qué ritmo vas dando vuelta […]. Nosotros tenemos nuestros rieles para poder ver cómo van avanzando […]. Para medir tiempo al principio, nosotros lo hicimos con la calculadora, ellos tiran su autito que anda muy lento, entonces cada vez que pasan por la marca que ellos hicieron van haciendo click. Después el teléfono les muestra en que tiempo pasó el autito en cada uno de los puntos y ellos grafican eso en papel. Pero nos interesa mucho eso que ellos vean el movimiento, la tabla de datos que salen y lo pasen al gráfico

Otro de los aspectos se encuentra relacionado con las variables al momento de graficar (pregunta 5). Indica errores con las variables y de cómo las gráficas pueden dar evidencia de conceptos erróneos que los estudiantes tienen (preguntas 6 y 7). Por ejemplo, señala las dificultades que pueden tener con las variables y pide a los estudiantes que enfoquen su análisis en las gráficas.

> E: ¿Encuentra alguna dificultad en las variables?
> F: En qué es lo que tienen que graficar sí. Lo que pasa es que uno sabe lo que hay que graficar pero ellos no. Por ejemplo: la definición de pendiente, que es lo que les interesa a ustedes $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, pero aquí llegan con que $v = \frac{d}{t}$, entonces toman una posición y la dividen por el tiempo y eso no es, y es difícil sacarles eso.
> E: ¿Tú supones que ellos vienen con eso?
> F: Vienen con unas variables que entienden, pero las entienden mal.
> E: ¿Cómo abordan eso?
> F: Lo que hacemos es que hagan todo, que calculen de las dos maneras y que vean que es distinto […]. La idea es que ellos discutan […] el profesor entra en la discusión una vez que ellos hayan discutido […].
> Les hacemos construir gráficos cualitativos, […] pedimos que construyan el gráfico Posición vs. Tiempo, entonces aparentemente es difícil porque no es el típico gráfico de una parábola o línea recta. Les decimos ustedes ven el gráfico y grafican las variables, pero después tiene que afinar el ojo, tiene que hacer el gráfico, pero ahora van viendo las pendientes: Entonces el mismo gráfico (posición vs tiempo) van viendo que pasa con las velocidades y eso es de un grado de abstracción un poquito más allá. Entonces una vez que llegan a entender el gráfico y además entender las pendientes que se comportan de tal manera realmente están aprendiendo a leer el grafico y poder hacer el gráfico.
> […]. Los alumnos saben pasar los datos a un gráfico, les pedimos que entiendan por qué están pasando las diversas cosas.

El momento 2 (M_2) se encuentra relacionado con lo que el entrevistado realiza en sus investigaciones. Y el rol que las gráficas desempeñan específicamente en la comunidad a la cual pertenece (preguntas 8 y 9). Señala lo que les ha motivado a investigar en la enseñanza de la física y cómo ello les ha permitido generar material para los cursos que imparten (Lara y Morales, 2017).

F: Ganamos un par de Fondecyt[18] […]. Hacemos experimentos que sean de la vida diaria. […] Lo que hicimos antes es desarrollar material para el curso de Mecánica […], Mi colega ahora se extendió a Electromagnetismo y yo me fui por experimentos impactantes. Lo que estoy haciendo es buscar motivar a los alumnos, que se motiven por la ciencia mostrándoles experimentos de verdad pero que sean sorprendentes. […]. Desarrollar experimentos para empezar la clase y que la clase gire en torno al experimento.

E: Qué herramientas empleas para comunicar tus ideas.

F: […] Muchas de nuestras publicaciones están relacionados con problemas que están mal explicados en libros como ejercicios resueltos. […]. El foco está en la enseñanza, hay un problema general en educación, no se motiva en la ciencia. Nuestro foco es que llegue a Media y Básica pero el proyecto lo centramos en Superior con los profesores de Física en formación.

E: La gráfica ¿En qué sentido es potente en el plano disciplinar?

F: Tú siempre tienes un modelo, algo está pasando y tú representas tus variables en un gráfico y ves mucho mejor las tendencias […] Ciertos tipos de gráficos te iluminan. […] Por ejemplo: Kepler a través de los gráficos se dio cuenta que los planetas giran alrededor del sol, eso fue un gran avance […]. Además, está el caso de Newton. […]. El gráfico es una tremenda herramienta para que entiendan lo que está pasando.

A modo de resumen, podemos señalar que los datos obtenidos en la entrevista dan evidencia que existen dificultades relacionadas en los estudiantes con las variables al momento de graficar. Por otra parte, se reconoce que los estudiantes pueden comprender ciertos conceptos y sin embargo esto no implica que puedan relacionarlos con sus gráficas. Lo anterior coincide con lo mencionado por McDermott *et al*., 1987; Hale, 2000; Laverty y Kortemeyer, 2012.

Otro aspecto relevante es el énfasis que el entrevistado da, como parte de la comunidad de físicos al rol de las gráficas: 1) cuando se lleva a cabo un experimento, para comprender de manera más clara el fenómeno estudiado; 2) reconocer algún tipo de error, el cual puede ser ocasionado al estudiar sólo los datos numéricos. Además, lo relaciona con los hechos históricos, como los casos de Kepler y Newton.

El entrevistado orienta sus investigaciones a la enseñanza con el objetivo de motivar el interés en la ciencia. Diseña actividades para los distintos niveles escolares, independiente si los estudiantes, en un futuro decidan estudiar ciencia o no.

El profesor señala que usa las gráficas para entender y dar sentido al fenómeno estudiado, el interactuar con las gráficas le ayuda a su análisis del fenómeno. Las gráficas aportan a comprender fenómenos y dar sentido a distintos conceptos (matemáticos, físicos, entre otros). Se reconoce que las gráficas en el aula reflejan los datos, pero no necesariamente la comprensión de ellos.

5.5. Una situación propuesta: ¡Vamos de *rafting*!

Entenderemos la situación como la pregunta que propicia una problematización. En este caso en particular, se problematiza el movimiento del fluido (agua) a través de la variación de la velocidad. Para ello recurrimos a la idea de un rio, en el cual un grupo

[18] El Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Fondecyt, tiene por objetivo estimular y promover el desarrollo de investigación científica y tecnológica básica, y es el principal fondo de este tipo en Chile.

de *rafting* desea recorrerlo, pero se pregunta sobre la seguridad, lo que lleva a pensar en las diferentes velocidades del agua en el rio.

Para lo anterior, se presenta la situación en dos partes:

- Se pregunta explícitamente sobre la seguridad del rio, para ello se proporciona una imagen del río con una estructura específica (Figura 5.26 a). Momento en el que el físico responde libremente, y se enfoca en responder respecto al ancho del rio (Lara y Morales, 2018).
- Se agrega una segunda parte, en la que se incorpora 4 diferentes opciones respecto a la base del rio, es decir el suelo (Figura 5.26 b). El físico debe repensar en sus respuestas anteriores y para ello hay que agregar un factor más que tiene relación con el área transversal.

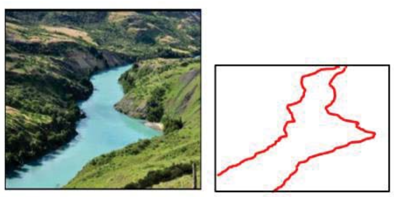
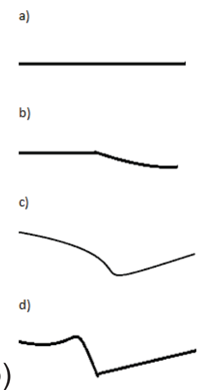
a)  b) 

Figura 5.26 Figuras propuestas: a) Forma del rio, b) Opciones de la base del rio.

La epistemología se relaciona con la Figuración de las cualidades de Oresme, quien *establece relaciones entre figuras geométricas y situaciones específicas de variación* (Suárez y Cordero, 2010. p. 323), Oresme busca construir un dibujo de lo que varía y en particular le interesa describir la variación de las cualidades.

Resultados

Durante el desarrollo de la solución del problema, el académico físico entrevistado presenta respuestas asociadas a lo icónico, aparecen flechas indicando la velocidad, señalando que el tamaño de la flecha indica si la velocidad es menor o mayor. Además, señala lo geométrico, debido a que al cambiar el área cambia la velocidad con la cual se mueve el agua del rio (ver Figura 5.27 letras a, b, c).

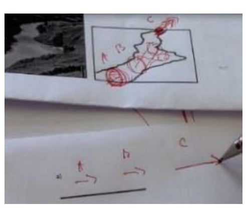
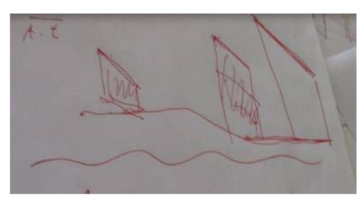
a)  b)  c) 

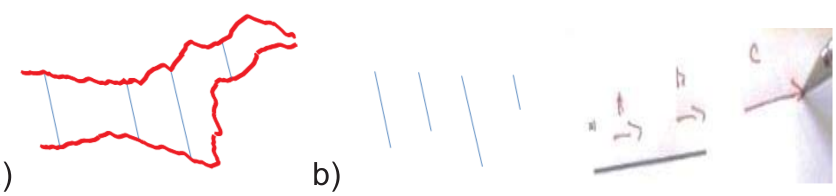
Figura 5.27 Elementos usados por el entrevistado, flechas que indican la velocidad, turbulencias, áreas.

Los usos de las gráficas en una Comunidad de físicos en la situación ¡Vamos de *rafting*!

En esta sección mostraremos las respuestas a las preguntas planteadas y en las cuales se han encontrado los siguientes usos de las gráficas.

En la primera parte de la situación, cuando se pregunta por la seguridad del rio, el cual tiene una forma específica. El físico comenzó a hablar sobre la velocidad, destaca este elemento el más importante, debido a que a los cambios de velocidad pueden aumentar los riesgos.

Así que, lo primero que hace es fijarse en el ancho del rio, el cual se modificaba de acuerdo con la sección del rio; para hablar sobre estas distintas medidas recurre a colocar segmentos de distinta longitud en la figura del rio (Figura 5.28 a). Mientras más ancho sea el río la velocidad es pequeña, y si es más estrecho la velocidad es mayor. En otras palabras, lo que desea hacer, es explicar el movimiento del agua en el rio, lo que hemos denominado Funcionamiento 1: comprender el movimiento del agua en un río, para ello emplea segmentos y flechas que representan la variación de la velocidad del agua como los cambios de medida en los segmentos (Figura 5.28 b), Forma 1: notación gráfica (segmentos y flechas) que representa variación y cambios.



a) b)

Figura 5.28 El ancho del rio es representado por medio de segmentos.

La segunda parte tiene relación con la base o piso del rio, se proponen cuatro opciones en las cuales se debe repensar que pasaría con la velocidad del rio, ya que al agregar este elemento hay que pensar en un área transversal en vez de un segmento; la misma cantidad que entra es la que sale, si tiene mayor área entonces sale más despacio, cambia el área cambia la velocidad, Forma 2: comparación de medidas de la variable física (velocidad) por medio de áreas transversales (Figura 5.29).

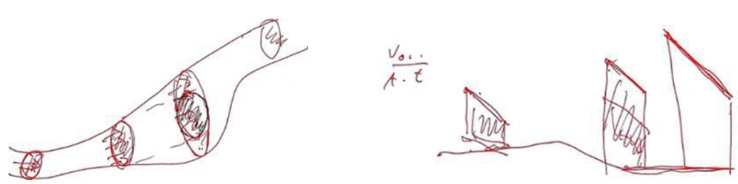


Figura 5.29 Las áreas transversales se relacionan con el cambio de velocidad.

El físico indica que: “De puro ver la figura, sin necesidad de resolver el problema, sabes que la velocidad está cambiando porque están cambiando las áreas transversales” (Figura 5.29), lo que nos lleva al Funcionamiento 2: establecer relaciones entre las figuras geométricas y las situaciones de variación que representan.

Las distintas opciones propuestas llevan a pensar que de acuerdo a la base propuesta, pueden o no haber cambios en la velocidad, por ejemplo en los casos a y b puede ser que no haya mucha diferencia, mientras que el c) señala que ahí el agua puede ser que mantenga una velocidad menor lo que descarta el peligro; ahora el d) es el más preocupante ya que el cambio abrupto puede provocar torbellinos y turbulencias, Forma 3: figuras que representan y que no representan cambios (Figura 5.30).

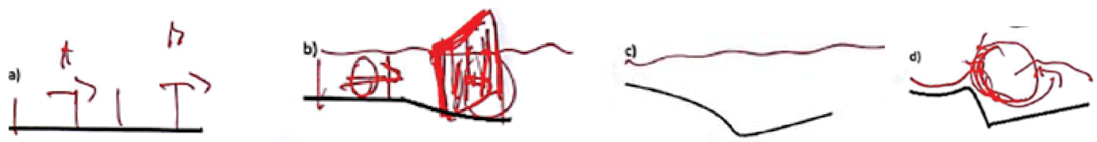
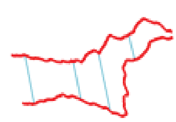
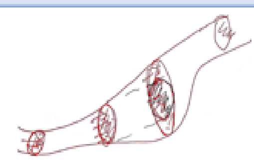
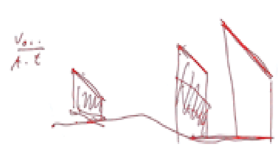
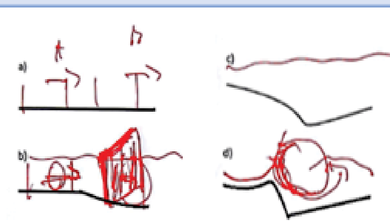


Figura 5.30 Comportamientos de la velocidad de acuerdo con la profundidad del rio.

Al cuestionar el movimiento del fluido (agua) a través de la variación de la velocidad, se obtienen usos de las gráficas que no son los típicos del discurso matemático escolar, pero que en el caso del físico surge de forma natural (Tabla 4.1). Los funcionamientos y formas se basan en la posibilidad de representar diferentes grados (niveles) de velocidad por medio de longitud de segmentos o flechas y los cambios a través de las áreas transversales. Es decir, el uso no se encuentra anclado a la representación analítica, en esta CCM_{Fis} lo icónico tiene gran relevancia; *los elementos icónicos representan lo que cambia en la situación propuesta, y es una manera de expresar conocimiento matemático* (Lara y Morales, 2018, p.1460).

Tabla 4.1 Funcionamiento y forma

Funcionamiento	1: Comprender el movimiento del agua en un río	2: Establecer relaciones entre las figuras geométricas y las situaciones de variación que representan	
	 El río no posee un único ancho sino que a lo largo existen diversas longitudes	 La misma cantidad que entra es la que sale, si tiene mayor área entonces sale más despacio	
Forma	1: Notación gráfica (segmentos y flechas) que representa variación y cambios	2: Comparación de medidas de variable física (velocidad) por medio de áreas transversales	3: Figuras que representan y que no representan cambios
	 Las diferentes longitudes de los segmentos y flechas implican cambio en la velocidad del fluido	 la velocidad esta cambiando por que están cambiando las áreas transversales	

El constructo modelación graficación propuesto por Suárez (2006), nos permite organizar estos usos a través de significaciones, procedimientos y argumentos, expresando así la funcionalidad del conocimiento matemático en una situación específica.

La situación propuesta se basa en el concepto de velocidad, se discute sobre las diferentes velocidades que hay en el caudal de un rio y como estos cambios de velocidad pueden afectar la seguridad al recorrer en *rafting* dicho rio. Para lo anterior, el profesor recurre a a los signifcados de velocidad en un rio, entendiendo que para este caso particular, la velocidad esta relacionada con el área transversal. Pensar en las diferentes velocidades, lleva a procedimientos como: repensar en la estructura del rio, es decir, el ancho del rio no es unico, sino que existen diferentes longitudes a través del caudal; Pensar en el caudal, conlleva a pensar en lo tridimensional, en otras palabras, las distintas áreas transversales; Considerar la existencia de diferentes opciones en la base del rio puede afectar o no en los cambios de velocidad del agua. Al incorporar elementos como la longitud del rio, áreas tranversales, fondo del rio, se generan argumentos gráficos respecto a la variación de la velocidad. Lo cual podemos resumir en la figura 5.31.

Elementos de funcionamiento y forma en: El uso de las gráficas de un físico		Discusión por la velocidad del agua en el río
Modelación -graficación	Significados	Asignación (determinar) una relación entre el área transversal y la velocidad del flujo del agua.
Realizaciones múltiples	Procedimientos	Comparación de segmentos para ver 1) El ancho del rio y así hablar de la velocidad 2) El área 3) El fondo (base) del río
Realizaciones de ajustes		Asociar modelos gráficos para describir la variación de la velocidad.
Desarrollo del razonamiento	Argumentos	Generación de argumentos para identificar cambios de velocidad.

Figura 5.31 Elementos de funcionamiento y forma en el uso de las gráficas de un físico al discutir la velocidad de agua en un rio.

A modo de análisis, podemos destacar que un aspecto que el académico físico destaca en la situación propuesta, y señala que es algo que no se trata en los libros de texto, es que la velocidad del río en un sector determinado no es única. Es decir, la velocidad del centro y de las orillas del río son diferentes, siendo la mayor la que se encuentra cerca del centro, mientras que en las orillas el agua choca con las paredes del río. El académico físico lo describe en la Figura 5.32, recordemos que el tamaño de la flecha indica la variación de la velocidad, lo que lleva a un perfil de velocidades, no hay una única velocidad.

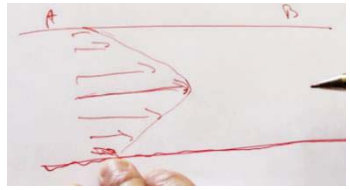


Figura 5.32 Perfil de velocidades.

Para conocer la velocidad en ese sector del río habría que realizar una suma de velocidades, matemáticamente sería realizar una integral de velocidades.

Lo anterior coincide con lo mencionado en “El agua según la ciencia” (Levi, 2001), libro que relata casi 2,300 años de pensamiento científico sobre el comportamiento físico del agua, desde Arquímedes hasta nuestros días; ahí se puede leer que Mariotte[19] se cuestiona respecto a cómo medir las velocidades de un río. Específicamente se preguntan sobre las velocidades de la superficie y el fondo, donde se consideran diversos factores como malezas, piedras y otras irregularidades, por lo que considera que el agua del rio no avanza con la misma velocidad en su superficie y otras partes. Realiza un experimento cuyo resultado muestra que “las velocidades la parte superior del agua corre más rápido que la que está en el centro, y ésta más que la próxima al fondo; pero que, en los ríos forzados a encauzarse en un canal angosto, confinado por ambos lados, en que no haya más que dos o tres pies de agua, el centro avanza más rápido que la superficie. " (Levi, 2001, p. 153). Considerando una sección vertical AB del río, se traza por sus extremos la curva CD, donde las flechas indican las velocidades correspondientes a varios puntos de la sección, se obtiene lo que se llama el “perfil de velocidades” vertical, que tendría el aspecto de la Figura 5.33 a, la Figura 5.33 b es para el caso del canal angosto.

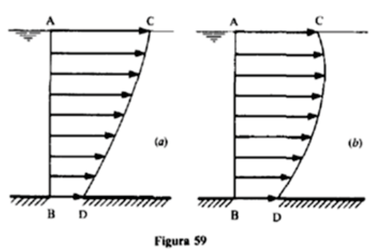


Figura 5.33 Perfil de velocidades vertical.

[19] Edmé Mariotte (1620 -1684) fue un abad, físico y químico francés. Investigó en el campo de la hidrostática, de la hidráulica, y de las propiedades de los fluidos. Reformuló y mejoró la Ley de Boyle. Una de sus investigaciones más consistentes y sistemáticas fue la que Mariotte realizó en el campo de la mecánica de los fluidos, *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides* (Tratado del movimiento de las aguas y de los demás cuerpos fluidos) investigación publicada en 1686, dos años después de su muerte.

De acuerdo con Guglielmini[20] el comportamiento de las corrientes obedece a ocho "reglas" generales, que enuncia y justifica (Levi, 2001, p. 158).

1. *El agua, al iniciar su recorrido en el cauce de un río, va acelerándose, "pero pronto se reduce al movimiento uniforme por las grandes resistencias que encuentra en su avance, como son la poca declividad de los cauces mismos, las grandes desigualdades de los fondos muy a menudo llenos de cantos o grava, los obstáculos laterales en las riberas, las tortuosidades de los ríos, etc.;*
2. *La velocidad uniforme así adquirida es normalmente tanto mayor cuanto mayor es la pendiente del cauce;*
3. *Cuando el río lleva más agua, corre con más velocidad;*
4. *Un angostamiento del cauce que fuer ce a la corriente a elevarse acelera la corriente;*
5. *Un ensanchamiento del cauce que provoque una caída de nivel también la acelera;*
6. *La corriente, si bien puede refrenarse y elevarse por la presencia de un obstáculo o de un cambio de pendiente, luego volverá a adquirir su velocidad y nivel anteriores; pero si los obstáculos continúan, como en un río de fondo pedregoso, casi nunca alcanzará un movimiento perfectamente uniforme;*
7. *La velocidad depende de la pendiente del cauce y del tirante, más de la primera, si ésta es fuerte, y más del segundo, si ésta es reducida; a veces, la pendiente de fondo controla la velocidad de la parte superior de la corriente, y el tirante la velocidad de la parte inferior;*
8. *En una sección transversal del río las velocidades varían de un punto a otro, resultando mayores en los sitios más alejados del fondo y de las paredes, y menores en los más cercanos.*

Donde podemos destacar que el punto número 2, se encuentra relacionado con la situación propuesta al académico, ya que en la segunda sección de la proponen opciones del fondo del río, lo que conlleva a considerar la pendiente (o caída) del mismo. Además, el punto número 8 va de acuerdo con lo mencionado por el profesor y que es algo que se debería destacar y trabajar en las situaciones reales en vez de considerar una situación ideal donde el fluido es perfecto y con velocidad única, para ello se incluye el concepto de integral.

El académico físico al abordar la situación ¡Vamos de *rafting*!, habla de la variación de las velocidades en términos de áreas. Tapia, Molina, Pérez y Torres (2012) indican que, para hacer un análisis de la variación de velocidades en una sección cualquiera, se debe considerar la forma de la sección transversal, pues la naturaleza y características geométricas del contorno definen básicamente la curva de

[20] Domenico Guglielmini (1655 - 1710) fue un matemático, y médico italiano. Sus primeros escritos matemáticos trataron sobre astronomía, pero luego se orientó hacia el estudio de la hidráulica, donde obtuvo importantes reconocimientos. Entre sus obras de hidráulica destacan el libro dedicado a la medición de las corrientes: *Aquarum fluentium mensura nova methodo inquisita* (Medición de las aguas corrientes investigada por un método nuevo, 1690), y su trabajo de hidráulica fluvial La *naturaleza de los ríos* (1697), considerada la base de la hidráulica fluvial moderna.

distribución de velocidades, es decir hay que considerar elementos como *la rugosidad de paredes y fondo del cauce* (Mejía y Rosas, 2016, p.20).

Es interesante notar que en física al hablar de velocidad instantánea de un auto se relaciona con la derivada, en la Sección 4.3 se señala que el libro de texto muestra cómo la velocidad instantánea es igual a la derivada de x respecto a t, lo que gráficamente se representa en un plano cartesiano. Sin embargo, al hablar con el académico sobre la velocidad del agua en un río conlleva repensar en la velocidad en términos de figuras geométricas, áreas transversales (Figura 5.34); al analizar con mayor precisión se puede notar que existe un perfil de velocidades.

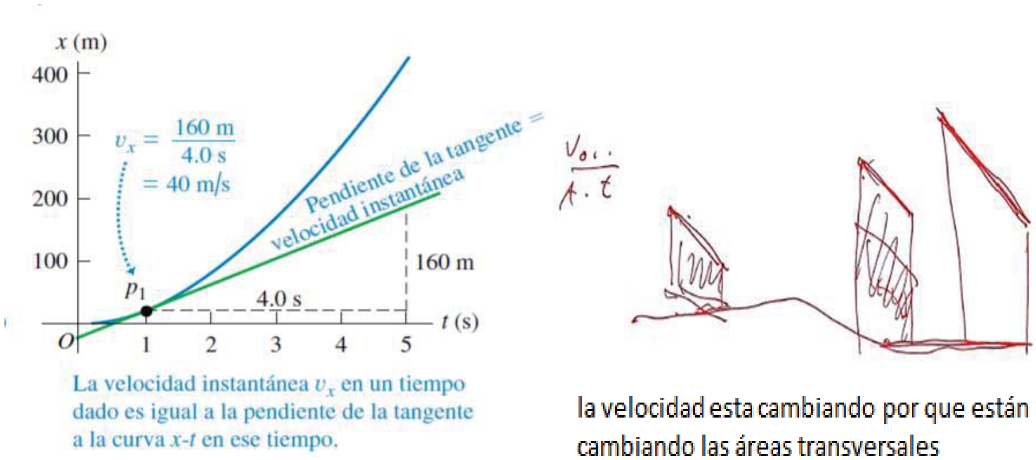


Figura 5.34 Velocidad instantánea del recorrido de un auto (Young y Freeman, 2009, p. 42), velocidad del agua en un río (producción del académico físico).

La situación nos ha permitido notar que trabajar la velocidad, si bien se puede recurrir a la derivada, también se puede abordar como variaciones de áreas; y si además se considera el perfil de velocidades desde la Física puede considerarse como un campo vectorial el cual se puede abordar como un gradiente, ya que el vector gradiente de f evaluado en un punto genérico $\boldsymbol{x}$ del dominio de $f, \nabla f(x)$, indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

En Tapia *et al.*, (2012) se señala que un método para medir velocidades en cauces naturales es por medio de dovelas, esto consiste en tomar una sección transversal y dividirla en franjas verticales sucesivas (Figura 5.35). Posteriormente se usa un instrumento de medición de velocidades y se registra dicha velocidad, *se determina midiendo a 0.6 de la profundidad en cada vertical, o bien tomando el promedio de las velocidades a 0.2 y 0.8 de la profundidad, cuando requerimos resultados más confiables*, el *promedio de velocidades en cada una de las verticales es multiplicado por el área entre verticales, lo que da como resultado el caudal de esa franja vertical o dovela. La suma de los caudales a través de todas las franjas es el caudal total. La velocidad media en toda la sección es igual al caudal total dividido entre al área completa* (p.p. 10-11).

Es decir, se tiene: $Vm_i = \frac{V_{0.2}+V_{0.8}}{2}$ ó $V_{0.6}$

$$Q_i = A_i * Vm_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Donde:

Vm_i = Es la velocidad media en cada franja vertical o dovela *i*

$V_{0.2}$ = Es la velocidad al 20% de la profundidad medida desde la superficie libre hacia el fondo.

$V_{0.6}$ = Es la velocidad al 60% de la profundidad medida desde la superficie libre hacia el fondo.

$V_{0.8}$ = Es la velocidad al 80% de la profundidad medida desde la superficie libre hacia el fondo.

Q_i = Es el caudal en la franja *i*

A_i = Es el área en la franja *i*

Q = Es el caudal total en la sección transversal

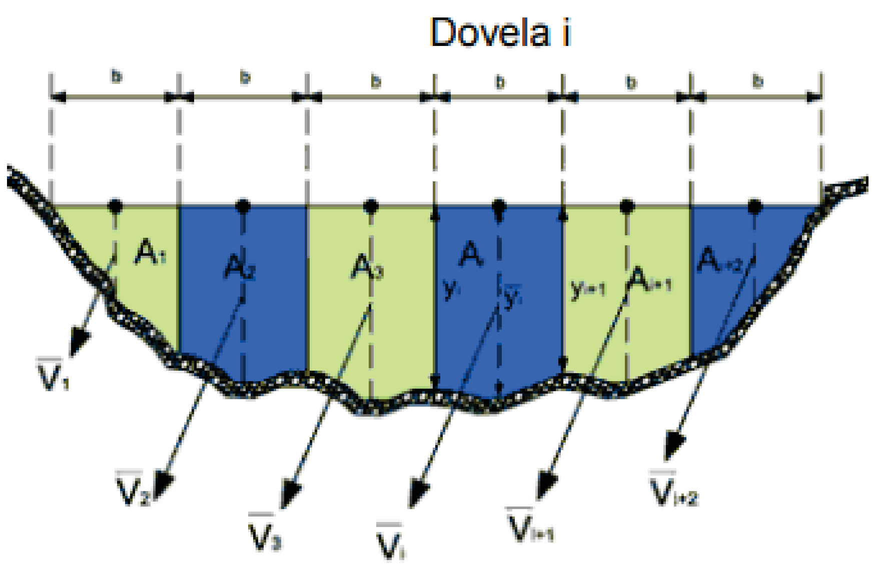


Figura 5.35 Características de las verticales de la sección transversal (Tapia, *et al*., 2012, p.11).

Si bien por ahora no pudimos abordar el perfil de velocidades, pensamos en ello como futuras proyecciones en las cuales se evidencie la transversalidad de saberes entre estas (y otras) Comunidades de Conocimiento Matemático.

5.6. A modo de síntesis

La investigación desarrollada está interesada en ubicar y caracterizar los usos de las gráficas que tienen una CCM_{Fis}, para ello nos dimos a la tarea de tomar diferentes fuentes de información. A continuación, sintetizamos lo que hemos hallado.

La información obtenida con las clases tanto teóricas como de laboratorio y libros de texto permitió observar que existe un gran uso de gráficas enfocado en la distribución de puntos y análisis de la curva. Usos que pertenecen al dME que prevalece hoy día y que forman parte al momento de presentar los conceptos e información en clase.

En la entrevista realizada al profesor (académico) señala que una de las actividades que realizan es tomar datos y usar tablas que le permitan graficar posteriormente, lo que podemos clasificar como el uso Distribución de Puntos; posteriormente se enfocan en el análisis de la gráfica, permitiendo así fortalecer la enseñanza y dar sentido a los conceptos físicos.

Si bien lo observado en clases y libros de texto, como lo expuesto en la entrevista y los artículos nos dan información respecto a lo que hacen con las gráficas, se destaca lo que sucede en la situación propuesta ¡Vamos de *rafting*! Si bien la pregunta es abierta, esto permite que la manera de responder evidencia la forma en que ellos trabajan, el modo de argumentar es parte de lo que ellos hacen día a día; lo que el profesor hace no es algo que este descrito en los libros de texto, sino que recurre a su experiencia personal y pone en juego el conocimiento (matemático y físico) que tiene y donde se observan los conceptos de la derivada y la integral.

Es interesante ver la relevancia que tiene la derivada y la integral al momento de hablar de velocidad, nos permite pensar en cómo se enseña y repensar en otras maneras de enseñar dichos tópicos donde estos adquieran sentido y significación.

Capítulo 6

Reflexiones y proyecciones

La investigación que se llevó a cabo bajo el enfoque socioepistemológico contribuye con un marco de referencia en el que se considera al cotidiano como una fuente de saberes, el cual, a través de la experiencia, usa el conocimiento de manera funcional. El objetivo es conectar la matemática escolar con elementos del uso de las gráficas de una comunidad de físicos en particular.

El desarrollo de la investigación nos llevó a enfocarnos en dos puntos:

- La necesidad de caracterizar una Comunidad de Conocimiento Matemático desde el modelo empleado por Cordero (2016a).
- Los usos de las gráficas en una CCM_{Fis}, donde las gráficas cartesianas y los diagramas desempeñan un rol importante para esta comunidad.

Estos dos elementos nos permiten aportar a la Teoría Socioepistemológica con un ejemplo concreto de una CCM y por otro lado a un Marco de Referencia donde las argumentaciones de los Usos de las Gráficas permiten ver cómo emerge la Variación al momento de hablar de la velocidad del agua en el trayecto de un río.

6.1. Relevancia del modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático

La postura que tomamos es la Teoría Socioepistemológica, que ha considerado como problemática fundamental al discurso matemático escolar (dME), el cual al asumir un estatus hegemónico carece de marcos de referencia para resignificar las matemáticas (Cordero, et al 2015, p.90). Lo cual ha llevado a enfocarse en la necesidad de rediseñar dicho discurso basado en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM) y responder así a los fenómenos provocados por el dME (adherencia, exclusión y opacidad). La base epistemológica para el RdME radica en considerar los usos del conocimiento matemático de comunidades que suceden en otros escenarios distintos a los matemáticos, es decir: la escuela, en el trabajo y en la ciudad (Cordero, 2016a y 2016b).

Centrarnos en un escenario concreto nos permitió ver la necesidad de reconocer que una Comunidad de Conocimiento no es solo un conjunto de gente que tiene un fin común, sino que la relación con el conocimiento es tal que la forma de construirlo da muestra de lo propio de esta comunidad.

Cordero (2016a) plantea un modelo describiendo los elementos de una Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) a través de una triada *(reciprocidad, intimidad, localidad).* Este modelo nos permite distinguir una comunidad de otra, conocer quiénes son y por qué hacen lo que hacen, además de caracterizar y reconocer las particularidades de esta comunidad.

La importancia de estudiar a la CCM a través de este modelo reside en reconocer que pertenecer a una comunidad conlleva contribuir con el conocimiento y crecer junto con ella, pero eso no significa que todas las comunidades, aun cuando pertenecen a una misma disciplina, sean iguales. La forma de crear conocimiento, de validar lo que hacen, de lo que se cuestionan y hacia donde proyectan su trabajo es lo que hace tener una identidad propia.

Consideramos importante conocer los puntos de inflexión que marcaron a los académicos investigados. Cada punto de inflexión les permitió sensibilizarse a la enseñanza de la Física y cuestionarse algunos conocimientos que se creían acabados (por ejemplo: el momento en que se interesan, y más aún, cuando comienzan a trabajar en la enseñanza de la física, la creación misma del GTE son puntos de inflexión). Esto nos permitió reconocer los momentos mencionados en el modelo de CCM propuesto por Cordero (2016a) lo cual dio como resultado un capítulo dedicado a este modelo, que podemos resumir en la Figura 6.1.

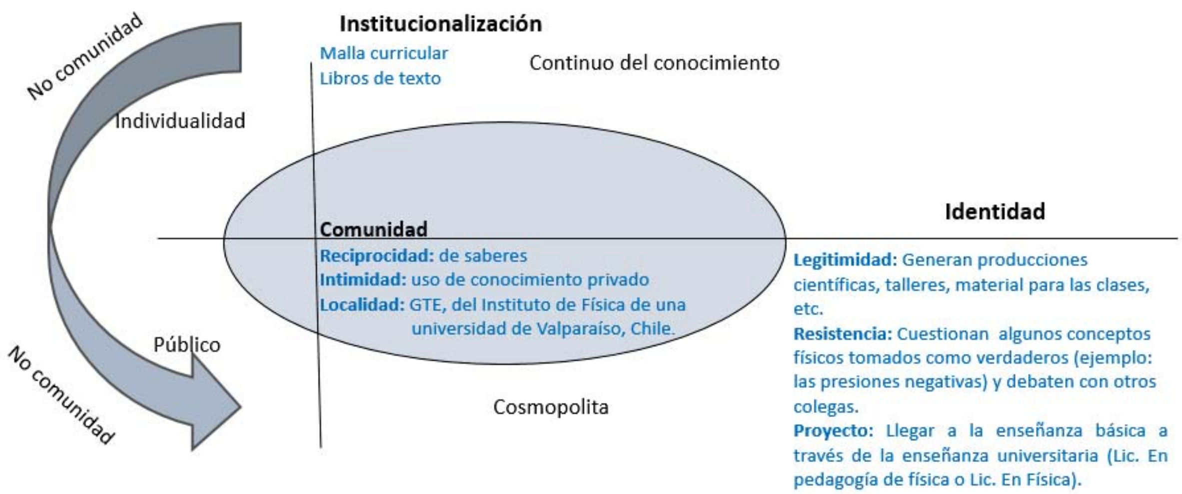


Figura 6.1 Modelo de una Comunidad de Conocimiento Matemático de Físicos (CCM_{Fis}).

6.2. Elementos de usos de las gráficas en una Comunidad de Físicos

Las investigaciones desarrolladas por Cen (2006); Cen, Cordero y Suárez (2010); Cordero y Flores (2007), Suárez, (2008, 2014); Suárez y Cordero, (2008) se han preocupado por caracterizar el uso de gráficas en el dME. Además, Carrasco (2011) reconoce al comic como un ambiente de trabajo gráfico, donde lo icónico (herramientas pictóricas) figura lo que varía. Nuestra investigación aporta en estas mismas direcciones, donde encontramos usos de las gráficas en una CCM_{Fis} que nos permite considerar como gráficas a los diagramas que frecuentemente se ocupan en las explicaciones dadas en clase y libros de texto de Física, y también encontramos presente algunos usos de las gráficas del dME.

De acuerdo con la fuente de datos empleados en la metodología, podemos resumir lo encontrado de la siguiente manera:

En la clase teórica hay un uso de diagramas, cuyo objetivo es explicar a profundidad el fenómeno que se va a estudiar, en el caso que analizamos está relacionado con las poleas. Además, para explicar el concepto de trabajo se apoya con las gráficas cartesianas, el concepto de área que lleva a hablar de la integral. El objetivo es explicar el concepto.

En el laboratorio se logra observar como el ciclo de modelación- graficación propuesto por Cordero y Suárez está presente, y para resolver la guía que se propone por parte del académico usan las gráficas con la distribución de puntos y análisis de la curva, donde observan el comportamiento de la curva para poder llegar a una conclusión.

En los libros de texto se observa que se usan las gráficas para resolver problemas propuestos y son del tipo que prevalece hoy día en el discurso matemático escolar, como lo son la distribución de puntos y análisis de la curva a través de conceptos como la derivada e integral. Además, ahí podemos ver un gran empleo de diagramas; si bien nosotros analizamos algunas secciones, en los demás capítulos del libro se puede observar que los diagramas son usados en gran medida. Si bien se puede considerar que el empleo de los diagramas es para ejemplificar una situación propuesta, el análisis de éstos tiene significados con los cuales pueden argumentar, por ejemplo, sobre aspectos de variación y predicción.

En lo que se refiere a los artículos revisados, recordemos que el objetivo de un artículo es comunicar lo hallado y si bien en este proceso la gráfica puede ser relevante quizá al momento de comunicar el resultado no sea así para algunos. Mientras que en clase puede ser un elemento del cual no se deba prescindir.

En la entrevista el académico señala que el uso de las gráficas puede aportar a encontrar errores al momento de analizar algún fenómeno y también para comprender lo basal de los conceptos físicos. Esto nos lleva a pensar en el uso de las gráficas como los encontrados en el dME (Cen, 2006; Cen, Suárez y Cordero 2010; Cordero y Flores 2007, Suárez 2008, 2014; Suárez y Cordero 2008) como lo son la distribución de puntos y análisis de la curva, sin ser estos los únicos empleados en la disciplina de Física.

La situación ¡Vamos de *rafting*! nos permitió obtener información respecto a lo propio de esta comunidad, ya que ahí se puede notar lo experiencia personal y los conocimientos que pone en juego el académico. Ahí pudimos observar que el uso de flechas, segmentos y áreas es a través de la relación de ellos y los significados que da a cada elemento que ayuda a generar los argumentos sobre variación de la velocidad.

Los conceptos derivada e integral son conceptos que son fuertemente empleados en Física; estos conceptos emergieron en las clases teóricas, de laboratorio y durante la situación propuesta ¡Vamos de *rafting*!, y por supuesto en los libros de texto aparecen también.

Respecto a los usos de las gráficas podemos ver que:

- Hay usos que se han caracterizado en el discurso matemático escolar que aparecen en esta comunidad: Análisis de la curva, distribución de puntos.

- Los diagramas son usados en gran manera y revelan algo propio de la comunidad.
- El uso de flechas, las cuales tienen un significado y son empleadas en sus argumentaciones.
- Hay que destacar la importancia de los tópicos derivada e integral para la disciplina de la Física.

6.3. Hacia una resignificación de la variación

El programa del Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) desarrollado por Cordero (2016a y 2016b) tiene como objetivo evidenciar los usos del conocimiento matemático y también sus resignificaciones en distintas comunidades de conocimiento. Para ello hay dos líneas de trabajo, la primera relacionada con la Resignificación del Conocimiento Matemático, donde se problematizan las categorías de conocimiento matemático que se producen en las comunidades, ahí intervienen el campo disciplinar, el discurso matemático escolar y el cotidiano de la comunidad; la segunda línea se relaciona con el Impacto Educativo.

Nuestra investigación se enfoca en evidenciar los usos de las gráficas, donde las argumentaciones revelan lo propio de una comunidad.

Se mencionó, en el Capítulo 4, que nuestra investigación se apoya en el análisis del uso de las gráficas en la obra de Oresme (Suárez, 2006), quien usa las figuras geométricas para obtener el movimiento a través de la acumulación de sus cambios o representar la situación de variación. Con esto podemos ver que el uso de las gráficas contribuye con el estudio de ideas de cambio y la variación.

Al situarnos en una CCM específica, permite reconocer el campo disciplinar y el conocimiento matemático que están en uso. Nos enfocaremos en la situación "Vamos de *rafting*" para así hablar del movimiento del agua en el rio, es decir, de un fluido especifico. Este fenómeno se encuentra altamente relacionado con saberes matemáticos: áreas, volúmenes, derivada e integrales. De acuerdo con el académico físico el cómo abordar este tema depende de a quien esté dirigido, podría comenzar con áreas y volúmenes hasta llegar a un nivel más avanzado con la sumatoria de áreas o integrales.

Esta comunidad se ubica en un escenario muy particular, son doctores en Física que ejercen como profesores en la Universidad en que trabajan, donde se ponen en juego la física escolar y la matemática escolar. Las argumentaciones gráficas Arg(Graf) de los usos de la gráficas U(Graf) que genera esta comunidad están permeadas por el escenario en que se ubican.

Así, nuestra investigación provee de una epistemología del uso de las gráficas en una CCM_{Fis} aportando al Programa SOLTSA propuesto por Cordero (Figura 6.2).

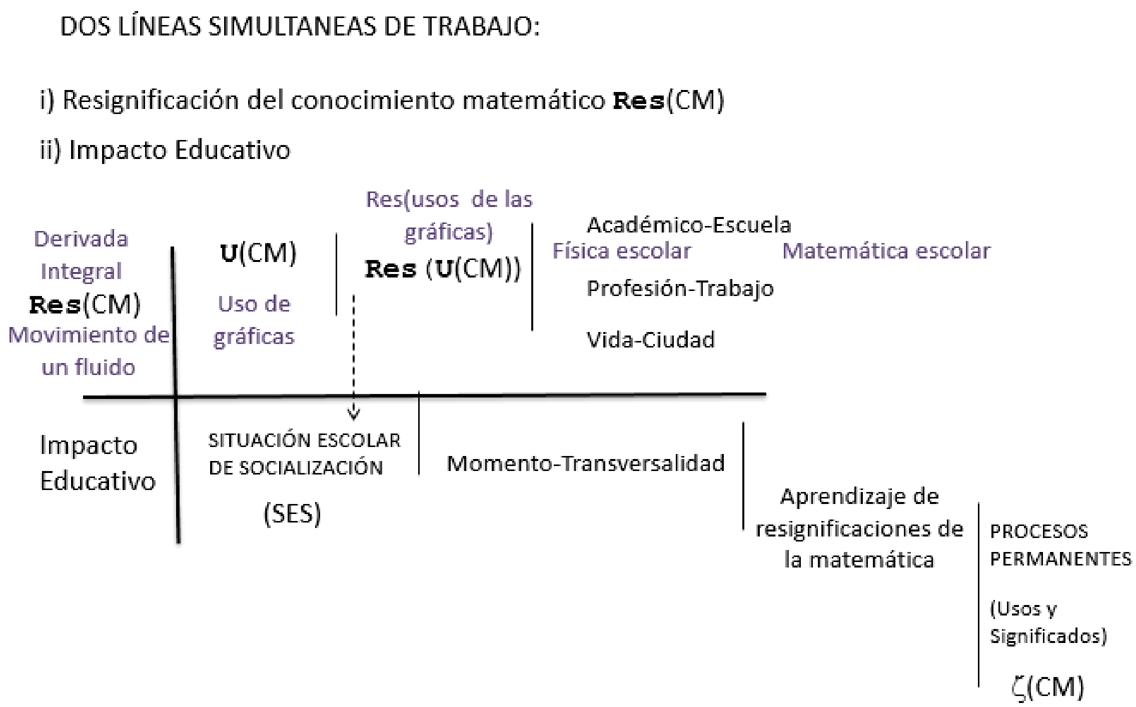


Figura 6.2 Una epistemología de usos de las gráficas en una CCM_{Fis} (Cordero, F., 2017).

Caracterizamos los usos de las gráficas U(Graf) a través del debate entre los funcionamientos y formas. Identificar los Arg(Graf) generados al debatir los funcionamientos y formas de los U(Graf) adquiridos en diferentes escenarios, y reconocer nuevos usos a partir de aquel debate nos permite hablar de resignificación de los usos de las gráficas Res(U(Graf)) (Figura 6.3). El debate provocado nos permite inferir significaciones, procedimientos y el instrumento que le es útil al humano al generar Arg(Graf) en una situación de variación. Las Res(U(Graf)) nos dan luces para aportar a un rediseño del dME, dando evidencia de una epistemología de los U(Graf) que el dME ha opacado.

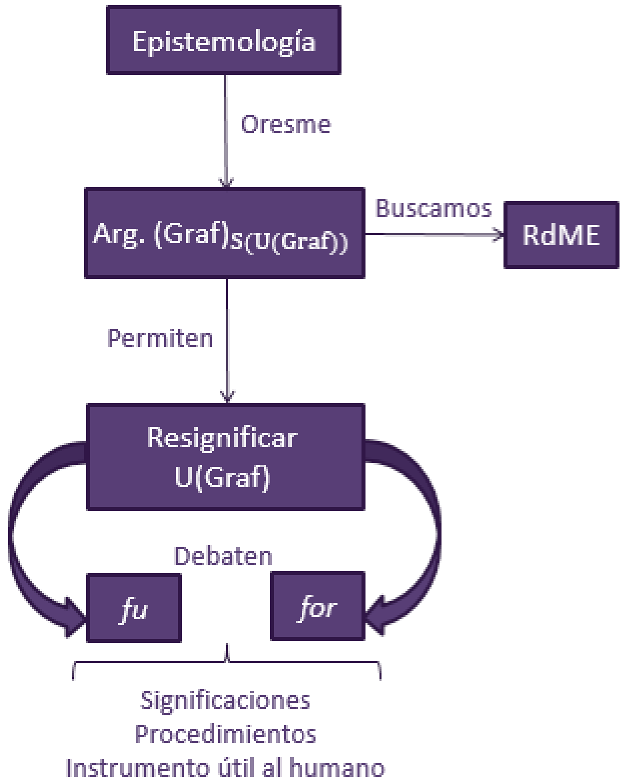


Figura 6.3 Epistemología y Resignificación de los U(Graf).

A continuación, explicaremos el debate que permite generar nuevos funcionamientos y formas:

Es necesario explicitar que el concepto de velocidad es un conocimiento que el académico posee previo a la situación propuesta ¡Vamos de *rafting*! Además, los segmentos y flechas se usan en el campo de conocimiento de la matemática como la geometría; estos elementos (velocidad, flechas y segmentos) se fusionan dando como resultado la asignación de medida a la velocidad (variable física) por medio de segmentos o flechas (Forma 1).

A partir de la forma inicial (Forma 1), donde la geometría y teoría del movimiento se consideran cuerpos de conocimiento por separado, se determina un nuevo funcionamiento (Funcionamiento 1). El interés radica en comprender el fenómeno, es decir, cómo es el movimiento del agua en el río, cómo varían las velocidades del río a través de segmentos obliga a incorporar otros elementos como áreas transversales (Forma 2), las cuales se utilizan para la descripción del cambio (Funcionamiento 2) estableciéndose un lenguaje que relaciona figuras con situaciones de cambio de velocidad. Así surge una notación gráfica que permite discriminar figuras que representa y figuras que no representan situaciones de variación y cambios (Forma 3).

La segunda línea del programa SOLTSA está relacionada con el Impacto Educativo, requiere de una Situación escolar de Socialización. Nuestra investigación no incluye una situación escolar, pero si una pregunta abierta donde podemos ver cómo esta contribuye con un Marco de Referencia presentada como una Situación de Variación.

Reconocer las significaciones, procedimientos y el instrumento útil a lo humano, nos permite aportar a un MR (Figura 6.4) basado en los U(Graf), donde una situación de variación genera Arg(Graf) al considerar la velocidad del agua que varía continuamente a través de un río, provocando el interés por comprender el flujo y el movimiento del agua en un río comparando dos momentos o secciones del caudal del río. Logrando así, a través de las Arg(Graf) predecir cómo serán las velocidades en distintas secciones del río.

	SITUACION
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	VARIACIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento
Procedimientos	Comparación de dos momentos
Instrumentos	Cantidad de variación continua
Resignificaciones	Predicción $V_o + Variación = Vf$

Figura 6.4 Usos de las gráficas en una situación de variación (Cordero, 2008. p.282).

Nuestra investigación busca aportar a un RdME donde se pueda promover un discurso que incluya el uso del conocimiento de las gráficas de otro dominio como la Física, para ello es necesario adentrarnos en las asignaturas de matemáticas de Licenciatura en Física y Pedagogía en Física podrían incorporar elementos que puedan colaborar con este RdME.

6.4. Proyecciones

La propuesta de los U(Graf) en una CCM_{Fis} forma parte de una línea de investigación interesada en la Construcción Social del Conocimiento Matemático, comprendiendo que esta es una pequeña parte que requiere ser robustecida y nutrirse de distintas revisiones de trabajos, de los diferentes matices de la problemática que surge desde la Teoría misma.

La situación ¡Vamos de *rafting*! propuesta, era una pregunta abierta donde el académico respondió de una manera muy específica. Sin embargo, refiere que hay un elemento en física que se ignora, el perfil de velocidades. Esto quiere decir, no es una única velocidad, sino que son distintas velocidades donde la mayor se ubica en el centro del cauce del rio; abordar el perfil de velocidades conlleva a una suma de integrales. Si bien el académico no empleó integrales para la resolución de la situación propuesta, permite proyectarnos en futuras investigaciones que incluyan tanto la integral y la derivada ya que ellas forman parte fundamental en la disciplina de la Física.

Además, vemos la necesidad de incorporar investigaciones de las clases de matemáticas en la Licenciatura de Pedagogía en Física ya que estas pueden proporcionar elementos de lo que ocurre con el dME en esta disciplina y darnos nuevas directrices que apunten a un RdME.

Es importante considerar que estas Arg(Graf) no forman parte del discurso escolar, ya que se encuentran opacados por el uso de gráficas cartesianas y se dejan de lado los diagramas. Por lo que consideremos nuestra labor ampliar el Uso de las Gráficas a los diagramas, para ello, será necesario estudiar cuáles son los U(Graf) que ocurren en el cotidiano de otras comunidades y así reconocer los usos de este saber en su cotidiano, con el fin de poder hacer un análisis transversal de los usos del conocimiento en la escuela, el trabajo y la ciudad.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A. y Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas (reimpresión 2003).

Arancibia, S. y Mena, J. (2005). *Matemática para Ingeniería*. Chile: Ediciones Instituto de Matemáticas, PUCV.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 33*(2), 7-25.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule, Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 139-178.

Ariza, A. y LLinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de Derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 121-136.

Briceño, E. (2008). *El uso de la gráfica desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 299-333.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(3), 265-292.

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama, J. y Martínez–Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, 83–102.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI.

Carrasco, E. (2011). Estudio sobre construcción y uso de gráficas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 757-776. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carrasco, E., (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las ciencias, 32*(3). 365-384.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimentodella matematica. *Revista La Matemática e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión Socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo, A. (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos.

Cordero, F. (2011). La Modelación y la Graficación en la Matemática Educativa Escolar. En L.M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. Hernández Ulloa (Coords.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377 – 399). Barcelona: Gedisa y México: Cinvestav.

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Cordero, F. (2016a). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Díaz de Santos

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática - Investigación en Educación Matemática.Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: Un programa socioepistemológico*, libro en preparación.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F. y Gómez, K. (2009). Los procesos de difusión del conocimiento matemático: la funcionalidad y el cotidiano. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Manuscrito no publicado.

Cordero, F. y Silva, H. (2012). Matemática educativa, identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 295-318. ISSN 1665-2436.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 187-214.

Cordero, F., Gómez, K. y Viramontes, I. (2009). Elementos de algunas teorías en Matemática Educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencia o nuevas visiones? En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22,* 375-381. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015*). El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T. y Pérez, R. (2014). Atención a la Diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 71-90.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis doctoral no publicada. CICATA- IPN, México.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis doctoral no publicada. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Efimov, N. (1969). *Curso breve de Geometría Analítica*. Urss: Mir.

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 37*(1), 105-125.

Flores, R., (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*.

Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

García, E. (2008). *El uso del conocimiento matemático asociado a la función en la producción institucional. El caso de investigadores en formación en Matemática Educativa.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. (2013). La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D.F., México.

Gómez, K. (2015). *La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del cotidiano*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1323-1330, México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, K., Silva-Crocci, H., Soto, D. y Cordero, F. (2014). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 1457-1464. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hale, P. (2000). Kinematics and Graphs: Students' Difficulties and CBLs. *Connecting Research to Teaching, 93*(5), 414–418.

Henao, D. (2014). Razones de nuestra fe matemática. *Revista del profesor de matemáticas. Año 8* (1), 28-34.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Idoyaga, I. y Lorenzo, G. (2014). Las representaciones gráficas en la enseñanza y en el aprendizaje de la física en la universidad. *Enseñanza de la Física, 26*, 365-371.

Instituto Politécnico Nacional (2003). *Geometría analítica. Libro para el estudiante*. México, DF.

Instituto Politécnico Nacional (2004). *Álgebra. Libro para el estudiante*. México, DF.

Jiménez, D., Mora, M. y Cuadros, R. (2016). La importancia de las nuevas tecnologías en el proceso educativo. Propuesta didáctica TIC para ELE: mELEndien7dias. *Revista Fuentes*, *18*(2), 209-223.

Jonson, R. (1976). *Estadística elemental*. México: Trillas.

Juan A. A., Steegmann, C., Huertas, A, Martinez, M. J. y Simosa, J. (2011). Teaching mathematics online in the European Area of Higher Education: an instructor's point of view*. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *42*(2), 141-153.

Lapp, D., y Cyrus, V. (2000). Using Data Collection Devices to Enhance Student Understanding. *Connecting Research to Teaching, 93*(6), 504–510.

Lara, A. (2007). *Categorías de uso de gráficas en libros de textos de mecánica de fluidos*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lara, A. y Morales, A., (2017). Funcionalidad del uso de las gráficas en una comunidad de físicos, desde una perspectiva socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 874-883. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lara, A. y Morales, A., (2018). Una mirada socioepistemológica a una comunidad de físicos el caso de un experto ante un problema específico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31(2)*, 1453-1460. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Larson, R. (1982). *Cálculo y Geometría analítica*. México: McGraw-Hill.

Laverty, J. y Kortemeyer, G. (2012). Function plot response: A scalable system for teaching kinematics graphs. *American Journal of Physics, 80*(8), 724-733.

Lehmann, Ch. (1998). *Geometría analítica.* México: Limusa.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Leví, E. (2001). *El agua según la ciencia*. México: Miguel Ángel Porrúa.

McDemortt, L., Rosenquits, M. y van Zee, E. (1987). Student dificultties in coneccting graphs and physics: Examples for kinematic. *American Journal of Physics, 55*, 503-513.

Mejía, E. y Rosas, G., (2016). *Cálculo de la velocidad media y el caudal con base en la velocidad superficial del agua en pequeñas corrientes*. (Trabajo de grado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad Tecnológica Ingeniería Civil). Recuperado de http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/3208/1/GISSEL%20PAOLA%20ROSAS%20AYALA%20-%202016.pdf

Méndez, M. E. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación par la matemática escolar*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Mendoza, E. J. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: El caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN. México.

Mineduc (2012). Bases Curriculares Educación Básica. Chile.

Mineduc (2013). Bases Curriculares Educación Básica. Chile.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 319-345.

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias 30*(3), 237-256.

Parra, T. (2008). *El uso de las gráficas en la ingeniería. Una resignificación de la derivada*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Purcell, E. (1992). *Cálculo diferencial e integral*. México: Prentice-Hall.

Redish, E. (2005). Changing student ways of knowing: What should our students learn in a physics class. Proceedings of World View on Physics Education 2005: *Focusing on Change*. New Delhi. Recuperado de http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaPlen.pdf

Rider, P. (1966). *Geometría analítica*. Barcelona: Montaner y Simón.

Roa-Fuentes. S. y Otack, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 199-232.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática, 26*(Especial 25 años), 11-30.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Sáez, M., Pintó, R. y García, P. (2005). Relaciones conceptuales en el uso de MBL para el estudio del movimiento. *Enseñanza de las Ciencias, Número extra*, 1-4.

Sánchez, B., y Torres, J. (2017). La responsabilidad del currículo de matemáticas en la formación de ciudadanos que cuestionen la estructura social de clases. Una mirada desde perspectivas sociopolíticas. *Revista Colombiana de Educación, 73*, 299-322.

Serway, R., y Jewett, J. (2008). *Física para ciencias e ingenierías*, (Vol. 1 y 2), 7ª. Ed. México: Thomson.

Silva, H. y Cordero, F. (2010). La identidad y la adherencia en la formación del matemático educativo en Latinoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 969-972, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Silva, H. y Cordero, F. (2010). La identidad y la adherencia en la formación del matemático educativo en Latinoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 969-972. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Soto, D., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2012). Exclusión, Cotidiano e Identidad. Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25*, 1041-1048, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Spivak, M. (1992). *Cálculo infinitesimal*. Ed. Reverté S.A.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. 4a Ed. Madrid: Morata.

Suárez, L. (2008). *Modelación–Graficación, una categoría para la matemática escolar: Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la matemática escolar*. México: Díaz De Santos.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3*(1), 51-58. ISSN 1850-6666

Suárez, L. y Cordero, F., (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Swokowski, E. (1998). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: International Thomson.

Tapia, G., Molina, J., Pérez, G. y Torres, A. (2012). *Metodología para la medición de la velocidad de flujo en un río en el diagnóstico de la socavación en pilas de un puente, utilizando un dispositivo electrónico*. Recuperado de http://www.imt.mx/archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt356.pdf

Tipler, P. y Mosca, G. (2010). *Física para ciencia y tecnología*, (Vol. 1 y 2). Barcelona: Reverté.

Tippens, P. (2001). *Física. Conceptos y aplicaciones*. 6a ed. México: Mc Graw Hill.

Torres, L. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Tuminaro, J. (2002). *How Students Use Mathematics in Physics: A Brief Survey of the Literature*. Recuperado de: http://www.physics.umd.edu/perg/math/UsingMath.Pdf.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio Socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN. México.

Ulloa, J. (2013). *Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico.* Tesis doctoral. CICATA- IPN, México.

Vera, F. y Rivera, R. (2011). A piece of paper falling faster than free fall. *Eur. J. Phys., 32*, 1245- 1249.

Vera, F. y Romanque C. (2009). Another way of tracking moving objects using short video clips. *The Physics Teacher*, *47*(6), pp. 370-373.

Vera, F., Rivera, R. y Núñez, C. (2011). Burning a candle in a vessel, a simple experiment with a long history. *Science & Education, 20*, 881-893.

Vera, F., Rivera, R. y Núñez, C. (2014). Backward reaction force on a fire hose, myth or reality?. *Fire Technology, 51*(5). 1023-1027.

Vera, F., Rivera, R. y Ortíz, M. (2013). A simple experiment to measure the inverse square law of light in daylight conditions. *European Journal of Physics*, *35*(1), 015015.

Vera, F., Rivera, R., Fuentes, R. y Romero Maltrana, D. (2015). Estudio del movimiento de caída libre usando vídeos de experimentos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *12*(3), 581-592.

Vera, F., Rivera, R., Romero, D. y Villanueva, J. (2016). Presiones negativas y el primer sifón de agua más alto que 10,33 metros. *PLoS ONE*, *11*(4)

Vera, F., y Romanque, C. (2008). Studying a free fall experiment using short sequences of images. *Journal of Physics: Conference Series*, *134*(1), 1-4.

Vera,F., Rivera, R. y Fuentes, R. (2013). La Galería de Galileo: Videos de experimentos para la enseñanza de la Física. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *39*(Especial), 143-151.

Yacuzzi, E. (2005). El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación. *Inomics*, *1*, 296-306.

Yin, R. (1989). *Case study research. Design and methods*. London, SAGE.

Young, H. y Freeman, R. (2009). *Física universitaria volumen 1*. 12a ed., México: Pearson Educación.

Zaldívar, D., (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Zaldívar, D. (2015). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde una visión de construcción social. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-Investigación en Educación Matemática.* Recuperado de http://www.xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/952/393

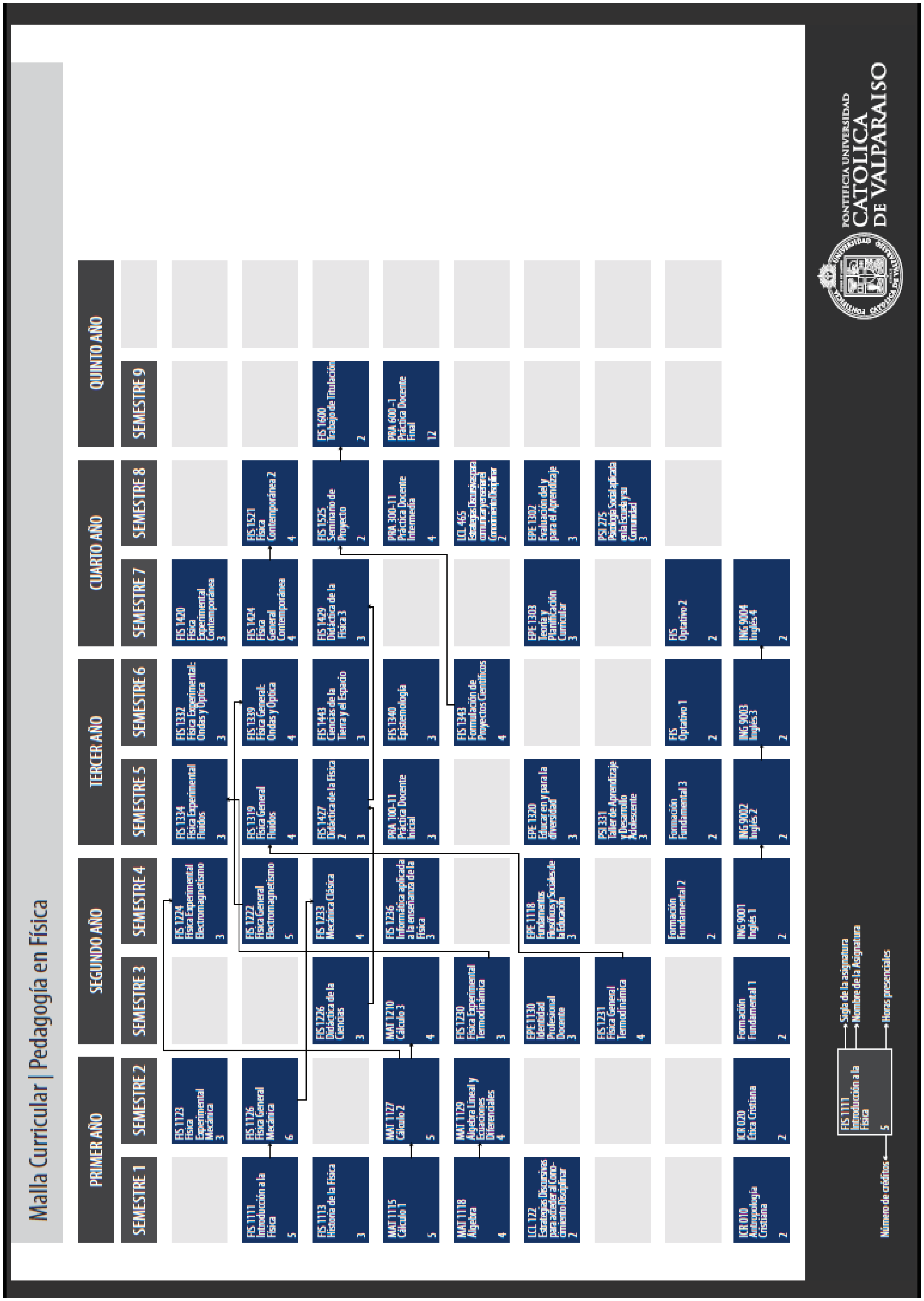
Zaldívar, D. y Cordero, F., (2010). Los usos de la Resignificación de lo estable en un escenario de Difusión de la ciencia. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 929-938. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zaldívar, D. y Cordero, F., (2014). Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, 1511-1519. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M. y Cordero, F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *17*(4-2), 417-436.

Anexo A

Malla curricular Pedagogía en Física



Anexo B

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias
Instituto de Matemática
http://ima.ucv.cl

Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso
Casilla 4059, Valparaíso – Chile
Tel: (56-32) 2274001
Fax (56-32) 2274041

PROGRAMA

Asignatura MAT 1115 "CALCULO 1"

I DATOS GENERALES

Horas semanales de Teoría	:	6
Horas semanales de Ayudantía	:	4
Duración	:	1 semestre
Créditos	:	6 (Seis)
Pre-requisitos	:	No tiene

II OBJETIVOS

Generales:

Entregar a los estudiantes las herramientas fundamentales del Cálculo Diferencial en una variable.
Desarrollar en los estudiantes la capacidad necesaria para afrontar situaciones problemáticas de variada complejidad.

Específicos:

Al finalizar el curso el estudiante deberá ser capaz de manejar adecuadamente los tópicos relacionados con:

- Funciones: propiedades, clasificación
- Encontrar los dominio y recorridos, especificar cuando una función continua.
- Calcular límites de cualquier función dada
- Analizar la existencia de las derivadas considerando las definiciones y propiedades ligadas.
- Calcular derivadas aplicando las reglas del álgebra de derivadas
- Aplicar la derivada a problemas de máximo o mínimo, análisis de curvas, resolver problemas de planteo
- Aplicar la derivada a algunos problemas específicos en Física, etc.

III TEMAS Y CONTENIDOS

1. ***Números Reales***

1.1. La recta numérica
1.2. Axiomas de cuerpo: Algebra en ***IR*** ; Ecuación de 2º grado
1.3. Axiomas de orden y completitud
1.4. Valor absoluto y propiedades
1.5. Desigualdades e inecuaciones
1.6. Axioma del supremo y propiedad arquimediana

2. ***Relaciones y Funciones***

2.1. Producto cartesiano y sistema de coordenadas cartesiana
2.2. Relaciones en $IR \times IR$: dominio y recorrido de una relación
2.3. Definición de función
2.4. Clasificación de funciones: inyectiva; epiyectiva; biyectiva
2.5. Algebra de funciones reales
2.6. Composición de funciones
2.7. Función inversa
2.8. Funciones especiales: Valor absoluto; exponencial; logaritmo; polinómicas; parte entera; parte decimal; escalonada unitaria; característica; delta Dirac; etc.

3. ***Límites y continuidad de funciones reales***

3.1. Limites
- 3.1.1. Conceptos básicos de la Topología usual Vecindad, vecindad Perforada, Conjunto abierto, conjunto cerrado, punto de acumulación, puntos aislados, etc.
- 3.1.2. Límites de funciones reales. Definición y álgebra de límites
- 3.1.3. Límites laterales
- 3.1.4. Límites infinitos, límites la infinito
- 3.1.5. Funciones acotadas

3.2. Continuidad
- 3.2.1. Definición y álgebra de funciones continuas
- 3.2.2. Continuidad reparables e irreparables
- 3.2.3. Composición de funciones continuas
- 3.2.4. Funciones continuas especiales
- 3.2.5. Teorema del valor intermedio
- 3.2.6. Teorema de los valores extremos

4. ***Derivación***

4.1. Definición y álgebra de derivadas
4.2. Derivadas laterales
4.3. Interpretación geométrica y física de la derivada
4.4. Regla de la cadena y problemas de razón de cambio
4.5. Derivada de la función inversa y de la función implícita
4.6. Derivada en coordenadas polares y paramétricas
4.7. Teorema del valor medio y teorema de Rolle
4.8. Aplicación de la derivada
- 4.8.1. Máximos y mínimos
- 4.8.2. Concavidad, puntos de inflexión
- 4.8.3. Problemas de aplicación
- 4.8.4. Asíntotas y análisis de una curva
- 4.8.5. Regla de L'Hôpital

IV ***BIBLIOGRAFIA***

Bibliografía Obligatoria:

- ARANCIBIA, SARA y MENA, JAIME
  "Matemáticas para Ingeniería"
  Ediciones Instituto de Matemática, PUCV. 2005

Bibliografía Complementaria:

- STEWART, JAMES
  "Cálculo Diferencial e Integral"
  Ed. Thomson
  Segunda edición. 2007

- SIMMONS, GEORGE F.
  "Cálculo y Geometría Analítica"
  Ed. Mc. Graw Hill
  Segunda edición. 2002

- THOMAS, GEORGE
  "Cálculo en una variable"
  Ed. Pearson Educación
  Undécima edición. 2006

- EDWARDS, C. HENRY y PENNEY, DANIEL
  "Cálculo Diferencial e Integral"
  Ed. Prentice Hall
  Sexta edición. 2003

- PURCELL, EDWIN J - VARBEG, DALE y RIGDON, STEVEN
  "Cálculo Diferencial e Integral"
  Ed. Pearson Educación
  Octava edición. 2003