

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA QUÍMICA



PROYECTO PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
QUÍMICO

**ANÁLISIS DE LA NO LINEALIDAD EN EL
CONTROL PID DE PROCESOS DE
FERMENTACIÓN**

José Ignacio González Galdames

Profesor Guía:

Javier Silva Campino

2015

Resumen

En la presente investigación, se realiza un control de procesos para reactores biológicos continuos. Este control se modela utilizando tres tipos de modelos de crecimiento no lineales: *Monod*, *Moser* y *Haldane*.

El control simple de procesos requiere la utilización de modelos lineales, y para ello se utilizan tres tipos de linealización conocidas como: *linealización con serie de Taylor*, *linealización con método óptimo de linealización (OLM)*, y *linealización con método óptimo de linealización en componentes transientes (OLMTC)*.

La finalidad de este trabajo consiste en comparar los modelos de linealización estudiados y ver su efecto. En este caso, la configuración de control escogida será el *Turbodistato convencional*, la cual considera como variable manipulada la velocidad de dilución (D) y como variable controlada la concentración de biomasa (X_0).

Con lo presentado anteriormente, se procede a calcular las funciones de transferencia asociadas a cada modelo. Con esto se desarrolla una estrategia de *control realimentado* y un lazo de control *PID*. Luego de esto, se procede a sintonizar los controladores *PID*, para luego generar respuestas de los lazos de control frente a cambios en la entrada o set-point. Las respuestas obtenidas se analizan mediante el error *ISE* e *IAE*.

Una vez analizados ultimada esta fase, se ve su estabilidad en el dominio de frecuencias utilizando *diagramas de Bode*. Con ello se calcula el *margen de fase* y el *margen de ganancia*. Al considerar los lazos de control ideales, se obtienen algunos *márgenes de ganancia* indeterminados para los diferentes casos, esto indica que el sistema le falta excitación (perturbaciones). Los demás valores demuestran que el control de procesos se realizó de manera exitosa.

Del trabajo desarrollado, se concluye que la linealización *OLMTC* funciona de mejor manera frente a los modelos que presentan una mayor no linealidad (*Haldane*). Sin embargo, frente a modelos más lineales (*Monod*), no es relevante el cambio de linealización en el control de procesos.

Índice General

1. Introducción	1
2. Estado del Arte	3
3. Caso de Estudio.....	16
3.1 Modelación de Reactores Biológicos	16
3.1.1 El Quimiostato.....	20
3.2 Modelos de Velocidad Específica de Crecimiento	22
3.2.1 Modelo de Monod.....	23
3.2.2 Modelo de Moser	23
3.2.3 Modelo de Haldane	24
3.3 Simulación de los modelos.....	25
3.3.1 Simulación Quimiostato con Cinética de Monod	25
3.3.2 Simulación Quimiostato con Cinética de Moser.....	28
3.3.3 Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane.....	30
3.4 Análisis de Perfiles Obtenidos	33
4. Linealización.....	35
4.1 Linealización con serie de Taylor	35
4.1.1 Linealización Quimiostato con Cinética de Monod	36
4.1.2 Linealización Quimiostato con Cinética de Moser	38
4.1.3 Linealización Quimiostato con Cinética de Haldane	40
4.2 Linealización con Método Óptimo de linealización	42
4.2.1 Linealización Quimiostato con Cinética de Monod	43
4.2.2 Linealización Quimiostato con Cinética de Moser	45
4.2.3 Linealización Quimiostato con Cinética de Haldane	47
4.3 Simulación de los Modelos Linealizados.....	49
4.3.1 Simulación Quimiostato con Cinética de Monod	50
4.3.2 Simulación Quimiostato con Cinética de Moser.....	52
4.3.3 Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane.....	54
5. Control de Procesos	56
5.1 Configuración de Control.....	56

5.2 Desarrollo de Funciones de Transferencia	56
5.2.1 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Monod.....	57
5.2.2 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Moser	58
5.2.3 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Haldane	59
5.3 Estrategia de Control.....	60
5.4 Lazos de Control para los sistemas estudiados.	62
5.5 Sintonización de Controladores	63
5.6 Respuestas de los Procesos controlados.....	64
5.7 Análisis de las respuestas para los lazos de control	67
5.8 Estabilidad de los lazos de control	70
5.8.1 Análisis del Margen de Fase y Margen de Ganancia	70
6. Conclusiones	73
Bibliografía	76
Glosario de Términos.....	81
Apéndice A Simulaciones Quimiostato	83
Apéndice A-1 : Simulación Quimiostato con Cinética de Monod.....	83
Apéndice A-2 : Simulación Quimiostato con Cinética de Moser	87
Apéndice A-3 : Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane	91
Apéndice B Métodos de Linealización	95
Apéndice B-1 Serie de Taylor truncada al primer término	95
Apéndice B-2 Algoritmo Optimal Linealización Method.....	98
Apéndice C Funciones de Transferencia.....	100
Apéndice C-1 Procedimiento para encontrar funciones de transferencia	100
Apéndice D Lazos de Control	101
Apéndice E Valores de Sintonía para controladores	104
Apéndice F Diagramas de Bode para Lazos de Control	107

Índice de Tablas

<i>Tabla 1: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Monod</i>	37
<i>Tabla 2: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Moser</i>	39
<i>Tabla 3: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Haldane</i>	41

Índice de Figuras

<i>Figura 1: Bioreactor en Operación Continua y sus variables</i>	17
<i>Figura 2: Quimiostato y sus variables</i>	20
<i>Figura 3: Modelo Cinético de Monod</i>	26
<i>Figura 4: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	27
<i>Figura 5: Modelo Cinético de Moser</i>	29
<i>Figura 6: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057$ (1/h) y $S_i = 12$ (g/l)</i>	30
<i>Figura 7: Modelo Cinético de Haldane</i>	31
<i>Figura 8: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	32
<i>Figura 9: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Monod</i>	50
<i>Figura 10: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Moser</i>	52
<i>Figura 11: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Haldane</i>	54
<i>Figura 12: Diagrama de bloques para estrategia de control feed-back</i>	61
<i>Figura 13: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por Taylor</i>	63
<i>Figura 14: Respuesta lazos de control con Cinética de Monod frente a set-point de 4(g/l)</i>	64
<i>Figura 15: Respuesta lazos de control con Cinética de Monod frente a set-point de 0,5(g/l)</i> .	65
<i>Figura 16: Respuesta lazos de control con Cinética de Moser frente a set-point de 4(g/l)</i>	65
<i>Figura 17: Respuesta lazos de control con Cinética de Moser frente a set-point de 0,5(g/l)</i> ..	66
<i>Figura 18: Respuesta lazos de control con Cinética de Haldane frente a set-point de 4(g/l)</i> .	66

<i>Figura 19: Respuesta lazos de control con Cinética de Haldane frente a set-point de 0,5(g/l)</i>	67
<i>Figura 20: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Mono linealizado por Taylor</i>	70
<i>Figura 21: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,27$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	83
<i>Figura 22: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,8$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	84
<i>Figura 23: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 10$ (g/l)</i>	85
<i>Figura 24: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 3$ (g/l)</i>	85
<i>Figura 25: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 1$ (g/l)</i>	86
<i>Figura 26: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,02$ (1/h) y $S_i = 12$ (g/l)</i>	87
<i>Figura 27: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,086$ (1/h) y $S_i = 12$ (g/l)</i>	88
<i>Figura 28: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057$ (1/h) y $S_i = 22$ (g/l)</i>	89
<i>Figura 29: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057$ (1/h) y $S_i = 9$ (g/l)</i>	90
<i>Figura 30: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	90
<i>Figura 31: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,15$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	91
<i>Figura 32: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,45$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)</i>	92
<i>Figura 33: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3$ (1/h) y $S_i = 10$ (g/l)</i>	93

<i>Figura 34: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3$ (1/h) y $S_i = 3$ (g/l)</i>	94
<i>Figura 35: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3$ (1/h) y $S_i = 1$ (g/l)</i>	94
<i>Figura 36: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLM</i>	101
<i>Figura 37: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLMTC</i>	101
<i>Figura 38: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por Taylor</i>	102
<i>Figura 39: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLM</i>	102
<i>Figura 40: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLMTC</i>	102
<i>Figura 41: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por Taylor</i>	103
<i>Figura 42: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLM</i>	103
<i>Figura 43: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLMTC</i>	103
<i>Figura 44: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLM.....</i>	107
<i>Figura 45: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLMTC.....</i>	107
<i>Figura 46: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por Taylor</i>	108
<i>Figura 47: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLM.....</i>	108
<i>Figura 48: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLMTC.....</i>	108
<i>Figura 49: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por Taylor</i>	108

Figura 50: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por OLM..... 108

Figura 51: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por OLMTC..... 108

1. Introducción

Los reactores biológicos o fermentadores, presentan comportamientos altamente no lineales. Esto dificulta enormemente el control de ellos.

Cuando se quiere realizar control *PID*, o comúnmente denominado control simple, la bibliografía indica que si las ecuaciones que modelan el proceso no son lineales, éstas deben ser linealizadas mediante la *Serie de Taylor*¹.

La linealización es un proceso de primordial importancia en el control de procesos, ésta permite realizar la interacción con el *hardware* de forma fácil y ordenada. Mediante la linealización se puede considerar cada elemento como un bloque –mediante las funciones de transferencia-, de esta manera los elementos que regulan el proceso interactúan con el proceso mismo, sin mayores complicaciones.

Al ser la *serie de Taylor* una aproximación, el comportamiento de la ecuación linealizada no será idéntico al del modelo no lineal, por lo que una vez desarrollado el control del proceso, éste puede presentar variaciones y no ser realizado de forma satisfactoria.

El problema descrito con anterioridad es importante, debido a que se puede controlar un proceso altamente no lineal (como lo son los fermentadores) de forma inadecuada utilizando la *Serie de Taylor*.

Para ello, se propone buscar otros métodos de linealización, y aplicarlos a los fermentadores estudiados. Así, una vez obtenidos los procesos linealizados, poder desarrollar un sistema de control y compararlos con la finalidad de ver sus diferencias.

¹ Irving J. Dunn et al., *Biological Reaction Engineering: Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples*, 2 edition (Wienheim: Wiley-VCH, 2003); Thomas Marlin, *Process Control: Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*, 2 edition (Boston: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2000); Dale E. Seborg et al., *Process Dynamics and Control*, 3 edition (Hoboken, N.J: Wiley, 2010); Babatunde A. Ogunnaike y W. Harmon Ray, *Process Dynamics, Modeling, and Control*, 1 edition (New York: Oxford University Press, 1994); *Process Control: Modeling, Design and Simulation*, 1 edition (Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2003).

La presente investigación comenzará con una revisión bibliográfica que ayudará a contextualizar el problema, y también a presentar las investigaciones realizadas en el control de fermentadores.

Luego, se establecerá un caso de estudio, el cual será linealizado para posteriormente aplicarse un sistema control de procesos con sus respectivos análisis.

2. Estado del Arte

Como es conocido, la industria biotecnológica aporta una gran cantidad de productos en el ámbito farmacéutico, agrícola y químico. Por ello, la habilidad para controlar un proceso de fermentación en su punto óptimo, de forma automática y precisa, es de gran interés en dicha industria.

Un control adecuado permite reducir los costos e incrementar la producción, y al mismo tiempo, mantener la calidad del producto deseado. En las últimas décadas, el control solo se utilizaba con el fin de mantener la temperatura de operación, el pH y la cantidad de oxígeno disuelto dentro de los niveles deseados. Sin embargo, el nivel de sofisticación en la definición de los objetivos de esta área, como en el diseño de los esquemas de control, no son iguales a los encontrados en la industria química.

Los procesos bioquímicos son de difícil control, por lo que es necesario un mecanismo preciso en el ámbito. Esto, principalmente, debido a la sensibilidad de los microorganismos y la inhabilidad para manipular el comportamiento interno de las células, al manejar el ambiente externo en el que ellas viven.

El control de fermentadores ha sido un área de investigación activa durante las últimas décadas, y justo en las dos últimas ha concitado aún mayor atención. Esto se debe, principalmente, a los avances obtenidos en otras áreas, las cuales pueden ser explotadas para superar las dificultades que se presentan en el control de los mismos.

Comenzando con el control convencional de las variables de operación, tales como temperatura, pH y concentración de gases disueltos, las investigaciones en este campo han sufrido grandes cambios, incluidos las recientes aproximaciones basadas en redes neuronales. El objetivo de este capítulo, entonces, será presentar la revisión del estado del arte en el control de fermentadores continuos.

Los principales factores que contribuyen a dificultar el control de fermentadores son:

1. Su comportamiento dinámico es no lineal inherentemente.

2. Escasez de modelos dinámicos precisos del proceso, debido a la complejidad de los procesos biológicos, y los diversos tipos de comportamiento.
3. Variación de los parámetros de los modelos dinámicos.
4. Escasez de biosensores confiables que permitan medir actividades intercelulares, haciendo el proceso muy difícil de caracterizar.

Debido a los puntos destacados con anterioridad, es importante considerar el trabajo realizado por Bogle et al.². El autor discute técnicas que permiten modificar los microorganismos, haciéndolos menos sensibles a los cambios que se pueden generar durante el proceso bioquímico. De esta manera, hace una contribución al mejoramiento de los sistemas de control.

Actualmente, existen tres modos de operación en los fermentadores que son ampliamente utilizados y reconocidos en la industria: los *fermentadores en lotes*, los *fermentadores en lote alimentado*, y los *fermentadores continuos*.

Lo que caracteriza a un *fermentador en lotes* es su forma de trabajo. Éste no se alimenta del nutriente (sustrato) durante el proceso, operando de forma aislada con el entorno. Además, el producto final formado por los microorganismos se recoge al final término del proceso. Algunos productos farmacéuticos se preparan de esta forma, pero en general la operación en lote no es comercialmente atractiva.

En la *operación en lote alimentado*, en tanto, se agrega una corriente que contiene sustrato al proceso, pero no se obtiene producto de salida hasta el término de la operación. Antibióticos como la penicilina son comercialmente producidos en bioreactores lote alimentado, por lo cual hay un gran interés en optimizar ese tipo de procesos³.

La operación usualmente más económica es la *operación continua*, donde el sustrato es permanentemente agregado al bioreactor y, del mismo modo, una corriente de producto es

² I. D. L. Bogle et al., “A process systems engineering view of biochemical process operations”, *Computers & Chemical Engineering*, Fifth International Symposium on Process Systems Engineering, 20, n° 6–7 (junio de 1996): 943–49, doi:10.1016/0098-1354(95)00189-1.

³ A. Johnson, “The control of fed-batch fermentation processes—A survey”, *Automatica* 23, n° 6 (noviembre de 1987): 691–705, doi:10.1016/0005-1098(87)90026-4.

continuamente removida. Ejemplos de este tipo de operación es la fermentación de la leche para la producción de margarina o la purificación biológica de aguas servidas.

En este ámbito, Modak y Lim⁴ investigaron varios modos de operación de bioreactores para procesos de fermentación: operación continua, operación en lote, operación lote en etapas, operación lote alimentado, y operación lote alimentado en etapas. Ellos concluyeron que para maximizar la productividad, la operación continua era la mejor opción por sobre todas las demás.

El objetivo en el control de un proceso de fermentación es maximizar la producción de un producto deseado, mediante la manipulación de las variables del sistema. Para los fermentadores del tipo lote y lote alimentado, la cantidad a maximizar del producto deseado se debe realizar al final de la operación. Sin embargo, este último requerimiento genera un problema de optimización dinámico que a menudo es difícil de resolver.

Para un fermentador continuo, en cambio, la cantidad de producto deseado por unidad de tiempo -también llamado *productividad*- puede ser maximizada mediante la optimización de las condiciones del estado estacionario del fermentador. Si bien esto requiere resolver un problema de optimización del mencionado estado estacionario, es bastante menos complejo que lo propuesto para los casos anteriores.

Con esta finalidad es que hoy se estudia el control de procesos en reactores continuos. A continuación, se muestran algunos trabajos que intentan encontrar los valores a maximizar para fermentadores continuos⁵, aunque a menudo es posible encontrar ejemplos en los cuales

⁴ Jayant M. Modak y Henry C. Lim, "Optimal mode of operation of bioreactor for fermentation processes", *Chemical Engineering Science* 47, n° 15–16 (octubre de 1992): 3869–84, doi:10.1016/0009-2509(92)85136-Y.

⁵ MICHAEL J. ROLF y HENRY C. LIM, "Adaptive on-Line Optimization for Continuous Bioreactors", *Chemical Engineering Communications* 29, n° 1–6 (1 de agosto de 1984): 229–55, doi:10.1080/00986448408940160; Jeff Harmon, Spyros A. Svoronos, y Gerasimos Lyberatos, "Adaptive Steady-State Optimization of Biomass Productivity in Continuous Fermentors", *Biotechnology and Bioengineering* 30, n° 3 (20 de agosto de 1987): 335–44, doi:10.1002/bit.260300302; P. Saha, S. C. Patwardhan, y V. S. Ramachandra Rao, "Maximizing Productivity of a Continuous Fermenter Using Nonlinear Adaptive Optimizing Control", *Bioprocess Engineering* 20, n° 1 (1 de enero de 1999): 15–21, doi:10.1007/s004490050553; Sing Kiong Nguang y Xiao Dong Chen, "Simple Substrate Feeding Rate Control Mechanism for Optimizing the Steady State Productivity of a Class of Continuous Fermentation Processes", *Biotechnology Progress* 13, n° 2 (1 de enero de 1997): 200–204, doi:10.1021/bp9700115.

dicha regulación no corresponde específicamente a la *productividad*, sino que se requiere mantener constante otras variables del sistema⁶, como las propuestas por Bastin y Dochain:

1. *Regulación en la concentración de sustrato* en los casos en que el crecimiento de la biomasa es inhibido por altas concentraciones de sustrato. Aquí el desafío de control es el siguiente: en un principio, se requiere una regulación de retroalimentación para estabilizar el proceso, ya que en un lazo abierto es completamente inestable. Posteriormente, una buena elección de *set point* contribuye a la optimización de la producción de biomasa. Un ejemplo de lo explicado es el tratamiento biológico de aguas servidas, puesto que la regulación de la concentración de sustrato es equivalente a controlar el nivel de contaminantes en el efluente de la planta.
2. *Regulación de la concentración de oxígeno disuelto* en los procesos aeróbicos. Esta concentración debe mantenerse lo suficientemente alta para garantizar la actividad de los microbios. Pero una aireación excesiva es indeseable desde el punto de vista económico, y también puede ocasionar problemas con la biomasa.
3. *Regulación en la concentración de productos*. En los procesos de fermentación de levadura para formar etanol se requiere producir un producto determinado, con la finalidad de disminuir los costos asociados al proceso.
4. *Regulación de los gases de salida*. Un ejemplo de este tipo es la regulación de salida de metano en las plantas de biometanización, con la finalidad de obtener la mejor razón entre la producción de gases y la energía demandada.

Ahora bien, el objetivo del control de procesos de fermentación se logra mediante la elección de una variable a manipular. Puede ser la productividad o alguna de las variables nombradas con anterioridad, pero tiene que ser una variable de salida, con la finalidad de que ésta permanezca constante.

⁶ G. Bastin y D. Dochain, eds., *On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors* (Amsterdam ; New York: Elsevier Science, 1990), 253.

Para ello se utiliza un controlador (computador), que se encarga de regular las variables manipuladas (variables de entrada al fermentador), con la finalidad de mantenerlas a un control constante. Para generar esta regulación del proceso, se requiere encontrar una configuración o estructura de control, y diseñar una estrategia de control apropiada para éste.

La mayoría de los procesos de fermentación continuos utilizan como estructura de control el flujo de entrada como variable manipulada, y una variable de salida como variable controlada⁷. También se puede utilizar más de una variable para la estructura de control.

En esta línea, Menawat y Balachander⁸ propusieron una estructura de control alternativa para mantener una concentración de biomasa constante en el quimiostato. De esta manera, establecieron que utilizar como variable manipulada la concentración de sustrato en la entrada era más efectivo que la forma tradicional, que utiliza el flujo de alimentación o la tasa de dilución como variable manipulada.

Por otro lado Zhao y Skogestad⁹ investigaron cinco configuraciones de control, las cuales se detallan a continuación.

1. Turbidostat convencional: Se manipula la velocidad de dilución y se controla la concentración de biomasa.
2. Nutristat convencional: Se manipula la concentración de sustrato de la corriente de entrada, y se controla la concentración de biomasa.
3. Turbidostat de concentración: Se manipula la tasa de dilución y se controla la concentración de sustrato.
4. Nutristat de concentración: Se manipula la concentración de sustrato de la corriente de entrada, y se controla la concentración de sustrato.
5. Turbidostat modificado: Se manipula la velocidad de dilución de agua estéril, y se controla la concentración de biomasa.

⁷ K. Yamuna Rani y V. S. Ramachandra Rao, "Control of Fermenters – a Review", *Bioprocess Engineering* 21, n° 1 (1 de julio de 1999): 77–88, doi:10.1007/PL00009066.

⁸ Anil S. Menawat y Jayaram Balachander, "Alternate Control Structures for Chemostat", *AIChE Journal* 37, n° 2 (1 de febrero de 1991): 302–6, doi:10.1002/aic.690370220.

⁹ Ying Zhao y Sigurd Skogestad, "Comparison of Various Control Configurations for Continuous Bioreactors", *Industrial & Engineering Chemistry Research* 36, n° 3 (1 de marzo de 1997): 697–705, doi:10.1021/ie960123l.

Las configuraciones recién esbozadas se simularon usando control lineal simple proporcional-integral (PI), utilizando como medida para evaluar la capacidad de control a la ganancia de perturbación parcial ¹⁰, con respecto a las perturbaciones del modelo.

Este análisis se realizó sobre dos regiones de operación. La primera, a una baja tasa de dilución, donde el sustrato limita las condiciones de crecimiento; la segunda, a altas tasas de dilución, donde el crecimiento no se encuentra limitado por el sustrato.

Las conclusiones obtenidas en el citado estudio son bastante interesantes. Para las condiciones de crecimiento limitadas por el sustrato, el análisis de controlabilidad indicó que utilizar la configuración de *turbodistat de concentración* es la mejor forma de control.

De hecho, esta conclusión es consistente con los resultados obtenidos en el estudio desarrollado por Menawat y Balachander¹¹, donde se explica que la configuración de *turbodistat convencional* no puede ser utilizada en este punto de operación, debido a que la concentración de biomasa no responde a los cambios de la tasa de dilución.

El *nutristat convencional* no es recomendado por el análisis de controlabilidad, y además es difícil medir con precisión valores bajos de la concentración de sustrato. Sin embargo, para altas tasas de dilución, donde el crecimiento no se encuentra limitado por el sustrato, este método es ligeramente mejor que las otras configuraciones. Lo anterior, además, es consistente con lo propuesto en *Analyses of Various Control Schemes for Continuous Bioreactors* ¹².

De todas maneras, no hay grandes diferencias entre las configuraciones resultantes, por lo que el *turbodistat convencional* es también efectivo.

Sin embargo, el *nutristat de concentración* propuesto por Pramod Agrawal y Henry C. Lim ¹³ es inaceptable para todos los puntos de operación, debido a que la concentración de

¹⁰ Sigurd Skogestad y Erik A. Wolff, "Controllability measures for disturbance rejection", *Modeling Identification and Control* 17, n° 3 (1996): 167–82.

¹¹ Menawat y Balachander, "Alternate Control Structures for Chemostat."

¹² Pramod Agrawal y Henry C. Lim, "Analyses of Various Control Schemes for Continuous Bioreactors", en *Bioprocess Parameter Control*, Advances in Biochemical Engineering/Biotechnology 30 (Springer Berlin Heidelberg, 1984), 61–90, <http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0006380>.

¹³ Menawat y Balachander, "Alternate Control Structures for Chemostat."

sustrato en la corriente de entrada no tiene efecto en el estado estacionario de la concentración de sustrato.

En los últimos años se han experimentado grandes avances en las estrategias de control utilizadas en los procesos químicos, con la finalidad de ordenar las estrategias utilizadas en los bioreactores. Para ello, se utilizará la distinción presentada por D.E Seborg ¹⁴, la cual clasifica las diferentes estrategias de control de acuerdo al grado de utilización en la industria, dividiéndolas en cinco categorías.

- *Categoría 1 Control Convencional*: Control Manual, control PID, control ratio, control cascada y control feedforward.
- *Categoría 2 Control Avanzado (técnicas clásicas)*: Gain scheduling, time delay compensation, decoupling y controladores selective/override.
- *Categoría 3 Control Avanzado (ampliamente utilizado en la industria)*: control modelo predictivo, control calidad estadístico, control modelo interno y control adaptado.
- *Categoría 4 Control Avanzado (con algunas aplicaciones industriales)*: control óptimo (LQG), control no lineal, control robusto, control experto, controladores de redes neuronales y control en lógica difusa.
- *Categoría 5 Control Avanzado*: con algunas (si es que existen) aplicaciones industriales.

Ahora bien, utilizando la clasificación propuesta se procederá a clasificar los trabajos desarrollados para las diferentes estrategias de control.

En la *categoría 1*, utilizando una estrategia de control proporcional, el trabajo desarrollado por Edwards et al. ¹⁵ presenta un estudio en el que compara dos lazos de *control feedback proporcional* para modelos de crecimiento de inhibición de sustrato.

¹⁴ D. E. Seborg, “A Perspective on Advanced Strategies for Process Control (Revisited)”, en *Advances in Control*, ed. Paul M. Frank (Springer London, 1999), 103–34, http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4471-0853-5_4.

¹⁵ Victor H. Edwards, Raphael C. Ko, y Stephan A. Balogh, “Dynamics and Control of Continuous Microbial Propagators to Subject Substrate Inhibition”, *Biotechnology and Bioengineering* 14, n° 6 (1 de noviembre de 1972): 939–74, doi:10.1002/bit.260140606.

El primer lazo, escoge una configuración de control en la que la variable controlada es la concentración de biomasa, mientras que el segundo considera la variable controlada como la concentración de sustrato. Esto se realiza con la finalidad de eliminar la inestabilidad en el proceso para las condiciones de control requeridas, que surgen por los niveles inhibitorios de sustrato. Junto con ello, se analizan las suposiciones asumidas en el modelo utilizado para el sistema de control y se proponen otras estrategias de control más sofisticadas.

Por otro lado, Dibiasio et al ¹⁶ utiliza *estrategias de control PID y cascada* para analizar la estabilidad e inestabilidad de los diversos estados estacionarios que ocurren en los reactores continuos, cuando se contrae la velocidad de dilución utilizada como variable manipulada. Con esto se demuestra experimentalmente lo que se ve en las ecuaciones empíricas desarrolladas para los bioreactores.

En tanto, Rajinikanth y Latha ¹⁷ realizan un estudio de simulación consistente en el diseño de un controlador PID, en el que comparan diferentes técnicas de sintonización clásicas contra la técnica *particle swarm optimization*. Esta última arroja mejores resultados que los métodos clásicos, por lo que puede ser de ayuda frente a los otros sistemas de control no lineal.

Las estrategias de control *categoría 2* no se han estudiado extensamente en los bioreactores continuos. Lo anterior se atribuye, principalmente, a que la estrategia de control adaptado (*categoría 3*) resulta muy eficiente en la manipulación de fermentadores continuos, pues al permitir el establecimiento de una *estrategia de control con estimación de parámetros*, posibilita también la estimación de aquellos que cambian durante la fermentación ¹⁸.

¹⁶ David DiBiasio, H. C. Lim, y W. A. Weigand, "An Experimental Investigation of Stability and Multiplicity of Steady States in a Biological Reactor", *AIChE Journal* 27, n° 2 (1 de marzo de 1981): 284–92, doi:10.1002/aic.690270216; David DiBiasio, H. C. Lim, y W. A. Weigand, "Constrained Control of an Unstable Biological Reactor", *AIChE Journal* 30, n° 3 (1 de mayo de 1984): 520–22, doi:10.1002/aic.690300333.

¹⁷ V Rajinikanth y K Latha, "Modeling, Analysis, and Intelligent Controller Tuning for a Bioreactor: A Simulation Study", accedido 28 de mayo de 2015, http://www.academia.edu/3435012/Modeling_Analysis_and_Intelligent_Controller_Tuning_for_a_Bioreactor_A_Simulation_Study.

¹⁸ Bastin y Dochain, *On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*.

Su primera implementación fue propuesta, de hecho, por Dochain y Bastin ¹⁹. En su estudio, ambos desarrollaron una *estrategia de control adaptivo no lineal* para el crecimiento de bacterias, donde se destacó la ventaja de identificar parámetros de crecimiento y coeficientes de rendimiento, pues debido a ello se pudo obtener información en tiempo real de la biomasa en el sistema.

Renard et al. ²⁰, por su parte, implementaron con éxito una *estrategia de control simple adaptiva* en un reactor piloto de digestión anaeróbica. Aquí, la configuración de control desarrollada consistió en ocupar la concentración de sustrato como variable controlada y la razón de dilución como variable manipulada, con la ayuda del modelo matemático que describe el crecimiento de la reacción.

Siguiendo la línea de los trabajos anteriores, Dahou et al. ²¹ desarrollan un *control adaptivo predictivo* en un proceso de fermentación continuo, para regular la concentración de biomasa. Considerando como parámetro que varía con el tiempo la tasa de crecimiento, ambos modelos generan muy buenos resultados en el control del proceso.

De la misma forma, Zeng y Dahhou ²² realizan un *control adaptivo no lineal* para controlar la biomasa del sistema, donde la variable manipulada es la concentración de sustrato en la entrada del fermentador, utilizando técnicas de Lyapunov para la estabilización del sistema.

En el ámbito del control no lineal (*categoría 4*), Hoo y Kantor ²³ utilizan un *control feed-back* basado en aproximaciones lineales junto a un filtro Kalman, para controlar un

¹⁹ D. Dochain y G. Bastin, “Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems”, *Automatica* 20, n° 5 (septiembre de 1984): 621–34, doi:10.1016/0005-1098(84)90012-8.

²⁰ P. Renard et al., “Adaptive Control of Anaerobic Digestion Processes-a Pilot-Scale Application”, *Biotechnology and Bioengineering* 31, n° 4 (marzo de 1988): 287–94, doi:10.1002/bit.260310402.

²¹ B. Dahhou, G. Roux, y G. Chamilothis, “Modelling and adaptive predictive control of a continuous fermentation process”, *Applied Mathematical Modelling* 16, n° 10 (octubre de 1992): 545–52, doi:10.1016/0307-904X(92)90004-M; B. Dahhou, G. Chamilothis, y G. Roux, “Adaptive Predictive Control of a Continuous Fermentation Process”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 5, n° 6 (1 de noviembre de 1991): 351–62, doi:10.1002/acs.4480050602.

²² F. Y. Zeng, B. Dahhou, y M. T. Nihtila, “Adaptive control of a nonlinear fermentation process via MRAC technique”, *Applied Mathematical Modelling* 17, n° 2 (febrero de 1993): 58–69, doi:10.1016/0307-904X(93)90094-W.

²³ JEFFREY C. KANTOR KARLENE A. HOO, “LINEAR FEEDBACK EQUIVALENCE AND CONTROL OF AN UNSTABLE BIOLOGICAL REACTOR”, *CHEMICAL ENGINEERING COMMUNICATIONS* 46 (1986): 385–99, doi:10.1080/00986448608911418.

reactor continuo que se encuentre operando en regiones de inestabilidad. Obtuvieron, así, un control satisfactorio.

También están los controladores no lineales basados en *técnicas de linealización exactas*. En ese sentido, Henson y Seborg ²⁴ fueron pioneros en desarrollar este tipo de técnicas. En dicho trabajo se consideró la velocidad de dilución y la concentración de sustrato proveniente de la corriente de alimentación como las variables manipuladas, para una *estrategia de control single-input/single-output* (SISO) basada en el control de la productividad.

El control obtenido con la técnica de *linealización exacta de entrada-salida*, considerando la velocidad de dilución como la variable manipulada, provee un excelente comportamiento regulatorio en el proceso. Sin embargo, si se utiliza la misma técnica de linealización, pero se considera la concentración de sustrato como la variable manipulada, se presentan resultados problemáticos.

La técnica recién descrita produce cambios irrazonables en el control, mientras una técnica aproximada propuesta genera los resultados en respuestas más lentas. Se propone, por lo tanto, un enfoque modificado al de linealización exacta entrada-salida, que se traduce en un control más satisfactorio. Pero, de todas maneras, esta estrategia de control también presenta problemas en la medida en que las perturbaciones cambien el punto óptimo a controlar y éste se vuelva inestable.

Dentro del *control no lineal*, se pueden utilizar formas adaptivas. Dahhou y Roux ²⁵ investigan diferentes clases de controladores para un modelo de fermentación continuo utilizando una cinética exponencial, y lo analizan desde el punto de su rendimiento, mejoras y facilidad de implementación en la industria.

²⁴ Michael A. Henson y Dale E. Seborg, "Nonlinear control strategies for continuous fermenters", *Chemical Engineering Science* 47, n° 4 (1992): 821–35, doi:10.1016/0009-2509(92)80270-M.

²⁵ B. Dahhou, G. Roux, y A. Cheruy, "Linear and Non-Linear Adaptive Control of Alcoholic Fermentation Process: Experimental Results", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 7, n° 3 (1 de mayo de 1993): 213–33, doi:10.1002/acs.4480070304.

En este caso, los controladores utilizados son el PI, control adaptivo lineal y control adaptivo basado en estrategias no lineales. Los resultados presentados aseguran que éste último permite manejar el proceso de mejor forma.

Por su parte, Mailleret et al.²⁶ desarrolla un sistema de control no lineal adaptivo para un bioreactor continuo, en el cual se desconoce la cinética de la reacción. Sus resultados los aplica en el control de una planta de aguas servidas.

En este sentido, para el control no lineal de fermentadores existe una multiplicidad de trabajos que estiman nuevos controladores, comparándolos con otros tipos. A los presentados en el estudio *Estimation and Control Techniques for Continuous Culture Fermentation Processes*²⁷, se suman los postulados por Tsoneva y Patarinska²⁸.

En dicho trabajo, ambos presentan un control robusto no lineal a un proceso de fermentación continuo con retraso de tiempo y cinética del tipo Monod, el cual se adapta tanto a la concentración de biomasa como a la de sustrato.

En los últimos años, se ha dedicado una amplia investigación a sistemas de control no lineal que consideran el sistema biológico de reactor como un sistema impulsivo. Esto quiere decir que en un punto, el bioreactor tiene un comportamiento continuo y otro discreto. Para ellos se utiliza control feed-back con modelos de estado impulsivo (ecuaciones diferenciales que tienen dominio de tiempo continuo y discreto a la vez), y también cabe la opción de analizar el sistema con una serie de ecuaciones diferenciales con retardo.

²⁶ Ludovic Mailleret, Olivier Bernard, y Jean-Philippe Steyer, “Nonlinear adaptive control for bioreactors with unknown kinetics”, *Automatica* 40, n° 8 (agosto de 2004): 1379–85, doi:10.1016/j.automatica.2004.01.030.

²⁷ Jaime Alvarez Gallegos y Joaquin Alvarez Gallegos, “Estimation and Control Techniques for Continuous Culture Fermentation Processes”, *Biotechnology and Bioengineering* 26, n° 5 (1 de mayo de 1984): 442–51, doi:10.1002/bit.260260507; Prabirkumar Saha, Qiuping Hu, y Gade Pandu Rangaiah, “Multi-Input Multi-Output Control of a Continuous Fermenter Using Nonlinear Model Based Controllers”, *Bioprocess Engineering* 21, n° 6 (1 de diciembre de 1999): 533–42, doi:10.1007/s004490050713; G. Szederkényi et al., “Nonlinear analysis and control of a continuous fermentation process”, *Computers & Chemical Engineering* 26, n° 4–5 (15 de mayo de 2002): 659–70, doi:10.1016/S0098-1354(01)00793-1; L. Mailleret, J.-L. Gouzé, y O. Bernard, “Nonlinear Control for Algae Growth Models in the Chemostat”, *Bioprocess and Biosystems Engineering* 27, n° 5 (agosto de 2005): 319–27, doi:10.1007/s00449-005-0410-8.

²⁸ R. Tsoneva y T. Patarinska, “Robust Control of Continuous Fermentation Processes Described by Monod-Type Model with Delay”, en *Operations Research Proceedings 1999*, ed. Prof Dr Karl Inderfurth et al., Operations Research Proceedings 1999 1999 (Springer Berlin Heidelberg, 2000), 117–23, http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-58300-1_21.

Esta investigación corresponde a un área de las matemáticas aplicadas. Ejemplos en este ámbito son la investigación realizada por Leenheer y Smith ²⁹, la cual analiza la coexistencia y competición de dos especies en un mismo sistema biológico continuo, mediante la manipulación de la razón de dilución en un sistema *Feed-back*.

Basándose en este trabajo, diversos autores ³⁰ generalizan y analizan los resultados obtenidos. Por el lado del control feed-back con modelos de estado impulsivos, Sun et al ³¹ proponen un sistema de control impulsivo para controlar la biomasa, mientras que Tian et al ³², considera la dosis de sustrato en la entrada como un función impulsiva. Ciertamente, ambos analizan la existencia de una solución periódica para los sistemas modelados y estudios similares son realizados por Li, Möckel y Böhme, entre otros ³³.

El interés que han generado en los últimos años las redes neuronales en el control de procesos ³⁴ ha dado a lugar a investigaciones en el control de bioreactores. Prueba de ello son las investigaciones desarrolladas por Normandin et al. ³⁵, donde se desarrolla un control para un bioreactor continuo, con una cinética de inhibición no competitiva por sustrato. Para lograr lo anterior, se utilizan redes neuronales y una estrategia de control predictiva, lo cual genera

²⁹ Patrick De Leenheer y Hal Smith, “Feedback Control for Chemostat Models”, *Journal of Mathematical Biology* 46, n° 1 (1 de enero de 2003): 48–70, doi:10.1007/s00285-002-0170-x.

³⁰ Osamu Tagashira, “Permanent coexistence in chemostat models with delayed feedback control”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 10, n° 3 (junio de 2009): 1443–52, doi:10.1016/j.nonrwa.2008.01.015; Jean-Luc Gouzé y Gonzalo Robledo, “Feedback control for nonmonotone competition models in the chemostat”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications, Modelling, Analysis, and Theory of Dynamic Populations*, 6, n° 4 (septiembre de 2005): 671–90, doi:10.1016/j.nonrwa.2004.12.003; Osamu Tagashira y Tadayuki Hara, “Delayed feedback control for a chemostat model”, *Mathematical Biosciences, Hamamatsu Special Issue*, 201, n° 1–2 (mayo de 2006): 101–12, doi:10.1016/j.mbs.2005.12.014.

³¹ Kaibiao Sun et al., “Nonlinear modelling of a synchronized chemostat with impulsive state feedback control”, *Mathematical and Computer Modelling* 52, n° 1–2 (julio de 2010): 227–40, doi:10.1016/j.mcm.2010.02.012.

³² Yuan Tian et al., “Studies on the dynamics of a continuous bioprocess with impulsive state feedback control”, *Chemical Engineering Journal* 157, n° 2–3 (1 de marzo de 2010): 558–67, doi:10.1016/j.cej.2010.01.002.

³³ Zuxiong Li, Lansun Chen, y Zhijun Liu, “Periodic solution of a chemostat model with variable yield and impulsive state feedback control”, *Applied Mathematical Modelling* 36, n° 3 (marzo de 2012): 1255–66, doi:10.1016/j.apm.2011.07.069; Hongjian Guo y Lansun Chen, “Qualitative Analysis of a Variable Yield Turbidostat Model with Impulsive State Feedback Control”, *Journal of Applied Mathematics and Computing* 33, n° 1–2 (23 de abril de 2009): 193–208, doi:10.1007/s12190-009-0281-2; B. Möckel, Th. Bley, y B. Böhme, “Model Simulation of an Efficient Periodic Control Strategy for Continuous Fermentation Processes”, *Acta Biotechnologica* 10, n° 5 (1 de enero de 1990): 395–400, doi:10.1002/abio.370100503.

³⁴ K. J. Hunt et al., “Neural Networks for Control Systems: A Survey”, *Automatica* 28, n° 6 (noviembre de 1992): 1083–1112, doi:10.1016/0005-1098(92)90053-I.

³⁵ A. Normandin, J. Thibault, y B. P. A. Grandjean, “Optimizing Control of a Continuous Stirred Tank Fermenter Using a Neural Network”, *Bioprocess Engineering* 10, n° 3 (1 de marzo de 1994): 109–13, doi:10.1007/BF00369465.

muy buenos resultados, obteniendo un cierto grado de robustez y adaptación frente a las perturbaciones.

Por otro lado, Te Braake et al.³⁶ utilizan redes neuronales y linealización feedback para controlar un fermentador continuo, con la finalidad de disminuir la cantidad de cálculos computacionales que se deben obtener para el control no lineal. En ésta, se utilizan tres configuraciones de control (entrada-salida, múltiple entrada-una salida, y múltiple entrada y múltiple salida). En comparación a las técnicas de linealización para control no lineal, aquí se obtienen mejores resultados.

Finalmente, y con el propósito de optimizar la productividad de un bioreactor continuo, Lednicky y Mészáros³⁷ utilizan redes neuronales en un fermentador continuo. En este caso, utilizan el algoritmo de optimización ISOPE, lo cual genera excelentes resultados al optimar la biomasa, con respecto a tiempo y certeza.

Asimismo, Kaushikaram et al.³⁸ diseñan diversos controladores basados en redes neuronales para distintas configuraciones de control, como las planteadas por Zhao y Skogestad³⁹. Ellos demuestran que se pueden controlar las distintas configuraciones de fermentadores continuos en base a redes neuronales, obteniendo resultados con respecto al comportamiento del controlador frente a las perturbaciones del sistema.

³⁶ Hubert A. B. te Braake et al., “Control of nonlinear chemical processes using neural models and feedback linearization”, *Computers & Chemical Engineering* 22, n° 7–8 (20 de julio de 1998): 1113–27, doi:10.1016/S0098-1354(97)00267-6.

³⁷ P. Lednicky y A. Mészáros, “Neural Network Modeling in Optimisation of Continuous Fermentation Processes”, *Bioprocess Engineering* 18, n° 6 (1 de junio de 1998): 427–32, doi:10.1007/s004490050466.

³⁸ K. S. Kaushikaram, Seshu K. Damarla, y Madhusree Kundu, “Design of neural controllers for various configurations of continuous bioreactor”, 2010, <http://dSPACE.nitrkl.ac.in:8080/dSPACE/handle/2080/1491>.

³⁹ Zhao y Skogestad, “Comparison of Various Control Configurations for Continuous Bioreactors.”

3. Caso de Estudio

En el presente capítulo, se definirá el tipo de reactor biológico y las variables que se estudiarán durante el trabajo de título. Al ser los sistemas de fermentación tan variados, este acápite adquiere primordial importancia para así comprender lo realizado en los capítulos próximos.

3.1 Modelación de Reactores Biológicos

Los sistemas de fermentación obedecen a las mismas relaciones o balances (masa y energía) que modelan a los reactores que se encuentran en presencia de reacciones químicas⁴⁰. Sin embargo, en los sistemas biológicos existen mayores dificultades a la hora de calcular la velocidad y estequiometría de la reacción. A continuación, la *ecuación (1)* describe un balance de masa en estado transiente para un reactor con reacción química.

$$(\text{velocidad acumulación}) = (\text{velocidad entrada}) - (\text{velocidad salida}) \pm (\text{velocidad reacción}) \quad (1)$$

En los fermentadores, al igual que en las reacciones químicas, existen reactivos y catalizadores que hacen posible el curso de la reacción. A estos elementos en los fermentadores se les denomina *sustrato* y *biomasa*.

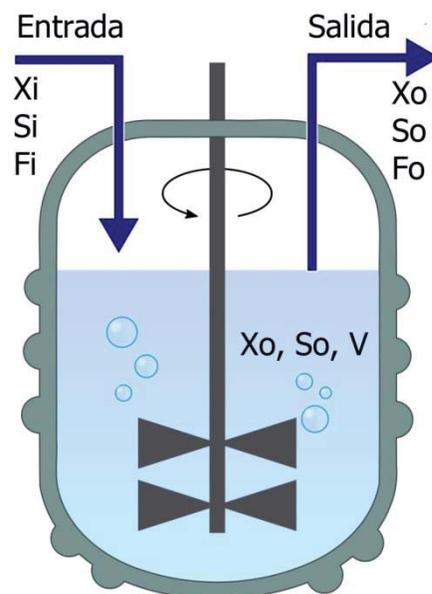
Dichos elementos biológicos pueden ser de distinta especie y composición, pero debido a que el objeto de estudio de la presente investigación no obedece a es un tema biológico propiamente tal, se utilizarán ambos términos de forma general.

⁴⁰ Dunn et al., *Biological Reaction Engineering*, 101.

Actualmente, en la industria química se trabaja con tres tipos de operación en los biorreactores: *operación en lotes*, *lote alimentado* y *continua* ⁴¹. De todas ellas, la que se utilizará en este trabajo será la *operación continua*.

En consecuencia, la

Figura 1 presenta un esquema generalizado de una operación continua para un fermentador.



⁴¹ Ibid., 55–63.

Figura 1: Bioreactor en Operación Continua y sus variables

Para el caso presentado por la *Figura 1*, es necesario definir las siguientes variables del sistema:

$X_i = \text{Concentración de biomasa en la entrada del bioreactor } \left(\frac{g}{l}\right)$

$S_i = \text{Concentración de sustrato en la entrada del bioreactor } \left(\frac{g}{l}\right)$

$F_i = \text{Flujo de alimentación al bioreactor } \left(\frac{l}{h}\right)$

$X_o = \text{Concentración de biomasa en la salida del bioreactor } \left(\frac{g}{l}\right)$

$S_o = \text{Concentración de sustrato en la salida del bioreactor } \left(\frac{g}{l}\right)$

$F_o = \text{Flujo de salida del bioreactor } \left(\frac{l}{h}\right)$

$V = \text{Volumen } (l)$

Como se puede apreciar, las concentraciones del sustrato y la biomasa son idénticas tanto en la salida como al interior del biorreactor. Lo anterior, debido a que se asume una agitación perfecta dentro de éste.

Al aplicar la *ecuación (1)* en el fermentador presentado en la *Figura 1*, y asumiendo que la densidad no varía durante el proceso, se obtienen los siguientes balances de masa:

Balance de masa general:

$$\frac{d(V \cdot \rho)}{dt} = \rho \cdot (F_i - F_o) \quad (2)$$

Balance de masa al Sustrato:

$$\frac{d(V \cdot S_o)}{dt} = F_i \cdot S_i - F_o \cdot S_o + r_s \cdot V \quad (3)$$

Balance de masa a la Biomasa:

$$\frac{d(V \cdot X_o)}{dt} = F_i \cdot X_i - F_o \cdot X_o + r_x \cdot V \quad (4)$$

Donde:

$$t = \text{tiempo (h)}$$

$$r_s = \text{velocidad cinética de reacción sustrato} \left(\frac{g}{l \cdot s} \right)$$

$$r_x = \text{velocidad cinética de reacción biomasa} \left(\frac{g}{l \cdot s} \right)$$

$$\rho = \text{densidad} \left(\frac{g}{l} \right)$$

En tanto, la expresión que describe la velocidad cinética para la biomasa se define de la siguiente manera:

$$r_x = \mu \cdot X_o \quad (5)$$

Donde:

$$\mu = \text{velocidad específica de crecimiento} \left(\frac{1}{s} \right)$$

Mientras, la velocidad de consumo de sustrato se formula de la siguiente manera:

$$r_s = -\frac{r_x}{Y_{x/s}} \quad (6)$$

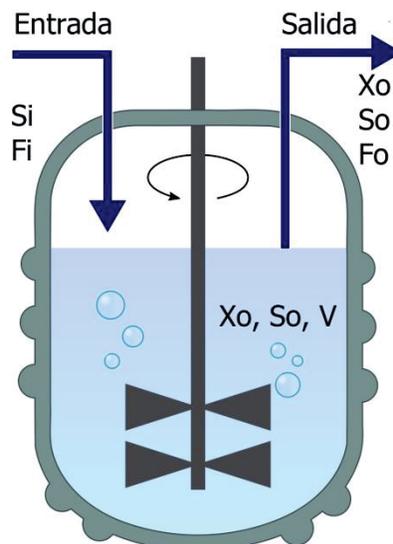
Donde:

$$Y_{x/s} = \text{coeficiente o constante de rendimiento}$$

Cabe destacar que en la industria bioquímica nunca se utiliza un fermentador continuo tan general como el presentado en la *Figura 1*, pues usualmente se le realizan algunas simplificaciones que faciliten su operación.

3.1.1 El Quimostato

Un quimiostato, tal como se muestra en la *Figura 2*, es un biorreactor continuo simplificado. Éste opera con una alimentación estéril de biomasa ($X_i = 0$) y a volumen constante en condiciones de estado estacionario, lo cual significa que $\frac{dV}{dt} = 0$. Además, la suposición de densidad constante también puede ser tomada en consideración.



Utilizando las suposiciones hechas con anterioridad, se procede a simplificar las ecuaciones (2), (3) y (4). Luego, reemplazando (5) y (6), se obtiene:

Balance General:

$$0 = F_i - F_o \quad (7)$$

Balance Sustrato:

$$V \cdot \frac{dS_o}{dt} = F \cdot (S_i - S_o) - \frac{\mu \cdot X_o \cdot V}{Y_{x/s}} \quad (8)$$

Balance Biomasa:

$$V \cdot \frac{dX_o}{dt} = -F \cdot X_o + \mu \cdot X_o \cdot V \quad (9)$$

Donde:

$$F = \text{Flujo volumétrico a través del sistema} \left(\frac{l}{h} \right)$$

A continuación, se definirá la siguiente variable para el sistema, denominada *razón o velocidad de dilución*:

$$D = \frac{F}{V} \quad (10)$$

Esta variable equivale al inverso del *tiempo de residencia* en un estanque, comúnmente denominado en el diseño de reactores como τ . La principal importancia de la introducción de dicha variable se debe a que permite escalar el proceso. Lo anterior significa que se puede utilizar un fermentador de laboratorio o de una planta piloto para predecir el comportamiento de un fermentador industrial.

Reemplazando (10) en (8) y (9), y posteriormente reordenando, se obtienen las siguientes ecuaciones que modelan el quimiostato:

Balance Sustrato:

$$\frac{dS_o}{dt} = D \cdot (S_i - S_o) - \frac{\mu \cdot X_o}{Y_{x/s}} \quad (11)$$

Balance Biomasa:

$$\frac{dX_o}{dt} = -D \cdot X_o + \mu \cdot X_o \quad (12)$$

3.2 Modelos de Velocidad Específica de Crecimiento

La *velocidad específica de crecimiento* (μ) usualmente no es constante. Un gran número de relaciones entre coeficientes de velocidad de crecimiento y concentración de

sustrato han sido desarrolladas⁴² con la finalidad de obtener una expresión que modele la *velocidad de crecimiento en un reactor biológico*.

En esta investigación se trabajará con tres modelos muy comunes y ampliamente utilizados, los cuales se denominan *Monod*, *Moser* y *Haldane* (*inhibición no competitiva por sustrato*). A continuación, se presentan y desarrollan dichos modelos a ocupar.

3.2.1 Modelo de Monod

Este modelo fue propuesto por Monod en 1942⁴³:

$$\mu = \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_0}{K_S + S_0} \quad (13)$$

Donde:

$$\mu_{m\acute{a}x} = \text{velocidad de crecimiento específica máxima} \left(\frac{1}{h}\right)$$

$$K_S = \text{Constante de Saturación} \left(\frac{g}{l}\right)$$

En un principio, dicho patrón fue propuesto por Michaelis y Menten en 1913, y luego físicamente justificado por Briggs y Haldane durante 1925, con el fin de expresar la velocidad de reacción de las reacciones catalizadas por enzimas.

⁴² Bastin y Dochain, *On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, 339–351.

⁴³ Jacques Monod, *Recherches sur la croissance des cultures bactériennes*, (Paris: Hermann & cie, 1942).

Por su parte, Monod posteriormente lo aplica debido a su facilidad de ajuste con los datos experimentales para cultivos de bacterias. Sin embargo, él mismo explica que cualquier curva sigmoideal puede ajustarse correctamente a los datos experimentales.

3.2.2 Modelo de Moser

En base a lo establecido por Monod, sobre el ajuste de diferentes modelos sobre los datos experimentales, en 1957 Moser⁴⁴ propone el siguiente modelo para la velocidad específica de crecimiento:

$$\mu = \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_0^n}{K_S + S_0^n} \quad (14)$$

Donde:

$$K_S = \text{Constante de Saturaci3n} \left(\frac{g}{l}\right)^n$$

$n = \text{coeficiente de ajuste}$

3.2.3 Modelo de Haldane

Una desventaja de los modelos propuestos anteriormente (Monod y Moser) es que no tienen en cuenta la posibilidad de los efectos de inhibici3n del sustrato sobre la velocidad de crecimiento espec3fica, concretamente cuando 3ste se encuentra en elevadas concentraciones.

⁴⁴ H. Moser, "Structure and Dynamics of Bacterial Populations Maintained in the Chemostat", *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology* 22 (1957): 121–37.

En 1968, Andrews propuso que los efectos de inhibición del sustrato se trataran con la ley de Haldane, la cual inicialmente fue derivada por este último para describir la inhibición en reacciones enzimáticas de sustrato:

$$\mu = \frac{\mu_0 \cdot S_0}{K_S + S_0 + \frac{S_0^2}{K_I}} \quad (15)$$

$$\mu_0 = \mu_{m\acute{a}x} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{K_M}{K_I}} \right) \quad (16)$$

Donde:

$$K_I = \text{Constante de inhibición} \left(\frac{g}{l} \right)$$

3.3 Simulación de los modelos

Una vez presentados los modelos matemáticos que describen el comportamiento de la biomasa y el sustrato en el quimiostato, junto a sus respectivas velocidades específicas de crecimiento, se procede a la simulación y análisis del estado natural.

Como se puede apreciar en las ecuaciones (11) y (12), que modelan el comportamiento del quimiostato, éstas conforman un *sistema no lineal de ecuaciones diferenciales*. Dicho tipo de sistemas muchas veces no tienen resolución analítica, por lo que se recomienda resolverlo de forma computacional o numérica.

En ese sentido, para realizar las simulaciones se utilizará el método numérico de *Runge-Kutta* de cuarto orden ⁴⁵, con un paso de integración (Δt o h) de 10^{-4} (h). El método será resuelto utilizando Matlab®.

⁴⁵ STEVEN C. CHAPRA, *Metodos numericos para ingenieros*, 6 edition (México: MC GRAW HILL, 2010), 746.

3.3.1 Simulación Quimiostato con Cinética de Monod

Para realizar la simulación del Quimiostato con Cinética de Monod, primero se debe reemplazar (13) en (11) y (12), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dX_o}{dt} = \left(-D + \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_o}{K_S + S_o}\right) \cdot X_o \\ \frac{dS_o}{dt} = D \cdot (S_i - S_o) - \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_o \cdot X_o}{Y_{x/s} \cdot (K_S + S_o)} \end{cases} \quad (17)$$

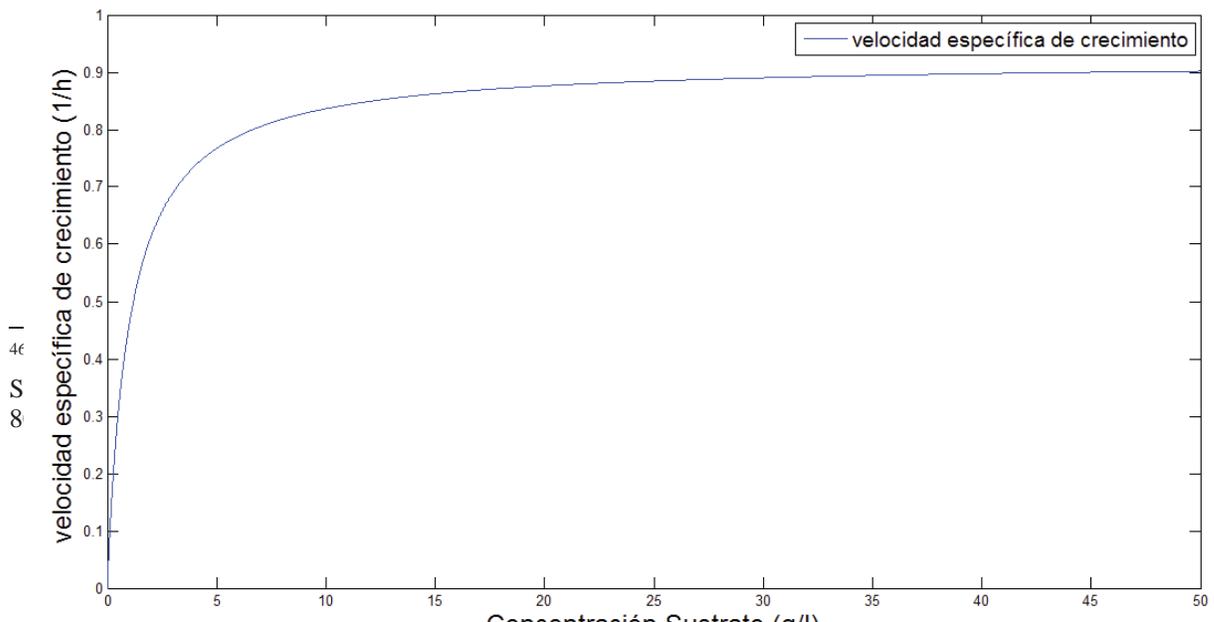
Como se puede apreciar, aún falta obtener los parámetros cinéticos de la fermentación. Para cumplir con lo anterior, se utilizará el trabajo realizado por Lendenmann et al.⁴⁶. En dicha investigación, se obtuvieron los parámetros de crecimiento para la *Escherichia Coli* en presencia de *Galactosa*, utilizando el modelo de velocidad específica de crecimiento de *Monod*:

$$\mu_{m\acute{a}x} = 0,92 \left(\frac{1}{h}\right)$$

$$K_M = 1 \left(\frac{g}{l}\right)$$

$$Y_{x/s} = 0,45$$

Ya con los parámetros de crecimiento, a continuación se describirá de forma gráfica la ecuación (13) o el modelo cinético de *Monod*:



En tanto, se tomarán como condiciones iniciales para (17) los siguientes valores:

$$S_o(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

$$X_o(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

Las variables que entran al quimiostato (D, S_i) adquirirán distintos valores, todo con la finalidad de mostrar las diferentes formas de las curvas presentadas por (17).

A continuación, en la *Figura 4* se muestra un perfil con valores de entrada medios para la concentración de biomasa y sustrato. Luego (Apéndice A, página 83), ésta presenta diferentes perfiles al variar la tasa de dilución (D) y la concentración de sustrato en la entrada (S_i) para el quimiostato.

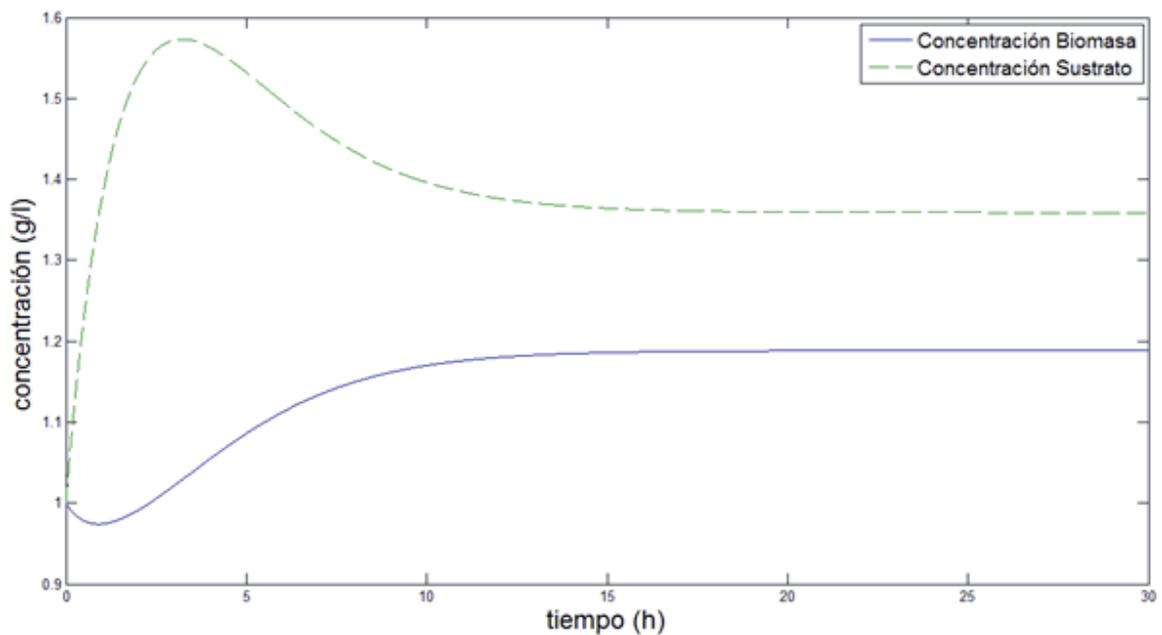


Figura 4: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)

3.3.2 Simulación Quimiostato con Cinética de Moser

De la misma forma desarrollada en el apartado 3.3.1, reemplazando (14) en (11) y (12), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_o}{dt} = \left(-D + \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_o^n}{K_S + S_o^n} \right) \cdot X_o \\ \frac{dS_o}{dt} = D \cdot (S_i - S_o) - \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot S_o^n \cdot X_o}{Y_{x/s} \cdot (K_S + S_o^n)} \end{array} \right. \quad (18)$$

Del trabajo realizado por Sharifzadeh Baei et al.⁴⁷, se desprenden parámetros cinéticos para *cupriavidus necátor* en presencia de sustratos seleccionados, utilizando en modelo cinético de Moser:

$$\mu_{m\acute{a}x} = 0,1 \left(\frac{1}{h} \right)$$

⁴⁷ Sharifzadeh Baei et al., “Growth Kinetic Parameters and Biosynthesis of Polyhydroxybutyrate in Cupriavidus Necator DSMZ 545 on Selected Substrates”, *Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly* 17, n° 1 (2011): 1–8, doi:10.2298/CICEQ100216043B.

$$K_M = 54 \left(\frac{g^2}{l^2} \right)$$

$$n = 2$$

$$Y_{x/s} = 0,5$$

De esta manera, con dichos parámetros de crecimiento se describirá de forma gráfica la ecuación (14), o *ecuación de crecimiento de Moser*:

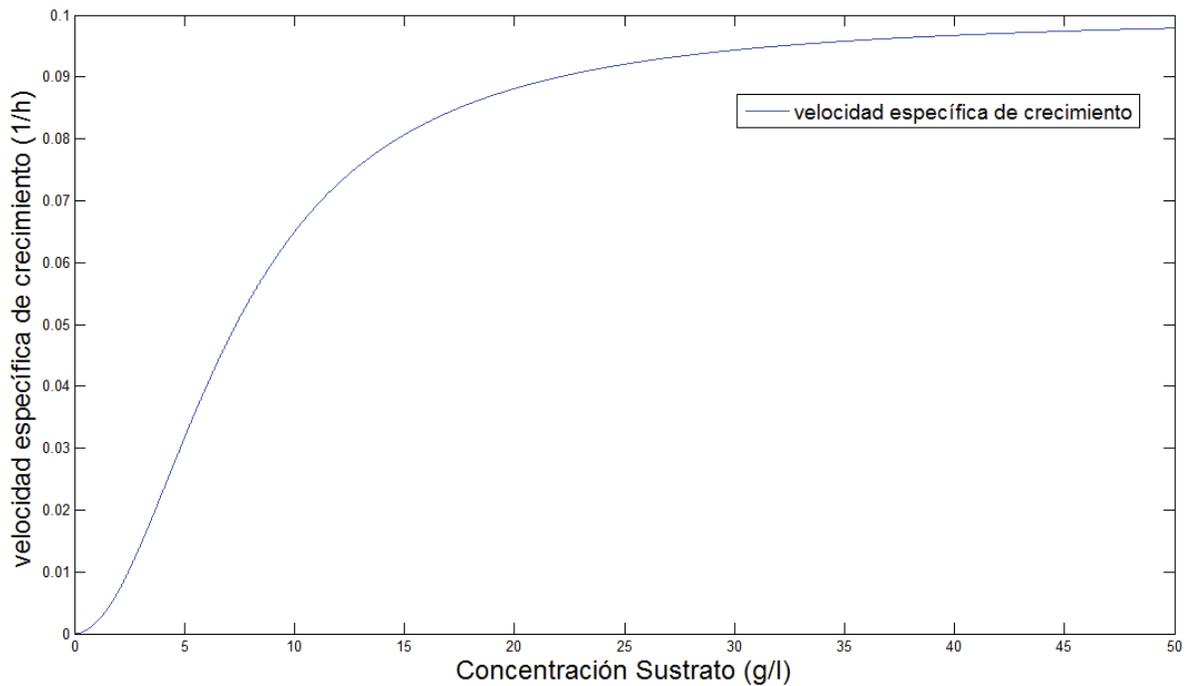


Figura 5: Modelo Cinético de Moser

Tomando como condiciones iniciales para (18) los siguientes valores:

$$S_0(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

$$X_0(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

Del mismo modo realizado en el apartado 3.3.1, se procederá a tomar distintos valores para las variables de entrada (D, S_i) (Apéndice A, página 87).

En seguida, la *Figura 6* presenta un perfil con valores de entrada medios en la concentración de biomasa y sustrato.

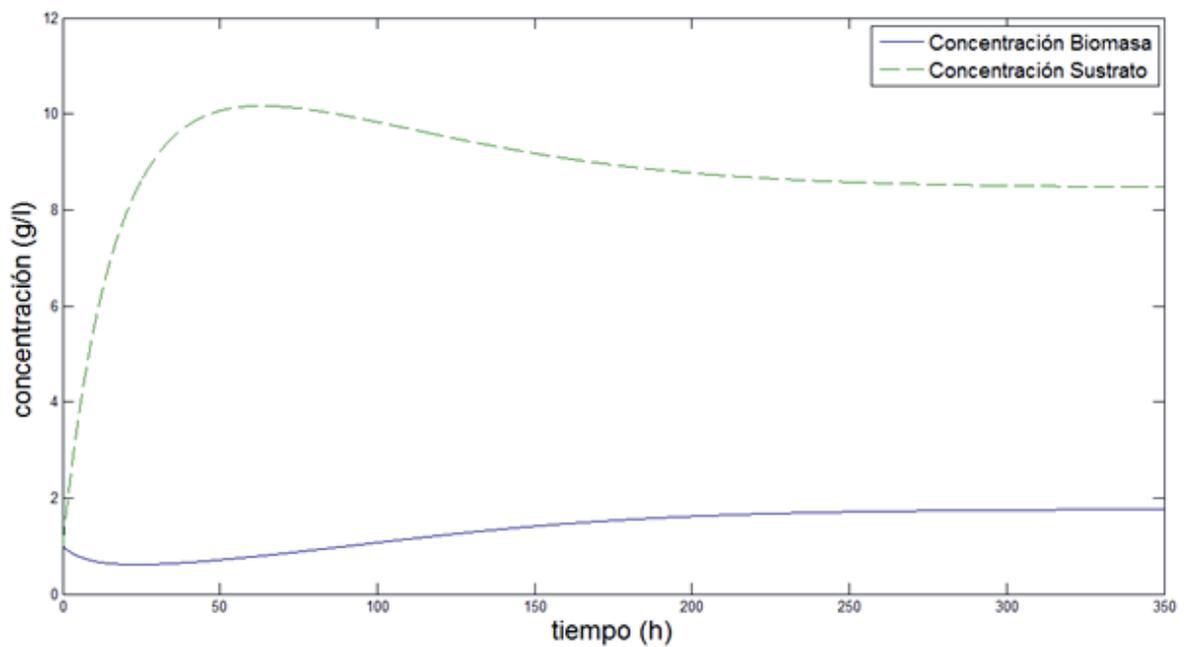


Figura 6: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057$ (1/h) y $S_i = 12$ (g/l)

3.3.3 Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane

Al igual que en los apartados 3.3.1 y 3.3.1, al reemplazar las ecuaciones (15) y (16) en (11) y (12), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_o}{dt} = \left(-D + \frac{\mu_{\max} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{K_M}{K_I}} \right) \cdot S_o}{\left(K_M + S_o + \frac{S_o^2}{K_I} \right)} \right) \cdot X_o \\ \frac{dS_o}{dt} = D \cdot (S_i - S_o) - \frac{\mu_{\max} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{K_M}{K_I}} \right) \cdot S_o \cdot X_o}{\left(K_M + S_o + \frac{S_o^2}{K_I} \right) \cdot Y_{x/s}} \end{array} \right. \quad (19)$$

Hill y Robinson encontraron los parámetros cinéticos para la degradación del fenol, utilizando *Pseudomonas Putida*⁴⁸ con cinética de Haldane:

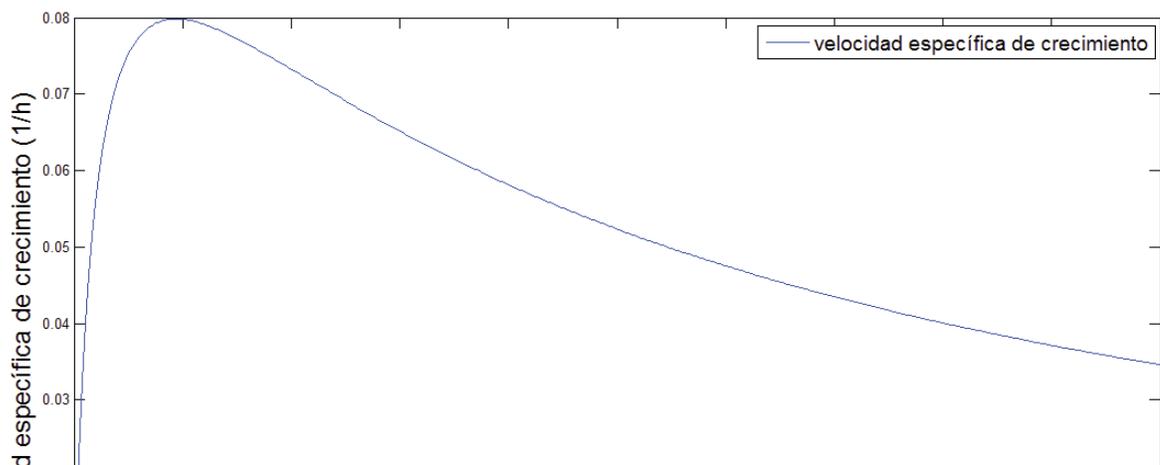
$$\mu_{\max} = 0,534 \left(\frac{1}{h} \right)$$

$$K_M = 0,1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

$$K_I = 2,2 \left(\frac{g}{l} \right)$$

$$Y_{x/s} = 0,52 \left(\frac{g}{l} \right)$$

Ahora bien, con dichos parámetros cinéticos se procede a describir de forma gráfica la ecuación (15), *ecuación de crecimiento de Haldane*:

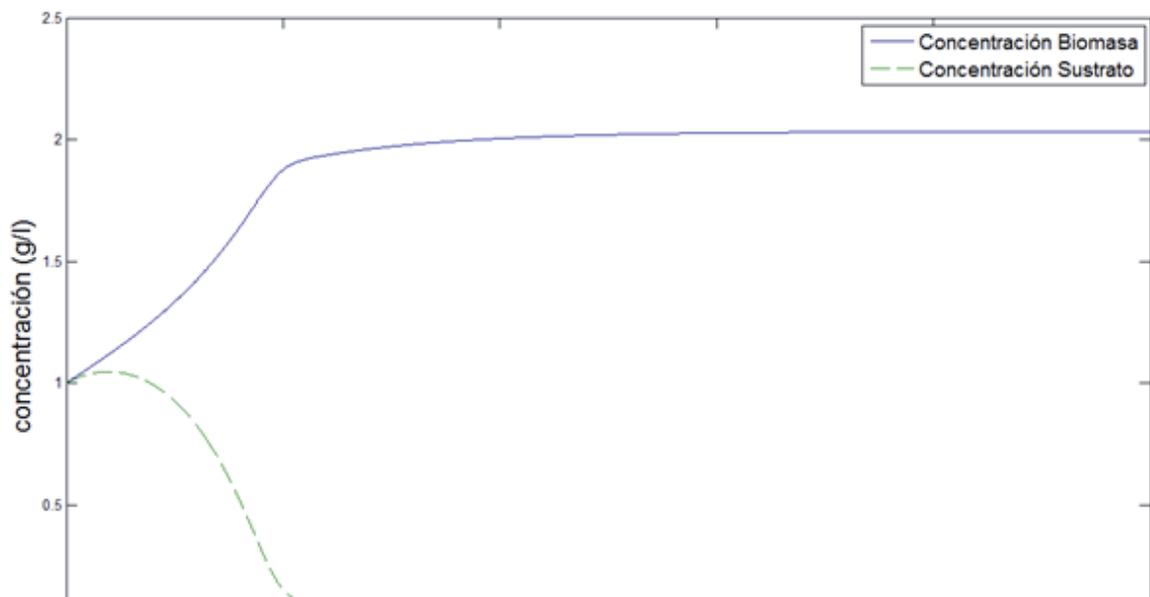


Tomando como condiciones iniciales para (19) los siguientes valores:

$$S_0(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

$$X_0(t = 0) = 1 \left(\frac{g}{l} \right)$$

Siguiendo la línea establecida anteriormente en los apartados 3.3.1 y 3.3.1, se tomarán distintos valores para las variables de entrada (D, S_i). En ese sentido, la *Figura 8* muestra un perfil para concentración de biomasa y sustrato con valores de entrada medios.



3.4 Análisis de Perfiles Obtenidos

Al realizar las simulaciones que describen el comportamiento de la concentración de biomasa y sustrato en el quimiostato, se desprende que éste es de carácter no lineal. Lo anterior se corresponde con lo presentado por los modelos, en los cuales las variables se encuentran elevadas a un coeficiente distinto de uno.

Como se puede apreciar, la *Figura 3 (modelo cinético de Monod)* y la *Figura 5 (modelo cinético de Moser)* presentan un comportamiento hiperbólico, el cual aumenta en la medida que la concentración de sustrato se eleva.

Sin embargo, algo distinto ocurre con la *Figura 7 (modelo cinético de Haldane)*. Al tener un factor de inhibición, en este modelo la velocidad específica de crecimiento aumenta hasta un punto, para luego comenzar a descender a medida que la concentración de biomasa aumenta.

Por su parte, la *Figura 4*, *Figura 6*, y *Figura 8* muestran un comportamiento ascendente para la concentración de biomasa. Aquí, ésta se estabiliza a una concentración más alta de la inicial, representando a su vez un comportamiento de características *hiperbólicas* o *no lineales*. En cambio, la concentración de sustrato muestra un comportamiento de tipo

“*campana*”: en un comienzo aumenta su concentración para luego descender y estabilizarse en un valor.

Se puede apreciar que este tipo de comportamientos ocurren cuando las variables de entrada (D, S_i) se encuentran en valores adecuados o normales.

Pero una situación diferente sucede cuando se manipula la velocidad de dilución. Cuando ésta aumenta (como se puede apreciar en la *Figura 22*, *Figura 27* y *Figura 32*), ocurre un fenómeno al que comúnmente se le denomina *cambio de condiciones*. En este proceso, la concentración de biomasa comienza a disminuir hasta desaparecer del fermentador, quedando solamente concentración de sustrato en este último.

Ambas curvas poseen características hiperbólicas durante el lavado. Se estabilizan con la desaparición de la biomasa, y cuando la concentración de sustrato en la salida del quimiostato se iguala con la de la entrada al fermentador.

En tanto, una vez que se manipula la concentración de sustrato, los perfiles cambian su comportamiento dependiendo del modelo cinético. De esta forma, no se puede apreciar un comportamiento generalizado como se hace para el aumento de la velocidad de dilución.

4. Linealización

Como ya se pudo ver en el acápite anterior, los modelos dinámicos del quimiostato (caso de estudio) están conformados por sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, los cuales provienen de los balances de masa realizados con anterioridad.

Sin embargo, como la mayoría de los sistemas de control utilizados en la industria están basados en modelos lineales⁴⁹, a continuación se procederá a *linealizar* los modelos presentados en el capítulo 3.

4.1 Linealización con serie de Taylor

La *linealización con serie de Taylor truncada al primer término* es el método de linealización clásico. De hecho, aparece en todos los libros de control de procesos y, por supuesto, es el más ampliamente utilizado.

Como se desprende de su nombre, este modelo se basa en la serie de Taylor en múltiples variables:

⁴⁹ Seborg, “A Perspective on Advanced Strategies for Process Control (Revisited).”

$$\begin{aligned}
F(x_1, \dots, x_d) = & f(a_1, \dots, a_d) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(a_1, \dots, a_d)}{\partial x_j} \cdot (x_j - a_j) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_d)}{\partial x_j \partial x_k} \cdot (x_j - a_j) \\
& \cdot (x_k - a_k) + \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \frac{\partial^3 f(a_1, \dots, a_d)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \cdot (x_j - a_j) \cdot (x_k - a_k) \cdot (x_l - a_l) + \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

En el (Apéndice B, página 95) se muestra el desarrollo de la ecuación (20) planteada, en la cual se obtiene el siguiente modelo de linealización:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A x + B u \\
y &= C x + D u
\end{aligned} \tag{21}$$

4.1.1 Linealización Quimiostato con Cinética de Monod

En esta sección se aplicará el modelo de *linealización serie de Taylor truncado al primer término* al quimiostato con cinética de *Monod*. Para ello, a la ecuación (17) se le aplicará la ecuación (21), desarrollada a su vez en el Apéndice B, página 95. De esta manera, se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_1 &= X_0 - X_{0s} \\
x_2 &= S_0 - S_{0s}
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= D - D_s \\
u_2 &= S_i - S_{i_s}
\end{aligned} \tag{23}$$

Y las siguientes Matrices de linealización:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_s - D_s & X_{o_s} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial S_{o_s}} \Big|_{S_{o_s}} \\ -\frac{\mu_s}{Y_{x/s}} & -D_s - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial S_{o_s}} \Big|_{S_{o_s}} \cdot X_{o_s}}{Y_{x/s}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -X_{o_s} & 0 \\ S_{i_s} - S_{o_s} & D_s \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Donde:

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_{o_s}} \Big|_{S_{o_s}} = \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot K_M}{(K_M + S_{o_s})^2} \quad (28)$$

Consiguientemente, de la sección 3.3.1 se obtienen los siguientes parámetros expresados a continuación en la *Tabla 1*, los que permiten desarrollar la linealización:

$X_{o_s} = 1,189(g/l)$	$S_{o_s} = 1,358(g/l)$
$\mu_{m\acute{a}x} = 0,92(1/h)$	$K_M = 1(g/l)$

$Y_{x/s} = 0,45$	$D_s = 0,53(1/h)$
$Si_s = 4(g/l)$	

Tabla 1: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Monod

Reemplazando los datos presentados por la *Tabla 1* en las ecuaciones (22), (23), (24), (25). Y, finalmente, reemplazando en (21) desarrollada en (Apéndice B, página 95), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dXo}{dt} \\ \frac{dSo}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6115 \cdot 10^{-4} & 0,1967 \\ -1,1774 & -0,9672 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,189 & 0 \\ 2,6420 & 0,53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

4.1.2 Linealización Quimiostato con Cinética de Moser

Al igual que en la sección 4.1.1, en este apartado se aplicará el modelo de *linealización serie de Taylor truncado al primer término* al quimiostato con cinética de *Moser*. Para ello, a la ecuación (18) se le aplicará la ecuación (21), desarrollada a su vez en el Apéndice B, página 95. Así, luego se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= Xo - Xo_s \\ x_2 &= So - So_s \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= D - D_s \\ u_2 &= Si - Si_s \end{aligned} \quad (31)$$

Y las siguientes Matrices de linealización:

$$A = \begin{bmatrix} \mu_s - D_s & X_{o_s} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial S_o} |_{S_{o_s}} \\ -\frac{\mu_s}{Y_{x/s}} & -D_s - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial S_o} |_{S_{o_s}} \cdot X_{o_s}}{Y_{x/s}} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B = \begin{bmatrix} -X_{o_s} & 0 \\ S_{i_s} - S_{o_s} & D_s \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Donde:

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_o} |_{S_{o_s}} = \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot K_M \cdot n \cdot S_{o_s}^n}{(K_M + S_{o_s})^2} \quad (36)$$

Del apartado 3.3.2 se recogen los parámetros expresados en la *Tabla 2*, los cuales permiten desarrollar la linealización:

$X_{o_s} = 1,769(g/l)$	$S_{o_s} = 8,461(g/l)$
$\mu_{m\acute{a}x} = 0,1(1/h)$	$K_M = 54(g^2/l^2)$

$Y_{x/s} = 0,5$	$D_s = 0,057(1/h)$
$Si_s = 12(g/l)$	$n = 2$

Tabla 2: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Moser

Entonces, reemplazando los datos recién presentados en la *Tabla 2* en las ecuaciones (32), (33), (34), (35). Luego, reemplazando en (21) desarrollada en (Apéndice B, página 95), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dXo}{dt} \\ \frac{dSo}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,4397 \cdot 10^{-6} & 0,0102 \\ -0,1140 & -0,0775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,769 & 0 \\ 3,5390 & 0,057 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

4.1.3 Linealización Quimiostato con Cinética de Haldane

Tal como se ha realizado en la sección 4.1.1 y 4.1.2, aquí se aplicará el modelo de *linealización serie de Taylor truncado al primer término* al quimiostato con cinética de *Haldane*. Para ello, a la ecuación (19) se le aplicará la ecuación (21), desarrollada en Apéndice B, página 95. De este modo, es posible obtener:

$$\begin{aligned} x_1 &= Xo - Xo_s \\ x_2 &= So - So_s \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= D - D_s \\ u_2 &= Si - Si_s \end{aligned} \quad (39)$$

Y las siguientes Matrices de linealización:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_s - D_s & X_{O_s} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial S_{O_s}} |_{S_{O_s}} \\ -\frac{\mu_s}{Y_{x/s}} & -D_s - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial S_{O_s}} |_{S_{O_s}} \cdot X_{O_s}}{Y_{x/s}} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -X_{O_s} & 0 \\ S_{i_s} - S_{O_s} & D_s \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Donde:

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_{O_s}} |_{S_{O_s}} = \frac{\mu_{m\acute{a}x} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{K_M}{K_I}} \right) \cdot (K_M - K_I \cdot S_{O_s}^2)}{(K_M + S_{O_s} + K_I \cdot S_{O_s}^2)^2} \quad (44)$$

En esa línea, del apartado 3.3.3 se obtienen los siguientes parámetros (*Tabla 3*), que luego permiten desarrollar la linealización:

$X_{O_s} = 2,034(g/l)$	$S_{O_s} = 0,0894(g/l)$
$\mu_{m\acute{a}x} = 0,534(1/h)$	$K_M = 0,1(g^2/l^2)$

$Y_{x/s} = 0,52$	$D_s = 0,3(1/h)$
$Si_s = 4(g/l)$	$K_l = 2,2(g/l)$

Tabla 3: Parámetros para linealización de Taylor Quimiostato con Cinética de Haldane

Reemplazando los datos presentados de *Tabla 3* en las ecuaciones (40), (41), (42), (43), y reemplazando en (21) desarrollada en (Apéndice B, página 95), se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,2269 & 1,4953 \\ -0,1406 & -3,1756 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2,0340 & 0 \\ 3,9106 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

4.2 Linealización con Método Óptimo de linealización

Lo anterior se debe, principalmente, a las ventajas y facilidades que presenta el método de Taylor ya explicado en el apartado 4.1.

En ese sentido, A.J Jordan publicó un método de linealización denominado *Optimal Linealization Method (OLM)*⁵⁰, este método se ha aplicado en ingeniería eléctrica, en modelos que representan circuitos eléctricos no lineales. El cual se basa en la técnica de análisis numérico de los *mínimos cuadrados*, con la finalidad de mejorar las matrices de linealización.

Utilizando la misma notación empleada en el (Apéndice B, página 95), se plantearán ahora las ecuaciones que describen este nuevo método.

⁵⁰ A. J. Jordan, "Linearization of non-linear state equation", *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Science* 54, n° 1 (2006), [http://bulletin.pan.pl/\(54-1\)63.pdf](http://bulletin.pan.pl/(54-1)63.pdf).

La forma principal de éste será el *modelo de espacio tiempo* visto en (21), pero con las matrices optimizadas:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{B}^* \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \mathbf{D}^* \mathbf{u}\end{aligned}\quad (46)$$

Estas matrices serán definidas por medio de una diferencia, determinada por la ecuación (105):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (47)$$

Así, los elementos A_{ij}^*, B_{ij}^* ($i, j = 1, 2, \dots, n$) que conforman las matrices óptimas (A^*, B^*) son determinados por la minimización del funcional, donde (t_1 =tiempo que demora el sistema en llegar al estado estacionario).

$$I(A_{ij}, B_{ij}) = \int_0^{t_1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} dt \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial I(A_{ij}, B_{ij})}{\partial A_{ij}} \right|_{A_{ij}=A_{ij}^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial I(A_{ij}, B_{ij})}{\partial B_{ij}} \right|_{B_{ij}=B_{ij}^*} = 0 \quad (49)$$

Cabe reconocer que Jordan presenta el modelo en forma de ecuaciones muy comprimidas, y con esto, su comprensión también se ve mermada. Para que esto no ocurra, J. Forenc escribió un algoritmo que permite programar este modelo de linealización⁵¹, el cual se presenta en el (Apéndice B, página 98).

Es importante destacar que tras aplicar este método se obtienen finalmente dos linealizaciones, como se indica en el (Apéndice B, página 98). Ambas se denominan *OLM* y *OLMTC*, respectivamente.

⁵¹ Jaroslaw Forenc, "The algorithm of optimal linearization of non-linear state equation", *Proc SPIE*, 2008, 148 – , doi:10.1117/12.784848.

4.2.1 Linealización Quimiostato con Cinética de Monod

Ahora bien, con el fin de desarrollar el *Optimal Linearization Method*, se utilizará como función base aquella presentada en el apartado 4.1.1 y el modelo no lineal obtenido en el apartado 3.3.1.

Luego, aplicando las ecuaciones y el algoritmo deducidos en el (Apéndice B, página 98), se obtienen las siguientes matrices de linealización:

- *Optimal Linearization Method (OLM)*

$$A^* = \begin{bmatrix} 0,1702 & 0,318 \\ -1,5421 & -1,247 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} -0,2913 & 0,0282 \\ 2,7815 & 0,3099 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1702 & 0,318 \\ -1,5421 & -1,247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,2913 & 0,0282 \\ 2,7815 & 0,3099 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

- *Optimal Linearization Method Transient Component (OLMTC)*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0,1768 & 0,3116 \\ -1,5705 & -1,2224 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} -0,4769 & 0,0041 \\ 4,8222 & 0,0406 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1768 & 0,3116 \\ -1,5705 & -1,2224 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,4769 & 0,0041 \\ 4,8222 & 0,0406 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

4.2.2 Linealización Quimiostato con Cinética de Moser

Para desarrollar el *Optimal Linearization Method* se utilizará como función base la obtenida en el apartado 4.1.2 y el modelo no lineal obtenido en el apartado 3.3.2. A continuación, aplicando las ecuaciones y el algoritmo deducidos en el (Apéndice B, página 98), es posible obtener las siguientes matrices de linealización:

- *Optimal Linearization Method (OLM)*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0,008 & 0,0105 \\ -0,1301 & -0,078 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} -1,2619 & -0,0012 \\ 12,5768 & 0,0117 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,008 & 0,0105 \\ -0,1301 & -0,078 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,2619 & -0,0012 \\ 12,5768 & 0,0117 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

- *Optimal Linearization Method Transient Component (OLMTC)*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0,0065 & 0,0106 \\ -0,1269 & -0,0783 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} -0,6606 & 0,0041 \\ 6,5239 & 0,0406 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0065 & 0,0106 \\ -0,1269 & -0,0783 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,6606 & 0,0041 \\ 6,5239 & 0,0406 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

4.2.3 Linealización Quimiostato con Cinética de Haldane

Con la finalidad de desarrollar el *Optimal Linearization Method* se utilizará como función base la obtenida en el apartado 4.1.3 y el modelo no lineal obtenido en el apartado 3.3.1. Después, aplicando las ecuaciones y el algoritmo deducidos en el (Apéndice B, página 98), es posible obtener las siguientes matrices de linealización:

- *Optimal Linearization Method (OLM)*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0,3445 & 0,5759 \\ -1,2392 & -1,4071 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0,3351 & 0,0568 \\ 0,6110 & 0,0967 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_o}{dt} \\ \frac{dS_o}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3445 & 0,5759 \\ -1,2392 & -1,4071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3351 & 0,0568 \\ 0,6110 & 0,0967 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o - X_{o_s} \\ S_o - S_{o_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

- *Optimal Linearization Method Transient Component (OLMTC)*

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0,2992 & 0,7530 \\ -1,1523 & -1,7474 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0,2692 & 0,0462 \\ 0,7399 & 0,1168 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dXo}{dt} \\ \frac{dSo}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2992 & 0,7530 \\ -1,1523 & -1,7474 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,2692 & 0,0462 \\ 0,7399 & 0,1168 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xo - Xo_s \\ So - So_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D - D_s \\ Si - Si_s \end{bmatrix}$$

4.3 Simulación de los Modelos Linealizados

En esta sección se simularán los modelos linealizados, para así poder compararlos con los no linealizados. Dicho cotejo es de especial importancia a la hora de obtener un acercamiento sobre qué tan buena es la linealización realizada.

Como se verá más adelante, las comparaciones efectuadas en esta sección no son las que se utilizarán de manera definitiva cuando se realice un control sobre el proceso. No obstante, sirven para tener una referencia acerca de qué tanto afecta la linealización al proceso en sí mismo.

En ese sentido, para realizar las simulaciones se utilizará el método numérico de *Runge-Kutta* de cuarto orden, del mismo modo que se ocupó en la sección 3.3.

4.3.1 Simulación Quimiostato con Cinética de Monod

Para realizar las simulaciones de las ecuaciones (29), (54) y (59) se utilizarán las mismas condiciones iniciales empleadas en el apartado 3.3.1, obteniéndose las siguientes simulaciones:

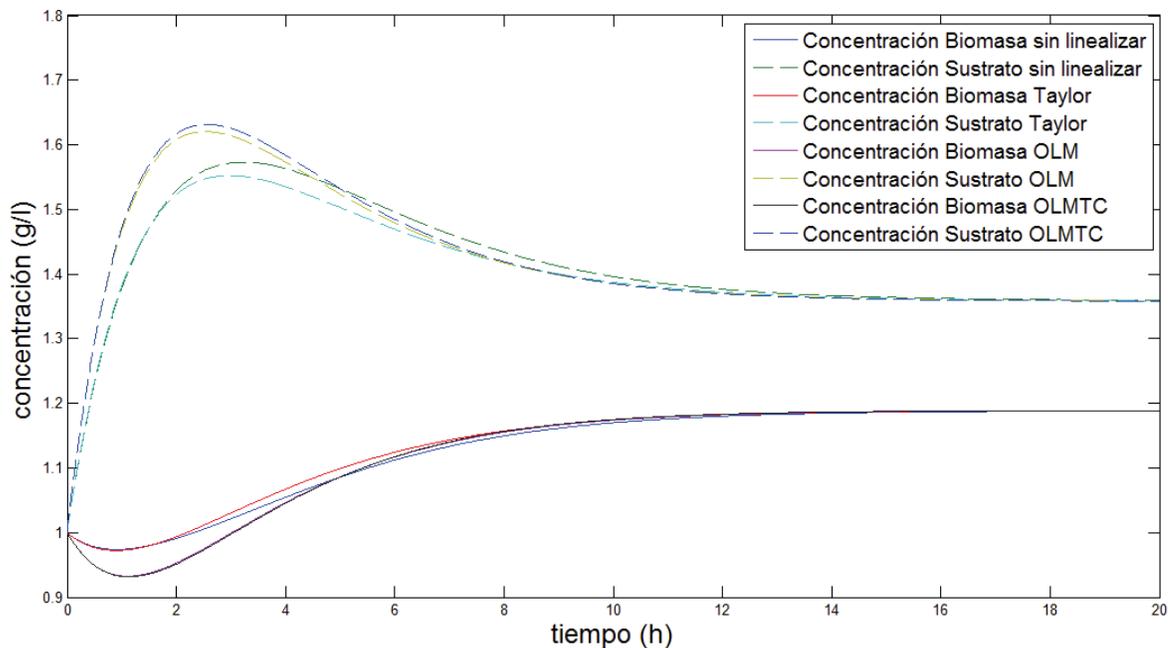


Figura 9: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Monod

Las herramientas que se utilizarán para cuantificar la eficacia de los métodos de linealización serán: *error integral cuadrático ISE* y el *error integral absoluto IAE*.

Dichos errores calculan la diferencia entre la linealización obtenida para los modelos y el modelo sin linealizar escogido. Sus fórmulas son las siguientes:

$$ISE = \int_0^{\infty} (\text{sin linealizar} - \text{linealizado})^2 \quad (80)$$

$$IAE = \int_0^{\infty} |\text{sin linealizar} - \text{linealizado}| \quad (81)$$

A continuación, se calcula el *ISE* y el *IAE* para las simulaciones obtenidas en la *Figura 9*:

- Errores calculados para la *biomasa*:

$$\begin{array}{ll} ISE_{Taylor} = 7,9417 \cdot 10^{-4} & IAE_{Taylor} = 0,0904 \\ ISE_{OLM} = 0,0039 & IAE_{OLM} = 0,1555 \\ ISE_{OLMTC} = 0,0043 & IAE_{OLMTC} = 0,1694 \end{array}$$

- Errores calculados para el *sustrato*:

$$\begin{array}{ll} ISE_{Taylor} = 0,0038 & IAE_{Taylor} = 0,1974 \\ ISE_{OLM} = 0,0178 & IAE_{OLM} = 0,3508 \end{array}$$

$$ISE_{OLMTC} = 0,021$$

$$IAE_{OLMTC} = 0,3736$$

4.3.2 Simulación Quimiostato con Cinética de Moser

Para realizar las simulaciones de las ecuaciones (37), (64), y (69) se utilizarán las mismas condiciones iniciales aplicadas en el apartado 3.3.2, de manera tal que se obtienen las siguientes simulaciones:

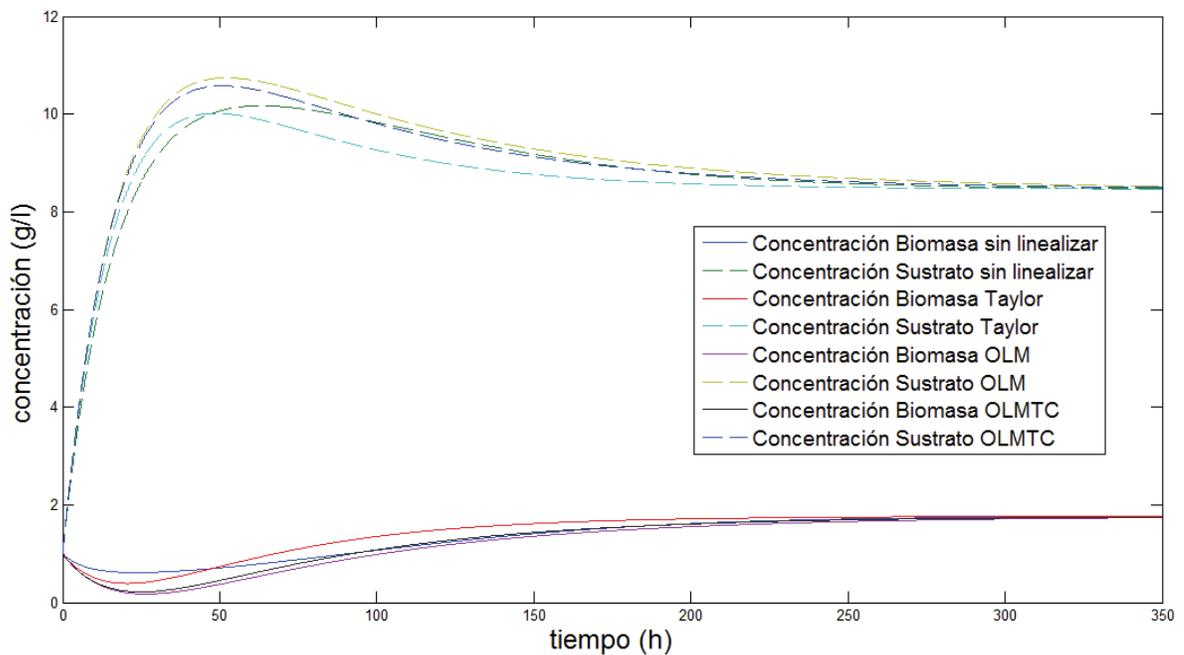


Figura 10: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Moser

A continuación, se calcula el *ISE* y el *IAE* para las simulaciones obtenidas en la *Figura 10*:

- Errores calculados para la *biomasa*:

$$ISE_{Taylor} = 8,0617$$

$$IAE_{Taylor} = 41,4903$$

$$ISE_{OLM} = 9,2797$$

$$IAE_{OLM} = 39,3254$$

$$ISE_{OLMTC} = 5,9878$$

$$IAE_{OLMTC} = 24,3951$$

- Errores calculados para el *sustrato*:

$$ISE_{Taylor} = 32,5713$$

$$IAE_{Taylor} = 83,5028$$

$$ISE_{OLM} = 37,2109$$

$$IAE_{OLM} = 78,6401$$

$$ISE_{OLMTC} = 23,7459$$

$$IAE_{OLMTC} = 48,5303$$

4.3.3 Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane

Para realizar el mismo proceso sobre las ecuaciones (45), (74), y (79), esta vez se utilizarán las mismas condiciones iniciales adoptadas en el apartado 3.3.3. Así, se pueden obtener las simulaciones a continuación:

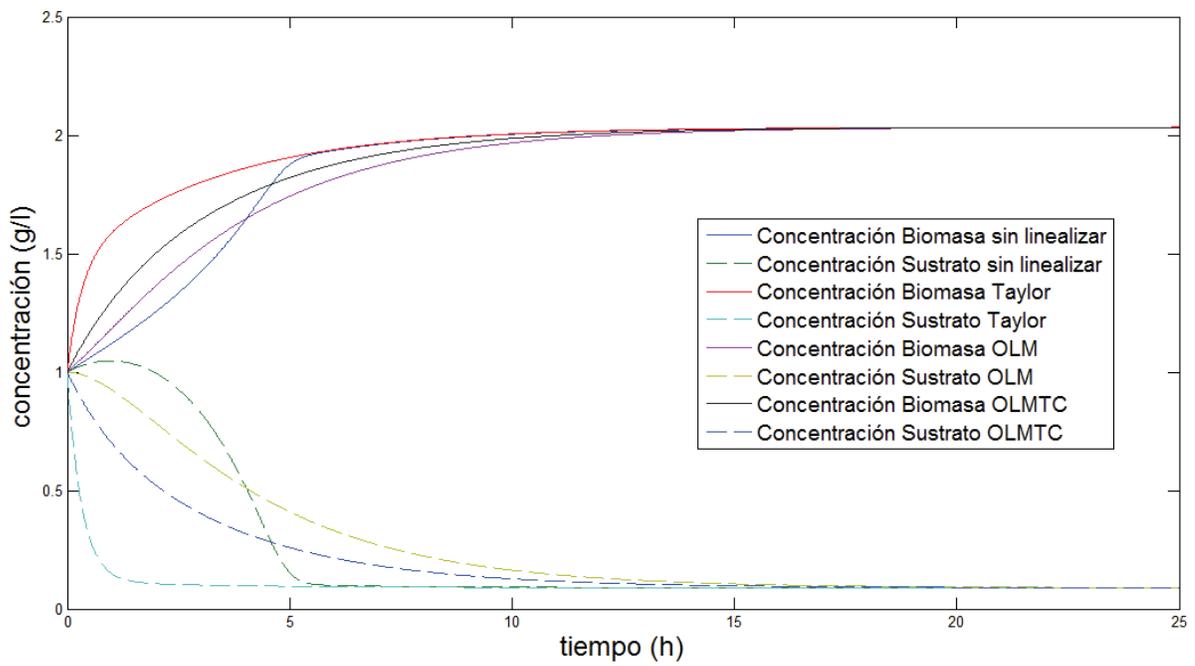


Figura 11: Comparación de modelos para quimiostato con cinética de Haldane

A continuación, se calcula el *ISE* y el *IAE* para las simulaciones obtenidas en la *Figura 11*:

- Errores calculados para la *biomasa*:

$$ISE_{Taylor} = 0,6488$$

$$IAE_{Taylor} = 1,6864$$

$$ISE_{OLM} = 0,075$$

$$IAE_{OLM} = 0,8925$$

$$ISE_{OLMTC} = 0,1638$$

$$IAE_{OLMTC} = 1,0351$$

- Errores calculados para el *sustrato*:

$$ISE_{Taylor} = 2,3947$$

$$IAE_{Taylor} = 3,2204$$

$$ISE_{OLM} = 0,2792$$

$$IAE_{OLM} = 1,7349$$

$$ISE_{OLMTC} = 0,6043$$

$$IAE_{OLMTC} = 2,0065$$

A pesar de que aún no se realiza el control del proceso, ni tampoco se obtienen las funciones de transferencia. Se puede ver, que a medida que la no linealidad del proceso va en aumento, las linealizaciones *OLM* y *OLMTC* superan a la establecida por *Taylor*. Lo anterior queda demostrado en los errores obtenidos.

También se puede apreciar que los errores obtenidos para el modelo de *Monod*, son más pequeños que los obtenidos para el modelo de *Haldane*. Esto establece lo siguiente, a medida que el proceso se vuelve más no lineal la linealización representa en menor medida al proceso.

Finalmente, se puede ver que a tiempo infinito la linealización y el modelo no lineal se igualan, esto se debe a la utilización del estado estacionario como punto de referencia para realizar las linealizaciones.

5. Control de Procesos

En el control de procesos, una forma clave de analizar los sistemas encontrados es mediante la función de transferencia, la cual juega un rol importantísimo en el diseño y análisis de sistemas de control ⁵².

Para ello, en el (Apéndice C, página100) se desarrolla el procedimiento para encontrar las funciones de transferencia, el cual es fácilmente aplicable a los sistemas encontrados en el capítulo 4.

A continuación, se definirá la configuración o estructura de control para el proceso, para luego determinar las funciones de transferencia asociadas.

5.1 Configuración de Control

La configuración de control que se realizará consistirá en un *Turbidostat convencional*. Esta configuración considera como variable manipulada la velocidad de dilución (D), y como variable controlada la concentración de biomasa (X_0).

⁵² Seborg et al., *Process Dynamics and Control*.

La elección de esta configuración de control se debe a que, tal como su nombre lo indica, es la que comúnmente se utiliza en el control de procesos. Esto es de gran ayuda, debido a que asegura una configuración de control que no generará inconvenientes cuando sea realizada la estrategia de control.

5.2 Desarrollo de Funciones de Transferencia

Ahora bien, en este apartado se desarrollarán las funciones de transferencia para las diversas linealizaciones y modelos desarrollados con anterioridad.

5.2.1 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Monod

Al Aplicar a las ecuaciones (29), (54), y (59) el procedimiento desarrollado en (Apéndice C, página 100), y las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned}X_o(0) &= 1,189(g/l) \\S_o(0) &= 1,358(g/l)\end{aligned}$$

Se obtienen las consecuentes funciones de transferencia:

- Funciones de Transferencia para linealización con Taylor

$$G_p = \frac{-1,189 \cdot s - 0,6303}{s^2 + 0,9674 \cdot s + 0,2318} \quad (82)$$

$$G_d = \frac{0,1043}{s^2 + 0,9674 \cdot s + 0,2318} \quad (83)$$

- Funciones de Transferencia para linealización *OLM*

$$G_p = \frac{-0,2913 \cdot s + 0,5213}{s^2 + 1,0768 \cdot s + 0,2781} \quad (84)$$

$$G_d = \frac{0,0282 \cdot s + 0,1337}{s^2 + 1,0768 \cdot s + 0,2781} \quad (85)$$

- Funciones de Transferencia para linealización *OLMTC*

$$G_p = \frac{-0,4769 \cdot s + 0,9196}{s^2 + 1,0456 \cdot s + 0,2732} \quad (86)$$

$$G_d = \frac{0,0041 \cdot s + 0,0177}{s^2 + 1,0456 \cdot s + 0,2732} \quad (87)$$

5.2.2 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Moser

Al realizar el procedimiento desarrollado en (Apéndice C, página 100) a las ecuaciones (37), (64), y (69), considerando las consecuentes condiciones iniciales.

$$X_o(0) = 1,769(g/l)$$

$$S_o(0) = 8,461(g/l)$$

Se consiguen las siguientes funciones de transferencia:

- Funciones de Transferencia para linealización con Taylor

$$G_p = \frac{-1,769 \cdot s - 0,101}{s^2 + 0,0775 \cdot s + 0,0012} \quad (88)$$

$$G_d = \frac{0,0006}{s^2 + 0,0775 \cdot s + 0,0012} \quad (89)$$

- Funciones de Transferencia para linealización con *OLM*

$$G_p = \frac{-1,2619 \cdot s + 0,0336}{s^2 + 0,07 \cdot s + 0,0007} \quad (90)$$

$$G_d = \frac{-0,0012 \cdot s}{s^2 + 0,07 \cdot s + 0,0007} \quad (91)$$

- Funciones de Transferencia para linealización con *OLMTC*

$$G_p = \frac{-0,6606 \cdot s + 0,0174}{s^2 + 0,0718 \cdot s + 0,0008} \quad (92)$$

$$G_d = \frac{0,0041 \cdot s + 0,0008}{s^2 + 0,0718 \cdot s + 0,0008} \quad (93)$$

5.2.3 Funciones de Transferencia para Quimiostato con Cinética de Haldane

A las ecuaciones (45), (74), y (79) se les aplicará el procedimiento desarrollado en el (Apéndice C, página 100), considerando como condiciones iniciales los valores a continuación:

$$\begin{aligned} X_o(0) &= 2,034(g/l) \\ S_o(0) &= 0,0894(g/l) \end{aligned}$$

Y así obtener las siguientes funciones de transferencia:

- Funciones de Transferencia para linealización con Taylor

$$G_p = \frac{-2,034 \cdot s - 0,6117}{s^2 + 3,4025 \cdot s + 0,9308} \quad (94)$$

$$G_d = \frac{0,4486}{s^2 + 3,4025 \cdot s + 0,9308} \quad (95)$$

- Funciones de Transferencia para linealización con *OLM*

$$G_p = \frac{0,3351 \cdot s + 0,8234}{s^2 + 1,0626 \cdot s + 0,2289} \quad (96)$$

$$G_d = \frac{0,0568 \cdot s + 0,1356}{s^2 + 1,0626 \cdot s + 0,2289} \quad (97)$$

- Funciones de Transferencia para linealización con *OLMTC*

$$G_p = \frac{0,2692 \cdot s + 1,0275}{s^2 + 1,4482 \cdot s + 0,3449} \quad (98)$$

$$G_d = \frac{0,0462 \cdot s + 0,1687}{s^2 + 1,4482 \cdot s + 0,3449} \quad (99)$$

Ya con las funciones de transferencia obtenidas, se puede dar inicio al control del proceso. De esta manera, se puede apreciar que los coeficientes de éstas difieren de acuerdo a la diferentes linealizaciones utilizadas.

5.3 Estrategia de Control

Una vez obtenidas las funciones de transferencia para el proceso, y junto con ello la configuración de control, para controlar el proceso se hace necesaria la elección de una estrategia de control que permita desarrollar los lazos de éste. De esta forma, los sistemas de control pueden ser analizados y comparados.

Como la finalidad de este trabajo es el análisis de los métodos de linealización, la estrategia de control no es algo que sea tan relevante para el estudio. Debido a ello, se elegirá una estrategia de control *realimentado* o *Feed-back*, con un controlador PID.

La elección de esta estrategia se debe principalmente a su amplia utilización en la industria, y también a su facilidad de implementarla en los procesos⁵³.

El *control retroalimentado* es un mecanismo de control que utiliza la información de las mediciones o variables de salida de un proceso, para manipular una variable de entrada con la finalidad de lograr un resultado deseado.

En el *control feed-back*, la variable controlada es medida y comparada con un valor asignado (también denominado set-point). Esta diferencia entre el valor actual y el deseado es llamada el error.

En este mecanismo se manipula una entrada al sistema para minimizar el error: la *Figura 12* muestra una representación gráfica de un control retroalimentado típico.

De esta manera, el error en el sistema sería la variable de salida menos el set-point. La salida deseada es generalmente ingresada en el sistema por el usuario, mientras que la salida del sistema es medida (por un medidor de flujo, termómetro o instrumento similar) y la diferencia es calculada. Esta diferencia es usada para controlar las entradas en el sistema, y así reducir el error en el proceso⁵⁴.

⁵³ Seborg, "A Perspective on Advanced Strategies for Process Control (Revisited)."

⁵⁴ "Feedback control - ControlsWiki", accedido 13 de agosto de 2015, https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Feedback_control.

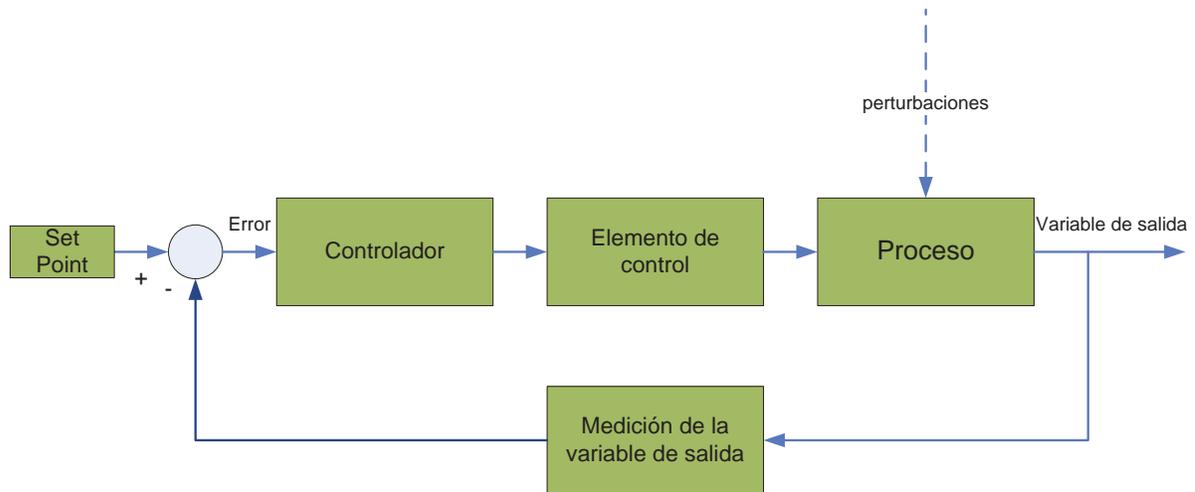


Figura 12: Diagrama de bloques para estrategia de control feed-back

Por su parte, el elemento que se encarga de realizar el control es llamado controlador. Éste intenta minimizar el error mediante el ajuste del proceso, a través del uso de una variable manipulada.

El algoritmo de *control PID*, que se utilizará para controlar el sistema, implica tres parámetros constantes separados. En consecuencia, es a veces llamado el control de tres términos: proporcional, los valores integrales y derivados, P indicado, I y D.

En pocas palabras, estos valores pueden ser interpretados en términos de tiempo. P depende del error presente, I en la acumulación de los errores del pasado, y D es una predicción de errores futuros⁵⁵.

5.4 Lazos de Control para los sistemas estudiados.

⁵⁵ "PID Controller", *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 11 de agosto de 2015, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=PID_controller&oldid=675528698.

Una vez obtenidas las funciones de transferencia para los sistemas estudiados, y definidas la configuración y estrategia de control, se deben desarrollar los lazos de control para los sistemas estudiados.

Con la finalidad de que éstos reflejen el efecto de las linealizaciones exclusivamente, y no de otro efecto como pueden ser las perturbaciones o el efecto que pueden causar los elementos de control, se realizarán las siguientes suposiciones:

1. Se considerará dinámica unitaria, tanto para el elemento de control como para la medición de la variable de salida.
2. No se considerará el efecto de las perturbaciones sobre el proceso.

A continuación, en la *Figura 13* se muestra el lazo de control para el quimiostato con cinética de Monod.

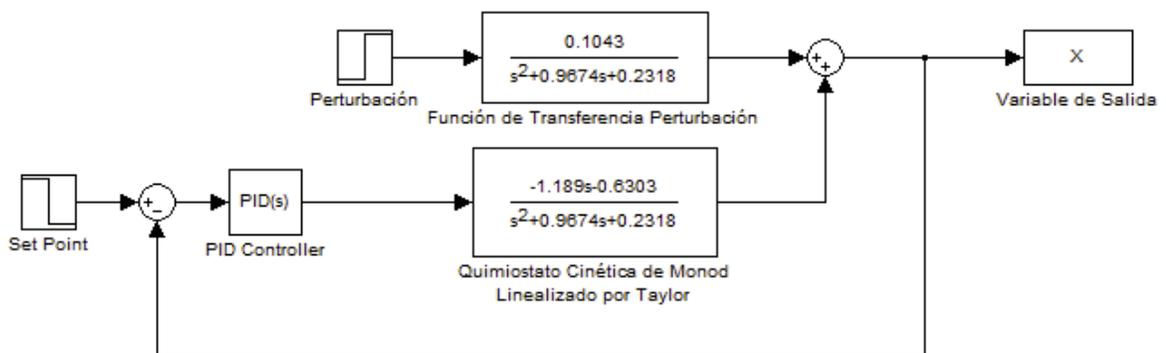


Figura 13: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por Taylor

Por su parte, los demás lazos de control se muestran en el (Apéndice D, página 101)

5.5 Sintonización de Controladores

Una vez obtenidos los lazos de control, se procederá a la sintonización de los controladores. Con esto se asegura un control del proceso para cada lazo de control desarrollado.

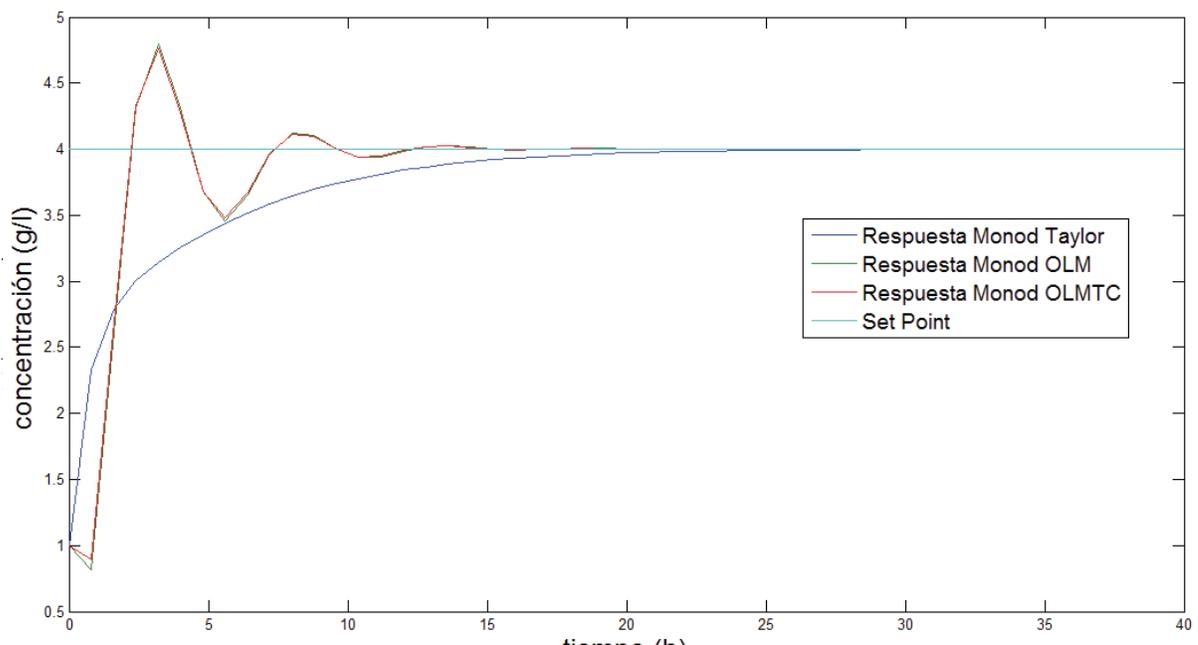
Como las funciones de transferencia utilizadas en los modelos son de segundo orden y sin tiempo de retardo, Shahrokhi y Zomorodi ⁵⁶ establecen que los métodos de sintonización de controladores tradicionales (Ziegler y Nichols y otros) no pueden ser utilizados en dichos casos.

Debido a lo establecido anteriormente, se utilizarán relaciones IMC para sintonizar el controlador. Chien y Fruehauf ⁵⁷ presentan un método muy sencillo que permite sintonizar los controladores sin mayores inconvenientes.

Los valores de sintonía encontrados se presentan en (Apéndice E, página 104)

5.6 Respuestas de los Procesos controlados

Al tener los lazos de control completos, se procederá a evaluar la respuesta de los diversos lazos de control frente a cambios en las condiciones de entrada o set-point, utilizando la herramienta de Matlab® Simulink. Para ello, el set-point tendrá los siguientes valores 4(g/l) y 0,5 (g/l).



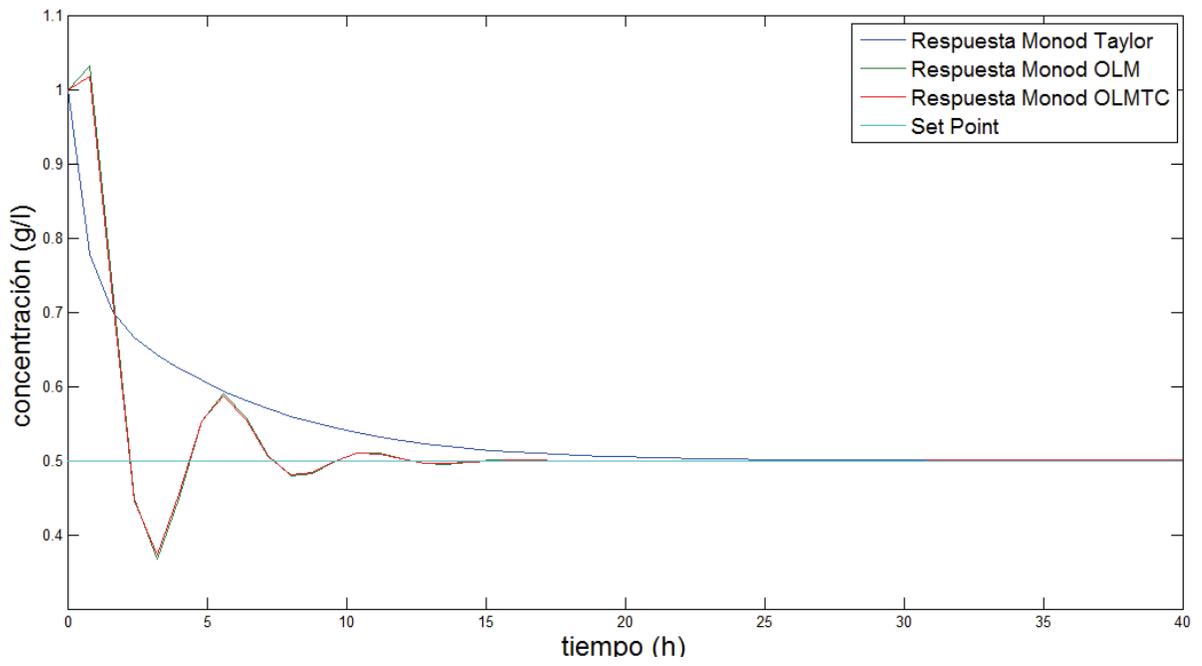
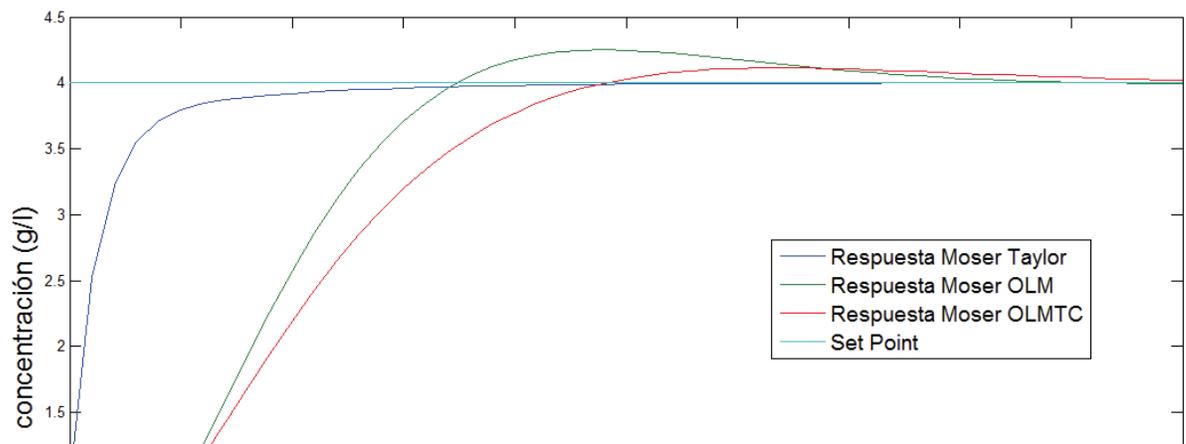


Figura 15: Respuesta lazos de control con Cinética de Monod frente a set-point de 0,5(g/l)



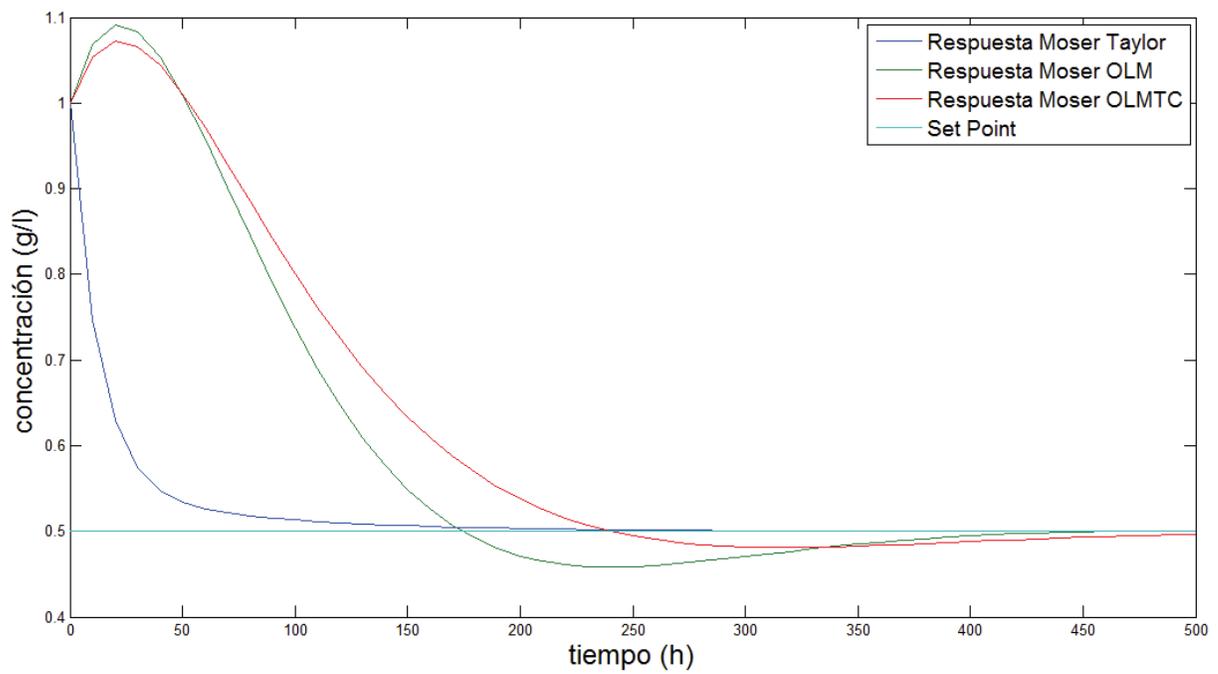
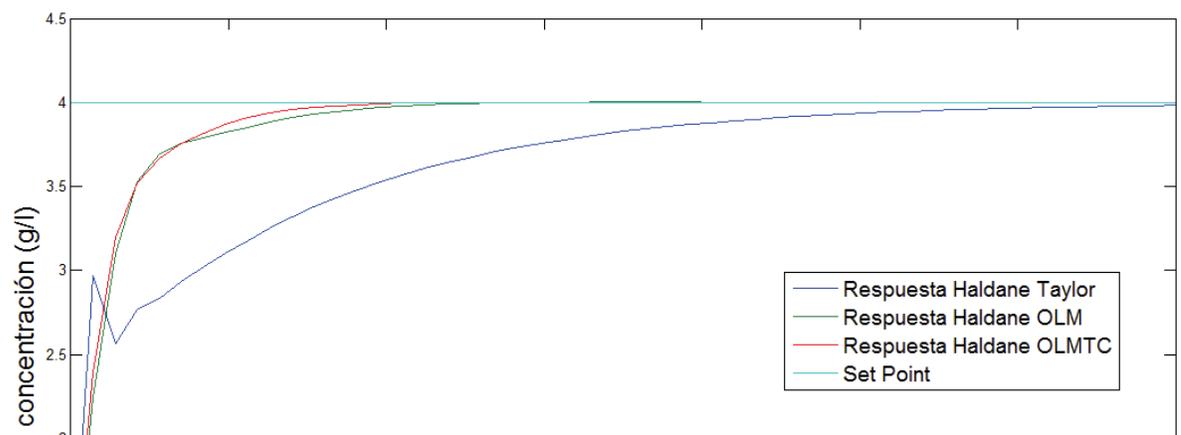


Figura 17: Respuesta lazos de control con Cinética de Moser frente a set-point de 0,5(g/l)



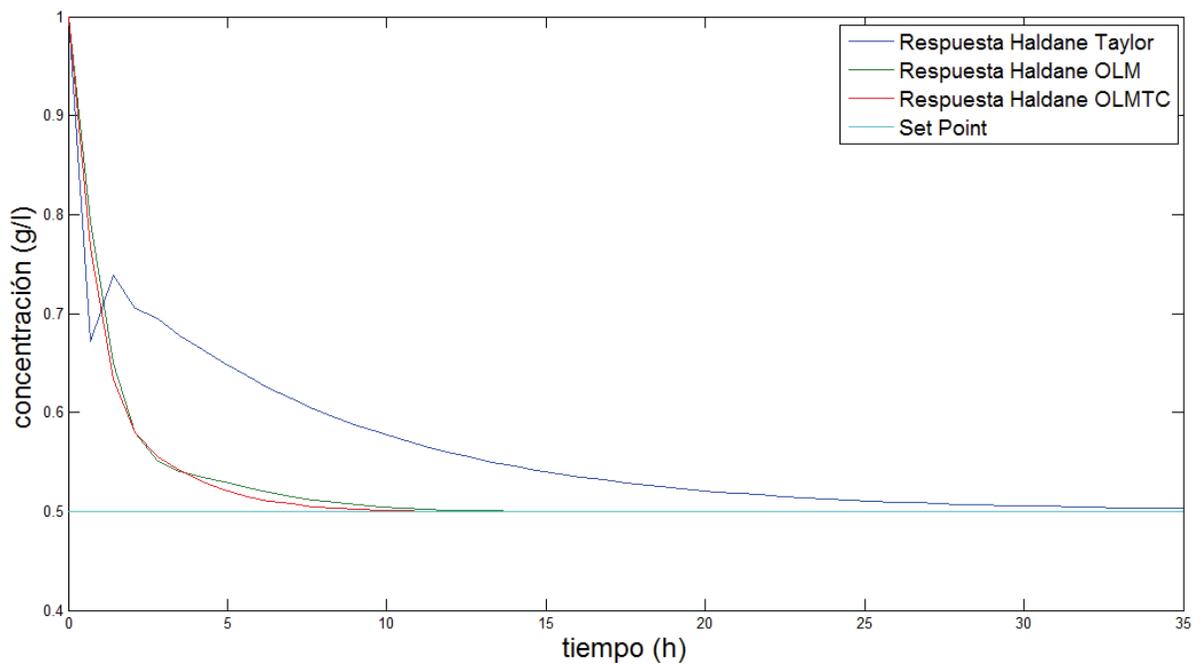


Figura 19: Respuesta lazos de control con Cinética de Haldane frente a set-point de 0,5(g/l)

En la *Figura 14*, *Figura 15*, *Figura 18*, y *Figura 19* se aprecian unas discontinuidades en las gráficas, éstas son generadas debido a que el procesador del computador, en el que se realizaron las simulaciones, no podía realizarlas a un paso más pequeño. Pero teniendo un computador con mayor capacidad se apreciarían curvas suaves como en las demás gráficas.

5.7 Análisis de las respuestas para los lazos de control

Una vez obtenidas las respuestas para los lazos de control realizados, se debe cuantificar la eficacia de cada uno de ellos. Esto se realiza con la finalidad de obtener y definir qué tipo de linealización es mejor para los casos estudiados.

En ese sentido, las herramientas que se utilizarán para cuantificar la eficacia de los lazos de control serán: *error integral cuadrático ISE* y el *error integral absoluto IAE*.

Dichos errores calculan la diferencia entre la respuesta obtenida para los controladores y el set-point escogido. Sus fórmulas son las siguientes:

$$ISE = \int_0^{\infty} (\text{Setpoint} - \text{respuesta obtenida})^2 \quad (100)$$

$$IAE = \int_0^{\infty} |\text{Setpoint} - \text{respuesta obtenida}| \quad (101)$$

A continuación, se calcula el *ISE* y el *IAE* para las respuestas obtenidas en la sección 5.6:

- Lazos de control con Cinética de Monod frente a set-point de 4(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 10,0924$$

$$IAE_{Taylor} = 9,1243$$

$$ISE_{OLM} = 14,3692$$

$$IAE_{OLM} = 7,3658$$

$$ISE_{OLMTC} = 13,6770$$

$$IAE_{OLMTC} = 7,1114$$

- Lazos de control con Cinética de Monod frente a set-point de 0,5(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 0,2803$$

$$IAE_{Taylor} = 1,5207$$

$$ISE_{OLM} = 0,3991$$

$$IAE_{OLM} = 1,2276$$

$$ISE_{OLMTC} = 0,3799$$

$$IAE_{OLMTC} = 1,1852$$

- Lazos de control con Cinética de Moser frente a set-point de 4(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 77,1039$$

$$IAE_{Taylor} = 57,906$$

$$ISE_{OLM} = 874,9015$$

$$IAE_{OLM} = 358,8451$$

$$ISE_{OLMTC} = 947,2534$$

$$IAE_{OLMTC} = 396,5677$$

- Lazos de control con Cinética de Moser frente a set-point de 0,5(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 2,1418$$

$$IAE_{Taylor} = 9,651$$

$$ISE_{OLM} = 24,3028$$

$$IAE_{OLM} = 59,8075$$

$$ISE_{OLMTC} = 26,3126$$

$$IAE_{OLMTC} = 66,0946$$

- Lazos de control con Cinética de Haldane frente a set-point de 4(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 12,1874$$

$$IAE_{Taylor} = 12,9371$$

$$ISE_{OLM} = 6,232$$

$$IAE_{OLM} = 4,3349$$

$$ISE_{OLMTC} = 5,7216$$

$$IAE_{OLMTC} = 3,8931$$

- Lazos de control con Cinética de Haldane frente a set-point de 0,5(g/l)

$$ISE_{Taylor} = 0,3385$$

$$IAE_{Taylor} = 2,1562$$

$$ISE_{OLM} = 0,1731$$

$$IAE_{OLM} = 0,7225$$

$$ISE_{OLMTC} = 0,1589$$

$$IAE_{OLMTC} = 0,6489$$

5.8 Estabilidad de los lazos de control

Para analizar la estabilidad de los lazos de control, se obtendrá el diagrama de Bode para cada uno.

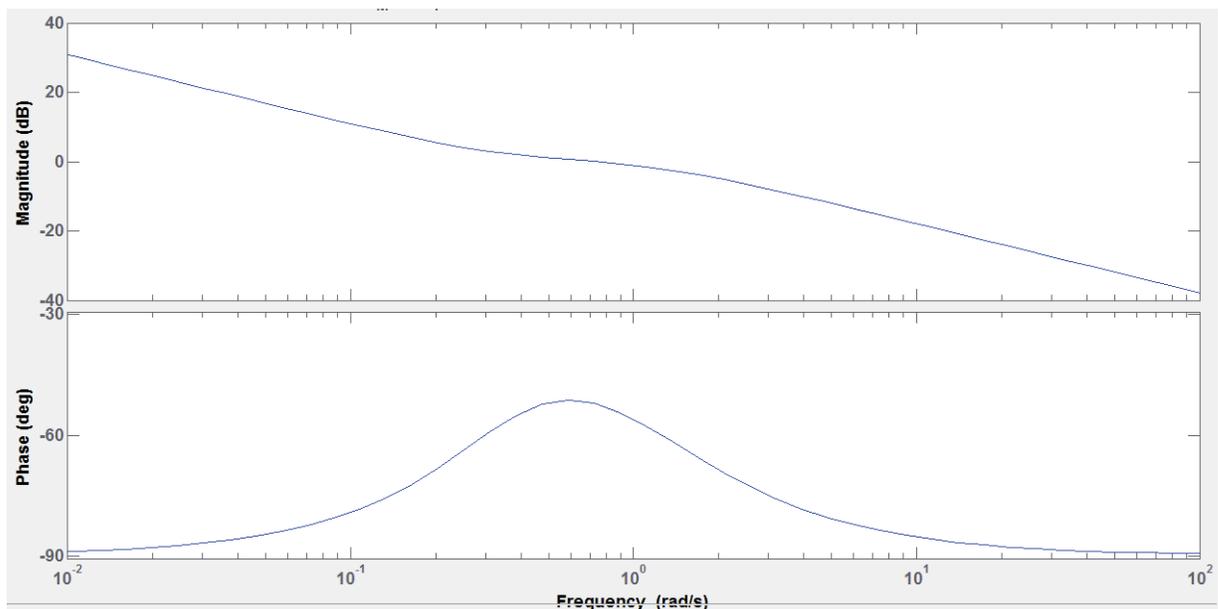


Figura 20: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Mono linealizado por Taylor

En tanto, los demás diagramas de Bode se muestran en (Apéndice F, página 107)

5.8.1 Análisis del Margen de Fase y Margen de Ganancia

Una vez obtenidos los diagramas de *Bode* para cada uno de los lazos de control, se procede a obtener el margen de fase y de ganancia.

El *margen de ganancia (MG)* representa la amplitud a la que llega el sistema cuando se encuentra trabajando en la frecuencia de corte ($\omega_{co} = -180^\circ$). En otras palabras el margen de fase representa el factor multiplicativo en que se puede incrementar el set-point antes de que el sistema se vuelva inestable. El margen de ganancia se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$MG = 1/Magnitud_{co} \quad (102)$$

Cuando el *margen de ganancia* calculado en el diagrama de bode es mayor a 1, se considera que el sistema es estable en términos relativos.

El *margen de fase (MF)* representa el ángulo de fase para el cual la amplitud del sistema es uno. El ángulo de fase (ϕ_{mf}) ocurre a la frecuencia de fase (ω_{mf}). En términos físicos el *margen de fase* representa el retardo máximo que el sistema es capaz de soportar antes de volverse inestable. El margen de fase se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$MF = 180^\circ - (-\phi_{mf}) = 180 + \phi_{mf} \quad (103)$$

Cuando el *margen de fase* calculado en el diagrama de bode es mayor a 1, se considera que el sistema es estable en términos relativos.

A continuación se calculará el margen de fase y ganancia para cada uno de los lazos de control realizados:

- Margen de Fase y Ganancia para lazos de control con Cinética de Monod

$$MG_{Taylor} = \text{indefinido}$$

$$MF_{Taylor} = 127,715^\circ$$

$$MG_{OLM} = 1,9632$$

$$MF_{OLM} = 41,7666^\circ$$

$$MG_{OLMTC} = 2,0545$$

$$MF_{OLMTC} = 42,0628^\circ$$

- Margen de Fase y Ganancia para lazos de control con Cinética de Moser

$$MG_{Taylor} = \text{indefinido}$$

$$MF_{Taylor} = 94,7024^\circ$$

$$MG_{OLM} = 2,9554$$

$$MF_{OLM} = 57,757^\circ$$

$$MG_{OLMTC} = 3,1805$$

$$MF_{OLMTC} = 75,0417^\circ$$

- Margen de Fase y Ganancia para lazos de control con Cinética de Haldane

$$MG_{Taylor} = \text{indefinido}$$

$$MF_{Taylor} = 143,3095^\circ$$

$$MG_{OLM} = \text{indefinido}$$

$$MF_{OLM} = 87,3819^\circ$$

$$MG_{OLMTC} = \text{indefinido}$$

$$MF_{OLMTC} = 84,7479^\circ$$

Al calcular el *margen de fase* y el *margen de ganancia* en los lazos de control realizados, se puede apreciar que los lazos de control son estables. Algunos de los lazos al estar realizados de manera simple (con dinámica unitaria y sin perturbaciones) tienen un *margen de ganancia* indefinido, esto significa que al lazo de control obtenido es estable, pero le faltan elementos (perturbaciones, u otras dinámicas) para determinar las variaciones que puede tener el set-point.

Los valores obtenidos para el margen de fase y ganancia, son concordantes con los recomendados por Seborg et al.⁵⁸. Lo anterior se traduce en que los controladores se encuentran bien sintonizados.

⁵⁸ Seborg et al., *Process Dynamics and Control*.

6. Conclusiones

A partir del trabajo realizado se desprenden las siguientes conclusiones:

En el estado del arte realizado, se puede apreciar que el control de fermentadores ha sido desarrollado, y se continúa trabajando hoy por hoy, con técnicas bastante complejas y actuales. A pesar de esto, nadie había investigado el análisis propuesto y/o realizado esta investigación, o algo parecido. Lo anterior, ya que siempre se suele suponer que la serie de Taylor es el método de linealización que se debe utilizar para cualquier caso.

De este modo los resultados obtenidos, son innovadores y de mucha importancia, ya que pueden generar, un cambio y un avance en los libros de texto sobre control de procesos, estableciendo las fallas del modelo de linealización utilizado por todos ellos.

En ese sentido, cabe destacar que lo investigado en el estado del arte es de gran relevancia, pues genera una perspectiva histórica y contingente sobre el desarrollo del tema tratado en esta investigación, permitiendo así contextualizarlo.

Tal como se ha explicado, para poder realizar la investigación se seleccionaron tres modelos de crecimiento no lineales, siendo el de *Haldane* el que presenta una no linealidad mayor.

Al obtener los parámetros para la velocidad específica de crecimiento, se puede apreciar que el modelo de *Moser* presenta valores bajos, lo que genera una cinética más lenta.

Esto se traduce en que el tiempo en llegar al estado estacionario aumenta entre cien y doscientas veces, respecto a los otros dos modelos de velocidad de crecimiento.

Consecuentemente, se puede ver que la forma de los perfiles obtenidos para cada modelo varía de acuerdo a las condiciones de entrada que se utilicen en cada caso.

Al realizar las linealizaciones de los modelos dinámicos del quimiostato (caso de estudio), el modelo más fácil de aplicar en cuanto a velocidad y tiempo de trabajo es el de Taylor. En cambio, los métodos óptimos de linealización requerían cálculos e iteraciones, los cuales dificultan su realización.

En la simulación de los modelos linealizados, al compararlos con los no linealizados se ve que los modelos óptimos de linealización tienen mejores aproximaciones y ajustes que el de Taylor. Esto se debe a que los modelos matemáticos utilizados son más precisos, y se adecúan de mejor forma a las curvas no lineales que el ya nombrado modelo de Taylor.

Al elegir la configuración de control, se escoge la configuración *Turbodistat Convencional*. Lo anterior, con la finalidad de que la configuración de control no influya en el control del proceso.

En el caso de continuar la investigación, también se pueden probar otro tipo de configuraciones de control como: *Nutristat convencional*, *Turbodistat de concentración*, *Nutristat de concentración*, y *Turbodistat modificado*. Y, de este modo, ver su influencia en el control del proceso.

Esto es algo muy positivo, pues sienta bases para continuar estudios en la materia y temática abordada. De esta forma, abre una nueva línea de estudios que permita seguir perfeccionando el conocimiento en esta área.

Como se vio anteriormente, al ser la cinética escogida para el modelo de *Moser* muy lenta, al obtener las funciones de transferencia para la linealización con el método óptimo de linealización, los valores obtenidos son muy pequeños (muy cercanos a cero). Esto dificulta el control del proceso y genera resultados con errores.

El hecho de que no se pueden sintonizar los controladores de los lazos de control obtenidos mediante métodos tradicionales, se comprueba a través de lo señalado en los *diagramas de Bode*. Dichos esquemas demuestran que el proceso es estable y nunca entra en un estado oscilatorio, situación que hace imposible la sintonización mediante métodos tradicionales de control.

Al analizar las respuestas de los lazos de control generados, se puede desprender lo siguiente:

- Para el modelo de crecimiento de *Monod* (que es el menos no lineal de los tres modelos analizados), no se aprecian grandes diferencias entre los tres tipos de linealización. Si bien la linealización de *Taylor* obtiene mejores resultados en el *ISE*, la linealización *OLMTC* obtiene mejores resultados en el *IAE*, por lo que no se puede decir con seguridad qué tipo de linealización funciona mejor para el modelo de crecimiento de *Monod*.
- En el modelo de crecimiento de *Moser*, no se obtienen perfiles y errores coherentes, lo cual se debe a lo dicho con anterioridad sobre la cinética de la fermentación. Ésta, al ser muy baja, influye en el control; por lo que no se generan resultados que se puedan analizar y/o concluir algo respecto de ellos.
- Finalmente, para el modelo de crecimiento que presenta la mayor no linealidad (*Haldane*), el análisis de las respuestas para los lazos de control establece que la linealización *OLMTC* genera menos errores en el control del proceso. Y, por lo tanto, muestra una mayor efectividad que el modelo de Taylor.

Debido a lo establecido anteriormente, se puede concluir que a pesar de que los *métodos óptimos de linealización* presenten mayores dificultades en su realización. Esto implica una mayor cantidad de cálculos y de tiempo empleado en la obtención de los coeficientes de linealización.

Éstos generan mejores respuestas en la medida en que el proceso controlado presente una mayor no linealidad. Lo que involucra una mejora control en el proceso, con el solo hecho de cambiar la linealización utilizada para el proceso.

Hay que tener en cuenta que se utilizaron configuraciones de control sencillas, y que al hacerlas más complejas las diferencias, se pueden hacer aún mas evidentes.

Finalmente, pensando en el futuro de la investigación, se puede analizar las respuestas de los lazos de control agregando las perturbaciones del proceso, y también agregar las dinámicas correspondientes a los elementos del lazo de control (sensores y actuadores).

Esta mejora se puede validar de forma experimental, lo que generaría ventajas a nivel de las investigaciones realizadas en el laboratorio para los fermentadores. Esto se traduce en la ampliación de líneas de trabajo para la investigación.

Bibliografía

- Agrawal, Pramod, y Henry C. Lim. "Analyses of Various Control Schemes for Continuous Bioreactors." En *Bioprocess Parameter Control*, 61–90. Advances in Biochemical Engineering/Biotechnology 30. Springer Berlin Heidelberg, 1984. <http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0006380>.
- Baei, Sharifzadeh, G.D. Najafpour, H. Younesi, F. Tabandeh, H. Issazadeh, y M. Khodabandeh. "Growth Kinetic Parameters and Biosynthesis of Polyhydroxybutyrate in *Cupriavidus Necator* DSMZ 545 on Selected Substrates." *Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly* 17, n° 1 (2011): 1–8. doi:10.2298/CICEQ100216043B.
- Bastin, G., y D. Dochain, eds. *On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Amsterdam ; New York: Elsevier Science, 1990.
- "Biomass." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 15 de junio de 2015. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Biomass&oldid=666990935>.
- "Bode Plot." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 18 de agosto de 2015. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bode_plot&oldid=676654261.
- Bogle, I. D. L., A. R. Cockshott, M. Bulmer, N. Thornhill, M. Gregory, y M. Dehghani. "A process systems engineering view of biochemical process operations." *Computers & Chemical Engineering*, Fifth International Symposium on Process Systems Engineering, 20, n° 6–7 (junio de 1996): 943–49. doi:10.1016/0098-1354(95)00189-1.
- Braake, Hubert A. B. te, Eric J. L. van Can, Jacquelin M. A. Scherpen, y Henk B. Verbruggen. "Control of nonlinear chemical processes using neural models and feedback linearization." *Computers & Chemical Engineering* 22, n° 7–8 (20 de julio de 1998): 1113–27. doi:10.1016/S0098-1354(97)00267-6.
- CHAPRA, STEVEN C. *Metodos numericos para ingenieros*. 6 edition. México: MC GRAW HILL, 2010.

- Dahhou, B., G. Chamilothis, y G. Roux. "Adaptive Predictive Control of a Continuous Fermentation Process." *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 5, n° 6 (1 de noviembre de 1991): 351–62. doi:10.1002/acs.4480050602.
- Dahhou, B., G. Roux, y G. Chamilothis. "Modelling and adaptive predictive control of a continuous fermentation process." *Applied Mathematical Modelling* 16, n° 10 (octubre de 1992): 545–52. doi:10.1016/0307-904X(92)90004-M.
- Dahhou, B., G. Roux, y A. Cheruy. "Linear and Non-Linear Adaptive Control of Alcoholic Fermentation Process: Experimental Results." *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 7, n° 3 (1 de mayo de 1993): 213–33. doi:10.1002/acs.4480070304.
- DiBiasio, David, H. C. Lim, y W. A. Weigand. "An Experimental Investigation of Stability and Multiplicity of Steady States in a Biological Reactor." *AIChE Journal* 27, n° 2 (1 de marzo de 1981): 284–92. doi:10.1002/aic.690270216.
- . "Constrained Control of an Unstable Biological Reactor." *AIChE Journal* 30, n° 3 (1 de mayo de 1984): 520–22. doi:10.1002/aic.690300333.
- Dochain, D., y G. Bastin. "Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems." *Automatica* 20, n° 5 (septiembre de 1984): 621–34. doi:10.1016/0005-1098(84)90012-8.
- Dunn, Irving J., Elmar Heinzle, John Ingham, y Jiri E. Prenosil. *Biological Reaction Engineering: Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples*. 2 edition. Wienheim: Wiley-VCH, 2003.
- Edwards, Victor H., Raphael C. Ko, y Stephan A. Balogh. "Dynamics and Control of Continuous Microbial Propagators to Subject Substrate Inhibition." *Biotechnology and Bioengineering* 14, n° 6 (1 de noviembre de 1972): 939–74. doi:10.1002/bit.260140606.
- "Feedback control - ControlsWiki." Accedido 13 de agosto de 2015. https://controls.engin.umich.edu/wiki/index.php/Feedback_control.
- Fogler, H. Scott. *Elements of Chemical Reaction Engineering*. 4 edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005.
- Forenc, Jaroslaw. "The algorithm of optimal linearization of non-linear state equation." *Proc SPIE*, 2008, 148 – . doi:10.1117/12.784848.
- Fruehauf, Paul S., I-Lung Chien, y Mark D. Lauritsen. "Simplified IMC-PID tuning rules." *ISA Transactions* 33, n° 1 (mayo de 1994): 43–59. doi:10.1016/0019-0578(94)90035-3.
- Gallegos, Jaime Alvarez, y Joaquin Alvarez Gallegos. "Estimation and Control Techniques for Continuous Culture Fermentation Processes." *Biotechnology and Bioengineering* 26, n° 5 (1 de mayo de 1984): 442–51. doi:10.1002/bit.260260507.
- Gouzé, Jean-Luc, y Gonzalo Robledo. "Feedback control for nonmonotone competition models in the chemostat." *Nonlinear Analysis: Real World Applications, Modelling, Analysis, and Theory of Dynamic Populations*, 6, n° 4 (septiembre de 2005): 671–90. doi:10.1016/j.nonrwa.2004.12.003.
- Guo, Hongjian, y Lansun Chen. "Qualitative Analysis of a Variable Yield Turbidostat Model with Impulsive State Feedback Control." *Journal of Applied Mathematics and Computing* 33, n° 1–2 (23 de abril de 2009): 193–208. doi:10.1007/s12190-009-0281-2.

- Harmon, Jeff, Spyros A. Svoronos, y Gerasimos Lyberatos. "Adaptive Steady-State Optimization of Biomass Productivity in Continuous Fermentors." *Biotechnology and Bioengineering* 30, n° 3 (20 de agosto de 1987): 335–44. doi:10.1002/bit.260300302.
- Henson, Michael A., y Dale E. Seborg. "Nonlinear control strategies for continuous fermenters." *Chemical Engineering Science* 47, n° 4 (1992): 821–35. doi:10.1016/0009-2509(92)80270-M.
- Hill, Gordon A., y Campbell W. Robinson. "Substrate Inhibition Kinetics: Phenol Degradation by *Pseudomonas Putida*." *Biotechnology and Bioengineering* 17, n° 11 (1 de noviembre de 1975): 1599–1615. doi:10.1002/bit.260171105.
- Hunt, K. J., D. Sbarbaro, R. Zbikowski, y P. J. Gawthrop. "Neural Networks for Control Systems: A Survey." *Automatica* 28, n° 6 (noviembre de 1992): 1083–1112. doi:10.1016/0005-1098(92)90053-I.
- Johnson, A. "The control of fed-batch fermentation processes—A survey." *Automatica* 23, n° 6 (noviembre de 1987): 691–705. doi:10.1016/0005-1098(87)90026-4.
- Jordan, A. J. "Linearization of non-linear state equation." *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Science* 54, n° 1 (2006). [http://bulletin.pan.pl/\(54-1\)63.pdf](http://bulletin.pan.pl/(54-1)63.pdf).
- KARLENE A. HOO, JEFFREY C. KANTOR. "LINEAR FEEDBACK EQUIVALENCE AND CONTROL OF AN UNSTABLE BIOLOGICAL REACTOR." *CHEMICAL ENGINEERING COMMUNICATIONS* 46 (1986): 385–99. doi:10.1080/00986448608911418.
- Kaushikaram, K. S., Seshu K. Damarla, y Madhusree Kundu. "Design of neural controllers for various configurations of continuous bioreactor", 2010. <http://dSPACE.nitrkl.ac.in:8080/dSPACE/handle/2080/1491>.
- Lednický, P., y A. Mészáros. "Neural Network Modeling in Optimisation of Continuous Fermentation Processes." *Bioprocess Engineering* 18, n° 6 (1 de junio de 1998): 427–32. doi:10.1007/s004490050466.
- Leenheer, Patrick De, y Hal Smith. "Feedback Control for Chemostat Models." *Journal of Mathematical Biology* 46, n° 1 (1 de enero de 2003): 48–70. doi:10.1007/s00285-002-0170-x.
- Lendenmann, U., M. Snozzi, y T. Egli. "Growth Kinetics of *Escherichia Coli* with Galactose and Several Other Sugars in Carbon-Limited Chemostat Culture." *Canadian Journal of Microbiology* 46, n° 1 (enero de 2000): 72–80.
- "Linearization." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 17 de diciembre de 2014. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linearization&oldid=638535060>.
- Li, Zuxiong, Lansun Chen, y Zhijun Liu. "Periodic solution of a chemostat model with variable yield and impulsive state feedback control." *Applied Mathematical Modelling* 36, n° 3 (marzo de 2012): 1255–66. doi:10.1016/j.apm.2011.07.069.
- Mailleret, L., J.-L. Gouzé, y O. Bernard. "Nonlinear Control for Algae Growth Models in the Chemostat." *Bioprocess and Biosystems Engineering* 27, n° 5 (agosto de 2005): 319–27. doi:10.1007/s00449-005-0410-8.
- Mailleret, Ludovic, Olivier Bernard, y Jean-Philippe Steyer. "Nonlinear adaptive control for bioreactors with unknown kinetics." *Automatica* 40, n° 8 (agosto de 2004): 1379–85. doi:10.1016/j.automatica.2004.01.030.
- Marlin, Thomas. *Process Control: Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. 2 edition. Boston: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2000.
- Menawat, Anil S., y Jayaram Balachander. "Alternate Control Structures for Chemostat." *AIChE Journal* 37, n° 2 (1 de febrero de 1991): 302–6. doi:10.1002/aic.690370220.

- Möckel, B., Th. Bley, y B. Böhme. "Model Simulation of an Efficient Periodic Control Strategy for Continuous Fermentation Processes." *Acta Biotechnologica* 10, n° 5 (1 de enero de 1990): 395–400. doi:10.1002/abio.370100503.
- Modak, Jayant M., y Henry C. Lim. "Optimal mode of operation of bioreactor for fermentation processes." *Chemical Engineering Science* 47, n° 15–16 (octubre de 1992): 3869–84. doi:10.1016/0009-2509(92)85136-Y.
- Monod, Jacques. *Recherches sur la croissance des cultures bactériennes*,. Paris: Hermann & cie, 1942.
- Moser, H. "Structure and Dynamics of Bacterial Populations Maintained in the Chemostat." *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology* 22 (1957): 121–37.
- Nguang, Sing Kiong, y Xiao Dong Chen. "Simple Substrate Feeding Rate Control Mechanism for Optimizing the Steady State Productivity of a Class of Continuous Fermentation Processes." *Biotechnology Progress* 13, n° 2 (1 de enero de 1997): 200–204. doi:10.1021/bp9700115.
- Normandin, A., J. Thibault, y B. P. A. Grandjean. "Optimizing Control of a Continuous Stirred Tank Fermenter Using a Neural Network." *Bioprocess Engineering* 10, n° 3 (1 de marzo de 1994): 109–13. doi:10.1007/BF00369465.
- Ogunnaike, Babatunde A., y W. Harmon Ray. *Process Dynamics, Modeling, and Control*. 1 edition. New York: Oxford University Press, 1994.
- "PID Controller." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 11 de agosto de 2015. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=PID_controller&oldid=675528698.
- Process Control: Modeling, Design and Simulation*. 1 edition. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2003.
- Rajinikanth, V, y K Latha. "Modeling, Analysis, and Intelligent Controller Tuning for a Bioreactor: A Simulation Study." Accedido 28 de mayo de 2015. http://www.academia.edu/3435012/Modeling_Analysis_and_Intelligent_Controller_Tuning_for_a_Bioreactor_A_Simulation_Study.
- Rani, K. Yamuna, y V. S. Ramachandra Rao. "Control of Fermenters – a Review." *Bioprocess Engineering* 21, n° 1 (1 de julio de 1999): 77–88. doi:10.1007/PL00009066.
- Renard, P., D. Dochain, G. Bastin, H. Naveau, y E. J. Nyns. "Adaptive Control of Anaerobic Digestion Processes-a Pilot-Scale Application." *Biotechnology and Bioengineering* 31, n° 4 (marzo de 1988): 287–94. doi:10.1002/bit.260310402.
- ROLF, MICHAEL J., y HENRY C. LIM. "Adaptive on-Line Optimization for Continuous Bioreactors." *Chemical Engineering Communications* 29, n° 1–6 (1 de agosto de 1984): 229–55. doi:10.1080/00986448408940160.
- Saha, P., S. C. Patwardhan, y V. S. Ramachandra Rao. "Maximizing Productivity of a Continuous Fermenter Using Nonlinear Adaptive Optimizing Control." *Bioprocess Engineering* 20, n° 1 (1 de enero de 1999): 15–21. doi:10.1007/s004490050553.
- Saha, Prabirkumar, Qiuping Hu, y Gade Pandu Rangaiah. "Multi-Input Multi-Output Control of a Continuous Fermenter Using Nonlinear Model Based Controllers." *Bioprocess Engineering* 21, n° 6 (1 de diciembre de 1999): 533–42. doi:10.1007/s004490050713.
- Seborg, Dale E., Duncan A. Mellichamp, Thomas F. Edgar, y Francis J. Doyle III. *Process Dynamics and Control*. 3 edition. Hoboken, N.J: Wiley, 2010.
- Seborg, D. E. "A Perspective on Advanced Strategies for Process Control (Revisited)." En *Advances in Control*, editado por Paul M. Frank, 103–34. Springer London, 1999. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4471-0853-5_4.

- Shahrokhi, Mohammad, y Alireza Zomorodi. "Comparison of PID controller tuning methods." Available In: http://www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control/clase/Zomorodi_Shahrokhi_PID_Tunning_Comparison.pdf, Accessed on 4th August, 2013.
- "Simulation." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 5 de agosto de 2015. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Simulation&oldid=674661582>.
- Skogestad, Sigurd, y Erik A. Wolff. "Controllability measures for disturbance rejection." *Modeling Identification and Control* 17, n° 3 (1996): 167–82.
- "Steady State." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 13 de abril de 2015. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Steady_state&oldid=656317157.
- "Substrate (chemistry)." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 3 de mayo de 2015. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Substrate_\(chemistry\)&oldid=660672610](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Substrate_(chemistry)&oldid=660672610).
- Sun, Kaibiao, Yuan Tian, Lansun Chen, y Andrzej Kasperski. "Nonlinear modelling of a synchronized chemostat with impulsive state feedback control." *Mathematical and Computer Modelling* 52, n° 1–2 (julio de 2010): 227–40. doi:10.1016/j.mcm.2010.02.012.
- Szederkényi, G., N. R. Kristensen, K. M. Hangos, y S. Bay Jørgensen. "Nonlinear analysis and control of a continuous fermentation process." *Computers & Chemical Engineering* 26, n° 4–5 (15 de mayo de 2002): 659–70. doi:10.1016/S0098-1354(01)00793-1.
- Tagashira, Osamu. "Permanent coexistence in chemostat models with delayed feedback control." *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 10, n° 3 (junio de 2009): 1443–52. doi:10.1016/j.nonrwa.2008.01.015.
- Tagashira, Osamu, y Tadayuki Hara. "Delayed feedback control for a chemostat model." *Mathematical Biosciences*, Hamamatsu Special Issue, 201, n° 1–2 (mayo de 2006): 101–12. doi:10.1016/j.mbs.2005.12.014.
- Tian, Yuan, Kaibiao Sun, Lansun Chen, y Andrzej Kasperski. "Studies on the dynamics of a continuous bioprocess with impulsive state feedback control." *Chemical Engineering Journal* 157, n° 2–3 (1 de marzo de 2010): 558–67. doi:10.1016/j.cej.2010.01.002.
- "Transfer Function." *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 6 de agosto de 2015. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transfer_function&oldid=674893464.
- Tsoneva, R., y T. Patarinska. "Robust Control of Continuous Fermentation Processes Described by Monod-Type Model with Delay." En *Operations Research Proceedings 1999*, editado por Prof Dr Karl Inderfurth, Prof Dr Gerhard Schwödiauer, Prof Dr Wolfgang Domschke, Prof Dr Friedrich Juhnke, Prof Dr Peter Kleinschmidt, y Prof Dr Gerhard Wäscher, 117–23. *Operations Research Proceedings 1999* 1999. Springer Berlin Heidelberg, 2000. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-58300-1_21.
- Zeng, F. Y., B. Dahhou, y M. T. Nihtila. "Adaptive control of a nonlinear fermentation process via MRAC technique." *Applied Mathematical Modelling* 17, n° 2 (febrero de 1993): 58–69. doi:10.1016/0307-904X(93)90094-W.
- Zhao, Ying, y Sigurd Skogestad. "Comparison of Various Control Configurations for Continuous Bioreactors." *Industrial & Engineering Chemistry Research* 36, n° 3 (1 de marzo de 1997): 697–705. doi:10.1021/ie960123l.

Glosario de Términos

Biomasa: Células utilizadas en las reacciones bioquímicas⁵⁹.

Biorreactor o reactor biológico: es un reactor que sostiene y soporta la vida de células y cultivos de tejidos⁶⁰.

Controlador PID: Mecanismo de control por realimentación ampliamente usado en sistemas de control industrial. Éste calcula la desviación o error entre un valor medido y un valor deseado⁶¹.

Diagrama de Bode: es una representación gráfica que sirve para caracterizar la respuesta en frecuencia de un sistema. Usualmente ayuda a ver la estabilidad del sistema de control⁶².

Estado Estacionario: Estado en el que las variables de salida en un sistema no cambian en el tiempo⁶³.

Función de Transferencia: Es una representación matemática para describir las entradas y salidas de un sistema en el dominio de frecuencia⁶⁴.

⁵⁹ “Biomass”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 15 de junio de 2015, <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Biomass&oldid=666990935>.

⁶⁰ H. Scott Fogler, *Elements of Chemical Reaction Engineering*, 4 edition (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2005), 418.

⁶¹ “PID Controller.”

⁶² “Bode Plot”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 18 de agosto de 2015, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bode_plot&oldid=676654261.

⁶³ “Steady State”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 13 de abril de 2015, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Steady_state&oldid=656317157.

⁶⁴ “Transfer Function”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 6 de agosto de 2015, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transfer_function&oldid=674893464.

Linealización: Proceso para encontrar la aproximación lineal a una función ⁶⁵.

Simulación: Intento de describir un proceso o sistema de la vida real mediante una herramienta computacional ⁶⁶

Sustrato: Compuestos utilizados para el crecimiento de células en las reacciones bioquímicas ⁶⁷.

⁶⁵ “Linearization”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 17 de diciembre de 2014, <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Linearization&oldid=638535060>.

⁶⁶ “Simulation”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 5 de agosto de 2015, <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Simulation&oldid=674661582>.

⁶⁷ “Substrate (chemistry)”, *Wikipedia, the Free Encyclopedia*, 3 de mayo de 2015, [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Substrate_\(chemistry\)&oldid=660672610](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Substrate_(chemistry)&oldid=660672610).

Apéndice A Simulaciones Quimiostato

Apéndice A-1 : Simulación Quimiostato con Cinética de Monod

- Simulaciones al variar la tasa de dilución (D):

A continuación, se presentan diferentes perfiles al variar la tasa de dilución para el *quimiostato* con cinética de *Monod*, y mantener la concentración de sustrato en la entrada constante (S_i).

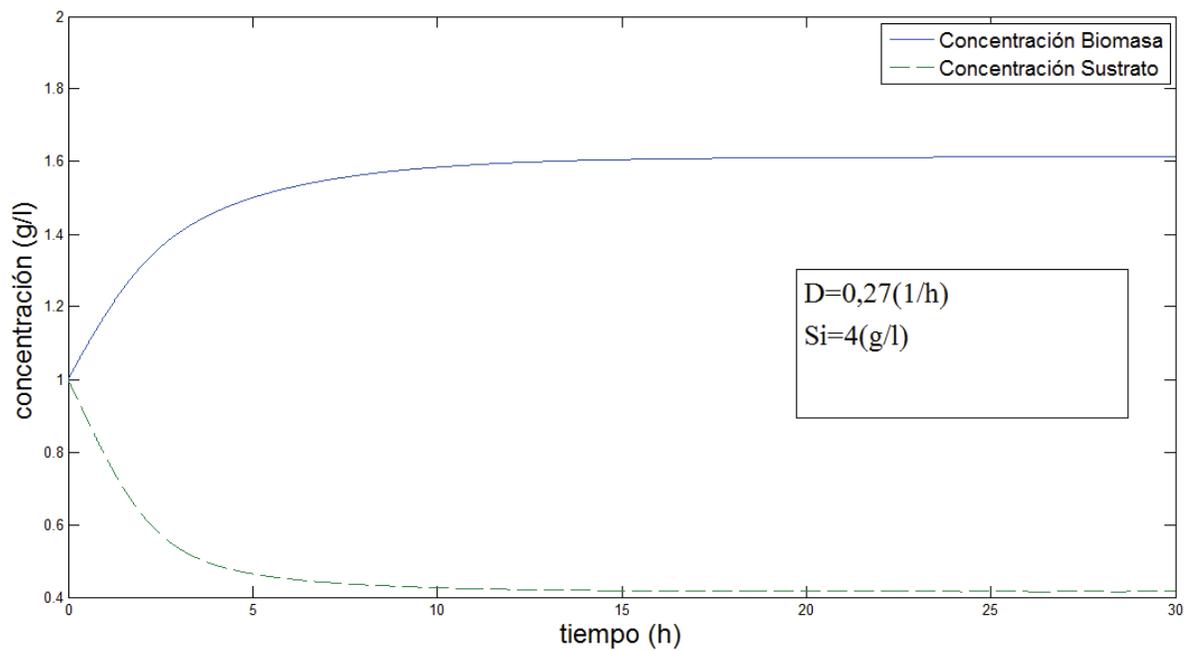


Figura 21: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,27 (1/h)$ y $S_i = 4 (g/l)$

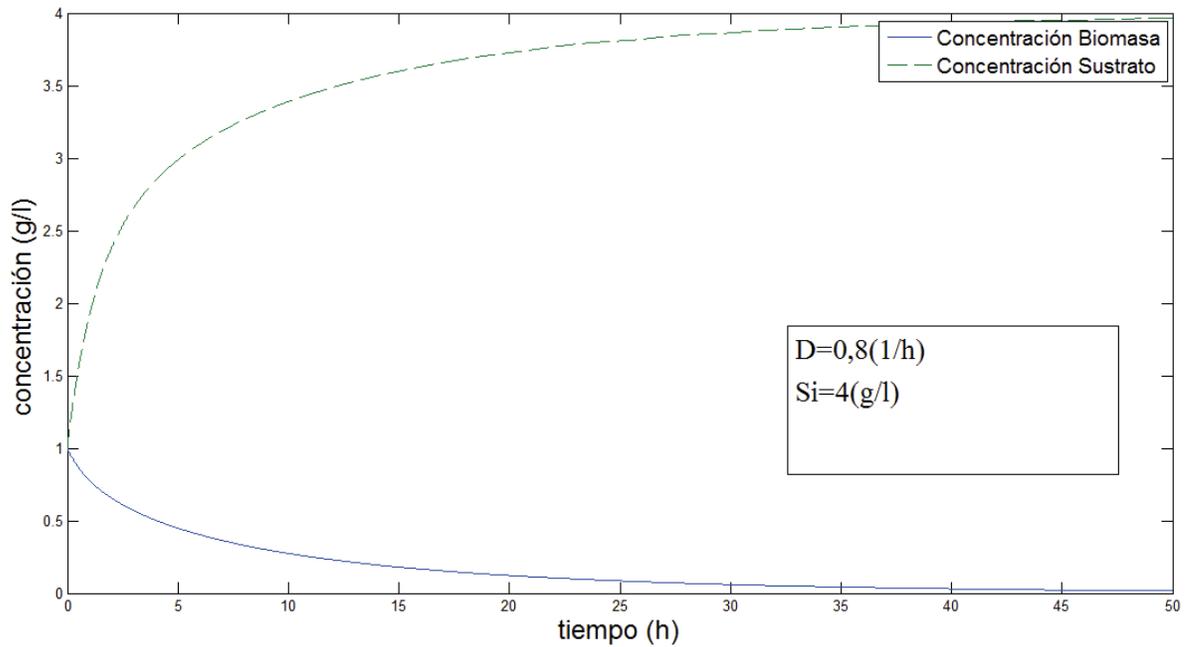


Figura 22: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,8$ (1/h) y $S_i = 4$ (g/l)

- Simulaciones al variar la concentración de sustrato en la entrada (S_i)

En seguida, se muestran diferentes perfiles al variar la concentración de sustrato en la entrada para el quimiostato con cinética de *Monod*, y mantener la tasa de dilución constante (D).

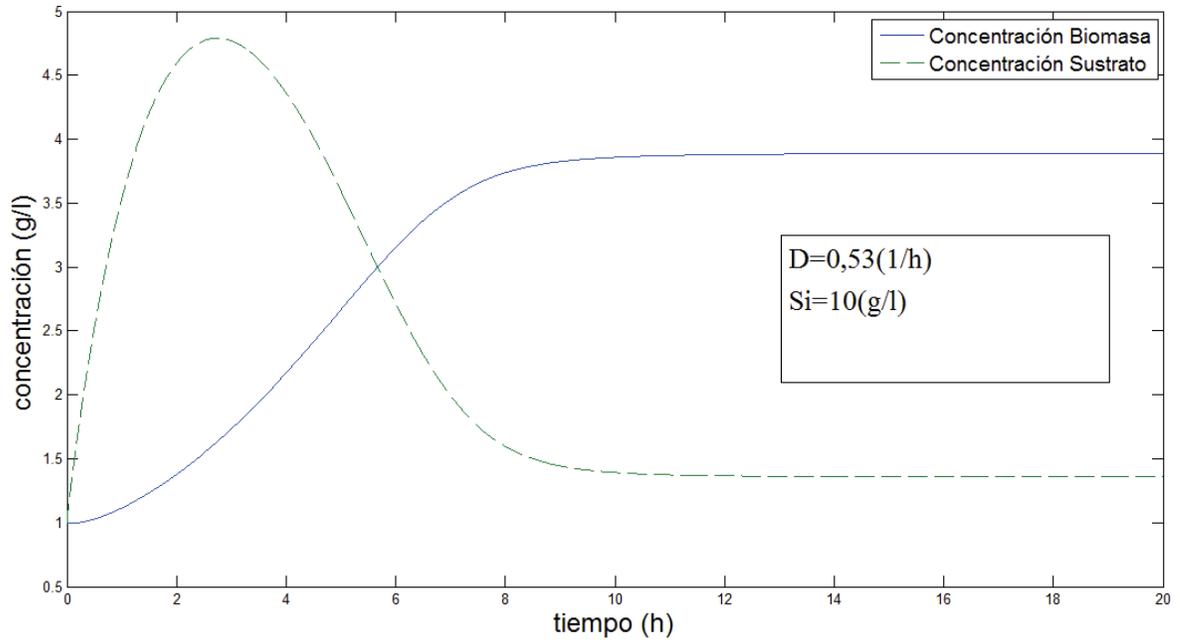


Figura 23: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 10$ (g/l)

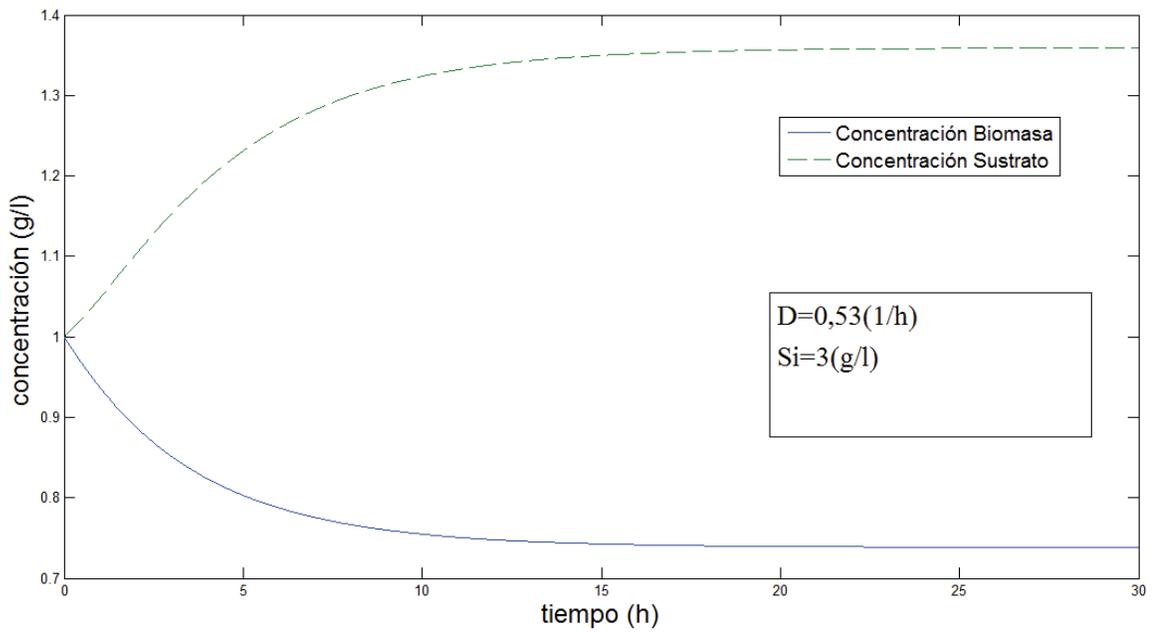


Figura 24: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53$ (1/h) y $S_i = 3$ (g/l)

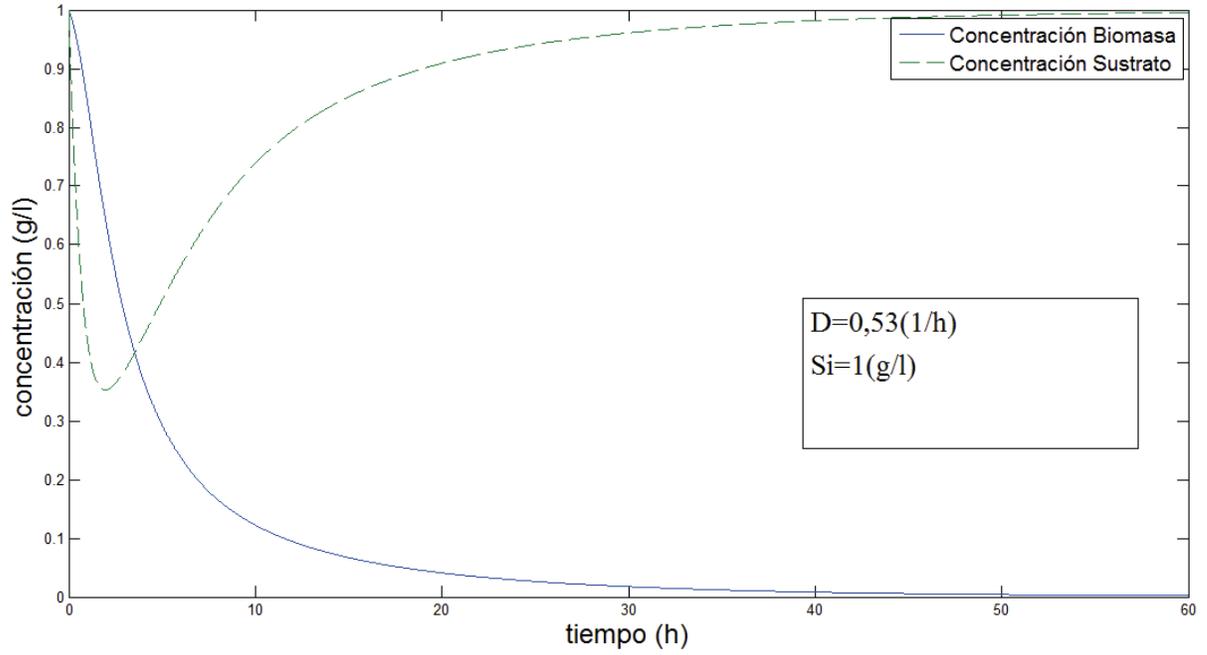


Figura 25: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Monod con $D = 0,53 (1/h)$ y $Si = 1 (g/l)$

Apéndice A-2 : Simulación Quimiostato con Cinética de Moser

- Simulaciones al variar la tasa de dilución (D):

A continuación, se presentan diferentes perfiles al variar la tasa de dilución para el *quimiostato* con cinética de *Moser* y mantener la concentración de sustrato en la entrada constante (S_i).

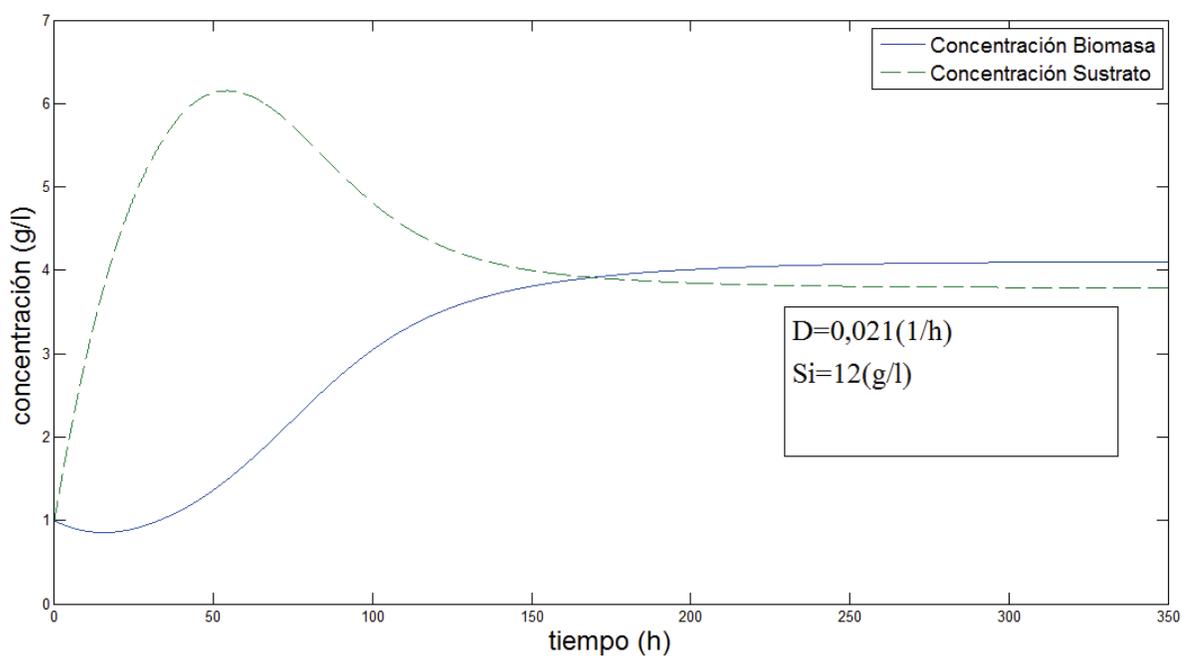


Figura 26: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,021$ (1/h) y $S_i = 12$ (g/l)

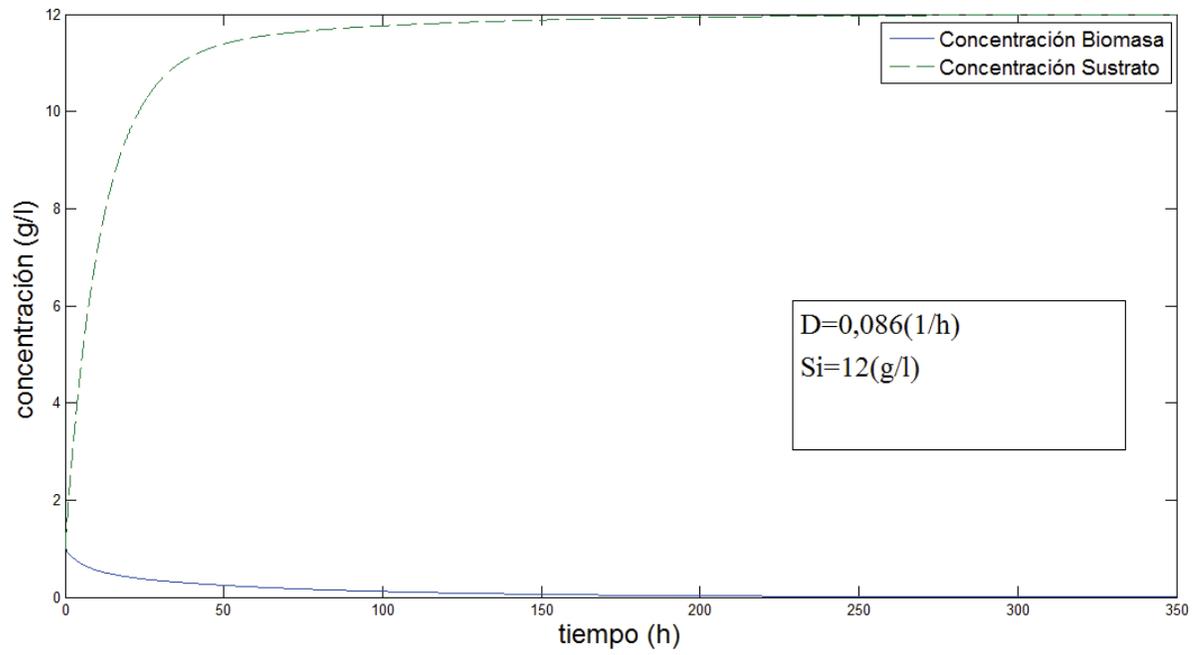


Figura 27: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,086 (1/h)$ y $S_i = 12 (g/l)$

- Simulaciones al variar la concentración de sustrato en la entrada (S_i)

En el presente apartado, se grafican diferentes perfiles al variar la concentración de sustrato en la entrada para el *quimiostato* con cinética de *Moser* y mantener la tasa de dilución constante (D).

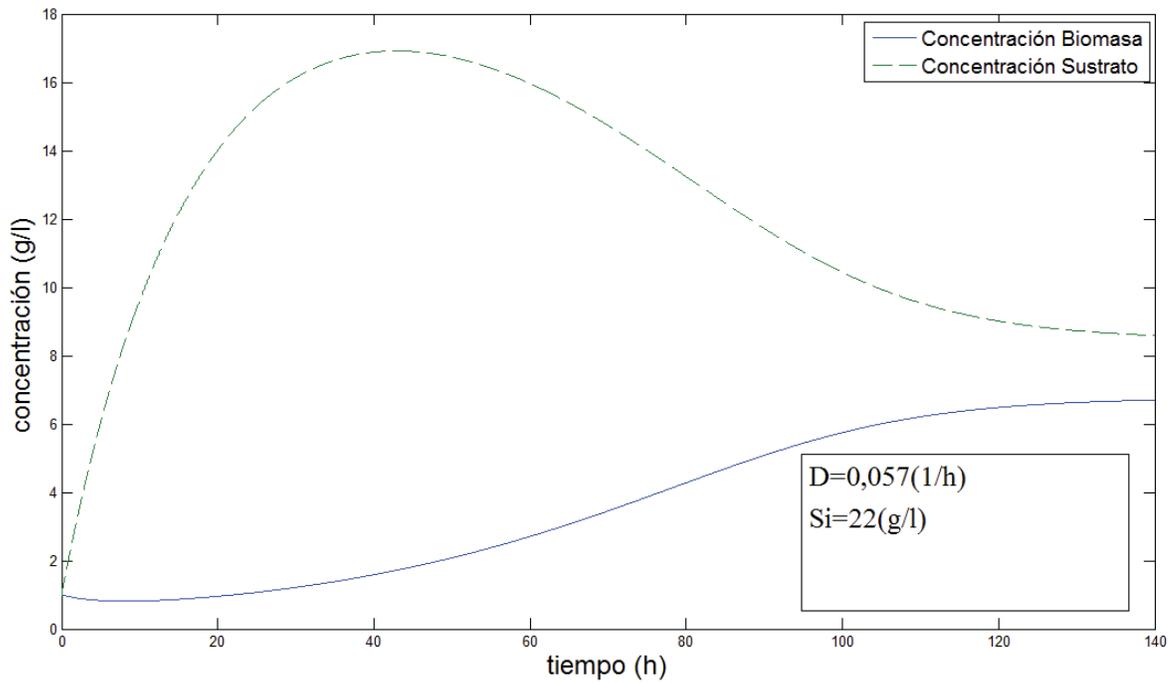


Figura 28: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057 (1/h)$ y $S_i = 22 (g/l)$

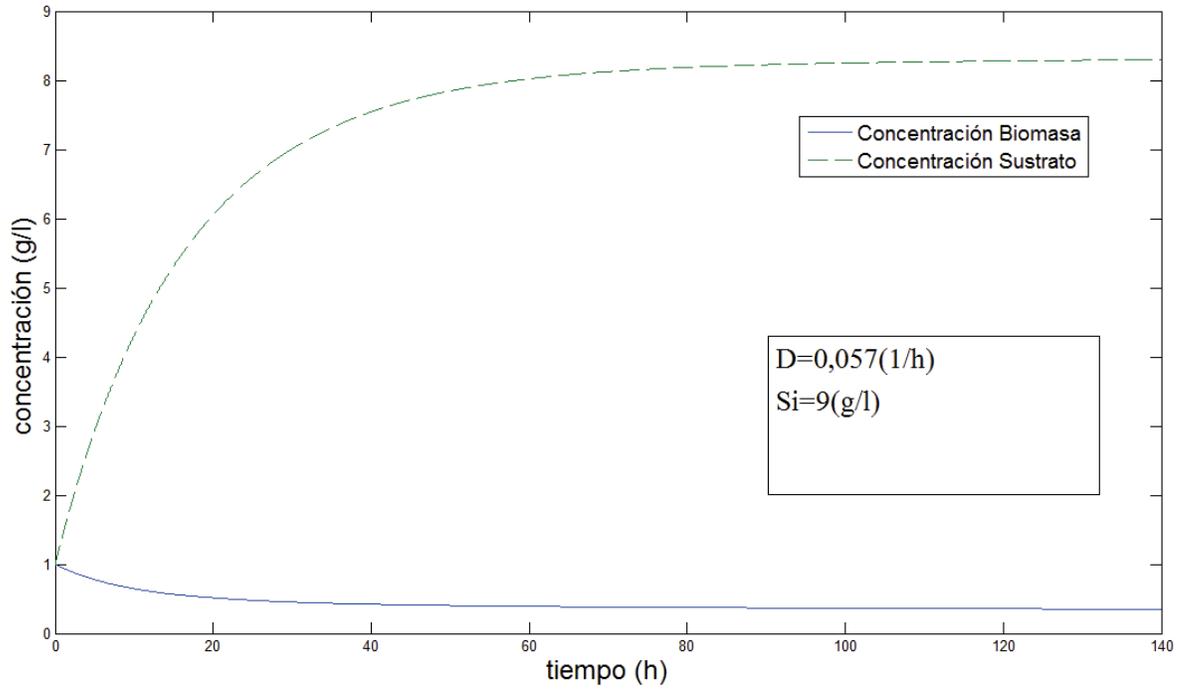


Figura 29: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057 (1/h)$ y $S_i = 9 (g/l)$

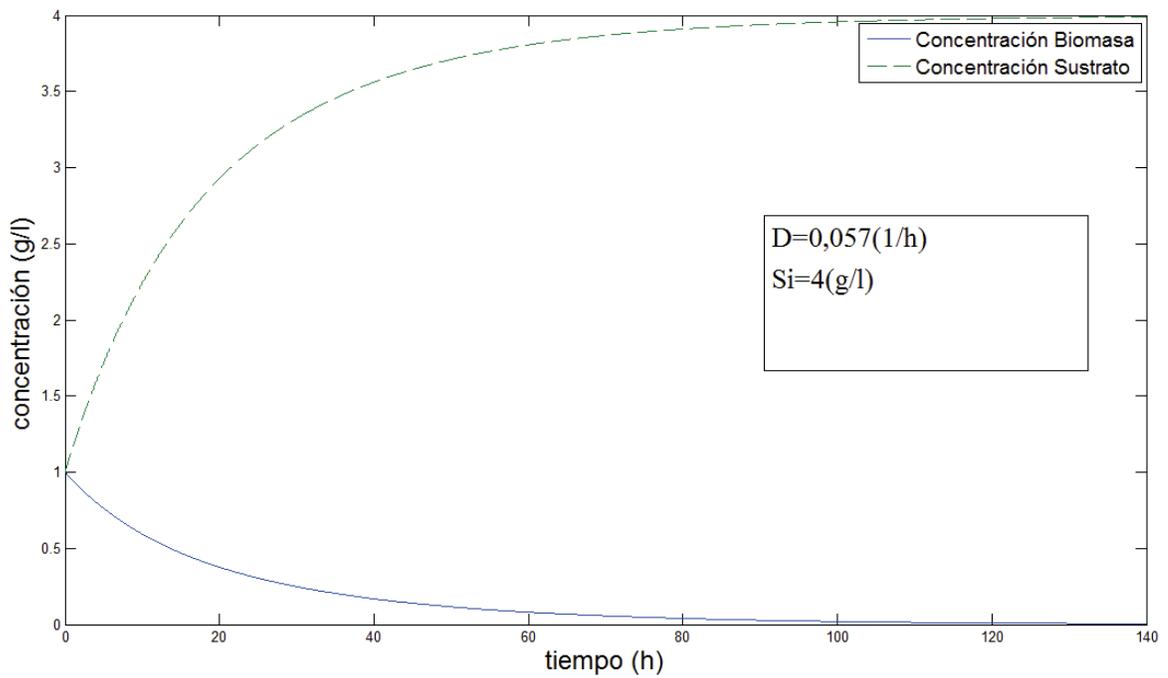


Figura 30: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Moser con $D = 0,057 (1/h)$ y $S_i = 4 (g/l)$

Apéndice A-3 : Simulación Quimiostato con Cinética de Haldane

- Simulaciones al variar la tasa de dilución (D):

En las siguientes gráficas, se muestran diferentes perfiles al variar la tasa de dilución para el *quimiostato* con cinética de *Haldane* y mantener la concentración de sustrato en la entrada constante (S_i).

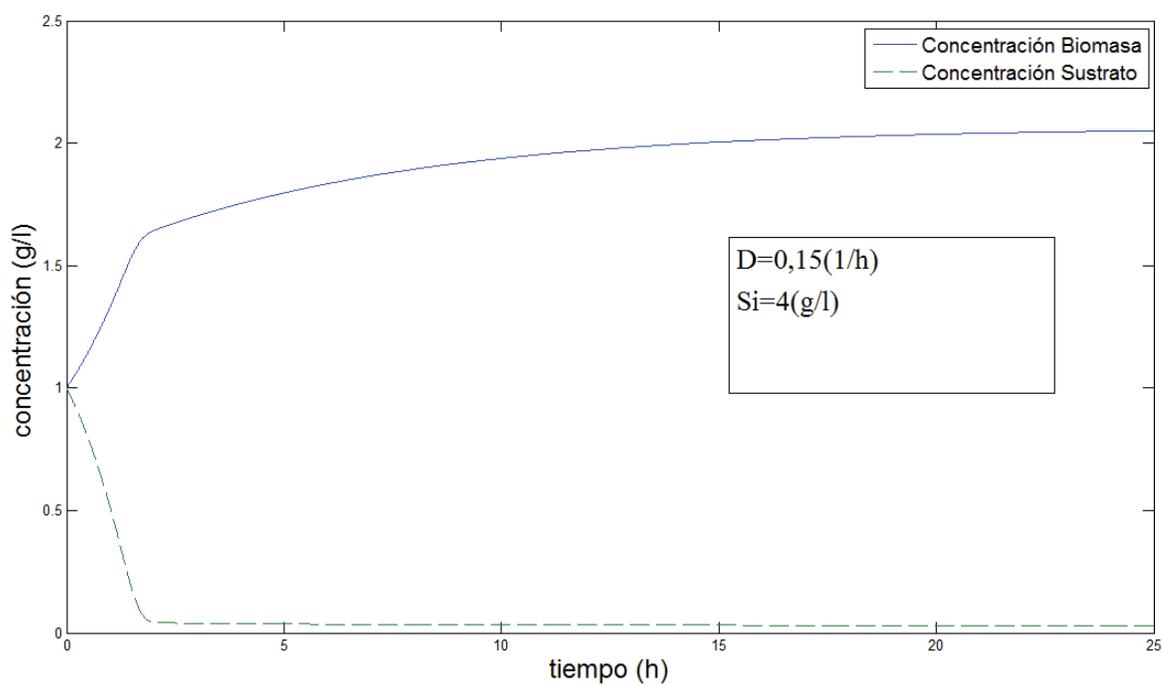


Figura 31: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,15 (1/h)$ y $S_i = 4 (g/l)$

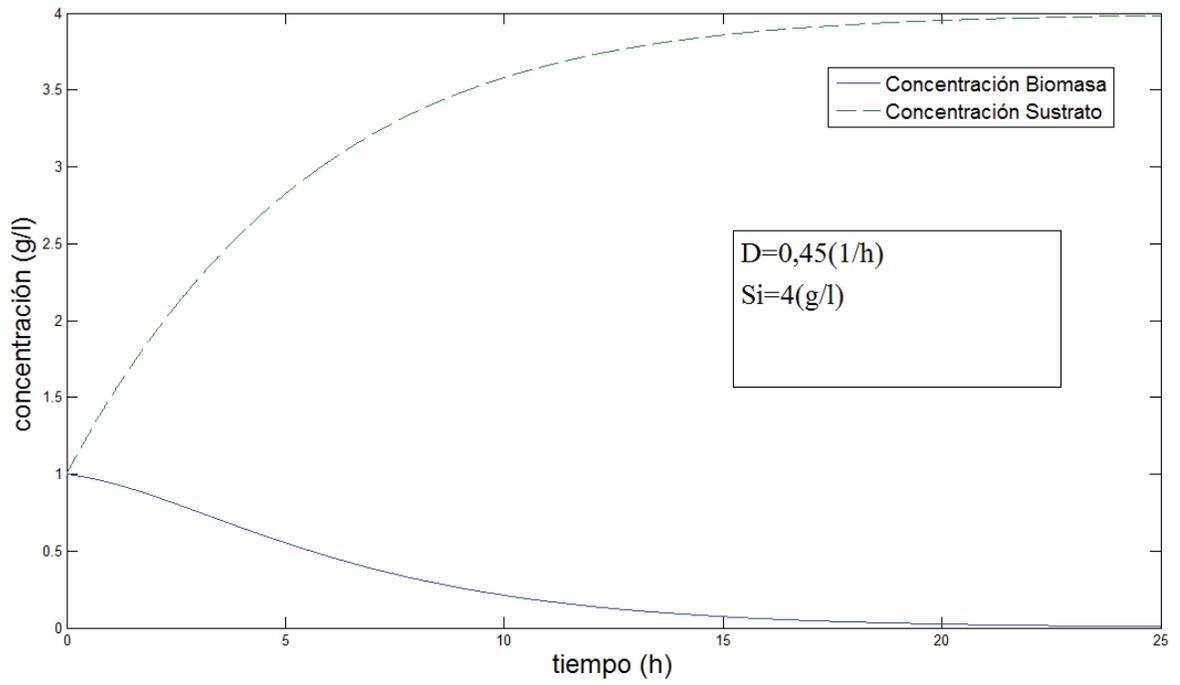


Figura 32: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,45 (1/h)$ y $S_i = 4 (g/l)$

- Simulaciones al variar la concentración de sustrato en la entrada (S_i)

En este punto, se presentan diferentes perfiles al variar la concentración de sustrato en la entrada para el *quimiostato* con cinética de *Haldane* y mantener la tasa de dilución constante (D).

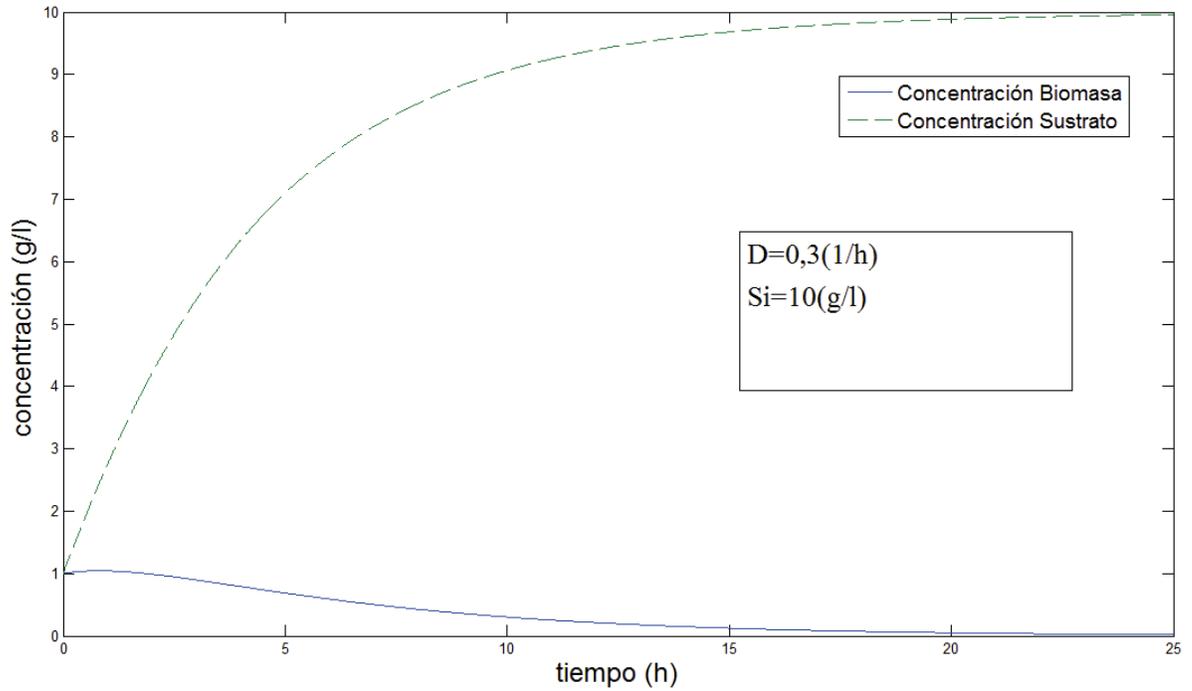


Figura 33: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3 (1/h)$ y $S_i = 10 (g/l)$

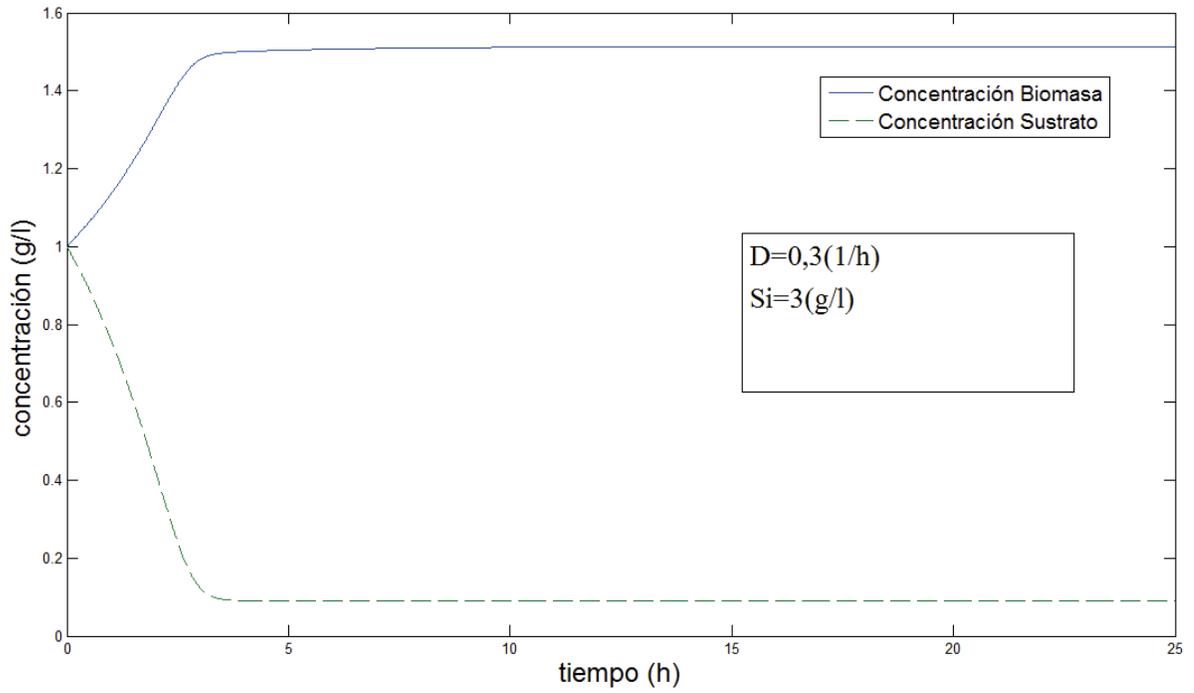


Figura 34: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3 (1/h)$ y $S_i = 3 (g/l)$

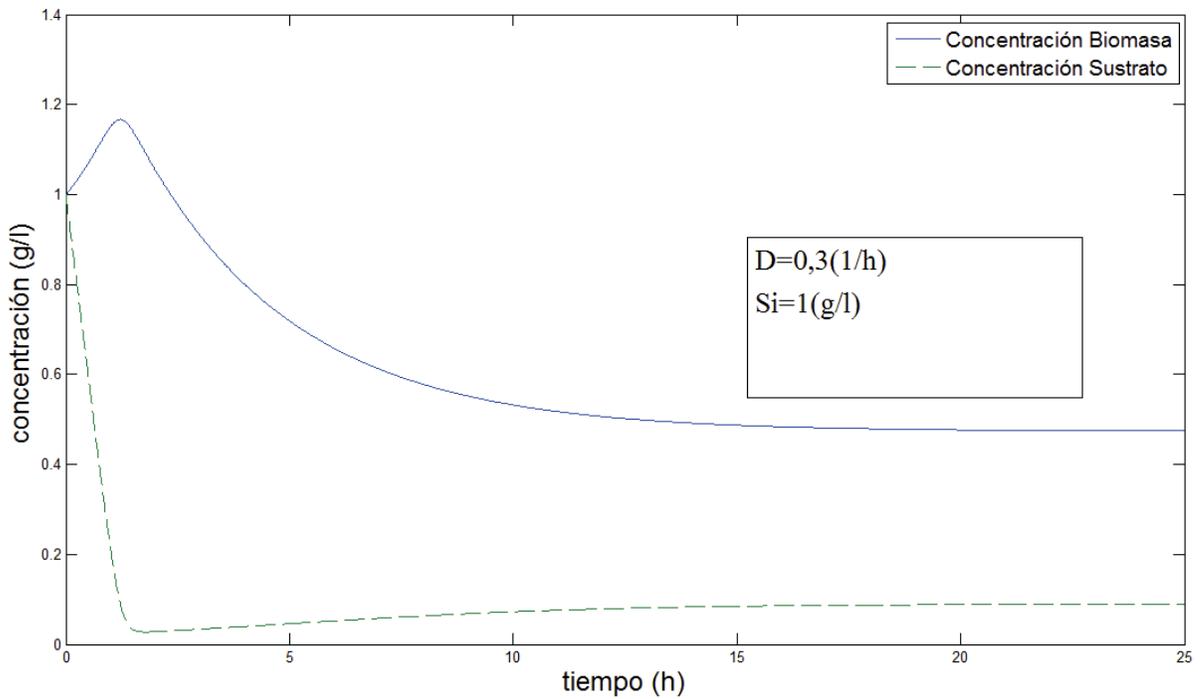


Figura 35: Perfil sustrato y biomasa para quimiostato con cinética de Haldane con $D = 0,3 (1/h)$ y $S_i = 1 (g/l)$

Apéndice B Métodos de Linealización

Apéndice B-1 Serie de Taylor truncada al primer término

Como se vio en los modelos desarrollados en el capítulo 3, éstos equivalen a un sistema de dos ecuaciones no lineales. En este apéndice en particular, se desarrollará el método de linealización de Taylor para un sistema de dos ecuaciones, sin perjuicio de que éste pueda ser aplicado a sistemas con un mayor número de ecuaciones.

Se tiene el sistema no lineal conformado por las ecuaciones (104), (105), y (106):

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \quad (104)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \quad (105)$$

$$y = g(x_1, x_2, u) \quad (106)$$

Ahora bien, desarrollando expansión en serie de Taylor -ecuación (20)- con respecto al estado estacionario (el cual se simbolizará con subíndice “s”), para luego despreciar los términos cuadráticos y de orden más alto, se obtiene:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) = & f_1(x_{1s}, x_{2s}, u_s) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_1 - x_{1s}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_2 - x_{2s}) \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (u - u_s) \end{aligned} \quad (107)$$

$$f_2(x_1, x_2, u) = f_2(x_{1s}, x_{2s}, u_s) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_1 - x_{1s}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_2 - x_{2s}) + \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (u - u_s) \quad (108)$$

$$g(x_1, x_2, u) = g(x_{1s}, x_{2s}, u_s) + \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_1 - x_{1s}) + \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (x_2 - x_{2s}) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} (u - u_s) \quad (109)$$

Como la linealización se realizó alrededor del estado estacionario, se desprende:

$$f_1(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = f_2(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = 0$$

y:

$$g(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = y_s$$

Ordenando las ecuaciones (107), (108), y (109) de forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ x_2 - x_{2s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \end{bmatrix} [u - u_s] \quad (110)$$

$$y - y_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ x_2 - x_{2s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{(x_{1s}, x_{2s}, u_s)} \end{bmatrix} [u - u_s] \quad (111)$$

Las ecuaciones (110) y (111) se pueden generalizar en una forma denominada *espacio de estados*, tal como lo indica la ecuación (112):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (112)$$

A continuación, se explicará la nomenclatura utilizada para la ecuación (112):

- Se aplica la negrita con la finalidad de enunciar que los elementos son vectores o matrices, ya que el sistema a linealizar puede tener múltiples variables del proceso ($\mathbf{x} = x_1 \dots x_n$), múltiples entradas ($\mathbf{u} = u_1 \dots u_m$) y múltiples salidas ($\mathbf{y} = y_1 \dots y_r$).
- La cremilla apuntada indica que a las variables del proceso se les sustrae el estado estacionario, comúnmente denominada *variable en desviación* $x^l = x - x_s$. Sin embargo, durante el desarrollo de este trabajo se subentenderá que siempre el espacio de estados se encuentra en *variable de desviación*, omitiendo la cremilla.
- Las matrices **A** **B** **C** y **D** corresponden al *Jacobiano* o matriz de derivadas parciales de las funciones que modelan el proceso con respecto a sus variables. Los elementos pertenecientes a éstas se generalizan de la forma expresada a continuación, donde el subíndice i se refiere a las filas y el j a las columnas de la matriz:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x_s, u_s} \quad (113)$$

$$B_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \Big|_{x_s, u_s} \quad (114)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{x_s, u_s} \quad (115)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \Big|_{x_s, u_s} \quad (116)$$

Apéndice B-2 Algoritmo Optimal Linealización Method

Paso 1: Asumir una función base de linealización para obtener las matrices A, B

Paso 2: Una vez obtenidas las funciones bases y con el sistema no lineal, se deben calcular los elementos de las matrices A^* y B^* , los cuales son valorados con las ecuaciones (117) y (118).

Las integrales pueden ser calculadas con cualquier método numérico. Para obtener x_k y x_j se debe resolver el sistema compuesto por la función base de linealización, usando el método de Runge-Kutta. De forma similar se obtiene f_i , ya que las soluciones generadas al resolver el sistema no lineal o lineal con Runge-Kutta, se deben reemplazar en las ecuaciones no lineales. Las variables u_l y u_j se obtienen del sistema no lineal.

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}^* \int_0^{t_1} x_k x_j dt = \int_0^{t_1} x_j f_i dt - \sum_{l=1}^m B_{il} \int_0^{t_1} u_l x_j dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (117)$$

$$\sum_{l=1}^m B_{il}^* \int_0^{t_1} u_l u_j dt = \int_0^{t_1} u_j f_i dt - \sum_{k=1}^n A_{ik} \int_0^{t_1} x_k u_j dt, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (118)$$

Paso 3: En este paso, las siguientes integrales deben estar computarizadas:

$$\int_0^{t_1} x_k x_j dt, \int_0^{t_1} x_j f_i dt, \int_0^{t_1} u_l x_j dt, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (119)$$

$$\int_0^{t_1} u_l u_j dt, \int_0^{t_1} u_j f_i dt, \int_0^{t_1} x_k u_j dt, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad j, l = 1, 2, \dots, m \quad (120)$$

Paso 4: En el último paso de este algoritmo, los elementos de las matrices óptimas A^* y B^* son calculados. En el caso de la matriz A^* , se debe resolver un sistema de n ecuaciones. En cambio, para la matriz B^* se debe resolver un sistema de m ecuaciones, donde n y m corresponden al número de variables de entrada y de salida, respectivamente.

Cuando se calculan las matrices utilizando las soluciones del sistema no lineal para reemplazar en f_i , la linealización se denomina *Optimal Linearization Method (OLM)*. Pero cuando se utilizan las soluciones del sistema lineal, ésta se llama *Optimal Linearization Method Transient Compounds (OLMTC)*.

Apéndice C Funciones de Transferencia

Una función de transferencia relaciona entradas con salidas en el dominio de Laplace. En particular, la relación de dominio de Laplace entre una entrada manipulada y salida es llamada una *función de transferencia de proceso*.

A continuación, se muestra el procedimiento que se utiliza para encontrar las funciones de transferencia para el proceso:

Apéndice C-1 Procedimiento para encontrar funciones de transferencia

En seguida, se describe un procedimiento general para encontrar funciones de transferencia.

Con la ecuación linealizada en el dominio de *espacio de estados*:

$$\begin{aligned}\dot{x}^l &= A x^l + B u^l \\ y^l &= C x^l + D u^l\end{aligned}\tag{121}$$

Se aplica transformada de Laplace a la ecuación (121), considerando como puntos iniciales los obtenidos del estado estacionario. De esta forma, se obtiene la siguiente ecuación en el plano “s”, correspondiente a la transformada de Laplace, donde I corresponde a la matriz identidad:

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1} B U(s) \\ Y(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s)\end{aligned}\tag{122}$$

Si $D = 0$ se puede escribir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\tag{123}$$

Donde:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (124)$$

Apéndice D Lazos de Control

A continuación, se muestran los diferentes lazos de control generados para el control del proceso.

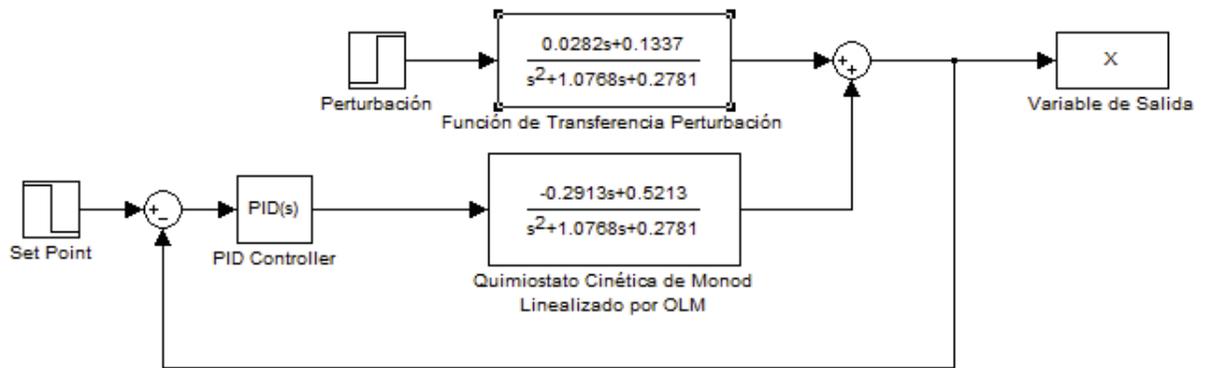


Figura 36: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLM

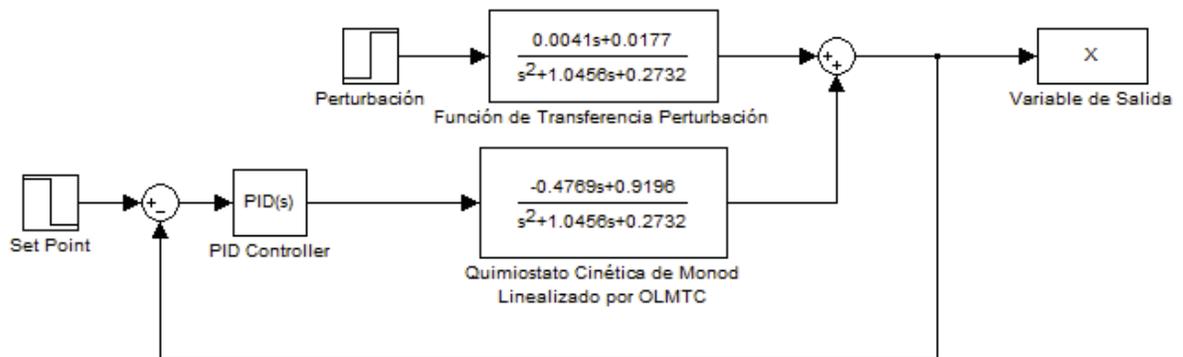


Figura 37: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLMTC

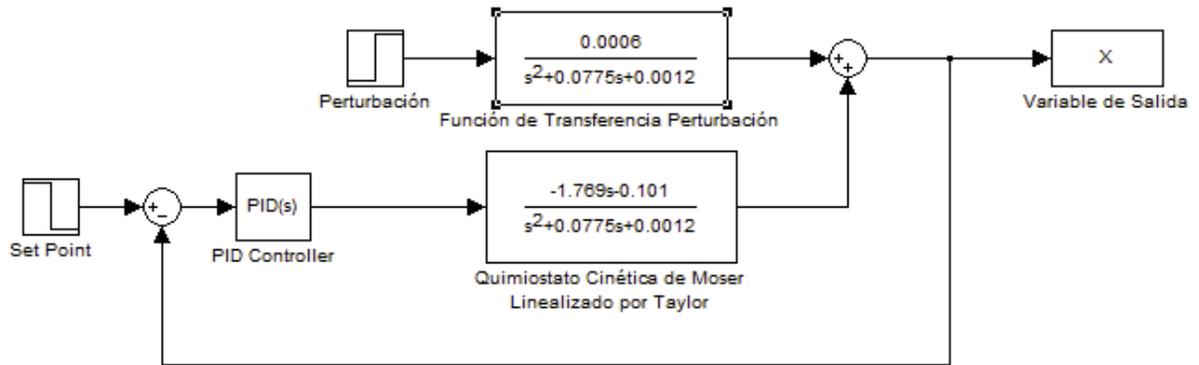


Figura 38: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por Taylor

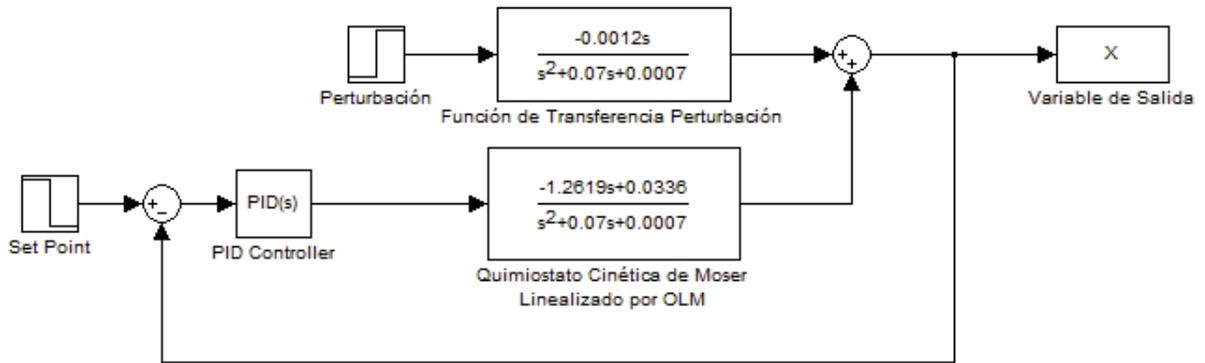


Figura 39: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLM

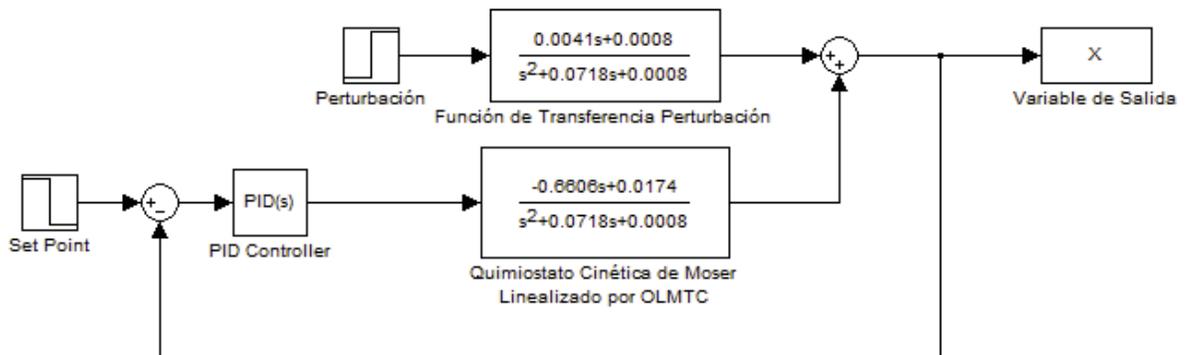


Figura 40: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLMTC

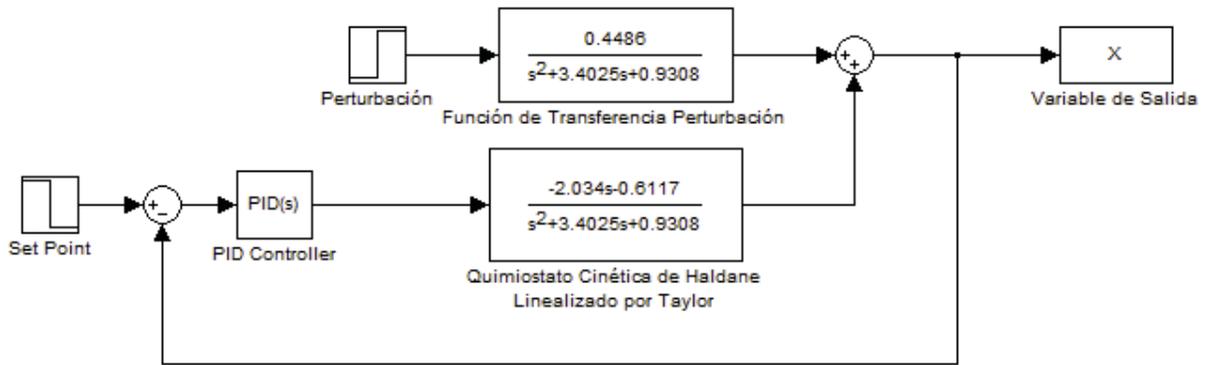


Figura 41: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por Taylor

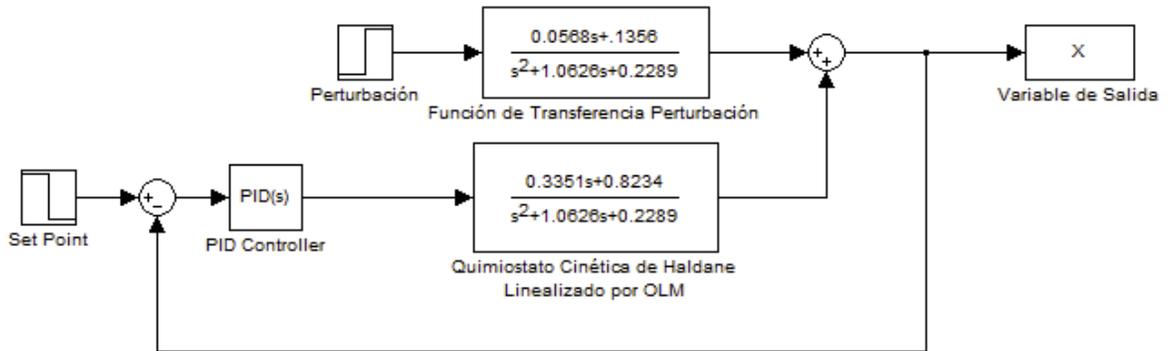


Figura 42: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLM

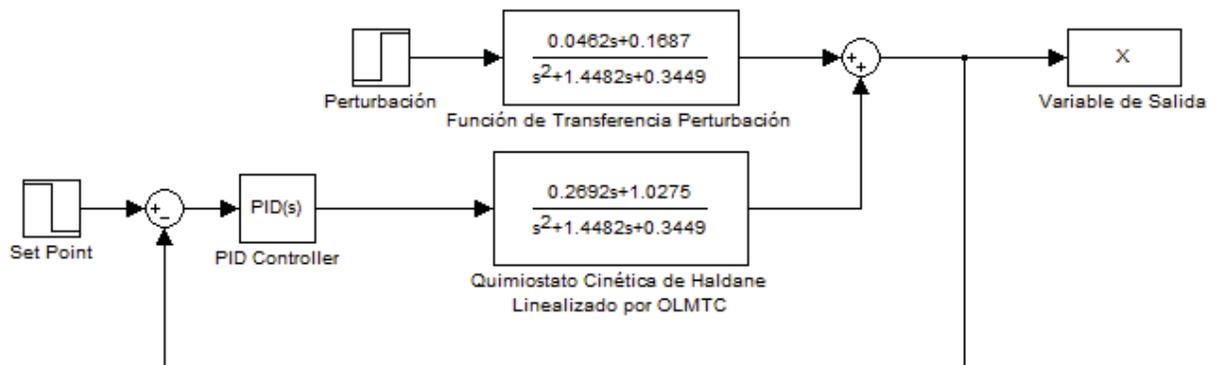


Figura 43: Lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLMTc

Apéndice E Valores de Sintonía para controladores

A Continuación, se presentan los valores de sintonización para los controladores de los lazos de control.

- Quimiostato con cinética de Monod linealizado por Taylor

$$K_C : -0,5317$$

$$\tau_I : 0,2316$$

$$\tau_D : 1,0337$$

- Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLM

$$K_C : 1,3251$$

$$\tau_I : 0,2583$$

$$\tau_D : 0,9287$$

- Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLMTC

$$K_C : 0,7487$$

$$\tau_I : 0,2613$$

$$\tau_D : 0,9564$$

- Quimiostato con cinética de Moser linealizado por Taylor

$$K_C : -0,0414$$

$$\tau_I : 0,0155$$

$$\tau_D : 0$$

- Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLM

$$K_C : 0,0151$$

$$\tau_I : 0,0143$$

$$\tau_D : 0$$

- Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLMTC

$$K_C : 0,0299$$

$$\tau_I : 0,0111$$

$$\tau_D : 0$$

- Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por Taylor

$$K_C : -1,286$$

$$\tau_I : 0,2735$$

$$\tau_D : 0,2939$$

- Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLM

$$K_C : 0,9172$$

$$\tau_I : 0,2154$$

$$\tau_D : 0,941$$

- Quimiostato con cinética de Haldane linealizado por OLMTC

$$K_C : 1,1168$$

$$\tau_I : 0,2381$$

$$\tau_D : 0,6905$$

Apéndice F Diagramas de Bode para Lazos de Control

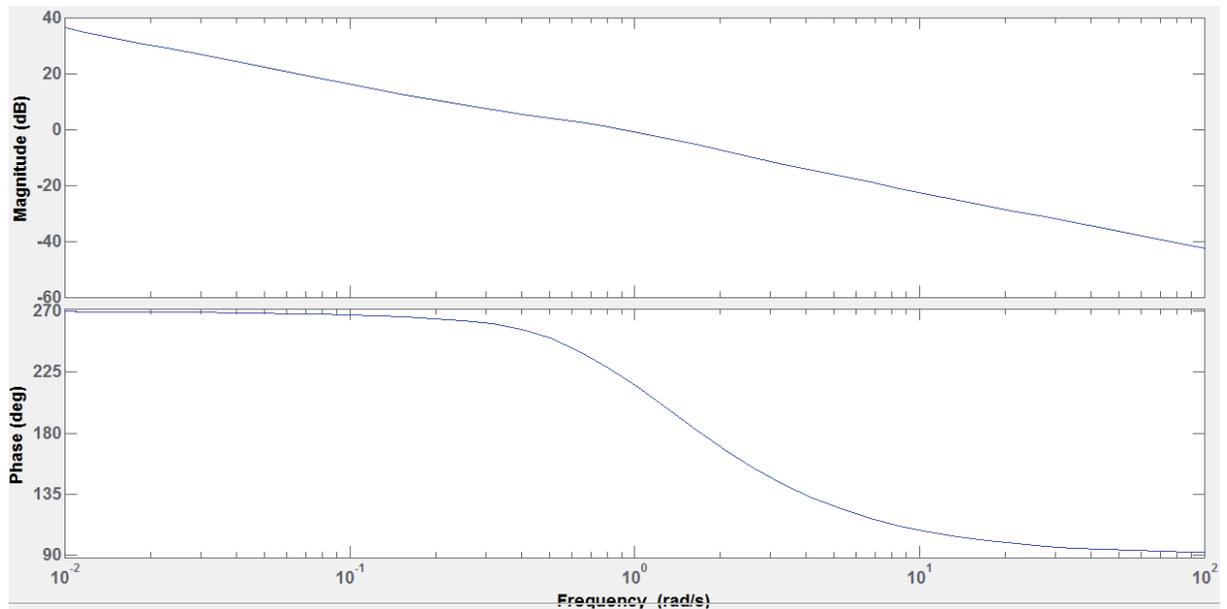


Figura 44: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLM

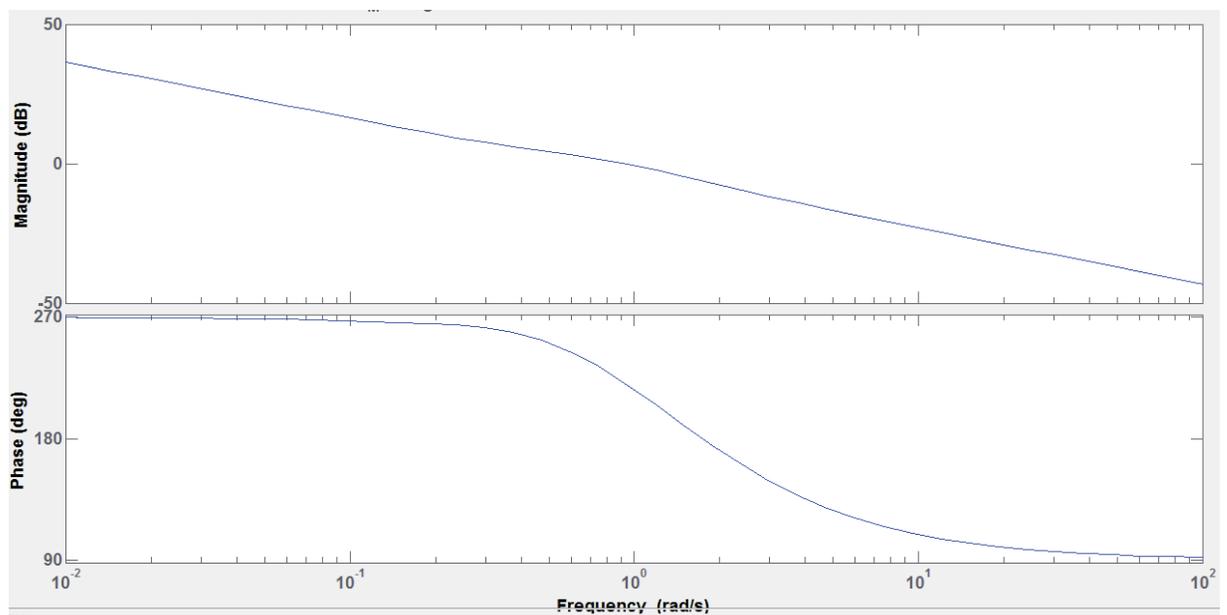


Figura 45: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Monod linealizado por OLMTC

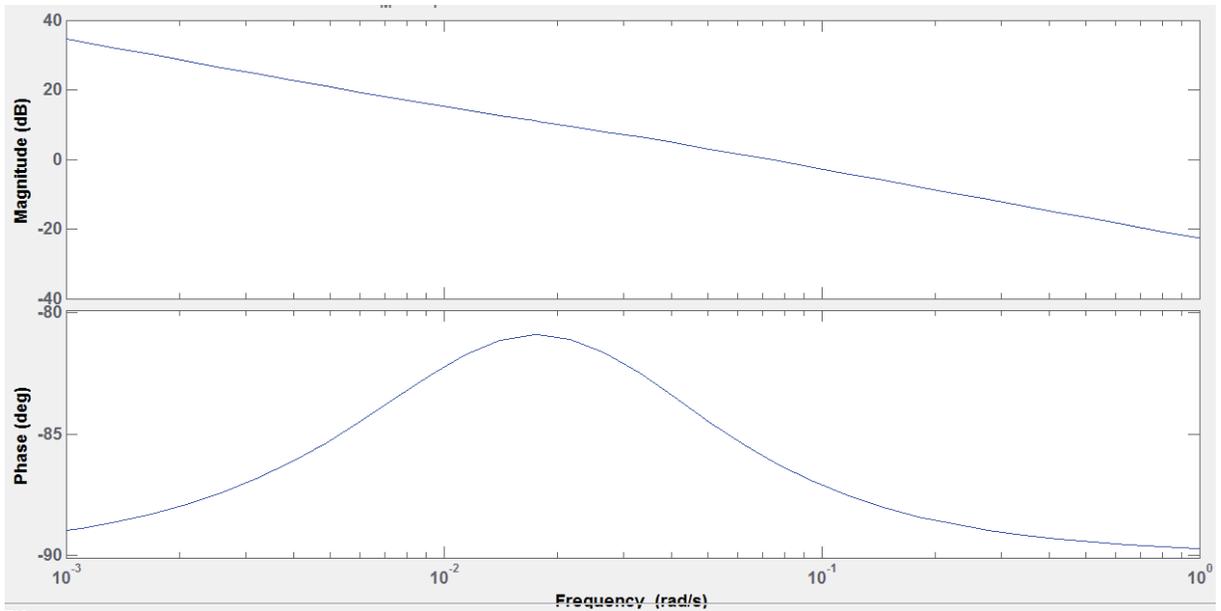


Figura 46: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por Taylor

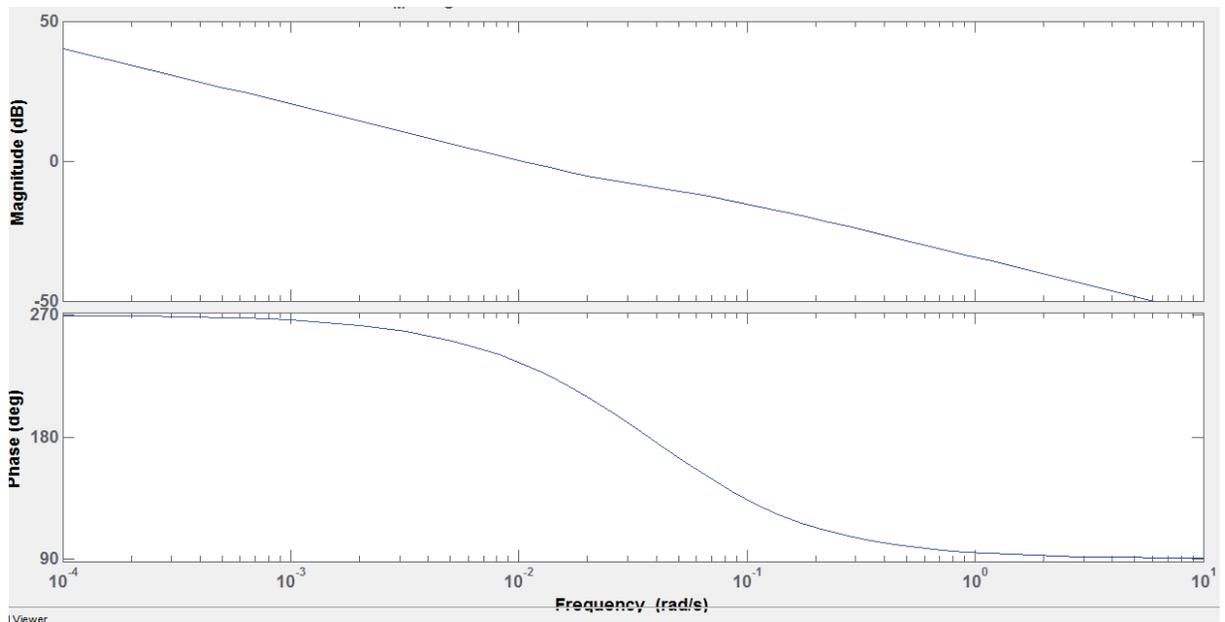


Figura 47: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLM

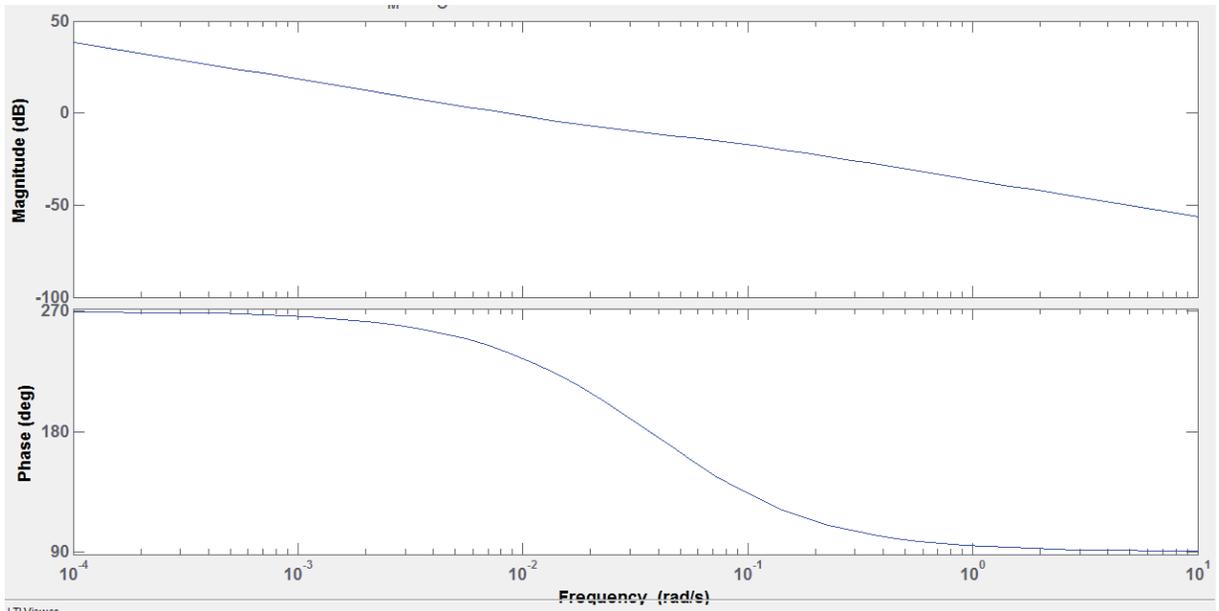


Figura 48: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Moser linealizado por OLMTTC

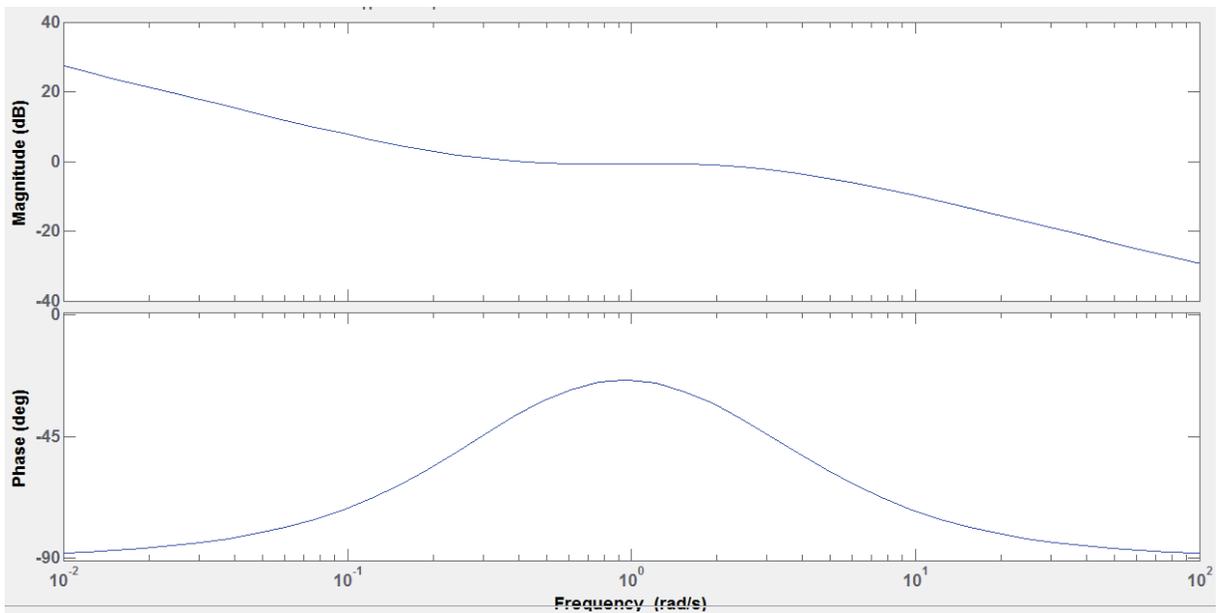


Figura 49: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por Taylor

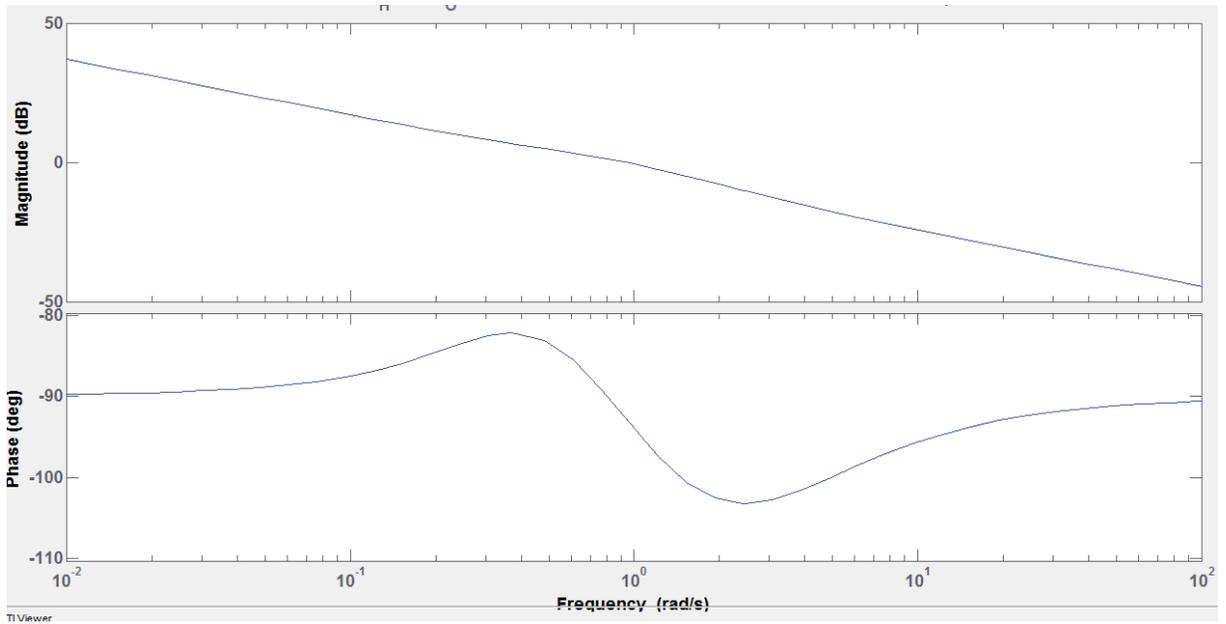


Figura 50: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por OLM

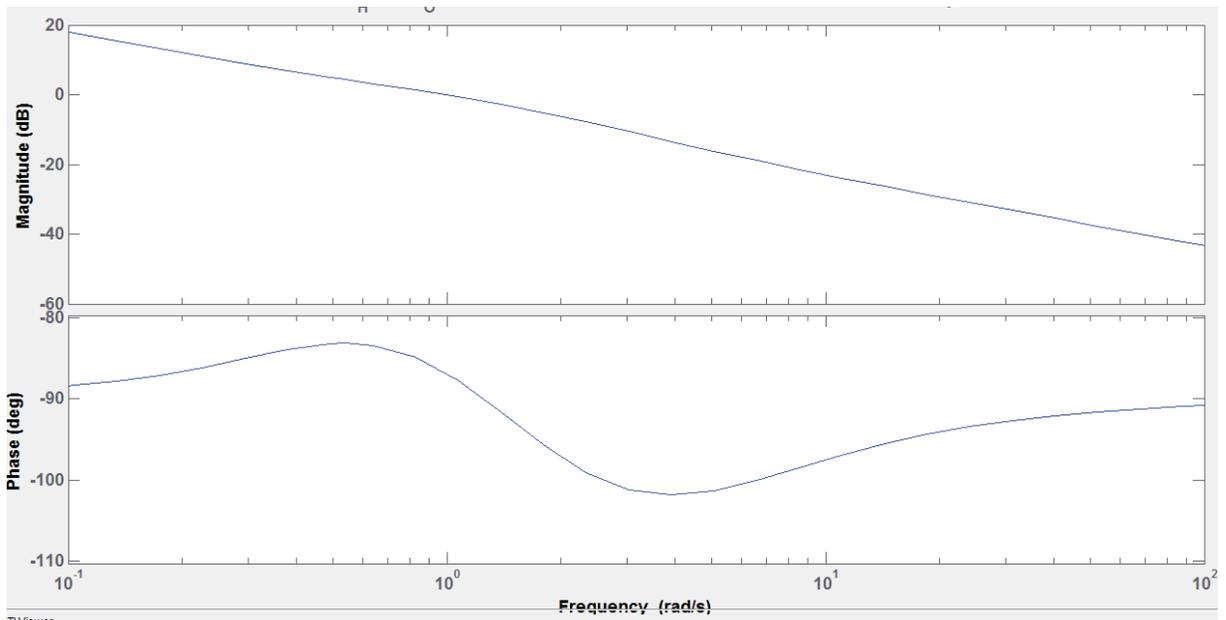


Figura 51: Diagrama de Bode lazo de Control para Quimiostato con cinética de Haldaner linealizado por OLMTC