Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas

Instituto de Matemáticas

Un estudio sobre la comprensión de las expresiones algebraicas al inicio del Álgebra. Una dificultad para alumnos de 13- 15 años.

Tesis para optar al grado de Magíster en la Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de las Matemáticas.

De: Ricardo Alex Guerra I.

Profesora Guía: Dra. Ismenia Guzmán R.

Un agradecimiento muy especial a mis profesores, por ser una persona digna de todo respeto, de confianza y orientadora en reconocimiento a mi profesora desde mi inicio de estudio en esta universidad:

Dra. Ismenia Guzmán; quien siempre me oriento en la realización de esta investigación y siempre estuvo con disposición para desarrollar los temas atingentes a esta tesis. Además, quien me brindo paciencia y sabiduría con sus consejos, el señor Dr. Raymundo Olfos. En ambos profesores observe y aprendí la tenacidad, perseverancia y esfuerzo. Elementos necesarios en la realización de esta tesis.

En dedicatoria a mi querido padre.
Como es el día después de la noche.
Un cumplimiento
del amor de un hijo a su padre.

Introducción

Esta investigación es desarrollada mediante seis capítulos. En el primer capítulo, presentamos la problemática de nuestro estudio, exhibimos los antecedentes del problema y enmarcamos la problemática a nuestra realidad; esto es, a través de los planes de estudio. Posteriormente, presentamos un conjunto de ideas extraídas de la Teoría de registros de R. Duval, en el capítulo dos. La dimensión matemática de nuestro problema es desarrollada considerando dos ejes, uno de estos ejes corresponde a la matemática pura (los anillos de polinomios) y el otro eje, se refiere a la matemática escolar. El estudio mediante la matemática escolar se sustenta en los planes de estudio, es desarrollado en el capítulo cuatro; aquí, consideramos importante mostrar las actividades propuestas en los planes y programas, pues, son actividades previas a la aplicación de los cuestionarios de nuestra investigación.

En el capítulo cinco desarrollamos la metodología, realizada en base a la aplicación de dos cuestionarios. En el primer cuestionario mostramos el problema, en el cual, encontramos un fenómeno didáctico "la conservación de la letra". También, descubrimos la existencia de una notoria diferencia entre actividades formuladas con enunciado en lenguaje cotidiano y su formulación registro en el registro algebraico. Aquí, la Teoría de los cambios de registros de Duval nos permite entender esta diferencia en los resultados. También, observamos otro problema para los alumnos, la ruptura entre el pasaje de la aritmética al álgebra, cuyo estudio nos permite analizar las dificultades.

Finalmente, en el capítulo seis procedemos presentar nuestras conclusiones, en ellas destacamos la importancia de reconocer que las expresiones 2a, 2p + 4 son objetos nuevos para los alumnos, hecho que nos parece fundamental; pues, la letra que tiene matemáticamente un carácter de parámetro, es un número, lo que escapa a la representación de la letra como un objeto concreto, hecho habitual en las actividades propuestas en los planes y programas. En las actividades propuestas en los planes y programas notamos la falta de actividades que permitan desarrollar la necesidad de una representación mediante letras. En fin, esta investigación sugiere a los docentes mirar cuidadosamente el pasaje de la aritmética al álgebra.

Capítulo 1: PROBLEMÁTICA DIDÁCTICA

I.1 Presentación

En mi experiencia de diez años como profesor de matemática en Primero Medio, he constatado, tanto en el trabajo de aula como en las respuestas a las evaluaciones efectuadas, la dificultad de los alumnos para determinar el valor numérico de una expresión algebraica. Lo que me ha motivado a estudiar este fenómeno, la determinación del valor numérico de una expresión algebraica es una tarea difícil para un grupo no despreciable de alumnos que comienzan, lo que en Chile se denomina, *enseñanza media*.

En una primera instancia estudiaremos el fenómeno que se produce al momento de evaluar una expresión algebraica, por ejemplo: evaluar 2a con a=4, algunos alumnos de Primero Medio sustituyen y además conservan la letra, es decir responden 8a. La letra debe ser sustituida, acción que no es realizada correctamente por los alumnos, esto sucede en un rango superior a la mitad del recuento de los resultados obtenidos[1].

Se supone que en el quehacer de los alumnos de este nivel, ha sido familiarizado con el uso de las letras, específicamente en la representación de un significado dado a las letras, por ejemplo: cálculos de perímetro, área, volúmenes, etc.

Para aproximarnos al problema, hemos realizado una experiencia preliminar mediante una encuesta a alumnos de Primero Medio, con el fin de indagar acerca del significado que le dan los alumnos a las letras. Con respecto a la actividad "evaluar 2a si a=4", nos hemos planteado las siguientes interrogantes:

[1] Con referencia a los datos expresados en pág. 51.

¿El alumno se da cuenta que la expresión 2a es 8 con la información: "a" representa un número? ¿El alumno se da cuenta de que la expresión 2a representa un número al exigírseles evaluarla? Algunos alumnos al desarrollar la actividad: evaluar "2a" con a = 4, ¿atribuyen la letra "a" un número? o bien, ¿le atribuyen el significado de un objeto concreto[2]?, es decir que "a" es un objeto concreto significa que "a" es un caramelo, "a" es una manzana. Por ejemplo: Si "m" representa una manzana que vale $ 80. ¿Cuánto cuestan 7m.? El significado de un objeto concreto la interpretación de la expresión a = 4 como "cuatro caramelos" o "cuatro manzanas". Si al "evaluar 2a con a=4", responden "8a"; ¿es un indicio de que la letra sería tratada por algunos alumnos como un objeto concreto y no como un número? Pero, si algunos alumnos interpretan "a" como cuatro manzanas, se justificaría la respuesta que interpreten "8a" como 8 manzanas.

Frente a tareas más complejas, por ejemplo, "evaluar 2p+4, con p=3", algunos alumnos todavía responden conservando la letra "p". Este resultado muestra que la conservación de la letra no es un error aislado o propio de situaciones triviales.

En las respuestas de algunos alumnos, se perciben también errores que parecieran corresponder a problemas con el dominio de la operatoria, sin embargo, estos errores son de otra naturaleza, distintos a la situación problemática de conservar la letra. Entonces, estamos frente a un <u>Fenómeno didáctico</u>.

Las interrogantes anteriores sobre conservar la letra al evaluar una expresión, enmarcan este problema en el pasaje de la aritmética al álgebra, esta dificultad en el aprendizaje de los alumnos ha sido centro de varios estudios.

[2] En referencia a la investigación de Dietmarr Kuchemann (1981), una de su clasificación del uso de las letras de los alumnos es la de Letra como objeto, desarrollada en la Pág. 8.

El objetivo de esta Tesis es encontrar explicaciones a este fenómeno didáctico, el que estudiaremos considerando los marcos matemáticos involucrados y los registros de representación asociados.

I.2 Otras investigaciones relacionadas al tema en cuestión.

Una investigación publicada por Panizza, Sadovsky y Sessa en 1995 titulada: "Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática" se propone como objetivo: "identificar las relaciones existentes entre condiciones de las situaciones didácticas (a propósito del álgebra), y los distintos sentidos que los alumnos construyen a través de las mismas". Posteriormente; se percatan que no pueden manejar el sentido que hubieran adquirido previamente los alumnos en estas situaciones, por lo tanto, las investigadoras dirigen su esfuerzo a desarrollar indicadores relevantes en torno a este problema. Más adelante, formulan las siguientes interrogantes: "¿Qué situaciones ponen de manifiesto la insuficiencia de la aritmética y la necesidad de representar relaciones que requieran el uso de variables o incógnitas? ¿Cuál es la complejidad máxima de una situación para que ésta sea abordable por quienes recién se están aproximando a la herramienta algebraica? ¿Cuál es la mínima para que tenga sentido dicha herramienta?[3]". Adaptando estas inquietudes a la presente investigación, me inducen el planteo de las siguientes interrogantes: ¿Qué tipo de situaciones permiten que el alumno se dé cuenta de la insuficiencia de la aritmética, en especial en el uso de una representación? ¿Cuál debe ser el grado de esta complejidad en estas situaciones?

[3] Artículo publicado Panizza, et al. "Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática" REM, Río cuarto Octubre de 1995.

Por otra parte, Y. Chevallard (1994), ha realizado la siguiente afirmación: "Un elemento importante en esta ruptura pareciera ser el funcionamiento del álgebra como memoria que permite conservar la traza de las operaciones efectuadas y que en ese sentido estaría ligado a la necesidad (o posibilidad) de comunicación de los procedimientos de resolución"[4].

Otros investigadores, como Cortés, Vergnaud y Kavafian[5] (1990) señalaban que el álgebra toma una significación más clara en la resolución de problemas difícilmente resolubles por la aritmética. Estos autores proponen como ejemplo problemas con dos incógnitas, aunque ellos mismos argumentan que tal vez eso sería ubicar la *barrera demasiado alta*.

Otra investigación, que determina los distintos significados que manejan los alumnos del uso de las letras, es el estudio realizado por **Dietmarr Kuchemann[6] (1981).** En esta investigación, se estudió a niños entre 13 a 15 años (961 estudiantes). El aporte de esta investigación es entregar evidencias y demostrar que los alumnos conciben las letras (o la típica X) con distintos significados. Esta diversidad de significados da lugar a distintos tipos de errores. El autor propone una clasificación de los distintos errores según los distintos tipos de significación dados a las letras.

Kuchemann distingue seis modos de significación. Estos son:

1.- Letra evaluada:	No se concibe el significado de número genérico o variable, se designa la letra como una marca que indica la posición de un número específico[7].

[4] Artículo publicado Panizza, et al. "Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática" REM, Río cuarto Octubre de 1995.
[5] Artículo publicado Panizza, et al. "Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática" REM, Río cuarto Octubre de 1995.
[6] Kuchemann, D.E. Álgebra, children`s understading of mathematics. Hart. K. (ed.) London 1981.

[7] Un ejemplo de letra evaluada es: ¿Cuánto vale a en 3 + a = 8?

2.- Letra ignorada o no se usa: Se ignora el valor de la letra, son unos objetos que no tienen por qué significar algo especial y no hay necesidad de manipularlos[8].

3.- Letra como objeto: La letra se usa como una abreviatura para el nombre de un objeto[9].

4.- Letra como una incógnita específica: La letra representa un número en particular, pero desconocido. Los estudiantes pueden operar directamente con él[10].

5.- Letra como un número generalizado: Las letras pueden significar varios valores numéricos desconocidos y no sólo uno[11].

6.- Letra como variables: Es el significado matemático estándar, la letra representa un conjunto indeterminado de números[12].

En vista de los resultados de su investigación, Kuchemann desarrolló las siguientes recomendaciones para la enseñanza del álgebra:

- Para superar la predisposición de los niños a tratar las letras como un desconocido específico, puede ser útil adoptar la interpretación de un número generalizado en la pregunta; esto es, si pedimos resolver la ecuación: $X + 5 = 8$, ¿Qué valor debe adquirir X? escogida entre valores de un rango entero.
- Como el pasaje de la aritmética al álgebra es desconcertante para los alumnos, puede ser útil discutir acerca de significados alternativos para una expresión algebraica. Ejemplo: 3m (3 metros o 3 veces m)

[8] Un ejemplo de letra ignorada o no se usa es: Si $x+y = 42$, entonces $x + y + 6 =$….
[9] Un ejemplo de letra como objeto es: Simplificar la expresión: $2x + 3y + 4x - y$
[10] Un ejemplo de letra como una incógnita específica es: Calcular el perímetro de un polígono de n lados si cada lado mide 2cm.
[11] Un ejemplo de letra como un número generalizado es: Calcular los valores de n para los que se verifica que $3n + 1 < 19$
[12] Un ejemplo de letra como variable es: ¿Qué es mayor, $2 + n$ ó $2n$?

- Los alumnos no parecen hacer la distinción entre v: número de vértices y la representación v: vértices, es decir, ¿se representa una cantidad o se define como vértices? El autor propone evitar al principio la definición v: número de vértices. (nos parece que la causa es el mal uso del lenguaje natural)

  Ejemplo propuesto: Los vértices de "n" triángulos es 3n, determina los vértices de 2 triángulos.

- Los alumnos necesitan reflejar el significado de los símbolos matemáticos en el nivel que ellos se encuentran. Las manzanas y plátanos no serán contados para el manejo de expresiones del tipo: $2a + 5b + a$. Un conocimiento de letras que representan valores numéricos es necesario.

Otro investigador, Ángel Gutiérrez (1995) se refiere en su artículo, a las distintas significaciones que los estudiantes puedan dar al signo igual "=". Este investigador ahonda y difunde el trabajo de Kuchemann en el sentido de que para cada tarea hay un significado distinto de lo que las letras representan. Según el trabajo explicativo de Gutiérrez, hay tres tipos de significados del signo "=":

En primer lugar, cuando los estudiantes conocen el significado del "=" en el contexto de las operaciones aritméticas (ej.: $2 + 5 = 7$) y en algunas operaciones algebraicas sencillas (ej.: $3x + 4 = 25$). El autor considera que el significado es el mismo. De este modo señala: "*el signo = enlaza una serie de operaciones aritméticas con su resultado*".[13]

Mas adelante, "*Un segundo significado que tiene el signo = para los estudiantes es el de conectar dos expresiones en las que se deben realizar acciones similares: lo que*

[13] Gutiérrez Ángel, "La didáctica de las matemáticas: fuente de reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas", Grupo Editorial Iberoamericana, México,1995

se haga a un lado del signo = se debe hacer también al otro lado". [14] Es decir, cumple una función de barrera o separación entre las expresiones algebraicas, refiriéndose que a cada lado del signo igual se realizan acciones similares.

Finalmente, *"el tercer significado que le atribuyen los estudiantes al signo = es el significado de equivalencia entre dos expresiones algebraicas"*[15], es decir, cuando realmente se concibe que lo que hay entre los extremos del signo igual es lo mismo.
En resumen, las investigaciones anteriores nos aportan:

1. Los diversos significados para los alumnos dan al uso de las letras y al uso del signo igual.
2. El problema de evaluar una letra es parte de un problema mayor: "La ruptura entre el pasaje de la aritmética al álgebra".
3. La visualización del funcionamiento del álgebra como memoria que permite conservar la traza de las operaciones efectuadas.[16]
4. La complejidad que debe tener una situación para que sea abordable el aprendizaje de una herramienta algebraica por quienes recién están aprendiendo.

I.3 Nuestro enfoque al problema.

En la búsqueda de enfocar este problema y al analizar las investigaciones del tema en estudio, observamos la existencia de dos importantes áreas de la matemática,[17] la aritmética y el álgebra. Cada marco tiene sus propias reglas de expresión diferentes. Aquí, para los alumnos las expresiones algebraicas son objetos nuevos; además, la

[14] Gutiérrez Ángel, "La didáctica de las matemáticas: fuente de reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas", Grupo Editorial Iberoamericana, México,1995
[15] Gutiérrez Ángel, "La didáctica de las matemáticas: fuente de reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas", Grupo Editorial Iberoamericana, México,1995
[16] En referencia a la afirmación de Y. Chevallard en Pág. 7.
[17] En adelante nos referiremos como *marco.*

enseñanza en el aprendizaje de estos objetos no enfatiza la interacción entre los registros del problema. No se profundizan los cambios de marcos y tampoco de representación.

Registros involucrados en los marcos asociados:

1) Marco aritmético: se encuentran dos tipos de registros de representación, uno es de ámbito numérico, a través de los sistemas de numeración y las cuatro operaciones básicas. El otro es el registro verbal, mediante los problemas de enunciado. La particularidad de este marco es que los elementos con los que se trabaja son concretos.
2) Marco Algebraico: además del registro numérico y verbal, incorporamos el registro simbólico, la expresión algebraica y sus operaciones, relaciones y ecuaciones lineales.

I.4 Nuestras nuevas interrogantes.

En primer lugar nos preguntamos, ¿la adquisición de lo que representa una expresión algebraica tiene dificultades? y si las hay ¿de qué naturaleza son?, ¿la dificultad obstaculiza el aprendizaje de lo que una representación algebraica significa? Además, si la situación problemática es expresada en otro registro ¿influirá esto en el aprendizaje de los alumnos?

Buscando responder las interrogantes anteriores, se analiza una actividad, presentada en dos marcos distintos: el aritmético y el algebraico.

Actividad de estudio: "evaluar 2a con a = 4"

Marco aritmético un ejemplo es: ¿Qué edad tiene Verónica, si la edad de Verónica es el doble de su amiga Andrea y sabemos que Andrea tiene cuatro años? Aquí deberá interpretarse que la edad buscada cumple la relación: es el doble de la edad de Andrea, además se da la edad de Andrea; entonces:

Edad de Verónica = dos veces la edad de Andrea = $2 \cdot (4 \text{ años}) = 8$ años.

Respuesta: ocho años.

El desarrollo de este ejemplo en el registro verbal está asociado con el registro numérico y sus operaciones básicas.

Marco algebraico el ejemplo anterior se expresa: "evaluar 2a con a = 4"

Un desarrollo puede ser: $2a = 2 \cdot 4 = 8$. Por lo tanto, la respuesta es 8.

La resolución anterior esta dado en el registro simbólico. Aquí, se requiere la comprensión de la expresión algebraica y el de una ecuación. En vez de la respuesta 8, los alumnos responden "8a", esta respuesta puede tener sus causas en:

a) En el significado de a=4, los alumnos asocien el valor de a con cuatro objetos.
b) Los alumnos no tienen un significado para la expresión algebraica: 2a.
c) Los alumnos no han asignado un significado matemático a la palabra evaluar.
d) Posiblemente, las herramientas necesarias del marco algebraico, no han sido aprendidas por los alumnos.

En conclusión, los marcos algebraico y aritmético no solamente son distintos en la resolución de actividades. El grado de dificultad asociado a los conocimientos requeridos del marco algebraico se han manifestado en los resultados obtenidos.[18] Entonces, investigaremos el problema de evaluar considerando los distintos registros involucrados en cada marco matemático.

I. 5 Las expresiones algebraicas en los "Planes de Estudio".

Algunas actividades son:

[18] En referencia al análisis de resultados entre actividades similares, actividades dadas en los registros: aritmético y algebraico, Pág. 54.

- En el marco de la Geometría: Las letras aparecen en la representación de ángulos, medidas, cálculos de perímetro, área, volumen, problemas de planteo, etc.

  Por ejemplo: En el Programa de Sexto Básico, en la página 109 se representan las letras a y b como los lados de un rectángulo. La actividad solicitada es: determinar el área y el perímetro del rectángulo. Aquí, las letras representan las medidas a los lados, son números; por consiguiente, el resultado es un número.

- Las letras representan también un valor numérico desconocido, en la página 26, formulan el siguiente problema de planteo: "De los $2000 que teníamos ahorrado en Mayo ahora sólo tienen $500, ¿Cuánto hemos gastado?" Aquí, se sugieren dos formas de resolución:

  2000–500 =, y también 2000 – X = 500, donde X: representa los pesos gastados. Esta actividad el uso de la letra X, representa un valor concreto, son pesos, además, se observa que la actividad no crea la necesidad de que X sea un número, dado que, la repuesta puede ser determinada sin ninguna necesidad de ella. Es decir, la representación de la letra X aparece impuesta a los alumnos.

- En el programa del Octavo año Básico, se lee en la página 35: "**Si el polígono** tiene **un número** cualquiera **de lados**, que lo podemos expresar con la letra "n", ¿Qué expresión representaría el número de triángulos que se forman en ese **polígono de n lados**? ¿Por qué?" Esta actividad, en relación a lo que representa la letra "n" es ambigua, nos preguntamos: ¿"n" representa el polígono?, ¿el número de lados?, ¿es la representación de los lados?

  Otro caso, son las actividades que se refieren a determinar el valor del perímetro de un rectángulo, el área de un cuadrado, etc. En ellas, se exige la actividad de evaluar. Aquí la actividad tiene un ámbito concreto, pero no aparece el uso de la representación de la letra como una necesidad. No vemos que el énfasis en la representación de la letra no está en la necesidad y nos parece que la representación de la letra ha sido enseñada y aprendida.

En la página 109 del mismo programa, se plantea una situación cuyo objetivo es que los alumnos perciban la necesidad de una incógnita para resolver la situación planteada.[19] El programa, al referirse al trabajo esperado en los estudiantes, señala lo siguiente: "...Discuten sobre la conveniencia de suponer que el número buscado es x (o cualquier letra que simbolice la incógnita) y a partir de ello hacen algunas manipulaciones aritméticas." Para los alumnos, la actividad es un primer acercamiento de la representación de letras como número, la resolución exige la representación de una incógnita. Sin embargo, la representación de la incógnita como letra, ¿es necesaria? Pensando que la actividad es un primer acercamiento de representación de un número, la actividad propuesta, ¿tiene un grado de dificultad adecuado? La resolución de la actividad requiere el siguiente planteo:

Si x: el número de palomas. La resolución requiere el planteo de la ecuación:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

En el planteo, los alumnos deben de representar una letra como número; sin embargo, la redacción del enunciado no es precisa, se exige la representación de las expresiones: la mitad, la cuarta parte. Nos preguntamos ¿la mitad de qué?, ¿la cuarta parte de qué? Finalmente, la resolución exige plantear una ecuación, ¿es el primer acercamiento de planteo de una ecuación ó el de la representación de un número?

Al parecer, el objetivo de una representación algebraica según las indicaciones del programa, ¿se determinará por la conveniencia de que los alumnos representen mediante una letra una cantidad desconocida? o buscando, la determinación del valor numérico de

---

[19] "Un halcón posado en la rama de un árbol observa el paso de una bandada de palomas y les dice: "¡Adiós, cien palomas!", saludo al que las palomas responden: "se equivoca, señor halcón, no somos cien. Nosotras, más otras tantas como nosotras, más la mitad, más la cuarta parte, más Ud., señor halcón, somos cien". ¿Cuántas palomas había en la bandada?," Pág. 109, Programa de 8° año Básico de Educación Matemática, MINEDUC.

la representación. Sin embargo; ¿el objetivo de la representación estará en las manipulaciones aritméticas que se realizan a la representación de la expresión resultante? Pensamos que la manipulación aritmética de una expresión algebraica no es trivial, el marco algebraico es distinto al aritmético. Adicionalmente, nos surgen otras interrogantes: ¿crean las actividades planteadas a los alumnos la necesidad de una representación?, ¿es impuesta la representación de las letras?, ¿adquiere el alumno el nuevo significado atribuido a la letra?

El programa afirma que la necesidad del uso de una representación algebraica debe manifestarse en las actividades de Octavo Básico. Según los resultados obtenidos en la experiencia preliminar, los alumnos no han requerido de la representación para evaluar una expresión algebraica, puesto que, en general, los alumnos sólo han adquirido el carácter concreto del valor asignado a la letra y, según los resultados, permiten afirmar que algunos alumnos en Primero Medio no han percibido que la aritmética se vuelve insuficiente para la resolución de algunos problemas y que se requiere estudiar el álgebra, empezando por aceptar que las expresiones algebraicas son objetos matemáticos nuevos.

I.6 Objetivos

Objetivo general: Constatar que el rol que juega la letra para algunos alumnos que cursan el Primero Medio es un problema. Este fenómeno didáctico se evidencia al exigírseles evaluar una expresión algebraica sencilla, los alumnos no obtienen la respuesta esperada. Para la realización de nuestro estudio consideramos los marcos matemáticos involucrados y sus registros de representación asociados.

Objetivos específicos:

I. Constatar que algunos alumnos que cursan el Primero Medio no logran evaluar una expresión algebraica simple con éxito.
II. Determinar como enfrentan los Programas del MINEDUC el uso de las letras.
III. Estudiar las actividades propuestas en los Programas de estudio del uso de las letras.
IV. Dejar en evidencia la complejidad de evaluar en el marco algebraico respecto al marco aritmético.
V. Realizar un estudio basado en los marcos aritmético, algebraico y la teoría de registros.

Capítulo II MARCO TEÓRICO

Consideraremos algunos aspectos de los trabajos de R. Douady sobre los Cambios de Marcos y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymound Duval.

II.1 En la teoría del Cambio de Marcos de R. Douady, la autora define el concepto *marco matemático:* "está constituido por objetos de una rama de la matemática, sus relaciones, sus formulaciones y las imágenes mentales asociadas a estos objetos y a esas relaciones. Estas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos matemáticos del Marco."[20] Esto es, una problemática en un marco matemático tienen sus propios objetos, éstos tienen sus respectivas imágenes; por lo tanto, dos marcos pueden tener los mismos objetos. Sin embargo, los marcos pueden diferenciarse en las imágenes mentales que evocan sus objetos junto a la problemática que desarrollan. Más adelante, Douady afirma el "*cambio de marcos* es un medio para obtener nuevas formulaciones de un problema que sin ser necesariamente

[20] Guzmán R. Ismenia, lección 14: "juego de Marcos y dialéctica Medio Objeto", Apunte de curso: "Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática, PUCV.

completamente equivalente, permiten un nuevo acceso a las dificultades ya encontradas y exigen la puesta en obra de herramientas y técnicas que no aparecían en la primera formulación."[21]

En referencia a nuestra investigación consideramos que el conjunto de aportes de R. Douady nos otorga herramientas para esta investigación. Esto es, nuestros objetos de estudio son expresiones algebraicas que contienen letras y que son representados en distintos marcos, estos marcos pueden ser la geometría, la aritmética o el álgebra. Por lo tanto, la teoría de Cambio de Marcos nos otorga herramientas para ahondar nuestro estudio.

II.2 Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Esta teoría se refiere a la importancia de la representación en los fenómenos del aprendizaje de los conocimientos, se señala "No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación" (Duval, 1999, p. 25).

La noción de representación en la historia se ha presentado en tres ocasiones distintas cada una con una determinación totalmente diferente del fenómeno de la representación[22], en esta tesis consideraremos la de representación semiótica.

R. Duval señala: "El fenómeno importante para comprender el papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos, no es el empleo de uno u otro tipo de signos sino la variedad de tipo de signos que pueden ser utilizados" (Duval, 1999, p. 28).

El acentúa la dificultad existente en el cambio de una representación semiótica a otra: "…Por todas las observaciones que se han podido hacer sobre el aprendizaje de

[21] Guzmán R. Ismenia, lección 14: "juego de Marcos y dialéctica Medio Objeto", Apunte de curso: "Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática, PUCV.

[22] La primera noción de representación semiótica consiste en que cumplen una función de comunicación; la segunda, consiste en ver en las representaciones semióticas como un soporte para las representaciones mentales, la tercera noción de representación es la conocida como representación semiótica.

las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. *Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedará limitada a la forma de la representación usada*" (Duval, 1999, p. 28). Además, afirma que el aprendizaje de la matemática debe enfatizar los cambios de las representaciones, puesto que es una operación complicada para los estudiantes. La afirmación anterior, es relevante para el estudio del problema de esta investigación. Nos permite visualizar la dificultad que se produce en el cambio de una representación, en particular, el pasaje del lenguaje natural al de una expresión algebraica.

Además, Duval señala que las actividades cognitivas ligadas a la semiosis son las actividades de tratamiento y conversión. En la realización de nuestro estudio, consideramos:

1. <u>Tratamiento de las representaciones semióticas</u>: "Un tratamiento es una transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema". (Duval, 1999, p. 42)

   Se menciona que el cálculo numérico es un tratamiento interno en el registro de la escritura simbólica de cifras o de letras; el cual se sustituye en el mismo registro de escritura de los números.

   Por ejemplo en el registro numérico: 2 + 3 = 5, escritura simbólica con cifras. (Se transformó 2+3 en 5)

   Ejemplo en el registro de las expresiones algebraicas: 3a + 4a=7a, escritura simbólica con letras. (Transformó 3a+4a en 7a)

2. <u>Conversión de representaciones, cambio de registro</u>: "La conversión es la transformación de un objeto representado en un registro, en una representación de este mismo objeto, en otro registro". (Duval, 1999, p. 44)

   Ejemplo: La representación del número: $\frac{1}{10}$ en 0,1. La primera representación esta en el registro de las fracciones y la otra en el registro de los números decimales.

Duval plantea que no se debe de confundir la representación de un objeto con el objeto mismo y, en el caso de la operatoria numérica, es preciso diferenciar entre la significación operatoria vinculada al significante y el número representado.

Ejemplo: $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ objeto del registro de los números decimales.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ objeto del registro numérico de las fracciones.

$25 \cdot 10^{-2} + 25 \cdot 10^{-2} = 50 \cdot 10^{-2}$ objeto del registro numérico de las potencias.

Observamos, que la escritura decimal, fraccionaria y de potencias constituyen tres registros de representación diferentes de números, aquí la significación operatoria no es la misma para cada uno de estos tres significantes: 0,25; $\frac{1}{4}$ y $25 \cdot 10^{-2}$, puesto que no son los mismos tratamientos que permiten desarrollar las adiciones anteriores. Cada uno tiene una significación operatoria diferente, y sin embargo, representan la misma cantidad.

Respecto a las reglas de conversión, Duval afirma "Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro" (Duval, 1999, p. 45).

Con respecto a la conversión en la enseñanza, Duval afirma: **"**La enseñanza privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento. Y esto principalmente para el registro de los discursos en lengua natural, para los registros numéricos y para el registro de la escritura simbólica**"** (Duval, 1999, p.46) La afirmación anterior, nos indica las dificultades que tienen los alumnos, especialmente, por la poca importancia dada a la conversión entre representaciones. Posteriormente, agrega **"**Lo que se observa más protuberante es que *el lugar dado a la conversión de representaciones de un registro a otro es mínimo o nulo*. Y esto por varias razones:

- La primera, es, en la mayoría de los casos, la inexistencia de reglas de conversión o su alcance extremadamente reducido.

- La segunda es que con frecuencia se efectúa un cambio de registro con fines de simplicidad y economía de tratamiento: una vez que se efectúa la conversión se queda sólo en el registro en el cual se trabaja.

- La tercera es en la creencia en la inmediatez y simplicidad de un cambio de registro y pensar que detenerse en este tipo de actividad seria quedarse atrasado en relación con la enseñanza seria de la matemática y/o lengua materna**"** (Duval, 1999, p. 46)

<u>Fenómenos del cambio de registro</u>: Son dos, la congruencia y la no-congruencia.

Congruencia: Dos representaciones son congruentes cuando una vez segmentadas según sus respectivas unidades significantes[23], puede realizarse una correspondencia entre las unidades significantes simples o en una combinación de unidades simples correspondientes entre sí.

Ejemplo: "la abscisa es mayor que la ordenada"

Es congruente con: "$x > y$"

Puesto que, existe una correspondencia término a término entre las unidades significantes de los registros lengua natural y algebraica, esto se muestra a continuación.

"la abscisa", algebraicamente se representa: x

"es mayor que", algebraicamente se representa: $>$

"la ordenada", se representa: y

No – congruencia: Hay una no-congruencia en dos representaciones cuando no existe una correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros.

Ejemplo: "la abscisa positiva"

Es equivalente a: $x > 0$

Aquí, la unidad significante del registro lengua natural "positiva", tiene dos unidades significantes en el registro algebraico, que son: "> 0". Por lo tanto, no hay una correspondencia y en consecuencia, no existe congruencia.

Respecto a la dificultad de la no-congruencia, Duval señala: "En la no-congruencia no sólo aumenta el tiempo de tratamiento, sino que la conversión puede resultar imposible de efectuar, o incluso de comprender, si no ha habido un aprendizaje

[23] Se define *unidad significante* en anexo, pág. 70.

previo concerniente a las especificidades semióticas de formación y de tratamiento de la representación, propias de cada uno de los registros presentes" (Duval, 1999, p. 48).

En referencia a nuestra investigación, los aportes de la Teoría de Duval se inician desde la noción de representación; dado que, la teoría de registros señala y destaca la importancia de la representación en los fenómenos relativos al conocimiento. Posteriormente, en relación con nuestro problema de estudio, la expresión algebraica es un nuevo objeto matemático y las dificultades que su aprendizaje suscita para los alumnos.

Por lo tanto, al amparo de algunos conceptos de la teoría de registros, nosotros estudiamos los cambios de registro de nuestro objeto de estudio; en particular, los cambios de registros de la expresión algebraica que suceden entre los registros algebraico y aritmético.

CAPÍTULO III ASPECTOS MATEMÁTICOS Y DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

III.1 Marco matemático: Los anillos de Polinomios

En la matemática pura, se desarrolla la teoría de los Anillos de Polinomios[24]. Esta teoría es extraída del libro Álgebra Abstracta, específicamente del capítulo 30. Texto cuyo autor es Jhon Fraleigh.

[24] Fraleigh Jhon, Álgebra abstracta primer curso, Cáp. 30, traducido por Manuel López Mateos – 1987 tercera edición.

El autor, inicia este capítulo con los conocimientos previos necesarios para la comprensión de este conjunto de ideas. Posteriormente, él señala: Sea R un anillo. Un polinomio f(x) con coeficientes en R se define como una suma formal infinita. Esto es, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ donde $a_i \in R$ y $a_i=0$ para todos, excepto un número finito de valores de i.

Es decir, se define: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$Luego, el autor señala la importancia en estas expresiones del grado; por lo tanto, él lo define.

A continuación, Fraleigh define el conjunto R[x] como el conjunto de todos los polinomios con una indeterminada "x" y con coeficientes en R. Luego, él define las siguientes operaciones en R[x]. Sean F(x) = $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ y G(x) = $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ definiremos:

F(x) + G(x) = $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ $c_i = a_i + b_i$ y F(x) · G(x) = $\sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i$ donde $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Luego, él señala $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ no siempre es $\sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}$ La igualdad se cumple si R es conmutativo.

Posteriormente, nos presenta el Teorema 30.1, el conjunto R[x] de todos los polinomios con una indeterminada "x" con coeficientes en un anillo R, es un anillo bajo la suma y la multiplicación polinomial. Si R es conmutativo entonces R[x] también lo es y, si R tiene unitario 1 entonces 1 también es unitario en R[x].

Aquí, se desarrollan ejemplos:

1. En $Z_2[x]$ tenemos $(x + 1)^2 = x^2 + 1$
   Dado que: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Pero, en $Z_2[x]$ tenemos que $2x = 0$
2. En $Z_2[x]$ tenemos $(x + 1) + (x + 1) = 0$
   Algebraicamente $(x + 1) + (x + 1) = 2x + 2$. Pero, en $Z_2[x]$ es cero.

Posteriormente, Fraleigh señala el Teorema de Homomorfismo de evaluación: Sea F un subcampo de un campo E, α elemento cualquiera de E, sea x una indeterminada. La transformación $T_\alpha: F[x] \longrightarrow E$ definida como:

$$(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)\, T_\alpha = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\, \alpha^n$$

Para $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in F[x]$ es un homomorfismo de F[x] en E.

Un ejemplo es el siguiente: $(x^2 + x - 6)\, T_2 = 2^2 + 2 - 6 = 0$.

El autor señala que el polinomio $x^2 + x - 6$ pertenece al Kernel de T_2. En esta afirmación, él utiliza el homomorfismo de evaluación con el objetivo de producir un conocimiento diferente. Fraleigh evidencia la importancia de este nuevo conocimiento señalándolo como un **nuevo enfoque**, que es obtenido cuando se encuentran los ceros de un polinomio.

Definición: Sea F un subcampo de un campo E y sea α un elemento de E.

Sea $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ en F[x] y sea $T_\alpha: F[x] \longrightarrow E$ el Homomorfismo de evaluación del teorema anterior, denotemos: $(f(x))\, T_\alpha = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\, \alpha^n$

Si f (α) = 0, entonces α es un **cero de** f(x), Un ejemplo desarrollado es el siguiente:

Encontrar los ceros de $x^2 + x - 6$ en los reales.

Finalmente, el capítulo termina con una lista de ejercicios, algunos son los siguientes:

1.- Sea $F = E = Z_7$ en el teorema anterior. Evalúese lo siguiente para el homomorfismo de evaluación indicado $T_\alpha: Z_7 \longrightarrow Z_7$

a) $(x^2 + 3)\, T_2$

b) $[(x^4 + 2x)(x^3 - 3x^2 + 3)]\, T_3$

c) $(2x^3 - x^2 + 3x + 2)\, T_2$

2.- Encuéntrese todos los ceros en Z_5 de $(x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x) \in Z_5[x]$

III.2 Consideraciones matemáticas respecto al objeto matemático en estudio.

En referencia a nuestro estudio, podemos destacar lo siguiente según Fraleigh:

1.- La matemática pura define sus objetos y sus operaciones sin confusiones.

2.- La matemática formaliza el traspaso de propiedades, en particular, de los elementos del conjunto R al nuevo conjunto R[x].

3.- El autor presenta los nuevos conocimientos realizando ejemplos, actividades y ejercicios en conjuntos finitos.

4.- Se individualiza la operación "evaluar", mediante la definición de un homomorfismo de evaluación.

5.- Respecto a la actividad de evaluar, la matemática pura no se limita a la aplicación del homomorfismo de evaluación, mediante una aplicación de la función anterior se crea una nueva actividad. Fraleigh, lo destaca como un nuevo enfoque.

6.- Fraleigh caracteriza su quehacer en el marco algebraico

III.3 La matemática escolar

Los conocimientos matemáticos en juego de nuestro estudio, son: las operaciones aritméticas, la representación de una expresión algebraica, el reemplazar y evaluar expresiones, problemas con ecuaciones de primer grado.

La matemática escolar aplica los conocimientos anteriores en distintos marcos matemáticos, esta aplicación se refiere a la representación de medidas de lados, ángulos, etc. la definición de fórmulas en la geometría, resolución de problemas de planteo, la representación de una cantidad, resolución de ecuaciones, la verificación de ecuaciones y la resolución de problemas de planteo.

El uso de la letra en el marco escolar tiene un inicio en el marco geométrico; esto es, mediante la representación de letras como lados, medidas, ángulos, etc. luego, se presentan expresiones algebraicas que definen las fórmulas de perímetro, área y volúmenes de figuras. La letra es habitual que represente objetos concretos; por lo tanto, la letra tiene un uso en los problemas. Por consiguiente, la letra pasa a un uso en el marco aritmético. Más adelante, la representación de las letras escapa a la representación de objetos. Es aquí, donde los programas de estudio aproximan el uso de la letra al álgebra. Pero, sin el énfasis necesario sobre la ruptura que existe.

En resumen, en la matemática escolar, el uso de la letra varía con los marcos matemáticos; más aún, la representación de la letra cumple distintas funciones; por consiguiente, el uso de la letra sufre en los cambios de marcos. Por todo lo anterior, esto explica que el uso de la letra tenga un grado de dificultad alto para los alumnos de este nivel.

Capítulo IV ASPECTOS INSTITUCIONALES EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

IV.1 ¿Cómo se aborda en los planes y programas de la Enseñanza Básica la expresión algebraica?

A continuación se presentan actividades que involucran una expresión algebraica en los planes y programas de Básica.

- En Sexto Básico:

Página 26: Primer caso: "De los $2.000 que tenían ahorrado en mayo ahora sólo tienen $500…Por ejemplo, en el primer caso para la pregunta ¿cuánto hemos gastado? se podría escribir: 2.000 - 500 = y también 2.000 - X = 500."

Aquí la expresión algebraica aparece mediante una ecuación, donde "x" representa la cantidad que se gastó. Sin embargo, la expresión algebraica no es necesaria para la resolución, ésta aparece impuesta al alumno.

Página 109: Después de dibujar rectángulos, se solicita a los estudiantes:

c) Registran sus resultados en una tabla como la siguiente:

	Perímetro	Area
Primer rectangulo		
Lado a = 1	6 cm	2 cm^2
Lado b = 2		
Segundo rectangulo		
Lado a = 2	12 cm	8 cm^2
Lado b = 4		
Tercer rectangulo		
Lado a = 3	18 cm	18 cm^2
Lado b = 6		

Aquí la actividad exige que los alumnos representen mediante letras una medida en centímetros, lo que es un objeto concreto.

Estas dos actividades muestran que en 6to año se está aún el marco aritmético.

- En Séptimo Básico:

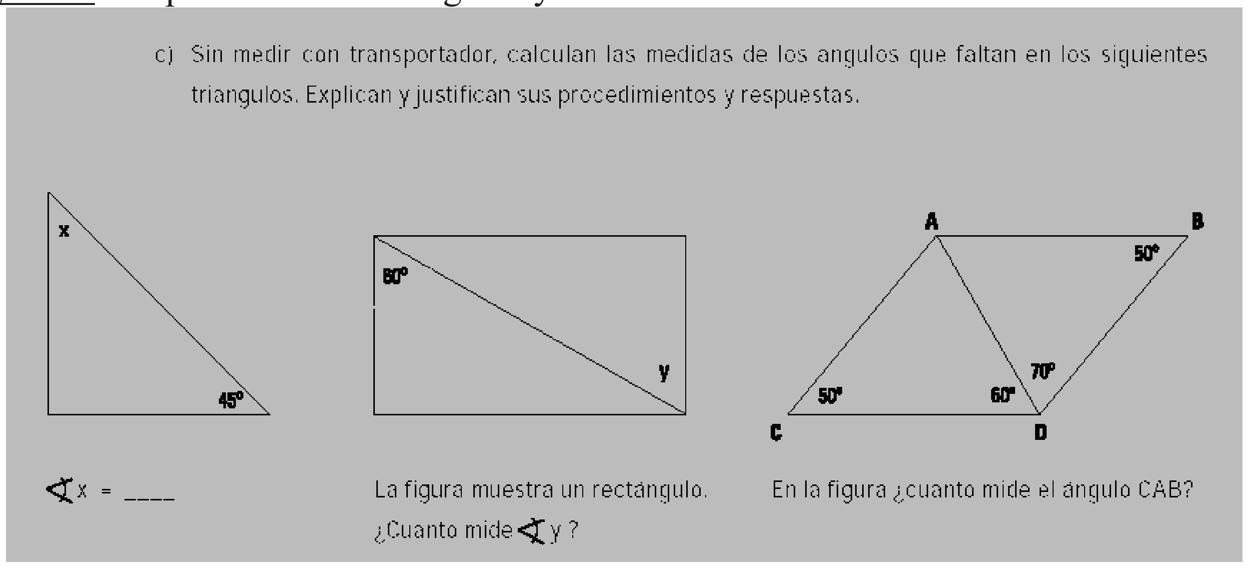
Página 37: La representación de UF, se señala:

c) *Margarita esta calculando cuanto debera pagar cada mes y durante 9 meses por un prestamo de consumo que, incluyendo los intereses, corresponde a 26.82 UF en total. Todas las cuotas deben ser del mismo valor.*
¿Cuanto es el monto aproximado de cada cuota mensual?

- Averiguan el valor de la UF en un dia determinado. Buscan estrategias de estimacion del cuociente correspondiente.
- Calculan el valor exacto de la cuota segun el valor de la UF de un día específico.
- Comparan el resultado exacto con las estimaciones realizadas anteriormente y responden si el valor aproximado es mayor o menor que el valor exacto.

Aquí la actividad corresponde a los números decimales, es recogida de la vida cotidiana, la representación de UF tiene una equivalencia en pesos, por lo tanto, representa a un objeto concreto. La UF no adquiere una representación de número.

<u>Página 59</u>: Representación de ángulos y vértices.

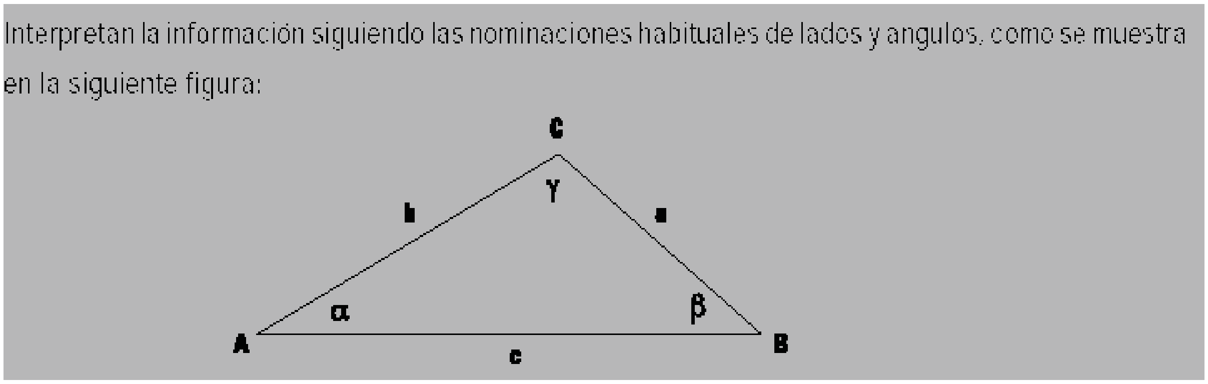


La representación de la letra es usada para representar ángulos y vértices, la letra representa objetos concretos.

<u>Página 62</u>: Representación de lados, vértices y ángulos.

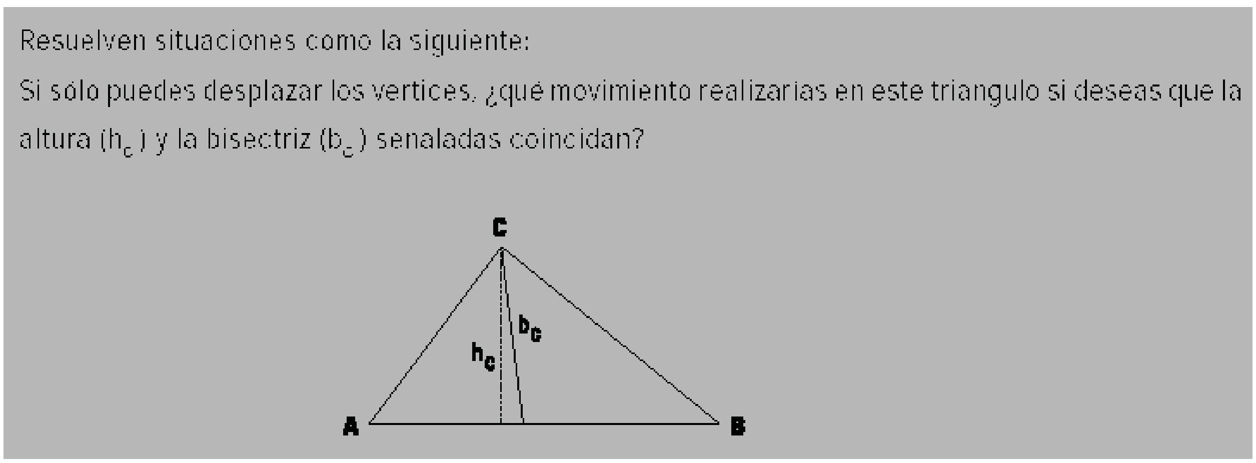
Organizados en grupos, construyen diferentes triángulos según condiciones como las siguientes.

Δ ABC, donde a = 3 cm, γ = 60°, b = 3 cm
Δ ABC, donde a = 5 cm, b = 5 cm, c = 5 cm
Δ ABC, donde α = 60°, c = 7 cm, β = 60°
Δ ABC, donde c = 3 cm, b = 90°, a = 3 cm
Δ ABC, donde c = 4 cm, b = 5 cm, c = 4 cm
Δ ABC, donde α = 25°, c = 3 cm, β = 25°
Δ ABC, donde a = 3 cm, γ = 45°, b = 4 cm
Δ ABC, donde a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm
Δ ABC, donde α = 20°, c = 4 cm, β = 110°



La representación de la letra se usa en: medidas de lados, vértices y ángulos, estas representaciones corresponden a objetos concretos.

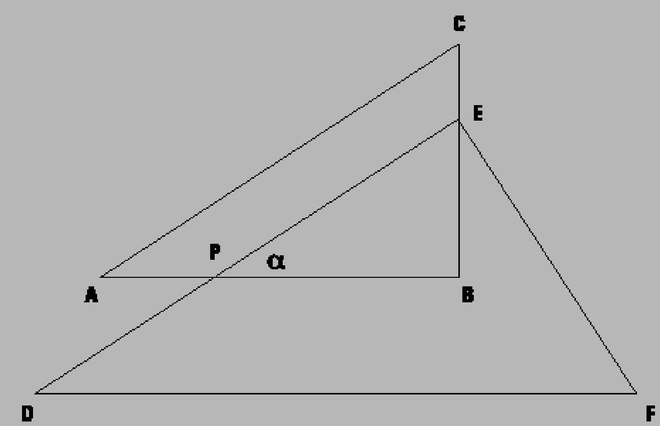
Página 67: Representación de: vértice, altura y una bisectriz.



La representación de la letra es un objeto concreto, en un triángulo se usan letras para representar la altura, bisectriz y los vértices.

Página 70: Representan un ángulo y vértices en un triángulo.

b) ABC y DEF son triangulos rectángulos en B y en E, respectivamente; angulo BEF = 30°. Sin medir los ángulos, encuentra el valor del angulo α y explica por que llegas a ese resultado.



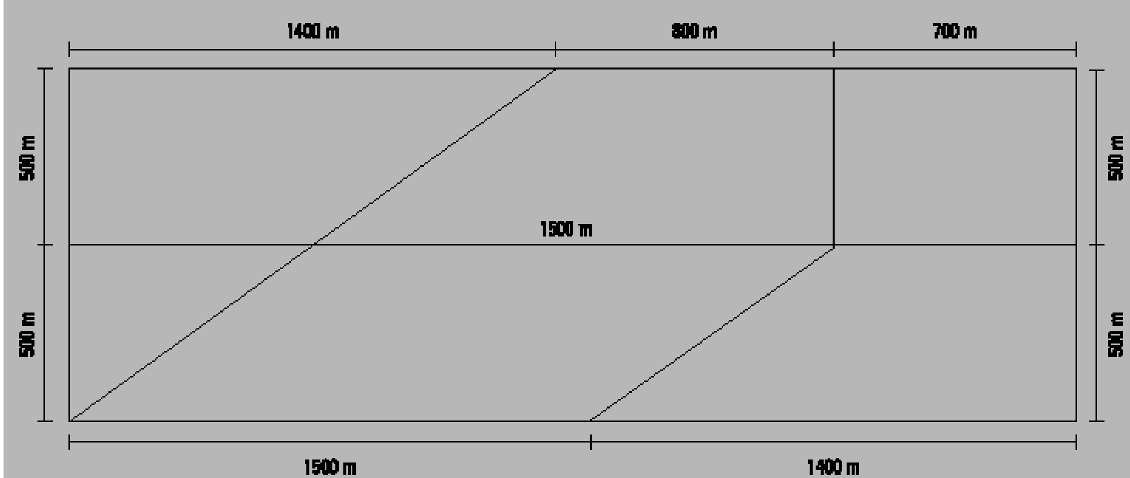
La letra representa un objeto concreto.

<u>Página 72</u>: Representación de una medida.

Varios campesinos desean vender sus terrenos colindantes, que tienen formas muy curiosas, y quieren averiguar cual de las parcelas puede tener el mayor precio considerando que han acordado cobrar el mismo precio por m²

Si este es un plano esquematico del terreno con cada una de las parcelas.

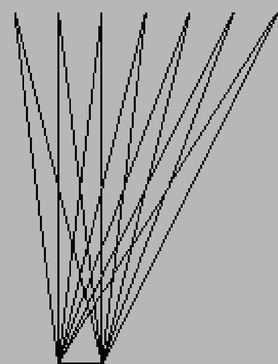
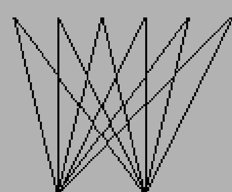
¿cual es la conclusión a la que llegan los campesinos?



La letra se usa para representar la unidad de medida: metro y metro cuadrado, ambas son objetos concretos.

<u>Página 76</u>: Representación de unidades de medidas.

- Construyen una tabla como la siguiente para organizar los datos y los resultados obtenidos al calcular el area de los triangulos pertenecientes a cada una de las familias.

Base	Altura	Area	Dibujo de los triángulos	Conclusiones
1 u *	8 u	4 u^2		Todos estos triángulos tienen igual área
2 u	4 u	4 u^2		
8 u	1 u			
4 u	2 u			

*Nota: u significa unidades y $\mathbf{u^2}$ se refiere a unidades cuadradas.

La letra es una unidad de medida, nuevamente un objeto.

Hasta aquí las letras representan objetos; por lo tanto, estas actividades se pueden resolver con el marco aritmético, no se necesitan las expresiones algebraicas.

<u>Página 77</u>: La representación de la letra como un área.

Investigan las familias de triángulos cuya area sea igual, apoyandose del geoplano u otro material que permita una representación.

Si el área de un triángulo es igual a, por ejemplo, 36 cm^2. ¿Se puede afirmar que todos los triángulos cuyo producto entre la longitud de la base y la longitud de la altura es igual a 72 pertenecen a la misma familia de triangulos (o sea, que tienen, en este caso area igual a 36 cm^2)?

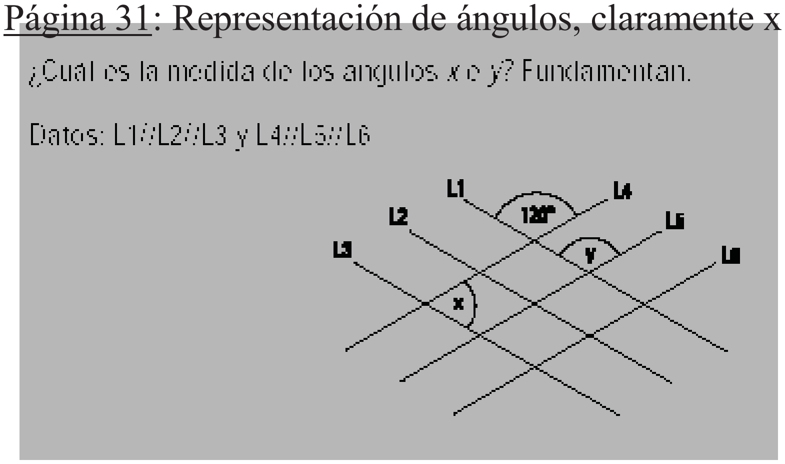
Escriben una fórmula general para el caso de triángulos cuya área sea igual a "**n** cm^2".

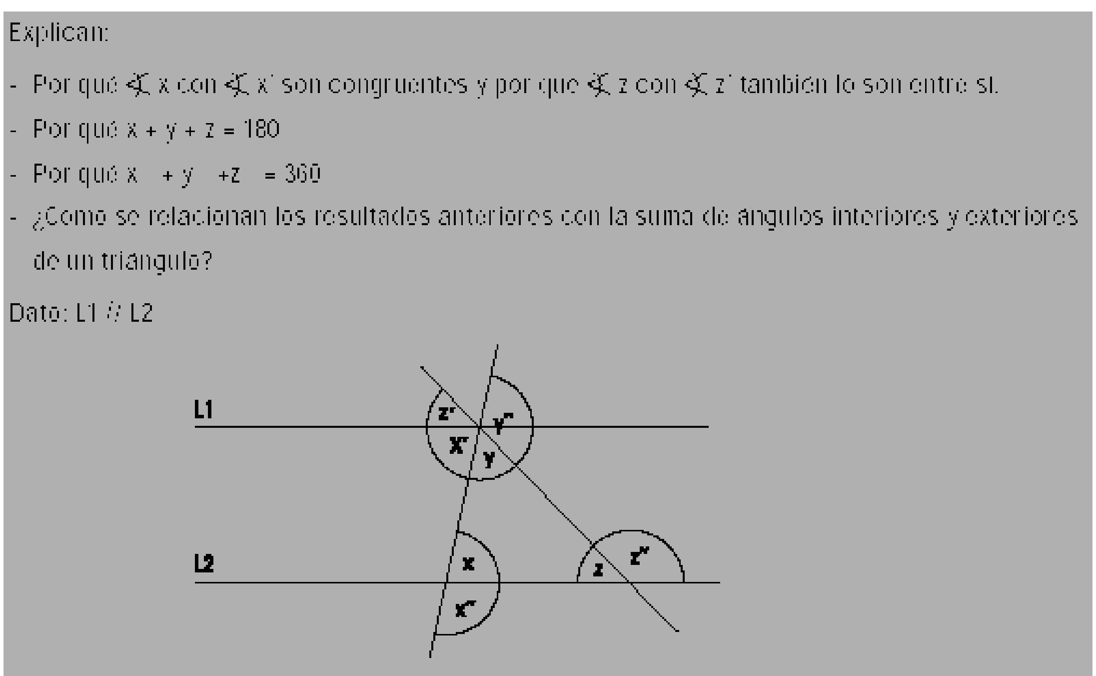
En esta actividad, el alumno debe descubrir la fórmula de los triángulos cuya área sea **n** cm^2. Esta situación, exige que el alumno descubra cuando la base del triángulo por su altura es 2**n** cm^2. Esta actividad presenta las siguientes dificultades:

1. El conocimiento de que el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo.
2. Descubrir que los lados del rectángulo son: la base del triángulo y su altura.
3. La fórmula requiere un trabajo previo de los conocimientos anteriores.
4. La representación de **n** se complica por la expresión 2**n.**

- En Octavo Básico:

Página 31: Representación de ángulos, claramente x o y representan objetos.





En la misma página 31, la letra representa la medida en grados de un ángulo. La actividad de representación y medida de ángulos es un uso habitual dado a la letra, pero son representaciones de objetos.

Página 35: Representación de una figura

b) Repiten lo anterior partiendo de un polígono de 3 lados y aumentando sucesivamente 1 lado del polígono hasta que se tengan suficientes casos como para establecer conclusiones.

Completan una tabla ordenadamente, de manera de relacionar la cantidad de triángulos en los que se divide cada polígono con la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono.

Polígono	Nº de lados	Nº de triángulos en los que se subdividió	Suma de los angulos interiores del polígono
Triangulo	3	1	
Cuadrilátero	4	2	
Pentágono	5	3	

- Si observan las columnas referidas al N de lados del polígono y el N de triángulos obtenidos al trazar las diagonales desde un mismo vértice:
  - ¿Qué relacion numerica existe entre los números de ambas columnas?
  - Si el polígono tiene un número cualquiera de lados, que lo podemos expresar con la letra "n", ¿que expresión representaria el número de triángulos que se forman en ese polígono de *n* lados? ¿por qué?

El desarrollo de esta actividad requiere de la comprensión de una tabla y de un polígono. Además, la formulación de polígono de **n** lados puede generar confusión en los alumnos, el desarrollo de esta actividad exige un análisis algebraico de la tabla, ¿Qué sucede si un alumno responde la pregunta: en número de lados: n+2, tiene n triángulos?

En el marco de la geometría el uso de la letra es muy común para definir expresiones, en este sentido, la representación de objetos y medidas caracterizan el uso de la letra.

<u>Página 41</u>: La definición del símbolo π

A continuación se presenta un ejemplo de una tabla y los posibles valores obtenidos después del redondeo.

Ruedas	Distancia que recorre en 1 vuelta	Diámetro de la rueda	Cuociente
1°	62	20 cm	3,1
2°	93	30 cm	3,1
3°	124	40 cm	3,1

Aquí se define el número π como un cuociente entre dos medidas.

<u>Página 44</u>: La determinación de la fórmula de área de un polígono.

Una tabla como la siguiente puede ayudar a ordenar y resumir la información para así obtener una fórmula general.

Polígono regular	Datos necesarios	Fórmula
△	b y h del triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$
□	b y h del cuadrado	$b \cdot h$
⬠	lado o base del polígono y h del triángulo	$5\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = \frac{P \cdot h}{2}$

Las letras representan longitudes. En la fórmula de la tercera fila, “b” representa la “base de la figura”, “h” su altura. En $5\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = \frac{P \cdot h}{2}$ interpretamos lo siguiente:

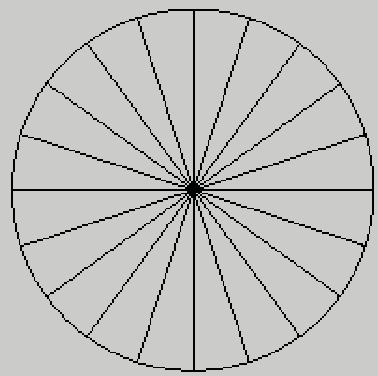
1.- La expresión $\frac{b \cdot h}{2}$ representa el área de un polígono de tres lados, que es un triángulo como el representado en la figura. Cinco veces la expresión anterior es igual a la mitad del producto entre el perímetro de la figura (P) con la altura.

2.- En la tabla aparece una relación de igualdad, las expresiones de los extremos ¿representan a la fórmula buscada? Nos inquieta, ¿qué marco matemático permite que los alumnos se den cuenta de la igualdad entre las expresiones?

3.- Respecto a la letra P, ¿qué indicaciones tienen los alumnos de lo que representa?

4.- El objetivo de la actividad, ¿se encuentra en que el alumno determine una de las dos expresiones que están a los extremos del signo igual? o ¿es la representación “resumida” en una tabla del cálculo de áreas de polígonos?

<u>Página 45</u>: La definición del área de la circunferencia.



Luego es fácil establecer que si aplican la fórmula tendrían: $\frac{P \cdot h}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$. P corresponde al perímetro de la circunferencia y h es el radio de esta. Al simplificar se obtiene: $\pi \cdot r^2$ que corresponde al area de la circunferencia.

En esta actividad, la letra representa longitudes. Al igual que en la actividad anterior, se entrega una aplicación de la fórmula mediante una “ecuación”; pero, en la actividad se define la fórmula del área de la circunferencia: $\pi \cdot r^2$.

<u>Páginas 78</u>: Representación de pesos y porcentaje.

2. Analizan facturas como la siguiente:

Don Pantaleón
Mercaderías Varias
Fecha: **Factura N° 1234**

Precio neto	$ 250.000
IVA	$ 45.000
Total	$ 295.000

¿Sobre qué cantidad se ha calculado el 18%?

¿Como se puede obtener el precio final directamente? (es decir, como obtener $295.000 sin calcular primero el 18% y luego sumarlo).

¿Por qué si se calcula el 18% del precio total y se le descuenta NO se obtiene $250.000?

Si el precio del un artículo sin IVA (precio neto) fuera igual a $100.000 ¿Cuanto costaria con el IVA incluido?

Como en el ejemplo anterior, con este ejemplo se trata de orientar a los alumnos y alumnas para que obtengan conclusiones generales como:

A + B% de A = C

C - B% de C NO es igual a A

La letra representa pesos y un porcentaje. Se espera que los alumnos determinen una ecuación, fórmula que representa la conclusión esperada.

<u>Página 94</u>: La letra representa una escala de temperatura

Analizan las siguientes situaciones:

La temperatura maxima de hoy fue de 28,6° C.

La temperatura maxima de hoy en Miami fue de 45° F.

En esta actividad, la letra representa una escala de temperatura.

<u>Página 109</u>: La letra representa un número.

Buscan estrategias para resolver problemas como los siguientes:

Un halcon posado en la rama de un arbol observa el paso de una bandada de palomas y les dice: "¡Adios, cien palomas!", saludo al que las palomas responden: "se equivoca, señor halcon, no somos cien. Nosotras, mas otras tantas como nosotras, mas la mitad, mas la cuarta parte, mas Ud., señor halcon, somos cien". ¿Cuantas palomas habia en la bandada?

- Intercambian resultados y comparan estrategias.
- Comentan las dificultades que se les presentaron en el trabajo de encontrar el valor desconocido.
- Concluyen en la necesidad de utilizar una letra para representar los terminos desconocidos y poder manipular las cantidades involucradas en el problema.

En esta actividad, señalaremos primero que existen problemas de redacción, en el texto: "más la mitad, más la cuarta parte" aquí, no se especifica el total. Además, si esta actividad es el primer acercamiento de la necesidad de representar con letras cantidades desconocidas, lo que es de un alto grado de dificultad; entonces, para la realización de una actividad como un primer acercamiento, nos preguntamos ¿cuál será la dificultad apropiada para representar con una letra una cantidad desconocida? A nuestro parecer, consideramos que la actividad tiene una alta dificultad.

La respuesta del problema, se obtiene planteando y resolviendo la ecuación: $X + X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + 1 = 100$ con x: número de palomas.

Página 110: Utilizan la letra X para interpretar expresiones algebraicas simples.

a) Leen los siguientes enunciados verbales en contextos numericos y geometricos generan expresiones algebraicas simples o interpretan el significado de otras relativas a ese contexto.

- *x* representa la longitud de un trazo en cm:

  ¿Como expreso el doble de la longitud del trazo? ¿Y que el trazo aumento 5 cm?

  ¿Que significa (x + 2) cm? ¿ y (x - 3) cm?, ¿y (2x+3) cm?

- *x* representa el valor de un libro:

  ¿Como se expresa la mitad del precio del libro? ¿Y como represento 25% del valor del libro?

  ¿Que significa 3x? ¿Que significa x + x + x?: ¿$\frac{3}{4}x$?

Aquí es necesario el uso de la letra, el objetivo es interpretar en expresiones algebraicas frases verbales. Es una traducción de algunas propiedades aritméticas al marco algebraico, la letra representa "cantidad" en el contexto concreto

Página 110: Interpretan y evalúan expresiones algebraicas.

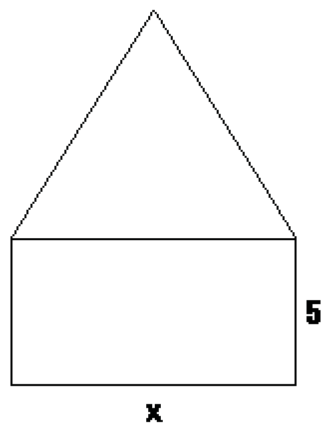
b) Leen expresiones algebraicas simples las interpretan en relacion al contexto.

- *y* representa el dinero en pesos que invierte una persona y la expresion (3y + 8) pesos la cantidad total obtenida luego de realizar el negocio. ¿Que significa esta expresion en pesos respecto de la cantidad de dinero invertida *y*?, ¿cuanto dinero representa la expresion (3y + 8) cuando y = 1, o cuando y = 3?

Aquí nuevamente es una traducción del lenguaje verbal a lenguaje con letras que representan pesos.

<u>Página 111</u>: Representación de una longitud.

En la figura que se muestra a continuacion, el triangulo es equilatero. ¿Cual es el valor de x de manera que el perimetro del triangulo sea el mismo que el perimetro del rectangulo? ¿ Cual es el perimetro del triangulo?



En esta actividad se impone la representación de la letra x, ¿Por qué no se usa otra letra? La letra representa una longitud, el objetivo es plantear una ecuación, que es: $3x = 2x + 10$. Después de haber encontrado el valor de x, se exige determinar 3x.

<u>Página 112</u>: Representación de una nota.

Leen cada problema y siguen los pasos que se sugieren en cada uno para plantear la ecuación que de respuesta al problema. Interpretan el resultado de ella y responden a lo pedido en la situación.

Marisol esta calculando la nota que necesita para obtener de promedio un 6.3 y asi eximirse del examen final. Solo le falta una nota para cerrar el promedio y sus notas hasta el momento son: 5.8, 6.5, 6.2, 6.8, 6.7, 5.7

¿Cual es la nota que necesita para obtener el promedio deseado?

- Determinan cuál es la incognita del problema y recuerdan como se obtiene el promedio, observan que el promedio final es de 7 notas. de la cual la ultima es la incognita.
- Escriben la ecuación determinando sus dos miembros.
- Reducen los términos que se puedan, en este caso sumar las notas conocidas.
- Aplican las propiedades de las operaciones de manera de despejar la *x*.
- Resuelven las operaciones en cada miembro hasta obtener al valor de *x*.
- Responden a la pregunta del problema.

En esta actividad, se impone la representación de la letra x, que representa la nota que cumple los requerimientos del problema, el uso de la letra x es requerido en la ecuación que resuelve el problema. En la situación planteada, falta precisar si el promedio se aproxima, como es en realidad, pero se propone:

La ecuación que puede presentarse: $(5.8 + 6.5 + 6.2 + 6.8 + 6.7 + 5.7 + x) : 7 = 6.3$

<u>Páginas 114</u>: Planteo de problemas de enunciado.

b) Leen las situaciones verbales de la columna A y las ecuaciones de la columna B. Conversan con su grupo y determinan la ecuacion que sirve para encontrar la respuesta a cada una. Hay problemas que se pueden resolver por medio de una misma ecuacion y puede haber situaciones que no tengan una ecuación que les corresponda.

Columna A	Columna B
1. ¿Cual es la edad de Felipe si se sabe que el doble de su edad mas 5 anos es lo mismo que 31 anos?	
2. Jose tiene 2 sobres de laminas de 5 en cada uno, mas algunas sueltas. Si en total se juntan 31 laminas, ¿cuántas corresponden a laminas sueltas?	$2x + 5 = 31$
3. La mama de una familia recibe un premio especial en dinero y decide regalar el 31% de este distribuyendolo asi: a cada uno de sus 2 hijos les entrega el 5% y a su marido el resto. ¿Que % del dinero destinado al regalo recibe su marido?	$31 - 5 = x$
4. Fernanda obtuvo 31 puntos en su prueba. Al revisar el puntaje lo unico que logra saber es que por cada una de 5 preguntas obtiene 2 puntos, pero desconoce cuantos puntos alcanzo en el item de desarrollo. ¿Cuanto vale ese item?	$31 = (2 \cdot 5) + x$
5. Federico logro vender 31 boletos de rifa, que corresponden a 2 talonarios completos y 5 boletos mas. ¿Cuantos boletos traia cada talonario?	

Aquí se impone el uso de la letra x, el uso de la letra corresponde a la representación de la incógnita de los enunciados, la ecuación puede ser la representación de uno de los enunciados.

<u>Página 115</u>: Verifican la solución de una ecuación.

c) Para cada uno de los siguientes casos, indican si la frase es verdadera o falsa, explican por que:

- Si $x - 2 = 25$ entonces $x = 23$
- Si $2x = x + 5$ entonces $x = 5$
- Si $7x = 14$ entonces $x = 2$
- Si $-7x = 0$ entonces $x = 0$
- $-x + 5 = 11$ entonces $x = 6$

Esta actividad tiene dos métodos de solución: los alumnos reemplazan y verifican si se cumple la ecuación o resuelven la ecuación y comparan la solución encontrada. Esta actividad corresponde al marco algebraico.

<u>Página 117</u>: Determinación de una expresión algebraica

> La letra y representa el precio por segundo de un teléfono en tarifa baja y x el precio por segundo en horario de tarifa alta. Representa por medio de una expresión algebraica:
> - el teléfono se usó 1500 segundos en horario de precio bajo:
> - el precio por segundo de tarifa alta equivale a 5 veces el precio por tarifa baja:
> - el precio de un minuto en tarifa baja es un quinto del precio de 1 minuto en horario de tarifa alta.

Aquí los alumnos determinan una expresión algebraica usando las letras definidas. En esta actividad no existe la necesidad de representar con una letra porque ésta se da.

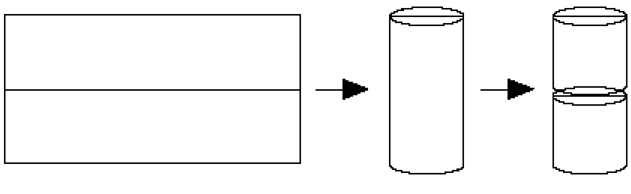
<u>Página 162</u>: fórmula del volumen del cubo y de una pirámide recta.

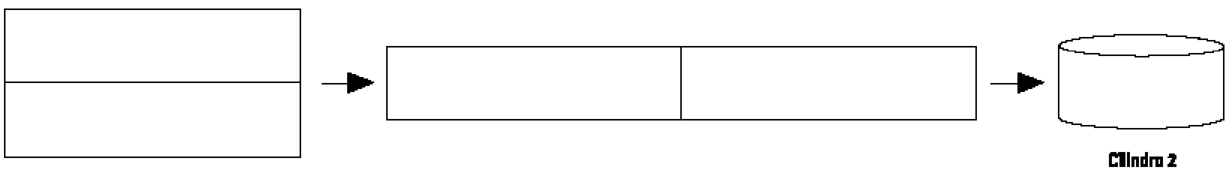
> En este caso, se pretende que a partir de la fórmula del volumen del cubo de área basal a^2 y altura a, determinen el volumen de la pirámide recta de igual área basal y altura, relacionándolo con la fórmula obtenida en el punto anterior.
>
> V(cubo) $= a^3 = a^2 \bullet a$ (área basal por altura) V(pirámide) $= a^2 \bullet a \bullet \frac{1}{3}$
>
> De la misma manera determinan una fórmula mas general para el volumen de una pirámide recta. En el caso de una pirámide de base cuadrada y altura h, se obtendría:
>
> V(prisma) $= a^2 \bullet h$ V(pirámide) $= a^2 \bullet h \bullet \frac{1}{3}$.

Aquí la letra representa la arista de un cubo. Los alumnos deben aplicar propiedades de potencias. Respecto a la formulación de la actividad, nos inquieta la afirmación ¿cubo de área basal a^2? Al parecer, confunden la fórmula del prisma, el paralelepípedo.

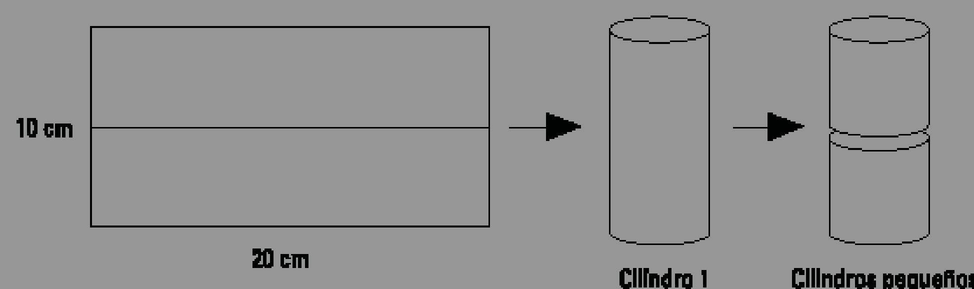
<u>Páginas 169 – 170 – 171</u>: Uso algebraico de la letra.

Dadas dos hojas de papel, cuyo largo sea el doble, el triple, el cuadruple, etc., del ancho, se cortan en un mismo sentido para formar cilindros. Con una hoja de papel se obtienen dos cilindros de igual altura, y con la otra se obtiene un cilindro cuyo perimetro basal es el doble del perimetro basal de cada uno de los cilindros que se generaron anteriormente, tal como muestra la figura siguiente:





Verificación numérica:



$P(\text{cara basal}) = 20 = 2\,\pi \bullet r$, entonces $r = \dfrac{10}{\pi}$

$A(\text{cara basal}) = \pi \bullet r^2 = \dfrac{100}{\pi}$

$V(\text{un cilindro pequeño}) = h \bullet A(\text{cara basal}) = 5 \bullet \dfrac{100}{\pi} = \dfrac{500}{\pi}$

$V(\text{cilindro 1}) = \dfrac{1000}{\pi}$

Es interesante también verificar la conjetura con un analisis numérico, utilizando las formulas de área, perímetro y volumen. Según sea el nivel de los estudiantes, es posible realizar una verificacion algebraica. A continuación se presenta un ejemplo de verificación numérica y otra algebraica:

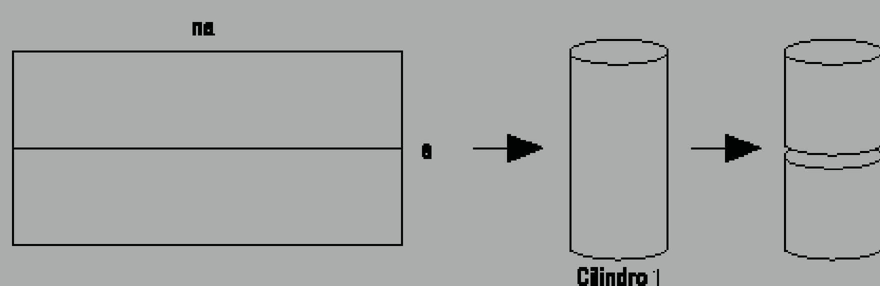
P(cara basal) = 40 = 2 $\pi \bullet r$, entonces $r = \frac{20}{\pi}$

A(cara basal) = $\pi \bullet r^2 = \frac{400}{\pi}$

V(cilindro 2) = h • A(cara basal) = $5 \bullet \frac{400}{\pi} = \frac{2000}{\pi}$

Por lo tanto, el volumen del cilindro 2 es el doble del volumen del cilindro 1.

Verificación algebraica:

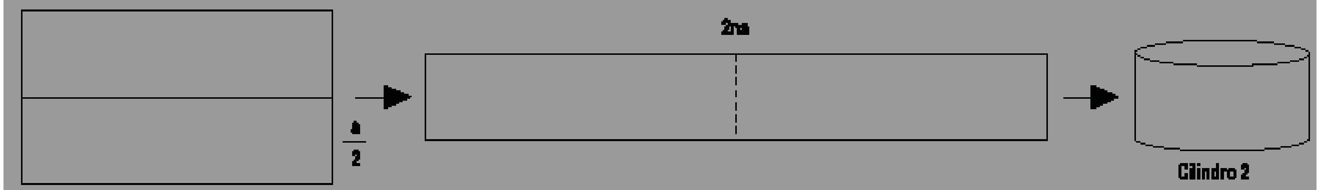


P(cara basal) = na = 2 $\pi \bullet r$, entonces $r = \frac{na}{2\pi}$

A(cara basal) = $\pi \bullet r^2 = \frac{\pi n^2 a^2}{4\pi^2} = \frac{n^2 a^2}{4\pi}$

V(un cilindro pequeño) = h • A(cara basal) = $\frac{n^2 a^2}{4\pi} \bullet \frac{a}{2} = \frac{n^2 a^3}{8\pi}$

V(cilindro 1) = $\frac{n^2 a^2}{4\pi} \bullet \frac{a}{2} \bullet 2 = \frac{n^2 a^3}{4\pi}$



$P(\text{cara basal}) = 2na = 2\pi \cdot r$, entonces $r = \dfrac{2na}{2\pi} = \dfrac{na}{\pi}$

$A(\text{cara basal}) = \pi \cdot r^2 = \pi\left(\dfrac{na}{\pi}\right)^2 = \dfrac{n^2a^2}{\pi}$

$V(\text{cilindro } 2) = h \cdot A(\text{cara basal}) = \dfrac{n^2a^2}{\pi} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{n^2a^3}{2\pi}$

Por lo tanto el volumen del cilindro 2 es el doble del volumen del cilindro 1.

En esta actividad, el uso de la letra se encuentra en el marco algebraico, el alumno debe demostrar una relación entre expresiones algebraicas. Esta actividad, requiere además, simplificar y multiplicar expresiones algebraicas, multiplicar potencias con igual base, igualar expresiones algebraicas, despejar una incógnita, etc. Es decir, conceptos propios del marco algebraico. Es interesante destacar la facilidad de realizar pasajes entre una expresión algebraica con propiedades de las figuras. En este sentido, para los alumnos, ¿se facilita el aprendizaje de la expresión algebraica mediante el empleo de las figuras geométricas?

En resumen, los alumnos en los cursos de Básica han evaluado expresiones algebraicas, especialmente mediante aplicaciones en la geometría y en la resolución de problemas en contextos concretos.

IV.2 Estudio de las actividades propuestas en los Programas de Educación Básica

Las expresiones algebraicas han ido asociadas con actividades de la Geometría; por lo tanto, estudiaremos las actividades ya mencionadas a la luz del marco teórico de nuestra investigación.

1.- Se observa que las actividades propuestas no crean la necesidad de representación de la letra, además, tienen un grado de dificultad alto.

2.- Al parecer, no existe una actividad de tratamiento de representación del área de un círculo, por ejemplo: dada una figura, calcular su área y determinar el área circular equivalente mediante la fórmula del área del círculo. Las actividades presentadas en el programa priorizan el aprendizaje y aplicación de una fórmula. El ejemplo propuesto realiza una actividad de conversión. Duval señala que este tipo de actividad no tiene la debida importancia o simplemente se dejan de lado.

3.- La amplitud de los contextos de la actividad evaluar desconcierta, en distintas figuras se determina perímetros, áreas, volúmenes, etc. El planteo de ecuaciones es otro eje, los problemas de planteo, intereses, etc. En cambio, en la matemática pura, la actividad de evaluar en los anillos de polinomios esta definida para un tipo de expresiones; además, la actividad esta orientada en la determinación de los ceros de un polinomio.

4.- La letra tiene un uso en distintos marcos matemáticos, puede ser una representación en la geometría, una fórmula en el álgebra, un objeto concreto en la aritmética; además, en los registros del lenguaje natural y algebraico. El uso variado en distintos marcos de la letra sin los énfasis necesarios puede crear una dificultad para darle un significado.

Capítulo V Metodología

La metodología de nuestra investigación es cualitativa, basada en dos cuestionarios. Nosotros consideramos el estudio de los cuestionarios como dos etapas de nuestra investigación. Con el primer cuestionario recogemos datos, después de haber realizado un estudio a la luz de los marcos teóricos, los resultados obtenidos nos producen nuevas conjeturas. Por lo tanto, consideramos importante la realización de un nuevo estudio del uso de la letra; donde, tomaremos en cuenta la intervención de los distintos marcos matemáticos y los distintos registros que su uso conlleva. En la realización del segundo cuestionario, consideramos importante el uso del marco geométrico.

V.1 Cuestionario I

Objetivos

1. Constatar que algunos alumnos de primero medio no logran evaluar con éxito una expresión algebraica sencilla.
2. Determinar algunos fenómenos que cometen los alumnos cuando evalúan una expresión algebraica.
3. Comparar resultados de una actividad similar dada en registro verbal con otra en registro algebraico.
4. Formular un estudio en los fenómenos encontrados, basado en los marcos aritmético, algebraico y la teoría de registros.

Estructura del cuestionario

a) Constituido por siete preguntas[25]:

En las preguntas: 1 – 2 – 3: Preguntas con respuesta de selección múltiple.

En las preguntas: 4–5–6: Preguntas de respuesta abierta.

En la pregunta 7: Problema con enunciado en lengua materna, sin expresión algebraica y de respuesta abierta.

b) Validación del instrumento: El instrumento fue validado en un liceo municipal ubicado en la ciudad de Illapel, IV región, con el objetivo de indagar si las preguntas eran entendidas.

---

[25] Ver en anexo, página 71 Se presenta el cuestionario I.

V.2 Presentación de las preguntas del cuestionario I y sus objetivos

Pregunta 1.- Determinar el valor de la expresión **2a** cuando **a=4** ¿Se obtiene **8a**?
Marque con una "X" en la alternativa correcta.
Verdadero (......)
Falso (.......)

El objetivo es determinar si el alumno conserva la letra en su respuesta.

Pregunta 2.- Calcule la expresión **2p + 4** con **p = 3** ¿Se obtiene como resultado?

a) 8
b) 14p
c) 14
d) 10
e) 10p

Pregunta 3.- Determine la expresión **2q – 3** con **q = 4** ¿Se obtiene como resultado?

a) 2q
b) 2
c) 5q
d) 5
e) ninguna de las anteriores (n.a.)

Estas dos preguntas tienen un objetivo similar: evidenciar si los alumnos reemplazan la letra; luego, si realizan con éxito las operaciones en los números naturales y si conservan la letra. Estas preguntas tienen diferencias, la primera requiere una suma y la otra una resta.

Pregunta 4.- Si **a = 2** evalúe la expresión **3a + 1. Explica cómo encontraste tu respuesta**

Al ser una pregunta de respuesta abierta, el objetivo es explorar el desarrollo de los alumnos en los números naturales, si ellos reemplazan la letra. Además;

observar, si en el desarrollo de los alumnos, es visible hallar evidencias de sus errores y estudiar la dificultad de la suma.

Pregunta 5.- Si **a = 2** evalúe la expresión **5 – 4a. Explica cómo encontraste tu respuesta**

El objetivo de la pregunta es explorar el desarrollo de los alumnos en los números enteros. Se espera que los alumnos reemplacen la letra y que realicen la resta, obteniendo como resultado es un número negativo. Aquí, esperamos encontrar evidencias del proceso que inciden en su fracaso.

Pregunta 6.- Determine el valor de la expresión **3a+1+ 2a**, cuando **a = 5. Explica cómo encontraste tu respuesta.**

El objetivo es explorar si los alumnos tienen dificultades cuando se les exige evaluar un trinomio, ellos deben reemplazar dos veces la letra y realizar operaciones aritméticas en los números naturales.

Pregunta 7.- Los caramelos que tiene Jorge son el doble de los caramelos que tiene Efraín, más un caramelo.
¿Cuántos caramelos tiene Jorge, si Efraín tiene 4 caramelos?
¿Cómo obtuviste tu respuesta?

El objetivo es constatar si los alumnos resuelven con éxito un problema de planteo en lengua materna. Consideramos, el problema enunciado del tiene una similitud con las actividades anteriores.

V.3 Análisis a Priori del cuestionario I

Pregunta 1.- La respuesta experta corresponde a la alternativa falsa, que es $2 \cdot 4 = 8$ y no "8a". Para responder correctamente, los alumnos requieren conocimientos de la representación algebraica, la sustitución y multiplicación. Se supone que los alumnos responderán verdadero, puesto que esta alternativa conserva la letra. Pues, los alumnos no reconocen un objeto del marco algebraico, ellos creen que están trabajando en el marco aritmético; por lo tanto, pueden tener un significado concreto del uso de la letra.

Pregunta 2.- La respuesta experta es obtenida mediante el desarrollo:

$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$, alternativa D.

Se espera que los alumnos sustituyan la letra, realicen una multiplicación y una suma. Finalmente, ellos deben seleccionar la alternativa correcta.

Pero, podría esperarse respuestas como las siguientes:

$2 \cdot 3p + 4 = 6p + 4 = 10p$, alternativa E. Aquí, se evidencia un significado concreto de la letra.

$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$, alternativa C. Un factor puede encontrarse en las dificultades del aprendizaje de la operatoria.

Pregunta 3.- La respuesta experta es obtenida mediante el desarrollo:

$2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$, alternativa D.

Los alumnos deben sustituir, realizar la multiplicación y la resta; después, ellos deben seleccionar la alternativa correcta.

Pero podría esperarse las siguientes respuestas:

$2 \cdot 4q - 3 = 8q - 3 = 5q$, alternativa C o $2 \cdot (4-3) = 2 \cdot 1 = 2$, alternativa B.

Ambos resultados erróneos pudiesen tener las mismas dificultades de la pregunta anterior.

Pregunta 4.- Esta es una pregunta abierta, la respuesta experta puede ser obtenida con el desarrollo: $3{\cdot}2 + 1 = 6 + 1 = 7$. Los conocimientos que requieren los alumnos son similares a los de la pregunta 2.

Podrían esperarse las siguientes respuestas:

$3{\cdot}2a + 1 = 6a + 1 = 7a$ ó bien $3{\cdot}(2 + 1) = 3{\cdot}3 = 6$. Aquí, ambas respuestas erróneas pudiesen corresponder con las dificultades mencionadas en las preguntas anteriores.

Pregunta 5.- La respuesta experta a esta pregunta abierta puede ser obtenida mediante el desarrollo: $5 - 4{\cdot}2 = 5 – 8 = -3$.

Los alumnos deben de sustituir la letra, realizar una multiplicación y una resta. La respuesta es un número negativo; por lo tanto, la dificultad del problema puede ser mayor.

Podría ser, que los alumnos respondan lo siguiente:

$(5 – 4){\cdot}2 = 1{\cdot}2 = 2$ o $5 - 4{\cdot}2 = 5 – 8 = 3$

En ambas respuestas, los alumnos evidenciarían dificultades en la operatoria.

Los alumnos podrían dar la respuesta: $(5 – 4){\cdot}2a = 1{\cdot}2a = 2a$. Al parecer, los alumnos dan un significado concreto a la letra.

Pregunta 6.- La respuesta experta a esta pregunta abierta puede ser obtenida mediante el desarrollo: $3{\cdot}5 + 1 + 2{\cdot}5 = 15 + 1+ 10 = 26$. Aquí, los alumnos sustituyen la letra, realizan multiplicaciones y sumas.

Pero, podría obtenerse la siguiente respuesta:

$3{\cdot}5a + 1 + 2{\cdot}5a = 15a + 1+ 10a = 26a$, Una posible causa de esta respuesta pudiese estar en el significado concreto dado a la letra por los alumnos. Otra respuesta distinta a las anteriores, creemos que estarían provocadas por dificultades en la operatoria.

Pregunta 7.- La respuesta experta se puede obtener: $2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

Esta pregunta es formulada en el lenguaje cotidiano, es de esperar la respuesta experta de los alumnos; en cambio, una respuesta distinta tendría posible razón en las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas. Posiblemente, los alumnos no logran la respuesta experta por dificultades en la operatoria.

Aplicación del cuestionario I

Fue aplicado el 02 de agosto del 2001, fueron considerados 29 alumnos, cuyas edades variaban entre los 13 a 15 años, los estudiantes eran de un colegio municipal de la ciudad de Valparaíso. La selección de los alumnos fue hecha por el profesor del curso, los alumnos se escogieron usando la lista de curso; según la información recogida, los alumnos desarrollaron el cuestionario sin inconvenientes. Obteniéndose los resultados que se exhiben en el anexo, página 73.

V.4 Análisis a Posteriori del cuestionario I

En el estudio de las respuestas del cuestionario I, se destaca mediante un sombreado la respuesta experta de la pregunta.

Pregunta 1:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	Total
Verdadero	20	2	22
Falso	6	0	6
Nula	1	0	1
TOTAL	27	2	29

El resultado 8a fue respondido por 20 de 29 alumnos, esto evidencia que los alumnos responden conservando la letra en la respuesta. Al parecer, los alumnos han dado el significado de una representación en el marco aritmético; es decir, en referencia al trabajo con objetos concretos. En cambio, la respuesta experta 8, fue respondida sólo por 6 de 29 alumnos, estos resultados nos muestran la dificultad en el cambio de registro del aritmético al algebraico, ¿perciben los alumnos el marco algebraico?

Pregunta 2:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
A	1	0	1
B	2	0	2
C	1	0	1
D	8	2	10
E	14	0	14
Nula	1	0	1
Total	27	2	29

Sólo 10 de 29 alumnos respondió la respuesta experta, siendo ésta la alternativa con la letra D, es preciso notar que 14 de 29 alumnos (marcan la alternativa E) responden conservando la letra, es decir 10p. Los alumnos manifiestan que no respetan las reglas que exige el marco algebraico, al parecer, los alumnos se encuentran todavía trabajando en el marco aritmético. Excepto la respuesta nula, las otras respuestas se encuentran con dificultades en la operatoria.

Pregunta 3:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
A	1	0	1
B	2	0	2
C	14	0	14
D	4	1	5
E	5	1	6
Nula	1	0	1
Total	27	2	29

Sólo 5 de 29 alumnos respondió la respuesta experta (5), siendo ésta la alternativa D, aquí se repite el fenómeno de responder acompañando el valor numérico con la letra, la incidencia fue 14 de 29 respondió 5q en vez de 5. El poco éxito en las respuestas y la conservación en la letra evidencian dificultades entre el pasaje de la aritmética al álgebra, como también, dificultades en la operatoria en especial con la resta.

Pregunta 4:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
nula	6	0	6
7	10	2	12
7a	5	0	5
Otro	6	0	6
Total	27	2	29

La respuesta experta es 7, la obtuvieron 12 de 29 alumnos; en cambio, la respuesta "7a" fue dada por 5 de 29. Una respuesta que incremento su frecuencia fue la nula, ésta fue dada por 6 de 29 alumnos, el incremento de la opción nula pareciese ser por la carencia de alternativa en la pregunta y la exigencia de desarrollo.

Pregunta 5:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
Otro	6	0	6
3a ó -3a	4	0	4
3	7	2	9
-3	3	0	3
Nula	7	0	7
Total	27	2	29

Sólo 3 de 29 alumnos respondió la respuesta experta, -3, la variedad en los resultados evidencian grandes dificultades; al parecer, la resta y el resultado negativo de la respuesta experta son gravitantes, agravantes que se suman a la dificultad del trabajo con la expresión algebraica.

Pregunta 6:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
Otro	3	0	3
26a ó 6a	4	0	4
26	14	2	16
Nula	6	0	6
Total	27	2	29

La respuesta experta fue lograda por 16 de 29 alumnos, a pesar de que en su desarrollo deben realizarse dos reemplazos, los alumnos obtienen un logro superior al de las otras preguntas; sin embargo, la incidencia en la conservación de la letra se mantiene, conservan la letra 4 de 29 estudiantes.

Pregunta 7:

Respuesta	No pasaron la materia	Materia pasada	**Total**
8	1	0	1
9	21	2	23
Nula	5	0	5
Total	27	2	29

En este caso, la respuesta experta fue respondida por 23 de 29 alumnos, la pregunta formulada en registro verbal tuvo un alto logro. Si reformulamos la pregunta en el registro algebraico, una opción es “evaluar 2x +1 con x=4”.

Los buenos resultados de la pregunta 7 en comparación a las otras, nos permiten afirmar, que la dificultad se encuentra en el registro del álgebra. Pues, los alumnos consideran la letra como objeto y no conciben aun las expresiones algebraicas de ahí la conservación de la letra.

V.5 Confrontación de los análisis del cuestionario I.

Los resultados obtenidos nos permiten entregar las siguientes conclusiones:

- Los alumnos no han adquirido las herramientas necesarias para resolver con éxito, la actividad de evaluar una expresión algebraica. Los términos asociados a evaluar una expresión algebraica: determinar, calcular, valorizar, evaluar, remplazar, etc. no tienen sentido para los alumnos, que están aún en el marco aritmético.
- Los alumnos cometen el error de conservar la letra, en vez de determinar el valor numérico. Ellos no sustituyen la letra por un número.
- Los alumnos exhiben problemas en la comprensión de una expresión algebraica, puesto que no realizan adecuadamente la actividad de evaluar en el registro algebraico; en cambio, los alumnos resuelven una actividad similar en el registro verbal.
- Los alumnos evidencian grados distintos de dificultad en la operatoria aritmética; específicamente, entre la resta y la suma. Las respuestas de preguntas en que se exige la resta tuvieron un logro mucho menor que las preguntas donde se exigía la suma. Evidenciando dificultades en el registro numérico.

V.6 Aparece un fenómeno didáctico:

Que consiste en la conservación de la letra al evaluar una expresión algebraica sencilla, por ejemplo:

a) **2a** cuando **a = 4** responden **8a**

b) **2p + 4** cuando **p = 3** responden **10p**

c) **2q – 3** cuando **q = 4** responden **5q**

Lo que interpretamos como un trabajo en el marco aritmético por parte de los alumnos. En las otras preguntas, se manifiesta el mismo fenómeno. Esto lo interpretamos así: los alumnos se encuentran con objetos matemáticos nuevos, que son las expresiones algebraicas, éstas son pertenecientes al marco matemático del álgebra. Los alumnos enfrentan las expresiones algebraicas sin las reglas propias del algebra, ellos no reconocen el marco matemático algebraico, produciendo el fenómeno. Además, los alumnos conocen las expresiones cuando han trabajado en el marco matemático aritmético. Aquí la representación de la letra son objetos concretos, el pasaje de la aritmética al álgebra es ajeno a los alumnos. La mayoría no lo ha percibido.

Posteriormente, hemos realizado otro cuestionario, con preguntas en el marco de la geometría.

V.7 Cuestionario II

Los resultados del cuestionario I, muestran que los alumnos conservan la indeterminada en sus respuestas, debido a que siguen trabajando en el marco aritmético. Las letras desde 6to a 8vo básico han representado objetos concretos tanto en la Geometría como en los problemas con enunciado que se demanda traducir. Con el fin de profundizar el estudio del fenómeno, hemos confeccionado el cuestionario II; por tanto, consideramos en su confección la intervención de los marcos geométrico, aritmético, algebraico y los registros del lenguaje verbal y algebraico.

Objetivos del cuestionario II

1.- Constatar que algunos alumnos que cursan el Primero Medio no determinan correctamente la evaluación de una expresión algebraica, dejando en evidencia un problema con su significado.

2.- Constatar que los alumnos todavía no reconocen las reglas del marco algebraico.

3.- Evidenciar que los alumnos todavía usan la letra como objeto concreto, a pesar de realizar una actividad en distintos marcos. En especial, en el geométrico.

Estructura del instrumento

a) Constituido por 5 preguntas, una clasificación según el tipo de respuesta es:

Pregunta 1: Mediante una respuesta de verdadero o falso se determina si el alumno conserva la letra.

Pregunta 2-3: Pregunta de respuesta abierta, realizada mediante un enunciado en lengua natural, aquí el alumno trabaja sin expresiones algebraicas.

Pregunta 4-5: Pregunta de respuesta abierta, el alumno debe interpretar la información entregada con un registro algebraico, posteriormente debe utilizar la información en la resolución de la actividad.

b) Validación del instrumento: fue validado en un colegio municipal de Illapel.

c) Conocimientos en juego del cuestionario II: son los siguientes:

Dominio de la operatoria básica.

Resolución de problemas asociados al perímetro y área de una figura rectangular o cuadrada.

Interpretación de una expresión algebraica.

Resolución de un problema con enunciado verbal en contexto cotidiano.

V.8 Presentación de las preguntas del cuestionario II y sus objetivos

Pregunta 1.- Determinar el valor de la expresión 2a cuando a = 4 ¿Se obtiene 8a?

Marque su alternativa: Si........... No.........

El objetivo es determinar si el alumno responde conservando la letra. Se espera que los alumnos sustituyan la letra y realicen la multiplicación.

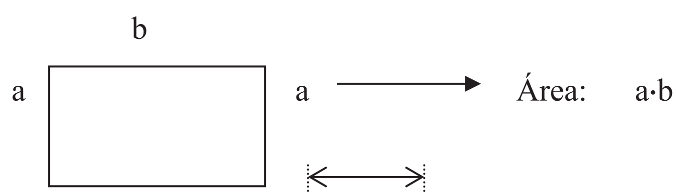
Pregunta 2.- ¿Cuántas monedas tiene Lucho? Si Lucho tiene el doble de monedas de las que tiene Pedro, más cuatro monedas. Se sabe que Pedro tiene tres monedas.

Pregunta 3.- Si en la tarde tengo el doble de dulces de ayer menos los tres que me comí en la mañana, si ayer tenía cuatro dulces ¿Cuántos dulces tengo ahora?

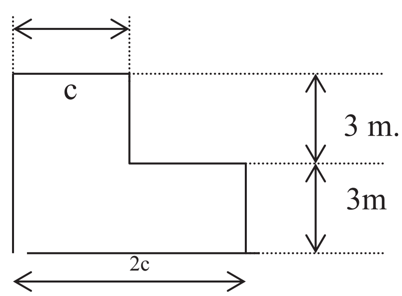
Los objetivos de estas dos preguntas son similares, determinar si los alumnos resuelven un problema dado en lengua materna mediante un enunciado aritmético, estas preguntas se diferencian en el tipo de enunciado en el que son expresadas. La primera pregunta esta en lenguaje cotidiano y aritmético; en cambio, la otra pregunta agrega a la redacción un variable temporal. La resolución de ambas preguntas exige de la capacidad para resolver un problema de enunciado y el dominio de la operatoria básica.

Pregunta 4.- La fórmula del área de un rectángulo de lados "a" y "b" metros es **a·b** metros cuadrados.

Figura:



Dada la figura que Representa a un patio de una casa. ¿Cuál es el área del patio, si c = 4 m.?



El objetivo es explorar si los alumnos logran resolver una situación problemática, que su elaboración y resolución es del marco geométrico. Consideramos importante estudiar si existe una relación en el significado de la letra con el marco geométrico.

Pregunta 5.- La fórmula del área de un cuadrado de lado X metros es: $\mathbf{X^2}$ metros cuadrados. Si **X** = 3m. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado el doble de **X**?

El objetivo es explorar si los alumnos resuelven una situación problemática, que en su elaboración intervienen conceptos del marco geométrico, así como del lenguaje algebraico y aritmético.

V.9 Análisis a priori del cuestionario II

Pregunta 1.- Se espera que los alumnos reemplacen la letra y realicen la multiplicación; después, ellos seleccionan su respuesta.

La respuesta experta corresponde a la alternativa falsa, sin embargo, se espera que respondan verdadero. Puesto que, los alumnos dan un significado concreto del uso de la letra.

Pregunta 2.- La respuesta experta se puede obtener con el desarrollo:

$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$, por lo tanto, son 10 monedas.

Sin embargo, puede obtenerse como respuesta 14 monedas, mediante el desarrollo $2 \cdot (3+4)$. Los alumnos responderían esta respuesta por los problemas que tienen en la conversión del registro verbal al numérico.

Pregunta 3.- La respuesta experta es 5 dulces, que se puede obtener mediante el desarrollo: $2\cdot4 – 3 = 8 – 3 = 5$.

Sin embargo, los alumnos pueden responder:

$2\cdot(4 – 3) = 2\cdot1= 2$, posiblemente por problemas con la conversión del registro verbal al numérico.

$2\cdot(4 + 3) = 2\cdot7 = 14$, podría ser, debido a problemas en la comprensión del enunciado.

Pregunta 4.- La respuesta experta es 36 metros cuadrados, este resultado puede ser obtenido por alguno de estos procedimientos:

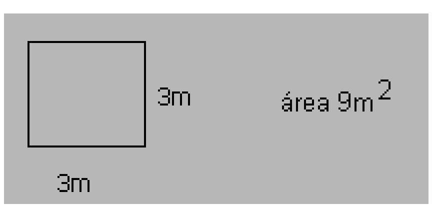
$8\cdot6 - 3\cdot4 = 48 – 12 = 36$, o también por: $3\cdot4 + 8\cdot3 = 12 + 24 = 36$. Sin embargo, es posible que algunos alumnos respondan conservando la letra "c". También, pueden obtenerse otras respuestas con tengan valores numéricos distintos.

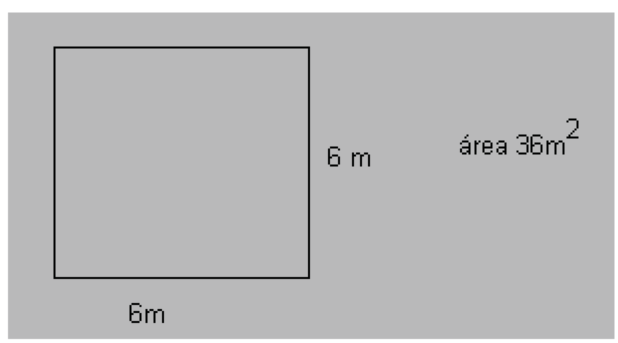
Pregunta 5.- La respuesta experta es 36 metros cuadrados, este resultado puede ser obtenido por alguno de estos procedimientos:

En un marco aritmético: $(2\cdot3m)^2 = (6m)^2 = 36\ m^2$

Marco algebraico: $(2\cdot x)^2 = 4\cdot x^2 = 4x^2 = 4\cdot(3m)^2 = 4\cdot9\ m^2 = 36\ m^2$

Marco geométrico:





Consideramos que un procedimiento distinto a los anteriores, se obtiene cuando los alumnos realizan operaciones de conversión en los distintos marcos.

Una respuesta distinta puede ser $18m^2$, los alumnos podrían realizar el siguiente procedimiento: $2\cdot(3m)^2 = 2\cdot 9\ m^2 = 18m^2$. Aquí, nosotros suponemos que los alumnos realizan operaciones en el marco aritmético y/o geométrico.

Además, pueden obtenerse diversas respuestas.

En general, podemos esperar los siguientes resultados:

1.- El logro de los problemas con enunciado en lengua materna es mayor que en el registro algebraico y geométrico.

2.- Los alumnos mantienen problemas al evaluar una expresión algebraica a pesar de trabajar en el ámbito geométrico.

V.10 Aplicación del cuestionario II

El cuestionario se propuso a alumnos que cursaban el Primero Medio, cuyas edades eran de 13 a 15 años, estos estudiantes cursaban estudios en un colegio municipal y otros en uno particular, los colegios pertenecen a ciudades distintas.

Colegio Particular de Huechuraba, Santiago, cuestionario aplicado el 18 Julio 2003 a un curso de 20 alumnos, colegio elegido al azar.

Colegio Municipal de Salamanca, IV región; cuestionario aplicado el 11 diciembre 2002 a 19 alumnos, los estudiantes fueron seleccionados por lista, mediante los números pares presentes en la sala de clase.

La aplicación del cuestionario[26] fue hecha por el profesor de sala, la actividad tenía una duración de 20 minutos aproximadamente, fue resuelto rápidamente por los alumnos en no más de 15 minutos. Es preciso señalar que en ambas aplicaciones no se contaba con la presencia del investigador.

[26] El protocolo de este cuestionario, se encuentra en el anexo, específicamente en la página 76.

V.11 Análisis a Posteriori del cuestionario II

a) Estudio de las respuestas

Dada la tabla:

Pregunta	Bien respondida	Mal respondida
1	$\frac{13}{39}$	$\frac{26}{39}$
2	$\frac{25}{39}$	$\frac{14}{39}$
3	$\frac{33}{39}$	$\frac{6}{39}$
4	$\frac{8}{39}$	$\frac{31}{39}$
5	$\frac{9}{39}$	$\frac{30}{39}$

Resultados generales obtenidos por pregunta en la aplicación del cuestionario II.

Es importante desatacar una diferencia del análisis de las preguntas entre los cuestionarios, que los alumnos respondieron este cuestionario cuando se encontraban a finales del Primer año; es decir, ellos ya habían visto la unidad del álgebra.

Pregunta 1: Esta pregunta, se resolvía mediante una interpretación del significado de la expresión $a = 4$, sustituyendo el valor en la expresión y luego multiplicando por 2. Posteriormente, los alumnos responden seleccionando una alternativa. Los resultados a esta pregunta fueron bajos, las razones de este resultado estarían en el significado concreto que dan los alumnos a la letra. Es decir, los alumnos después de trabajar la unidad de álgebra no se dan cuenta que enfrentan una actividad algebraica.

Pregunta 2: El problema fue planteado en lengua materna, este ejercicio tuvo buenos resultados. El enunciado tiene una representación en el registro algebraico, se lee: "¿Cuántas monedas tiene Lucho? Si Lucho tiene el doble de monedas de las que tiene Pedro, más cuatro monedas. Se sabe que Pedro tiene tres monedas".

Algebraicamente, la actividad correspondería a: Evaluar $2x + 4$ si $x = 3$

El significativo número de aciertos evidencian que para los alumnos, una actividad equivalente a evaluar en el marco aritmético, no presenta dificultades como una dada en el registro algebraico.

Pregunta 3: Esta actividad fue planteada en lengua materna, los resultados obtenidos por los alumnos pueden ser considerados buenos; por lo tanto, los resultados de las preguntas en lengua materna contrastan con aquellas formuladas en el registro algebraico. Entonces, una actividad de evaluar formulada en el marco algebraico presenta mayores obstáculos que otra en el marco aritmético.

Respecto a la diferencia de los resultados con la pregunta anterior, puede ser que la variable redaccional del enunciado, el estado temporal: tarde, mañana y ayer tienen posiblemente una mayor familiaridad que el enunciado numérico de la pregunta anterior; es decir, le otorga más sentido. Incluso que, en el planteo del problema requiere de una resta, operación aritmética con un grado significativo de dificultad para los alumnos, ellos tuvieron mejores resultados. Algebraicamente la pregunta es equivalente a "evaluar $2x – 3$, con $x = 4$"

Pregunta 4: Esta actividad fue planteada con uso de figura y la letra tiene un significado de longitud. Los resultados de esta pregunta no fueron buenos; posiblemente, la comprensión de la figura y el significado dado a la letra incidieron en el bajo resultado.

Además, esta actividad presenta procedimientos de resolución en distintos marcos, al parecer, esta variedad no incide en el logro de la respuesta de los alumnos.

Pregunta 5: Las respuestas de los alumnos tuvieron un bajo resultado, la resolución de este problema es variada; al parecer, la diversidad de procedimientos de resolución repercute en la obtención de malos resultados. A pesar de entregarse la fórmula del área del cuadrado, necesaria para la resolución del problema, una alta frecuencia de estas respuestas fue x^2. Esta actividad puede ser resuelta con el uso de representaciones geométricas, de la aritmética o del álgebra. Además, en la resolución puede haber conversiones de objetos en los distintos marcos; sin embargo, a pesar de la variedad de procedimientos en la resolución del problema, los resultados no fueron buenos. Por lo tanto, la realización de actividades en que su resolución pueda realizarse en distintos marcos, es ajena a los alumnos, ¿mostrará una falta de movilidad método-lógica, depende de los docentes?

b) Clasificación de los resultados por instituciones.

Pregunta	Bien respondida	Mal respondida
1	11/19	8/19
2	15/19	4/19
3	19/19	0/19
4	6/19	13/19
5	7/19	12/19

TABLA: COLEGIO PARTICULAR DE SANTIAGO

Total de alumnos: 19

Pregunta	% Bien respondida	% Mal respondida
1	2/20	18/20
2	10/20	10/20
3	14/20	6/20
4	2/20	18/20
5	2/20	18/20

TABLA: COLEGIO MUNICIPAL, IV REGIÓN

Total de alumnos: 20

Se observa que la aplicación del cuestionario entre ambos colegios, existen diferencias, el colegio particular de Santiago tiene mejores resultados que el Municipal de la Cuarta región. Aunque tan significativos no lo son, salvo en la primera pregunta.

V.12 Confrontación del análisis del cuestionario II

Son los siguientes:

1.- Los alumnos aún conservan la letra en las respuestas.

2.- Los alumnos demuestran que en el registro verbal obtienen mejores resultados de la actividad evaluar; sin embargo, los alumnos tienen magros resultados cuando se les exige evaluar en el registro geométrico o algebraico.

3.- Para los alumnos, la diversidad en los procedimientos de resolución no significa que una actividad tenga una dificultad menor. Los resultados de los alumnos muestran que el grado de dificultad es alto.

4.- Según los resultados de los alumnos, se cumple la afirmación de Duval referida a la dificultad del cambio de registro.

V.13 Articulación de los cuestionarios I y II.

Inicialmente, nosotros con el primer cuestionario validamos la dificultad de evaluar una expresión algebraica, en las respuestas de los alumnos encontramos algunos indicadores de estas respuestas. Aquí, encontramos evidencias que avalan nuestras suposiciones y los antecedentes del problema. Posteriormente, en el estudio de los antecedentes, observamos que la matemática escolar generalmente usa la expresión algebraica bajo un marco geométrico. Por lo tanto, consideramos que para los alumnos el uso en los cursos previos de la expresión algebraica en un marco geométrico le dé sentido a ésta, la inquietud anterior nos sugiere la realización de otro cuestionario, reflexionando en los resultados de ambos cuestionarios, determinamos lo siguiente:

1. Es una dificultad evaluar una expresión algebraica, se manifiesta en ambos cuestionarios.
2. Los resultados de ambos cuestionarios, nos muestran que para los alumnos una actividad de evaluar en lenguaje algebraico tiene una mayor dificultad que una dada en lenguaje cotidiano. Consideramos, que entre ambas actividades existe un cambio de registro.
3. Los resultados del segundo cuestionario; específicamente, en las preguntas dadas con un marco geométrico, nos evidencian que la dificultad de la expresión algebraica se mantiene. Por lo tanto, la representación de un objeto concreto no es suficiente para dar un significado a una expresión algebraica.

VI Conclusiones

1.- En referencia a la actividad de evaluar una expresión algebraica, la enseñanza privilegia el trabajo de lo explícito por sobre lo implícito.[27] Una consecuencia de lo anterior; queda en evidencia cuando los alumnos no dan significado a las letras en el registro algebraico.

2.- La mecanización de la enseñanza: trae como consecuencia la conclusión anterior, puesto que a los alumnos sólo se les presentan actividades de aplicación de técnicas. Por ejemplo; en la enseñanza del álgebra, si se privilegian las actividades de reducción de términos semejantes, evaluar expresiones, resolver ecuaciones, etc. Es decir, únicamente actividades de aplicación de técnicas en el registro algebraico, el alumno no podrá dar significado a una expresión algebraica. Por ejemplo, el alumno no podría responder la pregunta ¿qué significado tiene la expresión 2a?

3.- Importancia del cambio de registros en el proceso de enseñanza: Los profesores en su quehacer, deben realizar actividades que exijan distintas representaciones de una expresión algebraica, donde se resalte la correspondencia entre los registros. Es decir, profundizar el significado de las expresiones, con el fin de que el alumno pueda dar significados de estas expresiones, (uno aprende algo mediante la interacción con algo conocido). Con el fin de que el alumno adquiera un sentido y significado de las expresiones que favorezca la comprensión. Si tratamos de enseñar el álgebra realizando actividades sólo en el marco algebraico se producirá un círculo vicioso con consecuencias como la estudiada.

[27] En referencia a las actividades propuestas en los programas, generalmente dirigen su quehacer a cálculos, aplicaciones etc. Ver cita de Duval, en referencia a la poca importancia dada a la actividad de conversión, en la página 20-21.

4.- Enseñar al alumno a interactuar con sus saberes: Usando los conocimientos de los alumnos, el profesor debe crear situaciones que permitan ampliar los conocimientos de los alumnos, donde quede en evidencia la ruptura. Por lo tanto, la formulación de estas actividades debe ser acorde a la realidad de los alumnos. En el trabajo de un profesor, durante la enseñanza del álgebra, debe tener como objetivo crear situaciones para los alumnos que requieran la necesidad de un conocimiento nuevo, y mediante ello generar las instancias para un avance en los conocimientos adquiridos en los alumnos.

5.- Una consecuencia particular de los puntos anteriores, es realizar actividades para desarrollen la necesidad del uso de las letras, pero, con un grado de dificultad que permita a los alumnos entender la ruptura de la aritmética. Estas actividades deberían ser distintas a las propuestas en los programas de estudio.

6.- Como consecuencia del punto anterior, proponemos desarrollar la representación de las letras mediante situaciones cotidianas; nosotros, creemos que para un alumno de Sexto Básico, no desarrolla un significado algebraico cuando realiza una actividad como determinar un valor numérico, esto es, la actividad es resuelta mediante operaciones aritméticas. Aquí, vislumbramos que posiblemente estas actividades son posteriores al desarrollo de la noción de representación. Podría ser, que para el alumno, otra actividad más cercana a su entorno le permita adquirir el significado dado a la letra. Ejemplo:

> Hoy me dieron dos caramelos más que ayer. ¿Cuántos caramelos me dieron hoy? Usa una letra en tu respuesta.
>
> La solución de esta actividad por un alumno de Sexto Básico, incluso para un alumno de un curso mayor, podría presentar una dificultad, el alumno debería:
>
> Primero, representar mediante una letra (¿Por qué una letra?) una **cantidad de caramelos desconocida**, si somos ambiciosos podría ser que nunca se obtendrá la “X”. Tan usual en las clases de matemática; finalmente, los alumnos obtienen la respuesta sumando dos a su expresión creada.

El reconocimiento de encontrarse frente a una situación compleja nos permite reflexionar sobre la necesidad de volver a mirar con inocencia otra vez la aproximación al álgebra. Buscando un sólo objetivo, que el alumno de el significado esperado de la letra. (Pensando en una representación algebraica con letras)

7.- La resolución de actividades con expresiones algebraicas del tipo 2a, 5p + 4. Son objetos nuevos para los alumnos y que su comprensión rompe con el marco aritmético. El éxito de los alumnos en la resolución de actividades con enunciado en un contexto cotidiano no rompe con el marco aritmético, de ahí el éxito. El parámetro en estas expresiones dejo de ser un objeto concreto para los alumnos, es un número. Por lo tanto, los alumnos enfrentan un objeto nuevo y que debe enfatizar la enseñanza.

8.- Extender la noción de representación de la letra después de haber aproximado su significado con situaciones cotidianas. Por ejemplo, realizar actividades de búsqueda de regularidades; esto es, mediante figuras (proximidad a la geometría), otra actividad es extender el lenguaje natural al algebraico (proximidad a la semántica del algebra). En esta recomendación vislumbramos un déficit en la formulación o creación de estas actividades.

Reconociendo que el aprendizaje del álgebra genera un amplio estudio. Nosotros creemos haber aportado en la génesis de nuestro problema de estudio

ANEXO

Unidad significante: Definiremos **unidad significante** cuando la determinación de un objeto presupone la aprehensión de una multiplicidad de significantes, cuya cantidad y variedad exceden la aprehensión simultánea, la aprehensión de esta multiplicidad como una unidad significante sólo puede hacerse bajo el modo de la significación.

Semántica: Ciencia o teoría de los significados lingüísticos. La definición tradicional de semántica procede del lingüista francés de finales del siglo XIX Michel Bréal. En su obra Essai de sémantique, Science des significations (1897), Bréal define la semántica como ciencia de los significados.

Semiosis: Se llama a la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

(Duval, 1999, p.14)

Indicaciones a los docentes para la realización de los cuestionarios:

Estimado colega, el siguiente trabajo tiene como fin probar el TEST, para ser aplicado en un futuro cercano como instrumento de una investigación matemática, por lo que agradeceré tu cooperación.

.- El test tiene una duración de 30 minutos, para ser desarrollado por los alumnos.

.- Se espera que los alumnos desarrollen el test, sin el nerviosismo de una prueba por lo que ellos deben tener claro que esta actividad es distinta, pero esto no significa que no trabajen. (Aquí necesito su cooperación colega).

.- Se espera que los alumnos respondan este test con lápiz pasta (preferible), sólo tengan en la mesa el test y no se permite el uso de la calculadora.

Preguntas del cuestionario I

Pregunta 1.- Determinar el valor de la expresión **2a** cuando **a = 4** **¿**Se obtiene **8a**?
Marque con una "X" en la alternativa correcta.
Verdadero (......)
Falso (.......)

Pregunta 2.- Calcule la expresión **2p + 4** con **p = 3** ¿Se obtiene como resultado?

a) 8
b) 14p
c) 14
d) 10
e) 10p

La alternativa correcta es la letra: ....

Pregunta 3.- Determine la expresión **2q – 3** con **q = 4** ¿Se obtiene como resultado?

a) 2q
b) 2
c) 5q
d) 5
e) ninguna de las anteriores (n.a.)

La alternativa correcta es la letra: ....

Pregunta 4.- Si **$a = 2$** evalúe la expresión **$3a + 1$.** **Explica cómo encontraste tu respuesta**	Pregunta 6.- Determine el valor de la expresión **$3a + 1 + 2a$**, cuando **$a = 5$.** **Explica cómo encontraste tu respuesta**
Pregunta 5.- Si **$a = 2$** evalúe la expresión **$5 – 4a$.** **Explica cómo encontraste tu respuesta**.	Pregunta 7.- Los caramelos que tiene Jorge son el doble de los caramelos que tiene Efraín, más un caramelo. **¿Cuántos caramelos tiene Jorge, si Efraín tiene 4 caramelos?** **¿Cómo obtuviste tu respuesta?**

<u>Por favor contestar:</u> ¿Te pasaron a ti esta materia? o ¿Tú respondiste las preguntas con tus conocimientos propios?

Respuesta:...

....

....

# alumno	p1	p.2	p. 3	p. 4	p. 5	p. 6	p. 7	¿Es materia pasada?
1	V	D	D	7	3	26	9	SI
2	V	E	E	NO SE	NO SE	NO SE	9	NO
3	F	B	C	--	--	--	--	NO
4	--	--	--	--	--	--	--	NO
5	F	D	B	4A	--	--	9	NO
6	F	B	E	--	--	--	--	NO
7	V	D	C	7	-3	26	9	NO
8	V	D	D	7	-3	26	9	CP
9	V	E	C	--	--	--	--	NO
10	V	E	E	7	3	26	9	NO
11	V	E	C	7A	3A	26A	9	NO
12	V	D	C	5A	3A	26A	9	NO
13	F	D	B	7	3	26	9	NO
14	V	E	C	7A	-3A	26A	9	NO
15	V	E	C	7A	3	26	9	NO
16	V	E	C	7A	-3A	26	9	NO
17	V	E	C	7	-3	26	9	NO
18	F	E	A	7	3	26	9	NO
19	V	D	D	34	36	61	9	CP
20	V	A	C	--	1A	6A	9	NO
21	F	E	C	33	37	61	9	NO
22	V	E	C	6	-1	26	8	NO
23	V	D	E	77	3	26	9	SI
24	V	D	E	NE	NE	65	9	NO
25	V	E	D	7	3	26	9	NO
26	V	E	D	7A	3	26	9	NO
27	V	D	E	7	3	26	9	NO
28	V	C	C	7	--	26	9	NO
29	V	E	C	7	-6	26	9	CP

Tabla del cuestionario I

NE: no se entiende la respuesta, CP: Propios conocimientos

Preguntas del Cuestionario II

Pregunta 1.- Determinar el valor de la expresión 2a cuando a = 4 ¿ Se obtiene 8a?
Marque su alternativa:

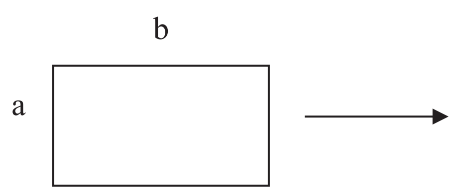
Si .... No ....

Pregunta 2.- ¿Cuantas monedas tiene Lucho? Si Lucho tiene el doble de monedas de las que tiene Pedro, más cuatro monedas. Se sabe que Pedro tiene tres monedas.

Pregunta 3.- Si en la tarde tengo el doble de dulces de ayer menos los tres que me comí en la mañana, si ayer tenia cuatro dulces ¿Cuántos dulces tengo ahora?

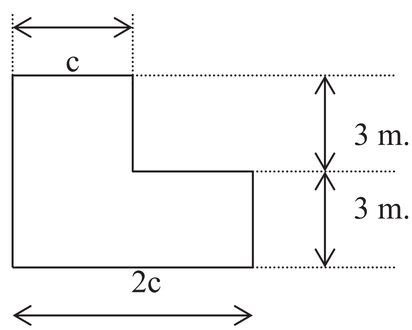
Pregunta 4.- La fórmula del área de un rectángulo de lados “a” y “b” metros es **a·b** metros cuadrados.

Figura:



Área: a·b

Dada la figura que
Representa a un
patio de una casa.
¿Cuál es el área del
patio, si c = 4 m.?



Pregunta 5.- Dada la fórmula del área de un cuadrado de lado **X** metros es $\mathbf{X^2}$ metros cuadrados. Si **X** = 3m. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado el doble de **X**?

Tabla del Cuestionario II

Alumno	p.1	P.2	p.3	p.4	p.5
1	NO	14	5	36	36
2	NO	14	5	36	36
3	NO	10	5	36	36
4	SI	10	5	1152	36
5	SI	10	5	12	36
6	NO	10	5	36	36
7	SI	10	5	36	36
8	NO	10	5	24	108
9	NO	10	5	30	18
10	NO	10	5	--	9
11	SI	10	5	12	81
12	SI	10	5	32	6
13	SI	10	5	48	18
14	SI	10	5	--	9
15	NO	10	5	48	18
16	NO	10	5	36	6
17	NO	10	5	24 y 12	9
18	SI	--	5	24	9
19	NO	12	5	72	--
20	NO	0,3	3x	2c(c-3)	--
21	SI	12	9	--	--
22	SI	5	6	12	--
23	SI	--	1	--	--
24	NO	--	4	28	--
25	--	2	10	--	12
26	SI	10	5	--	x^2
27	SI	10	5	4m·4m·3m	x^2
28	SI	10	5	28	18
29	SI	10	5	8·3-4	36

Alumno	p.1	p.2	p.3	p.4	p.5
30	SI	10	5	12	$x-3$
31	SI	7	7	24	x^2
32	SI	10	5	24	x^2
33	SI	7	5	24	x^2
34	SI	7	5	24	x^2
35	SI	7	5	24	x^2
36	SI	10	5	24	x^2
37	SI	10	5	36	x^2
38	SI	10	5	36	x^2
39	SI	10	5	$4\cdot9+4\cdot8+4\cdot3+4\cdot4$	36

BIBLIOGRAFIA

1. Duval R. Semiosis y Pensamiento Humano, Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales, Santiago de Cali-Colombia, Universidad del Valle 1999.

2. Programas de estudio de Educación Matemática, de sexto, séptimo y octavo Básico y del Primero Medio.

3. Ausubel-Novak-Hanesian, Psicología Educativa, Un punto de vista cognoscitivo. México, Trillas 1983.

4. Fraleigh Jhon, Álgebra abstracta primer curso, traducido por Manuel López Mateos – 1987 tercera edición.

5. Kuchemann, D.E. Álgebra, children`s understading of mathematics. Hart. K. (ed) London 1981.

6. Artículo publicado Panizza, et al. "Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de matemática" REM, Río cuarto Octubre de 1995.

7. Gutiérrez Ángel, "La didáctica de las matemáticas: fuente de reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas", Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1995.

8. Guzmán R. Ismenia, Apunte de curso: "Fundamentos Teóricos de la Didáctica de la Matemática, lección 14: juego de Marcos y dialéctica Medio Objeto", Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.