Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN MEDIA SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Tesis para optar al Grado de

Doctor en Didáctica de la Matemática

GONZALO ESPINOZA VÁSQUEZ

Tesis dirigida por

Dra. Diana Zakaryan

Dr. José Carrillo Yáñez

Valparaíso – CHILE

2020

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN MEDIA SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

de

Gonzalo Isaac Espinoza Vásquez

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 17 de junio del año 2020 ante la Comisión de Tesis integrada por:

Dra. Elisabeth Ramos	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Profesor interno
Dr. Raimundo Olfos	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Profesor interno
Dra. Nuria Climent	Universidad de Huelva, España	Profesor externo
Dr. José Carrillo	Universidad de Huelva, España	Codirector de tesis
Dra. Diana Zakaryan	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Directora de tesis

Año 2020

CHILE

Agradecimientos

Sin lugar a dudas este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo de mi familia. Gracias por comprender lo que significa esto para mí y por entender las tantas veces que les dije “tengo que estudiar”.

Agradezco a la Doctora Diana Zakaryan y al Doctor José Carrillo, Diana y Pepe, por todo el trabajo y esfuerzo puesto en sacar esta investigación adelante. Sus consejos y orientaciones fueron luces en mi oscura ignorancia y fueron guía para cuando mis pasos se perdían por causa de mi inexperiencia como investigador en el área de la Didáctica de la Matemática.

Agradezco el tiempo destinado a nuestras reuniones, el tiempo destinado a leer y corregir este trabajo. Diana y Pepe, les agradezco cada una de sus palabras y gestos, tanto en lo profesional como directores de este trabajo y en lo personal, al poder compartir la calidad humana que a cada uno los caracteriza. Gracias por destacar los buenos aportes y la mirada aguda sobre mis errores. Si alguno de estos errores permanece en este escrito es solo mi responsabilidad.

Gracias a todos aquellos que se dieron un momento de escuchar las exposiciones de los avances, a escuchar mis dudas y dar su visión. En esto incluyo a los compañeros del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática del IMA-PUCV. Compartir con todos ellos no está registrado en esta tesis, pero es parte importante de mi formación como investigador.

Gracias a los amigos y colegas que aportaron dando el ánimo, las energías y la motivación a seguir con este proyecto.

A todos ellos, muchas gracias.

A Maríajesus y a Santiago.

Esta investigación se realizó con ayuda del financiamiento otorgado por la Beca Doctorado Nacional CONICYT- 2015 Folio 21150897

Índice

Introducción

Motivación

No hay que ir muy lejos en cualquier área de la Matemática para encontrar el concepto de función o algún ejemplo de ella explícita o implícitamente. Resulta interesante que el concepto de función se puede encontrar en lo más elemental, como la idea del conteo y número, y en aspectos un tanto más avanzados, como la idea de morfismos de grupos y categorías. La elección de trabajar sobre este tema se debe, por un lado, a la importancia que tiene dentro de la Matemática, permitiendo establecer relaciones entre objetos matemáticos, idea clave en el desarrollo de la ciencia y, por otro lado, a la relevancia del desarrollo de habilidades requeridas en el trabajo matemático, por ejemplo, el modelamiento de diferentes fenómenos (naturales, sociales, económicos, matemáticos, entre otros), la resolución de problemas, la identificación de patrones o el desarrollo del pensamiento variacional. Por otro lado, el concepto de función es un objeto transversal en el currículum que lo hace identificable en cada nivel de escolaridad y, prácticamente, en cada una de las unidades temáticas que se proponen en las bases curriculares de la educación media chilena (MINEDUC, 2016a).

Esta transversalidad y ubicuidad es la que motiva la elección de este objeto matemático para esta investigación. Debo señalar que no se trata de que cualquier objeto matemático sea tratado o visto como una función, sino que, a veces, el concepto de función se hace invisible para dejar ver otros objetos que se construyen a partir de él. Con ello, comparto la importancia asignada a este objeto tanto en el desarrollo de la Matemática como en el desarrollo de diferentes tipos de pensamientos: variacional, numérico y, por supuesto, funcional (Vasco, 2002; 2010).

Pese a esta transversalidad, el concepto de función parece ser algo fugaz como contenido escolar y que se estudia solamente en un momento puntual de la escolaridad para pasar rápidamente a los ejemplos o tipos de funciones, con una perspectiva geométrica y/o algebraica. El Currículum chileno ubica la función en 8º año de enseñanza básica (alumnos de 13-14 años) y propone su tratamiento en relación con la proporcionalidad directa y la función lineal. Posteriormente, se abordan ejemplos o tipos de funciones: cuadrática, raíz, exponencial, potencia, logarítmica, valor absoluto y parte entera, centrándose en las propiedades individuales de cada una y perdiendo el foco de la correspondencia, la co-variación o la identificación de dependencia entre variables. En el estudio de variables aleatorias en el eje de Probabilidad y Estadística vuelve a aparecer el concepto de función; sin embargo, se enfatiza en la idea de variable por sobre la noción de función que subyace (MINEDUC, 2016b).

A esto me refiero al decir que el concepto de función se hace invisible para dejar ver otros objetos. El cambio de foco hacia lo operacional produce que el concepto de función como tal pierda potencia en el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes, como lo señalan Vargas, Reyes y Escalante (2016) respecto al tipo de actividades que favorecen la comprensión conceptual de la idea de variación y de cambio. De este modo, centrarse en la enseñanza de los aspectos operacionales de los temas sin reflexionar sobre la presencia del concepto de función podría restringir su comprensión en los estudiantes.

En este sentido, la preocupación por la formación de los profesores de matemáticas constituye otro foco de atención que motiva la elección del tema y área en el que se desarrolla esta investigación. Como profesor de matemáticas he tenido la oportunidad de observar la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles escolares (básica y media), además de un acercamiento a la formación de profesores en la universidad al respecto. He participado en la formación inicial impartiendo en cursos universitarios de matemáticas para los futuros profesores de enseñanza básica y media y en la formación continua de docentes mediante cursos de pos título para profesores de enseñanza básica. Aunque no en todas estas instancias se ha tratado el concepto de función, sí, estas me han permitido formar una panorámica respecto de las necesidades del profesor y de su formación.

En mi experiencia en la formación de los futuros profesores de matemáticas, he indagado informalmente sobre cómo comprenden la función los estudiantes para profesor antes y después de estudiar este tema a nivel universitario en los primeros cursos de matemática. La pregunta que se les planteó a los estudiantes fue: *¿qué es una función*? Los estudiantes que lograban dar una respuesta mostraban un conocimiento superficial y limitado sobre este concepto pese a haber aprobado el curso de Cálculo que contiene una unidad sobre “Funciones”. Algunas de las respuestas señalaban la función como*:*

- Un proceso matemático para identificar cómo se ve gráficamente,
- Una ecuación, por ejemplo, la ecuación cuadrática,
- Lo que se expresa como función, algebraicamente, la igualdad f(x)=y.
- Una relación entre números reales o complejos, donde al introducir un número tendremos como resultado otro, en otras palabras, el número resultante de introducir el primer número está en función del otro. Cabe destacar que no solo son números, sino que también pueden ser otros elementos como letras.
- Un proceso en el cual llevamos elementos a través de una operación o por un cambio para que nos de otro elemento.

Todas estas respuestas muestran que la función se comprende como un proceso o algebraicamente como ecuación y no mencionan los conceptos de variables, los conjuntos de dominio y recorrido o las propiedades de unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen, que permiten caracterizar la función en su concepción moderna. Los estudiantes para profesor señalaron que la idea de función a la que hacían referencia correspondía a lo que recordaban de su educación previa a la universidad. Estas declaraciones generan una alerta respecto del impacto que tiene –o debe tener- la formación de profesores en el conocimiento de los temas matemáticos que los futuros profesores deberán enseñar. La inclusión de estos temas debería estar asociada a reflexiones sobre el conocimiento del profesor sobre este tema de modo que el futuro profesor pueda, por una parte, ser crítico respecto a su propio conocimiento y, por otra, evitar que las concepciones erróneas sobre el concepto perduren a la formación y que se traspasen a sus estudiantes. De ahí, me ha resultado interesante indagar sobre el conocimiento del profesor sobre el concepto de función y cómo se manifiesta en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De las experiencias e inquietudes señaladas antes surge mi motivación por emprender una investigación que se alinee con la formación de profesores de matemáticas, que aborde los conocimientos adquiridos en su formación inicial y que contemple la práctica del profesor de matemáticas respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función. El objeto de estudio es el conocimiento profesional del profesor de matemática. Se pretende caracterizar y comprender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, interpretándolo desde la perspectiva del modelo MTSK, *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (Carrillo *et al*., 2018), asociado al proceso de enseñanza del concepto de función. Este conocimiento se puede observar en el quehacer del profesor desarrollado en contextos o escenarios como sus clases, sus planificaciones e incluso en diálogos profesionales con sus pares (Flores, Escudero, y Aguilar, 2013). En este trabajo se quiere observar el conocimiento del profesor durante las clases destinadas a la enseñanza del concepto de función.

A la fecha no existen trabajos desde esta perspectiva teórica que aborden el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de función, salvo aquellos reportes parciales que se han publicado como resultados de esta tesis en artículos o actas de congresos nacionales e internacionales. Esta ausencia de investigaciones impulsa la realización de este trabajo, proporcionándolo como un aporte al desarrollo del modelo en las indagaciones con MTSK sobre temas particulares.

Organización del escrito

Este trabajo se ha organizado en seis capítulos. El capítulo 1 incluye algunos antecedentes sobre el conocimiento del profesor de matemáticas acerca del concepto de función, su enseñanza y su aprendizaje. Se exponen antecedentes que enmarcan el trabajo en el contexto del desarrollo de la investigación en el tema.

El capítulo 2, el Marco Teórico, expone el posicionamiento epistemológico adoptado para la conducción de este trabajo respecto al conocimiento y algunos antecedentes que conducen a la generación del modelo del conocimiento del profesor Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). El modelo MTSK se expone mediante la definición de sus dominios, subdominios y categorías, acompañada con ejemplos del conocimiento del profesor sobre el concepto de función. Con ello se busca mostrar la operacionalización del modelo al objeto matemático elegido.

El capítulo 3, la Metodología, presenta las consideraciones metodológicas y las decisiones tomadas para la realización de este trabajo. Este capítulo se plantea la pregunta y objetivo de investigación, asimismo se muestra la identificación del paradigma investigativo, el diseño metodológico y el contexto en el que se realiza la investigación.

El capítulo 4 presenta el Análisis de los datos y los resultados. Las evidencias de conocimiento manifestado en las sesiones de clases y en las entrevistas son agrupadas para establecer indicadores de conocimiento especializado. El análisis en este nivel permite la identificación de conocimiento en cada uno de los subdominios del MTSK y en la mayoría de sus categorías. Asimismo, se obtienen evidencias de conocimientos que sugieren categorías o subcategorías emergentes para dos subdominios: KoT y KPM. Se incluye otro nivel de análisis, sobre los indicadores, cuyo resultado da cuenta de relaciones dentro del conocimiento especializado, interpretadas a la luz del MTSK, para mostrar el carácter especializado del conocimiento del profesor que plantea el modelo.

El capítulo 5, de Discusión, muestra las relaciones dentro del conocimiento especializado, su interpretación desde el MTSK en distintos momentos de la enseñanza del concepto de función y ofrece la discusión de los hallazgos teniendo como referencia la operacionalización del marco realizada en el capítulo 2.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y proyecciones de la investigación.

CAPÍTULO 1. Problemática y Antecedentes

La formación de profesores y el conocimiento del profesor: una relación entre teoría y práctica

El interés en la formación de profesores ha ido incrementándose a nivel mundial, produciendo una gran cantidad de investigaciones abordadas desde distintas perspectivas, como sociales, educacionales, psicológicas, entre otras, y que son objeto de estudio para investigadores, formadores de profesores y profesionales de la educación. Particularmente, el estudio sobre conocimiento del profesor se convierte en un terreno de desafíos e intereses comunes a estas diferentes áreas y no solamente para la pedagogía general o las didácticas específicas. Por ejemplo, Bruns y Luque (2014) incluyen una perspectiva económica de los impactos que causan las características y calidad de los profesores respecto al bajo manejo del conocimiento de los profesores, la pérdida de tiempo en actividades que no son de instrucción y su relación con los aprendizajes de los estudiantes. Según lo expuesto por Ruffinelli (2013), la calidad de los profesores también depende de los programas de formación y de sus exigencias tanto para su ingreso como para la graduación de los futuros profesores. Como sabemos, los programas de formación buscan preparar a los profesores para su labor docente mediante el desarrollo del conjunto de capacidades, habilidades y conocimientos necesarios en su desarrollo profesional, aunque no todos los conocimientos que el profesor utilizará en su práctica serán adquiridos exclusivamente en los programas de formación inicial. Por ejemplo, el Conocimiento Matemático Fundamental -CMF- al que se refieren Castro, Mengual, Monserrat, Albarracín y Gorgorio (2014), contiene el conocimiento adquirido antes y durante la formación del profesor de matemáticas, y que, según los autores, los docentes de la formación deben considerarlo como punto de partida para desarrollar otros conocimientos.

Castro y sus colaboradores (2014) reflexionan sobre la insuficiencia de la formación docente por sí sola para dotar de las competencias y conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas a los futuros profesores. Los autores señalan que "estos conocimientos y competencias sólo pueden desarrollarse a través de años de reflexión sobre su propia práctica docente" (p. 235). En este sentido, la formación del profesor no estaría cumpliendo con el propósito de proporcionar las herramientas necesarias para el ejercicio de la profesión. Así lo señala Ruffinelli (2013) al mostrar los bajos resultados de los profesores chilenos (egresados de pedagogía) en evaluaciones que miden tanto conocimientos disciplinares como pedagógicos. La autora señala que estos resultados pueden estar asociados más a las condiciones en que los futuros profesores ingresan a la carrera de pedagogía que a su formación, lo que nos alerta sobre el impacto que tiene la formación de los profesores en lo que será finalmente su desempeño profesional.

Desde esta perspectiva, esa insuficiencia puede abordarse desde la estructuración de los programas de formación de modo que se promueva la actitud crítica sobre las propias prácticas docentes y sobre los conocimientos que se posean, así como el incentivo al desarrollo de aquellos conocimientos profesionales en que los docentes presenten mayores necesidades.

Por su parte, de acuerdo con la reflexión realizada por García (2005) sobre la formación inicial o continua de profesores, se observa una articulación de dos aspectos clave en dicha formación: la teoría y la práctica. El componente teórico corresponde al *saber*, como batería de conocimiento que el profesor desarrolla durante su formación, ya sea conocimiento de la disciplina, de la didáctica de su disciplina o de la pedagogía en general. El componente práctico, por su parte, corresponde al *saber hacer* del profesor, es decir, las competencias necesarias para ejecutar el proceso de enseñanza y conducir el aprendizaje de sus estudiantes, competencias que se desarrollan mediante la participación en contextos de prácticas pedagógicas, simulaciones (García, 2005) o con el acompañamiento de los profesores mentores (Ruffinelli, 2016). Claramente, los dos componentes se encuentran en estrecha relación pues estas se nutren e inciden entre sí, de modo que el conocimiento del profesor afecta y se ve afectado por su práctica, a través de la cual puede generar nuevos conocimientos o dar sentido a los conocimientos que ya posee.

En este sentido, la relación teoría-práctica puede observarse cuando los profesores movilizan su conocimiento teórico en el desarrollo o creación de situaciones de enseñanza durante su práctica. Flores, Escudero y Aguilar (2013) identifican diferentes contextos en los que es posible observar las manifestaciones del conocimiento del profesor y muestran que en ellos es posible observar el conocimiento disciplinar y didáctico del profesor. Los autores llaman *escenarios* a estas situaciones.

La preocupación por indagar en estos conocimientos disciplinares y pedagógicos no es actual. Desde alrededor de la década del 80, el conocimiento del profesor ha venido cobrando relevancia en las investigaciones, dándose un giro en el enfoque de estas. El trabajo de Shulman (1986) se considera como uno de los puntos de partida de este cambio de enfoque y seminal en la búsqueda por comprender el conocimiento del profesor, pues su propuesta pretendía cambiar el foco con que se venían realizando las investigaciones sobre este tema al abordar, de manera conjunta, el conocimiento pedagógico y el conocimiento de una materia. En esta línea, Ponte (1994) destaca la complejidad del estudio del conocimiento del profesor, pues cada vez surgen nuevas preguntas sobre los tipos de conocimientos y las relaciones que entre ellos se pueden establecer. Por ejemplo, según el autor, surgen las preguntas sobre si el conocimiento necesario para enseñar se trata de conocimiento matemático, de conocimiento de pedagogía, de conocimiento sobre los procesos cognitivos de los estudiantes o de alguna mezcla entre todos estos u otros. Por su parte, Llinares (1996) cuestiona la posibilidad de considerar por separado los componentes o dominios relativos al conocimiento de la materia y al conocimiento del contenido pedagógico específico de esa materia, principal aporte del trabajo de Shulman.

La relevancia de focalizar la mirada en el conocimiento del profesor también es destacada por Ponte (1994), quien apunta al profesor como uno de los elementos más importantes en el contexto de aprendizaje y lo destaca como un componente clave para definir qué es el conocimiento. En este sentido, Pazuch y Ribeiro (2017) señalan que los conocimientos de los profesores repercuten en los aprendizajes de los estudiantes y, además, dan forma a la enseñanza que conducen. Respecto de la importancia del conocimiento de los profesores, Ponte (1994) resalta la necesidad de seguir profundizando en modelos para el conocimiento profesional del profesor, otorgándole un lugar importante dentro de la Didáctica de la Matemática. Esta importancia permite abrir espacios para su estudio en las academias, su divulgación en revistas y discusión en congresos afines. De acuerdo con Carrillo *et al*. (2014), el campo de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas permite que se nutran, mutuamente, la investigación en el área y el desarrollo profesional del profesor.

Hacia un modelo para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Estudiar el conocimiento del profesor implica adherirse a un posicionamiento respecto a cómo se entenderá dicho conocimiento, es decir, una perspectiva para acercarse y observar este conocimiento (Llinares, 1996). Para ello, y en el caso del profesor de matemáticas, se han propuesto diversas caracterizaciones que coinciden en la relevancia de profundizar en lo que el profesor conoce y la importancia de estos conocimientos para comprender sus prácticas. Estas propuestas tienen puntos comunes y desencuentros. Por ejemplo, Bohórquez (2016) examina las propuestas de Ball, Hill y Bass (2005), Ball y Cohen (1999), Bromme (1988), Gómez (2007), D'Amore (1999) y Simon (1997), y observa que todos ellos han aportado diferentes elementos a considerar como parte del conocimiento del profesor, a la vez que proponen separaciones analíticas para los diferentes componentes de dicho conocimiento, pero que en la práctica puede resultar complejo tratarlos como elementos aislados. Las propuestas examinadas coinciden en que el conocimiento profesional del profesor considera el conocimiento disciplinar (de la matemática), el conocimiento curricular (los textos de estudios u oficiales sobre la regulación de la enseñanza-aprendizaje) y los conocimientos de las características de los estudiantes respecto a sus aprendizajes.

Por su parte, Godino (2009), al referirse al Enfoque Onto-Semiótico, repasa algunos modelos del conocimiento del profesor de matemática que surgen de la propuesta de Shulman (1986), afirmando que esta propuesta establece las bases sobre las cuales se han desarrollado diferentes acercamientos al conocimiento del profesor. Siguiendo esta línea, la propuesta del modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT- por su sigla del inglés *Mathematical Knowledge for Teaching*) de Ball, Thames y Phelps (2008), enfatiza en el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido. Uno de los principales aportes del MKT es la inclusión de la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas como parte de los componentes de su conceptualización. El *conocimiento del contenido especializado* (SCK) es definido por Ball *et al*. (2008) como el conocimiento matemático y las habilidades únicas que no son típicamente usados para otros propósitos que no sea la enseñanza de la matemática. Con esta definición, los autores reconocen dentro de su conceptualización la presencia de un tipo de conocimiento exclusivo para la enseñanza de la matemática que distingue al profesor de matemáticas de otros profesionales que también usan la matemática. En la presentación del modelo MKT, los propios autores señalan que aún quedan incertidumbres sobre la ubicación del conocimiento curricular, incluido en la propuesta de Shulman (1986), al interior de algunos de los subdominios propuestos o como un subdominio diferenciado de los otros.

Pese a que el modelo de Ball marca otro punto importante en los estudios sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, la aplicación del MKT no está exenta de complicaciones prácticas, por ejemplo, en las delimitaciones de los subdominios considerados (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Carrillo, Contreras y Flores, 2013). En respuesta a estas dificultades, y como avance en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas, surge el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas o MTSK, por su sigla de *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*. Este modelo mantiene el espíritu del trabajo de Shulman (1986) y las potencialidades del MKT para proponer una nueva conceptualización para el conocimiento del profesor en la que el carácter de especializado comprende a todo el conocimiento y no un subdominio particular.

De acuerdo con Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan (2019), cualquier conceptualización para el conocimiento del profesor de matemáticas, que considere su especialización en la enseñanza de las matemáticas como conocimiento profesional, deberá contemplar el carácter de adaptabilidad al contexto en el que se pone en juego este conocimiento, su condición de situado en dicho contexto, una visión sobre el conocimiento como un todo orgánico que va más allá de una suma de diferentes conocimientos y, además, la condición dinámica que busque comprender cómo el profesor llega a conocer, además de saber simplemente qué es lo que conoce el profesor.

Como señalan Ponciano y Sosa (2018), estudiar el conocimiento del profesor apoyaría la formación de los futuros profesores y a los profesores en ejercicio a fortalecer sus conocimientos disciplinares, a comprender cómo se conecta un tema matemático con otros, desde perspectivas disciplinares y curriculares, y a reflexionar sobre aquello que se requiere saber para la enseñanza de este tema, generando nuevo conocimiento didáctico respecto a sus prácticas. En este sentido, el estudio del conocimiento especializado del profesor puede contribuir a esta relación, mediante la generación de conocimiento sobre la práctica del profesor.

Esta investigación se perfila en el estudio del conocimiento del profesor, atendiendo estos dos grandes grupos de conocimientos: disciplinares y didácticos específicos, bajo el lente de la conceptualización propuesta por el MTSK sobre el (o limitada al) concepto de función.

Conocimiento del profesor de matemáticas sobre el concepto de función

El concepto de función es reconocido por su importancia en el desarrollo de la matemática y por su complejidad (e.g., Dubinsky y Harel, 1992; Farfán y García, 2005; Ponte, 1992; Spivak, 1996; Youschkevitech, 1976), y por las dificultades que genera su aprendizaje (e.g., Sierpinska, 1992). Son numerosos los estudios que abordan el concepto de función o algunas funciones en particular, desde el conocimiento del profesor de matemática o el conocimiento del estudiante para profesor, aspectos sobre la comprensión del concepto, su enseñanza, aprendizaje, aspectos ligados a la epistemología e historia y otros estudios con una perspectiva puramente matemática. La revisión de todas estas investigaciones o reportes busca lograr la sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 2002) respecto a nuestro tema de estudio, permitiendo identificar algunos elementos del conocimiento del profesor sobre el concepto de función que pueden encontrarse durante la enseñanza.

Como hemos señalado, existe un gran número de investigaciones sobre el concepto de función que abordan sus aspectos históricos y epistemológicos (e.g., Dubinsky y Harel, 1992; Ruiz-Higueras, 1994; Roque, 2012; Sastre, Rey y Boubbe, 2008), su fenomenología (Rico, 1997), las dificultades en su aprendizaje (e.g., Akkoç y Tall, 2003; Jones, 2006), las formas de comprenderla (e.g., Sfard, 1991), como objeto de enseñanza (e.g., Figueiredo, Contreras y Blanco, 2015), las representaciones semióticas usadas durante la enseñanza (Rodríguez-Flores, Picado-Alfaro, Espinoza-González y Rojas-González, 2018) o sus significados (e.g., Ribeiro y Cury, 2018) entre otros. Algunas de estas investigaciones abordan el conocimiento del profesor o de los estudiantes para profesor sobre la función (e.g., Castro *et al*., 2014; Rodríguez-Flores *et al.*, 2018; Espinoza-Vásquez, Zakaryan, y Carrillo, 2018; Ruiz-Higueras, 1994; Wilhelmi, Godino, y Lasa, 2014), que es nuestro foco.

Por ejemplo, Pazuch y Ribeiro (2017) realizan una revisión bibliográfica de artículos, capítulos de libros y comunicaciones en congresos publicados entre los años 2002 y 2016 sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática abordando dos ejes: Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y el Conocimiento profesional del profesor de matemáticas en el concepto de función. En ese trabajo, los autores identifican diferentes propuestas para comprender el conocimiento profesional del profesor, cuyo referente teórico es la propuesta de Shulman; muestran la metodología de los trabajos revisados y los principales resultados respecto al conocimiento del profesor sobre el concepto de función. Pese a que la mayoría de los estudios presentados involucran a estudiantes para profesor de matemáticas, los autores destacan la importancia de abordar el conocimiento del profesor de matemáticas en ejercicio sobre el concepto de función desde la perspectiva de su conocimiento profesional.

El abordaje de la función como tema central ha producido muchas investigaciones acerca del conocimiento del profesor o futuro profesor en las que se abordan aspectos puntuales sobre ella. Por ejemplo, Hitt (1998) muestra las dificultades que presentan profesores de secundaria respecto a la representación de la función. Ribeiro y Cury (2018) y Dubinsky y Harel (1992) señalan la importancia de estudiar la función *per se* y como parte del conocimiento del profesor de matemáticas. Otras investigaciones abordan la forma de comprender la función (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, y Nichols, 1992; Sierpinska, 1992) y la identificación de las propiedades que la caracterizan (Even, 1990). Esta caracterización puede estar representada por el conocimiento de la definición de función y el significado que se le atribuye (e.g., Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018).

Por su parte, Wilhelmi *et al*. (2014) también identifican algunos conflictos que se producen en el conocimiento del profesor sobre la función cuando inician en el tratamiento del concepto de variable. Según los autores, en la formación del profesor se estabilizan concepciones, a veces erradas, sobre el concepto de variable, asunto que fue trabajado en las clases de matemáticas previas a la formación del profesor y que su formación universitaria como profesor no abordó. Este asunto coincide con la idea general expuesto por Castro *et al*., (2014) sobre contenidos que la formación inicial del profesor deja fuera al suponerlos conocido por los profesores en formación. El caso analizado por Wilhelmi y su equipo aborda la distinción entre incógnita y variable, la que no es del todo clara en los futuros profesores, y ello puede repercutir en la comprensión de los conceptos ecuación y función.

Así como se espera que el profesor de matemáticas tenga un conocimiento profundo del tema que enseña (Ma, 1999), el conocimiento de la didáctica de la disciplina también juega un rol fundamental, tanto en el logro de resultados de aprendizaje de los estudiantes (e.g., Castro *et al*., 2014; Pazuch y Ribeiro, 2017), como en la formación del profesor. Los resultados presentados por De la Rosa (2003) sobre la enseñanza de la función muestran dificultades de los profesores sobre las representaciones de la función. Particularmente, en la construcción, en el tratamiento y en la conversión de representaciones para este objeto. Asimismo, señala que los profesores tienen arraigada la idea de función como aquella representada por una expresión algebraica, evocando a la continuidad de la función tal como lo consideraba Euler en el siglo XVIII. De la Rosa destaca el conocimiento de los profesores sobre la ubicación curricular del concepto de función y agrega que es necesario que los profesores cumplan con los programas de estudio escolares y que puedan generar un repertorio de conocimientos basales del estudiante que son necesarios para estudiar los temas posteriores.

Como parte de este repertorio se encuentra la disponibilidad de distintos recursos para la enseñanza del concepto de función, asunto que es estudiado por Figueiredo, Contreras y Blanco (2012; 2015), quienes abordan las ejemplificaciones y las diferentes representaciones que producen los profesores sobre la función en relación con la enseñanza de este tema. Por ejemplo, Figueiredo *et al*. (2012) muestra que los ejemplos que siguen de la definición del concepto sirven para concretar la definición del concepto, mientras que los contra ejemplos y los no ejemplos permiten establecer los límites del concepto. Para los autores, el repertorio de ejemplos y la capacidad de seleccionarlos de acuerdo a los propósitos de enseñanza, ya sea para consolidar el concepto de función, para que el estudiante aborde de manera autónoma el concepto o lo aplique dentro o fuera de las matemáticas, constituye un nivel de conocimiento especializado del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza. Steele, Hillen, y Smith (2013) también abordan el uso de ejemplos y la capacidad del profesor de producir definiciones para la función, considerando las propiedades de unicidad en la asignación de imagen y la arbitrariedad de los conjuntos involucrados. Asimismo, los autores muestran la importancia que tiene para los profesores conocer las conexiones entre las diferentes representaciones de la función que ellos proponen en sus prácticas. Por su parte, Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) abordan el conocimiento del futuro profesor sobre las transformaciones entre distintas representaciones de la función, la interpretación de estas y el análisis de propiedades de las funciones (crecimiento, concavidad, valores extremos y pendiente de la recta) en la resolución de problemas.

El trabajo de Rodríguez-Flores *et al*. (2018) aborda el conocimiento del profesor sobre algunos conceptos básicos de la función, logrando identificar diferentes conocimientos desde la perspectiva del modelo MKT de Ball. En el trabajo de Rodríguez-Flores y sus colaboradores, se identifica, como parte del conocimiento del profesor, el uso de contextos para el planteamiento de tareas, las representaciones algebraicas, verbales, icónicas, numéricas y gráficas para la función, las que permiten al profesor introducir los conceptos de variable dependiente e independiente. Además, los autores destacan el uso del lenguaje preciso por parte del profesor para referirse a los conceptos asociados a la función, el conocimiento de procedimientos alternativos y tradicionales, el conocimiento de significados para las variables y el conocimiento de las representaciones junto con las relaciones entre ellas. El trabajo de Rodríguez-Flores *et al*. (2018) da cuenta de la complejidad intrínseca del conocimiento del profesor.

Por su parte, Tasdan y Koyunkaya (2017) también abordan el conocimiento sobre el concepto de función, esta vez, en los futuros profesores de matemáticas, utilizando como marco teórico de referencia el modelo MKT de Ball y sus adaptaciones para este tema realizadas por Nyikahadzoyi (2015) y Steel *et al*. (2013), incluyendo una lista de indicadores de conocimiento sobre el concepto de función.

Los resultados del estudio de Tasdan y Koyunkaya dan cuenta de que el origen, la definición, las representaciones, los significados y la comprensión del concepto parecen ser factores importantes en la estructuración del conocimiento matemático del profesor (o futuro profesor) y de su conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de la función. Los futuros profesores que participaron de este estudio muestran dificultades para explicar matemáticamente el concepto de función, un uso inadecuado del lenguaje formal en la presentación de la definición de función y la desconexión entre diferentes acercamientos para la función: como proceso y como procedimiento. Los autores atribuyen estas dificultades a la falta de experiencia de los futuros profesores en la enseñanza del concepto.

Respecto del conocimiento del profesor sobre sus estudiantes, Alpízar, Fernández, Morales y Quesada (2018) muestran diferentes errores y dificultades de los estudiantes que son reconocidas por los profesores en el estudio de la función lineal. Por ejemplo, se muestra que el profesor conoce la dificultad de los estudiantes al ubicar puntos en el plano cartesiano para determinar la representación de la función, sobre modelar con funciones lineales problemas dados en lenguaje natural, dar interpretación a los parámetros de la función $f(x)=ax+b$ o identificar la pendiente de la recta con el parámetro a.

Otro grupo de investigaciones revela las dificultades que tienen los propios profesores en ejercicio y en formación respecto al propio aprendizaje de la función (e.g., Akkoç y Tall, 2003; Carlson y Oehrtman, 2005; Dubinsky y Harel, 1992; Even, 1990; Ponte, 1992; Ruiz-Huigueras, 1994). Particularmente, la definición moderna de función constituye, en sí misma, una dificultad debido al formalismo y rigurosidad que se ha pretendido para este objeto matemático (e.g., Youschkevitech, 1976; Zuffi y Pacca, 2002).

Las investigaciones anteriores aportan elementos sobre el conocimiento del profesor acerca del concepto de función, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje y pretenden mostrar lo complejo que puede llegar a ser su estudio cuando se busca conseguir una imagen de lo que un profesor sabe/debe saber sobre la función y el rol de este conocimiento en la enseñanza de este tema. En esta investigación abordamos este desafío y nos preguntamos cómo es el conocimiento especializado que manifiesta un profesor durante la enseñanza del concepto de función, pregunta que estructura y guía este trabajo. La exposición de las investigaciones anteriores busca, por un lado, mostrar lo relevante que resulta el abordaje de este tema desde distintas aristas, considerando distintos conocimientos, para nutrir la formación de los profesores de matemáticas y, por otro lado, sirve como punto de partida para generar una imagen de aquello que puede encontrarse en la caracterización del conocimiento especializado del profesor, a la vez que motiva el desarrollo este trabajo.

Como hemos señalado, el interés de esta investigación está puesto en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre el concepto de función. Particularmente, nos ponemos como objetivo caracterizar el conocimiento especializado (en el sentido de Carrillo *et al*., 2018 y Scheiner *et al*., 2019) de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función que manifiesta durante la enseñanza. Centramos nuestra mirada en un profesor y en contexto de la sala de clases para observar el conocimiento que pone en juego con la intención de enseñar, en la interacción entre el conocimiento matemático sobre la función y el conocimiento didáctico asociado a este contenido a la luz del MTSK. La elección de este modelo se basa en que él corresponde a una conceptualización para el conocimiento del profesor que, por una parte, se enfoca en el profesor de matemáticas, ubicando a la matemática como elemento central y articulador y, por otro lado, contempla tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico de la matemática (o de un tema particular) de manera integrada a través de su carácter especializado (Carrillo *et al*., 2018). De acuerdo con los autores del modelo, el MTSK propone una división artificial en subdominios para el conocimiento del profesor cuya definición detallada de sus categorías constituye una herramienta que permite analizar el conocimiento que el profesor pone en uso (Carrillo *et al*., 2018). En este sentido, el carácter de especializado con el que el MTSK considera el conocimiento del profesor comprende a todo el modelo y se basa en que los conocimientos de los diferentes subdominios se manifiestan de manera integrada durante la práctica del profesor, en contraste con el MKT que considera el conocimiento especializado como uno de los subdominios del modelo.

CAPÍTULO 2. El MTSK como marco teórico

Antecedentes sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas

En las últimas décadas, se han realizado diversas conceptualizaciones para el conocimiento del profesor, abordándolo desde diferentes perspectivas. La mayoría de ellas ha tomado como punto de partida el trabajo aportado por Shulman (1986), que se considera como seminal en la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor. El trabajo de Shulman constituye un acercamiento a la comprensión del conocimiento del profesor como conocimiento profesional mediante el cambio en el foco de investigación. En términos del propio autor, el énfasis de las investigaciones estaba puesto en aspectos más bien pedagógicos generales: manejo de la sala de clase, de los aspectos de la planificación, organización de actividades y evaluación de los estudiantes. La nueva orientación de las investigaciones apuntará a cuestionamientos tales como: ¿de dónde vienen las explicaciones del profesor? ¿Cómo deciden los profesores qué enseñar? ¿Cómo lo representan? ¿Cómo preguntan a los estudiantes sobre ello? ¿Cómo tratan problemas de comprensión?, considerando el contenido de las lecciones, *subject matter* (Shulman, 1986), como parte importante de lo contemplado como conocimiento del profesor.

Dicho cambio de perspectiva conlleva a considerar un nuevo enfoque para las investigaciones posteriores al trabajo de Shulman, lo que se denomina como el paradigma perdido (Shulman, 1986). Este paradigma considera investigar de manera conjunta tanto aspectos pedagógicos como del contenido de una materia. Uno de los aportes más destacados de Shulman es la consideración de tres grandes grupos de conocimiento del profesor: el Conocimiento del Contenido (Subject Matter Content Knowledge), el Conocimiento Pedagógico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge) y el Conocimiento del Currículum (Curricular Knowledge). Esta conceptualización del conocimiento profesional del profesor, mediante estos grupos, busca dar cuenta de la complejidad del conocimiento del profesor. A continuación, se describe sucintamente cada uno de estos conocimientos.

- El Conocimiento del Contenido se refiere a aquel que tiene el profesor y la forma en que este se organiza, incorporando aspectos estructurales del contenido y las reglas que permitan determinar si una afirmación es verdadera o falsa. Es el conocimiento del *qué* y también del *porqué*.

- El Conocimiento Pedagógico del Contenido se refiere al conocimiento del contenido para la enseñanza. “I still speak of content knowledge here, but of the particular form of the content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability” (p. 9). Se incluye aquí el conocimiento de ejemplos, analogías y explicaciones potentes para hacer comprensible el contenido a otros. Asimismo, se incluye el conocimiento de un amplio repertorio de variaciones para estos recursos provenientes de investigaciones o la propia práctica.

- El Conocimiento del Currículum se refiere al conocimiento de las indicaciones y contraindicaciones que los programas curriculares incluyen para un determinado nivel escolar, junto con las herramientas y materiales que el profesor puede extraer de estos documentos. Incluye una perspectiva de conocimiento curricular lateral sobre las relaciones del tema que se enseña relacionado con otros temas de otras asignaturas en el mismo nivel escolar y una perspectiva de conocimiento curricular vertical sobre aquellos temas que serán enseñados en años posteriores y que fueron enseñados en años anteriores.

La amplitud que Shulman plantea para estos aspectos del conocimiento, junto con el hecho de no centrarse en una disciplina específica, permite considerar su trabajo como fuente de inspiración y punto de partida para el planteamiento de otras conceptualizaciones para el conocimiento profesional de los profesores. Así ocurre con el caso del modelo *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* - Mathematical Knowledge for Teaching, MKT- propuesto por Deborah Ball y su equipo en la Universidad de Michigan (Ball *et al.*, 2008), quienes centran la mirada en el profesor de matemáticas y en la matemática a enseñar.

Ball y su equipo toman el avance del trabajo de Shulman y lo plasman en un modelo cuyo foco es el conocimiento del profesor de matemáticas, resaltando la importancia que tiene el hecho de incluir el Conocimiento Pedagógico del Contenido junto al Conocimiento del Contenido. Este modelo (MKT) emerge, principalmente, del estudio de la práctica de los profesores de matemáticas de educación básica mientras se busca responder preguntas sobre qué necesita conocer de matemáticas el profesor, cómo y dónde usar este conocimiento en la práctica. El *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* es entendido, según Ball *et al*. (2008), como aquel que es necesario para realizar la labor de enseñanza. Los autores señalan que *enseñar* se refiere a todo lo que hace el profesor para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, lo que incluye no solo las interacciones en la sala de clases, sino que también la planificación de las clases, la evaluación del trabajo de los estudiantes, explicar a los padres el trabajo en clases, entre muchas otras (Ball *et al*., 2008).

El modelo MKT considera dos dominios de conocimientos. El Conocimiento del Contenido (Subject Matter Knowledge) que se refiere al conocimiento matemático del profesor que puede ser compartido con otras personas (Conocimiento Común) y al conocimiento y habilidades que son exclusivas de la enseñanza (Conocimiento Especializado). En este dominio se incorpora el subdominio de Conocimiento del Horizonte del Contenido (Horizon Content Knowledge - HCK) como una advertencia sobre el conocimiento a tener presente acerca de las relaciones entre los temas matemáticos incluidos en el Currículum, pero Ball y sus colegas no están seguros de si este subdominio es parte del Conocimiento del Contenido o si es transversal a otros subdominios.

Por otro lado, el dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) que se refiere al conocimiento del profesor sobre el contenido en relación con su enseñanza (Conocimiento del contenido y de la Enseñanza) y con los estudiantes (Conocimiento del Contenido y los Estudiantes). Además, en este dominio se incluye el subdominio de Conocimiento del Contenido y del Currículum (Knowledge of Content and Curriculum - KCC) que, según los autores, tampoco hay seguridad si este subdominio es parte del Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, si es transversal a otros de los subdominios o si es un subdominio por sí mismo.

Las principales aportaciones del trabajo de Ball y su equipo corresponden a la contextualización del modelo de Shulman para el profesor de matemáticas y la inclusión del Conocimiento Especializado del Contenido (specialized content knowledge - SCK) como uno de los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas. Este modelo considera un subdominio para este conocimiento especializado y un subdominio para el conocimiento común del contenido (CCK), que hace referencia al conocimiento matemático sobre procedimientos y habilidades que no son exclusivos para la enseñanza de la matemática y que otras personas también pueden tener, no necesariamente como profesional de la enseñanza de la matemática, en ese sentido se entiende como conocimiento común.

Con esta inclusión se resalta la singularidad del conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza, distinguiéndolo de profesores de otras asignaturas y de otros profesionales que utilicen matemáticas, definiendo así el conocimiento especializado del contenido (y la especialización) como un subdominio que incluye el conocimiento matemático exclusivo para la enseñanza. En la presentación del modelo, los autores agregan que “los actuales subdominios deben ser continuamente refinados y revisados” (p. 403), mostrando una apertura a posibles (o necesarias) precisiones respecto de las fronteras de cada subdominio. Las investigaciones posteriores dan cuenta de la utilidad del modelo en el análisis de la práctica y conocimiento del profesor (e.g., Rodriguez-Florez et al., 2018), mientras que otras mostrarán que la falta de la delimitación de los subdominios del MKT, o su caracterización mediante acciones en lugar de conocimientos, producen dificultades prácticas al momento de analizar el conocimiento del profesor (e.g., Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017; Flores, Escudero y Carrillo, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), por ejemplo, en el solapamiento que se produce entre los dominios KCS, KCT y SCK (Montes, Contreras, y Carrillo, 2013).

El modelo MTSK aborda este problema de delimitación del subdominio SCK en el modelo MKT y busca eliminar las referencias externas sobre los cuales el SCK se define (Aguilar, 2016), buscando conceptualizar el conocimiento del profesor de matemáticas desde un enfoque intrínseco (Scheiner *et al*., 2019). De acuerdo con Carrillo *et al*. (2014), el MTSK surge como respuesta a estas dificultades detectadas en el MKT, pero a la vez toma como base su potencialidad y la de otros modelos para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Posicionamiento respecto al conocimiento

De cara al estudio del conocimiento del profesor y a la propuesta de una conceptualización para ello, es pertinente establecer cuál es el posicionamiento adoptado por el grupo del SIDM[1] respecto a lo que se entiende por *conocimiento.* La perspectiva del grupo de investigación sobre el conocimiento del profesor está

[1] Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, que es coordinado desde la Universidad de Huelva, España.

marcada por los aportes de Pajares (1992), Ponte (1994) y Schoenfeld (2010), adoptando y adaptando sus definiciones para lo que es conocimiento.

Por una parte, Pajares (1992), en su estudio sobre las creencias del profesor, compara diferentes posicionamientos al respecto y hace una diferenciación entre conocimiento y creencias. En sus hallazgos plantea que hay una relación intrínseca entre ambos, siendo las creencias elementos clave en la interpretación del conocimiento y en la cognición de las personas. Según el autor, la diferenciación usualmente utilizada radica en que "las creencias se basan en evaluaciones y juicios, mientras que el conocimiento se basa en hechos objetivos" (p. 313). A esto se añade que el conocimiento es una estructura organizada de acuerdo con algún esquema y con componentes cognitivos; las creencias, por su parte, poseen un componente afectivo, aunque pueden ser "vistas como una clase de conocimiento" (p. 310).

Ponte (1994) sigue la idea de Pajares (1992) y utiliza el término *conocimiento* para referirse a la "amplia red de conceptos, imágenes, y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos" (p. 199). Según Ponte, esta red abarca las creencias y está construida también mediante ellas como parte del conocimiento. Al considerar estos dos acercamientos a la definición del conocimiento, resulta claro que la propuesta que emerge de estas bases debe abarcar tanto creencias como conocimientos. Debido a ello, la propuesta del MTSK considera un lugar especial para las creencias dentro del modelo, asunto que se abordará más adelante cuando definamos sus componentes.

Según Carrillo *et al*. (2014), las definiciones anteriores, aunque son consideradas como elementos basales sobre el conocimiento, requieren de mayor precisión para ser operativas en investigaciones sobre el conocimiento del profesor. La definición de conocimiento que aporta Schoenfeld (2010) lo caracteriza como la información que tiene disponible el individuo para usar y resolver problemas, para lograr metas o para desarrollar alguna tarea. Esta definición es compatible con las definiciones de Pajares y Ponte, y es la que adopta el SIDM como referencia, sirviendo como base para el posicionamiento frente al conocimiento del profesor.

Schoenfeld agrega a su definición un llamado de atención para los investigadores respecto a la comprensión sobre lo que sabe (o muestra saber) el profesor, señalando que el conocimiento puede no ser necesariamente correcto (Schoenfeld, 2010), no con una consideración negativa sino al compararlo con algún referente de verdad. Esto significa que el investigador, que se propone avanzar en la comprensión del conocimiento del profesor bajo esta perspectiva, debe estar atento a la emisión de juicios de valor sobre el conocimiento que está investigando.

Teniendo estas definiciones sobre creencias y conocimiento, se propone una conceptualización para el conocimiento del profesor en donde se contemplen estos posicionamientos para determinar el espíritu con el que el modelo se gesta.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK

El MTSK, inspirado en el trabajo de Shulman (1986), toma las potencialidades del modelo MKT de Ball *et al*. (2008) y de otros modelos (ver Carrillo *et al*., 2013; 2014) para centrarse en el conocimiento del profesor de matemáticas de cara a la enseñanza. El MTSK propone el conocimiento del profesor de matemáticas con un carácter de especializado, pero sin considerar referencias externas para establecer el significado de esta especialización como lo hace el modelo MKT de Ball. El posicionamiento respecto al conocimiento y los modelos que sirven de inspiración para proponer el MTSK conducen a que esta nueva conceptualización contemple, simultáneamente, el conocimiento de la matemática, el conocimiento didáctico del contenido y las creencias sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, abarcando aquel conocimiento que solo es útil para el profesor de matemáticas para realizar su principal labor: la enseñanza de la matemática.

En esta tarea de comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, el MTSK se presenta como un modelo analítico que permite una interpretación integral del conocimiento especializado del profesor (Rojas, Flores y Carrillo, 2015) con la dualidad de ser, por una parte, una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y, por otra, una herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores *et al.*, 2013), las cuales se definen más adelante.

De acuerdo con Carrillo *et al*. (2014), el MTSK, como todo modelo analítico, separa (artificialmente) el conocimiento profesional del profesor en dominios, subdominios y categorías. Coincidimos con Escudero (2015) cuando señala que el MTSK es un modelo diseñado desde y para la investigación, que busca servir como herramienta teórica y analítica en la identificación y descripción del conocimiento específico del profesor de matemáticas y así comprender la naturaleza del mismo desde un punto de vista sistemático. De esta forma, el modelo busca la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas atendiendo a la naturaleza de este conocimiento, sin pretender ser prescriptivo sobre el conocimiento que debe tener el profesor, sino que más bien está interesado en responder qué sabe/conoce el profesor de matemáticas y cómo es este conocimiento.

La orientación del MTSK va más allá de obtener imágenes del conocimiento del profesor en determinados momentos de la enseñanza (Carrillo *et al*., 2018), también permite, entre otras aplicaciones, la reflexión sobre el conocimiento que puede requerir el profesor en ciertas situaciones, proporcionando experiencias de enseñanza útiles en la formación de profesores. En Carrillo y Contreras (2017) se muestra la aplicabilidad del MTSK a distintas facetas de la formación y desarrollo profesional del profesor junto con las líneas que aún quedan abiertas para conducir investigaciones que avancen en la comprensión del conocimiento del profesor. Entre estas líneas están el diseño de programas para la formación inicial y continua del profesor, el diseño de tareas de enseñanza, el estudio del rol del formador de profesores y el conocimiento necesario para abordar la enseñanza sobre ciertos temas matemáticos. Esto además permite la aplicabilidad del MTSK a trabajos que persigan otros fines. Por ejemplo, Sosa, Aguayo y Huitrado (2013) analizan, junto a un grupo de profesores, algunos errores que presentan los estudiantes y con ello generan un espacio de reflexión y de desarrollo profesional para los profesores. Este tipo de estudios da cuenta de las potencialidades del MTSK en investigaciones en la línea de formación de profesores y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, siendo un referente para el formador sobre aquello que los futuros profesores necesitan conocer (Carrillo, Escudero y Flores, 2014; Carrillo *et al*., 2018). A esto se añaden otras investigaciones que utilizan el MTSK como elemento teórico basal para profundizar sobre alguno de los componentes del modelo y/o caracterizar el conocimiento del profesor sobre temas específicos: polígonos (e.g., Aguilar, 2016; Climent, Carreño y Ribeiro, 2014), el concepto de función (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2017; 2018), números racionales (Rojas, 2014; Rojas *et al*., 2015; Zakaryan, Ribeiro y Valenzuela, 2015), el infinito (Montes, 2015), determinantes y sistemas de ecuaciones (Vasco, 2015), son algunos ejemplos. También existe una línea de trabajo que apunta a relacionar el MTSK con otros modelos, como, por ejemplo, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak (2011) (ver Espinoza-Vásquez, 2016; Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Ribeiro, 2018; Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes y Ribeiro, 2016) que muestran la potencialidad al aplicar ambos modelos, ETM y MTSK, al análisis de una misma porción de datos como complementariedad teórica entre ellos.

En todo lo anterior, el modelo se declara como abierto a revisión y a incorporar los avances fruto de las investigaciones que sirvan para progresar en la comprensión del conocimiento del profesor en su carácter de especializado (Carrillo *et al*., 2018).

El carácter especializado del conocimiento

Una de las principales características del MTSK respecto de otros modelos para el conocimiento del profesor, particularmente, de aquellos que sirvieron de inspiración como lo son el trabajo de Shulman (1986) y el modelo MKT de Ball *et al*. (2008), es el carácter de especializado con el que se considera el conocimiento del profesor.

Esta idea de especialización o carácter especializado del conocimiento es un asunto compartido por los modelos MKT y MTSK; sin embargo, la forma de caracterizar dicha especialización difiere en ellos. De acuerdo con Scheiner *et al*. (2019), un enfoque teórico que apunte a la especialización del conocimiento del profesor debe abordar el conocimiento como un todo complejo en lugar de elementos particionados o facetas del conocimiento que se presentan de manera aislada, sin interacción. El carácter integral con que se aborda esta especialización es clave y requiere, según los autores, considerarlo como una mezcla de conocimientos, en una estructura dinámica, que emergen durante y para la tarea de enseñanza que realiza el profesor y con la característica de que él pueda adaptarlo de acuerdo a su contexto. La propuesta de Scheiner *et al*. (2019) señala que hay, al menos, tres aspectos que deben incluirse en un posicionamiento teórico que apunte a la especialización del conocimiento: lo intrínseco, referido a que la especialización debe ser entendida desde la propia profesión y no basada en comparaciones con referentes externos; lo epistemológico y cognitivo de las matemáticas, referido a la consideración de la génesis y desarrollo de las ideas matemáticas, más allá de un desglose del listado de conocimientos, sino teniendo en cuenta las características del aprendiz donde el profesor debe desempacar (*unpacking*) los contenidos; y la complejidad del conocimiento visto como un todo orgánico frente a la unión de piezas de conocimiento matemático, de modo que esta mezcla de diferentes tipos de conocimientos emerge en una estructura dinámica situada y adaptada al contexto en el cual el profesor realiza su tarea de enseñar.

El MTSK propone una perspectiva del conocimiento cuya naturaleza especializada engloba a todo el conocimiento del profesor que se ha considerado, esto es, la integración de conocimientos matemáticos y didácticos, en todas sus dimensiones (Escudero, 2015). La especialización del conocimiento, en el MTSK, se entiende como propia de/para la labor de enseñanza que realiza el profesor de matemáticas, de este modo, el conocimiento es especializado en la enseñanza de las matemáticas. Montes *et al*. (2013) señalan que "la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas" (p. 404). Por tanto, y de acuerdo con Climent *et al*. (2016), el carácter especializado del conocimiento del profesor en el MTSK está intrínsecamente relacionado con la actividad de enseñanza, propia del profesor de matemáticas más que en la especialización del contenido matemático.

> En este modelo [MTSK], la noción de especialización es intrínseca al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el contenido, de forma que se entiende su contenido como 'especializado', en cuanto a que contempla todos los conocimientos de índole matemática que el profesor pudiera requerir en su labor profesional. (p. 88)

El carácter de especializado para el conocimiento del profesor de matemáticas implica, a su vez, el carácter intrínseco (Scheiner *et al*., 2019) que permite diferenciarlo del conocimiento de pedagogía y psicología general, del conocimiento especializado del profesor de otra materia y del conocimiento especializado de otro profesional de la matemática.

De acuerdo con Carrillo *et al*. (2014), la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas también implica entenderlo como el conocimiento que sólo tiene sentido para él, integrando conocimientos de y sobre la matemática, su estructura, su enseñanza, sobre las características y estándares de aprendizaje y las diferentes formas de interacción con el conocimiento matemático de cara a su enseñanza, así como la relación que se guarda con las creencias sobre matemáticas y las creencias sobre su enseñanza/aprendizaje, teniendo como foco principal el contenido matemático (Carrillo, *et al*., 2013; Escudero, 2015; Flores, Escudero y Carrillo, 2013). Lo especializado será, por tanto, "el resultado de esta interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático y no del conocimiento del contenido en sí como una parte del dominio de conocimiento matemático, necesario para la enseñanza." (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018, p. 310).

Presentación y estructura del modelo MTSK

El MTSK se compone por tres dominios. Siguiendo el espíritu del trabajo de Shulman (1986), y considerando la importancia del que el profesor conozca la materia que debe enseñar, se incluye un dominio del Conocimiento Matemático (MK), que está subdividido en el Conocimiento de los Temas, el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas y el Conocimiento de la Práctica Matemática. También se incluye un dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), que está subdividido en el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. Además, se incluye como tercer dominio el relativo a las Creencias, que se subdivide en Creencias sobre las Matemáticas y Creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La inclusión de este tercer dominio busca generar mejores imágenes para interpretar la práctica del profesor (Carrillo *et al*., 2014).

La diferenciación de estos dominios y sus subdominios tiene fines analíticos, dado que se asume que el conocimiento del profesor no es compartimentado, sino que integrado (Contreras *et al*., 2017). La división analítica que propone el modelo permite un análisis más focalizado y fino sobre el conocimiento del profesor (Carrillo *et al*., 2018; Flores-Medrano, 2015), sin embargo, dicho análisis no debe descuidar la visión global e integradora que caracteriza la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas.

Esta división teórica que se ha realizado no ha sufrido cambios mayores desde el planteamiento inicial del modelo en el congreso Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 8 (Carrillo *et al*., 2013), pero las investigaciones posteriores a esa presentación han permitido reflexionar sobre algunos de sus elementos manteniendo la esencia del modelo. Estas investigaciones que utilizan el MTSK como marco teórico, aportan a su desarrollo y han contribuido a la propuesta de definiciones más precisas para sus dominios, subdominios y categorías, siendo éstas últimas las que han presentado los mayores cambios en cuanto a su organización y delimitación.

Por ejemplo, las investigaciones de Carrillo *et al*. (2014), Contreras, *et al.*, (2017), Liñán, Barrera e Infante (2014) y Rojas (2014), utilizan una categoría para el conocimiento de las *Definiciones* de los temas y otra categoría diferente para el conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos*. Por su parte, Liñán (2017) utiliza la versión de las categorías propuesta por el grupo (SIDM, 2016) donde se reúnen ambas categorías en una sola señalando que a veces es difusa la frontera entre las definiciones y las propiedades en un tema matemático, a tal punto que, en ocasiones, pueden existir confusiones en la identificación del conocimiento del profesor si se las llega a considerar por separado.

En Carrillo *et al*. (2018) se introduce un nuevo nombre para la categoría relativa al conocimiento del profesor acerca de los *intereses y expectativas de los estudiantes sobre un tema matemático* llamándolo *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*. El proceso de desarrollo del MTSK se encuentra abierto a incluir nuevas categorías, emergentes de los nuevos estudios, que involucren aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que no se hayan considerado hasta ahora o refinamientos en la definición de sus categorías. Lo que se pretende es contar con definiciones cada vez más precisas en términos de lo que el profesor usa o necesita en su labor y evitar solapamiento de las categorías (Carrillo *et al*., 2018).

A continuación, se describen los dominios, subdominios y categorías actualizadas desde el año 2013 que se presentan en Carrillo *et al*. (2018). Para ello recurrimos a las diferentes investigaciones que han usado el modelo y presentamos algunos ejemplos para cada uno de los subdominios y sus categorías, extraídos de la profundización en el concepto de función, proponiendo una visión operativa del marco para el estudio del concepto de función.

El dominio del Conocimiento Matemático – Mathematical Knowledge MK

Una de las principales consideraciones que tiene el modelo para el conocimiento especializado del profesor de matemática es el rol central que se le asigna a la matemática, por tanto, resulta fundamental que el profesor conozca en profundidad el contenido matemático que deberá enseñar (Carrillo *et al*., 2014; Escudero, 2015). El dominio del Conocimiento Matemático (Mathematical Knowledge -MK) no se trata exclusivamente del conocimiento de la matemática como disciplina científica, sino del conocimiento de los objetos matemáticos dentro de un cuerpo estructurado de conocimientos y que condiciona su enseñanza y su aprendizaje.

El dominio del Conocimiento Matemático distingue tres aspectos, cada uno de ellos delimita un subdominio de conocimiento matemático: el subdominio del Conocimiento de los Temas como conocimiento profundo del tema, que corresponde a las formas de conocer la matemática disciplinar, reflejando un conocimiento local, el subdominio del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas como la organización de la disciplina y sus conceptos, como un conocimiento global que se refiere a la conexión entre conceptos, y el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática sobre cómo producir y comunicar conocimiento matemático, como un conocimiento de la articulación de la disciplina referido a las formas de proceder en matemáticas (Climent *et al*., 2016). El MK permite obtener información acerca de *qué* y *cómo* conoce el profesor de matemáticas (Carrillo *et al*., 2014; 2018).

Conocimiento de los temas (KoT):

Este subdominio se define como el conocimiento que tiene el profesor acerca del tema inserto en una disciplina científica, la Matemática, y como parte de la matemática escolar, pues el profesor requiere de saber los temas que debe enseñar (Carrillo *et al*., 2014). El KoT del profesor supone conocer el contenido matemático que se desea enseñar como un conocimiento profundo de la matemática elemental (Ma, 1999) junto con sus significados, propiedades y procedimientos de manera fundamentada (Carrillo *et al*., 2018). En este subdominio se integra el contenido disciplinar que figura en manuales y textos matemáticos (Aguilar, 2016) y el conocimiento que se espera aprendan los alumnos, pero con una profundidad mayor a éste (Climent *et al*, 2016). En este subdominio se trata de describir *qué* y *de qué forma* el profesor conoce el tema.

El rol de la matemática escolar en este subdominio constituye un referente para delimitarlo y responder al *qué* conoce el profesor. En él se encuentra el conocimiento avanzado necesario para entender cualquier tema en particular. Esta profundidad se refleja en el *cómo* conoce el profesor los temas matemáticos. No se trata solo del conocimiento de un tema aislado, sino de conocer la estructura conceptual del tema, lo que incluye definiciones, propiedades, la fenomenología, ejemplos específicos que caractericen el tema abordado, formas de representar y el conocimiento asociado al cómo se hacen o utilizan los procedimientos, cuándo se pueden hacer/utilizar, por qué se hacen/utilizan de cierto modo y cuáles son las características de los resultados asociados a estos procedimientos (SIDM, 2016).

A continuación, se describen las categorías consideradas en el subdominio del Conocimiento de los Temas.

La categoría **Definiciones, Propiedades y sus fundamentos** ha sido reformulada desde las primeras presentaciones del modelo (e.g., Carrillo *et al*., 2014), donde se definían por separado una categoría para el conocimiento de las definiciones y otra categoría para las propiedades y sus fundamentos. Actualmente se consideran como una sola categoría (SIDM, 2016; Carrillo *et al*., 2018) por las dificultades en delimitar con claridad la frontera entre las definiciones y las propiedades (Liñán, 2017), pues una definición involucra un conjunto de propiedades del objeto definido y, por su parte, una propiedad puede ser la definición de un tipo particular de objetos. Por ejemplo, la propiedad de inyectividad de una función define a una función inyectiva. Pese a esto, es posible hacer la siguiente distinción:

Definiciones: se refiere al conocimiento del profesor sobre la definición de un objeto matemático, de otras posibles definiciones y al conjunto de propiedades que hacen definible al objeto, dándole sentido y significado. Debido a la naturaleza con que el MTSK considera el conocimiento del profesor, se incluye en esta categoría el conocimiento del profesor sobre definiciones parciales, alternativas y las diferentes formas de mostrar una misma definición, por ejemplo, de manera oral, escrita en lenguaje natural o utilizando lenguaje simbólico matemático.

En el caso particular del concepto de función, los estudios históricos-epistemológicos realizados por diferentes investigadores dan cuenta de las diferentes concepciones que se han tenido en el desarrollo del concepto (e.g., Ruiz-Higueras, 1994; Sierra, González, y López, 1998; Vargas, 2011; Youschkevitech, 1976). Desde la antigüedad hasta la edad moderna, las diferentes concepciones de la función han acompañado el desarrollo de la matemática a través de sus diferentes definiciones, asignando con ello distintas formas de comprender o concebir el concepto. De acuerdo con García y Serrano (2000), se distinguen dos sentidos para la noción de concepción: uno cognitivo relativo al sujeto y otro epistemológico referido a la génesis histórica del concepto. En esta categoría nos referimos a este segundo sentido.

Ruiz-Higueras (1994) expone, en su análisis histórico-epistemológico de la función, diferentes formas en que se ha definido y concebido este concepto. Por su parte, Vargas (2011) recopila diferentes definiciones que distintos personajes relevantes en el desarrollo de la Matemática han propuesto para la función. En lo que sigue se recogen los aportes de estos dos trabajos para presentar las definiciones y concepciones que han caracterizado el desarrollo histórico-epistemológico de la función.

La primera de ellas es ubicada en la antigua civilización babilónica y proviene de la observación de la naturaleza y sus fenómenos lo que llevó a los primeros científicos a registrar los datos observados para su análisis e interpretación. En este periodo se distinguen dos tendencias: describir lo observado mediante tablas de valores y la interpretación de las variaciones de los elementos involucrados en la observación, dando el primer significado al concepto de función como variación de magnitudes. El uso de las tablas de valores dará pie al estudio de relaciones numéricas y a la noción de continuidad previa a su formalización.

Según Ruiz-Higueras (1994), la cultura griega es otro referente, que aportó a la concepción de función las ideas de variable y análisis de movimiento en búsqueda de leyes naturales. Con ello se ve la función como un modelo de fenómenos naturales en los términos de variación o cambio de un estado a otro. Los griegos muestran una marcada separación entre los conceptos de número y magnitud, lo que provocará un obstáculo difícil de superar en la evolución del concepto de función; el número es estático en la aritmética, mientras que la magnitud es dinámica en la geometría. Las comparaciones mediante proporciones entre magnitudes del mismo tipo: áreas con áreas, volúmenes con volúmenes, etc., impedía avanzar en la concepción de función como la conocemos hoy. No será hasta cerca del 1600 con los trabajos de Descartes y Fermat, que estas dos nociones comenzarán a estrechar su relación.

Durante la edad media vuelve el interés por los fenómenos naturales queriendo dar explicaciones racionales a ellos, lo que produjo evidentemente un avance en el estudio de las funciones, especialmente en esta concepción como modelo. Galileo, Kepler, Descartes y Fermat aportaron durante el siglo XIV con sus trabajos estrechando la relación que los griegos tenían disociada entre número y magnitud. Sin embargo, fue Nicolás Oresme (1323-1382) quien da los primeros pasos en el establecimiento de la relación entre variables dependientes e independientes, además de confeccionar las primeras representaciones gráficas para las variaciones entre variables utilizando los términos de latitud y longitud, estableciendo los principios sobre los que Descartes y Galileo realizarán sus trabajos. Esta relación queda sintetizada en la frase de René de Cotret (1985): “Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda.” (p. 73, citado en Ruiz-Higueras, 1994, p. 162)

Hasta el siglo XVIII permanecía la concepción de la función como relación entre cantidades variables. El primero en utilizar el término “función” para indicar la dependencia entre cantidades geométricas fue Leibniz (1646-1716). Jean Bernoulli (1667-1748) elimina la referencia geométrica para definir la función de una magnitud variable como una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes. Euler (1707-1793), estudiante de J. Bernoulli, añade la noción de cantidad variable o indeterminada a la definición de la función hablando de una expresión analítica y los diferentes conjuntos que pueden considerarse para las funciones. Para Euler, la cantidad variable abarca a los enteros, racionales, irracionales, trascendentes y los números complejos, dando indicios de la arbitrariedad de los conjuntos involucrados, pero limitada a conjuntos numéricos.

Además, Euler plantea una definición de función refiriéndola como la curva dibujada "*libero manu ductu*" en un sistema de coordenadas que establece la relación entre x e y como y=f(x). Posteriormente, señala que "… si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x, no importa de qué manera, son llamadas funciones de x" (Euler, citado en Ruiz-Higueras, 1994).

Por su parte, Lagrange (1736-1813) aporta a la definición de función dada por Euler el hecho de que puedan tenerse una o varias variables mezcladas con valores constantes. Señala que el Álgebra es la teoría de las funciones, restringiendo el concepto de función solamente a las funciones analíticas, definidas por series de potencias. Fourier (1768-1830) aporta a la definición la posibilidad de expresar cualquier función por una serie trigonométrica ampliando la gama de funciones que se pueden considerar a otras con no "tan buen comportamiento".

Lobachevsky (1792-1856) amplía la definición al concebir la función también como cualquier condición, conocida o desconocida, de dependencia entre la variable y el valor de la función. En esta definición aún permanece la noción de variación que da origen a la función.

Posteriormente, según Vargas (2011), con la búsqueda de generalidad y rigurosidad, la función será definida por Dirichlet (1805-1859) en términos de una correspondencia arbitraria entre conjuntos numéricos, incluyendo la idea de Lobachevsky sobre relaciones que no poseen una expresión algebraica, por ejemplo, la función de Dirichlet. Dirichlet también incluye en su definición la propiedad de unicidad. Riemann (1826-1866) avanza en la definición de función incluyendo a la última definición la propiedad de exhaustividad.

La definición de función al estilo de Dirichlet ha permanecido sin mayores modificaciones hasta ahora. Youschkevitech (1976) define la función en términos de una igualdad, una relación entre conjuntos numéricos y las propiedades de unicidad y exhaustividad.

> Una función *y* de la variable *x*, *y*=*f*(*x*), es una relación entre pares de elementos de dos conjuntos numéricos *x* y *y*, tal que cada elemento x del primer conjunto *X* se le asigna un elemento *y*, y solamente uno del segundo conjunto *Y*, según la regla definida. (p.2)

Añade que en esta definición la regla o ley puede expresarse mediante alguna expresión analítica, por tabla de valores, una gráfica, verbalmente, etc., mientras dicha regla sea suficiente para encontrar a *y.* Esta definición es posible encontrarla tanto en textos escolares como en algunos de matemática elemental.

En la actualidad, es posible encontrar algunas de estas definiciones de función en distintos libros de matemática. Por ejemplo, en el texto Cálculo Infinitesimal de Spivak (1996), se define provisionalmente a la función como "una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real" (p. 49), señalando que esta definición posee algunos inconvenientes al usar la palabra "regla". En el mismo texto se añade que:

> Una función es una regla cualquiera que hace corresponder números a ciertos otros números, no necesariamente una regla que pueda ser expresada mediante una fórmula algebraica ni siquiera mediante una condición uniforme aplicable a todo número; ni es tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica. (p. 50)

Esta definición no considera la arbitrariedad de los conjuntos involucrados, definiéndose solamente para conjuntos de números reales. Por su parte, el texto Apostol (1999) también entrega una definición inicial de función como una ley, pero no indica los tipos de conjuntos involucrados, dando opción a que la función se establezca para cualquier tipo de conjunto.

> Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el dominio de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el recorrido de la función. Éste puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario. (p. 61)

En ambos textos (Apostol, 1999 y Spivak, 1996), así como en otros usados frecuentemente en la formación matemática universitaria, las definiciones son reformuladas generalizando el concepto a un conjunto subconjunto del producto cartesiano entre dos conjuntos y/o en términos de una relación. Por ejemplo, Apostol (1999) define formalmente la función como un conjunto de pares ordenados (*x,y*) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento, y Spivak (1996) señala que:

> Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (*a,b*) y (*a,c*) pertenecen ambos a la colección, entonces *b*=*c*; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento. (p. 60)

González (2001) y Sierra *et al.* (1998) plantean la definición de función de la siguiente manera: Sean A y B dos conjuntos. Una función *f* es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, tal que (x, y); $(x, y') \in f \Longrightarrow \ y = y'$es Verdadero. En esta definición se contempla la arbitrariedad de los conjuntos *A* y *B*, así como las propiedades de unicidad y exhaustividad.

De acuerdo con Roque (2012) esta definición de función, basada en pares ordenados, corresponde a una perspectiva conjuntista que caracterizó el desarrollo de la matemática en el siglo XIX mediante la búsqueda de rigurosidad y formalismo a través de la teoría de conjuntos. Se debe notar que la definición de función desde esta perspectiva invisibiliza la idea de co-variación de magnitudes que dio origen al concepto. Por otra parte, la cercanía de esta definición con la definición del gráfico de la función como el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ del plano afín, puede llevar a entender la función como su gráfico. Esta situación no siempre es aclarada en los libros de texto. Por ejemplo, Stewart (2012) define el *gráfico* de una función cuyo dominio es D como el conjunto de *pares ordenados* $\{(x, f(x)) | x \in D\}$. Luego señala que la gráfica corresponde a los *puntos* (x, y) del plano tales que $y = f(x)$, es decir, los puntos $(x, f(x))$, sin distinguir entre ambos conceptos.

En cuanto a definiciones alternativas, Tasdan y Koyunkaya (2017) muestran que estas definiciones pueden contener referencias a máquinas, conjuntos y operaciones. Una de las definiciones que los autores exponen es la siguiente definición: "*A* y *B* son dos conjuntos diferentes del conjunto vacío. Una máquina que relaciona un elemento del conjunto *A* con un elemento del conjunto *B* bajo ciertas operaciones, se llama función." (p. 9). Esta definición es calificada como correcta por Tasdan y Koyunkaya, pero agregan que no permite distinguir la función de otros conceptos matemáticos, por ejemplo, la idea subyacente de relación.

Respecto a los ejemplos o tipos de funciones que se estudian en la enseñanza media chilena, uno de los primeros tipos de función que se definen son las funciones constantes y las funciones lineales (MINEDUC, 2016a). La definición de función lineal puede ser enunciada de diferentes maneras, ya sea por su expresión algebraica o por la propiedad de linealidad que cumple. Apostol (1999) señala que las funciones de la forma *f*(*x*)=*ax*+*b*, con *a* y *b* constantes, se llaman funciones lineales, mientras que el currículum chileno las llama funciones afines, siendo las funciones lineales aquellas en las que *b=0* (MINEDUC, 2016b). Por su parte, Villa (2008) define la función lineal en términos de su razón de cambio como aquella que tiene como variación constante (Posada y Villa (2006), citado en Villa, 2008) englobando a las funciones afines y lineales definidas por Apostol. En este caso, las definiciones anteriores también se presentan como definiciones alternativas para la función lineal.

Propiedades y sus Fundamentos del tema: se refieren al conocimiento del profesor sobre las propiedades que se atribuyen a un tema, objeto matemático o procedimiento, que le aportan significado y sentido (Aguilar, 2016). Se incluye el conocimiento de las propiedades del objeto diferentes a aquellas que lo definen, que se deducen de las relaciones con otros objetos junto con su fundamentación matemática. En esta categoría ubicamos el conocimiento sobre los axiomas, teoremas u otras propiedades que justifiquen el trabajo en el tema.

Por ejemplo, las propiedades del crecimiento, la linealidad, la paridad, la inyectividad y la epiyectividad de la función o la existencia de la función inversa, son conocimientos que el profesor puede tener y se contemplarían en esta categoría. Estas propiedades no se incluyen en la definición de la función ni la definen, pero aportan elementos a su red conceptual. Su conocimiento dará cuenta del qué y el cómo conoce el profesor la definición y las propiedades de la función.

Asimismo, estas propiedades de la función dan estructura al conjunto de funciones que se estudiarán según el currículum escolar chileno (MINEDUC, 2016a), pudiendo identificar subconjuntos de funciones y caracterizándolas por las propiedades que cumplen: las funciones inyectivas, las funciones invertibles, las funciones polinómicas, las funciones lineales, etc. El conocimiento de las demostraciones de estas propiedades es también parte del conocimiento de los fundamentos del tema a los cuales hace referencia el nombre de esta categoría.

Por otro lado, las condiciones de unicidad y exhaustividad de la asignación de imágenes y la arbitrariedad de los conjuntos involucrados (Even, 1990) también son propiedades de la función, pero en este caso son propuestas para dar una definición del concepto.

La categoría **Registros de Representación** se refiere al conocimiento del profesor sobre las diferentes formas en las que usualmente se representa un objeto matemático, por ejemplo, los tipos de registros numérico, gráfico, verbal, analítico o material. Se incluye en esta categoría el conocimiento sobre las notaciones, simbologías y vocabulario, usuales o alternativas, para referirse al tema. Además, esta categoría abarca el conocimiento del profesor acerca de cómo estas representaciones se articulan (Duval, 1999; 2006). La inclusión de esta categoría en el MTSK ya ha sido destacada por otros modelos y otras investigaciones que recomiendan que el profesor conozca las representaciones de las ideas matemáticas, sus ventajas, limitaciones y sea capaz de usarlas resaltando la conexión entre ellas (e.g., Amaya *et al.*, 2016; Mitchell, Charalambous, y Hill, 2014). Además, como lo señala Duval (2006), el trabajo matemático, y con los objetos matemáticos, no es posible sin los signos ni las representaciones semióticas, las que exteriorizan la comprensión conceptual y "se deben tomar en consideración en el análisis del pensamiento matemático" (p. 158). En este sentido, el uso de las representaciones semióticas deja ver qué es lo que se ha comprendido y qué significados se le han asignado al objeto matemático.

Puesto que nuestro objetivo es comprender *qué* y *cómo* conoce el profesor el concepto de función (y en general cualquier tema matemático), incluimos en esta categoría aquellas representaciones que se pueden generar para expresar un concepto y la comprensión del mismo. Goldin y Kaput (1996) diferencian entre representaciones internas y representaciones externas; las primeras no son directamente observables en un individuo, sino que lo construye el observador a partir de la observación del comportamiento del individuo, que incluye aspectos verbales, aspectos matemáticos, el comportamiento gestual, que son producto de un proceso de introspección en relación al objeto. "Although the experience of introspection is subjective, the descriptions that result from introspection are observable as, for example, verbal and gestural behavior" (p. 400). Las representaciones internas son inferidas de estas observaciones.

Por su parte, las representaciones externas se refieren a cualquier materialización o configuración observable como textos, gráficos, ilustraciones, ecuaciones, diagramas computacionales, etc., las que son accesibles al observador que cuente con el conocimiento necesario. Estas representaciones dependen de las interpretaciones de las representaciones internas del individuo.

De acuerdo con Mitchell *et al*. (2014), las representaciones contribuyen a asignar significado a los objetos, resaltan ciertos aspectos del objeto o dejan ocultos otros, pero, como señala Godino, Aké, Gonzato y Whilhelmi (2014), todas ellas son formas de expresar la misma idea de función y cada representación conlleva diferentes procesos que se relacionan entre sí.

> La representación gráfica conecta con las potencialidades de la visualización para formar conceptos y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres. (p. 203)

En términos de Duval (2006), la comprensión conceptual surge de la coordinación de diferentes representaciones, las que según lo anterior movilizan diferentes procesos cognitivos. Por esta razón es conveniente identificar la mayor cantidad de representaciones para el objeto matemático, la función en nuestro caso, y observar cuáles de ellas son conocidas por el profesor y si es que existe dicha conversión entre ellas.

Siguiendo a Sierra *et al*. (1998), los tipos de representación para la función son: tablas de valores, descripción verbal, gráficas, fórmulas algebraicas, mientras que para Amaya *et al*. (2016), “los registros más comúnmente usados para representar una función son: analítico algebraico, analítico numérico, gráfico, figural, sagital, coloquial, tabular y el fenomenológico” (p.117). En virtud de lo señalado por Duval (2006) y la categorización de Sierra *et al*. (1998) y Amaya *et al*. (2016), a continuación, exponemos cómo se identifican las diferentes representaciones para la función.

a) Tabla de valores: como organización en dos filas o columnas con los valores de las variables.

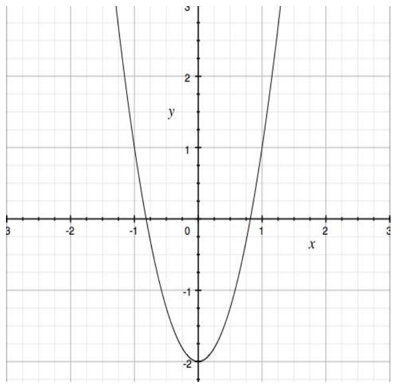
x	0	2	5
y	0	4	10

x	y
0	0
2	4
5	10

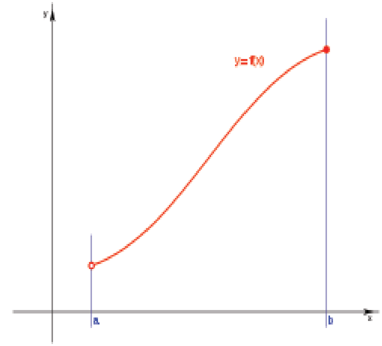
b) Descripción verbal: como un enunciado describiendo la relación entre dos o más variables. Estos enunciados pueden ser fenómenos naturales, sociales, biológicos, económicos, físicos, matemáticos, etc. que expresan una relación entre variables. Por ejemplo: la función que asocia a cada número su cuadrado, la velocidad de un objeto en movimiento en el instante *t* es el cociente entre la distancia recorrida en ese tiempo y el tiempo que demora, la tasa de natalidad de una población es del 3% anual.

c) Gráficas: como representación en el plano de la curva o relación entre las variables. Aquí hacemos la distinción entre aquellos que cuentan con ejes graduados, ejes sin graduar, las que no presentan ejes y las que utilizan otros elementos pictóricos. En este tipo de registro ubicamos las representaciones construidas mediante software de manipulación gráfica (como GeoGebra) que usan un sistema de coordenadas para determinar la gráfica de la función.

c.1) Gráfico cartesiano: (graduado) como una curva construida usando ejes graduados y las coordenadas de los puntos o (simple) usando ejes sin graduar o sin una escala determinada como referencia trazando a mano alzada la curva.

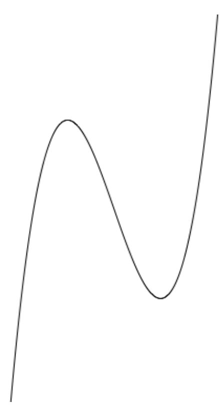


Cartesiano Graduado



Cartesiano Simple

c.2) Gráficos pictóricos: como curva trazada a mano alzada sin utilizar ejes de referencia o mediante diagramas sagitales incluyendo o no representaciones para los conjuntos de partida y llegada.



Mano alzada

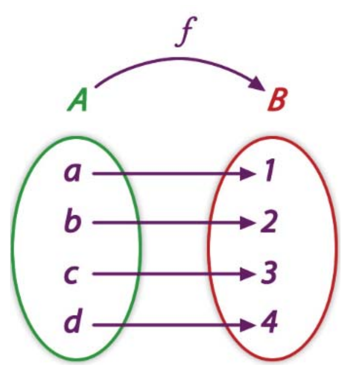


Diagrama Sagital

d) Representación algebraica: como fórmula, expresiones algebraicas o ecuación en la que se incluyen todas las variables de la función y que exprese la relación entre estas variables. Por ejemplo, $f(x)=2x+1$ o $y=x^2$.

A los tipos de representaciones anteriores agregamos la representación de la función como conjunto de pares que proviene de una de las últimas concepciones del concepto e incluye elementos tanto de la representación tabular en cuanto se identifican las parejas de “entradas de la tabla”, como de la representación algebraica en cuanto se identifica el uso de símbolos como la igualdad, las letras y los paréntesis.

e) Conjuntista: como pares ordenados y subconjunto del producto cartesiano entre *A* y *B*, escrito de la forma $f = \{(x,y), (a,b)\ldots\}$ o como una tripleta $f=\{R,A,B\}$ donde

R es la relación entre las variables, *A* es el dominio y *B* es el recorrido. Por ejemplo, representar la función *f = {(0,0); (2,4);(5,10);(6,12)}.*

Asimismo, y de acuerdo a lo contemplado por Goldin y Kaput (1996), incluimos la representación gestual para la función.

f) Corporal o gestual: como conjunto de esquemas gestuales, corporales o movimientos. Esta representación puede añadir dinamismo a lo presentado en un gráfico cartesiano, como lo expresa Vasco (2002; 2010). Por ejemplo, juntar la punta de los dedos índices de cada mano para indicar la inyectividad de una función, marcar el comportamiento ondulatorio de la función seno con las manos y los brazos, marcar con las manos la concavidad o convexidad de una función, abrir y extender los brazos para representar una función constante (Delgado, 2018). Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre lenguaje de señas para referirse a la función o sobre cómo posicionar las manos o los brazos para representar una función cuadrática, creciente, por tramos, etc., o el uso de las manos para representar correspondencias funcionales entre conjuntos estaría considerado en esta categoría.

En esta categoría se incluye el conocimiento del profesor sobre cada una de estas representaciones para la función y el conocimiento sobre la forma en que puede convertirse una en otra, como lo exponen Tasdan y Koyunkaya (2017).

Por otro lado, en esta categoría se incluye el conocimiento acerca de las notaciones y lenguaje utilizado para referirse a los objetos matemáticos. Por ejemplo, conocer el uso de las letras f, g, h como notación (usual) de la función se encuentra en esta categoría que, según García y Serrano (2000), constituyen las primeras notaciones para la función como tal. El conocimiento de estas notaciones usuales para la función (como la letra f), la notación $f(x) = y$, los rótulos para las variables x, y y las notaciones en base a flechas como $f: A \rightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$, se encuentra incluido en esta categoría.

La categoría **Procedimientos** se refiere al conocimiento sobre lo que se "hace" o "utiliza", convencional o alternativamente, al trabajar con un determinado objeto matemático o aplicar algún procedimiento. El conocimiento del profesor sobre el modo de ejecutar ¿cómo se utiliza/hace?, las condiciones necesarias ¿cuándo se utiliza/hace? y el fundamento ¿por qué se utiliza/hace de cierto modo? son preguntas que se responden con el conocimiento incluido en esta categoría sobre los procedimientos asociados a un objeto matemático. Se incluye el conocimiento de algoritmos, la operatoria, las simplificaciones o expansiones de expresiones, las técnicas para resolver ecuaciones y las características de los resultados de estos procedimientos.

Son ejemplos de conocimiento en esta categoría los siguientes:

- Conocer cómo se determinan el dominio, recorrido o el gráfico cartesiano de una función.
- Conocer cuándo se debe resolver una ecuación o cuándo se debe evaluar una expresión para determinar la imagen o pre imagen de una función.

- Conocer por qué se resuelve la ecuación $f(x)=0$ para determinar los puntos de intersección de la gráfica de la función f con el eje X.
- Conocer qué hacer para averiguar si una función es inyectiva.
- Conocer cómo es el uso del test de la recta vertical (Spivak, 1996) para determinar si una relación es o no una función.

La categoría **Fenomenología y aplicaciones** se refiere al conocimiento sobre la aplicabilidad del objeto a situaciones fuera de un contexto matemático y considera "el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, vistos, como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto" (Carrillo *et al*., 2014, p.73).

Se incluye el conocimiento del profesor acerca de aspectos fenomenológicos (Freudenthal, 1983; Rico, 1997), de los usos y aplicaciones del tema matemático en diferentes problemas, el conocimiento sobre modelos atribuibles a dicho tema (Vasco *et al.*, 2016) y situaciones que dan significado al concepto (Gómez y Cañadas, 2016). Por ejemplo, como se mostró en la categoría de definiciones, la fenomenología del concepto de función comienza a describirse cuando se establecen relaciones de dependencia entre variables presentes en el mundo físico y matemático (Puig, 1997) mediante el registro de observaciones astronómicas. La relación entre variables produce la noción de dependencia y co-variación, elemento primordial en la evolución de la función. Asimismo, el desarrollo histórico y epistemológico muestra diferentes formas en que la función ha sido conceptualizada y comprendida. Estas formas van desde la relación de co-variación, pasando por la expresión analítica que describe la relación entre las variables y la versión conjuntista que muestra estructuralmente a la función (Ruiz-Higueras, 1994). De acuerdo con Rico (1997), la abstracción, organización y estructuración de grandes familias de fenómenos dan lugar a los conceptos matemáticos, en este caso, va formando el concepto de función.

Respecto de los modelos que son atribuibles a la función, esta aparece en diversas situaciones que representan fenómenos físicos, sociales, económicos, matemáticos, etc. Al abordar situaciones referidas a cobros por tramo en cuentas de servicios, aparece la función parte entera; la función exponencial permite modelar, por ejemplo, el crecimiento de una población, el desarrollo de un individuo o capitalizaciones de los intereses que genera una cuenta bancaria; la función logaritmo modela la cantidad de energía que se libera durante un movimiento sísmico; la función lineal y afín permite modelar situaciones de cambios lineales o proporcionales (Rico, 1997), así como situaciones de oferta y demanda; la función cuadrática tiene aplicaciones a la economía, permite modelar la trayectoria de un proyectil o es usada en problemas de reflectores parabólicos (Gómez y Cañadas, 2016). El concepto de función está presente en todas las aplicaciones anteriores, relativas a diferentes tipos de funciones.

Diversos autores han abordado el asunto del significado de los objetos (e.g., Godino, 2009; Godino y Batanero, 1994; Pecharromán, 2013). Los significados de los objetos matemáticos han sido mencionados tanto en esta categoría de Fenomenología y aplicaciones como en la categoría de Definiciones, Propiedades y sus fundamentos, sin embargo, ambas categorías no profundizan en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre los significados de un objeto matemático. Podemos considerar los significados del concepto desde una perspectiva amplia y referirnos a ellos como los distintos roles que se le pueden atribuir al concepto, incluyendo la forma de usar el concepto en determinados contextos.

En relación a esto, incluimos en esta categoría de Fenomenología y sus aplicaciones, provisionalmente (pues está sujeta a la obtención de evidencias que validen su consideración especial), el conocimiento del profesor sobre los diferentes significados o concepciones del concepto, como las formas de aproximarse o comprender el concepto vinculándolo con el uso de la función asociado a sus aplicaciones.

Debemos observar que algunos de estos significados no están, necesariamente, vinculados a los modelos que se le atribuyen al tema o la definición que se dé del concepto, por tanto, es posible hacer la distinción (como categorías) entre los Significados, la Fenomenología y aplicaciones y la Definiciones, Propiedades y sus fundamentos. La definición del concepto proporciona un significado, pero es posible asignar otros significados diferentes para el objeto a partir de una misma definición. Por ejemplo, al definir la derivada de una función en un punto, se tiene el significado de límite y puede emerger el significado de pendiente de la recta tangente a la curva o el significado de variación instantánea de la función. En el caso de la función, al definirla como un conjunto de pares ordenados puede asignarse el significado (también) de co-variación de magnitudes, de correspondencia entre dichos elementos, de regla de asignación, de proceso de entrada-salida, de gráfica o de vector, entre otros. Si la función se define como una correspondencia entre conjuntos, pueden emerger los significados de co-variación o proceso de entrada-salida anteriores, pero parecen menos probables los significados de conjunto de pares ordenados o de gráfica.

En el caso de la función, cada una de las definiciones dadas a lo largo de su desarrollo histórico-epistemológico (ver la categoría Definiciones más arriba) le ha asignado un significado diferente: de correlación entre variables, de co-variación, de expresión analítica, procedimiento de cálculo aritmético, gráfica de puntos en el plano o conjunto de pares ordenados. En este sentido se observa una relación directa entre la definición y su significado. Sin embargo, los usos de la función permiten asignarle los mismos significados anteriores y otros que no se restringen a una definición específica, por ejemplo, el significado de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, de proceso de entrada-salida, o el significado de la función como un elemento (un punto o vector) en un espacio de funciones. Estos significados corresponden a diferentes formas de comprender el concepto de función y pueden obtenerse a partir de una misma definición. En este sentido son las aplicaciones de la función las que le atribuyen un significado y contribuyen a comprenderla en sus usos.

Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro (2019) identifican en el currículum chileno seis significados para la función presentes en los programas de estudio o en los textos escolares. Estos significados son: como correspondencia, como relación entre magnitudes, como representación gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y la función desde la teoría de conjunto. Todos estos significados emergen, de acuerdo a los autores, de la evolución histórica-epistemológica del concepto y de sus definiciones. Coincidimos con que los significados estarán en estrecha relación con su definición, sin embargo, deben considerarse también los significados que provienen de las formas de uso que se le da al concepto las que no se limitan a su representación como el caso de la función como gráfico o expresión algebraica.

Por lo anterior, quedamos atentos a la emergencia de evidencias que den cuenta del conocimiento del profesor sobre diferentes significados que le atribuye al concepto de función y el contexto en que ellos se presenten.

Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM):

Al considerar el conocimiento matemático del profesor, el MTSK ha incluido el conocimiento de los conceptos específicos que el profesor enseñará (KoT), pero también el conocimiento del sistema de conexiones que relacionan estos objetos con otros dentro de la matemática (pues las conexiones fuera de la matemática ya están consideradas en la categoría de Fenomenología y aplicaciones del subdominio KoT).

El KSM se refiere al conocimiento de las conexiones interconceptuales que establece/conoce el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea con contenidos previos o siguientes al nivel en el que enseña, de otros cursos o de otros niveles educativos (Climent *et al*., 2016), pero sin considerar necesariamente al currículum como estructurador de estas conexiones (Montes, 2015). En este subdominio se consideran dos aspectos que permiten identificar conexiones de interés para el KSM, y que no son necesariamente excluyentes entre sí. Se trata del aspecto *temporal*, de la evolución del objeto matemático como una visión secuenciadora respecto del incremento en la complejidad o simplicidad que represente esta conexión: conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales desde una perspectiva más avanzada. El segundo aspecto es la *delimitación* de los objetos matemáticos que, por una parte, permite establecer los límites del objeto y, por otro lado, genera conexiones intraconceptuales e interconceptuales. En el KSM se consideran solo las conexiones interconceptuales (Carrillo *et al*., 2018), pues las intraconceptuales y las conexiones con elementos fuera de la matemática se consideran en el subdominio KoT.

De acuerdo con Montes (2015), el KSM es un constructo personal del profesor de matemáticas, lo que quiere decir que las conexiones que conoce o establece el propio profesor determinan la estructura de las matemáticas que conoce el profesor y no se trata del conocimiento de una estructura dada de antemano. Este conocimiento es desarrollado a partir de su formación inicial, continua o durante su experiencia docente y por su propio proceso de aprendizaje, que engloba los conocimientos del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos matemáticos y la forma en que ellos están conectados.

A continuación, se describen cuatro tipos de conexiones que se consideran en este subdominio.

La categoría **Conexiones de Complejización** se refiere al conocimiento sobre aquellas conexiones entre el contenido actual y/o procedimientos asociados al objeto matemático de estudio que siguen en la secuencia (temporal) de complejidad del desarrollo conceptual del objeto matemático o construcción matemática, las que se reflejan en la proyección del contenido actual como precursor para contenidos futuros. Ejemplos de conexiones de complejización para el caso de las funciones serían:

- El conocimiento sobre la cantidad y tipo de raíces de la función cuadrática con relación al resultado del Teorema Fundamental del Algebra sobre la factorización de polinomios.
- El conocimiento del álgebra de funciones (suma, y producto por un escalar) se proyecta al estudio de espacios vectoriales, donde el espacio funciones reales es considerado un ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números Reales, y que en ese espacio vectorial las funciones son (ejemplos de) vectores.
- El conocimiento del rol de la función en la comparación de estructuras matemáticas mediante funciones llamadas morfismos. Por ejemplo, las funciones entre conjuntos, las transformaciones lineales o las funciones lineales.

La categoría **Conexiones de Simplificación** se refiere, de forma análoga a las conexiones de complejización, al conocimiento sobre conexiones entre el contenido actual y conceptos o procedimientos de momentos previos en el desarrollo conceptual o construcción matemática del contenido matemático. Esto se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados que son potenciados por los que le antecedieron (Carrillo *et al*., 2014). Ejemplos de conexiones de simplificación para el caso de las funciones serían:

- El conocimiento sobre la operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias que definen a la función o que resultan al resolver ecuaciones de la forma $f(x)=k$ como similar a la operatoria con números racionales (Carrillo *et al*., 2014).
- El conocimiento de la aplicación de la función al conteo mediante el establecimiento de funciones biyectivas entre conjuntos, por ejemplo, en el desarrollo de la noción de número y cardinalidad como relación biunívoca entre los naturales y los elementos del conjunto.
- El conocimiento sobre las relaciones de dependencias entre magnitudes que varían o el pensamiento variacional (Vasco, 2002) como concepto precursor del concepto de función.
- El conocimiento sobre las operaciones aritméticas usuales vistas como funciones definidas para dos variables y conocidas como leyes de formación interna (Bourbaki, 1976).

La categoría **Conexiones Transversales** se refiere al conocimiento de conexiones entre distintos temas u objetos matemáticos que poseen alguna cualidad común en cuanto a la forma de comprenderlas o a los modos de pensamiento asociados a ellos. La conexión entre los conceptos no se produce por el grado de complejidad o simpleza respecto al concepto actual, sino que por los procesos (cognitivos u operacionales) o ideas transversales que les subyacen a cada tema. Algunas conexiones transversales para el caso de las funciones pueden ser:

- La relación entre la función lineal y la proporcionalidad directa se establece desde una perspectiva analítica-aritmética: ambos objetos presentan la noción de cambio o variación constante entre los valores de las magnitudes involucradas en la proporcionalidad, y entre las variables de la función.
- La conexión entre los puntos en común que poseen los gráficos de dos funciones lineales (la función vista como conjunto de pares) y el determinante de la matriz de coeficientes de un sistema lineal $Ax=B$ de dos ecuaciones y dos incógnitas se establece al relacionar el valor del determinante con la cantidad de puntos en común. En este sentido, la intersección de rectas en el plano es idea que conecta a matrices y funciones. El concepto de recta incide en esta conexión de modo que el cálculo de la intersección de las dos rectas que representan a las dos funciones afines puede ser identificado como un sistema lineal $Ax=B$.
- La función afín y la recta euclidiana también pueden ser conectadas transversalmente cuando se considera la representación gráfica de ambas. La construcción de la representación de la función afín como una recta en el plano puede ser obtenida mediante los axiomas de incidencia en la geometría euclidiana que señalan que por dos puntos pasa una única recta.

> En la geometría euclidiana, recta es un concepto primitivo; luego se dice que la representación gráfica de la ecuación $y=mx+b$ en un sistema cartesiano es una recta. El término recta está usado en dos situaciones diferentes, hecho que debe ser justificado. (Winicki, 2006, p. 533)

La categoría **Conexiones Auxiliares** se refiere al conocimiento sobre las relaciones del contenido actual con otros objetos o procedimientos que prestan ayuda o sirven como herramienta para la comprensión del trabajo con el objeto y que están fuera de su estructura conceptual, pues de otro modo se trataría de una conexión intra-conceptual. Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016) señalan que cualquier objeto matemático puede ser utilizado como una herramienta, así como cualquier herramienta puede ser estudiada como un objeto matemático. Para precisar la idea de auxiliar, usamos la noción de herramienta que menciona Verdugo (2017), que utiliza el término de *herramientas operacionales* para señalar aquella propiedad necesaria con el fin de resolver una tarea. Algunas de estas herramientas operacionales estarán fuera de la red conceptual del objeto actual y permitirán identificar una conexión auxiliar.

En estas definiciones para herramientas, la relación con el objeto de estudio está dada por su aplicación y utilidad para la resolución de una tarea asociada al objeto de estudio. Desde el conocimiento de las conexiones auxiliares en el MTSK es posible precisar esta relación con el objeto en cuanto a la delimitación del mismo.

Por ejemplo, el principio de inducción no pertenece a la estructura conceptual de las sucesiones (como funciones de dominio natural), pero puede ser utilizado para demostrar su crecimiento o decrecimiento. En este caso se trata de una herramienta operacional en el estudio de la sucesión (Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez,

2018) y su uso refleja el conocimiento de una conexión auxiliar entre sucesión e inducción. Por otro lado, el crecimiento o decrecimiento es una propiedad de las sucesiones -de las funciones en general- que se puede utilizar en la demostración de su convergencia. En este caso, la convergencia de la sucesión es parte de la red conceptual de las sucesiones, por tanto, se trataría de una conexión intra-conceptual, contemplada en el KoT.

Algunos ejemplos de conexiones auxiliares para el caso de las funciones pueden ser:

- La conexión entre función y ecuación mediante el uso de la ecuación $f(x)=k$ para determinar la pre imagen de k, particularmente la ecuación $f(x)=0$ para determinar las raíces de la función f, pues la ecuación no es una cualidad o característica de la función (Carrillo *et al*., 2014).
- La conexión entre las propiedades de la desigualdad de número reales o el orden en R y el crecimiento o decrecimiento de una función, donde la primera permite realizar el trabajo con la segunda. Del mismo modo se puede establecer una conexión auxiliar entre la estructura de los números Reales como un cuerpo al ser usada como herramienta en la resolución de ecuaciones o inecuaciones para encontrar imágenes, pre imágenes, dominio, recorrido, etc., para una función.

El conocimiento de la forma en que se produce la conexión auxiliar entre dos conceptos implica conocer la distinción entre ambos. En el caso de la función, Wilhelmi *et al*. (2014) muestran que esta diferenciación no es del todo clara para algunos estudiantes para profesor de matemática, existiendo confusión entre los conceptos de ecuación y función o tratándolos como sinónimos.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM):

El estado actual de avance de las investigaciones realizadas con el MTSK como marco teórico muestra que para este subdominio aún no se cuenta con categorías, sino que solo se tienen indicadores para su descripción (Carrillo *et al*., 2018; SIDM, 2016). Las dificultades para establecer estas categorías se deben, principalmente, a la complejidad de caracterizar las prácticas matemáticas y catalogar el conocimiento que las sustentan.

El concepto de práctica que se entiende en el KPM es relativo a la actividad matemática y no al proceso de enseñanza, pues el término práctica también es utilizado para referirse a la labor docente en el aula englobando las interacciones entre profesor y estudiante (Carrillo *et al*., 2018).

Este subdominio da importancia a que el profesor conozca, además de los resultados matemáticos del tema de estudio, cómo se producen dichos resultados como construcción del conocimiento matemático. En este sentido, el KPM comprende el conocimiento del profesor sobre la actividad matemática como aquella que permite producir conocimiento matemático; saber cómo se procede en general en matemáticas o en un tema específico, lo que incluye las formas de conocer, crear o producir en matemática, así como los aspectos de la comunicación, el razonamiento y la prueba (Carrillo *et al*., 2013; Climent *et al*., 2016; Vasco *et al*., 2016; Zakaryan *et al.*, 2015) involucrados en las actividades mencionadas. Se incluye en este subdominio el conocimiento sobre la exploración, el establecimiento de relaciones y equivalencias, la generalización, la modelación, el razonamiento, la argumentación, la demostración, la comunicación y la pertinencia o adecuación de cada una de estos aspectos de acuerdo al contexto en que estas acciones se desarrollan. Asimismo, se incluye el conocimiento de la lógica que sustenta estas.

Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre cómo definir y las condiciones que debe cumplir una definición para que se considere como tal es conocimiento incluido en este subdominio, asimismo el conocimiento del rol de los símbolos y de las reglas en la escritura para la comunicación de ideas matemáticas, sintaxis matemática, se incluye en el KPM.

Inicialmente, el KPM incluyó dos categorías acerca del conocimiento sobre la práctica matemática: las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a un tema específico (Carillo *et al*., 2014), proponiendo algunos indicadores de conocimiento (SIDM, 2016; Carrillo *et al*., 2018) para este subdominio.

a) Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.
b) Formas de validación y demostración.
c) Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.
d) Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.
e) Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación).
f) Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

Todos estos indicadores están formulados como conocimiento sobre cómo se desarrolla la matemática independientemente del tema abordado, usado para trabajar genéricamente en matemáticas (Escudero, 2015).

Ejemplos de conocimiento en este subdominio para la función son:

- Conocer que el principio de inducción puede ser utilizado para demostrar propiedades en conjuntos infinitos numerables (Carrillo *et al*., 2014).

- Conocer el significado y rol de la implicancia o equivalencia en el enunciado y en la demostración de una propiedad, por ejemplo, en la inyectividad de una función.

- Conocer el rol de los cuantificadores en una definición y el modo de escribir correctamente la proposición cuando ambos están presentes para transmitir la idea matemática correspondiente. Por ejemplo, en la definición de función de A en B, no resulta la misma idea al decir *para todo elemento de A, existe un elemento en B* que al decir *existe un elemento en B, para todo elemento de A*, lo que transmite una idea diferente a la inicial (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019).

Los indicadores propuestos para el KPM no constituyen una lista exhaustiva, pero permiten agruparlos en aquellos referidos a la comunicación de ideas matemáticas (c, f), a la validación de proposiciones (b) y a las formas de proceder en la resolución de problemas (a, d, e). Estas agrupaciones deben ser confirmadas y sustentadas en evidencias de conocimiento para considerarlas como una posible categorización del KPM, por tanto, el análisis de los datos mantendrá presente esta agrupación.

En particular, este subdominio se encuentra “abierto” a categorías emergentes y a la revisión de las categorías que son fruto de la profundización en el conocimiento que incluye el KPM que han realizado algunas investigaciones al respecto (e.g., Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019; Flores-Medrano, 2016), en las que se propone la inclusión de las prácticas de demostrar, definir, ejemplificar y usar heurísticos (Flores-Medrano, 2016). Consideramos que estas prácticas tienen cabida en algunas de las categorías propuestas, de acuerdo al rol asignado; demostrar en la categoría de formas de validar, definir y ejemplificar en la comunicación de ideas matemáticas, el uso de heurísticas en la categoría de formas de proceden en la resolución de problemas. Sin embargo, la tarea de demostrar la veracidad de una proposición puede ser, en sí misma un problema sobre el cual se debe proceder. En ese caso la práctica de demostrar tendría espacio en dos categorías lo que genera conflicto en la delimitación de las categorías. Por tanto, adherimos a la apertura con que debemos considerar el conocimiento contemplado en el KPM y la eventual categorización.

El dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido - Pedagogical Content Knowledge PCK

Del mismo modo como se consideró el dominio del Conocimiento Matemático, en el MTSK se considera un dominio del conocimiento del profesor respecto a la enseñanza, a las características del aprendizaje del tema que enseña y aquello que está estipulado que se debe aprender en determinado nivel escolar.

Para comenzar a definir este subdominio debemos señalar que el nombre de *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), introducido por Shulman, se ha tomado y reinterpretado en el MTSK al considerar la característica de especializado para el conocimiento del profesor.

De acuerdo con Shulman (1986), en el PCK se entiende que el profesor debe transformar el contenido en algo enseñable y hacerlo comprensible para los alumnos, seleccionando los materiales a utilizar, los ejemplos, analogías, explicaciones y metáforas con el fin de adaptar el contenido a los alumnos teniendo en cuenta sus intereses, dificultades, fortalezas, etc. Este conocimiento se va construyendo mediante la síntesis entre los conocimientos de la materia, pedagógico general y de los alumnos, al que afecta también la propia biografía del profesor (Medina y Jarauta, 2013).

En el dominio PCK de Shulman se incluye la comprensión de lo que hace a un tema fácil o difícil de aprender, las preconcepciones que posean los estudiantes y las estrategias más fructíferas para organizar la comprensión del tema, dejando el conocimiento curricular del profesor como otro dominio. En el MTSK, el PCK incluye estos conocimientos y otros, pero el planteamiento del PCK se alinea con el carácter de especializado del modelo. El PCK no se entiende de manera separada del Conocimiento Matemático, sino que representa una parte del conocimiento del profesor que necesita ser complementada con el MK (Carrillo *et al*., 2018).

PCK se traduce como *Conocimiento Didáctico del Contenido* para hacer la distinción entre el conocimiento pedagógico general de cualquier contenido y el conocimiento de la didáctica de la matemática, por ejemplo, sobre la gestión de la sala y los factores socioeconómicos que intervienen en la clase como conocimiento pedagógico general y el conocimiento de la organización de los temas matemáticos, las formas o estrategias en que estos pueden ser enseñados y las características específicas que tiene su aprendizaje.

En el MTSK, aunque se reconoce la importancia del conocimiento del profesor sobre la pedagogía en general, como por ejemplo la organización del curso o las dinámicas de trabajar en grupos (Climent *et al*., 2016), se diferencia este conocimiento general del conocimiento didáctico específico del contenido matemático que enseñará el profesor, quedando fuera del foco del MTSK. El foco del PCK está puesto en el conocimiento profesional del profesor de cara a la enseñanza de la matemática, esto es, en el conocimiento especializado del profesor donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo *et al*., 2014).

A continuación, se describen los tres subdominios en los que se divide el PCK junto con sus respectivas categorías. Este dominio ha sido estudiado en profundidad y definido en detalle por Escudero (2015), cuyos aportes a las definiciones de los subdominios y categorías serán utilizadas en este trabajo.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):

Siguiendo lo señalado por Montes (2015), el subdominio KMT parece solaparse con el modelo completo, pues en el MTSK se entiende que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas está dada por la integración de todos los subdominios de cara a la enseñanza de la matemática como labor del profesor. Sin embargo, en este subdominio debemos distinguir aquel conocimiento del profesor sobre la enseñanza de la matemática donde el contenido condiciona a esta tarea.

Este subdominio no se trata de conocimiento matemático por un lado y conocimiento de la enseñanza por otro, sino que se integran el conocimiento matemático con el conocimiento sobre su enseñanza (Carrillo *et al*., 2014), quedando estrechamente relacionado mediante las decisiones que tome el profesor respecto a las estrategias de enseñanza con diferentes significados, representaciones, ejemplos y recursos que serán utilizados para acercar a los estudiantes al contenido matemático, esto es, hacer comprensible el contenido a otros (Shulman, 1986).

El conocimiento de este subdominio puede estar fundamentado en la experiencia de aula del profesor (como teorías personales de enseñanza), o en su formación académica (como teorías institucionalizadas de enseñanza) recibida en instituciones formales de estudio (Universidades o Centros de formación de profesores) o puede ser adquirido por motivación personal del profesor a través de su experiencia.

La acción de enseñar involucra conocimiento sobre cómo llevar a cabo esta enseñanza, conocimiento sobre (distintas) estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo de las capacidades, habilidades y destrezas matemáticas procedimentales o conceptuales en los estudiantes. El KMT permite interpretar las decisiones que toma el profesor respecto a lo que enseña y cómo lo enseña, pues las elecciones sobre el uso de determinados recursos, diferentes representaciones y estrategias de enseñanza, requieren que el profesor conozca si sus usos son aplicables y pertinentes en la enseñanza del tema de estudio, considerando sus características matemáticas y sus potencialidades. Estas elecciones no son arbitrarias, como lo señalan Bosch y Gascón (2001), sino que están fundamentadas en el conocimiento del profesor sobre los beneficios que ellos proporcionan a la enseñanza.

Se incluye en este subdominio el conocimiento del profesor sobre las distintas actividades, tareas, analogías, metáforas o ejemplos, así como los conocimientos sobre el potencial y limitaciones que pueden tener los recursos materiales o virtuales disponibles para la instrucción y hacer que los estudiantes descubran mediante la manipulación de ciertos conceptos matemáticos (Climent *et al*., 2016).

La categoría **Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático** se refiere al conocimiento del profesor sobre teorías específicas de enseñanza de la matemática como la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986; 2007), teorías que pueden ser producto de adaptaciones personales de teorías formales, de resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática o de su experiencia como profesor (Aguilar, 2016), así como la potencialidad y limitaciones de actividades, estrategias y técnicas didácticas asociadas a la enseñanza de un contenido matemático (Carrillo *et al*., 2014; 2018). Se trata de conocimiento que le permite al profesor organizar y dar sentido a la enseñanza del contenido matemático.

Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014) como un referente para el diseño de tareas matemáticas para los estudiantes que puedan incluir, entre otros, el abordaje de propiedades de objetos matemáticos desde diferentes perspectivas favoreciendo los procesos de visualización y construcción de estos objetos (e.g., Guerrero-Ortiz y Henríquez -Rivas, 2016).

De acuerdo con Tall *et al*. (2000), los estudiantes deben construir una imagen conceptual de la función que incluya los aspectos más importantes del objeto. De aquí el profesor puede jerarquizar estos aspectos e iniciar con aquellos más relevantes que permitan una mejor comprensión de la función.

Por ejemplo, el profesor puede conocer las fases de un proceso de modelación (e.g., Bassanezi, 2002) que estructure la enseñanza de un tipo de función particular como se muestra en Villa (2008). De acuerdo con Vasco (2010), el proceso de modelación contribuye al desarrollo del pensamiento variacional vinculado a las funciones. Este proceso contempla diferentes momentos que pueden ser usados para estructurar la enseñanza de la función: identificación de la variación, creación de un modelo mental, ejecución del modelo, comparación de los resultados del modelo con los que se busca modelar y la revisión del modelo. Vasco señala que, existiendo disponibles recursos tecnológicos para el diseño del modelo, a los momentos anteriores se le pueden añadir otros como la elaboración simbólica, el cálculo sobre la formulación, la comparación de resultados y la reformulación del modelo.

El objetivo de este proceso es, según Vasco (2010), la captación de la variación entre magnitudes, lo que se corresponde con un significado para la función. De este modo, el desarrollo del pensamiento variacional contribuye a la comprensión del concepto de función y la forma de desarrollarlo es, entre otros, mediante el manejo de diferentes representaciones incluidas en las fases que componen el pensamiento variacional. Por tanto, consideramos como parte del conocimiento especializado del profesor sobre la función que el profesor conozca las diferentes fases o momentos antes mencionadas y su uso en la organización y diseño de actividades para la enseñanza (y comprensión) de la función.

Por su parte, Hitt y Morasse (2009) exponen una metodología para el desarrollo del pensamiento co-variacional consistente en cinco etapas:

- Trabajo individual de los estudiantes como reflexión preliminar.
- Trabajo en parejas de estudiantes y con la disponibilidad de los materiales.
- Debate de los estudiantes y recolección de producciones.
- Reflexión de los estudiantes para reconstruir el trabajo de las etapas anteriores.
- Institucionalización.

Pese a que estas etapas parecen ser de carácter general para el trabajo en matemáticas, los autores señalan que han considerado inicialmente los trabajos sobre representaciones funcionales elaborados por Hitt (2003) a la vez que estas etapas han sido influenciadas por la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) y por el trabajo de Duval (1997). De esta forma, la propuesta de Hitt y Morasse (2009) también resulta orientadora en el trabajo particular sobre funciones.

En la categoría **Recursos materiales y virtuales para la enseñanza de un contenido** se entiende por recursos materiales todos aquellos elementos tangibles que se pueden utilizar en la enseñanza como libros, bloques manipulables, instrumentos de medición, etc., mientras que los materiales virtuales son aquellos intangibles que asociamos a algún dispositivo electrónico, como software de manipulación algebraica o geométrica, páginas web, aplicaciones para dispositivos móviles, videos, imágenes digitales, audios, etc.

Esta categoría se refiere al conocimiento del profesor sobre los recursos que son utilizables para la enseñanza de un contenido matemático junto con las características matemáticas que estos poseen y sus potencialidades para la enseñanza del contenido. No se trata de solo conocer el recurso en sí mismo, sino que este conocimiento debe estar ligado a los beneficios, dificultades o limitaciones que este aporta a la enseñanza de un tema concreto.

Un ejemplo para este último tipo de recursos es el software GeoGebra, que permite manipulación algebraica y gráfica de objetos matemáticos. Particularmente, para el caso de la función, en esta categoría se incluiría el conocimiento del profesor sobre la utilidad de utilizar GeoGebra en la exploración y análisis de la incidencia de los coeficientes a, b de la función afín $f(x)=ax+b$. El uso de este recurso en la enseñanza del concepto de función es mostrado en Souza y Lazarrin (2018), quienes resaltan la potencialidad y las ventajas que aporta el dinamismo del software al momento de analizar e interpretar familias de funciones gráficamente al modificar los parámetros de una función y observar su gráfica. Del mismo modo, Vasco (2010) señala la utilidad que presentan los softwares de manejo gráfico para representar las funciones otorgándoles el carácter dinámico a su estudio. Además, de acuerdo con Sierra et al.(1998), estos recursos permiten un aprendizaje más significativo para los estudiantes y apoyan el desarrollo de la intuición respecto al comportamiento y propiedades de las funciones. Por su parte, Trujillo, Guerrero y Castro (2007) muestran cómo el uso de una calculadora gráfica permite abordar los obstáculos asociados al concepto de función y diseñar una estrategia de enseñanza que permite monitorear los aprendizajes de los estudiantes y que ellos puedan construir significados para el concepto de función.

En el caso de recursos materiales, un ejemplo sería que el profesor conozca algún libro de texto donde se presenten diferentes acercamientos y representaciones para la función que complemente aquello que se hace durante la clase.

La categoría **Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático** se refiere al conocimiento del profesor sobre las secuencias de ejemplos y tareas para la enseñanza de un contenido matemático específico, así como la forma en que estas se presentarán a los estudiantes, considerando su potencialidad y las limitaciones para la enseñanza o los beneficios u obstáculos que podrían presentar para los estudiantes. De esta forma, las estrategias se entienden como conjuntos etapas o acciones que aseguran una decisión óptima en la enseñanza y las técnicas son las formas de ejecutar las estrategias o sus partes. La estrategia será implementada y observada de acuerdo al propósito que se pretenda.

Esta categoría recoge la definición de Shulman (1986) que da para el PCK donde incluye diferentes ejemplos, poderosas analogías, representaciones usuales y explicaciones como conocimiento del profesor para hacer comprensible el contenido a sus estudiantes. En este sentido, también se ha incluido en esta categoría el conocimiento sobre metáforas cognitivas (Lakoff y Nuñez, 2000) y analogías (Duit, 1991) que representen objetos matemáticos o que son utilizadas para resaltar alguna característica del concepto (Liñán, 2017) como parte del conocimiento matemático del objeto en relación a su enseñanza.

En esta categoría, el conocimiento de estrategias, ejemplos, técnicas y tareas tiene una naturaleza didáctica respecto a su selección, organización y forma de presentarlos a los estudiantes, en estrecha relación con el conocimiento matemático que lo sustenta. El conocimiento en esta categoría le permite al profesor decidir sobre su aplicabilidad y sobre su potencialidad respecto a los beneficios que pueden aportar como recursos para la enseñanza del contenido (Escudero, 2015). Con estas mismas consideraciones sobre la selección, aplicabilidad y potencialidad para la enseñanza, se incluyen bajo el concepto de tareas, para esta categoría, los problemas, los ejercicios y las actividades que el profesor planifica o propone a sus estudiantes.

Se hace evidente la relación entre el KMT y el KoT, por ejemplo, en cuanto al conocimiento del profesor sobre las diferentes definiciones y/o representaciones para el tema de estudio, que se incluye en el subdominio KoT, pero en esta categoría del KMT se considera con una naturaleza diferente al propiamente matemático. Aquí, el conocimiento de las representaciones y su articulación tiene el propósito de ser usado como estrategia de enseñanza para el tema.

De acuerdo con Steele *et al*. (2013), al definir un objeto matemático, el profesor puede buscar definiciones en textos matemáticos, textos escolares u otros materiales de entre los cuales podrá elegir aquella definición que considere válida, correcta o las más adecuada al contexto, esto implica decidir sobre aquellas que sean equivalentes entre sí y seleccionar aquella que se ajuste al objetivo de su enseñanza.

De un modo similar, el conocimiento sobre la evolución histórico-epistemológica del concepto puede sustentar una estrategia de enseñanza al considerar este desarrollo histórico para que los estudiantes comprendan el concepto. Sastre *et al*. (2008) posicionan el conocimiento sobre la historia de la matemática como un elemento que debe poseer el profesor para acercar el conocimiento matemático a sus estudiantes, es decir, para hacerlo comprensible.

> Todo profesor de Matemática debiera tener un conocimiento aceptable de la historia de esta ciencia, no con el objetivo de organizar un curso con contenidos históricos, sino para poder utilizar, en el plano del acercamiento

> del objeto de estudio al alumno, las consideraciones más relevantes de su desarrollo y, sobre todo, para favorecer la comprensión de que esta ciencia evoluciona en el marco del desarrollo socio-cultural de la humanidad. (Sastre *et al*., 2008, p.2)

En este caso, el conocimiento que el profesor pone en juego al realizar estas elecciones sobre definiciones, representaciones o aspectos históricos del objeto se incluye en este subdominio.

En esta categoría ubicamos el conocimiento del profesor sobre las ayudas que se puede brindar el profesor a los estudiantes y saber en qué momentos proporcionarlas (Carrillo *et al*., 2014) como elementos que muestran intencionalidad de enseñanza. Asimismo, se ubica el conocimiento sobre las estrategias de enseñanza para un tema particular con sus respectivos componentes.

Para el caso de la enseñanza del concepto de función, existe coincidencia en las investigaciones en que la estrategia de enseñanza debe presentar a los estudiantes diversos aspectos en los que se pueda reconocer la función, ya sea desde la articulación de los registros, del planteamiento de diferentes actividades significativas para los estudiantes, diferentes actividades que busque desarrollar el pensamiento variacional y diferentes significados para la función (Vasco, 2002; 2010).

Según Thompson (1994), una forma apropiada para introducir el concepto de función debe incluir la propuesta de un contexto que sea significativo para los estudiantes. Un ejemplo de este tipo de propuestas se encuentra en Souza y Lazarrin (2018), en donde se presenta a los estudiantes diferentes actividades en contextos reales que abordan situaciones de variaciones de dos magnitudes. El diseño de la propuesta incluye el uso de GeoGebra como herramienta de manipulación algebraica y gráfica para las funciones lineales, cuadráticas, exponencial y logarítmica (el conocimiento de este software y sus potencialidades se incluye en la categoría anterior sobre recursos; aquí se incluye como parte de la estrategia de enseñanza).

En esta misma línea, Figueiredo, Contreras y Blanco (2015) señalan que conviene mostrar inicialmente a los estudiantes la concepción de la función como proceso porque ellos comprenden mejor esta idea antes de la abstracción al carácter estructural. Los autores señalan la comparación de la función con una máquina para reflejar esta idea. En este sentido, un punto de partida para la estrategia de enseñanza de la función contemplaría realizar este tipo de comparaciones. Por su parte, Hitt y Morasse (2009) señalan que, aunque se utilice la metáfora de una caja negra (*black box*) en la que ingresan ciertos valores y egresan transformados, no resulta ser suficiente para lograr la comprensión de la idea de co-variación entre variables.

Atendiendo a estas ventajas y desventajas, Espinoza-Vásquez *et al*. (2018) muestran dos estrategias que incluye la presentación de analogías entre la función y una máquina. Una de ellas compara la función con una máquina lavadora, cuyo objetivo es hacer comprensible el concepto, mientras que la otra compara la función con una máquina dispensadora de golosinas, cuyo objetivo es apoyar el cálculo de imágenes y pre imágenes en una función dada. Ambas estrategias proponen a sus estudiantes una situación cercana a ellos para establecer el puente entre el conocimiento nuevo y su conocimiento antiguo. El estudio señala la potencialidad que tiene esta analogía en la enseñanza de la función, pero requiere de reflexiones por parte del profesor respecto a los conceptos matemáticos involucrados y las limitaciones u obstáculos que pueden generar este tipo de comparaciones en la comprensión del concepto.

Por otro lado, la inclusión y selección de diferentes representaciones para la función puede constituir otro componente de la estrategia para enseñar los diferentes conceptos asociados a la función (Souza y Lazarrin, 2018), de modo que al mostrar diferentes representaciones para la función de manera articulada se ayudaría a los estudiantes a conseguir una mayor comprensión del concepto. De acuerdo con Duval (2006), el objetivo del uso de representaciones en la enseñanza está en que los estudiantes logren relacionarlas de varias formas por sobre de elegir la mejor expresión para ellos.

Por ejemplo, el programa de estudio de octavo año básico (MINEDUC, 2016b) propone ejemplos de actividades asociadas a los diferentes objetivos de aprendizaje asociados al concepto de función y a la función lineal y afín. Por su parte, Sierra *et al*., (1998) proponen una serie de actividades que buscan enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de función mediante la traducción entre sus representaciones. Asimismo, Delgado (2018) ofrece una dinámica de juego para abordar la representación de las funciones desde lo gestual, cambiando el uso de la pizarra por el uso del cuerpo para representar a las funciones. El profesor puede tener conocimiento de estas actividades, seleccionarlas o tomarlas como referencia para proponer otras actividades como parte de su estrategia de enseñanza.

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM):

El KFLM reconoce el papel que tiene el estudiante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, el foco en este subdominio está puesto en las características del aprendizaje que se derivan de las relaciones entre el estudiante y el contenido y no en las características del estudiante por sí mismo (Carrillo *et al*., 2014).

Este subdominio se enfoca, por tanto, en el contenido matemático como objeto de aprendizaje (Vasco *et al*., 2016) y se refiere a la necesidad del profesor de conocer cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático a través de las tareas y actividades (Carrillo *et al*., 2018). El KFLM engloba los conocimientos del profesor sobre lo que los estudiantes pudiesen expresar en el aprendizaje del contenido matemático en relación al mismo. Se incluye el conocimiento acerca de las ideas previas de los estudiantes sobre el contenido como parte de las interacciones de los estudiantes y el tema de estudio (Montes, 2015), el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, el conocimiento sobre los posibles errores, dificultades, fortalezas y obstáculos asociados a cada concepto, así también el lenguaje que habitualmente es usado por los estudiantes cuando abordan un determinado tema de estudio.

La categoría **Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático** se refiere al conocimiento del profesor sobre los modos en que un contenido matemático es aprehendido de acuerdo a su propia naturaleza (Carrillo *et al*., 2014). Se incluye el conocimiento del significado de teorías sobre el desarrollo cognitivo de los estudiantes y sus aportes al aprendizaje de la matemática en general o a un contenido específico, considerando teorías institucionalizadas (por ejemplo, la teoría APOS propuesta en Arnon *et al*., 2014) así como el conocimiento de resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática o productos de la propia experiencia docente del profesor (Aguilar, 2016; Carrillo *et al*., 2018).

La noción de variación y el pensamiento variacional aparecen en el origen del concepto de función y entre sus significados, así también en el estudio actual del concepto de función. Debido a esto podemos considerar aquí el conocimiento del profesor sobre el desarrollo de este tipo de pensamiento como parte de su conocimiento sobre la forma de aprender el concepto de función (aunque sea limitado al significado de variación). De acuerdo a Gómez (2013), el estudio de la variación integra diferentes tipos de representaciones: expresiones simbólicas, gráfica, tabular, en diagramas y expresiones verbales, las que corresponden también a formas de representar la función. Gómez señala que ellos permiten la comprensión de los conceptos matemáticos y "hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación" (p. 116). Por su parte, Vasco (2002; 2010) señala que la forma de desarrollar este tipo de pensamiento es articulando el pensamiento numérico, el pensamiento espacio-temporal, pensamiento geométrico, pensamiento métrico, pensamiento proporcional, con representaciones gestuales y representaciones que muestren el carácter dinámico de la función, incluyendo software de manipulación gráfica y tabular.

De acuerdo con Sierra *et al*. (1998), la articulación entre diferentes formas de representar la función es esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La traducción entre diferentes representaciones "puede hacer que el alumno capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo de esta manera su comprensión" (p. 90). Por su parte, el profesor debe conocer que el objetivo de las representaciones es, principalmente, que los estudiantes logren representar el concepto matemático de diferentes formas y vincularlas (Duval, 2006).

La categoría **Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático** se refiere, como su nombre lo indica, al conocimiento del profesor sobre las fortalezas o dificultades que tienen o podrían tener los estudiantes en relación con un contenido matemático. Se incluye en esta categoría el conocimiento del profesor acerca de las concepciones, los obstáculos, los errores y las dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de un tema y en su pensamiento matemático. Del mismo modo, se incluyen las fortalezas o facilidades que el profesor conozca de sus estudiantes respecto al contenido que están aprendiendo. Ambos aspectos, fortalezas y dificultades, se destacan como características que el profesor puede aprovechar para potenciar el aprendizaje de los estudiantes en el tema de estudio (Escudero, 2015).

Por su parte, Liñán (2017) incorpora en esta categoría la distinción de los tres tipos de obstáculos declarados por Brousseau (2007) que el estudiante puede presentar en el estudio de un tema matemático: los epistemológicos, asociados a las características de un tema concreto, como por ejemplo, las dificultades lógicas presentes en la definición de función como relación entre pares de elementos de dos conjuntos y el conflicto que se presenta con la teoría de funciones señalado por Youschkevitech (1976), o las dificultades que se presentaron en el estudio de las funciones cuando no se contaba con el conocimiento sobre la continuidad como lo sabemos hoy en día que señala el mismo autor; los didácticos, que se producen a causa de la enseñanza, como por ejemplo, al señalar que la relación proporcional entre dos variables, x e y, se caracteriza por el hecho de que los valores de ambas variables aumentan o disminuyen simultáneamente, pero no se indica a los estudiantes las condiciones que debe cumplir este tipo de cambio (razón constante) para que se trate efectivamente de una proporcionalidad o utilizar ejemplos de funciones con *buenas gráficas* que sean siempre continuas lo que da la idea de que una función con discontinuidad no es una función como lo señala Even (1990); y por último, los obstáculos ontológicos que guardan relación con el desarrollo cognitivo del estudiante.

Pese a que Liñán (2017) indica que los obstáculos ontológicos quedan fuera del foco del MTSK por incluir características psicosociales, socioculturales y humanas, no se pueden excluir completamente, pues se debe considerar que existen ciertas condiciones del ser humano que inciden en el aprendizaje de la matemática como lo son, por ejemplo, las etapas de desarrollo cognitivo expuestas por Piaget. Ejemplos de ellos son la preservación del volumen y de la cantidad; experimentos cuyos resultados reportan que los niños deben lograr cierta madurez cognitiva para poder comprender ciertos conceptos matemáticos como la noción de número y cantidad. De este modo, sería importante considerar este conocimiento como parte del conocimiento especializado del profesor en el caso de que el tema de enseñanza sea precisamente, la noción de número y su incidencia en el desarrollo del concepto de función.

Trujillo *et al*., (2007), siguiendo a Sierpinska (1992), incluyen en su estudio una lista con algunos obstáculos asociados a la comprensión del concepto de función, entre los cuales se encuentra: no identificar las variables o relaciones entre ellas, desconexión entre las leyes físicas y las funciones matemáticas, no diferenciación entre magnitudes variables y constantes y que solo las expresiones analíticas determinan funciones. Respecto a la noción de variable, Wilhelmi *et al*. (2014) señalan las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la distinción entre variable e incógnita, lo que conlleva a dificultades, no solamente en la diferenciación entre ecuación y función, sino en el aprendizaje del álgebra y desarrollo del pensamiento algebraico.

En general, como declara Delgado (2018), existe la dificultad en los estudiantes para comprender el concepto de función con la definición precisa y rigurosa que actualmente se tiene. Ello se manifiesta de diferentes formas: mediante dificultades en la comprensión del lenguaje formal, en la comprensión de las representaciones de la función y en el manejo de las expresiones algebraicas. Por ejemplo, la rigurosidad y formalismo asociado a la definición moderna de la función es uno de los principales obstáculos que se presentan al momento de estudiar la función (Zuffi y Pacca, 2002). Por su parte, Youschkevitech (1976) señala que "la lógica matemática moderna ha descubierto dificultades esenciales inherentes en la definición universal y, por ende, no algorítmica, de una función" (p.36). En este sentido, resulta difícil comprender la definición de la función atendiendo solamente a su carácter estructural (Sfard, 1991) vía la definición formal. Asimismo, Souza y Lazarrin (2018) indican que el lenguaje formal asociado a la función, en su lectura y escritura, es una de las dificultades y obstáculos que los estudiantes pueden presentar al momento de aprender la función. Finalmente, un obstáculo didáctico es evidenciado por Tasdan y Koyunkaya (2017), quienes agregan que es la definición que muestra el propio profesor, sin el adecuado uso del lenguaje formal, la que no ayuda a distinguir la función de entre otros conceptos matemáticos.

Otra dificultad de los estudiantes reportada por Souza y Lazarrin (2018), se produce al identificar o establecer las relaciones entre las magnitudes en las diferentes formas de representar la función.

Por su parte, Hitt y Morasse (2009) señalan que los estudiantes tienen dificultades al completar la representación tabular para una función y establecer una relación de ella con los puntos en el plano cartesiano. Dicha representación, según Vasco (2010), entorpece la comprensión de la función como co-variación de magnitudes, pues aumenta las dificultades que poseen los estudiantes para desarrollar el pensamiento variacional y la comprensión dinámica de la función. Even (1990) reporta algunas dificultades sobre la identificación de funciones que tienen una representación gráfica "poco habitual" lo que produce errores en los estudiantes al indicar que una gráfica no representa a una función cuando si lo es. En esta misma línea, Alpízar *et al*. (2018) reportan como parte del conocimiento del profesor el conocer que existen dificultades en los estudiantes al graficar puntos en el plano cartesiano para construir la representación gráfica de una función. También es reportada por Duval (2006) la dificultad que poseen los estudiantes al relacionar la representación cartesiana de la función lineal con los valores $a < 1$ o $a > 1$ del coeficiente *a* de la expresión $f(x) = ax + b$; añade que esta relación es más compleja que la asociación que se realiza entre el signo del coeficiente *a* y la representación gráfica de la función. Además, el profesor debe ser cauteloso al seleccionar las representaciones que usará en la enseñanza, pues ciertas representaciones pueden reforzar concepciones erradas que poseen los estudiantes sobre el tema (Mitchell *et al*., 2014).

Según Hitt y Morasse (2009), en el aprendizaje de la co-variación se debe articular lo numérico y lo algebraico pues el desarrollo del pensamiento numérico separado del pensamiento algebraico puede constituir un obstáculo para los estudiantes a largo plazo.

Respecto a la comprensión general del concepto de función, Carlson y Oehrtman (2005) identifican serias deficiencias en la comprensión del concepto, limitándolo casi a lo procedimental. Las principales deficiencias detectadas son: la interpretación del gráfico de la función, la modelación con funciones, caracterizar a todas las gráficas con "formas de U" como parábolas. Los autores proponen distintas actividades que evidencian estas falencias e identifican al currículum y la organización de los programas de pre-cálculo y cálculo en cuanto al sesgo en las representaciones de funciones en diferentes contextos e interpretaciones.

Una de las fortalezas de los estudiantes identificada por Hitt y Morasse (2009), es que son capaces de identificar y comprender el concepto de función en las operaciones aritméticas, por ejemplo, definidas como ley de composición interna dentro de un conjunto numérico (Bourbaki, 1976). Asimismo, Espinoza-Vásquez (2016) muestra el conocimiento que el profesor tiene acerca de la facilidad de los estudiantes para evaluar el 0 y el 1 en expresiones algebraicas para determinar su imagen bajo una función afín.

Respecto a las concepciones sobre el concepto de función, Vanegas y Escalona (2013) muestran que los estudiantes pueden concebir la función como una ecuación, como valores en un sistema de coordenadas, como conjunto de imágenes o como diferentes relaciones: entre elementos de un conjunto, entre los conjuntos, entre números o entre variables. Estas concepciones, según los autores, se muestran resistentes al cambio a pesar de haber recibido instrucción sobre el concepto de función. De manera similar, los estudiantes pueden asumir que la representación gráfica de una función discontinua no representa efectivamente a una función o que conozca que los estudiantes conciben una función continua como aquella que se debe dibujar *sin levantar el lápiz* (Even, 1990). El conocimiento de esta resistencia de las concepciones y la cercanía o lejanía de ellas respecto al conocimiento científico también se considera dentro de esta categoría.

Para la noción de variable, como un concepto inicial en el estudio de la función, también se identifican algunas concepciones de los estudiantes, erradas o limitadas, que incidirán en el estudio de la función. Por ejemplo, según Wilhelmi et al. (2014), la noción de variable es comprendida por los estudiantes como un número indeterminado que en algún momento se conocerá su valor o también como un símbolo que puede sustituirse por algún valor o elemento de algún conjunto.

La categoría **Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático** se refiere al conocimiento del profesor sobre los estudiantes en relación con el contenido matemático de modo que pueda atribuirle sentido a sus producciones y a sus respuestas (Zakaryan *et al*., 2018). La interacción de los estudiantes con el contenido se entiende como aquellos procesos que puede realizar el estudiante con un contenido particular y que le permiten aplicar o construir su conocimiento matemático. Esta categoría comprende el conocimiento del profesor sobre las estrategias y los procesos que puedan aplicar los estudiantes, el lenguaje y vocabulario que utilicen respecto a un contenido específico o las representaciones que puedan utilizar/producir los estudiantes tanto habituales como sus formas alternativas, para un contenido matemático determinado (Carrillo *et al*., 2014; Carrillo *et al*., 2018).

En el caso del vocabulario asociado a la función, el profesor puede conocer que los estudiantes suelan llamar “condominio” al co-dominio de una función o, en el caso de la resolución de ecuaciones, que los estudiantes dicen “pasa restando/sumando” cuando se suma el inverso aditivo de un término a ambos lados de la igualdad. En el caso de los procedimientos, el profesor puede conocer que, para graficar una función afín en el plano, los estudiantes tomen más de dos valores para la variable y determinen más de dos puntos de su gráfica.

Por ejemplo, respecto al uso del lenguaje algebraico, Hitt y Morasse (2009) muestran que algunos estudiantes presentan una resistencia al uso de variables cuando deben plantear las relaciones que se identifican en el contexto de un problema, aun cuando el profesor induzca el uso de la notación algebraica.

Para el caso de la resolución de problemas asociados al concepto de función, Sierra *et al*. (1998), señalan que los estudiantes logan reproducir la definición de función, pero que utilizan sus propias imágenes conceptuales del concepto para conseguir la solución. Algo similar es reportado por Akkoç y Tall (2003) respecto a la identificación de funciones dadas en diferentes representaciones. En dicha investigación se muestra que los estudiantes utilizan sus propios criterios para decidir si son o no funciones ciertas representaciones.

Por su parte, Aparicio y Cantoral (2006) muestran que los estudiantes pueden generar representaciones gestuales para las funciones lineales usando sus manos para indicar el grado de inclinación de la recta que representa la función afín. Los mismos autores señalan que los estudiantes usan las palabras “saltar” o “cortar” para referirse a la posición de la representación gráfica de la función, lo que articula la interacción de los estudiantes con las representaciones y su vocabulario para referirse a la discontinuidad o intersecciones.

La categoría **Intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático** - Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, se refiere al conocimiento que posee el profesor sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad de los estudiantes respecto a un tema en matemática, así como sobre el interés de los estudiantes, sus motivaciones, las expectativas o la ansiedad que ellos pudiesen tener sobre un tema, un área o sobre la matemática en general.

Hannula (2006) se refiere a la motivación como la potencialidad que puede cambiar comportamientos, emociones o aspectos cognitivos de una persona, en donde las emociones son las que tienen una relación más estrecha con la motivación. Por ejemplo, en la resolución de cierto tipo de tareas matemáticas se pueden expresar emociones negativas, como la ira o en tristeza en caso de no lograr el objetivo de la tarea, o positivas, como alegría e interés cuando se completa satisfactoriamente.

Por su parte, Gómez-Chacón (2002) muestra que se establece una relación entre los afectos, las emociones, las actitudes, los comportamientos y las creencias de los estudiantes al enfrentarse al enunciado o a la resolución de problemas de matemática. Particularmente, éstas últimas tienen consecuencia directa sobre sus acciones en relación al aprendizaje, por ejemplo, cuando el estudiante que se enfrenta al problema en matemática se dice que no es capaz y produce un bloqueo o abandona el problema.

Díaz, Belmar y Poblete (2018), señalan que un estudiante que asume la creencia de que aprender matemática es difícil, y la enseñanza recibida no le permite comprender los contenidos, se frustrará, se aburrirá con la materia y además provocará una mala disposición a todo lo relacionado a ella y una baja autopercepción como aprendiz. En el mismo estudio, los autores muestran que los estudiantes con mejores niveles de emocionalidad muestran mejores resultados en la resolución de un problema de modelación con la función lineal.

Para el caso de la función, podemos tomar uno de los ejemplos que propone la autora sobre determinar el número de diagonales de un polígono de 15 lados, cuya generalización puede realizarse a través de la modelación con una función. Gómez-Chacón (2002) señala que, al visualizar el problema mediante un modelo numérico, los estudiantes aumentan la seguridad y autoconfianza, provocando un mejor autoconcepto en el aprendizaje de la matemática. En este sentido, resulta relevante para el profesor conocer que la graduación de los problemas contribuye a la mejora de esta autopercepción.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS):

Tanto el trabajo de Shulman (1986) como el modelo de Ball *et al*. (2008) han dado importancia a que el profesor conozca aquello que se estipula que deben aprender los estudiantes en cierto nivel. Shulman propone una categoría para el conocimiento curricular -*Curricular Knowledge*- caracterizada por los programas de enseñanza, los materiales de instrucción disponibles relacionados con estos programas y el conjunto de indicaciones y contraindicaciones para ellos. Por su parte, el modelo MKT de Ball y colaboradores dispone de "un espacio" en el dominio PCK para el Conocimiento del contenido y del currículum (*Knowledge of Content and Curriculum*), sin embargo, los autores declaran no estar totalmente seguros si esto corresponde a una categoría en sí misma o si es parte del Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (Ball *et al*., 2008).

El KMLS se ha planteado considerando que el profesor de matemáticas conozca los estándares de aprendizaje que prescriben qué y cómo deben comprender, construir o usar en matemáticas los estudiantes en una etapa determinada de la educación (Carrillo *et al*., 2018). El conocimiento sobre estos estándares de aprendizaje puede provenir de diversas fuentes: del programa de la institución donde el profesor ejerce su labor, del Currículum Nacional, de la información procedente de las producciones de las distintas investigaciones en el área de Didáctica de las Matemáticas (Carrillo *et al*., 2018) o de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa (Escudero, 2015). El KMLS se trata, por tanto, de un subdominio que contempla e integra diferentes conocimientos sobre aquello que indique las capacidades en matemáticas que se esperan de los estudiantes en determinados niveles educativos, pero que solo tienen sentido para el profesor de matemáticas (Carrillo *et al*., 2014). El conocimiento en este subdominio permite dar ubicación temporal y contextual al contenido enseñado, incluyendo el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje que se estipula para cada etapa escolar (Climent *et al*., 2016; Escudero, 2015).

En este subdominio se incluye el conocimiento del profesor acerca de lo que deben/pueden aprender los estudiantes y sobre aquello que debe ser enseñado en un determinado nivel sobre un tema particular; la profundidad de los aprendizajes que se espera lograr a nivel conceptual y procedimental y la organización temporal de los temas desde la perspectiva del currículum, junto con la potencialidad de los conocimiento previos de los estudiantes que proporciona para el estudio de un tema o la potencialidad del tema actual para los temas siguientes.

Es parte de este subdominio el conocimiento del profesor sobre las especificaciones del plan de estudios, la progresión de un año a otro, objetivos y medidas de desempeño desarrolladas por entidades externas tales como asociación de profesionales e investigadores, las que constituyen diferentes fuentes para este conocimiento.

La categoría **Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico** se refiere al conocimiento del profesor sobre los contenidos matemáticos que requieren ser enseñados y que se espera sean aprendidos por el estudiante en el nivel en que el profesor esté impartiendo clases. Fuente para este conocimiento pueden ser los documentos emanados de los entes gubernamentales que regulan los contenidos de cada nivel escolar o los documentos internos que maneje cada institución educacional respecto a la organización de estas expectativas de aprendizaje. Se incluye en esta categoría el conocimiento para determinar cuáles temas sirven para lograr estas expectativas de aprendizaje.

Por ejemplo, saber en qué nivel escolar se debe enseñar el concepto de función es un conocimiento que se incluye en esta categoría. Asimismo, esta categoría contempla el conocimiento que el profesor tenga acerca de los ajustes o reformas curriculares que han ocurrido en torno al concepto de función. En nuestro caso, el currículum chileno, hasta el año 2009, ubicaba el concepto de función en el primer año de la enseñanza media (14-15 años). Durante el año 2009 se promulgan los Decretos 254/2009 y 256/2009 (MINEDUC, 2016a) que incluye un ajuste a los programas de estudio ubicando el concepto de función en el octavo año de educación básica (13-14 años).

Respecto a las expectativas de aprendizaje, el programa de estudio de octavo año básico (13-14 años) señala cuáles son los objetivos de aprendizaje para ese nivel y los aprendizajes esperados en los estudiantes respecto al concepto de función. El programa de estudio señala, de manera general, que se espera que los estudiantes “escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre orientadas a resolver problemas” (p. 40). De manera específica para las funciones, el programa de estudio de octavo básico señala que en este nivel se espera que los estudiantes comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal y que comprenden la función afín por sí misma y en relación a la función lineal.

La categoría **Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un determinado momento escolar** se refiere al conocimiento del profesor sobre la profundidad con la que un estudiante debe aprender cierto concepto o procedimiento según el nivel escolar. Algunas fuentes para este conocimiento son los programas de estudio del nivel escolar que atiende el profesor, los documentos internos del establecimiento donde el profesor imparte clases y que regulan esta profundización en los temas matemáticos y los resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática.

Por ejemplo, en esta categoría se ubica el conocimiento del profesor sobre qué deben desarrollar sus estudiantes del concepto de función, de la función lineal y de la función afín. El programa de estudio de octavo año básico nivel (MINEDUC, 2016b) presenta objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación en los que se observa lo esperado a desarrollar por los estudiantes a nivel procedimental y conceptual. Este documento señala que los estudiantes deben ser capaces de representar la función mediante expresiones algebraicas como reglas entre x e y, en tablas, gráficos cartesianos, en diagramas de Venn usando software educativo o de manera manual, identificarlas en comparaciones metafóricas con máquinas y comprender la función lineal en relación a la proporcionalidad directa como un cambio lineal y relacionar la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad. Por su parte, para la función afín, los estudiantes deben ser capaces de comprenderla generalizándola como la suma de una constante con una función lineal y relacionarla con el interés simple, Además, deben poder resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas usando la función y trasladarla en el plano cartesiano.

Aunque lo anterior hace referencia al aprendizaje o conocimiento logrado por los estudiantes, el conocimiento del profesor respecto de estas metas de aprendizaje es parte del conocimiento contemplado en esta categoría.

La categoría **Secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar** se refiere al conocimiento del profesor sobre los conocimientos y capacidades que los estudiantes desarrollaron en momentos anteriores o desarrollarán en momentos posteriores a un determinado tema, ya sea en alguno de los cursos anteriores, siguientes o en el mismo curso, desde la perspectiva de la organización curricular de los temas y estándares de aprendizaje en matemática. Del mismo modo, se incluye en esta categoría el conocimiento sobre cómo esta organización potencia el estudio del tema ya sea en el mismo curso o en los siguientes.

Por ejemplo, que el profesor conozca la resolución de ecuaciones lineales de la forma $ax+b=0$, las reducciones de expresiones algebraicas, las variaciones porcentuales, el concepto de proporcionalidad directa y la operatoria con números racionales como conocimientos previos al estudio de la función y necesarios para su abordaje (MINEDUC, 2016b) es parte del conocimiento que se incluye en esta categoría. De la Rosa (2003) señala la importancia del conocimiento del profesor sobre esta secuenciación de temas, pues le permite al profesor generar un repertorio de conocimientos que sirven de base para que los estudiantes aprendan los temas siguientes.

Dado que la noción de variable y de relación entre variables es una parte importante en el concepto de función y potenciador del mismo (Tasdan y Koyunkaya, 2017), el profesor puede conocer que este conocimiento es adquirido por los estudiantes el año anterior al que se aborda el concepto de función (en el séptimo año básico, 12-13 años). Dicho conocimiento potencia el aprendizaje de la función, pues la propuesta ministerial señala que la función lineal debe ser comprendida por los estudiantes en relación a la proporcionalidad directa por medio de la identificación de su representación gráfica y de la pendiente de la recta con la constante de proporcionalidad (MINEDUC, 2016b).

Así mismo, que el profesor conozca que en primer año medio se estudiará la composición de funciones, en segundo año medio se estudian las funciones raíz cuadrada, exponencial y logaritmo, que en tercero año medio se estudia la función cuadrática y en cuarto año medio se estudia la función potencia y la inversa de una función (MINEDUC, 2016a), son conocimientos del profesor que se consideran en esta categoría.

Podemos agregar el conocimiento del profesor acerca del ámbito numérico que manejan los estudiantes hasta el nivel en que se debe enseñar el concepto de función. De acuerdo al Currículum Nacional (MINEDUC, 2016a), hasta octavo básico, los estudiantes han aprendido a trabajar con los números Naturales, los números Enteros y los números Racionales. Este conocimiento condiciona la definición de funciones reales (con variable real) respecto a su dominio y recorrido, el que debe ser restringido a los números Racionales.

A continuación (Tabla 1), se sintetiza el modelo MTSK con sus dominios, subdominios y categorías definidas en este capítulo. Debe observarse que el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática, KPM, lo que se incluye en la tabla son indicadores de conocimiento y no categorías, de acuerdo a lo expuesto en la descripción de este subdominio.

Tabla 1: Dominios, Subdominios y Categorías del MTSK (SIDM, 2016)

<table>
<tr><th colspan="2">Subdominios</th><th colspan="2">Categorías asociadas al subdominio</th></tr>
<tr><td rowspan="17">Conocimiento matemático</td><td rowspan="7">Conocimiento de los tópicos KoT</td><td rowspan="4">Procedimientos</td><td>¿Cómo se hace?</td></tr>
<tr><td>¿Cuándo puede hacerse?</td></tr>
<tr><td>¿Por qué se hace así?</td></tr>
<tr><td>Características del resultado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Definiciones, propiedades y sus fundamentos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Registros de representación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fenomenología y aplicaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM</td><td colspan="2">Conexiones de complejización</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones de simplificación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones transversales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conexiones auxiliares</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Conocimiento de la práctica matemática KPM</td><td colspan="2">Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formas de validación y demostración</td></tr>
<tr><td colspan="2">Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Conocimiento Didáctico del Contenido</td><td rowspan="4">Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM</td><td colspan="2">Teorías de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fortalezas y dificultades</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formas de interacción con un contenido matemático</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intereses y expectativas – Aspectos emocionales del aprendizaje</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT</td><td colspan="2">Teorías de enseñanza</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos materiales y virtuales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS</td><td colspan="2">Expectativas de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado</td></tr>
<tr><td colspan="2">Secuenciación con temas anteriores y posteriores</td></tr>
</table>

El dominio de las Creencias

El MTSK guarda un lugar especial para situar las creencias sobre la matemática, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje, asumiendo su importancia en la interpretación de la práctica del profesor para construir imágenes más precisas de ella (Carrillo *et al*., 2014). En la conceptualización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas se indica que las creencias permean todos los subdominios del conocimiento y son consideradas, así como los otros dominios, con fines analíticos como parte del modelo del conocimiento (Carrillo *et al*., 2014; Carrillo *et al*., 2018). Por esta razón, las creencias son representadas en el modelo al centro del mismo y usando líneas segmentadas que aluden a esta permeabilidad.

La consideración de un dominio para las creencias del profesor resulta necesario y coherente con el posicionamiento epistemológico que se adopta sobre lo que es el conocimiento, tal como se mencionó en los apartados anteriores. En este sentido, la revisión de algunas definiciones para conocimiento, creencia y concepción conducen a su incorporación en el modelo MTSK como parte de este.

Parte de esta revisión incluye el trabajo de Ponte (1994) quien, siguiendo a Pajares (1992), define creencias y concepciones, haciendo la diferencia entre ambas; las creencias con un fuerte componente afectivo y evaluativo son las verdades personales incontrovertibles mantenidas por cada uno y que se derivan de la experiencia o de la fantasía, mientras que las concepciones tienen una naturaleza cognitiva, se tratan de marcos organizativos subyacentes de conceptos. Por su parte, Thompson (1992) define concepciones como estructuras mentales generales, las que incluyen imágenes mentales, conceptos, significados, etc. Esta definición mantiene el mismo carácter cognitivo que señala Ponte para las concepciones.

En lo anterior es posible observar un carácter emocional y afectivo en las creencias y un carácter racional y cognitivo de las concepciones como principal punto para diferenciarlas. También es posible hacer una diferenciación entre creencia y conocimiento respecto de la forma en que son modificados. Según Nespor (1987), las creencias permanecen generalmente sin cambios en contraste con el conocimiento. Cuando ellas cambian, no requieren de argumentos o razones para dichos cambios. Mientras que el conjunto de conocimiento está expuesto constantemente a su examen, las creencias no lo están.

Pese a esta posibilidad de diferenciar entre creencia, concepción y conocimiento, los referentes considerados en el planteamiento del modelo MTSK realizan afirmaciones que tienden a mantener una relación estrecha entre ellos. Tanto Pajares como Ponte consideran las creencias como un tipo especial de conocimiento; Pajares (1992) señala que las creencias son una clase de conocimiento y que la percepción de los humanos está influenciada por la totalidad de ellas. Para Ponte (1994), las creencias son conocimientos menos elaborados que no requieren del consenso social y aquellas creencias personales, ni siquiera necesitan consistencia al interior del sistema de creencias.

Como ya se mencionó, el modelo MTSK considera con fines analíticos a las creencias y son asumidas siguiendo la definición de Ponte (1994). Las creencias, para el MTSK son entendidas como:

> Verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o del pensamiento, con cierta componente afectiva y evaluativa, sobre la que se pueden tener diferentes grados de convencimiento, así como pudiendo ser justificadas en base a argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables. (Carrillo *et al*., 2014, p. 11)

La inclusión del dominio de Creencias en el MTSK posee el objetivo de hacer un tratamiento de las creencias y concepciones de manera integrada en los estudios sobre el conocimiento del profesor debido a la falta de consenso para su diferenciación.

> Esta relación entre creencias y concepciones, así como su integración en el conocimiento, es una faceta que aún no se ha explorado en la profundidad necesaria como para llegar a puntos de consenso. (Carrillo *et al*., 2014, p.11)

Debido a esto, como se señala en Carrillo *et al*. (2014), no se profundiza en la distinción entre creencia y concepción ya que resulta de escasa utilidad cuando el foco está puesto en el estudio del conocimiento del profesor que estas permean.

> Basándonos en la tradición de investigación del grupo sobre los diferentes posicionamientos teóricos respecto a la diferenciación entre creencias, concepción y conocimiento, y haciendo uso de la base teórica presentadas en las tesis de Carrillo (1998) y Contreras (1999), decidimos considerar las creencias como un elemento tan cercano a las concepciones que no tiene sentido distinguirlos, puesto que no se perciben beneficios significativos para el entendimiento de la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, siendo que tanto creencias como concepciones están ligadas de la misma forma al conocimiento. (Escudero, 2015, p. 10)

En general, las investigaciones que abordan el MTSK presentan el modelo sin profundizar en este dominio o en sus categorías, sin embargo, pueden ser analizadas considerando los trabajos de Carrillo y Contreras referenciados anteriormente. Se asume que las creencias no pueden ser observadas o medidas directamente, sino solo inferidas. Pese a esto, su inclusión en el modelo pretende, por una parte, dar interpretaciones más precisas al conocimiento del profesor y, por otro lado, mostrar el carácter de especializado mediante su relación con los otros subdominios.

De acuerdo con el posicionamiento que asumimos en esta investigación, no profundizaremos en el dominio de las creencias, dejando su estudio como proyección de esta investigación. Comprendemos que investigar sobre las creencias requerirá de otro tipo de recolección de datos y un nuevo diseño para la investigación.

CAPÍTULO 3. Metodología

Contexto de la investigación

Esta investigación se desarrolla en el contexto del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Este programa abarca, a la fecha, tres líneas de investigación: Modelamiento, Pensamiento matemático específico y Formación de profesores, siendo ésta última que alberga el desarrollo de esta investigación. Dichas líneas son desarrolladas bajo diferentes perspectivas teóricas e intereses respecto a la Educación Matemática, Matemática Educativa o Didáctica de la Matemática. La coexistencia de estas perspectivas teóricas, dentro de un mismo programa doctoral, facilita y promueve la interacción entre investigadores, expertos y noveles, proporcionando una visión amplia de la disciplina a través del diálogo sobre las diferentes investigaciones que estén en curso. A la vez, permite distinguir las fronteras de cada área (límites que se transparentan o demarcan por el diálogo entre estos posicionamientos) y contribuye a la formación de los futuros investigadores acercándonos a las fronteras del conocimiento.

Por otro lado, este trabajo está albergado en el seno del grupo de investigación SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva) que dio origen al modelo MTSK que hemos seleccionado como referente teórico, y consecuentemente, dentro del equipo de investigadores que lo constituyen. Este equipo tiene una tradición investigativa que ha dejado su huella tanto en el planteamiento del modelo MTSK como en muchos de los trabajos de investigación que lo utilizan como herramienta de análisis e interpretación del conocimiento del profesor de matemáticas.

En el capítulo anterior, en el cual presentamos el modelo MTSK, incluimos parte del posicionamiento respecto a lo que se considera como conocimiento y cómo este posicionamiento incide en el planteamiento del modelo para el conocimiento especializado del profesor. Este trabajo, así como otros realizados por los integrantes del SIDM (e.g., Aguilar, 2016; Escudero, 2015; Liñán, 2017; Montes, 2015; Rojas, 2014; Vasco, 2015), busca avanzar en la comprensión del conocimiento profesional del profesor desde la especialización que propone el MTSK (Scheiner *et al.*, 2019). En este caso, se trata de un estudio que pretende profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas en el contexto de su práctica de aula, durante la enseñanza de un tema matemático, a saber, el concepto de función.

Además, hemos señalado la complejidad del conocimiento como objeto de estudio, particularmente, la del conocimiento del profesor de matemáticas. Somos conscientes de que su estudio debe abordar esta complejidad para avanzar en su comprensión. Teniendo esto presente, delineamos esta investigación, señalando que no pretendemos un estudio prescriptivo en que se indique qué es lo que el profesor debe saber o conocer, tampoco pretendemos realizar una generalización acerca del conocimiento de los profesores sobre el concepto de función, sino que buscamos indagar en aquello que el profesor dice o manifiesta saber, y de lo cual podemos dar muestra, interpretándolo a la luz del MTSK. Se trata, por tanto, de estudiar en profundidad el conocimiento que manifiesta un profesor durante su práctica de aula, en un lugar y tiempo determinado, es decir, en un contexto específico, particularmente, durante la enseñanza del concepto de función.

El MTSK también considera al conocimiento como una construcción social, producto de la actividad humana y que es accesible mediante la investigación. En este sentido, la elección del marco teórico también condiciona algunas consideraciones metodológicas descritas más adelante en este capítulo y, particularmente, los niveles en que se realiza el análisis del conocimiento. Sobre este punto, se vuelve útil hacer la distinción entre una investigación cuyo objetivo es poner a prueba o aplicar una teoría versus la investigación que busca generar teoría (Glaser y Strauss, 1967). En la investigación diseñada para probar teoría se trata de verificar y refinar un modelo o teoría existente, mientras que la investigación que procura generar teoría busca encontrar nuevas formas de enfocar y entender la realidad, por tanto, proponer nuevos desarrollos conceptuales. En nuestro caso, aplicamos el modelo MTSK para estudiar el conocimiento del profesor en un tema no explorado desde esta perspectiva, como es el concepto de función. No pretendemos generar teoría, sin embargo, estamos abiertos a la emergencia de nuevos elementos teóricos que contribuyan al desarrollo del modelo, tal como lo señalan Carrillo *et al.* (2018) respecto al estado actual del MTSK.

Como parte del desarrollo de este trabajo doctoral y de la formación como investigadores, fue necesario profundizar en los temas que esta investigación aborda: el concepto de función y el conocimiento del profesor sobre la función, como foco del estudio para conseguir sensibilidad teórica en el tema (Strauss y Corbin, 2002). En el capítulo anterior, de esta fase de sensibilización y profundización, incorporamos los resultados más relevantes que abordan partes de nuestro tema de estudio o acercamientos parciales respecto a las diferentes subdominios o categorías que considera el modelo MTSK para el conocimiento. Pese a que las investigaciones incluidas no son realizadas necesariamente bajo la perspectiva del MTSK, ellas contribuyen a dimensionar la profundidad con que se ha de considerar el conocimiento del profesor en cada uno de los subdominios y categorías del modelo. La revisión se realizó respecto de las definiciones de los subdominios y categorías del modelo MTSK, y sobre el concepto de función en relación al conocimiento del profesor de matemáticas en formación o en ejercicio, lo que permitió tener un referente sobre el conocimiento (esperado) del profesor y con ello un primer acercamiento a indicadores del conocimiento especializado del profesor sobre el concepto de función. Esta contextualización del trabajo forma parte de los factores que inciden en los lineamientos que hemos trazado, así como en las decisiones y desarrollo de la propia investigación. Coincidimos con Montes (2015) en que estos y otros factores influyen en las decisiones de los investigadores respecto del planteamiento del problema de investigación y en la conducción misma del estudio.

Pregunta de investigación

Rodriguez y Valldeoriola (2010), siguiendo a Rincón (2000), señalan que las elecciones acerca de la metodología radican en los objetivos que pretenda alcanzar la investigación, así como en preguntas que se plantean. En esta investigación se busca avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y caracterizarlo mediante su interpretación a la luz del modelo MTSK. No se busca, necesariamente, producir resultados generalizables a toda una población de profesores de matemáticas, aunque los resultados pueden ser utilizados en la formación de profesores de matemáticas; tampoco se pretende cuantificar el conocimiento del profesor, modificarlo o modificar la realidad que se estudia, sino que se busca profundizar en sus características y comprenderlo desde la perspectiva teórica que proporciona el modelo MTSK.

En vista del contexto de esta investigación y el interés que mueve a este estudio, nos planteamos la siguiente pregunta general.

> ***¿Cómo es el conocimiento especializado que manifiesta un profesor durante la enseñanza del concepto de función?***

El abordaje de esta interrogante nos conduce, por una parte, a la identificación de conocimientos con el carácter de especializado y, por otro lado, a ubicar el problema de investigación en el contexto de la sala de clases, particularmente durante el momento de la enseñanza del concepto.

La primera parte de la pregunta, relativa al tipo de conocimiento del profesor, nos motiva a separar la pregunta en dos aspectos de acuerdo a los dominios de conocimiento del modelo que hemos considerado estudiar: el Conocimiento Matemático y el Conocimiento Didáctico del Contenido. De aquí es que se desprenden las siguientes preguntas específicas:

> *¿Cómo es el conocimiento matemático sobre la función que manifiesta un profesor durante la enseñanza de este concepto?*

> *¿Cómo es el conocimiento didáctico sobre la función que manifiesta un profesor durante la enseñanza de este concepto?*

Por otra parte, entendemos que la contextualización implicada en la segunda parte de la pregunta, respecto a la focalización del estudio del conocimiento durante la enseñanza, expresa que el conocimiento del profesor puede ser estudiado en diferentes escenarios (Flores *et al*., 2013), siendo uno de ellos el que hemos elegido para esta investigación: la sala de clases, durante la enseñanza. Asimismo, reconocemos que puede haber diferencia entre el conocimiento que el profesor tiene, debe tener y el conocimiento que manifiesta tener. La indagación sobre cualquiera de estos tres aspectos del conocimiento requerirá formas diferentes de abordarlo desde la perspectiva metodológica.

El conocimiento manifestado será comprendido como aquel que se puede observar y asegurar su existencia mediante acciones concretas que sirvan de evidencia de conocimiento (Flores-Medrano, 2015). Como señalan Goldin y Kaput (1996), las representaciones internas de los conceptos que posee un individuo, es decir, sus estructuras mentales, no son directamente observables por el hecho de ser internas. Ellas pueden ser inferidas a partir de la observación del comportamiento o declaradas por el individuo luego de realizar un proceso metacognitivo de introspección, el cual, según los autores, también es subjetivo, pero proporciona un producto observable: el comportamiento verbal o gestual del individuo. Frente a esto resulta necesario usar otras técnicas o estrategias, diferentes a la mera observación, de modo que sea posible confirmar o descartar la presencia de conocimiento especializado, las que se describirán más adelante.

Objetivos de la investigación

Nos planteamos avanzar en la caracterización del conocimiento especializado del profesor, situado en el contexto de sus prácticas de enseñanza y centrado en la enseñanza del concepto de función. Para conducir esta investigación, proponemos el siguiente objetivo general.

Objetivo General: Caracterizar el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función que manifiesta durante su enseñanza.

Así como se ha desglosado la pregunta de investigación apuntando a diferentes tipos de conocimientos, a partir del objetivo general hemos definido objetivos específicos con la finalidad de marcar hitos o etapas de esta investigación que nos permitan conseguir el objetivo general planteado. Considerando los dominios de conocimiento que plantea el MTSK, los objetivos específicos permiten trazar rutas para lograr la caracterización del conocimiento especializado del profesor.

Objetivo Específico 1 (OE 1): Identificar y describir indicadores de conocimiento especializado sobre el concepto de función que un profesor manifiesta durante la enseñanza.

Este objetivo contempla:

OE1.1 Identificar evidencias del MK y del PCK de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función.

OE 1.2 Describir indicadores del MK y del PCK de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función.

Objetivo Específico 2 (OE 2): Establecer e Interpretar relaciones dentro del conocimiento especializado sobre el concepto de función de un profesor de matemáticas que manifiesta durante la enseñanza.

Este objetivo contempla:

OE 2.1 Establecer relaciones dentro del conocimiento especializado que manifiesta un profesor de matemáticas sobre el concepto de función.

OE 2.2 Interpretar las relaciones establecidas dentro del conocimiento especializado que manifiesta un profesor de matemáticas sobre el concepto de función.

La metodología, el diseño, así como las técnicas de recolección y análisis de los datos, buscaron dar cuenta del logro de los objetivos específicos y del objetivo general. Por su parte, el desglose del objetivo general en estos objetivos específicos, y a su vez, el desglose de estos últimos, determinaron etapas en el desarrollo de esta investigación, necesarias para conseguir el objetivo general planteado. La primera etapa está guiada por el OE 1 y sus derivados respecto de la categorización de las evidencias disponibles que dan cuenta de presencia de conocimiento en cada dominio considerado del MTSK.

El OE 1.1, mediante el examen atomizado de los datos, pretendió identificar aquellos elementos que permitan dar cuenta de la presencia de conocimiento matemático o didáctico del concepto de función que manifiesta el profesor (ver el ejemplo en la Tabla 5) y de elementos que hacían suponer presencia o no de conocimiento, pero que debían confirmarse como tales. El análisis de los datos se realizó de manera cronológica según se desarrollaron las sesiones de clases registradas.

El OE 1.2 contempló el uso de las identificaciones obtenidas en el OE 1.1 para generar agrupaciones de evidencias que conformen indicadores de conocimiento matemático y didáctico asociado a la función. La descripción que señala el objetivo específico consistió en señalar qué tipo de conocimiento agrupa el indicador resultante, reuniendo las evidencias proporcionadas por el objetivo anterior para sustentar el indicador propuesto y se asignó el significado de conocimiento especializado a los indicadores de conocimiento descritos. La interpretación de los indicadores como conocimiento especializado del profesor se logró mediante la vinculación de ellos a los correspondientes subdominios y categorías del MTSK.

La segunda etapa, guiada por el OE 2 y sus derivados, buscó la caracterización pretendida en el objetivo general, a la luz del modelo MTSK, del conocimiento identificado y descrito en la etapa anterior. En el OE 2.1 se analizaron los indicadores obtenidos en OE 1.2 para establecer relaciones dentro del conocimiento identificado en la etapa anterior. Con ello se pretendió regresar sobre el carácter de especializado que propone el modelo para el conocimiento del profesor. En este análisis se consideraron, en su conjunto, todas las sesiones de clases para establecer estas relaciones de acuerdo al contexto en el que se manifestó el conocimiento. Las relaciones se plantearon de acuerdo al tipo de conocimiento que ellas vinculan, pudiendo ser relativos al objeto matemático, a la didáctica del objeto o ambos, esto quiere decir que la relación entre dos o más conocimientos se estableció al considerar aspectos matemáticos, aspectos de la enseñanza y/o aspectos del aprendizaje del concepto de función.

Finalmente, en el OE 2.2 se interpretaron las relaciones identificadas en el OE 2.1, a la luz del modelo y en virtud del contexto en el que se indagó sobre el conocimiento del profesor, como la integración de conocimientos en distintas dimensiones de cara a la enseñanza del concepto de función. El logro del objetivo específico 2.2 mediante la comprensión de las relaciones dentro de su conocimiento especializado derivó en la comprensión y caracterización del mismo desde la perspectiva del MTSK.

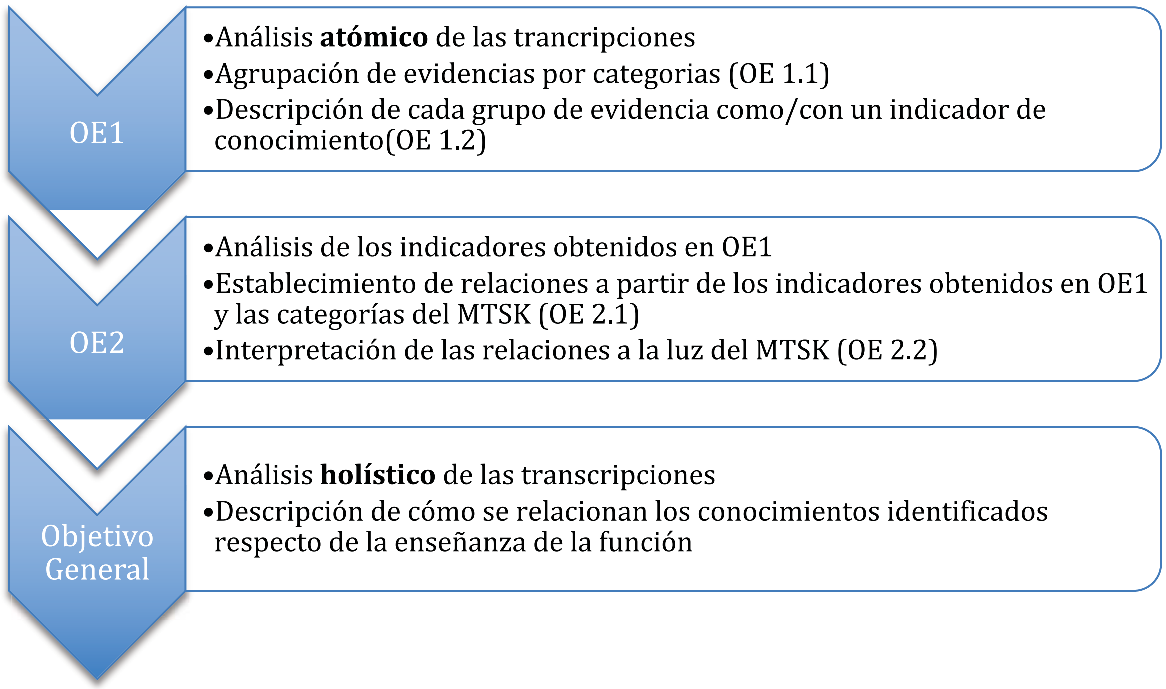


Diagrama 1: Etapas de la investigación de acuerdo a los objetivos específicos y general.

Caracterización de la Investigación

Uno de los factores que incide en la interpretación de los resultados, así como en los procesos que conducen a ellos, es la postura frente al fenómeno de estudio, que en un sentido más amplio constituye la visión o perspectiva que se tenga del mundo, *wordlview*, como lo señala Creswell (2014), o *paradigma*. La elección de un paradigma y una subsecuente metodología debiera, de acuerdo con Flick (2015), estar alineada con la pregunta de investigación y sus propósitos u objetivos.

Creswell (2014) define esta visión del mundo como una orientación filosófica general respecto a la naturaleza de la investigación con la que el investigador dirige el estudio. Por su parte, Bassey (1999) define un paradigma como "una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que, aceptadas por una comunidad de investigadores, condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación" (p. 42). Un paradigma es una forma de entender la realidad y producir conocimiento sobre ella y sus fenómenos. De acuerdo con Creswell (2014), el paradigma o posicionamiento frente al mundo y frente a la investigación y el fenómeno de estudio está basado en las orientaciones y experiencias del investigador.

La literatura especializada (e.g., Creswell, 2014) identifica los siguientes paradigmas de investigación: positivismo o post positivismo, interpretativo, constructivismo, transformativo y pragmatismo; cada uno de ellos privilegia (o posibilita) ciertos focos de estudio.

El enfoque Interpretativo, adoptado en este estudio, generalmente es asociado a investigación cualitativa o naturalista, busca comprender el mundo en que los individuos se desenvuelven. Es el que ha utilizado mayoritariamente el grupo de investigación SIDM (Montes, 2015), pues varios de los trabajos se enfocan en la comprensión de procesos sociales, de enseñanza, aprendizaje y de desarrollo profesional. El objetivo de la investigación en este paradigma es relacionar, tanto como sea posible, la perspectiva de los participantes con el tema de estudio. Las preguntas planteadas son amplias y conducen al investigador a prestar mucha atención a lo que los participantes dicen acerca del fenómeno, enfocándose en contextos específicos de los individuos para comprenderlo. El investigador reconoce que sus orientaciones personales, formación y experiencias inciden en la interpretación de los resultados. Se busca interpretar los significados desde las perspectivas de los otros.

Así, nos situamos en un paradigma interpretativo, puesto que no perseguimos modificar la realidad estudiada, como propone el enfoque crítico, o buscar causas de determinados efectos, como pretende el positivismo, sino que buscamos comprender el conocimiento de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función.

En cada paradigma es posible, además, distinguir perspectivas o niveles de análisis (Rodríguez, Gil y García, 1996): ontológico, metodológico, epistemológico, técnico instrumental y contenido. Estas perspectivas inciden tanto en la conducción de la investigación, así como en la interpretación de los resultados.

De acuerdo al paradigma elegido para nuestra investigación, estos niveles de análisis se concretan del siguiente modo. El nivel ontológico, asociado a la interpretación de la realidad por parte del investigador en cuanto a su forma y naturaleza, nos permitió comprender el conocimiento del profesor de manera contextualizada, enfocado en la enseñanza del concepto de función en un lugar (establecimiento educacional) y momento (periodo del año escolar) determinado, considerando que el profesor ha adaptado su discurso a los estudiantes que atiende. El nivel epistemológico, asociado a la relación entre lo que se sabe y lo que se puede saber, así como la determinación de la validez del conocimiento, se materializa en las indagaciones realizadas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, el conocimiento matemático sobre el concepto de función y el uso del MTSK como herramienta de análisis. El nivel metodológico, asociado a las formas de investigar en torno a la realidad, da cuenta de la estructura y conducción de esta investigación respecto a los objetivos y preguntas que planteamos. El nivel técnico, que se ocupa de los instrumentos y estrategias para recoger los datos, se desarrolló en las observaciones de clase con foco en el MTSK que manifiesta el profesor, así como en el diseño de entrevistas de profundización para confirmar presencia de conocimiento o profundizar en algún aspecto relevante del mismo. Por último, el nivel del contenido, relacionado al área del conocimiento y tema en el cual se desarrolla la investigación cualitativa, nos permite orientar la exposición de los resultados hacia la formación de profesores de matemáticas en relación a los conocimientos que se logran o se puede esperar logren los profesores.

De acuerdo a los objetivos planteados, el enfoque de esta investigación es de corte cualitativo, enfoque que permite explorar y comprender los significados individuales o grupales de una situación humana (Creswell, 2014). Como expone Stake (2007), la interpretación de los investigadores sobre el fenómeno que observan se vuelve importante en la investigación cualitativa de la que se esperan descripciones abiertas de la realidad y su comprensión mediada por las experiencias individuales que determinan, en parte, los significados de aquello que se estudia. Según Vasilachis (2006), la investigación cualitativa supone la inmersión en el cotidiano de aquello que se desea investigar, el intento por descubrir la perspectiva de los participantes sobre sus propias realidades y es un proceso de interacción descriptiva y analítica entre el investigador y los participantes, privilegiando las palabras y acciones observables de las personas como datos primarios.

Puesto que buscamos, como objetivo general, caracterizar el conocimiento especializado de un profesor en un contexto particular y durante la ejecución de una de sus labores profesionales como es la enseñanza, y de un tema específico, el concepto de función, las elecciones descritas anteriormente cobran coherencia y, a la vez, aportan validez y confiabilidad a la investigación.

Diseño de la investigación

Muchas preguntas de tipo *¿qué*? o *¿cuáles*? son exploratorias o descriptivas y se contestan realizando encuestas o consultando bases de datos, ya que lo que se pretende es describir la incidencia o la prevalencia de un fenómeno (Castro, 2010). Nuestra investigación apunta a la descripción y comprensión del conocimiento especializado del profesor, la que a su vez está guiada por la pregunta de investigación: *¿Cómo es el conocimiento especializado que manifiesta un profesor durante la enseñanza del concepto de función?*

En esta pregunta se incluye, por una parte, qué es lo que pretendemos observar (el conocimiento especializado), y, por otra parte, un sujeto en un contexto definido: un profesor -de matemáticas- enseñando el concepto de función. Esto nos enfoca hacia realizar un estudio sobre el conocimiento de un profesor particular, no sobre el conocimiento del profesor en general. En síntesis, la exploración en profundidad de una realidad particular, pretendiendo comprenderla desde su complejidad a la luz del referente teórico elegido.

Los componentes del diseño de la investigación deben ser el resultado del funcionamiento y operacionalización de la pregunta de investigación y del plan de investigación que se genera para llevarla a cabo (Flick, 2015). En nuestro caso, la pregunta y el objetivo nos conducen a diseñar esta investigación como un estudio de caso que, siguiendo a Stake (2007), corresponde al estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, con el objetivo de llegar a comprenderlo en un contexto y actividades relevantes. Su objetivo no es comprender otros casos o producir generalizaciones, sino que pretende profundizar en una particularidad del caso.

> El cometido real del estudio de casos es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y esto implica el conocimiento de los otros casos de los que el caso en cuestión se diferencia, pero la finalidad primera es la comprensión de este último. (p. 20)

Stake (2007) identifica tres tipos de casos: instrumental, intrínseco y múltiple o colectivo. En el estudio de caso de tipo instrumental, la finalidad es comprender algo diferente al caso estudiado, puede ser algo sobre lo que se deba investigar, alguna situación paradójica o que exista la necesidad de comprensión general de un asunto, y que se crea que mediante el estudio de un caso particular se pueda conseguir. En ese sentido, el caso es un instrumento para alcanzar la comprensión de aquello que se desea estudiar. En el estudio de caso intrínseco, el caso tiene una importancia en sí mismo. Interesa su estudio porque se busca comprender ese caso en particular. Por último, el estudio de casos múltiples corresponde a un conjunto de casos individuales.

Nuestro diseño se basa en un estudio de casos del tipo instrumental donde el conocimiento de un profesor de matemáticas se examina de manera particular para comprenderlo. Aquí el caso (un profesor de matemáticas) se mira en profundidad, pero su elección se hace para ayudarnos como investigadores a comprender el tema, fenómeno o interés (su conocimiento especializado) (Vasco, 2015). Esta investigación contempla el estudio de un único caso. De acuerdo con Rodriguez *et al*. (1996), los diseños de caso único son aquellos que centran su análisis en un único caso y su utilización se justifica por el hecho que el caso único tenga un *carácter crítico,* lo que quiere decir que el caso permita confirmar, cambiar, modificar o ampliar el conocimiento sobre el objeto de estudio. Así, el estudio de caso único se vuelve importante por la contribución al conocimiento y la construcción teórica que con él se puede aportar. En este mismo sentido, un estudio de casos no será definido siempre por las técnicas utilizadas sino por su orientación teórica y el énfasis en la comprensión de procesos dentro de sus contextos (Castro, 2010). Como se adelantaba en este párrafo, este estudio es de un caso único que está dado por un profesor de matemáticas de enseñanza media (secundaria), cuya descripción y criterios de selección se señalan a continuación.

Selección de los participantes

En este trabajo hemos evitado realizar predicciones sobre qué se obtendrá del caso, más bien hemos intentado mantenernos abiertos a las posibilidades de acción del profesor seleccionado. Sin embargo, hemos intencionado la selección del profesor de modo que lo podamos considerar como un “buen informante” en el sentido de que los datos que pueda proporcionarnos permitan responder a la pregunta que guía este trabajo.

Algunas de las condiciones para realizar la selección de un caso se indican por Loughran, Mulhall y Berry (2008):

a) Se tenga fácil acceso al mismo.

b) Exista una alta probabilidad de que se dé una mezcla de procesos, programas, personas, interacciones, y/o estructuras relacionadas con las cuestiones de investigación.

c) Se pueda establecer una buena relación con los informantes.

d) El investigador pueda desarrollar su papel durante todo el tiempo que sea necesario.

e) Se asegure la calidad y credibilidad del estudio.

Estas condiciones generales dan un primer acercamiento a la selección del caso. Sin embargo, consideramos que para alcanzar nuestros objetivos y responder a la pregunta de investigación, es conveniente contar con otros criterios de selección que permitan recolectar datos fructíferos para el estudio del conocimiento matemático y didáctico del profesor. En este sentido, y, como señala Medina y Jarauta (2013), al estudiar el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), los docentes reconocidos por sus colegas por el elevado manejo de los contenidos, por su compromiso por mejorar constantemente e innovar en sus prácticas, así como reconocidos por sus estudiantes como buenos profesores, dispondrían de un elevado desarrollo en su PCK y pueden ayudar en la investigación sobre su conocimiento. Los autores indican, además, que el conocimiento del profesor se construye mediante una articulación entre el conocimiento de la materia, el conocimiento pedagógico general y el conocimiento de los alumnos y, naturalmente, se ve influenciado por la biografía personal del profesor. Estos factores, aunque no lo determinan, perfilan las características del profesor que seleccionamos en nuestro estudio en cuanto puedan aportar abundante información respecto a su conocimiento didáctico del contenido que enseña y también conocimiento disciplinar respecto al concepto de función. En este sentido, se establecen criterios más específicos sobre la selección del caso que tengan relación con los factores antes señalados. En particular, es necesario contar con una caracterización de profesor experto que pueda aportar información útil de acuerdo a nuestros propósitos.

Tabla 2: Características primarias y secundarias para identificar profesores expertos (fuente: Rojas, Carrillo y Flores, 2012, pp. 482-483)

Características Primarias
a) Comprensión de los contenidos específicos, del aprendizaje de los estudiantes y de estrategias de enseñanza.
b) Procesos de enseñanza más integrados (relaciona el contenido con diversas situaciones, usa variedad de representaciones en la enseñanza de los contenidos).
c) Presentación a los estudiantes de problemas de mayor dificultad.
d) Uso de distintas estrategias para resolver los problemas.
e) Diseño y elaboración de actividades de enriquecimiento que favorecen la adquisición de los conceptos o procedimientos.
Características Secundarias
f) Docente en ejercicio, con cinco o más años de experiencia docente en aulas.
g) Profesor destacado según las evaluaciones institucionales y nacionales si se aplican.
h) Haber enseñado el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio de interés, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente.
i) Docente recomendado por sus pares y por los directivos del centro.
j) Participar en procesos de actualización en su disciplina, como: participación en curso de formación, realización de postgrados (licenciatura, máster, doctorado), implicación en procesos de investigación e innovación educativa.
k) Ser consciente del incesante proceso de cambio de la educación, motivo para ser un docente activo que se actualiza y se preocupa por su mejora continua como profesor.
l) Poseer alguna nominación o adjudicación de premios en concursos de enseñanza.
m) El rendimiento de sus estudiantes en evaluaciones locales, nacionales e internacionales ha de ser destacado.

Teniendo en consideración lo anterior, hemos utilizado el trabajo de Rojas, Carrillo y Flores (2012) para establecer los criterios de selección de nuestro caso. Los autores realizan una revisión bibliográfica para determinar cuáles son las características que se espera posea un profesor para que se le considere como *experto* (Tabla 2). Esta condición de experto no se basa exclusivamente en el modo en que el profesor enseña o en la cantidad de años de experiencia docente, y aunque son factores que sin duda inciden en esta caracterización, la calidad de experto incluye otros aspectos asociados a su formación continua y los resultados de sus estudiantes en pruebas estandarizadas, de acuerdo con Rojas *et al*. (2012). Sus hallazgos son sintetizados en dos grupos de características: primarias y secundarias.

Las características secundarias se pueden identificar mediante un cuestionario simple al profesor o a algún directivo del establecimiento donde se desempeñe. Por otro lado, las características primarias requieren de una entrevista más profunda o la observación *in situ* de su práctica docente. En esta investigación, consideramos las características secundarias para realizar una preselección de casos y realizar la convocatoria para participar de esta investigación. Coincidimos con Rojas *et al*. (2012) en que un profesor con las características de experto nos podrá aportar más información para estudiar su conocimiento profesional.

En la preselección del caso, consideramos a cuatro profesores de enseñanza media en ejercicio que conocíamos de antemano en un ambiente académico-universitario y con los cuales se había establecido una buena relación. Esta relación atendía al criterio de conveniencia que señala Creswell (2014) implicado en el fácil acceso bajo las condiciones de la investigación. Contábamos con información sobre su trayectoria académica como estudiantes de pedagogía en matemáticas y la opinión de sus pares como profesores que se destacaban en su labor, atendiendo a las características sintetizadas por Rojas *et al*. (2012) de modo que los rasgos identificados preliminarmente permitieran suponer que se trataba de casos interesantes de estudiar respecto a la intensidad del caso (Creswell, 2014). Es decir, que puedan aportar suficiente información respecto de la materia que deseamos indagar, la rentabilidad del caso, como lo señala Stake (2007). En esta preselección, buscamos informantes que se puedan acercaran al cumplimiento de las características del perfil de profesores expertos, particularmente observamos las secundarias pues son las que pueden identificarse más fácilmente y esperamos poder confirmar algunas de las características primarias. Del mismo modo, se consideró el hecho de que los profesores fuesen accesibles y que estuviesen dispuestos a colaborar (Flick, 2007; Stake, 2007).

A los cuatro profesores se les extendió una invitación, vía correo electrónico, para participar de este estudio indicándoles el objetivo de la investigación, el rol que asumirían como profesor informante y las interacciones necesarias de acuerdo a nuestro propósito (grabación de sus clases, entre otros). En el envío de esta invitación se les consultó por su disponibilidad a participar de la investigación y si durante ese año dictarían el contenido que nos interesaba estudiar (el concepto de función en 8vo año de enseñanza básica).

Dos de los profesores rechazaron la invitación, pues no tendrían a su cargo el curso en el que debían enseñar el concepto de función, otros dos aceptaron la invitación y se manifestaron dispuestos a colaborar. Se siguió, con ambos, el mismo procedimiento sobre las solicitudes formales dirigidas a directores académicos de los respectivos establecimientos educacionales donde se desempeñaban como profesores de matemáticas (Anexo 2: Invitaciones). Se les ofreció un trato de confidencialidad sobre los datos recolectados y un acuerdo de poder dejar de participar en la investigación en el momento que ellos lo requieran, como se recomienda en Flick (2015).

De acuerdo con Stake (2007), en un estudio de casos de tipo instrumental, algunos casos sirven más que otros; un caso poco habitual mostrará aspectos que en los casos típicos pueden pasar desapercibidos. Por esta razón, y luego de observar las sesiones de los dos profesores expertos que aceptaron la invitación, seleccionamos a uno de ellos, que llamaremos Arturo, debido a que, por un lado, no se observó por parte del otro profesor nueva información que fuera relevante para este estudio respecto a la proporcionada por Arturo y, por otro lado, las características de su formación académica hacen que resulte interesante indagar en su conocimiento.

Finalmente, otro factor que incide en la selección del profesor informante es el grado de compromiso del profesor del estudio con la presente investigación. El profesor seleccionado se mostró dispuesto a comprometerse con la investigación y a proporcionar la información que fuese requerida para complementar la etapa del análisis y presentación de los resultados.

El caso de Arturo

Arturo cuenta con formación universitaria de profesor de matemáticas, otorgada por una universidad chilena. Además, posee el grado de licenciado en Educación y el grado de magister en Matemáticas, también realizado en Chile. Arturo ha participado en cursos de perfeccionamiento en temas de Geometría Euclidiana con orientación para la enseñanza en educación media y en una actualización curricular orientada a profesores de enseñanza media en los temas de Estadística. Otras actividades que Arturo ha realizado en el marco de su desarrollo profesional son la participación en seminarios y congresos vinculados a la incorporación de recursos tecnológicos en el aula de matemáticas.

Al momento de la investigación, Arturo se encontraba ejerciendo como profesor de matemáticas en un establecimiento privado de educación secundaria en una región de Chile. Empezó su labor de profesor de matemáticas en el año 2006 y hasta la fecha se ha desempeñado en diferentes tipos de establecimientos (públicos y privados), atendiendo los niveles escolares desde 5to año de enseñanza básica (10-11 años) hasta 4to año de enseñanza media (17-18 años). En su trabajo como profesor de matemáticas de enseñanza media ha impartido el contenido de funciones, al menos, 5 veces en los niveles correspondientes. En una conversación sobre el contexto escolar donde Arturo se desempeña, indica que los estudiantes que ha tenido a su cargo y que han rendido la evaluación nacional SIMCE[2] han obtenido 345 puntos el año 2015[3], siendo 95 puntos sobre el promedio nacional, hecho que permitió ubicar su establecimiento dentro de los primeros lugares en el ranking de puntajes obtenidos en esta evaluación.

[2] Sistema de Medición de la Calidad de la Educación- SIMCE, es una prueba estandarizada que se aplica en las líneas de Lenguaje y Matemáticas en los cursos de cuarto y octavo año básico y en segundo año de enseñanza media. Esta prueba tiene un promedio nacional de 250 puntos.

[3] Fuente: https://www.agenciaeducacion.cl/#simce

Además, Arturo imparte clases en una universidad chilena a estudiantes de primer año de distintas carreras que deben cursar asignaturas de matemáticas (Pedagogía en Matemáticas, entre ellas) en contenidos de Álgebra, Cálculo y Geometría. En los cursos de Cálculo a nivel universitario, Arturo ha impartido el tema de funciones, al menos, durante 10 años. Asimismo, Arturo ha participado como profesor en cursos de post-título y actualizaciones curriculares ofrecidas a profesores que ejercen en enseñanza básica trabajando en el contenido del Álgebra a nivel escolar.

Los antecedentes de Arturo nos muestran que cumple con la mayoría de las características secundarias de profesor experto que sintetizan Rojas *et al*. (2012). A la vez, Arturo se muestra interesado, accesible y comprometido con esta investigación.

Proceso y técnicas de recogida de datos

Los elementos fundamentales de la investigación son los datos, los procedimientos para recolectar, analizar e interpretarlos y el reporte que da cuenta de los resultados del estudio. En el caso de los datos, de acuerdo con Vasilachis (2006), estos deben guardar relación con aquello que se desea investigar, con la pregunta y el objetivo de la investigación, siendo recolectados intencionalmente en sus contextos naturales cuando corresponda. En nuestra investigación, que busca indagar en el conocimiento del profesor durante la enseñanza del concepto de función, el escenario para llevar a cabo la recolección de datos fue la sala de clases.

Como parte de la adquisición de técnicas para la recolección de datos se invitó participar a un profesor novel, bajo las mismas condiciones de informante y confidencialidad, tal como se realizó con los profesores expertos pre seleccionados. Este profesor novel y su superior jerárquico del establecimiento donde trabajaba aceptaron la invitación y nuestro acceso al aula. Los datos recolectados en este caso no fueron considerados para este reporte. En este caso, la observación de las clases, la recolección de datos y las conversaciones con el profesor novel sirvieron para identificar en qué aspectos poner atención durante las sesiones del profesor experto, tales como ubicación de la cámara para registrar las clases, respaldo de los datos digitales, los distintos tipos de sesiones de clases (taller de ejercitación, introducción de un concepto nuevo, repaso de contenido o aplicación de evaluaciones, entre otros) en las cuales tomar datos, etc., para contar con una experiencia previa antes de continuar con la etapa de toma de datos con los profesores expertos.

Para iniciar el proceso de recolección de datos se solicitaron las autorizaciones correspondientes al profesor, a los apoderados o responsables legales de los estudiantes y a la dirección del colegio para realizar el registro audiovisual de las clases del profesor del estudio (Anexo 1: Consentimientos). En estas autorizaciones se estipula el acuerdo de confidencialidad sobre los datos, lo que nos comprometió a utilizar las videograbaciones, audios y fotografías solo para fines de investigación sin revelar los nombres reales de los estudiantes, del profesor ni del establecimiento en el cual se registraron los datos. Por esta razón, se anexan solo las transcripciones de las sesiones y entrevistas, quedando archivados los videos, audios y fotografías donde pudiesen ser reconocidas las personas involucradas.

También se comunicó a los estudiantes del curso de Arturo cuáles eran los objetivos de la investigación y los motivos por los cuales ingresamos a las clases para aplacar la ansiedad natural que produciría la incorporación de elementos extraños a la sala (cámara filmadora y el investigador como persona ajena al curso).

Tanto Arturo como la dirección del establecimiento fueron informados sobre los objetivos de la investigación y sobre el rol que asumiría el profesor informante. Las respuestas a estas solicitudes y estipulaciones fueron positivas y permitieron acceder a registrar en video las sesiones de clases que Arturo destinó a la enseñanza del concepto de función. Así también, se informó la posibilidad de acceder al reporte final o a desistir, en el caso del profesor, de seguir participando de la investigación en cualquier momento (Anexo 1: Consentimientos).

Previamente, en una conversación con Arturo, nos comentó que el curso en el que impartiría el tema de funciones sería el primer año de enseñanza media. Según el currículum oficial chileno, el concepto de función es uno de los temas que se ha reubicado durante la reforma educacional que el Gobierno de Chile implementó a través del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2016a). En esta reforma, el concepto de función pasó de ser enseñado en primero medio (14-15 años) a ser enseñado en el nivel anterior, octavo año de enseñanza básica (13-14 años).

Debido a que el año anterior al que se registraron los datos (los datos se recolectaron durante el año 2015), el curso de octavo año básico no había recibido la instrucción sobre el concepto de función, la organización de los contenidos de Arturo contempló incluir este concepto en el año siguiente, pues de otro modo esa generación de estudiantes no tendría el espacio de estudiar el concepto en los cursos posteriores de educación media. En los cursos siguientes, que completan la escolaridad obligatoria en Chile, no aparece el estudio del concepto de función, sino que se estudian tipos o ejemplos de funciones: función cuadrática, función raíz, función exponencial y logarítmica, entre otras.

Una vez que contamos con las debidas autorizaciones, procedimos a ingresar a la sala de clases de Arturo. Inicialmente los estudiantes se mostraron inquietos por estos elementos, sin embargo, poco a poco fueron obviando la existencia de la cámara y actuando con normalidad. Nuestra principal fuente de datos fueron la observación y videograbación de las sesiones de clases de Arturo. Puesto que nuestra pregunta y objetivo de investigación apuntan a estudiar al profesor en su contexto y con la menor intervención posible de nuestra parte, adoptamos la estrategia de observación no participante (Flick, 2009) de las sesiones de clases destinadas a la enseñanza del concepto de función. De acuerdo con Stake (2007), “los investigadores cualitativos son no intervencionistas. Intentan ver lo que hubiera ocurrido si ellos no hubieran estado presentes. Durante el trabajo de campo, tratan de no llamar la atención, ni hacia sí mismos ni hacia su trabajo” (p. 47).

Para realizar la grabación de las clases, nos ubicamos en el fondo de la sala con una cámara filmadora sobre un trípode. La cámara enfocaba hacia la pizarra que era el lugar de preferencia del profesor para hacer las clases en general y, en ocasiones seguía el movimiento del profesor para registrar mejor su expresión, imagen y audio sin abandonar el punto desde donde se ubicó la cámara filmadora.

En total se registraron 9 sesiones de clases en que el profesor trabajó el concepto de función. De ellas, 6 sesiones tuvieron una duración de 90 minutos y otras 3 tuvieron una duración de 45 minutos. La recolección de datos mediante videograbación de clases duró aproximadamente 2 meses y se realizó entre el 28 de agosto y el 21 de octubre del año 2015.

La técnica complementaria para recolección de datos fue una entrevista semiestructurada (Anexo 3) que se sostuvo con Arturo en una etapa posterior a la grabación de sus clases y habiendo realizado un primer análisis de los datos de modo que pudiésemos profundizar en aspectos de su conocimiento que requerían ser aclarados, confirmados o descartados como evidencia de su conocimiento especializado. Debido a la extensión de la entrevista y a su diseño semiestructurado, la entrevista se realizó en dos encuentros diferentes, cuyas duraciones fueron de 1hora y 30 minutos y 2horas y 30 minutos aproximadamente para proporcionar al profesor el tiempo que requería para responder. Las preguntas de la entrevista se organizaron considerando los subdominios del MTSK para conducir el diálogo hacia nuestro foco de atención, pero permitiendo que el entrevistado pueda expresar sus propias ideas, como lo recomienda Stake (2007).

Proceso e Instrumentos de análisis

Los videos de las clases fueron transcritos a través del procesador de textos Word, destinándose un documento para cada sesión de clase registrada bajo el siguiente formato:

En la Tabla 3, la columna “Línea” corresponde a la numeración correlativa de las intervenciones tanto del profesor como de los estudiantes. La columna “Intervención” incluye todas las intervenciones del profesor y las interacciones con sus estudiantes, identificando con “P” la intervención que realiza el profesor y con “A” o “As” las intervenciones orales que realiza uno o varios estudiantes, respectivamente. Para la entrevista, hemos utilizado “E” para indicar las intervenciones del entrevistador. En el capítulo de los resultados, se cambió el rótulo “P” por “Arturo” en los extractos de clase expuestos para dirigir el foco de atención a las intervenciones del profesor. A continuación, un ejemplo de la transcripción de un extracto de clase.

Tabla 3: Formato y Ejemplo de transcripción.

Línea	Intervención	Observación
1	P: Vamos a recordar ciertos conceptos, vamos a recordar… Algunas mezclas de cosas. Una de las cosas que vamos a recordar es el plano cartesiano. ¿Qué necesitamos recordar del plano cartesiano?	Conocimientos previos sobre plano cartesiano. KMT como estrategia de enseñanza
2	A: La “Y” es así [indica con la mano la ubicación del eje]	
3	A: X es horizontal	
4	A: Abajo están los negativos y a la izquierda.	
5	P: Los negativos están a la izquierda y abajo, ¿qué más recordamos de eso?, ¿qué hay aquí? [muestra con su mano un plano dibujado en la pizarra, ejes sin graduación] ¿Por qué está formado todo esto?	Conocimiento sobre el plano cartesiano
6	A:[no se entiende]	
7	P: Estos son negativos, estos son negativos [señala los semiejes negativos]. Aquí tenemos el 1, el 2, el 3, el 4, etc., -1,-2... [gradúa el eje X] y son lo que es una intersección de dos rectas. ¿Por qué está formado todo esto? ¿qué hay aquí?¿Qué es lo que dibujamos en el plano cartesiano?	

En la columna central de la transcripción se han incluido elementos adicionales a las palabras pronunciadas por quienes intervienen. Se ha agregado la descripción de algunos gestos, expresiones y otras acciones del profesor mediante corchetes, por ejemplo: [gradúa el eje X] o [señala los semiejes negativos] para entregar una imagen más detallada de lo ocurrido durante las sesiones de clases del profesor. Además, se han incorporado fotografías o capturas de pantalla de la pizarra para complementar el registro escrito, generalmente cuando se trata de alguna representación gráfica, dibujo o uso de símbolos especiales en los que el registro escrito no permita dar cuenta de ello.

En la columna "Observaciones" se han incluido algunas ideas respecto a los conocimientos que la intervención puede dar cuenta, sobre la relación de esa intervención con otros conocimientos o anotaciones con posibles preguntas que sirvieron para elaborar la entrevista posterior. Una vez que se tuvieron las transcripciones de las 9 sesiones de clases estructuradas como la Tabla 3, se llevaron todos los registros a un archivo Excel para poder manejar el conjunto de todos los datos.

Después de las primeras lecturas de las transcripciones y de un análisis preliminar, cada clase se dividió en episodios formados por grupos de intervenciones consecutivas. En Liñán (2017) se plantea la pregunta sobre ¿qué debía considerar un episodio? Por nuestra parte, los episodios son los fragmentos de cada sesión que están delimitados por los cambios de actividad o de objetivo que propone el profesor, ya sean explícitos o tácitos. Los episodios resultantes sirvieron de referencia para contextualizar el conocimiento del profesor en el desarrollo de sus clases. En el archivo con las transcripciones se agregó una primera columna para identificar los diferentes episodios de clase (Tabla 4, primera columna).

Con las transcripciones organizadas por clases y episodios de clases, además de la numeración de cada intervención se procedió a realizar el análisis de contenido (Bardin, 1996). Para ello definimos las unidades de análisis como las intervenciones escritas y orales del profesor y las interacciones con sus estudiantes. Algunas de las intervenciones escritas del profesor generaron la necesidad de hacer capturas de la pizarra para contextualizar el análisis y apoyar la presentación de las transcripciones. Estas imágenes fueron tratadas del mismo modo que las intervenciones orales del profesor. En la primera etapa de este análisis se observó que en diversas intervenciones del profesor (las más extensas, generalmente) fue posible identificar más de un tipo de conocimiento. Frente a ello se procedió a subdividir aquellas intervenciones del profesor en las ideas que estaban contenidas y que hacían referencia a diferentes conocimientos. Para efectos del análisis, se numeró correlativamente las ideas contenidas en la intervención tal como se muestra en la Tabla 4.

Finalmente, con esta organización resultó un total de 1713 intervenciones en las clases y 322 intervenciones entre las dos partes de la entrevista. Estas cantidades consideran tanto las intervenciones del profesor como las de los estudiantes y las del entrevistador/investigador en el caso de la entrevista, sin las subdivisiones (segunda columna).

Tabla 4: Subdivisión y organización de las intervenciones del profesor.

Episodio 1: Recordar conocimientos previos del plano cartesiano y simbología	1	1	P: Vamos a recordar ciertos conceptos, vamos a recordar…Algunas mezclas de cosas. Una de las cosas que vamos a recordar es el plano cartesiano.	Conocimientos previos sobre plano cartesiano. KMT como estrategia de enseñanza
		2	¿Qué necesitamos recordar del plano cartesiano?	Selección de los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema
	2		A: La "Y" es así [indica con la mano la ubicación del eje]	
	3		A; X es horizontal	
	4		A: Abajo están los negativos y a la izquierda.	
	5	1	P: Los negativos están a la izquierda y abajo,	Conocimiento sobre el plano cartesiano
		2	¿Qué más recordamos de eso?, ¿qué hay aquí? [muestra con su mano un plano dibujado en la pizarra, ejes sin graduación]	
		3	¿Por qué está formado todo esto?	
	6		A:[no se entiende]	
	7	1	P: Estos son negativos, estos son negativos [señala los semiejes negativos X Y].	
		2	Aquí tenemos el 1, el 2, el 3, el 4, etc. -1,-2… [gradúa el eje X] y son lo que es una intersección de dos rectas.	
		3	¿Por qué elementos está formado todo esto?, ¿qué hay aquí?	
		4	¿Qué es lo que dibujamos en el plano cartesiano?	

Para realizar el análisis hemos considerado los dominios de Conocimiento Matemático y de Conocimiento Didáctico del Contenido, sus respectivos subdominios y sus correspondientes categorías del modelo MTSK (presentadas en el capítulo anterior y basadas en Carrillo *et al*., 2018). De acuerdo con los autores, y según lo expuesto en el capítulo anterior, el modelo es también una herramienta para el análisis del conocimiento del profesor.

En esta investigación, el MTSK es utilizado como una conceptualización del conocimiento del profesor, a la vez que sus subdominios y categorías (Tabla 5) fueron usadas como instrumento de análisis de los datos. Otro instrumento de análisis está formado por la batería de ejemplos de conocimiento sobre el concepto de función que se propuso junto con la presentación del MTSK. La operacionalización del MTSK mediante estos ejemplos constituyó un punto de referencia y como sensibilización frente a lo que se esperó identificar como conocimiento especializado.

Respecto de esta identificación, adoptamos la distinción entre *indicio* y *evidencia* de conocimiento que expone Flores-Medrano (2015). Por una parte, una evidencia de conocimiento es un elemento (*e.g.*, una palabra, una afirmación o un gesto, una representación, etc.) que permita afirmar la presencia de conocimiento. Por otro lado, un indicio de conocimiento requerirá de algún tipo de confirmación para validarlo como muestra de conocimiento o de su ausencia. La confirmación de un indicio puede estar dada por otra evidencia o por otros indicios que complementen al original y dependerá de las técnicas seleccionadas para recolectar los datos o de la triangulación.

El análisis de los datos se realizó en dos etapas. La primera etapa estuvo guiada por el primer Objetivo Específico (OE1); *Identificar y Describir indicadores de conocimiento especializado que el profesor manifiesta durante la enseñanza del concepto de función.* Se realizó un análisis atómico revisando una a una las intervenciones del profesor, y sus respectivas subdivisiones, en búsqueda de indicios o evidencia de conocimiento matemático o didáctico del contenido sobre el concepto de función. La segunda etapa considera los resultados de la etapa anterior para abordar el segundo Objetivo Especifico (OE 2); *Establecer e Interpretar relaciones dentro del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función que manifiesta durante la enseñanza.* Se analizó el conjunto de indicadores en busca de elementos, matemáticos y/o didácticos, que permitieran establecer relaciones dentro del conocimiento especializado del profesor manifestado de manera integral, sin las divisiones con fines analíticas que establece el MTSK.

Las etapas antes descritas se asocian a los diferentes niveles en que se analizaron los datos:

a) Cronológico: los datos se analizaron siguiendo el guión dado por la transcripción de las videograbaciones siguiendo el desarrollo de las clases de manera secuencial, desde la clase 1 hasta la clase 9. En esta fase se identificaron aquellas intervenciones de Arturo que presentaban evidencias de conocimiento especializado en alguno de los subdominios y categorías.
b) Lineal con el MTSK: los hallazgos del análisis anterior se agruparon y estructuraron de acuerdo a los subdominios y categorías propuestas por el MTSK (excepto para el KPM, que no posee categorías). Se trata de una mirada de los datos desde las categorías y subdominios del modelo. El

resultado de esta fase es la formación de grupos de evidencias de conocimiento para presentar los indicadores en cada categoría.

c) Global e integradora: los datos y los resultados se miraron con una perspectiva global para identificar las interacciones de diferentes conocimientos descritos en la fase anterior. Las interacciones entre conocimientos permitieron establecer relaciones entre categorías y subdominios del modelo para el caso del profesor de este estudio.

En la presentación de los resultados, las intervenciones fueron referenciadas siguiendo la estructura [nº intervención: sub numeración (desde-hasta)] en los casos que corresponda. Por ejemplo, en la intervención 1 de Arturo (ver Tabla 4) aparecen las ideas relativas al plano cartesiano como conocimiento previo de sus estudiantes [1:1] y respecto a los elementos que son necesarios recordar para el estudio de la función [1:2]. En [7:1-2] se observa que el profesor conoce dónde ubicar los números positivos y negativos en cada eje, así como la forma de graduar el eje X. Para el caso de la entrevista se identificaron los extractos anteponiendo Ent1 para la primera parte y Ent2 para la segunda parte de la entrevista.

Para registrar las identificaciones realizadas se agregaron diferentes columnas a la matriz de transcripciones (Tabla 4) como se muestra en la Tabla 5. Las columnas agregadas fueron las siguientes:

- Indicio/evidencia: para señalar a qué tipo de intervención correspondía.
- Subdominio: para ubicar en alguno de los subdominios del MTSK la evidencia o indicio de conocimiento. Se rotuló con la sigla de los subdominios del MTSK.
- Categoría: para vincular la evidencia o indicio a alguna de las categorías del subdominio previamente identificado. Se utilizaron nombres cortos de las categorías contenidas en la Tabla 5.
- Descriptor: para señalar qué tipo de conocimiento estaba presente en la intervención.

Este análisis por intervención o ideas dentro de la intervención en la transcripción de las clases y entrevista permitió la identificación de evidencias e indicios de conocimiento matemático y didáctico del profesor. En este proceso de identificación, los hallazgos fueron asociados a las correspondientes categorías que el MTSK propone. Para el caso de las identificaciones de KPM, se usaron los indicadores de conocimiento que se expusieron en el capítulo anterior, quedando la asignación de una categoría para una etapa posterior del análisis que atendió al OE 2.1 sobre la interpretación de los indicadores como conocimiento especializado. Esta apertura se mantuvo durante el proceso de análisis y asignación de categorías en vista de la emergencia de nuevas categorías no contempladas en la presentación del modelo MTSK.

El proceso anterior buscó cumplir el OE1.1: *Identificar evidencias del MK y del PCK del profesor de matemáticas sobre el concepto de función*. Posteriormente, con estas evidencias e indicios de conocimiento se realizaron agrupaciones de acuerdo a la categoría asignada a cada uno de ellos. En el archivo con las transcripciones se utilizó la herramienta *Filtro* de Excel para dejar a la vista solo aquellas intervenciones asociadas a una misma categoría y su respectivo subdominio. Esta operación dio como resultado conjunto de intervenciones para cada categoría identificada, las que fueron organizadas de acuerdo al descriptor asignado (última columna de la Tabla 5). Cuando uno de estos nuevos grupos de evidencias permitía dar cuenta de algún tipo de conocimiento, se redactó el indicador correspondiente que las agrupó en el que se incluye un rótulo siguiendo el siguiente patrón: (sigla del subdominio – inicial de la categoría – número del indicador). Por ejemplo, (KoT-D-1) es el primer indicador de la categoría de Definiciones, Propiedades y sus fundamentos del subdominio de Conocimiento del Tema, KoT. El libro de códigos utilizado se incluye en la Tabla 7.

El reporte final contempló estas evidencias o indicios confirmados para sustentar cada indicador y así proceder a su descripción que buscaba el OE1.2: *Describir indicadores del MK y del PCK del profesor de matemáticas sobre el concepto de función.*

Tabla 5: Matriz de transcripciones ampliada para el análisis

Línea		Intervención	Observación	indicio o evidencia	SUBDOMINIO		CATEGORÍA	descriptor
1	1	P: Vamos a recordar ciertos conceptos, vamos a recordar…Algunas mezclas de cosas. Una de las cosas que vamos a recordar es el plano cartesiano.	selección de los conocimentos previos necesarios para el estudio del tema	indicio	KMLS		secuenciación de temas	identifica los conocimientos previos de los estudiantes. Selecciona los conocimientos necesarios para el estudio del tema
	2	¿Qué necesitamos recordar del plano cartesiano?		indicio	KMT		estrategias	recurre a conocimientos previos de los estudiantes para enseñar el concepto de función
2		A: La "Y" es así [indica con la mano la ubicación del eje]						
3		A; X es horizontal						
4		A: abajo están los negativos y a la izquierda.						
5	1	P. Los negativos están a la izquierda y abajo,		evidencia	KoT	R1	representaciones	conocimiento de la representación de los ejes del plano cartesiano.
	2	¿qué más recordamos de eso?, ¿qué hay aquí? [muestra con su mano un plano dibujado en la pizarra, ejes sin graduación]		indicio	KMLS		secuenciación de temas	identifica los conocimientos previos de los estudiantes. Selecciona los conocimientos necesarios para el estudio del tema
	3	¿por qué está formado todo esto?						
6		A:[no se entiende]						
7	1	P: estos son negativos, estos son negativos [señala los semi ejes negativos X Y]		evidencia	KoT	R1	representaciones	conocimiento de la representación de los ejes del plano cartesiano.
	2	aquí tenemos el 1, el 2, el 3, el 4, etc. -1,-2...[gradúa el eje X] y son lo que es una intersección de dos rectas.						
	3	¿por qué elementos esta formado todo esto? ¿qué hay aquí?						
	4	¿qué es lo que dibujamos en el plano cartesiano?						

En la segunda etapa, guiada por el segundo Objetivo Específico (OE2): *Establecer e Interpretar relaciones dentro del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función que manifiesta durante la enseñanza*, se realizó un análisis holístico sobre las transcripciones a partir de lo que se había identificado y descrito con el objetivo específico anterior. El proceso de establecer las relaciones dentro del conocimiento inició desde el abordaje de los objetivos OE1.1 y OE1.2 al asignar a cada intervención en la que se identificara conocimiento matemático o didáctico sobre el concepto de función una categoría o subdominio del MTSK. Los indicadores de conocimiento y sus descripciones que se obtuvieron fueron interpretados como manifestaciones del conocimiento especializado del profesor sobre el concepto de función, y se analizaron buscando elementos, matemáticos o didácticos asociados al concepto de función, su enseñanza o su aprendizaje, que permitiesen relacionar dos o más indicadores de conocimiento.

Por ejemplo, la definición de la función permitió establecer relaciones dentro del Conocimiento del Tema (KoT), particularmente, entre la categoría de Definiciones, Propiedades y sus fundamentos, la categoría de Procedimientos (sobre construir ejemplos de funciones entre otros) y la categoría de Registros de representación (sobre el diagrama sagital para representar la función). Por otro lado, la misma definición de función y su enseñanza permitió establecer relaciones entre el Conocimiento del Tema (KoT – la definición del concepto), el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM- el papel de los cuantificadores en la definición), el Conocimiento sobre la Enseñanza (KMT – la estrategia de enseñanza), el Conocimiento sobre los Estándares de Aprendizaje (KMLS – la profundidad conceptual y procedimental esperada) y el Conocimiento sobre las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM – las dificultades en el aprendizaje de las definiciones dadas en lenguaje formal). De esta forma, la interpretación de las relaciones identificadas buscó mostrar la integración del conocimiento que manifestó Arturo durante la enseñanza del concepto de función.

La última etapa del análisis requirió de una mirada holística sobre los datos y los resultados de los Objetivos Específicos 1.1, 1.2 y 2.1. La interpretación y comprensión de las relaciones pasó por la identificación de tales relaciones para, posteriormente, describirlas en términos de los conocimientos matemáticos o didácticos involucrados, lo que atendió al OE 2.2: *Interpretar las relaciones establecidas dentro del conocimiento especializado que manifiesta el profesor de matemáticas sobre el concepto de función.* Para avanzar en la comprensión de las relaciones se procedió a contabilizar la aparición de cada tipo de conocimiento, definido por los indicadores descritos, en los diferentes episodios en que se había dividido cada sesión de clase. La organización de este conteo se presenta en la Tabla 6.

Los resultados de este conteo permitieron identificar en momentos del desarrollo de la enseñanza de la función en los que intervenían la mayor cantidad y diversidad de conocimientos y, por tanto, permitía mostrar relaciones dentro de dichos conocimientos. La Tabla 6 admite además una lectura horizontal sobre la aparición de un mismo indicador durante la enseñanza del concepto de función, sin embargo, consideramos que ello no muestra las relaciones entre conocimientos que buscamos. La lectura horizontal de la Tabla 6, por categorías, puede mostrar relaciones entre los diferentes conocimientos de la categoría asociados a los distintos momentos en que se desarrolla la enseñanza del concepto, pero no permite mostrar la integración de otros conocimientos.

De acuerdo a nuestro posicionamiento, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas es una red compleja de conexiones que se manifiesta integrando diferentes conocimientos. En este sentido, para presentar las relaciones entre diferentes conocimientos del profesor hemos seleccionado aquellos episodios que contabilizaron la mayor cantidad de indicadores presentes. De esta selección han resultado cuatro momentos en los cuales es posible observar conocimientos de diferentes subdominios de manera articulada e integrada: la enseñanza de la definición del concepto de función, la presentación de una analogía para hacer comprensible el concepto de función, la enseñanza de diferentes representaciones de la función y la enseñanza de la biyectividad de la función. A estos cuatro momentos se agregan dos situaciones que son transversales a la enseñanza de la función: el uso del lenguaje simbólico y la resolución de diferentes tipos de ecuaciones, que también permiten ver relaciones dentro del conocimiento especializado de Arturo.

B	C	D	E	F	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
					Episodios								
Aparición de indicadores de conocimiento por episodio de clase					1-30	31-43	43-70	80-118	121-134	138-202	203-276	277-318	319-377
					E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
KoT	Definiciones (D)		1	la definición de función	1	3					1		
			2	la definición de dominio y recorrido		1							
			3	la definición de función lineal y función afín									
			4	la definición de inyectividad, epiyectividad y biyectividad									
			5	la definición de la inversa de una función									
			6	la definición de gráfico de una función							1		
	Representaciones (R)		1	la representación del plano cartesiano y puntos en él	3								
			2	la representación de la función mediante diagrama sagital		1							
			3	la representación de la función mediante gestos					1				1
			4	la notación para las funciones						1	1		
			5	la nomenclatura de imagen y pre imagen en una función			1					1	
			6	la representación algebraica de la función lineal y afín									
			7	la representación cartesiana de la función							2		
			8	la representación cartesiana de las funciones lineales y afines							1		

1. Intervalo (desde-hasta) de las intervenciones que contiene el episodio.
2. Enumeración de los episodios.
3. Conteo de las apariciones de los indicadores en cada episodio.
4. Identificación del subdominio.
5. Identificación de las categorías del subdominio.
6. Enumeración del indicador de conocimiento asociado a la categoría.
7. Descriptor resultante del OE1.2

Triangulación

De acuerdo con Arias (2000), el objetivo de la triangulación es controlar el sesgo que se produce intrínsecamente por las características personales de los investigadores o la teoría o método de estudio usado para incrementar la validez de los resultados. La idea de triangulación proviene de la localización de puntos respecto a otros dos cuya posición es conocida mediante la generación de un triángulo. Esta idea se ha tomado como metáfora desde la geo localización para ubicar un punto mediante una serie de puntos conocidos y es utilizado, en un sentido similar, para posicionar los distintos resultados de cara a dar respuesta a la misma pregunta de investigación mediante diferentes métodos.

Con el fin de dar validez a nuestro estudio, buscamos los procedimientos que redujeran la subjetividad de nuestras interpretaciones y, por tanto, las conclusiones que pudimos obtener bajo el supuesto de que la naturaleza de la investigación cualitativa tiene un carácter fuertemente subjetivo (Stake, 2007). En busca de eliminar sesgos en nuestros resultados es necesario someter nuestros resultados y conclusiones a un mecanismo de validación determinado por el proceso de triangulación. En este sentido, la triangulación se produce cuando un tema de investigación o fenómeno se estudia desde, al menos, dos puntos de vista (Arias, 2000) y se utiliza como estrategia para promover la calidad del estudio (Flick, 2015).

> Triangulation includes researchers taking different perspectives on an issue under study or more generally in answering research questions. These perspectives can be substantiated by using several methods and/or in several theoretical approaches. Both are or should be linked. Furthermore, it refers to combining different sorts of data against the background of the theoretical perspectives that are applied to the data. As far as possible, these perspectives should be treated and applied on an equal footing and in an equally consequent way. At the same time, triangulation (of different methods or data sorts) should allow a principal surplus of knowledge. For example, triangulation should produce knowledge at different levels, which means they go beyond the knowledge made possible by one approach and thus contribute to promoting quality in research. (Flick, 2007, p. 41)

Según Denzin (1970, citado en Flick, 2007), se distinguen diferentes tipos de triangulación: a) por investigadores que observan el mismo conjunto de datos y contrastan sus hallazgos, b) por datos que provengan de distintas fuentes, c) teórica respecto del análisis de los datos por más de un enfoque teórico, y d) la triangulación metodológica (Arias, 2000), referida al uso de dos o más métodos de investigación. En esta investigación utilizamos la triangulación por investigadores y metodológica. A continuación, las describimos sucintamente y cómo fueron empleadas.

La triangulación por investigadores se refiere a la exposición de los datos recolectados a diferentes observadores/investigadores, que pueden tener diferentes roles en la observación (Arias, 2000). En nuestra investigación, los datos fueron estudiados junto con dos investigadores expertos en el modelo MTSK (los directores de esta tesis) para buscar evidencias e indicios de conocimiento especializado. Estos hallazgos son contrastados entre sí para eliminar el sesgo que se puede producir por las observaciones individuales y verificar el grado de confiabilidad de las observaciones realizadas. En la medida que existan coincidencias entre las observaciones, se tendrá algo parecido a un control de confiabilidad de ellas. Aquellos hallazgos en que requerían confirmación sobre la presencia de conocimiento especializado quedaron marcados como indicio de conocimiento y sirvieron para generar la entrevista al profesor para confirmar la presencia o ausencia de conocimiento especializado. Los hallazgos en que se tuvo coincidencia en la identificación de conocimiento especializado pasaron a ser evidencia de conocimiento y se incluyeron en el reporte de los resultados., mientras que las identificaciones en que se tuvieron discrepancias o existieron dudas respecto al tipo de conocimiento manifestado fueron discutidas por los investigadores para llegar a acuerdo sobre su inclusión o no en el reporte.

Esta triangulación también se aplicó en instancias del tipo taller de investigación, por ejemplo, en jornadas, congresos y seminarios de didáctica de la matemática. En ellas se compartieron porciones de datos con otros investigadores (expertos en el modelo, familiarizado con él o ajenos al mismo) en donde se solicitó que analizaran los datos entregados y, en conjunto, establecer conclusiones a cerca del conocimiento especializado que dichas porciones de datos dejaban ver.

Además, la presentación de reportes de investigación asociados a este trabajo mediante comunicaciones en diferentes congresos, nacionales e internacionales, y que incluían porciones de datos, eran revisadas tanto por los expertos del comité científico del evento como por la audiencia de las comunicaciones quienes, a su vez, también realizaban sus observaciones respecto a nuestros hallazgos. Las observaciones coincidentes permitieron confirmar nuestros hallazgos y las divergentes nos hicieron volver sobre los datos para confirmar o rechazar la divergencia. Como parte de este tipo de triangulación incluimos las revisiones de los dos artículos (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018; Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Ribeiro, 2018) que fueron aceptados en revistas del área de la Educación Matemática y que provienen de trabajos vinculados a esta investigación que se presentaron en congresos internacionales.

La triangulación metodológica, referida a la utilización de dos o más métodos de investigación tanto a nivel del diseño de la investigación como en la recolección de los datos, identifica dos tipos de triangulación: dentro de los métodos y entre los métodos. En nuestro caso se realizó la del primer tipo, que corresponde a combinar recolecciones de datos al medir una misma variable. Según Arias (2000), se considera como triangulación dentro de métodos al incluir, por ejemplo, la observación y la entrevista abierta para evaluar el mismo fenómeno. Para la presente investigación, consideramos la observación de las clases destinadas a la enseñanza del concepto de función y una entrevista posterior a estas clases. Los datos de la observación y de la entrevista se analizaron de manera separada para posteriormente compararlos y validar los hallazgos.

CAPÍTULO 4. Análisis y Resultados

Descripción de las clases de Arturo

Las clases de Arturo tuvieron una estructura similar entre ellas. En ellas se reconocen tres momentos: la recapitulación, la propuesta del tema y la ejemplificación o ejercitación. La recapitulación consiste en recordar contenidos anteriores que Arturo estima necesarios para el desarrollo de la clase actual o las siguientes clases; la propuesta del tema es una exposición sobre el tema principal de la clase dando su definición o explicaciones junto con algunos ejemplos. La ejemplificación consiste en dar una serie de ejemplos o ejercicios sobre el tema que pueden ser resueltos por los alumnos o en conjunto con el profesor. Una clase puede tener varios de estos momentos, según los temas que se aborden por clase. En general existe un orden de estos momentos, dándose la recapitulación al inicio de la clase, a la que siguen la propuesta del tema y luego los ejemplos y ejercicios.

A continuación, se detallan los temas de cada clase, una síntesis de lo abordado y los episodios en que se han dividido. La enumeración de los episodios corresponde al correlativo asignado en el total de las sesiones.

Clase 1: Definición del concepto de función

La clase inicia con un recordatorio de conceptos de plano cartesiano, coordenadas y lenguaje de conjuntos y cuantificadores.

La sesión trata sobre la definición del concepto de función, la representación en diagramas sagitales y en el plano cartesiano. Se trabaja el cálculo de imágenes cuando se tiene el dominio y la expresión algebraica de la función. Los conceptos de plano cartesiano y coordenadas son utilizados para construir la representación gráfica de una función partiendo desde el diagrama sagital. En esta construcción se identifica el gráfico de la función con un conjunto de puntos en el plano.

Se presenta la analogía de la función como una "máquina", aludiendo a la idea de función como un proceso de entrada y salida.

Se destaca el uso de vocabulario formal respecto a cuantificadores y conjuntos al momento de plantear la definición y validar otras relaciones como funciones.

Episodios:

1) Recordatorio de conocimientos previos: se recuerdan los conceptos de punto en el plano, la ubicación de puntos y la graduación de los ejes.
2) Definición del concepto de función: se plantea la definición de función basa en la idea de correspondencia. Se presentan los primeros diagramas sagitales y se indican los conjuntos de partida, de llegada, dominio y recorrido.
3) Presentación de la función como una máquina, la función como proceso de entrada-salida: se proporciona una analogía entre la función y una máquina lavadora para ayudar a la comprensión del concepto de función y asignarle un significado.

4) Uso de la definición para validar relaciones: se usan las dos propiedades que se incluyen en la definición para decidir si las correspondencias planteadas son o no funciones.
5) Discusión sobre lo que es o no función: como cierre del episodio anterior, se destaca la importancia de verificar la unicidad y exhaustividad en la asignación de imágenes. Se recurre a una representación con las manos para recordar cuándo es o no función una relación dada.
6) Ejercicios de evaluación de funciones, de identificación de funciones, de imágenes y pre imágenes: se determinan las imágenes y pre imágenes de elementos para ciertas funciones dadas en diagramas sagitales o por su expresión algebraica. Se destaca la idea de función como un proceso y se identifica utilizando las propiedades de unicidad y exhaustividad.
7) Representaciones para la función: se construyen secuencialmente las representaciones sagital, algebraica, numérica y cartesiana de una función afín. Se concluye sobre la forma de la representación cartesiana de la función, distinguiendo la función de su representación.

Clase 2: Cálculo de pre imágenes

La sesión inicia recordando las condiciones para determinar si una correspondencia es o no una función. Esta recapitulación destaca las condiciones de unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen. Junto con ello se repasa el cálculo de imágenes para funciones en las que se tenga la expresión algebraica que las define y sus pre imágenes. A continuación, se analiza la forma de obtener pre imágenes dada la función y la imagen, ayudándose de la resolución de ecuaciones y privilegiando la resolución de ecuaciones de la forma $y = f(x)$.

Se hace una conexión entre la representación en diagrama sagital y la notación $f: A \rightarrow B$.

Episodios:

8) Resumen de la clase anterior sobre lo que es una función: se recuerdan las dos propiedades que caracterizan a la función, los nombres de los conjuntos involucrados y la notación para las funciones.
9) Determinación de pre imágenes: se relaciona el cálculo de pre imágenes con el cálculo de la operación inversa que se usa en el cálculo de la imagen. Se utiliza el tanteo como técnica inicial para encontrar pre imágenes, y se formaliza el uso de ecuaciones para conseguirlas.

Clase 3: Definición de Dominio y Recorrido

La sesión inicia recordando cómo determinar imágenes y pre imágenes para una función dada. Luego, se definen los conceptos de dominio y recorrido para una función utilizando lenguaje de conjunto y notación por comprensión, asunto en el que los estudiantes presentan algunas complicaciones frente al lenguaje formal utilizado.

En esta sesión se añade un caso de cálculo de dominio en el cual la función tiene la incógnita en el denominador.

Episodios

10) Resumen sobre encontrar pre imágenes: se recuerda que evaluar la expresión algebraica permite encontrar imágenes y la resolución de ecuaciones permite encontrar pre imágenes.
11) Ejercitación sobre encontrar pre imágenes: se proporcionan algunas funciones lineales e imágenes para determinar las pre imágenes de esos elementos. Se refuerza el uso de la ecuación para lograrlo. Comienza a prescindir del diagrama sagital para los ejercicios.
12) Definición de dominio y recorrido: se presentan las definiciones de dominio y recorrido usando lenguaje natural y formal. Los alumnos presentan algunas dificultades en comprender este último.
13) Ejemplificación sobre el dominio y recorrido: se propone una función dada en diagrama sagital para explicar y ejemplificar los conceptos de dominio y recorrido mientras que se repiten las definiciones de dominio y recorrido.
14) Identificación del dominio usando la expresión algebraica de la función: se examina el tipo de elementos que pueden ser evaluados en las funciones observando las restricciones de la división por cero para expresiones algebraicas que tengan la variable en el denominador.

Clase 4: Función lineal y afín

En esta sesión se estudia el recorrido de una función y la forma de determinarlo. Se ejemplifica con funciones de expresión fraccionaria. Además, se definen las funciones lineal y afín, caracterizadas según la expresión algebraica $f(x) = ax + b$ (en función del valor del coeficiente b) y la representación gráfica de las mismas, poniendo énfasis en su ubicación respecto al origen del sistema de coordenadas.

Episodios:

15) Resumen de la clase anterior: se enfatiza en que evaluar la función permite obtener imágenes y resolver ecuaciones permite encontrar pre imágenes. Se pregunta si es posible evaluar cualquier número en determinadas expresiones, de lo que resulta la determinación del dominio de la función.
16) Cálculo del recorrido para una función con expresión algebraica fraccionaria: se resuelve la ecuación $y = f(x)$ despejando x para

luego preguntar por las restricciones de la variable dependiente. Se observan las restricciones de y para determinar el recorrido.

17) Definición de la función lineal y afín: se caracterizan las funciones lineal y afín mediante su expresión algebraica y su posición en el gráfico cartesiano. Se señala que “son rectas que pasan o no por el origen del sistema“, según sea el tipo de función.

Clase 5: Identificación de dominio y recorrido según la gráfica cartesiana

En esta sesión se identifica el dominio y recorrido de funciones utilizando la representación gráfica de las mismas, poniendo el énfasis en que el dominio se debe identificar y ubicar en el eje X, mientras que el recorrido se ubica en el eje Y. El profesor incorpora el uso de intervalos para representar el dominio y el recorrido.

Se presenta nuevamente la relación entre ecuación y función cuando se busca la intersección de la gráfica de la función con el eje X.

Los alumnos presentan dificultades en la ubicación de puntos en el plano que pertenecen tanto a la gráfica de la función como al eje X.

Episodios:

18) Resumen de la clase anterior: se recuerdan las características de las funciones lineales y afines según su expresión algebraica y la posición en el plano cartesiano. Se menciona que el dominio de estas funciones eran los racionales.
19) Construcción de la representación gráfica de la función $f(x) = x + 3$: se construye el gráfico cartesiano de la función ubicando puntos en el plano. Los puntos se obtienen evaluando 0 y 1 en la expresión algebraica de la función. Los estudiantes presentan dificultades al ubicar puntos sobre el eje X que pertenecen a la función.
20) Identificación del dominio de la función mediante el gráfico cartesiano: se observan aquellos valores en el eje X que poseen imagen para determinar el dominio. Se incluye la notación de intervalos para identificar el dominio de la función.
21) Identificación del recorrido de la función mediante el gráfico cartesiano: se observan los valores en el eje Y que son alcanzados por la gráfica de la función. La notación de intervalos también es utilizada para registrar el recorrido. Los estudiantes cuestionan sobre la proyección del gráfico hacia valores mayores en el dominio y en el recorrido.
22) Identificación de funciones y no funciones mediante su gráfica: se discrimina, según el gráfico cartesiano, si una relación representa a una función aplicando el criterio de la recta vertical. Se justifica la decisión basándose en la propiedad de unicidad de la imagen recordada a través de un diagrama sagital.
23) Relación entre la intersección con en el eje X y los ceros de la función: se observa que las funciones lineales y afines cortan al eje X en solo un punto. Se relaciona la intersección de la representación gráfica de

la función y el eje X con la ecuación $f(x) = 0$ y el cálculo de pre imágenes.

24) Ejercicios para identificar dominio y recorrido: se resuelven dos ejercicios sobre la identificación de dominio y recorrido dada la representación cartesiana de la función.
25) Ejercicios para determinar el punto de intersección en el eje X: se resuelve un ejercicio sobre determinar el punto de intersección entre una función afín y el eje X.

Clase 6: Función inyectiva

En esta sesión se estudia el concepto de inyectividad mediante los diagramas sagitales y la gráfica cartesiana. Se define formalmente la inyectividad y se resalta la estructura lógica de la proposición involucrada. El profesor demuestra que una función afín particular es inyectiva. Para esta demostración, el profesor no entrega detalles sobre los casos a analizar y evita explicar por qué se asume el antecedente de la implicación como verdadero.

Episodios:

26) Definición de inyectividad: se explica lo que significa la inyectividad de una función a través de la relación 1 a 1 previo a establecer la definición formal de función inyectiva. Se muestran diagramas sagitales en donde hay funciones inyectivas y funciones no inyectivas. La definición de inyectividad se expresa en lenguaje formal con el uso de cuantificadores.
27) Ejemplos de inyectividad y no inyectividad: se muestra el caso de la función x2 como no inyectiva, identificando casos de imágenes iguales y pre imágenes diferentes.
28) Demostración de la inyectividad: se identifica la estructura lógica que tiene la propiedad de inyectividad. Se demuestra la inyectividad de una función tomando dos elementos arbitrarios del dominio. Se explica cómo realizar dicha demostración.

Clase 7: Función epiyectiva

En esta sesión se define el concepto de función epiyectiva y se dan ejemplos con diagramas sagitales. Se enfatiza la igualdad entre el conjunto de llegada y el recorrido de la función como interpretación de la epiyectividad. También se define el concepto de biyectividad y se dan algunos ejemplos de funciones biyectivas. Se muestra el cálculo del recorrido en relación a la epiyectividad.

Episodios:

29) Resumen de la clase anterior: se recuerda el concepto de inyectividad y la idea de 1 a 1.
30) Definición de epiyectividad: se determina el recorrido de una función y se caracteriza la epiyectividad como la igualdad entre el recorrido y el conjunto de llegada.

31) Ejemplos de epiyectividad: se da una función y, mediante el cálculo del recorrido, se decide si ella es o no epiyectiva. En otro ejemplo se tiene el conjunto de llegada como un intervalo mientras que el recorrido de la función es el conjunto de todos los números Racionales, lo que permite comparar ambos conjuntos y decidir sobre la epiyectividad.
32) Definición de biyectividad: se menciona que la biyectividad se obtiene cuando se cumple la inyectividad y la epiyectividad.
33) Síntesis de la clase: se mencionan los conceptos de inyectividad, epiyectividad y biyectividad.
34) Presentación de ejercicios: se presentan ejercicios sobre todos los conceptos abordados hasta el momento.
35) Ejercicios de síntesis y resolución de consultas: los alumnos resuelven individualmente los ejercicios que el profesor planteó. Ellos hacen sus consultas al profesor y luego se ponen en común los desarrollos y resultados en la pizarra.

Clase 8: Función invertible

En esta sesión se introduce la función inversa mediante la construcción de funciones biyectivas. Se resalta esta condición para garantizar la existencia de la inversa. Se explora la forma de obtener la expresión de la función inversa mediante tanteo y se formaliza su obtención mediante la resolución de la ecuación $y=f(x)$ despejando la variable independiente.

Episodios:

36) Recapitulación sobre biyectividad: se recuerda que la biyectividad de una función se tiene mediante el cumplimiento de la inyectividad y la epiyectividad. Dos estudiantes construyen diagramas sagitales de funciones que para ellos son biyectivas.
37) Características de la función invertible: se muestra que la condición de biyectividad es necesaria para que sea posible definir la función inversa.
38) Definición de la función inversa: se propone una definición de la función inversa como la existencia de dicha función. Se introduce la notación de f-1 para la inversa de f.
39) Ejemplos de funciones inversas simples: a través de diferentes relaciones funcionales se descubre cuál es la expresión algebraica de la función y de su inversa. Comienza con f(x)=x+2 y continúa con f(x)=3x+2 utilizando el ensayo y error como técnica para encontrar la inversa. Surge la necesidad de una mejor estrategia para determinar la expresión de la función inversa.

Clase 9: Cálculo de la función inversa

En esta sesión se vuelve sobre la definición de función biyectiva mostrando que el procedimiento algebraico permite determinar la expresión algebraica de la función inversa de una función afín dada. A continuación, se propone una lista de funciones biyectivas en donde los alumnos deben determinar la inversa en cada caso.

Episodios:

40) Resumen de la clase anterior: se muestran ejemplos de funciones para determinar sus inversas mediante la operación inversa o despejando la variable independiente. Se resalta el cumplimiento de la condición de biyectividad para garantizar la existencia de la inversa.
41) Ejercicios sobre determinar la inversa: se proponen funciones mediante su expresión algebraica, indicando el dominio y el recorrido en cada una para determinar su inversa.

Indicadores de conocimiento especializado de Arturo

A continuación, pasamos a mostrar los resultados del análisis correspondiente a las etapas que determinaron los objetivos de esta investigación. La primera sección corresponde a la descripción de los indicadores identificados en el conocimiento que Arturo manifestó durante la enseñanza de la función, asociada al Objetivo Específico 1. La presentación de estos resultados se realiza por cada categoría y subdominio del MTSK en los que fue posible identificar conocimiento especializado.

Conocimiento de los temas (KoT)

El conocimiento del tema, concepto de función, se observa en la interacción del profesor con el contenido al definirlo, operar con él, representarlo y aplicarlo a diferentes áreas del conocimiento, proporcionándole diferentes significados.

Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos

En la categoría de definiciones se incluyen aquellos conocimientos relacionados con las definiciones que el profesor conoce y utiliza para la función, así como las propiedades que se incluyen para caracterizarla y las definiciones que se proponen para los conceptos asociados a la función como: imagen, pre imagen, dominio, recorrido, función lineal, función afín, inyectividad, epiyectividad y biyectividad de una función, función inversa y el gráfico de una función.

Conocimiento sobre la definición de función (KoT-D-1)

La primera clase destinada al concepto de función comienza con la presentación de la idea de *correspondencia* entre conjuntos y entre sus elementos, esto será base para generar una definición de la función.

> *Arturo: Hay ciertas palabras, yo voy a hablar ahí y voy a utilizar la palabra correspondencia. ¿En qué contexto lo vamos a usar nosotros?*
>
> *En que a cada uno le corresponde una silla, o sea, cada uno de ustedes está asociado a una silla, entonces eso es hacer una correspondencia: cada uno tiene su silla, cada uno tiene su mesa, ahí hay una correspondencia. Ustedes, como pertenecientes a un conjunto de alumnos y las sillas a un conjunto de sillas, entonces a todo el curso le corresponde una silla, esa es la idea de la palabra, que en el contexto que vamos a trabajar, por correspondencia. Entonces, ¿cómo vamos a definir una función? Como una correspondencia de elementos, elementos de dos conjuntos en la que a cada elemento de un conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada…lo voy a escribir. [31:5-7]*

Arturo utiliza el término *correspondencia* para referirse al vínculo que se establece entre los elementos de los dos conjuntos involucrados. Se observa que la correspondencia exhaustiva que el profesor establece entre elementos de dos conjuntos le permite referirse a ella como correspondencia entre los conjuntos cuando señala que *cada uno de ustedes está asociado a una silla, entonces a todo el curso le corresponde una silla*. Esta relación entre elementos conocidos y cercanos a los estudiantes proporciona un contexto para definir la función.

La función es definida verbalmente en las últimas líneas del extracto anterior como un tipo de correspondencia que debe cumplir con la exhaustividad en la asignación de imagen y la unicidad en esta asignación. Estas condiciones son destacadas por Arturo y determinan las propiedades que caracterizan a la función.

> *Arturo: […]Hay distintas correspondencias en distintos contextos. Para que esas correspondencias que uno puede hacer con distintos elementos llegue a ser una función tiene que cumplir con esa condición [lee la definición]. [35:2-3]*

De este modo, Arturo propone una definición para el concepto de función basada en la idea de correspondencia entre elementos de conjuntos, la exhaustividad y la unicidad, añadiendo a la definición que escribe en la pizarra la condición de *no vacíos* para los conjuntos involucrados, como se observa en el siguiente extracto.

> *Arturo: Es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos (no vacíos). ¿Qué significaría que un conjunto fuera vacío?*
>
> *A: No tiene correspondencia.*
>
> *Arturo: No tiene elementos. [continúa con la definición] Dos conjuntos, A y B, así vamos a llamar a los dos conjuntos; uno se va a llamar conjunto A y el otro conjunto B, tales que…*
>
> *A: ¿A qué se refiere con no vacío?*
>
> *Arturo: Tiene que tener elementos, cualquiera, aunque sea uno, por lo menos uno, tales que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada B. [31:8 – 35:1]*

En la entrevista posterior se consultó a Arturo sobre la incorporación de la condición de no vacíos para los conjuntos y sobre qué ocurriría si alguno de los dos conjuntos fuese vacío, a lo que respondió:

> *Arturo: No tendríamos elementos para relacionar, para hacer corresponder.*
>
> *E: ¿No sería una función?*
>
> *Arturo: Creo que alguna vez los mismos niños preguntaron por qué eran no vacíos. Hay que imaginarse ¿qué pasa si no tuviéramos elementos con los que corresponder, y pensando en que si se pueden relacionar "no elementos"? No logra tener sentido, no hay una relación, y si no hay una relación, no va a haber una función. [Ent2 26-28]*

Se observa la importancia que Arturo asigna a la condición de no vacíos para poder garantizar la existencia de la función.

> *Arturo: Si se supone que tú vas a establecer una correspondencia entre elementos, si no tienes elementos, ¿qué correspondencia vas a hacer?*
>
> *E: ¿Hay función en ese caso?*
>
> *Arturo: No habría función, porque estás estableciendo una correspondencia, una relación entre... sino no tendría sentido si no tienes elementos que relacionar. [Ent1 54-56]*

Esta condición de no vacío para los conjuntos es asumida en las clases siguientes y no se menciona posteriormente en los momentos de las clases en que se recordaba la definición de función. En la definición planteada [35:1] solo se asigna el nombre de los conjuntos involucrados: conjunto de partida y conjunto de llegada, pero no se indica alguna condición sobre los conjuntos o sus elementos, aludiendo a la arbitrariedad de los mismos. Esta condición es confirmada por Arturo en la entrevista refiriéndose a establecer funciones entre conjuntos con elementos de diferente naturaleza.

> *E: Sobre las condiciones de estos dos conjuntos, A y B, ¿ellos pueden ser cualquier tipo de conjunto? o ¿tienen que ser necesariamente numéricos, racionales o reales?*
>
> *Arturo: No, porque yo puedo establecer una función y definir una en que tengo elementos que pueden ser letras y relacionarlo con un conjunto finito que sean números. Establecer pares ordenados que pertenezcan a la función, que formen la función, establecer esa relación. [Ent1 57-58]*

Como se observa en [31:5-7] y [35:1], la definición que muestra Arturo enfatiza en las condiciones de exhaustividad en la asignación al señalar que "*a cada elemento del conjunto de partida"* y en la unicidad de la misma cuando indica que *"le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada".* En estos extractos se observa el conocimiento de Arturo de una definición para el concepto de función, la que incluye las propiedades de exhaustividad en la asignación de imagen y la unicidad que debe tener esta asignación que le permiten establecer dicha definición.

Durante la primera sesión de clase, Arturo utiliza lenguaje simbólico matemático para reescribir la misma definición de función que dio inicialmente. La Imagen 1 muestra esta nueva escritura para la definición utilizando simbología que incluye los cuantificadores universal y existencial, así como el símbolo de pertenencia, la relación de igualdad y las notaciones usuales *f*(*x*) e *y*.

> *Arturo: La definición de función. En esta parte necesito que me presten atención. Voy a escribir en lenguaje matemático la definición de función, esa que hemos repetido toda la clase de que "a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada". Yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [203:2]*

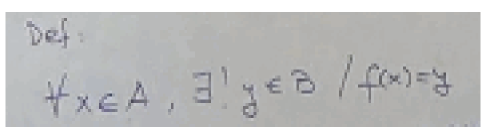


Imagen 1: Definición de la función usando lenguaje formal.

Pese a que esta escritura corresponde a otro registro de representación para la misma definición expuesta en [31:5-7], lo que evidencia de conocimiento sobre la representación de una función en otra categoría del KoT, sin embargo, aquí se incluye como una forma alternativa de presentación para dicha definición, realizada en lenguaje simbólico, siendo otra forma de escribir la misma definición. La profundización en el análisis de esta versión alternativa de definir la función será retomada en el momento en que se estudien los registros de representaciones para la función, así como cuando se estudie la práctica matemática sobre el lenguaje formal y el conocimiento de la enseñanza y de las características del aprendizaje de la función.

Frente a esto, Arturo es consultado sobre su conocimiento de definiciones alternativas a la dada, como se muestra a continuación:

> *E: ¿Podrías plantear alguna definición alternativa? ¿Conoces otra definición de función?*
>
> *Arturo: Llevo tanto tiempo usando esa definición que no me he planteado presentar otra. Porque como los conjuntos son una idea intuitiva, puede ser la más simple. [Ent1 51-52]*

Arturo añade que tampoco recuerda otras definiciones que pudo haber revisado durante su formación como profesor.

> *Arturo: Sé que existen, pero me quedé con esta por la simplicidad. Si me preguntas si me acuerdo, no, no me acuerdo.*
>
> *E: Las que sabes que existen, ¿cómo las conoces? ¿de dónde las conoces?*
>
> *Arturo: De la universidad. Esta [la definición] es la modificación porque antiguamente se veía la función como un caso especial de una relación. [Ent2 2-4]*

Por tanto, se observa el conocimiento de Arturo sobre una definición del concepto de función basada en la noción de correspondencia como vínculo entre elementos de los conjuntos involucrados en la definición, incluyendo los nombres que reciben, los que pueden ser arbitrarios, pero no vacíos, destacando el carácter univalente y exhaustivo en la asignación de imagen como propiedades que definen a la función. Así mismo, se observa conocimiento de la presentación alternativa de la definición mediante lenguaje formal y el conocimiento de la nomenclatura para los conjuntos involucrados: conjunto de partida y conjunto de llegada.

Conocimiento sobre la definición de dominio y recorrido (KoT-D-2)

Para definir los conceptos de domino y recorrido de una función, Arturo señala el nombre que reciben los conjuntos A y B que incluyó en la definición de función [35:1] y los rotula como conjunto de partida y conjunto de llegada, respectivamente.

> *Arturo: ¿Qué distinguimos dentro de esto como definición? Tenemos A, que aquí lo llamamos "conjunto de partida", este de aquí es el conjunto de partida. Al B ¿cómo lo llamamos?*
>
> *As: Conjunto de llegada.*
>
> *Arturo: Conjunto de llegada. Este de acá es el conjunto de llegada. También lo podemos llamar codominio. Esto son solamente nombres. [41-43:1]*

Por una parte, Arturo relaciona el dominio de la función y el conjunto de partida sobre el que está definido y lo define como los elementos que poseen imagen.

> *Arturo: [...] El dominio está formado por todos los elementos que estén en este conjunto [conjunto de partida, A] que hacen que tenga una imagen en el conjunto de llegada. [435:2]*
>
> *[...]El domino de la función está formado por todos los elementos del conjunto A, que es el conjunto de partida. [435:4]*

En estas dos intervenciones Arturo identifica el dominio de la función como un subconjunto del conjunto de partida [435:2], pero aclara en [435:4] que coincide con el conjunto de partida de la función. La característica que permite definir el dominio de la función es la condición que se impone sobre la existencia de la imagen del elemento, la que debe pertenecer al conjunto de llegada. Arturo define el dominio mediante la caracterización de sus elementos

> *Arturo: El dominio de la función está formado por todos los elementos del conjunto A, que es el conjunto de partida, tal que las imágenes de ellos estén en el conjunto de llegada [442]*

Por otra parte, a diferencia de lo que ocurre con el dominio, el recorrido de la función es definido por Arturo como un subconjunto del conjunto de llegada o co-dominio, ejemplificando con un caso en que el recorrido y el conjunto de llegada son conjuntos diferentes (Imagen 2).

> *Arturo: El recorrido va a ser todos los elementos que están en B tal que esos elementos...*
>
> *A1: ¿y no que era "pertenece"?*
>
> *A2: pertenece es la "e" [símbolo de pertenencia]*
>
> *Arturo: …pertenecen al conjunto B, tal que el "y" sea la imagen de algún elemento del conjunto de partida. [452-455]*

El recorrido es definido por Arturo mediante la propiedad que cumplen sus elementos, que corresponde a la misma forma en que define el dominio. En este caso, el recorrido se define como el conjunto de las imágenes de los elementos del conjunto de partida o dominio. La siguiente imagen corresponde a un ejemplo en el que se aprecia la identificación del dominio y recorrido en un ejemplo de función que realiza Arturo y resalta al recorrido como un conjunto diferente al conjunto de llegada.

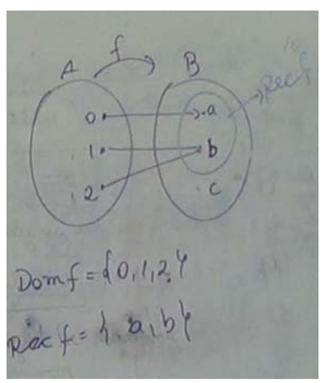


Imagen 2: Dominio y Recorrido

Las definiciones de dominio y recorrido también son dadas utilizando lenguaje simbólico, lo que corresponde a otra forma de expresar la misma definición que Arturo dio verbalmente.

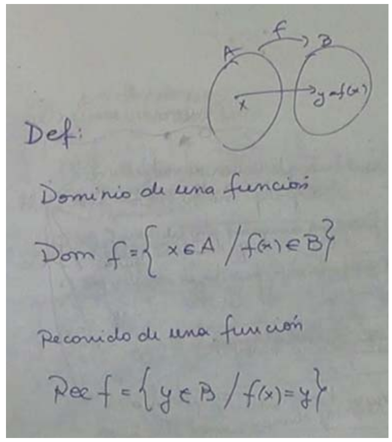


Imagen 3: Definición de dominio y recorrido.

La Imagen 3 evidencia el conocimiento de Arturo sobre las definiciones de dominio y recorrido establecidas a partir de los conjuntos de partida y llegada, respectivamente y expresadas en términos de la propiedad que caracteriza a los elementos que pertenecen a estos conjuntos. Del mismo modo como ocurrió con la definición de función expresada en lenguaje simbólico (KoT-D-1), las definiciones de dominio y recorrido usando lenguaje simbólico son consideradas en esta categoría como conocimiento de definiciones en lugar de representaciones para el dominio o recorrido de una función en particular. El conocimiento sobre representaciones de dominio y recorrido se estudiará más adelante (KoT-R-9).

Debido a que dichas definiciones vinculan a ambos conjuntos simultáneamente, se consultó a Arturo si reconocía alguna dependencia entre estos conjuntos, es decir, si el dominio condiciona al recorrido o si el recorrido condiciona al dominio.

> *E: De esta definición salen los conceptos de dominio, recorrido, codominio. Hay alguna dependencia entre estos dos conjuntos, es decir, ¿el dominio está condicionado por el recorrido de la función o al revés, el recorrido está condicionado por el dominio de la función?*
>
> *Arturo: Si. El recorrido es el conjunto de los elementos que tienen imagen, vienen del dominio. Por lo tanto, hay una relación entre ese conjunto y el dominio.*
>
> *E: ¿Hay una relación de dependencia?*
>
> *Arturo: Si, si dependen. El recorrido del dominio.*
>
> *E: ¿Qué ocurre en los casos en que pongo funciones definidas de A en un intervalo?*
>
> *Arturo: También se condicionan. La más natural es porque los elementos del dominio, este elemento va a pasar por la función y va a caer en el conjunto de las imágenes, entonces hay una relación de la que dependen. Este elemento va a estar aquí si es que estaba acá primero. Ahí hay una dependencia. La dependencia al revés [del dominio hacia el recorrido], si yo achico el recorrido, también va a ser afectado el dominio de la función. [Ent2 29-32]*

De acuerdo a estas respuestas, se evidencia que Arturo conoce relaciones de dependencia entre dominio y recorrido de la función, dando cuenta de una profundización en el conocimiento sobre la definición de dominio y recorrido, las propiedades sobre la existencia de imagen y pre imagen que permiten definirlos y la relación entre ellos.

Conocimiento sobre la definición de función lineal y función afín (KoT-D-3)

Arturo escribe en la pizarra la igualdad $f(x) = ax + b$ para iniciar el estudio de las funciones lineal y afín. Esta expresión algebraica es utilizada para definir ambas funciones aludiendo a la estructura que tienen estas funciones.

> *Arturo: Vamos a ver hoy día que hay tipos de funciones. Por sus características reciben un nombre. La función lineal es una función que la vamos a definir de los racionales en los racionales y que tiene la forma de ser ax+b, donde a y b van a ser cualquier número racional. ¿Qué tipos de ejemplos hemos hecho?*
>
> *La función 5x-1 podría ser una función lineal, la función (1/2) x+3 donde tiene esa misma estructura. ¿Qué gracia tiene esta función? que su gráfica es una línea recta. Su gráfica es una línea recta.*
>
> *La que se considera en realidad como función lineal es la que tiene solamente esta parte [cubre con la mano el coeficiente b]. Esta, en general, se llama afín, y la que es función lineal, se le llama función lineal porque cumple con la linealidad, con otra característica, es la función que tiene esa forma [f(x)=ax], donde b es 0. [701: 1-3]*

Se observa que Arturo comenta sobre la forma de línea recta que tiene la representación gráfica de estas funciones, sin embargo, la definición que da para las funciones se basa en la forma algebraica.

El conocimiento de Arturo sobre la definición de función lineal se manifiesta cuando la define como aquella función cuya representación algebraica es de la forma $f(x) = ax$, donde *a* es un número racional. En el extracto anterior se observa, por una parte, el conocimiento de Arturo sobre la definición de la función lineal como aquella que se representa algebraicamente por ax y, por otro lado, un indicio de conocimiento sobre la propiedad de linealidad de las funciones, le que permite definir la función lineal. Debido a que Arturo no vuelve a mencionar la propiedad de linealidad durante sus clases, se le pregunta en la entrevista sobre la distinción entre ambos tipos de funciones.

> *E: ¿Cómo haces la distinción entre estas dos funciones? Entre la función lineal y la función afín.*
>
> *Arturo: Por la estructura que tiene: ax+b, siempre que b no sea cero, porque si el b fuese 0, sería lineal.*
>
> *E: ¿Dejaría de ser afín y pasaría a ser lineal o seguiría siendo afín?*
>
> *Arturo: En el contexto de colegio se hace esa distinción entre afín y lineal. Alguna vez yo argumenté por qué se llamaba lineal y por qué la otra no es lineal.*
>
> *Porque cumple con la linealidad que son las características de f(kx)=kf(x) y que separa la suma f(x+y)=f(x)+f(y). La única que cumple es la que tiene la forma ax. ax+b no va a cumplir con eso. [Ent2 103-106]*

Así, Arturo manifiesta conocer la función afín como aquella de la forma $ax + b$, siempre que b sea diferente de 0. Por otro lado, reconoce y define la función lineal como aquella que tiene la forma ax, cuya clasificación proviene de la linealidad de las funciones. Estas son las propiedades que utiliza Arturo para definir las funciones lineal y afín.

Conocimiento sobre la definición de inyectividad, epiyectividad y biyectividad (KoT-D-4)

Arturo presenta la inyectividad, epiyectividad y biyectividad como propiedades de las funciones, las que son definidas utilizando tanto lenguaje natural como simbólico. En el siguiente extracto se observa el conocimiento de la definición de la inyectividad de una función caracterizada por la proposición de que aparece en la Imagen 4, donde además utiliza lenguaje simbólico para representar dicha propiedad:

> *Arturo: Una función f se llama inyectiva si y solo si cumple con las condiciones que yo voy a nombrar ahora. [1100]*

Imagen 4: Definición de inyectividad

De modo similar, se manifiesta el conocimiento de Arturo sobre la definición de epiyectividad cuando señala:

> *Arturo: Def. Una función f: A-->B se dice epiyectiva o sobreyectiva si y solo si rec (f)=B. Una función de A en B se dice epiyectiva o sobreyectiva si y solo si cumple con que el recorrido sea exactamente igual que el conjunto de llegada, B es el conjunto de llegada. [1207]*

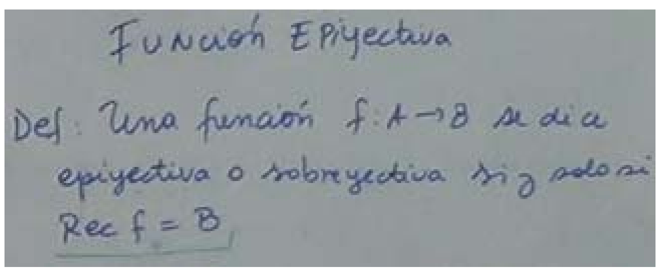


Imagen 5: Definición de epiyectividad

En este caso, la epiyectividad (Imagen 5) es caracterizada por la propiedad de igualdad entre el conjunto de imágenes o recorrido de la función y el conjunto de llegada sobre el cual está definida.

Por otro lado, el conocimiento de Arturo sobre la biyectividad de una función se observa en la siguiente intervención:

> *Arturo: Recién me hicieron un comentario: las funciones ¿pueden ser epiyectivas e inyectivas a la vez? Si, y eso recibe un nombre especial. Esas funciones que cumplen las dos condiciones a la vez se llaman biyectivas, "bi" porque cumple con las dos condiciones. [1267:2]*

> *Arturo: [...]Lo voy a anotar como definición. Si una función f: A-->B es inyectiva y epiyectiva se dice que f es biyectiva. Estamos diciendo que si una función es inyectiva y epiyectiva va a ser biyectiva. [1272]*

En este último extracto también se evidencia el conocimiento de Arturo sobre la relación entre inyectividad y epiyectividad como las propiedades que permiten definir la biyectividad de la función. De este modo, se observa el conocimiento de Arturo sobre las definiciones de inyectividad, epiyectividad y biyectividad de la función.

Conocimiento sobre la definición de la inversa de una función (KoT-D-5)

La existencia de la inversa de una función corresponde a una propiedad de las funciones biyectivas. Luego de haber definido la biyectividad de la función, Arturo escribe la siguiente definición para la función inversa:

> *Arturo: Entonces puedo definir la función en el sentido de B en A y va a ser función, eso es lo que estaba diciendo, y a esa función, que va a definirse en sentido contrario de B en A, se va a llamar función inversa. Eso es lo que nosotros vamos a definir ahora. [escribe la definición en la pizarra] Def. Una función f de A en B (f: A-->B) tiene su correspondiente función inversa (f^{-1}: B-->A) si y solo si f es biyectiva. [1544:1]*

En esta intervención, se observa que la propiedad de existencia de la inversa es vista como la definición de la inversa de una función, se evidencia así el conocimiento de Arturo de una definición de inversa de una función cuando esta es biyectiva, aludiendo a la propiedad de la existencia de la inversa.

Frente a esto, en la entrevista se le pregunta por la diferenciación entre la existencia de la función inversa y la definición de la función inversa de una función dada.

> *E: ¿Cómo diferencias la definición de la función inversa de la propiedad de existencia de la función inversa cuando las funciones son biyectivas?*
>
> *Arturo: Eso es lo primero. Ahí estoy definiendo que existe. Tomo la biyectividad para decir que, si la función es biyectiva, entonces existe una única f^{-1} que es la inversa. Después se define cómo se relaciona esa f^{-1} con la f. [Ent 2 193-194]*

En la respuesta de Arturo se observa su conocimiento sobre la diferencia entre ambos conceptos. Por un lado, conoce que la existencia de una única función inversa está dada por la biyectividad de la función, mientras que por otro lado conoce que existe una relación entre la función y su inversa cuando esta última existe.

Conocimiento sobre la definición de gráfico de una función (KoT-D-6)

El gráfico de una función es definido por Arturo como un conjunto de pares ordenados. Tales pares se asocian a puntos del plano con la condición de que la segunda coordenada sea la imagen de la primera. Esta definición vincula los conceptos de gráfico de una función y la representación gráfica en el plano cartesiano de la misma como se lee en el siguiente extracto.

> *Arturo: La representación gráfica va a ser un conjunto de puntos que [...] va a estar formado, el gráfico de una función, como los elementos (x,y), porque necesito puntos que pertenezcan, el x que pertenezca al conjunto de partida, el y al conjunto de llegada, y donde la segunda coordenada sea necesariamente la imagen de la primera. [220:2]*

De acuerdo a esto, Arturo parece conocer el gráfico de la función como la representación gráfica de la misma, frente a lo cual es consultado sobre las diferencias que existen entre ambos conceptos.

> *E: ¿Qué diferencia hay entre el gráfico y la representación gráfica?*
>
> *Arturo: Son dos cosas distintas. El gráfico es un conjunto de pares ordenados (x,y) tales que x pertenezca al dominio e y al recorrido. Yo paso a la representación gráfica de eso.*
>
> *Todo lo que hicimos en el diagrama sagital los vamos a llevar a otra representación, por ejemplo, como una tabla. Estos elementos de los que tomamos para el conjunto de partida y en la segunda columna de eso ponemos lo que nos arrojan [en la función]. En algún momento de la clase yo digo (x,y) que pertenezcan a la función como un par. [Ent2 91-92]*

Pese a que la definición inicial de gráfico de la función está fusionada con la de representación gráfica de la función (siguiente categoría del KoT), Arturo conoce la diferencia entre ambos, lo que se evidencia cuando señala que el gráfico está formado por pares ordenados con ciertas condiciones y que posteriormente pasa a representar gráficamente la función en el plano cartesiano. Este indicador sobre el conocimiento de la definición del gráfico de la función se ha incluido para distinguirlo del conocimiento sobre la representación gráfica de la función en la siguiente categoría.

Registros de representación

Esta categoría da cuenta del conocimiento que manifiesta Arturo sobre diferentes representaciones y notaciones para las funciones y los otros conceptos que se asocian a ella. Se ha incluido el conocimiento que muestra Arturo de la definición del concepto de función escrita utilizando lenguaje natural y simbología matemática tal como se mostró en la categoría de *Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos* (Imagen 1: Definición de la función usando lenguaje formal., KoT-D-1). Aunque esta escritura simbólica corresponde a una representación de la definición de función, da cuenta de una forma diferente al lenguaje natural para representar el concepto. Un hecho similar ocurre con los conceptos de dominio y recorrido de la función (Imagen 3).

Conocimiento sobre la representación del plano cartesiano y puntos en él (KoT-R-1)

Arturo inicia sus clases sobre el concepto de función con un recordatorio de conceptos asociados a la teoría de conjuntos (cuantificadores y símbolo de pertenencia), además de incluir al plano cartesiano, su disposición y la ubicación de puntos en él. En este recordatorio, señala:

> *Arturo: Los negativos están a la izquierda y abajo. [5:1]*
>
> *Arturo: [...] Estos son negativos, estos son negativos [señala los semi ejes negativos X Y] [7:1]*
>
> *Arturo: [...] Lo que dibujamos aquí y que está formado, esto está lleno de puntos que son coordenadas. Si tomo aquí un elemento cualquiera, un "x" y después aquí tomo*

un "y", lo que nosotros hacíamos es la asociación a un punto de coordenadas (x, y), ¿o no? [11:1]

Arturo: [...] Tenemos el eje X y el eje Y. La primera coordenada la sacamos del eje X, la segunda del eje Y, y tenemos un par ordenado. Después hay un aspecto visual de las cosas que vamos a ver. [15:2]

Se observa el conocimiento de Arturo sobre la representación del plano cartesiano como un conjunto de puntos, la posición de los ejes y la ubicación de los números reales positivos y negativos sobre ellos. Respecto a la representación de los puntos en el plano, Arturo manifiesta conocer que los puntos del plano son la representaciones de los pares ordenados (x,y).

Conocimiento sobre la representación de la función mediante diagrama sagital (KoT-R-2)

La primera representación de la función que Arturo muestra es el diagrama sagital (Imagen 6: Diagrama sagital inicial), utilizándolo, a su vez, como una de las representaciones que potencian la enseñanza y el aprendizaje de la función y permiten introducir otros elementos asociados al estudio de la función.

Arturo: Tenemos dos conjuntos. Un conjunto A y un conjunto B. Aquí tengo elementos y a este elemento [uno de A, le llama "a"] yo lo voy a asociar y lo voy a hacer llegar a un elemento en el otro conjunto, como a ustedes le hice sentar en una silla, a usted lo siento en ésa silla y no en otra porque esa es su silla.

Aquí está nuestro elemento, que puede ser cualquiera de ustedes y aquí yo los hago que se sienten en su puesto y llega aquí, sentados.

Un elemento aquí [en A le llama "x"] lo hago parar y lo hago... [lo une con "x" en B. usa la misma letra]. Pero estos [el conjunto A] van a llegar ahí [a B] mediante una función [dibuja una flecha de A a B, la llama "f"]

A: [no se entiende]

Arturo: Claro, porque yo les di una indicación: cada uno se sienta en su puesto, esa es la instrucción, entonces yo cumplí una función de darle la instrucción de que ustedes, como elementos del conjunto, se sentaran en su silla.

A: ¿Por qué x no llegó al otro?

Arturo: Lo siento [cambia el "x" de B por "y"]

A: ¡ah!

Arturo: ¿Qué distinguimos dentro de esto como definición? Tenemos A, que aquí lo llamamos "conjunto de partida", este de aquí es el conjunto de partida. Al B, ¿cómo lo llamamos?

As: Conjunto de llegada.

Arturo: Conjunto de llegada. Este de acá es conjunto de llegada. También lo podemos llamar codominio. Esto son solamente nombres. [35:5-43:1]

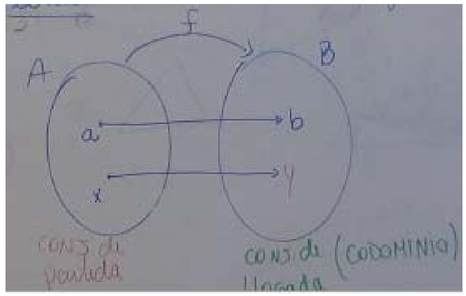


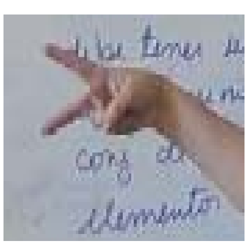
Imagen 6: Diagrama sagital inicial

En el diagrama sagital Arturo destaca el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la idea de correspondencia representada mediante flechas. Esta representación pictórica incluye el uso de notaciones para las variables (*a, x, b, y*), los conjuntos (*A* y *B*) y el nombre de la función (*f*), asimismo, las flechas incorporadas en la representación muestran que esta está alineada con la definición de función como una correspondencia que Arturo muestra en su clase. Se observa, de este modo, el conocimiento de Arturo sobre el diagrama sagital como una forma de representación para la función.

Conocimiento sobre la representación de la función mediante gestos (KoT-R-3)

Arturo muestra los diagramas sagitales como una de las primeras representaciones para las funciones. Como se ve en el indicador anterior, en ellos se incluyen algunas notaciones y nomenclatura para los componentes de la función. Además de esto, Arturo se apoya en los diagramas sagitales para expresar mediante gestos una de las propiedades que definen a la función: la unicidad.

> *Arturo: Aquí estoy mostrando relaciones entre dos conjuntos, combinaciones de relaciones que hacen que esa correspondencia sea una función y otras relaciones entre elementos en que no son una función. Miren, aquí no nos funciona con la parte que dice "a cada elemento" y esta de acá no cumple cuando dice que "existe un único elemento en el conjunto de llegada", porque esta no cumple la segunda condición. Miren, aquí tenemos esa relación [dos flechas que salen de a], y aquí tenemos esa relación [dos flechas que llegan al 0] Esta no es función, pero esta si es función.*
>
> *Cada vez que nos presenten en un diagrama esto [muestra su mano izquierda con los dedos índice y mayor extendidos horizontalmente] quiere decir que no va a ser una función, porque este elemento tendría dos imágenes, pero esto [muestra la mano derecha en la misma ubicación que la anterior] este elemento tendría una imagen y este elemento tendría una imagen. Entonces, la mano derecha si es función y la mano izquierda no es función.*



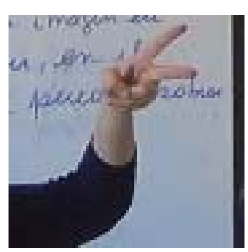


Imagen 7: Representación de la función usando las manos

A: Lo puede repetir.

Arturo: Aquí pusimos ejemplos en donde eran y no eran funciones con respecto a las condiciones que dijimos que tenía que tener para que una correspondencia fuera función. Esto de acá no es función porque este elemento tiene dos imágenes y ahí me decía que tenía que ser única, entonces por eso que no cumple. Por eso [ejemplifica con las manos] la mano izquierda no es función. Pero este de acá, este tiene una única imagen que es el 0 y el b también tiene una única... que coincidan es otro cuento, pero esto se parece a tu mano derecha. Por eso la mano izquierda no es función, la mano derecha es función. Como una cosa visual y para acordarse que estos ejemplos que están ahí se parecían a lo concreto que teníamos en la mano. ¿Se van a acordar?

As: Si. [129-132]

En estas intervenciones se observa el conocimiento de Arturo sobre la representación para la función mediante gestos que corresponden a las flechas que incluye en el diagrama sagital y que destacan la propiedad de unicidad en la asignación de imagen.

Esta representación es vuelta a mostrar por Arturo al inicio de la siguiente sesión para que sus estudiantes la recuerden.

Arturo: En resumen, dijimos que podíamos hacer una asociación con las manos de cuándo algo era función y cuándo no. ¿La mano izquierda era función?

A: Si, no.

A: No.

Arturo: No, ¿por qué? Porque este elemento del conjunto de partida tiene dos imágenes y no cumple con la condición ¿la mano derecha es función?

As: Si [a coro].

Arturo: ¿Por qué? Cada elemento del conjunto de partida tiene una única imagen. Entonces, la mano izquierda no es, la mano derecha sí es. [283-288]

Conocimiento sobre la notación para las funciones (KoT-R-4)

Además del uso preferente de ciertas letras para designar o rotular las variables de una función (indicador anterior), los rótulos usuales para las funciones también son considerados como parte del conocimiento del profesor. En el siguiente episodio se evidencia el conocimiento de las notaciones relacionadas con las funciones como parte de su conocimiento sobre las representaciones para las funciones:

A: ¿Por qué f, g o h?

Arturo: Porque las funciones son todas distintas, entonces les pongo distintos nombres; tengo todo el alfabeto para ponerle nombre a las funciones. [137-138:1]

Arturo: [...] Esto que está aquí, esto se puede escribir como la función que va de A al conjunto B, este mismo diagrama. [209:1]

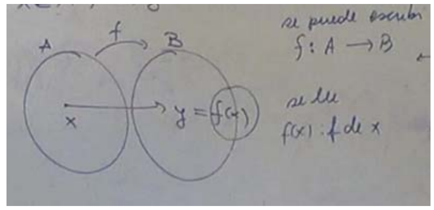


Imagen 8: Diagrama sagital y notaciones para la función

Se observa, tanto en el extracto como en la imagen el conocimiento de Arturo sobre utilizar cualquier letra para rotular la función además del conocimiento sobre las notaciones para indicar conjunto de partida, conjunto de llegada y nombre de la función (f: $A \rightarrow B$), así como la forma de leer dicha notación.

Conocimiento sobre la nomenclatura de imagen y pre imagen en una función (KoT-R-5)

En la misma línea sobre el conocimiento de notaciones se presentan los conceptos de imagen y pre imagen. Arturo no proporciona una definición de estos conceptos, sino que son caracterizados mediante la relación de uno con otro y rotulados con sus correspondientes nombres.

> *Arturo: [...] Estos dos elementos también reciben su nombre. Este elemento de acá se le llama imagen de lo que yo mandé. El "b" es la imagen del "a", y el "y" es la imagen del "x". Estos elementos que están aquí [en el recorrido] se llaman "imagen", y estos elementos que están acá [en el conjunto de partida] se llaman "pre-imagen". [57]*

> *Arturo: [...] Los elementos del conjunto de partida se llaman pre imágenes y los del conjunto de llegada se llaman imágenes. [288:2]*

El extracto anterior se acompaña de la Imagen 6 y en ellos se puede observar el conocimiento de Arturo sobre los términos y nomenclatura de imagen y pre imagen bajo una función y su pertenencia a los conjuntos de llegada y partida respectivamente.

Conocimiento sobre la representación algebraica de la función lineal y afín (KoT-R-6)

Como se mostró en (KoT-D-3), Arturo define la función lineal de acuerdo a la forma en que esta se representa algebraicamente. Debido a esto es que se ha considerado la misma intervención como evidencia de conocimiento sobre la forma de representar algebraicamente dichas funciones.

> *Arturo: Vamos a ver hoy día que hay tipos de funciones. Por sus características reciben un nombre. La función lineal es una función que la vamos a definir de los racionales en los racionales y que tiene la forma de ser ax+b, donde a y b van a ser cualquier número racional. [701:1]*

Arturo aclara que la función lineal es la que tiene la forma *ax*.

> *Arturo: Si el b llegara a ser 0 tendríamos la función ax, porque el b no aparecería y a esta función, que tiene esa estructura, que no tiene a nadie acompañando como constante, a esta función se le llama función lineal. [706]*

Luego, produce la diferenciación entre función lineal y afín en cuanto a la representación algebraica de cada una de ellas.

> *Arturo: Estas de acá que tienen la forma ax+b se les llama funciones afines. Si el numerito, este que está acá [b] llegara a ser 0, se llama lineal, es una cuestión de nombres. [708:1]*

De lo anterior, se puede observar el conocimiento de Arturo sobre la representación algebraica que tienen las funciones lineales y afines, además de su conocimiento sobre los nombres que reciben estas funciones.

Conocimiento sobre la representación cartesiana de la función (KoT-R-7)

En la introducción al concepto de función, Arturo incluye una recapitulación de conocimientos sobre el plano, puntos y coordenadas. En esta recapitulación se puede observar el conocimiento de Arturo sobre el plano cartesiano (KoT-R-1), el que utilizará para la construcción de la representación de la función.

> *Arturo: Dijimos que en el plano cartesiano teníamos puntos, y esos puntos, en general, son de coordenadas (x, y); x pertenecientes al eje X, los y pertenecientes al eje Y. Cuando vimos funciones dijimos que le íbamos a llamar x a los elementos del conjunto de partida y que esos iban a parar a una imagen, o sea y como imagen de x. Y que eso era el resultado de pasar el x por la función. Si el y es el resultado de hacer pasar la x por la función, este elemento es la imagen de x [señala el y]. Si los puntos son (x, y), la segunda coordenada ¿quién va a ser? si estos elementos pertenecen a una función en particular [215]*

Por otro lado, en el indicador (KoT-D-6) se muestra que Arturo conoce la diferencia entre el gráfico de la función y la representación gráfica de la misma, así como la relación que existe entre ellos [ver Ent2 91-92 en el indicador]. Las intervenciones de Arturo expuestas en el indicador referenciado dan cuenta de su conocimiento sobre la representación gráfica de la función como un conjunto de puntos en el plano cartesiano, lo que además corresponde a la representación del gráfico de la función.

Los conocimientos sobre el plano cartesiano y sobre el gráfico de la función son puestos en juego para la determinación de la representación gráfica de las funciones, considerando que esta representación está formada por puntos del plano que cumplen cierta característica.

> *Arturo: Sería la f(x). Esta coordenada sería la imagen de la primera, o sea que estos puntos, si pertenecen a un gráfico de una función, van a ser (x, f(x)), o sea, la segunda coordenada es la imagen de la primera coordenada, esto de aquí es imagen de x. La representación gráfica va a ser un conjunto de puntos que [...] va a estar formado, el gráfico de una función, como los elementos (x,y), porque necesito puntos que pertenezcan, el x que pertenezca al conjunto de partida, el y al conjunto de llegada, y donde la segunda coordenada sea necesariamente la imagen de la primera [220:1-2]*

Se observa conocimiento de Arturo sobre la estructura que tienen los pares ordenados que pertenecen al gráfico de la función, sobre la representación de estos pares ordenados como puntos en el plano y, finalmente, sobre la representación cartesiana de una función formada por estos puntos.

Conocimiento sobre la representación cartesiana de las funciones lineales y afines (KoT-R-8)

Como un caso particular de la representación cartesiana de la función, Arturo presenta el conocimiento de la representación gráfica de la función lineal y de la función afín. En el indicador anterior (KoT-R-7) se muestra el conocimiento sobre la representación cartesiana de las funciones en general, mientras que en este indicador se particulariza para los casos de las funciones lineales y afines. En general, los ejemplos de funciones que propone Arturo en sus clases son de la forma *ax+b* para las cuales conoce su representación gráfica como se muestra en el siguiente extracto.

> *Arturo: Si se fijan, esta función también nos da una línea recta pero pasa por el origen. Las gráficas de la función lineal y afín son líneas rectas, pero la de la función afín es una línea recta que no pasa por el origen.*
>
> *A: ¿La afín?*
>
> *Arturo: La afín. La función lineal también es una línea recta.*
>
> *A: Pero que sí pasa.*
>
> *Arturo: Pero que esta sí pasa por el origen. Lo que me interesa de esta parte que les quede claro es qué vamos a trabajar y que la mayoría de las funciones que hemos visto tienen esta estructura [ax+b]. Estas funciones, si tienen esta estructura se llaman afín [ax+b], y si tienen esta estructura [ax] se llama lineal. En ambas su representación gráfica es una línea recta, pero en la afín la recta no pasa por el origen y en las lineales sí pasan por el origen. [721-725]*

En el extracto anterior se evidencia el conocimiento de Arturo sobre la representación cartesiana característica de las funciones lineal y afín. Se observa el conocimiento de Arturo de que la representación gráfica de ambas funciones, lineal y afín, corresponde a una línea recta, que contiene al origen del sistema en el caso de la función lineal y que no lo contiene en el caso de la función afín.

La diferenciación entre ambas representaciones gráficas está dada, según expone Arturo, por el valor del coeficiente *b* en la expresión algebraica de la función.

> *Arturo: Tanto en la función lineal como en la función afín, su gráfica es una línea recta. Si b llega a ser 0, esta de acá, la gráfica va a pasar por el origen y las que tienen esta estructura [afín] no van a pasar por el origen. [708:2]*

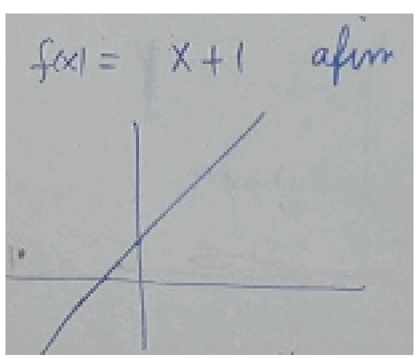


Imagen 9: Representación cartesiana de la función afín

Se observa el conocimiento de Arturo de la representación cartesiana de las funciones afín y lineal como una línea recta diferenciando el caso de la función lineal como una recta que contiene al origen del sistema.

Un aspecto importante a destacar en este indicador se expone en el siguiente extracto.

> *Arturo: Esta es la función en esencia... asócialo a esto: tú eres [gesto con la mano de la cabeza para abajo], son todas tus características, pero tú tienes una imagen, que es la que tú ves reflejada en el espejo. Con las funciones pasa lo mismo; esta [f(x)=x+1] tiene un montón de características que la hacen ser lo que es, pero esto también se mira en el espejo, por lo tanto, también tiene una imagen, y esa es su representación gráfica, lo que tú observas de cómo es la función. [265]*

En la intervención anterior, Arturo señala que la representación cartesiana de la función es diferente a la función en sí y solo refleja una de las características de ella, es decir, no es la propia función dando cuenta, en parte, de su comprensión del concepto de función y del conocimiento de la diferenciación entre el objeto función lineal/afín y su representación.

Conocimiento sobre la representación del dominio y del recorrido de la función (KoT-R-9)

La representación del dominio y del recorrido de una función es realizada por Arturo de tres formas diferentes: usando simbología de conjuntos, mediante intervalos y pictóricamente marcando en los ejes cartesianos correspondientes. La primera de estas representaciones fue expuesta en el indicador del (KoT-D-2) mediante la Imagen 3. donde Arturo representa el dominio y recorrido de la función como conjuntos utilizando la función proposicional que caracteriza sus elementos.

Por otro lado, Arturo utiliza el gráfico cartesiano de la función para representar gráficamente el dominio y el recorrido de la función sobre los ejes para luego representarlo mediante un intervalo. En el ejemplo del siguiente extracto, Arturo también expone su conocimiento sobre la notación para los números racionales mayores o iguales que cero.

> *Arturo: Lo único que yo estoy diciendo es que ese intervalo que ustedes me dieron yo también lo puedo escribir de esta forma [escribe Q^+_0 en la pizarra]. Ese intervalo que era del 0 hacia arriba era del 0 al infinito positivo, pero ese intervalo también lo puedo escribir así. Como también lo puedo escribir así, si yo pongo ese o ese [como intervalo o como Q^+_0] como respuesta, ambas están correctas. [904]*

> *Arturo: [...] Estábamos diciendo que el dominio de la función son todos los elementos de acá que tengan una imagen [...] en el recorrido no miro en el eje X, miro en el eje Y. Digo ¿cuáles son los elementos de este eje que vienen de alguien?, o sea, cuáles son estos elementos que son imágenes de algún elemento del otro. [917]*

a) b)

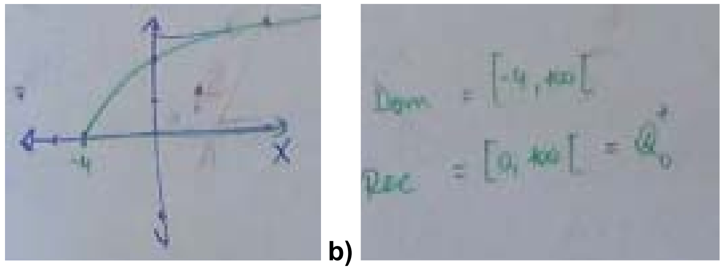


Imagen 10: Representaciones (a) gráfica y (b) en intervalos del dominio y del recorrido

El conocimiento de la representación del dominio y del recorrido (Imagen 10) mediante intervalos se observa en la imagen 10b) anterior formalizando la representación gráfica 10a) de estos conjuntos. Asimismo, se observa que Arturo sabe dónde ubicar el dominio y el recorrido en los ejes cartesianos.

> *Arturo: ¿Cómo vemos gráficamente el dominio? Porque lo dijimos y lo habíamos argumentado. Porque no teníamos problema con evaluar cualquier número racional en la función, cualquier número que se nos ocurriera iba a tener una imagen, pero gráficamente ¿dónde estamos viendo el dominio en la función? El dominio de la función, hemos dicho en varias ocasiones que son los x que están en el conjunto de partida que tenían una imagen. Acá, en el plano cartesiano, ¿dónde viven los x?*
>
> *A: En el eje horizontal.*
>
> *Arturo: En el eje horizontal, exactamente. Aquí viven los x. Si visualizamos todos estos, cualquier punto de acá, este de aquí que estoy marcando [un valor positivo en X], ¿tiene una imagen? Si. Va a tocar en la función y va a tener una imagen. Este que está aquí [un valor negativo en X], ¿tiene imagen? Si, ahí tiene una imagen. [775-777]*

Por otro lado, la mera identificación del eje en el que se ubica el dominio de la función no expresa necesariamente conocimiento sobre las representaciones del dominio. Por esta razón incluimos otro extracto en el que se muestra la representación que realiza Arturo para el dominio y el recorrido.

> *Arturo: Inventé una función, por eso no sabemos exactamente, solamente estoy dando la idea de esto, que visualmente distingamos quiénes son parte del dominio y quienes no son parte del dominio. Del -4 a la derecha, ¿todos ellos tienen imagen?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: ¿Cuál es la imagen del -4? ese es el único que, por el gráfico, podemos deducir. [837 - 839]*
>
> *Arturo: ¿Cómo escribíamos?*
>
> *A: Un intervalo.*
>
> *Arturo: Exactamente un intervalo va a ser el dominio. Puede ser un conjunto de todos los racionales, pero también puede ser un intervalo, y ¿qué intervalo es este?*
>
> *As: Del -4 al infinito positivo, incluido el -4. [847 - 850]*

En los extractos y las imágenes anteriores se observa que Arturo conoce sobre cuáles son las representaciones para el dominio y para el recorrido de la función, manifestando la representación de manera gráfica (pintando sobre el eje correspondiente), de forma conjuntista en intervalo o usando intervalos. Además, conoce, como parte de las notaciones, los rótulos de Dom(f) y Rec(f) para identificar dominio y recorrido respectivamente, así como la simbología $Q^{+}{}_{0}$ que representa el conjunto de los racionales con los índices correspondientes a la inclusión del 0 o si se trata de números positivos.

Conocimiento sobre la notación y representación de la inyectividad (KoT-R-10)

La inyectividad es una propiedad de las funciones que Arturo define utilizando la función proposicional que se mostró en la categoría anterior en este mismo subdominio (KoT-D-4). El lenguaje simbólico utilizado para escribir esta definición es considerado como parte del conocimiento de la definición mientras que las notaciones y diagramas alusivos a la inyectividad son considerados como conocimiento de representaciones para la inyectividad o funciones inyectivas.

> *Arturo: Para eso vamos a ver qué significa que una función sea inyectiva. Una función inyectiva también se le llama 1 a 1. Antes de dar la definición en sí, ¿qué significa 1 a 1? [1079:1]*
>
> *Arturo: Exactamente eso es. Esta es una función, pero no es inyectiva. Esta sí es una función, pero sí es inyectiva (ver imagen siguiente). [1083]*

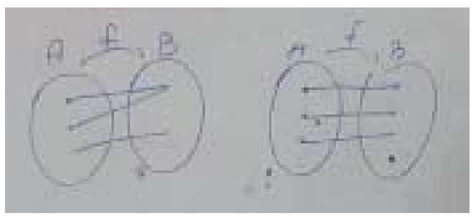


Imagen 11 a) y b): Representación sagital de una función inyectiva

De un modo similar, Arturo construye la representación (cartesiana) de una función que es inyectiva y otra función que no es inyectiva, lo que da cuenta de conocimiento sobre de la representación en este registro de una función inyectiva.

> *Arturo: No, entonces pasa que es 1 con 1, uno de aquí con uno del eje X. En el gráfico vas a hacer lo siguiente, para que veas la diferencia y puedas discriminar. La función, por ejemplo, x^2, todo el que entra a la función sale elevado a 2. $0^2=0$, $1^2=1$, por lo tanto, tengo ese. ¿Qué pasa con el -1^2?*
>
> *A: -1.*
>
> *Arturo: f(1) es 1, f(-1) también es 1, porque es -1^2, entonces lo que va pasando con esta gráfica es que me va dando algo así. Este elemento, el 1 tiene por imagen al 1. ¿hay otro elemento que también tenga por imagen al 1?*
>
> *As: -1.*
>
> *Arturo: Si, el -1 también tiene por imagen al 1, entonces si te fijas, esto [Imagen 12 a) y b): Representación cartesiana de una función inyectiva] equivale a eso que está ahí [Imagen 11 a) y b): Representación sagital de una función inyectiva].*
>
> *A: ¿Pero eso sería como una función? [el x^2]*
>
> *Arturo: Esto es una función, pero no es inyectiva.*
>
> *A: ¿Cómo era cuando no era una función?*

> *Arturo: Cuando yo trazaba una recta vertical y esta recta tocaba a la función en más de un punto, esto si es función, pero esta función no es inyectiva. [1116-1124]*

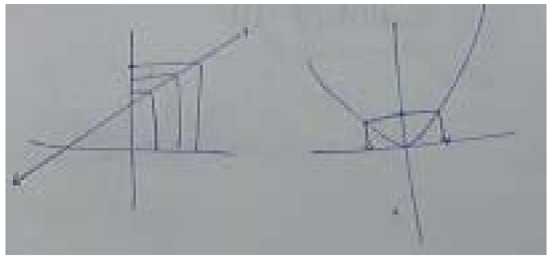


Imagen 12 a) y b): Representación cartesiana de una función inyectiva

Se observa conocimiento de Arturo sobre la notación de 1-1 y nomenclatura utilizada para referirse a una función inyectiva. Los diagramas sagitales y gráficos cartesianos (Imagen 12) que propone para mostrar esta relación dan cuenta de su conocimiento sobre la representación de la inyectividad mediante este tipo de diagramas. En el caso de la imagen anterior, el diagrama sagital con la relación univoca es una representación de una función inyectiva.

Conocimiento sobre la representación de la epiyectividad (KoT-R-11)

Así como Arturo muestra la forma característica que tiene una función inyectiva representada mediante un diagrama sagital, también representa la epiyectividad (Imagen 13) de una función destacando la igualdad entre el recorrido y el conjunto de llegada.

> *Arturo: [...]La función va a ser epiyectiva cuando el conjunto de llegada y el recorrido sean el mismo conjunto. Eso se traduce en que en el conjunto de llegada no me deben sobrar elementos, que todos los del conjunto de llegada deben ser imágenes de algún elemento. [1195:1-2]*

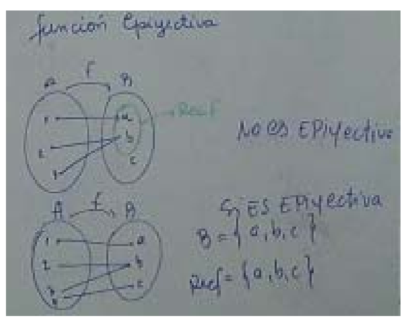


Imagen 13: Representación sagital de la epiyectividad

Por tanto, se observa el conocimiento de Arturo de la representación en diagrama sagital para una función epiyectiva.

Conocimiento sobre la notación para la función inversa (KoT-R-12)

El estudio de las funciones biyectivas deriva en la definición de la función inversa, incorporando la notación usual de f^{-1}. En el siguiente extracto Arturo introduce esta notación.

> *Arturo: Importante, notación. Si estamos considerando f una función biyectiva, la inversa de f se escribe f elevado a menos 1. Eso es lo que indica cuando hablemos de la función al revés, y la función inversa, si la f va de A al conjunto B, la inversa va de B en el conjunto A. [1544:4-5]*

En el extracto anterior, se evidencia el conocimiento de Arturo sobre la notación f^{-1} y de los conjuntos sobre los que se define esta nueva función.

Procedimientos

Conocimiento sobre cómo determinar si una correspondencia es o no una función (KoT-P-1)

Las propiedades de exhaustividad y la unicidad en la asignación de imagen se incluyen en la definición de función las que son utilizadas por Arturo para comprobar si una correspondencia es o no función y para construir ejemplos de relaciones que sean o no funcionales. En el siguiente extracto se muestra la importancia que Arturo asigna a estas propiedades.

> *Arturo: Vamos a ir viendo la diferencia. Yo hice una combinación, podríamos haber hecho otra, ahí vamos a ir inventando, pero ¿cumple con que a cada elemento del aquí [A] le corresponde un único en el conjunto de llegada, ¿solo uno? único [señala la definición] a éste tiene que llegar a parar a uno solo, por eso subrayé que ese elemento del conjunto en que va aparar tiene que ser único, porque si no, no sería una función. Dijimos que una función es una correspondencia que tenía que cumplir con estas condiciones, si no las cumple no puedo llamarle función, entonces esto sería una función. [86]*
>
> *Arturo: Es que aquí están las dos en una. Son dos condiciones... que aquí [en el dominio] no me pueden sobrar, pero aquí si [en el conjunto de llegada], y que a cada uno de aquí... como en resumen ¿cuáles son esas dos condiciones?*
>
> *Que en el conjunto de partida no te pueden sobrar elementos y que todos los elementos de acá vayan a parar… que tengan una sola imagen. Esas son las dos condiciones. [299:1-2]*

Las propiedades de unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen son utilizadas para comprobar si una relación es o no función. En estos casos, se usan como herramientas en dicha comprobación evidenciando el conocimiento de un procedimiento para realizarla.

Se observaron dos situaciones en las que Arturo manifiesta conocimiento sobre cómo determinar si el ejemplo dado es o no una función. El primer caso está dado por funciones representadas mediante diagramas sagitales y el segundo cuando las funciones están representadas en el plano cartesiano.

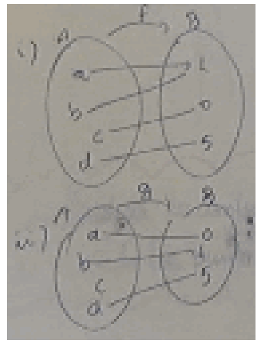


Imagen 14: Ejemplo de función y no función en diagrama sagital

> *Arturo: De esos diagramas, el primero ¿es función?, ¿cumple con que a cada elemento del conjunto de partida tenga una única imagen? [175:2]*

Arturo muestra conocer que para identificar si una correspondencia es o no una función se debe someter a prueba la condición de unicidad en la asignación de imagen.

> *Arturo: [...] Aquí van a poner "esto si es función", porque cumple que cada elemento del conjunto tiene una única imagen. [185]*

Del mismo modo, conoce que se debe verificar la exhaustividad en la asignación, asunto que el ejemplo ii de la Imagen 14 no cumple.

> *Arturo: No es función [ejemplo ii], y ¿por qué? En este si me interesa que pongan el porqué. ¿Por qué no es función el segundo?*
>
> *As: [hablan todos a la vez]*
>
> *Arturo: Porque el c no tiene imagen. [189-191]*

En el indicador (KoT-R-3) se muestra que la unicidad en la asignación de imagen es expresada por Arturo mediante gestos apoyados por los diagramas sagitales. Esta representación de la función constituye un mecanismo para decidir si la correspondencia es una relación funcional o no.

> *Arturo: Cada vez que nos presenten en un diagrama esto [muestra su mano izquierda con los dedos índice y mayor extendidos horizontalmente] quiere decir que no va a ser una función, porque este elemento tendría dos imágenes, pero esto [muestra la mano derecha en la misma ubicación que la anterior] este elemento tendría una imagen y este elemento tendría una imagen. Entonces, la mano derecha si es función y la mano izquierda no es función. [129:2]*

Se observa el conocimiento de Arturo sobre cómo decidir cuándo una correspondencia representada en diagrama sagital es o no una función mediante el testeo de las propiedades de unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen que se incluyen en la definición del concepto.

Por otro lado, el test de la recta vertical es utilizado para determinar si una relación representada mediante el gráfico cartesiano corresponde o no a una función.

> *A: ¿Cómo era cuando no era una función?*

Arturo: Cuando yo trazaba una recta vertical y esta recta tocaba a la función en más de un punto, entonces no era función. El segundo gráfico si es función, pero esta función no es inyectiva. [1123-1124:1]

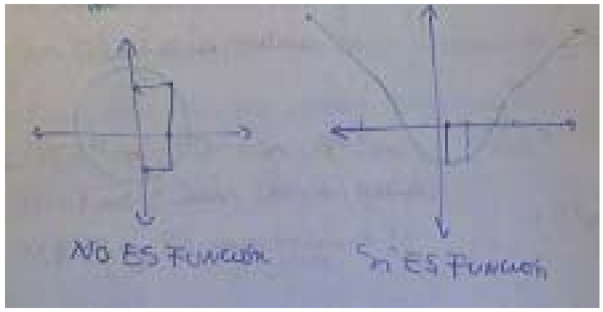


Imagen 15: Ejemplo de función y no función en gráfico cartesiano

Se observa que Arturo conoce el test de la vertical (Imagen 15) para determinar si la representación gráfica dada corresponde a la representación de una función. En este test se pone a prueba la condición de unicidad de imagen, característica que también se incluye en la definición de función dada por Arturo.

Conocimiento sobre la construcción del diagrama sagital para representar una función (KoT-P-2)

Como se mostró en la categoría de Registros de representaciones, Arturo utiliza diagramas sagitales para representar las funciones, los conceptos de dominio, recorrido, inyectividad, epiyectividad, biyectividad y función inversa. Aunque no se cuenta con una intervención de Arturo en donde diga explícitamente cómo se construye el diagrama sagital, se puede observar este conocimiento de su amplia producción de diagramas sagitales.

Para realizar esta construcción, Arturo utiliza su conocimiento sobre la definición de función, particularmente, las propiedades que definen a la función (unicidad y exhaustividad), interpretándolas como que no le pueden sobrar elementos en el conjunto de partida del diagrama y que no pueden existir elementos de este con doble imagen (ver indicador anterior KoT-P-1). De este modo, se observa el conocimiento de Arturo sobre el resultado al construir un diagrama sagital para representar una función.

Conocimiento sobre cómo determinar imágenes y pre imágenes (KoT-P-3)

En el caso del cálculo de imágenes, son diversas las intervenciones en que Arturo determina la imagen de un elemento dado y utiliza diferentes procedimientos, los que dependen del tipo de función y de su representación. Encontramos los siguientes casos: a) la función está dada mediante un diagrama sagital, b) la función está dada mediante una expresión algebraica y c) la función dada en su representación cartesiana.

a) La función está dada mediante un diagrama sagital. En este caso Arturo determina imágenes y pre imágenes mediante la observación de esta representación y las flechas que se vinculan a los elementos de ambos conjuntos.

b) La función dada mediante una expresión algebraica. Arturo recurre a la valorización o evaluación de la expresión que define a la función para determinar las imágenes.

Arturo: Estamos diciendo que los elementos del conjunto de partida los hago pasar por la función, y la función ¿qué dice? Que el que entra a la función, yo le sume 4. Si entra el 3 a la función, sale como 7, porque al 3 le sumo 4, si entra el -4, y le sumo 4, ¿cuánto me da? [312]

Arturo: ¿Qué tengo que hacer? F (-10) y reemplazarlo en la función. Sería 1-3 por (-10), y eso sería 1 + 30, ¿no? Y eso es 31, o sea que la imagen de -10 es 31. [373]

Arturo: ¿Cómo determinamos la imagen? Es reemplazar ese valor en la función. La función, al evaluarla en el 5 es 1 - 3 por 5. Como esto es 15, 1 menos 15 nos da -14. La imagen del -4 es evaluar -4 en la función y seria 1 - 3 por-4, eso sería 1+12, esto nos da 13. ¿Hay alguna duda con eso? [420]

Se observa conocimiento de Arturo sobre la valorización de expresiones algebraicas como herramienta para el cálculo de imágenes. Por otro lado, para el cálculo de pre imágenes, Arturo distingue el caso en que puede obtener por tanteo aquel número que es pre imagen del elemento dado del caso en que recurre a las ecuaciones lineales para realizar dicho cálculo.

Arturo: Yo tengo dos formas de encontrar esto. Va a depender del número, si encontrarlo es simple como encontrar la pre imagen de 6, que era buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me diera 6, y ese era el 1, pero ¿cuál va a ser la pre imagen del 10? ¿es un número que sea tan simple de determinar? [392:3]

Arturo: Cuando encuentro imágenes, tomo el valor, lo meto en la función y me arroja su imagen, pero cuando quiero pre imágenes yo tomo la función y lo igualo a ese valor que quiero que sea o que me dicen que quiere que sea, al despejar aquí, ¿qué me va a quedar? [396:3]

Arturo: La pre imagen de -8, ¿qué tenemos que hacer? Como quiero que la función me dé como resultado -8, tomo la función, que en este caso es 1-3x y quiero que me dé -8. Resuelvo la ecuación 1-3x=-8. Restamos 1 y nos queda -3x=-9 [423]

En los últimos extractos Arturo posiciona a la resolución de ecuaciones como la herramienta que permite en todos los casos determinar la pre imagen de un elemento dado. De este conocimiento se deduce que Arturo también conoce cómo resolver este tipo de ecuaciones.

c) La función dada mediante su representación cartesiana. La determinación de imágenes queda sujeta a la construcción de la representación gráfica de la función y a los puntos que se identifiquen en él, siendo preferentemente aquellos puntos en donde la función intersecta a los ejes.

Arturo: Según el dibujito que yo hice [Imagen 15], ¿dónde tendría que estar el -3 si la imagen del -3 es 0? f(x)=x+3 [786]

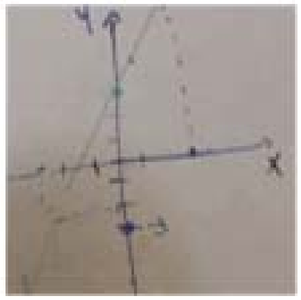


Imagen 16: f(x)=x+3

Se puede observar que en los tres casos identificados Arturo muestra conocer cómo determinar imágenes y pre imágenes de elementos bajo ciertos procedimientos que dependen del tipo de representación que se tenga de la función.

Conocimiento sobre la construcción de la gráfica cartesiana de una función (KoT-P-4)

En la categoría de definiciones se incluyó el conocimiento de Arturo sobre la diferencia entre el gráfico de la función y su representación gráfica. En esta categoría e indicador incluimos el conocimiento que Arturo manifiesta sobre la construcción de la representación gráfica de la función.

Arturo: La f(x). Esta coordenada sería la imagen de la primera, o sea que estos puntos, si pertenecen a un gráfico de una función, van a ser (x, f(x)). La segunda coordenada es la imagen de la primera coordenada. [220:1]

Arturo: Entonces tengo el punto (1,2), ahí tengo mi primer punto que pertenece a la gráfica de esa función. (0,1) y éste de acá (-1,0), si quiero puedo seguir y encontrar la imagen del -2, ¿cuánto sería la imagen del -2?

As: -1.

Arturo: Sería -1, me quedaría por acá [señala la ubicación del punto], ¿cuál sería la imagen del 2?

A: (2,3).

Arturo: El 3, ¿cierto? ¿qué se nos está formando si yo uniera esos puntitos?

As: Una línea.

Arturo: [...]Las funciones las podemos dar una representación gráfica y ¿cómo se hace esa representación gráfica? Es elegir elementos, números cualquiera dadas las funciones que vamos a trabajar no vamos a tener problema con poder elegir cualquier número, meterlos a la función y obtener su imagen, y si tenemos su imagen, podemos obtener puntos y esos puntos los meto al plano cartesiano. [244 - 250]

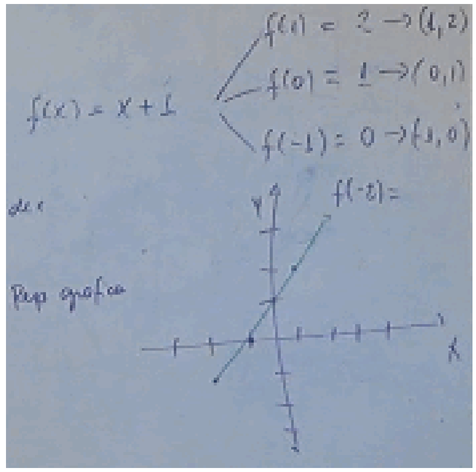


Imagen 17: De la representación numérica a la cartesiana

Como se señaló antes, para Arturo la representación gráfica cartesiana de la función está formada por puntos del plano que provienen de pares ordenados. En este indicador, y según los extractos expuestos, se observa el conocimiento de Arturo sobre cómo construir la representación cartesiana de la función mediante la determinación de pares ordenados que se representan como puntos en el plano (Imagen 17). Estos puntos son obtenidos mediante el procedimiento de determinación de imágenes para elementos del dominio seleccionados.

Conocimiento sobre las características del resultado al representar una función lineal o afín en el plano cartesiano (KoT-P-5)

En el proceso de construir la gráfica de una función se observa que Arturo inicia con la expresión algebraica de una función para determinar un conjunto de pares ordenados los que ubica como punto en el plano cartesiano. La unión de estos puntos mediante una línea recta es lo que Arturo indica como representación gráfica.

El proceso declarado en el indicador anterior conduce a obtener la representación gráfica de la función lineal y afín.

> *Arturo: Tanto en la función lineal como en la función afín, su gráfica es una línea recta. Si b llega a ser 0, esta de acá, la gráfica va a pasar por el origen y las que tienen esta estructura [afín] no van a pasar por el origen.*
>
> *Si tenemos la función x+1, que es más fácil. Esa ya la graficamos, ¿no?*
>
> *La función x+1, si el x vale 0, el y vale 1. Sería esa la gráfica de la función. Esta es una función afín. [708:2-4]*

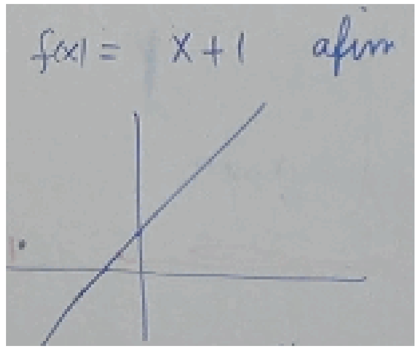


Imagen 18: f(x)=x+1

Parte del conocimiento especializado sobre las representaciones se relaciona con conocer cuál será el resultado del proceso de construcción de la gráfica de una función; conocer la forma que tendrá la representación gráfica, ya sea por las propiedades de la función que se esté graficando (creciente, cuadrática, inyectiva, etc.) o por el tipo de función graficada (lineal, cuadrática, sinusoidal, etc.). En esta intervención [708:2], Arturo da cuenta de su conocimiento sobre el resultado que obtendrá (una línea recta) al graficar una función lineal o afín, siendo una recta que contiene al origen cuando se trata de una función lineal y una recta que no contiene al origen en el caso de una función afín (Imagen 18).

Conocimiento sobre cómo determinar el dominio de una función (KoT-P-6)

Cuando Arturo determina el dominio de una función representada mediante un diagrama sagital no se distingue un procedimiento para dicha determinación debido a que Arturo no produce distinción entre el conjunto de partida y el dominio de la función. En cada situación en la que se presentó la función mediante un diagrama sagital, el dominio solamente se identificó por los elementos del conjunto de partida.

Por otro lado, Arturo muestra un conocimiento sobre la determinación del dominio de la función cuando está representada mediante una expresión algebraica.

> *Arturo: En la única cosa en que yo tengo que tener cuidado es cuando la función es una expresión como 5/(x+2). Este tipo de función, cuando están escritas en forma de fracción, como no podemos dividir por 0, me tengo que asegurar que el denominador no sea 0. El domino de esta función va a ser todos los x racionales que hagan que esta expresión tenga una imagen, y para que esto tenga una imagen, me tengo que asegurar que el denominador no sea 0. [619]*

Arturo conoce que el dominio de la función cuya variable está en el denominador será el conjunto de valores para la variable que no anulen el denominador de la expresión.

En el caso de que la función esté representada mediante su gráfico cartesiano, Arturo también dispone de un método para determinar el dominio.

> *Arturo: Se fijan que el domino de la función lo podemos determinar mirando el dibujo, la representación de la función sin necesidad de que nos den la expresión que representa la función, solamente con su gráfico a veces podemos determinar su dominio. [859:1]*

En este caso, el procedimiento de determinar el dominio de la función se enfoca en distinguir quiénes son pre imagen o quiénes tienen imagen en dicha representación. Como se mostró en el indicador *Conocimiento sobre la representación del dominio y recorrido de la función* (KoT-R-9) en la categoría de *Registros de Representaciones*, la observación del gráfico cartesiano y el conocimiento de la representación del dominio permite a Arturo conocer un procedimiento para determinar el dominio de una función dada por su representación gráfica.

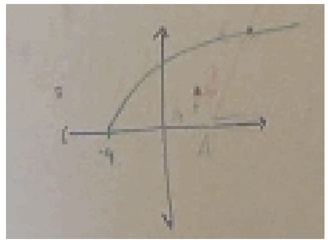


Imagen 19: Dominio según la gráfica cartesiana

Arturo: Así, según este dibujo [Imagen 18] ¿cuál sería el dominio de la función?, ¿cuáles serían los valores del x que tienen imagen? estos valores de aquí ¿tienen imagen?

As: Si.

Arturo: Si, porque chocan en la función. El 0, ¿tiene imagen?

A: Si.

Arturo: Si, es ese valor [lo remarca en el plano] un valor aquí positivo, ¿tiene imagen?

As: Si, arriba.

Arturo: ¿Y este de acá? ese puntito ¿tiene imagen?

As: No.

Arturo: Entonces, en esta línea azul viven los x [eje X], estos x de acá chocan en la gráfica y por tanto tienen imagen, pero si yo tomo ese puntito que esta acá, ese de ahí ¿tiene una imagen en la función?

As: No.

Arturo: No, entonces ese puntito que está ahí ¿es parte del dominio de la función? No. Todos desde aquí, desde el -4 a la derecha ¿tienen imagen?

A: ¿Y cuál sería la imagen?

As: Si, todos tienen. [824:3 - 836]

Se observa en el extracto que Arturo conoce una forma de determinar el dominio de la función si es que está representada gráficamente en el plano. Este procedimiento consiste en estimar cuáles elementos del eje X poseen imagen.

Conocimiento sobre cómo determinar el recorrido de una función (KoT-P-7)

Del mismo modo en que Arturo determina el domino de una función, al determinar el recorrido se identifican los casos en que las funciones están dadas por sus representaciones sagitales, algebraicas o cartesianas. En cada una de estos casos se observa el conocimiento de procedimientos diferentes para determinar el recorrido.

Cuando la función se encuentra dada mediante una expresión algebraica, Arturo procede a determinar condiciones sobre la variable dependiente resolviendo la ecuación $y=f(x)$ despejando la variable x.

> *Arturo: 12-x, esa es la función. Eso es lo primero que vamos a hacer. Aquí el objetivo es, como en el dominio eran los x que podían ir en la función, acá son los y que pueden ir en la función. ¿Qué vamos a hacer cuando tenemos e igualado a la función? Vamos a despejar x. [638:1]*
>
> *Arturo: -y +12. Ese es el valor de x, ahora repito la pregunta, pero ahora en torno a y. y ¿puede tener cualquier valor o tenemos alguna especie de restricción con respeto al valor de y? [648]*
>
> *Arturo: El recorrido de esta función, como él y en esta expresión puede tomar cualquier valor, cuando pueden tomar cualquier valor sin problemas, también son los racionales. Voy a poner un ejemplo en que eso no pase para que veamos la diferencia. [654]*

Cuando la función está dada mediante su gráfica cartesiana, Arturo determina el recorrido fijándose en los valores del eje Y que son alcanzados por la función, esto es, determinar cuáles elementos tienen pre imagen.

> *Arturo: Recorrido "visualmente". El recorrido eran los valores de y, elementos del conjunto de llegada, pero para que pertenecieran al recorrido tenían que ser imágenes de alguien. Como eran los y, los y viven en el eje vertical, por lo tanto, el recorrido lo ven acá [eje Y] ¿Cuál sería el recorrido de esta función x+3?*
>
> *A: 3.*
>
> *Arturo: Por ejemplo, yo tomo un valor de aquí [en el gráfico de la función f(x)=x+3, marca el 4 en el eje Y], este valor ¿es imagen de alguien?*
>
> *As: No.*
>
> *Arturo: Este de acá ¿es imagen de alguien?*
>
> *A: Si.*
>
> *Arturo: Viene de alguien. Si yo elijo uno de acá [un valor negativo en el eje Y] ¿va a chocar con la función y va a venir de alguien?*
>
> *A: 0, o sea sí.*
>
> *Arturo: No importa el número, pero es...*
>
> *A: Si.*
>
> *Arturo: Si yo elijo cualquier valor del eje Y, esos son la imagen de algún elemento.*
>
> *A: Si.*
>
> *Arturo: Si todos estos son, tienen una pre imagen ¿van a ser parte del recorrido?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: Entonces ¿cuál es el recorrido de esta función?*
>
> *As: Todos los racionales. [859:2-874]*

Por otro lado, cuando la función se encuentra representada mediante un diagrama sagital, Arturo identifica aquellos elementos que son alcanzados por las flechas del diagrama en el conjunto de llegada. Estos elementos conforman el recorrido de la función.

De todo lo anterior, se observa que Arturo dispone de diferentes procedimientos para determinar el recorrido de la función según el tipo de representación que se tenga de la función.

Conocimiento sobre cómo determinar la inyectividad de una función (KoT-P-8)

En el estudio de las propiedades de las funciones se ha identificado el conocimiento de Arturo sobre la definición de inyectividad, de epiyectividad y de biyectividad de una función. El conocimiento de estas propiedades se ha clasificado como conocimiento de las definiciones de las propiedades, mientras que conocer cómo determinar cuándo una función específica es o no inyectiva, epiyectiva o biyectiva corresponde a conocimiento de procedimientos sobre los procedimientos para determinar el cumplimiento de estas propiedades a la vez que evidencia el conocimiento de las propiedades.

Como se especifica en los indicadores anteriores, aquí también distinguimos situaciones en las que Arturo determina la inyectividad: cuando la función está representada mediante un diagrama sagital, mediante una gráfica cartesiana y mediante una expresión algebraica.

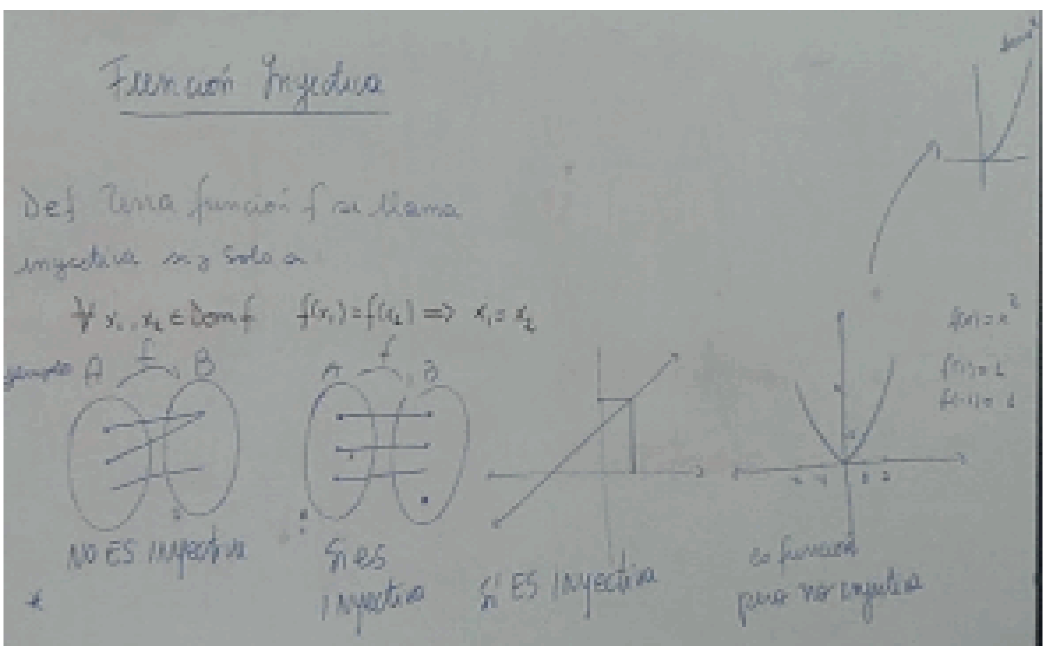


Imagen 20: Presentación de la función inyectiva

Cuando la función está representada mediante un diagrama sagital, Arturo verifica la inyectividad visualmente comprobando que no existan dos elementos que tengan la misma imagen (Imagen 20, lado izquierdo) y cuidando que el diagrama represente efectivamente a una función.

Arturo: Si estoy diciendo que es 1 a 1, quiere decir que cada elemento del conjunto A va con solo un elemento del conjunto B. Esta de acá, ¿sería 1 a 1?

As: No.

Arturo: No, para que fuera 1 a 1 tendría que ser así [se refiere al siguiente diagrama sagital], y aquí me podría sobrar [en el conjunto de llegada] y sigue siendo función, entonces para que sea una función inyectiva, 1 a 1, tiene que tener estas características. Uno de los elementos del conjunto de partida con solo uno en el de llegada. No puede pasar esto [diagrama sagital del lado izquierdo].

No pueden dos elementos del dominio tener, compartir la misma imagen.

A: Esa igual es función, pero no es inyectiva.

Arturo: Exactamente eso es. Esta es una función, pero no es inyectiva. Esta si es una función, pero si es inyectiva [diagrama sagital lado derecho]. [1079:3-1083]

Para el caso de la función representada en el plano cartesiano (centro y derecha de la Imagen 19), Arturo busca pre imágenes que tengan una imagen dada.

A: ¿Se puede decir que la del gráfico es una afín inyectiva?

Arturo: Claro, es una función afín e inyectiva. Todas las funciones afines son inyectivas

A: [hace una pregunta que no se entiende]

Arturo: Porque si tú tomas un elemento acá [del dominio], tiene una única imagen. ¿Hay otro elemento del eje X que tenga a ese de ahí por imagen?

A: No.

Arturo: No, entonces pasa que es 1 con 1, uno de aquí [eje Y] con uno del eje X. En el gráfico vas a hacer lo siguiente, para que veas la diferencia y puedas discriminar. La función, por ejemplo, x^2. Todo el que entra a la función, sale elevado a 2. $0^2=0$, $1^2=1$, por lo tanto, tengo ese. Y ¿qué pasa con el -1^2

A: -1.

Arturo: f (1) es 1, f (-1) también es 1, porque es $(-1)^2$, entonces lo que va pasando con esta gráfica es que me va dando algo así. Este elemento, el 1 tiene por imagen al 1. ¿Hay otro elemento que también tenga por imagen al 1?

As: -1.

Arturo: Si, el -1 también tiene por imagen al 1, entonces si te fijas, esto equivale a eso que está ahí [a la derecha de la imagen].

A: ¿Pero eso sería como una función? [el x^2]

Arturo: Esto es una función, pero no es inyectiva. [1111-1122]

Al proponer la función x^2, Arturo recurre al cálculo de imágenes de 1 y -1 para verificar que la relación 1 a 1 no se da, mostrando que hay dos elementos diferentes con la misma imagen.

En este mismo ejemplo, Arturo menciona el procedimiento de restringir el dominio de la función para lograr que la función sea inyectiva, como se muestra en la esquina superior derecha de la Imagen 19 y en el siguiente extracto.

Arturo: Como el dominio son todos los racionales, si yo le saco parte al dominio y le quitara una de las ramitas, si la podría hacer inyectiva. No es algo que nosotros vamos a hacer, pero son cosas que se pueden hacer.

Si a esta función, yo la modifico y género en base a esta una función donde voy a achicar su dominio, y achicar su dominio, por ejemplo, lo hago así [dibuja solo una rama de la parábola], acabo de achicarle el dominio a la función. sigue siendo $f(x)=x^2$, pero con dominio no en los racionales, sino que solamente los racionales positivos, y ahora si es inyectiva. Acabo de hacer que, al borrarle una de las ramitas, acabo de hacer la función inyectiva.[1140:1-2]

Cuando la función está dada por la expresión algebraica, Arturo realiza la verificación de la inyectividad resolviendo la ecuación $f(x_1) = f(x_2)$ y estableciendo condiciones para x_1 y x_2.

Arturo: Lo que nosotros vamos a hacer es recurrir a esto que está aquí [la definición]. para poder probar vamos a tomar cualquier par de elementos del dominio de esta función, y ¿cuál es el dominio de esta función?

A: Todos los racionales.

Arturo: Todos los racionales. Vamos a tomar cualquier par de números racionales y vamos a asumir que la imagen de esos dos elementos es lo mismo. Podemos tomar a y b o, como pusimos ahí, x_1 y x_2, da lo mismo, son dos elementos cualesquiera del dominio, porque eso lo tomo como cualquiera porque tengo tantos números racionales para elegir que, para generalizarlo, tomo dos elementos cualesquiera de ellos.

Vamos a asumir que la imagen de ese elemento sea igual a la imagen de ese, vamos a asumir que eso [$f(x)=f(y)$] es verdadero, o sea, se cumple.

A: Pero si las imágenes son iguales, no sería inyectiva.

Arturo: Si con esto, y dado esta función, yo llego a concluir que x_1 es exactamente igual a x_2, yo puedo decir que la función es inyectiva. ¿Qué pasa con la función cuando yo reemplazo x_1? ¿qué me va a quedar?

A: ¿Se reemplaza 1?

Arturo: La x es x_1, por lo tanto, en vez de poner x pongo x_1, entonces sería… Si esto es verdadero, estaría diciendo que 2 por (x_1)-5 tendría que ser igual a 2 veces x_2 menos 5 [$2x_1-5=2x_2-5$]. Estoy reemplazando el x_1 y el x_2 en la función. Yo estoy asumiendo que esta igualdad se cumple, que es verdad y si se cumple, ¿qué pasa con los 5 que están aquí?

As: Se eliminan.

Arturo: Se eliminan, por lo tanto, esto, ¿a qué es equivalente?

As: $2x_1=2x_2$

Arturo: $2x_1=2x_2$, ¿y qué pasa con los 2 que están ahí?

As: Se divide, se elimina.

Arturo: Puedo dividir por 2 cierto.

As: ¡oh!

Arturo: ¿Qué concluyo? Que x_1 es igual con x_2. Partí asumiendo que esto se cumplía y llegue a la conclusión que eso se cumplía, entonces esa función que acabo de poner ¿es inyectiva?

As: Si.

Arturo: Es inyectiva. Por lo tanto, f es inyectiva. Con respecto a lo que acabo de hacer. Como la función no tenía su gráfico, recurrí a la definición de lo que significa ser inyectiva. Para poder demostrarlo, en palabras simples y simplificando un montón de detalles que hay detrás, es que asuma que se cumple esta condición que está acá, y si con esa yo llego a concluir que se cumple que x_1 es igual con x_2, yo puedo decir que la función es inyectiva.[1148 - 1164]

En cada una de las representaciones para la función: diagrama sagital, gráfico cartesiano, expresión algebraica, Arturo muestra conocer cómo determinar si la función es o no inyectiva.

Conocimiento sobre cómo determinar la epiyectividad de una función (KoT-P-9)

Se observan dos situaciones en donde Arturo determina la epiyectividad de una función: cuando está representada en un diagrama sagital y cuando está dada por su expresión algebraica. Cuando la función se encuentra representada mediante un diagrama sagital, la forma de determinar la epiyectividad se basa en la identificación del recorrido de la función y comprobar si coincide con el conjunto de llegada dado como se muestra a continuación.

Arturo: Esta función no es epiyectiva, porque para que sea epiyectiva, el recorrido y el conjunto de llegada tienen que coincidir, ser el mismo conjunto.

En palabras simples, en el conjunto de llegada no me tendrían que sobrar elementos. [1185:1-2]

Cuando la función está dada por su expresión algebraica, Arturo plantea y resuelve la ecuación $y=f(x)$ despejando la variable independiente para analizar las condiciones de la variable dependiente en la expresión resultante. A continuación, se muestra el ejemplo (Imagen 21) que propone para mostrar dicho procedimiento.

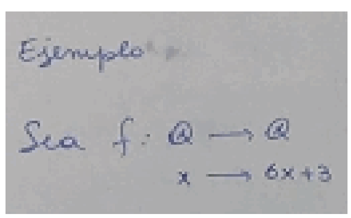


Imagen 21: Ejemplo para probar epiyectividad

Arturo: Si esto de aquí es f(x), y f(x) es lo mismo que y. Vamos a hacer y igual a la función 6x+3 y vamos a despejar x. ¿Qué vamos a hacer?, despejar x.

Si yo quiero despejar ese elemento de ahí, nosotros sabemos despejar ese tipo de expresiones.

As: Si.

Arturo: Entonces, es equivalente a y-3=6x, y eso, ¿a qué es equivalente si yo quiero despejar el x? Ese es el objetivo.

A: x+3y.

Arturo: Quedaría y-3 dividido en 6, y ese sería el valor de x. El y ¿puede tomar cualquier número o hay alguno que no pueda ser evaluado ahí?

As: Todos los racionales.

Arturo: Como y puede ser cualquier número racional, quiere decir que el recorrido de esta función va a ser exactamente todos los racionales. El recorrido ¿coincidió con el conjunto de llegada?

As: Si.

Arturo: Como el recorrido de la función…

A: Si fuera un 3, sería 0

Arturo: Pero 0 partido por 6 es 0, no está indefinido. El problema está si el y estaría en el denominador, ahí estaríamos en problemas con el y, pero en este caso, arriba, puede tomar cualquier número, incluso el que lo haga 0 arriba, pero no va a haber problemas arriba.

Como el recorrido coincide con el conjunto de llegada, entonces la función es epiyectiva. Terminen de copiar, anoten todos los detalles. Terminen de copiar [1218:2-1228:2]

Se observa que Arturo conoce un procedimiento para determinar el recorrido de la función (KoT-P-9) y con ello determinar la epiyectividad de la función al comparar el recorrido con el conjunto de llegada de la función, misma idea que utiliza para decidir si una función dada en diagrama sagital es o no una función epiyectiva.

Conocimiento sobre cómo determinar la función inversa (KoT-P-10)

En el indicador del conocimiento sobre la definición de la inversa de una función (KoT-D-5), en la categoría de Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos, se ha incluido el conocimiento sobre la propiedad que garantiza la existencia de una función inversa para una función biyectiva. En el presente indicador se incluye el conocimiento sobre cómo determinar dicha función inversa.

Arturo: Lo que voy a mostrar es cómo hacer un proceso algebraico para no andarlas buscando al tanteo [la función inversa], porque eso fue lo que hicimos recién; probar y cuál nos funcionaba, que es válido, pero necesito un proceso que haga lo mismo y que me demore menos en hacerlo.

Como estamos viendo que estos elementos, estos son elementos y, los x de la función van a parar a un y. Nosotros sabemos que y=3x+2. Igual como hacíamos para calcular el recorrido de la función ¿qué pasa si despejamos x igual como hacíamos para encontrar el recorrido de la función? ¿qué me va a quedar si yo despejo?

¿Qué saco primero para despejar x?

As: El 3.

Arturo: ¡Saco el 2 primero! Recordamos eso. Queda y-2=3x. ¿A qué me queda equivalente eso?

A: Hay que dividir por 3.

A: y-2 partido 3.

Arturo: (y-2)/3, ese es mi x. Esta expresión ¿no es parecida a esa?

A: Si.

Arturo: ¿Qué es lo único que diferencia esa expresión de la que obtuvimos acá?

A: El y.

Arturo: Es que en vez de x tenemos un y, y el proceso fue simple, ¿no? [1630:3-1639]

Arturo relaciona la expresión resultante en ese proceso como la expresión algebraica que determina la función inversa. Se observa del extracto que Arturo conoce el procedimiento sobre cómo obtener dicha función inversa.

Fenomenología y aplicaciones

Conocimiento sobre la aplicación de las funciones a situaciones cotidianas (KoT-F-1)

El conocimiento sobre la fenomenología no es evidenciado en Arturo durante las clases, sin embargo, en la entrevista señala conocer que la función le permite modelar diferentes situaciones cercanas al contexto de sus estudiantes, como, por ejemplo, las cuentas de la electricidad o aquellas que posean la modalidad de un costo por consumo más un cargo fijo, lo que da la forma $f(x) = ax + b$. Se refiere además a modelos para determinar la magnitud y energía liberada durante un movimiento sísmico o a la determinación del PH de una solución como parte de las aplicaciones de las funciones.

E: Hay un estudiante que te pregunta ¿para qué sirven las funciones? Tú le dices "para modelar".

Arturo: Mi respuesta ahora es distinta. Es un poco más concreta. La idea de modelar está, pues esa es la idea de función.

Para qué me sirve esto no es solamente para las cuentas. Muchas de las cosas que nosotros manejamos tienen una función detrás, hasta el parquímetro está como función. Yo pondría como respuesta a esa pregunta, que en muchas situaciones cotidianas está detrás.

E: Y ¿además del parquímetro?

Arturo: Contexto de temblores. También hay una función detrás para poder medir la intensidad.

E: ¿Conoces el modelo?

Arturo: Alguna vez lo escribí.

E: ¿En qué otra cosa?

Arturo: En la medición del PH.

> *E: ¿Son cosas que se podrían estudiar en ese nivel?*
>
> *Arturo: En ese nivel no. Quizás en el curso siguiente, porque ahí se ven logaritmos, tanto el PH como en la intensidad de los temblores. Las cuentas son lineales, pero hay un contexto que ellos no se dan cuenta de lo que están cobrando. Ellos no miran las cuentas. Cuando tú les empiezas a decir que cobran por varias cosas, te terminan creyendo que cobran eso. Si no consumes agua, igual hay un cargo fijo que cobran. En el contexto telefónico también puede hacerse. Cuando recién se ven las primeras funciones que surgen son las función lineal, afín y constante. [Ent2 77-86]*

En el extracto se puede observar que Arturo conoce la aplicabilidad de las funciones a la modelación de situaciones cotidianas y otras no familiares. Una de estas situaciones es el costo asociado a estacionar un vehículo en vías públicas o privadas. Del mismo modo, Arturo identifica las cuentas con cargo fijo más un consumo y los modelos de medición de escalas de intensidad de temblores como otras aplicaciones que tiene el concepto de función. De este modo se observa el conocimiento de Arturo sobre situaciones que dan sentido a la función, es decir, fenómenos que pueden ser modelados por ella.

Significados

Se ha incorporado un apartado en el KoT en el que se reúnen aquellas intervenciones de Arturo que permiten observar sus formas de comprender la función, las que resaltan durante la introducción del concepto y durante el trabajo con las funciones. Arturo muestra solo una definición de función durante toda la enseñanza del concepto y afirma no recordar otra. Así, los significados expresados para la función se desprenden de la definición dada y del tratamiento del concepto. Por un lado, se encuentra la función como una correspondencia asociada, principalmente, al trabajo con conjuntos y, por otro lado, la función como un proceso, asociada, por ejemplo, a los aspectos operatorios del cálculo de imágenes o pre imágenes. Asimismo, se han incluido en esta sección los significados que Arturo atribuye a otros conceptos asociados a la función como por ejemplo la inyectividad o epiyectividad.

Conocimiento sobre la función como una correspondencia entre conjuntos (KoT-S-1)

La correspondencia mediante la cual Arturo define la función es expresada como el vínculo que une los elementos de los conjuntos involucrados y a los conjuntos en sí. Para mostrar esta noción, Arturo propone una situación cercana a sus estudiantes en donde identifica y aplica este concepto.

> *Arturo: A cada uno le corresponde una silla, ¿no?, o sea, cada uno de ustedes está asociado a una silla, entonces eso es hacer una correspondencia: cada uno tiene su silla, cada uno tiene su mesa, ahí hay una correspondencia. Ustedes, como pertenecientes a un conjunto de alumnos y las sillas a un conjunto de sillas, entonces a todo el curso le corresponde una silla, esa es la idea de la palabra, que en el contexto que vamos a trabajar, por correspondencia. Entonces, ¿cómo vamos a definir una función? Como una correspondencia de elementos, elementos de dos*

> *conjuntos en la que, a cada elemento de un conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. [31:6-7]*

Se observa que Arturo conoce la función como una correspondencia al mostrarla como la vinculación entre elementos de dos conjuntos, sin embargo, esta correspondencia no es arbitraria y debe cumplir con ciertas condiciones para considerarla como función.

> *Arturo: [...]Tú puedes establecer distintas correspondencias, tomar elementos de un conjunto y relacionarlos con los elementos de otro conjunto, ahora si yo a ese tipo de correspondencia le doy condiciones, y esas condiciones para nuestro caso son que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada, se trasforma esa correspondencia en una función. Cuando en esa condición dice que "a cada elemento", significa que aquí [conjunto de partida] no me pueden sobrar elementos, en este de acá [conjunto de llegada] si me pueden sobrar. [123]*

La intervención anterior muestra que Arturo conoce la función como una correspondencia que debe cumplir las condiciones de exhaustividad y unicidad en la asignación de imagen. Por otro lado, bajo la misma idea de correspondencia, Arturo muestra la función como una asignación en el sentido de la regla o ley que permite realizar la correspondencia entre elementos.

> *Arturo: Tenemos dos conjuntos: un conjunto A, y un conjunto B. Aquí tengo elementos, y a este elemento [uno de A, le llama "a"] yo lo voy a asociar y lo voy a hacer llegar a un elemento en el otro conjunto, como a ustedes le hice sentar en una silla, a usted lo siento en ésa silla y no en otra porque esa es su silla.*
>
> *Aquí está nuestro elemento, que puede ser cualquiera de ustedes, y aquí yo los hago que se sienten en su puesto, y llega aquí sentados.*
>
> *Un elemento aquí [en A, le llama "x"] lo hago parar y lo hago...[lo une con "x" en B. usa la misma letra]. Pero estos [el conjunto A] van a llegar ahí [a B] mediante una función [dibuja una flecha de A a B, la llama "f"].*
>
> *A: [no se entiende]*
>
> *Arturo: Claro, porque yo les di una indicación: cada uno se sienta en su puesto, esa es la instrucción, entonces yo cumplí una función de darle la instrucción de que ustedes, como elementos del conjunto, se sentaran en su silla. [35:4 - 37]*

Se observa que Arturo asigna a la función los significados de correspondencia y de regla o ley de asignación. Estos significados se derivan de la definición del concepto y de su interpretación, es decir, el conocimiento de Arturo sobre la función como una correspondencia y como una regla de asignación entre elementos de dos conjuntos.

Conocimiento de la función como un proceso (KoT-S-2)

La función también es presentada por Arturo como diferentes formas de un proceso. Pese a que estas formas son matices de la misma idea de función y que es posible relacionar entre sí estos diferentes acercamientos, resulta conviene para nuestros fines analíticos presentarlos de manera separada.

Conocimiento de la función como una máquina (KoT-S-2.1)

El primero de los significados de la función como un proceso corresponde a la presentación de una comparación entre la función y una máquina, es decir, el proceso que representa la función es similar al proceso que realiza una máquina. Luego de definir la función como una correspondencia, Arturo busca que sus alumnos comprendan esta definición para lo cual propone una analogía entre la función y una máquina lavadora.

> *Arturo: Las funciones, previo a darles más nombres, la función funciona igual que una máquina, una especie de máquina. Un ejemplo podría ser la lavadora. La lavadora cumple una función, ¿cuál es la función? [43:2]*
>
> *Arturo: [...] Eso es lo que hace una función. Acá [indica el diagrama que tiene dibujado en la pizarra] tendría la prenda sucia, hace la función, lo que le corresponda hacer, dependiendo de la máquina, y llega al otro lado, en este caso como era la lavadora, llega limpia. [51:1]*

Imagen 22: Presentación pictórica de la analogía

Con esta comparación, Arturo muestra a sus alumnos la función como una máquina (Imagen 22) que posee una estructura similar al concepto de función definido previamente. En esta comparación se identifican los conjuntos de partida, el dominio y el recorrido de la función. El significado de la función como una máquina se encuentra relacionado con la idea de función como proceso de entrada y salida y que se manifiesta como conocimiento de Arturo en los siguientes extractos, lo que corresponde al segundo acercamiento a la función.

> *Arturo: Con números la función ya no va a ser lavar, va a ser que al que entre le sume 2 [escribe f(x)=x+2]. Al que entre a la función, a la máquina, yo le sumo 2. Si esta es mi máquina que hace que al que entre le sumo 2, si entra el 1, ¿cómo sale?*
>
> *As: 3. [63-64]*
>
> *Arturo: Inventemos una función "f"... y ¿qué quiero que haga esta máquina?... que el que entre salga multiplicado por 2. Entonces van a calcular cuánto sería f(0), ¿cuánto sería f(-1)?, ¿cuánto sería f(5)? [138:2]*

Lo anterior permite observar el conocimiento de Arturo sobre la función como un proceso de entrada y salida, una máquina en la que ingresan y egresan elementos de los conjuntos relacionados.

Conocimiento de la función como un proceso de entrada y salida (KoT-S-2.2)

Aunque los extractos anteriores también dan cuenta de la función como un proceso de entrada y salida, este segundo acercamiento es manifestado por Arturo sin recurrir a la idea de máquina.

> *Arturo: Esto es un 2 por el que entra. Si entra x, sale 2x. Si entra el 0 a la función, sale como 2 por 0 y eso es 0. ¿Este de acá, f (-1), bajo la misma función?*
>
> *A: -2.*
>
> *P: Sería -2, porque sería 2 por -1, y eso sería -2. ¿cómo sería...?*
>
> *As: 10.*
>
> *Arturo: Esto sería 10, por que 2 por 5 me da 10. Si yo cambio la función y considero la función g(x)=2x-1, o sea que el que entra lo tengo que multiplicar por 2 y quitarle 1, ¿cuánto es g (1)?*
>
> *As: 1. [144-149]*

La idea de función como proceso de entrada y salida es utilizada fundamentalmente para determinar imágenes de elementos, los pares ordenados que pertenecen al gráfico de la función y la representación gráfica de la misma.

Conocimiento de la función como una aplicación (KoT-S-2.3)

Arturo relaciona la función como proceso de entrada y salida con la idea de aplicación a elementos de un determinado conjunto en el siguiente extracto.

> *Arturo: Porque el 3 va mediante la función. Si tú aplicas la función... el que entra a la función dice que le sume 4. Si entra el 3 y le suma 4 ¿cuánto te da? [305]*

Por otro lado, Arturo también expresa la idea de función como aplicación a elementos sin indicarla como un proceso de entrada y salida.

> *Arturo: La función que está en el diagrama es lo mismo que está escrita de esta forma [indica A-->B]. Si yo tomo un elemento cualquiera "x", va mediante la función como "y" como su imagen, pero ese es el resultado de hacer que la función se aplique sobre el elemento que yo tomé acá [dominio], o sea que el "x" se toma aquí y llega al otro lado como f(x)=y. Dijimos que esto se leía "efe de equis" que es aplicar la función al elemento que es está aquí. Este conjunto se llama conjunto de partida o dominio de la función. [288:4]*

De los extractos anteriores se puede observar el conocimiento de Arturo sobre esta idea de función como una aplicación sobre elementos del conjunto de partida.

Conocimiento de la función como una transformación (KoT-S-2.4)

La función también es entendida y expresada por Arturo como una transformación o cambio que se realiza a un elemento para obtener su imagen. En la siguiente intervención observamos que Arturo utiliza la palabra “convierte” para mostrar este significado de cambio o transformación que le quiere dar a la función.

Arturo: Claro, esa es una cosa, otra cosa es la función en sí. Hay distintos elementos, tenemos la función que te dice qué es lo que hace y tenemos los elementos que pertenecen a cada conjunto. Tenemos esto, lo que está aquí [indica a la letra f de la función del ejemplo] es lo que le hace la función a ese elemento, lo convierte en 1. La función, al b, lo convierte en 2. Esta función, al a lo convierte en 0, que es lo que le hace la función a ese elemento, pero lo que es la función en sí, relaciónalo con lo que es la máquina, eso es. [121:1]

En el extracto anterior Arturo no muestra un ingreso y egreso de elementos, sino que comprende la función como algo que transforma unos elementos en otros. Además, en la última línea del extracto, Arturo relaciona esta transformación al proceso caracterizado por la máquina lavadora, vinculando diferentes significados para la función.

Conocimiento de la función como un operador (KoT-S-2.5)

En la entrevista, cuando se pregunta a Arturo por el significado que le ha otorgado a la función durante sus clases, destaca el carácter de operador cuando se refiere a la función como una expresión algebraica.

*Arturo: Pensé en llamarle "operador", pero pensándolo en forma algebraica como "a*b= a algo".*

E: Como operaciones "inventadas", operaciones binarias.

Arturo: Exactamente. Estaba tratando de definirlo algebraicamente, inventando algo. Definirlo algebraicamente como una especie de operación, por eso como un operador, pensando en una relación entre elementos. Está la idea, pero no la puedo concretar porque nunca me había puesto a tratar de definirla de otra forma.

E: Eso sería la misma idea que cuando piensas en la máquina o ¿sería otra forma de acercarse a la función?

Arturo: En una primera instancia pensé en la máquina, el proceso, pero lo pasé al rol algebraico de la función. Pensaba en eso para cambiarle el sentido. No como una correspondencia entre elementos de conjuntos, sino como un operador algebraico. [Ent2 44-48]

Este significado no aparece durante las sesiones de clases de Arturo y declara que habitualmente no lo expone así, sin embargo, señala que es otra de las formas de acercarse a la función.

A continuación, se presenta el Diagrama 1 que reúne los significados para la función que fueron identificados en el análisis de las sesiones de clases de Arturo.

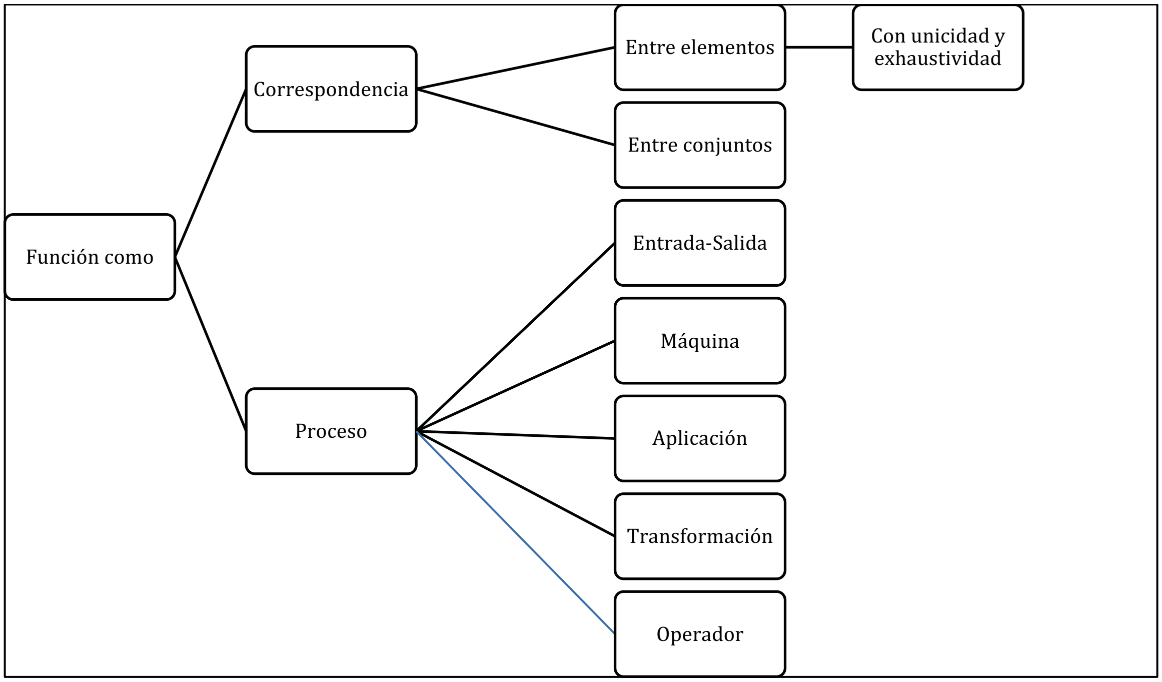


Diagrama 2: Significados que muestra el profesor para la función

Conocimiento de un significado para la inyectividad (KoT-S-3)

Arturo presenta la inyectividad de la función (Imagen 23) mediante la propiedad que la define y recurre al significado que conoce para explicarla a sus alumnos. Este significado se basa en el nombre “1 a 1” que reciben las funciones inyectivas. Arturo señala que esto es lo que caracteriza a las funciones inyectivas.

> *Arturo: Lo que vamos a ver ahora son algunos tipos de funciones, algunas características que van a tener las funciones. Para eso vamos a ver qué significa que una función sea inyectiva. Una función inyectiva también se le llama 1 a 1. Antes de dar la definición en sí, ¿qué significa 1 a 1? que se entiende más que cuando les digo que es inyectiva. Veamos dos ejemplos. Sabemos que para que algo sea una función, puede pasar eso y es función [lado izquierdo de la imagen con diagrama sagital]. Si estoy diciendo que es 1 a 1, quiere decir que cada elemento del conjunto A va con solo un elemento del conjunto B. Esta de acá ¿sería 1 a 1?, [1079]*

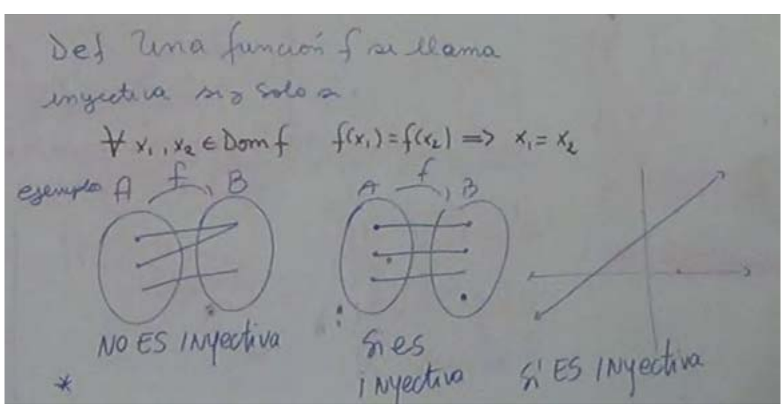


Imagen 23: Presentación de la inyectividad de la función

En la siguiente intervención, Arturo evidencia conocer un significado de la inyectividad de una función.

> *Arturo: En la clase anterior vimos el concepto de lo que era una función inyectiva o 1 a 1. Una función era inyectiva si... ¿qué tenía que pasar para que fuera inyectiva? […] Para que fuera inyectiva, una imagen solamente podía que ser asociada a una pre imagen. [1165-1167]*

El significado que Arturo atribuye a la inyectividad usa la idea de función como correspondencia o asignación y se basa en la identificación de una única pre imagen para cada imagen, esto es, observar la asignación realizada por la función desde el recorrido de la misma.

La nomenclatura de 1 a 1, como parte del conocimiento del tema de inyectividad, apoya el significado que Arturo da a la inyectividad:1 a 1 significa la unicidad de pre imagen para una imagen dada.

Conocimiento de un significado para la epiyectividad (KoT-S-4)

De un modo similar a la presentación del significado de la inyectividad, Arturo presenta la epiyectividad de la función indicando a sus alumnos cómo comprender este concepto.

> *Arturo: Esta función no es epiyectiva, porque para que sea epiyectiva, el recorrido y el conjunto de llegada tienen que coincidir, ser el mismo conjunto. En palabras simples, en el conjunto de llegada no me tendrían que sobrar elementos. [1185]*

> *Arturo: [...]La función va a ser epiyectiva cuando el conjunto de llegada y el recorrido sean el mismo conjunto. Eso se traduce en que en el conjunto de llegada no me deben sobrar elementos, que todos los del conjunto de llegada deben ser imágenes de algún elemento. [1195:1-2]*

De ambos extractos anteriores se observa que Arturo usa la igualdad de los conjuntos de llegada y del recorrido como significado de la epiyectividad. Además, agrega que no deben sobrar elementos en el recorrido como una propiedad que debe cumplir una función para que sea epiyectiva, lo que es equivalente al significado de la epiyectividad recién mencionado, pues la definición de epiyectividad establece que el recorrido es un subconjunto del conjunto de llegada.

La Tabla 7 sintetiza los resultados en este subdominio. En ella, la categoría de Significados se ha presentado como categoría emergente de los resultados del estudio del KoT y como propuesta al modelo.

Tabla 7: Síntesis de indicadores por categoría del KoT

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento del Tema - KoT	Procedimientos	KoT-P-1	cómo determinar si una correspondencia es o no una función
		KoT-P-2	la construcción del diagrama sagital para representar una función
		KoT-P-3	cómo determinar imágenes y pre imágenes
		KoT-P-4	la construcción de la gráfica cartesiana de una función
		KoT-P-5	las características del resultado al representar una función lineal o afín en el plano cartesiano
		KoT-P-6	cómo determinar el dominio de una función
		KoT-P-7	cómo determinar el recorrido de una función
		KoT-P-8	cómo determinar la inyectividad de una función
		KoT-P-9	cómo determinar la epiyectividad de una función
		KoT-P-10	cómo determinar la función inversa
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	KoT-D-1	la definición de función
		KoT-D-2	la definición de dominio y recorrido
		KoT-D-3	la definición de función lineal y función afín
		KoT-D-4	la definición de inyectividad, epiyectividad y biyectividad
		KoT-D-5	la definición de la inversa de una función
		KoT-D-6	la definición de gráfico de una función
	Registros de representación	KoT-R-1	la representación del plano cartesiano y puntos en él
		KoT-R-2	la representación de la función mediante diagrama sagital
		KoT-R-3	la representación de la función mediante gestos
		KoT-R-4	la notación para las funciones
		KoT-R-5	la nomenclatura de imagen y pre imagen en una función
		KoT-R-6	la representación algebraica de la función lineal y afin
		KoT-R-7	la representación cartesiana de la función
		KoT-R-8	la representación cartesiana de las funciones lineales y afines
		KoT-R-9	la representación del dominio y recorrido de la función
		KoT-R-10	la notación y representación de la inyectividad
		KoT-R-11	la representación de la epiyectividad
		KoT-R-12	la notación para la función inversa

***Tabla 7**: Síntesis de indicadores por categoría del KoT (continuación)*

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento del Tema - KoT	Fenomenología y aplicaciones	KoT-F-1	la aplicación de las funciones a situaciones cotidianas
	Significados	KoT-S-1	la función como una correspondencia entre conjuntos
		KoT-S-2	la función como un proceso
		KoT-S-2.1	la función como una máquina
		KoT-S-2.2	la función como un proceso de entrada y salida
		KoT-S-2.3	la función como una aplicación
		KoT-S-2.4	la función como una transformación
		KoT-S-2.5	la función como un operador
		KoT-S-3	un significado para la inyectividad
		KoT-S-4	un significado para la epiyectividad

Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

El conocimiento de la estructura de las matemáticas se refleja en aquellas intervenciones del profesor que muestran las relaciones entre el concepto de función y otros conceptos que no pertenecen a su red conceptual, es decir, conexiones inter conceptuales.

Conexiones Auxiliares

Conocimiento sobre la ecuación lineal para la determinación de pre imágenes (KSM-A-1)

Como se pudo ver en (KoT-P-3), Arturo conoce que la pre imagen de un número puede obtenerse mediante el ensayo de valores (tanteo) o mediante la resolución de una ecuación. En dicho indicador se muestra que Arturo privilegia la resolución de ecuaciones como el procedimiento para encontrar pre imágenes. Esto requiere del uso de la ecuación lineal $f(x)=k$, que no es un elemento propio de la función, pero resulta útil a Arturo en dicho procedimiento.

> *Arturo: ¿Podemos encontrar una forma de encontrar la pre imagen sin estar jugando al "achunte"?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: Si, lo que queremos es, por ejemplo, que esto [la imagen de la función] nos diera 5, y si esto quiero que me diera 5, se convierte en una ecuación. Para eso vimos ecuaciones e inecuaciones antes. [367:2 - 369]*

La intervención de Arturo muestra que emerge, casi naturalmente, la ecuación como herramienta y procedimiento para el cálculo de la pre imagen. Además, identifica a ecuación como un concepto estudiado previamente, independiente al estudio de la función.

> *Arturo: Cuando tú la reemplazas ya estás calculando su imagen. Dada la función, para determinar la pre imagen de 4 por ejemplo, ¿qué tengo que hacer?*
>
> *Quiero que esto me dé como resultado 4, eso se reduce a que tengo 1-3x, que es la función, y quiero que me dé 4. Se traduce en resolver una ecuación en vez de estar buscando al tanteo cuál es ese resultado. ¿Sabemos despejar acá?*
>
> *Esto quedaría equivalente a 1-4=3x.*
>
> *Y esto quedaría -3=3x. Por lo tanto, x ¿cuánto tendría que ser?*
>
> *As: -1.*
>
> *Arturo: -1 ¿Cuál es la pre imagen del 4? -1. [375:1-377]*

En el extracto, así como en KoT-P-3, se observa que la ecuación está al servicio del trabajo que se realiza con la función. Arturo no solamente conoce el procedimiento para encontrar la pre imagen, sino que establece una conexión entre función y ecuación cuando señala que el trabajo con funciones se traduce a resolver ecuaciones.

> *Arturo: […] y cuando piden calcular una pre imagen, la función la igualas a ese valor y calculas el valor de x, igual que en una ecuación. Al final resuelven una ecuación. [608:2]*

En los extractos anteriores se puede observar el conocimiento de Arturo sobre una conexión auxiliar entre la función y la ecuación establecida mediante el procedimiento de cálculo de pre imágenes.

Como un caso particular de este tipo de conexión, Arturo muestra la relación que tiene la ecuación $f(x)=0$ con la búsqueda de los ceros de la función y los puntos en donde la gráfica de f corta al eje X.

> *Arturo: Esta función se hace 0 en ese valor y en ese valor [indica los dos puntos de corte de una función y el eje X].*
>
> *Esta de acá, las rectas, las funciones lineales y afines que hemos graficado, varias de ellas cortan al eje X ¿en más de un punto? Tomen una función lineal o afín. Esa función, su representación gráfica es una recta. Esa recta ¿puede cortar al eje X en más de un punto?*
>
> *A: ¿Al eje X? no, una vez no más.*
>
> *Arturo: Una vez nada más. Se hace 0 solo una vez. Vamos a poder relacionar lo que es función con lo que vimos de ecuaciones de primer grado, porque si la función la hago igual a 0, ¿cuál es la solución de esa ecuación?*
>
> *As: -3.*
>
> *Arturo: La solución de esa ecuación es -3, ¿x valía -3? ¿qué estamos sacando como conclusión?*
>
> *A: Que esas serían las soluciones.*
>
> *Arturo: ¿De qué?*
>
> *A: Que se puede sacar la imagen.*
>
> *Arturo: La recta, cuando contra al eje X, ese punto que me da ahí es la representación de la solución de la ecuación. [988-996]*

La ecuación lineal es un concepto (o herramienta) que Arturo utiliza para determinar los ceros de la función lineal y afín. En lo anterior se observa el conocimiento de Arturo sobre conexiones auxiliares entre función y ecuación, en el caso particular de determinar el punto de corte entre la gráfica de la función y el eje X.

Conexiones de Simplificación

Conocimiento sobre el tratamiento de expresiones algebraicas fraccionarias como similar al tratamiento de números racionales (KSM-S-1)

Arturo determina el recorrido de una función mediante la resolución de la ecuación $y=f(x)$. Para ello, despeja la variable independiente y determina las condiciones para la variable dependiente en la expresión resultante (ver KoT-P-4). En uno de estos procedimientos, resulta una expresión algebraica fraccionaria que Arturo vincula con el trabajo con números racionales representados en su forma fraccionaria.

Arturo: Para determinar el recorrido, como el recorrido es que tengo que y es la misma función, entonces decimos que y va a ser la función, pero la función ¿quién es? 2x/(x-1). [676:2]

Arturo: Igual que allá, el objetivo de esto es despejar x, pero x está en el denominador. Yo puedo multiplicar por el denominador, ¿no?

Si multiplico por el denominador (x-1), me va a quedar (x-1) multiplicando al y. Aquí, cuando multiplique ese (x-1) con ese (x-1), ¿qué pasa con el denominador cuando estoy multiplicando es el mismo número?

As: Se elimina.

Arturo: Se elimina, entonces me queda 2x.

A: ¿Por qué?

Arturo: Esto de aquí, a ver, quiero que les quede claro. Yo les voy a mostrar porque quiero que vean lo que yo voy a hacer al final. Este proceso todavía ustedes no lo pueden hacer.

Ustedes todavía no pueden hacer este proceso porque todavía no les he enseñado a hacer eso.

A: Pero (x-1) por (x-1) no es 1.

Arturo: Si y=2x/5, lo multiplicara por 5 te quedaría 5y=2x, ¿no?

A: Ah, se van, verdad.

Arturo: Aquí, lo que yo estoy haciendo es que el 5 es el (x-1), pero es de la misma forma. [682-690]

Arturo establece una relación entre el trabajo con expresiones algebraicas fraccionarias y el trabajo realizado con los números racionales en su forma fraccionaria. Se establece una relación estructural entre las expresiones $y=\frac{2x}{x-1}$ con $y=\frac{2x}{5}$. Asimismo, se relaciona el tratamiento dado a la primera igualdad con lo que se realiza al trabajar con números racionales, tema que ya fue estudiado por los estudiantes. Arturo señala que el denominador (x-1) se comporta como el número 5 en la expresión 2x/5, y que para realizar el despeje de la variable *x* es necesario multiplicar por 5 (el denominador). Esta relación que establece Arturo permite observar su conocimiento sobre una conexión de simplificación entre la expresión algebraica fraccionaria y lo números racionales expresados como fracción.

Otra conexión de simplificación entre los mismos conceptos se observa cuando Arturo debe ubicar el signo “-“ de una expresión algebraica fraccionaria.

Arturo: En la función g hago lo mismo, y = 1-5x para empezar a despejar. Vamos a llegar a que y -1 partido por -5 es igual a x.

Hay expresiones equivalentes a esa. Como no utilizamos usualmente que "el menos" esté en el denominador, generalmente lo escribimos en el numerador, o sea arriba. Si lo escribimos arriba me quedaría esa expresión, ¿no?

As: Si.

Arturo: Y ¿qué hace un menos adelante de un paréntesis?

A: Cambia los signos.

Arturo: Me queda -y +1 partido en 5. Otra forma que podría estar escrita la misma expresión es 1-y partido en 5.

¿Por qué estoy dando todas esas alternativas para esa? Porque en las pruebas que utilizo alternativas llegamos a eso, pero en la alternativa está escrito de otra forma, y esas dos expresiones son exactamente lo mismo. g^{-1} que va de Q en Q, va a llevar x en… puedo poner cualquiera de estas expresiones y va a estar correcta.

A: Pero ¿por qué de -5 pasamos a 5 positivo?

Arturo: Porque el menos no se lo agregué al denominador, lo puse arriba y es exactamente la misma expresión.

A: Pero en el último no lo puso allá arriba.

Arturo: Porque fue cada uno cambiando de lugar. Primero no usamos "menos" en el denominador. Recuerden que -a/b puede ser igual a que lo ponga en la parte de arriba. [1689:1-1697]

En este caso se observa el conocimiento de Arturo sobre una conexión de simplificación entre los mismos objetos anteriores, esta vez dada por el tratamiento y ubicación del signo “-“en la expresión *a/b*.

Conexiones Transversales

Conocimiento sobre la conexión entre la función afín y la recta euclidiana (KSM-T-1)

En KoT-P-4, KoT-P-5 y KoT-R-7 se muestra el conocimiento de Arturo sobre representación gráfica de la función lineal y afín. Para construir esta representación señala a sus estudiantes que solo es necesario ubicar dos puntos en el plano para obtener la recta que representa a la función. Esta justificación se basa en argumentos de la Geometría euclidiana, dominio diferente al que se presenta el concepto de función, posicionado en el Análisis. Arturo relaciona la función afín y la recta euclidiana como objetos de dominios diferentes, pero que tienen una representación compartida. Arturo evidencia esta conexión al relacionar la función y la recta mediante su representación cartesiana y los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana.

Arturo: Cuando tenemos un gráfico, donde aquí tenemos el eje X y el eje Y, y suponemos… vamos a graficar la función f(x)=x+3. ¿se acuerdan qué teníamos que hacer para graficar esa función? ¿qué teníamos que hacer para graficar la función?

A: Darle un valor a x.

Arturo: ¿Cuántos necesitábamos como mínimo?

As: 2.

Arturo: Y ¿por qué dos?

A: Porque son dos puntos.

A: Para que se cruzaran.

A: Para que se pueda formar la figura.

Arturo: ¿Cuál es el fundamento de por qué necesitábamos por lo menos dos puntos?

A: Porque son dos rectas que se tienen que cruzar.

A: Para formar una recta.

A: Para que haya dos puntos.

A: Para formar una recta.

A: ¿Para tener dos casos?

A: Para formar una recta, porque o sino...

Arturo: Porque habíamos dicho que…

A: Con dos puntos se forma una recta.

Arturo: Por dos puntos pasa una única recta o una recta tiene al menos dos puntos. Con dos valores para x me basta. ¿Qué valores son los mejores para reemplazar? [750-767]

Arturo muestra conocer el axioma de la existencia de una única recta euclidiana que pasa por dos puntos dados. Arturo utiliza este conocimiento como fundamento para seleccionar solo dos puntos y con ellos construir la representación cartesiana de la función afín.

En la entrevista, Arturo es consultado sobre esta fundamentación y si reconocía este fundamento como propio de la función.

E: Cuando graficas una función lineal o afín dices que solo es necesario dos pares.

Arturo: Cuando ya se conoce la función y qué es lo que genera, decimos que su representación gráfica es una línea recta. Ahí me voy a los axiomas de geometría: Por dos puntos pasa una única recta. Entonces, si por dos puntos pasa una única recta, yo puedo tomar eso para solamente graficar dos pares.

E: ¿Eso sería en un contexto que es propio de la función o está fuera de ese tema?

Arturo: No es propio de la función, es una característica de la recta a nivel geométrico, más euclidiano que analítico. El contexto que yo doy es ese.

Hemos pasado por graficar varios puntos, pero pensando en que a ellos yo ya les había hablado de axiomática. Con ese curso siempre hablé de los axiomas en geometría. Era algo que yo podía hacer con ellos. Bajo ese contexto, ese axioma nos permitía hacer eso. [Ent2, 95-98:2]

De lo anterior, se observa que Arturo conoce una conexión entre la función afín y la recta euclidiana. Esta conexión está dada por el uso de los axiomas de incidencia como justificación para la construcción de la representación gráfica de la función. Se trata de una conexión entre dos conceptos en diferentes dominios: la función en el dominio del Análisis y la recta euclidiana en el dominio de la Geometría, pero que comparten cualidades; además de que ambos conceptos pueden ser representados como una línea recta, tanto la función como la recta euclidiana admiten una conceptualización como conjunto: la recta como conjunto de puntos y la función como conjunto de pares ordenados del producto cartesiano.

> *E: Otra relación de la función que se plantea es con la recta euclidiana. Tú recurres a los axiomas de la geometría euclidiana.*
>
> *Arturo: Eso es para justificar la gráfica de la función lineal o afín. Ese es el fundamento de porque pasar de graficar varios pares ordenados a quedarnos solo con dos, eso es suficiente.*
>
> *E: ¿Cómo estableces la relación entre la recta euclidiana y la función afín?*
>
> *Arturo: Para las clases, solo con la axiomática, porque es lo que necesito. No he pensado otra forma. [Ent2 201-204]*

Arturo identifica esta relación como justificación para construir la representación gráfica de la función.

Conexiones de Complejización

Este tipo de conexiones no se evidencia durante la observación de clases de Arturo. Cuando se le pregunta al profesor sobre la complejización en el estudio de la función, este se refiere a las aplicaciones de las funciones:

> *E: ¿Podría proyectarse el concepto de función proyectarse a algo más complejo?*
>
> *Arturo: Si. Cualquier tema lo puedes hacer más difícil si le pones un contexto de aplicación. [Ent2 137-138]*

No podemos señalar que contamos con evidencias de conocimiento sobre conexiones de complejización durante la enseñanza del concepto de función.

La tabla 8 reúne los indicadores de conocimiento evidenciados para el subdominio KSM.

Tabla 8: Síntesis de indicadores para el KSM

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la estructura de las matemáticas - KSM	Conexiones Auxiliares	KSM-A-1	la ecuación lineal para la determinación de pre imágenes
	Conexiones Transversales	KSM-T-1	la conexión entre la función afín y la recta euclidiana
	Conexiones de Simplificación	KSM-S-1	El tratamiento de expresiones algebraicas fraccionaras como similar al tratamiento de números racionales
	Conexiones de Complejización		No se observan

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

El conocimiento sobre las prácticas en matemáticas se observa cuando el profesor muestra cómo se produce, explora o comunica el conocimiento matemático. Las evidencias proporcionadas por Arturo al respecto nos han permitido agruparlas de acuerdo a las formas de comunicar ideas matemáticas, formas de validar, sobre la generalización y la modelación, esto nos pueda ayudar a avanzar en la categorización de este subdominio.

Conocimiento sobre el papel de los cuantificadores universal y existencial y la simbología de conjuntos en el concepto de función (KPM-C-1)

En el KPM se pone de relieve el papel que el profesor le asigna a estos símbolos en la comunicación del concepto de función y las relaciones entre los elementos involucrados, particularmente las que son dadas por el uso de cuantificadores y el lenguaje de conjuntos. En la primera clase, por ejemplo, Arturo recapitula contenidos sobre el plano cartesiano y el uso de simbología de conjuntos y cuantificadores que le serán útiles durante el estudio de la función. Para cada símbolo dibujado Arturo da su traducción al lenguaje natural y, en algunos casos, complementa con una explicación.

> *Arturo: A ver. Este de aquí significaba "pertenece", este de acá significa "para todo", este de acá significa que "existe", y este es el que estaban diciendo que era el "por lo tanto".*
>
> *Hay uno que es cuando al "existe" le ponemos ese símbolo [signo de exclamación!] significa que existe un único. ¿Cuál va a ser el contexto con esto?, para que entendamos no solamente el nombre de qué significa, sino que podamos comprender en qué contexto lo utilizamos. Por ejemplo, el "para todo", si tomamos como conjunto todo el primero medio, todos ustedes cumplen con una condición, todos están en primero medio, ahora, ¿existe alguien que se llame María?*
>
> *A: Dos.*
>
> *Arturo: Existen, ¿cierto? Porque hay, pero si yo dijera ¿existe alguien que se llame Sandra en este conjunto?... no! Recién dije que existía alguien que se llamara María, pero si yo digo ¿existe alguien que se llame Tomás?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: ¿Y es único?, ¿hay otro Tomás? No, entonces esa es la diferencia entre el "existe" y el "existe un único". Existía y existían dos Marías, pero existe un único Tomás, ahí está la diferencia. Es claro que usted es único. Nosotros podemos hacer conjuntos, hicimos recién un conjunto con todos ustedes, es una colección y cuando decimos cómo relacionamos el "pertenece" con un conjunto. Él es un elemento [se refiere a uno de los estudiantes de la clase] y es un elemento de este conjunto, por lo tanto, él pertenece a primero medio. Yo, como elemento ¿pertenezco a este conjunto, primero medio?*
>
> *A: No.*
>
> *Arturo: No. Ahí es cuando ponemos "pertenece" y el "no pertenece". [25-31:1]*

En el extracto se observa, además del conocimiento de Arturo sobre el significado de los símbolos, su conocimiento sobre el uso en la construcción de enunciados con estructura formal de los cuales se puede saber su valor de verdad. Arturo destaca el papel del cuantificador existencial y su variación (existe un único) en estas proposiciones. En ambos casos, Arturo elabora proposiciones lógicas basadas en el contexto de la sala de clases, usando el lenguaje formal, así como al grupo de estudiantes como conjunto de referencia y los cuantificadores. Dichas proposiciones se pueden comprender también como interpretación matemática (*matematización*) del contexto de la sala de clases. Asimismo, se observa el uso de este lenguaje formal al expresar la pertenencia o no de un elemento a un conjunto mediante el símbolo correspondiente.

En la entrevista, se consulta a Arturo por la inclusión de estos símbolos en su clase, a lo que responde:

> *E: ¿Por qué mencionas los cuantificadores?*
>
> *Arturo: Los cuantificadores, porque hago la explicación simple, luego hago una explicación más formal matemática, tratando de hacer la comparación entre...*
>
> *Siempre hago una traducción del lenguaje formal matemático a un lenguaje simple que ellos lo puedan comprender. En esta ocasión, yo partí con un lenguaje simple y después lo llevé a un lenguaje matemático. ¿Cómo decíamos eso en matemática?*
>
> *E: El lenguaje simple, ¿qué es?*
>
> *Arturo: La traducción del concepto, la traducción de la definición matemática. [Ent1 5-8:1]*

Arturo atribuye una gran importancia al lenguaje formal para referirse al concepto matemático. La explicación simple, por su parte, se refiere al uso del lenguaje común para expresar la misma idea. El uso de la simbología corresponde a lo que Arturo conoce como comunicación formal de la matemática.

En (KoT-D-1) se evidenció que Arturo conoce una definición de función y que la expone utilizando lenguaje natural y lenguaje simbólico, éste último expresado en el siguiente extracto.

> *Arturo: Esto también lo voy a poner como observación. La definición de función. En esta parte necesito que me presten atención. Voy a escribir en lenguaje matemático la definición de función, esa que hemos repetido toda la clase de que " a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada" yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [203:2]*

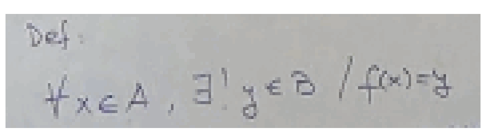


Imagen 24. Definición de función de manera formal

La Imagen 24 corresponde a la intervención de Arturo en que traduce la definición del concepto de función del lenguaje natural al simbólico para comunicar la formalidad de la definición. En esta imagen (Imagen 24) se incluye simbología de cuantificadores, notaciones de conjuntos y ecuaciones funcionales que expresan la definición de función.

Esta traducción y el tratamiento dado a los símbolos empleados permite observar que Arturo conoce el papel que juegan estos símbolos al comunicar la definición de función. Asimismo, Arturo vincula las propiedades de exhaustividad en el dominio con el cuantificador universal y la propiedad de unicidad de imagen con el cuantificador existencial, resaltando su rol dentro de la definición. En este sentido, el conocimiento sobre el cuantificador universal también puede ser observado cuando es utilizado para expresar la propiedad de inyectividad de una función, como parte del siguiente indicador (KPM-C-2).

Lo incluido en este indicador muestra conocimiento de Arturo sobre los significados y el rol de los cuantificadores universal y existencial en la definición del concepto de función y en la construcción de proposiciones lógicas.

Conocimiento del papel de las proposiciones y conectores lógicos en la comunicación de conceptos asociados a la función (KPM-C-2)

La equivalencia (⟺) y la implicancia (⇒) son dos conectores que se identifican en las intervenciones de Arturo, al menos, desde dos formas diferentes; ya sea porque las utiliza al definir conceptos, pues indica cuál es el rol de ellos en el lenguaje formal empleado, o al estructurar demostraciones de propiedades. Esto último se aborda en el siguiente indicador.

Respecto de las definiciones, Arturo utiliza la equivalencia y la implicancia al momento de dar la definición de la inyectividad de una función. El profesor aclara lo que significa la equivalencia de las proposiciones involucradas y cuál es su rol en dicha definición.

> *Arturo: Una función f se llama inyectiva si y solo si cumple con las condiciones que yo voy a nombrar ahora.*
>
> *A: Solo cumple.*
>
> *Arturo: Mire, le voy a explicar bien.*
>
> *A: Solo si cumple... suena mejor.*
>
> *Arturo: [escribe* $\forall x_1, x_2 \in Dom\, f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$*]*

Imagen 25. Definición de inyectividad de manera formal

> *Estamos diciendo que una función se llama inyectiva si y solo sí. ¿Por qué se dice si y solo si? Porque esto que está aquí dice "f es inyectiva, entonces tendrá que pasar esto", si pasa eso, puedo decir también que es inyectiva. Si y solo si significa que lo que yo estoy diciendo puede ocurrir en ambas direcciones. [1100 – 1104:2]*

Esta intervención permite observar el conocimiento de Arturo sobre el significado de la equivalencia y el papel que tiene en la comunicación de ideas matemáticas, particularmente en la definición de la inyectividad. Del mismo modo, cuando Arturo explica la definición de biyectividad de la función, lo hace mediante la aclaración del significado de la equivalencia de proposiciones lógicas.

> *Arturo: def: una función f de A en B (f: A-->B) tiene su correspondiente función inversa (f^{-1}: B-->A) si y solo si f es biyectiva.*
>
> *Leemos la definición. Tenemos una función f que va de A en B, va a tener una función inversa si y solo si la función es biyectiva, o sea que, si la función tiene su inversa, quiere decir que la función es biyectiva. Si yo sé que la función es biyectiva, yo puedo asegurar que esa función tiene inversa, eso significa el sí y solo sí. [1544:1-2]*

Por otro lado, en la definición de inyectividad, Arturo incluye la implicancia como conector que da estructura a la propiedad.

> *Arturo: Aquí, detrás de esto [apunta a la definición de inyectividad] está la lógica matemática. Aquí significa que tengo una proposición implica a otra y una implicancia, les voy a contar... puede ser verdadera o puede ser falsa. Lo que nos interesa es que eso sea verdadero, porque queremos ver cuándo esto es realmente una función inyectiva.*
>
> *¿Cuándo esto va a ser verdadero? Esto de aquí [f(x)=f(y)] podría ser verdadero o falso. Para poder demostrarlo y hacerlo un poco más simple nosotros nos vamos a quedar con la idea de que si asumimos esto [f(x)=f(y)] como verdadero, entonces tendríamos que llegar a probar que esto [x=y] también se cumple o fuese verdadero.*
>
> *Esa es la idea como resumen de lo que vamos a hacer, sino tendría que estar explicando los valores de verdad del "p implica q".*
>
> *Esto [f(x)=f(y)] es una proposición y esta [x=y] es otra, por eso una proposición implica a la otra, por eso dije p implica q. [1141:6 – 1141:8]*

De lo anterior se puede observar el conocimiento de Arturo sobre el papel de la implicancia en la estructura lógica de la inyectividad de una función y de la equivalencia en la definición de biyectividad. También, el extracto muestra un indicio de conocimiento sobre la demostración de la inyectividad, indicador que se describe más adelante (KPM-V-2).

Conocimiento sobre el rol de la definición de función en la verificación y elaboración de relaciones funcionales (KPM-V-1)

La construcción de relaciones funcionales forma parte de la ejemplificación sobre la función que proporciona Arturo y con ello de la comunicación del concepto de función. Para elaborar estos ejemplos, Arturo recurre a su conocimiento sobre la definición de función (KoT-D-1) y el rol de los cuantificadores (KPM-C-1) para proponer relaciones entre conjuntos que verifiquen las propiedades de la función. En esta interacción de conocimientos es posible observar que Arturo conoce cuál es el rol de la definición al ejemplificar o validar una correspondencia como función.

> *Arturo: Vamos a ver un ejemplo con diagramas. Voy a considerar un conjunto A, que va a estar formado por a, b y c, y un conjunto B que va a estar formado por el 0, 1, 2 y 3. Voy a definir funciones que van del conjunto A en el conjunto B. Vamos a considerar funciones de A en B. Por ejemplo, yo voy a inventar una y ustedes me van a ayudar a inventar las otras.*

La primera función, yo tengo los conjuntos, esos conjuntos o los voy a poner los elementos del conjunto A. ¿A quiénes tendría que poner acá?

A: a, b y c.

Arturo: a, b y c. Y este va a ser el conjunto B, ¿a quienes tendría que poner acá?

A: Al 0, 1, 2, 3.

Arturo: Al 0,1,2,3. Entonces yo voy a hacer una función que va a llevar elementos de A en B, por ejemplo, al a lo voy a mandar a al 1, al b al 2 y el c al 3. ¿Cumple con esta condición? " a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada".

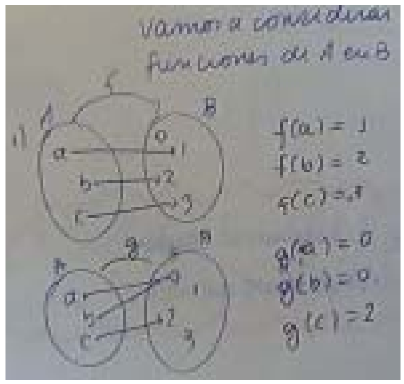


Imagen 26. Ejemplos de función y cálculo de imagen

A: Si.

Arturo: Vamos a ir viendo la diferencia. Yo hice una combinación, podríamos haber hecho otra, ahí vamos a ir inventando, pero ¿cumple con que a cada elemento del aquí [A], le corresponde un único en el conjunto de llegada, ¿solo uno? [señala la definición] a éste tiene que llegar a parar a uno solo, por eso subrayé que ese elemento del conjunto en que va aparar tiene que ser único, porque si no sería una función. Dijimos que una función es una correspondencia que tenía que cumplir con estas condiciones, si no las cumple no puedo llamarle función, entonces esto sería una función. [80:2-86]

En la validación del ejemplo como función, Arturo chequea las propiedades de unicidad y exhaustividad incluidas en la definición de función. De este modo, se observa que Arturo conoce que las propiedades incluidas en la definición sirven de criterios para determinar si la correspondencia es o no una función. El conocimiento de Arturo sobre el rol de los cuantificadores (KPM-C-1) en esta validación está implícito en la pregunta *¿cumple con que* ***a cada*** *elemento del aquí [A], le corresponde un único en el conjunto de llegada, ¿****solo uno***? Así, el rol que Arturo asigna a la definición de función es de ser un criterio de verificación exhaustiva de propiedades, es decir, todas las propiedades incluidas en la definición deben cumplirse para considerar la relación en cuestión como una función. En ese sentido, la construcción de los ejemplos y no ejemplos de funciones considera este criterio de verificación asignado a la definición, lo que se observa en el extracto anterior como parte del conocimiento de Arturo.

Conocimiento sobre las características de la demostración de una proposición del tipo p=>q (KPM-V-2)

Para diferenciar este indicador del anterior, se ha considerado el doble rol que logramos observar en las intervenciones de Arturo. Por una parte, está el conocimiento de los conectores como organizadores de las proposiciones lógicas, por ejemplo, saber qué significan y cuál es su rol en la estructura de las proposiciones para comunicar una idea matemática. En el indicador anterior se muestra que Arturo conoce el "sí y solo si" como implicancia bidireccional que permite identificar tesis e hipótesis según sea el caso.

Por otra parte, se puede observar el conocimiento de Arturo sobre los conectores implicancia y equivalencia como parte del lenguaje formal (lógica proposicional) y sobre su tratamiento dentro de la lógica proposicional como parte de la práctica matemática de demostrar. Por ejemplo, conocer que la equivalencia debe probarse en ambas direcciones (así como la igualdad de conjuntos como una doble contención) o que la demostración de una implicancia debe considerar los casos en que el antecedente es verdadero y cuando el antecedente es falso. Esto último da origen al presente indicador.

En el extracto [1141:6-1141:8] presentado en KPM-C-2 se pueden observar indicios de que Arturo conoce las características que deberá tener la demostración de una proposición en términos de la implicancia. Cuando Arturo fue consultado, en la entrevista, sobre estas características, respondió:

> *E: En general en matemáticas se dan varios teoremas y propiedades con la estructura de implicancia. Esa forma de demostrar ¿se aplica a todos estos tipos de teoremas para demostrar la implicancia?*
>
> *Arturo: No. No es la única forma de demostrarlo. Por ejemplo, demostrar la negación.*
>
> *Nunca va a haber una forma de demostración; hay unas que son más clásicas, más simples. Depende de lo que quieras demostrar. A veces no hay "como agarrarte" en esa forma directa, entonces hay que buscar otra forma de demostrar. Si me preguntas, no hay una única forma.*
>
> *E: ¿Qué otras formas conoces como demostraciones alternativas?*
>
> *Arturo: Depende del problema. Por ejemplo, en geometría hay muchos teoremas en que claramente hay una implicancia, demostrar una característica directamente desde los antecedentes no se puede, entonces tú demuestras otra cosa. La negación de eso. Por ejemplo, para la unicidad es típica. Si no se puede directo, se demuestra lo otro.*
>
> *E: ¿Algo menos estructurados como recurrir a dibujos, esquemas o casos particulares?*
>
> *Arturo: Demostrar por casos particulares no estaría siendo válido desde el punto de vista matemático, no cómo yo podría hacer mi clase.*
>
> *E: ¿Y los contraejemplos?*
>
> *Arturo: Los contraejemplos son en el caso de que la proposición sea falsa. [Ent2 185-190]*

Se observa conocimiento de Arturo sobre las formas de demostrar una proposición de la forma $p \Rightarrow q$. El profesor señala que las alternativas son la demostración directa o la demostración indirecta a partir de la negación de la proposición, aludiendo al método del absurdo. Agrega conocer como una práctica habitual el uso de este método en la demostración de teoremas referidos a la unicidad de un elemento que cumpla cierta propiedad.

Para Arturo, el ejemplo no es validado en el caso de demostraciones formales, sin embargo, reconoce que los contra ejemplos permiten una justificación matemáticamente aceptable en ciertos casos. Lo anterior da cuenta de un conocimiento general sobre las demostraciones de proposiciones bajo la estructura de una implicancia.

Arturo también muestra conocimiento sobre los casos que se deben considerar al momento de demostrar una implicancia, particularmente, en el caso de la inyectividad.

> *E: Cuando estás haciendo la demostración de la inyectividad dices que para poder demostrar la inyectividad, usando palabras simples y "simplificando varios detalles que hay detrás", se asume que se cumple esa condición primera. ¿Por qué se asume como verdadera? Y ¿cuáles serían esos detalles que hay detrás?*
>
> *Arturo: Primero, los valores de verdad de la implicancia. En la inyectividad hay una estructura lógica que ellos no conocen.*
>
> *Entonces, la implicancia puede ser verdadera no solo en el caso en que verdadero implica verdadero, porque si fuese falso el antecedente, la implicancia sería verdadera igual. Por eso se asumen verdadero, porque la otra opción de que sea falso el antecedente ya está lista, ya es verdadera y se cumpliría. Por eso el proceso de la demostración se hace con la otra parte, suponiendo el antecedente como verdadero. [Ent2 183-184]*

En esta intervención, se observa el conocimiento de Arturo sobre las combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones que componen la implicancia. Arturo identifica cuál de estas combinaciones es la que se busca cumplir con la demostración, lo que corresponde a su conocimiento sobre la lógica proposicional aplicada a la demostración de la implicancia.

Conocimiento sobre la demostración de la inyectividad de una función (KPM-V-3)

Una situación particular a lo descrito en el indicador anterior ocurre en la demostración de la inyectividad de una función afín.

> *Arturo: ¿Cómo yo pruebo si esa función es inyectiva o no?*
>
> *A: Por el gráfico, ¿no?*
>
> *Arturo: ¿Qué pasa si no puedo recurrir al gráfico? Esa es la idea.*
>
> *A: Una ecuación.*
>
> *A: ¿Una pre imagen?*

Arturo: Lo que nosotros vamos a hacer es recurrir a esto que está aquí [la definición de inyectividad]. Para poder probar, vamos a tomar cualquier par de elementos del dominio de esta función. ¿Cuál es el dominio de esta función?

A: Todos los racionales.

Arturo: Todos los racionales. Vamos a tomar cualquier par de números racionales y vamos a asumir que la imagen de esos dos elementos es la misma. Podemos tomar a y b o, como pusimos ahí, x_1 y x_2, da lo mismo. Son dos elementos cualesquiera del dominio, porque eso lo tomo como cualquiera, porque tengo tantos números racionales para elegir que, para generalizarlo, tomo dos elementos cualesquiera de ellos.

Vamos a asumir que la imagen de ese elemento sea igual a la imagen de ese, vamos a asumir que eso [f(x)=f(y)] es verdadero, o sea, se cumple la igualdad.

A: Pero si las imágenes son iguales, no sería inyectiva.

Arturo: Si con esto, y dada esta función, yo llego a concluir que x_1 es exactamente igual a x_2 yo puedo decir que la función es inyectiva. [1143 - 1152]

En este caso, además de poder observa el conocimiento de la estructura de la demostración al señalar el supuesto que el antecedente es verdadero y que se debe confirmar la tesis, se observa también que el cuantificador universal es mostrado con un rol clave para concretar la demostración. Este conocimiento se manifiesta cuando Arturo dice "cualquier par", "dos elementos cualesquiera del dominio" y "para generalizarlo, tomo dos elementos cualesquiera de ellos". Con estas intervenciones se observa el conocimiento de Arturo sobre el carácter general que debe tener la demostración de la inyectividad, la generalidad del caso estudiando y el rol del cuantificado en la demostración.

Cuando se le consulta a Arturo por esta generalización, señala:

E: ¿Es una forma de generalizar o es la forma en que se debe hacer o aplicar esa definición de inyectividad?

Arturo: Matemáticamente, en esa proposición hay un cuantificador y una implicancia.

Como es un par cualquiera, si yo uso otro par, va a pasar exactamente lo mismo, porque con cualquier par de elementos que yo me tome del dominio, por las características de la función, vamos a tener las mismas consecuencias.

E: ¿Y si ese par se tomase como números fijos, por ejemplo, el 1 y el 2?

Arturo: Lo que va a pasar es que puede ser que sea verdadera f(1) igual a f(2), o que sea falsa. Ahí entra a jugar la implicancia. Si es falsa, la implicancia siempre va a ser verdadera, entonces ya está listo, está probado. Si es verdadera, hay que probar que 1=2.

Ahí ya estas tomando un caso particular. Estarías ejemplificando y no demostrando. No puedes demostrar, a menos que utilices un contraejemplo, ahí utilizas algo numérico, pero si quieres demostrarlo, no te sirven los números.

E: Esos x_1 y x_2, ¿no son cualquiera?

> *Arturo: Tomas dos elementos cualesquiera del dominio tal que cumplan una condición. Que las imágenes sean iguales. Ahí está el juego. Tomar dos elementos cualesquiera, pero que cumplan con esa condición. [Ent2 175-180:2]*

En la respuesta, Arturo confirma el conocimiento sobre la estructura de la propiedad que demuestra (implicancia), la identificación del cuantificador y la elección arbitraria de los elementos del dominio. Arturo conoce que esta elección está condicionada por la implicancia y por lo que se desea probar, dando cuenta de su conocimiento sobre la demostración de una proposición del tipo $p \Rightarrow q$. Cuando el profesor dice que f(1)=f(2) puede ser una proposición verdadera o falsa, hace referencia a su conocimiento sobre las combinaciones de los valores de verdad que resultan útiles en la demostración de la implicancia.

Conocimiento sobre la demostración matemática y la verificación como prácticas formales (KPM-V-4)

En el contexto del conocimiento sobre las demostraciones y los mecanismos para validar relaciones como funcionales, Arturo en la entrevista señala la diferenciación que hace entre demostración y justificación en términos de la formalidad.

> *E: Verificar si algo es o no una función mediante la comprobación de las propiedades que dice la función, ¿es una comprobación o una demostración?*
>
> *Arturo: Es una comprobación. En general, en el colegio no hago demostraciones como tal. Hago justificaciones. Le quito lo formal de la demostración. Incluso en contexto de primer año de universidad no hago una demostración tan formal, formal matemática.*
>
> *E: ¿Qué significa eso?*
>
> *Arturo: Con hipótesis, con tesis y una estructura lógica matemática. Al final de cuentas pierde el objetivo en un contexto de colegio. O en un contexto de primer año que no estudia matemática. El objetivo de ellos es otro. Necesitan que justifiques el por qué, pero no necesitan que les "tires" la demostración matemática, y que también son demostraciones… Que yo le llame justificación es otra cosa.*
>
> *E: ¿Hay varias formas de demostrar si algo es o no una función?*
>
> *Arturo: Yo creo que esto es una forma de demostrar.*
>
> *Esto es una comprobación de si es que se entendió el concepto. [Ent2 155-160:2]*

Se observa que Arturo conoce la demostración matemática como un procedimiento y resultado formal, en la que se deben distinguir tres elementos claves: hipótesis, tesis y la estructura lógica que tiene el enunciado y el desarrollo de la demostración. En este caso, para Arturo el contexto escolar o universitario condiciona la exposición de conocimiento sobre demostraciones y la realización de demostraciones formales. En su lugar, el profesor plantea lo que para él son demostraciones menos estructuradas y que sirven de fundamento para el tema de estudio. Para Arturo estos procedimientos son conocidos como justificaciones.

Conocimiento sobre la generalización en el trabajo algebraico con funciones (KPM-G-1)

Una de las prácticas habituales en matemáticas es la identificación de patrones, regularidades y el establecimiento de generalizaciones. Arturo muestra que estos procesos de generalización están presentes en el trabajo con funciones mediante la búsqueda de procesos algebraicos para la determinación de pre imágenes y funciones inversas.

En el caso de la determinación de pre imagen, analizado ya en (KoT-P-3) y en (KSM-A-1), Arturo señala:

> *Arturo: ¿Podemos encontrar una forma de encontrar la pre imagen sin estar jugando al "achunte"?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: Si. Lo que queremos es, por ejemplo, que esto [la imagen de la función] nos diera 5, y si esto quiero que me diera 5, se convierte en una ecuación. Para eso vimos ecuaciones e inecuaciones antes. [367:2-369]*

En el caso de la búsqueda de la inversa, analizado en (KoT-P-10), Arturo señala:

> *Arturo: Se fijaron que, si combino de alguna forma las funciones, ya no es tan evidente encontrar las inversas. ¿Cómo optimizamos ese proceso para encontrarlas siempre?*
>
> *Lo que voy a mostrar es cómo hacer un proceso algebraico para no andarlas buscando al tanteo, porque eso fue lo que hicimos recién; probar y cuál nos funcionaba, que es válido, pero necesito un proceso que haga lo mismo y que me demore menos en hacerlo. [1630:2-4]*
>
> *Arturo: En el ejercicio 1, recuerden que tenemos dos formas de encontrar la inversa. Tenemos la forma de hacerlo por diagrama e ir viendo cómo se comporta la función, aunque hay una alternativa algebraica que es más rápida. La alternativa algebraica, ya que todos hicieron esa, vamos a revisarla. Igualo la función a y, y luego despejo x, donde va a quedar una expresión equivalente a y+5 partido por 2 [1685:2]*

De lo anterior, se observa el conocimiento de Arturo sobre la generalización cuando Arturo evidencia la poca eficiencia de técnicas como ensayo y error (tanteo) por parte de los estudiantes en el cálculo de imágenes y pre imágenes o en la determinación de la función inversa. Arturo orienta el trabajo hacia la resolución de la ecuación $y=f(x)$ como generalización de ambos procesos.

Conocimiento sobre la modelización de situaciones a través de funciones (KPM-M-1)

Pese a que Arturo no manifiesta conocimiento sobre la fenomenología de la función durante las sesiones de clase, revela en la entrevista que conoce situaciones que son modeladas por funciones (KoT-F-1). Además de este conocimiento, también revela un conocimiento respecto a lo que es la modelación y el rol de las funciones en esta actividad.

Arturo: ¿Para qué me sirve funciones? Bueno, está todo modelado con funciones. Un montón de cosas que se modelan. Ese es el objetivo. De hecho, es el rol principal por el que se ve funciones con el tema de modelación.

E: ¿Cómo entiendes la modelación?

Arturo: Situaciones, tratando de hacerlo más general...

E: ¿Qué sería, por ejemplo, modelar?

Arturo: Ver gráficamente el comportamiento de ese "algo" y ver si puedo asociar ese comportamiento a una expresión que me de todos eso datos.

E: ¿Una expresión algebraica?

Arturo: Si, es una expresión que me genera el comportamiento de algo o de una determinada situación. Es que son tantos tipos de funciones y cada una modela distintas cosas. Es muy amplio. Si tú quieres saber cómo se comporta el crecimiento de cierto "bicho", puede estar asociado a un cierto tipo de función.

Este tema de modelamiento ni siquiera es que el comportamiento de ese bichito sea idéntico, o sea se comporte como esa función, sino que sea similar a ese comportamiento de lo que te genera la función. [Ent1 16:5- 22:4]

Se observa que Arturo entiende la modelación como la adaptación de funciones para expresar, de modo general, situaciones mediante algunas expresiones analíticas. El rol de las funciones es que algunas de sus imágenes y pre imágenes resultan ser valores reales de esas situaciones.

La tabla 9 reúne los indicadores de conocimiento identificados para el subdominio KPM atendiendo a un sistema de categorías tentativas para el subdominio.

Tabla 9: Síntesis de indicadores para el KPM

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la práctica matemática - KPM	*Comunicación y lenguaje	KPM-C-1	el papel de los cuantificadores universal y existencial y la simbología de conjuntos en el concepto de función
		KPM-C-2	el papel de las proposiciones y conectores lógicos en la comunicación de conceptos asociados a la función
	*Formas de validación	KPM-V-1	el rol de la definición de función en la verificación y elaboración de relaciones funcionales
		KPM-V-2	las características de la demostración de una proposición del tipo p=>q
		KPM-V-3	la demostración de la inyectividad de una función

	KPM-V4	la demostración matemática y la verificación como prácticas formales
*Generalización	KPM-G-1	la generalización en el trabajo algebraico con funciones
*Modelación	KPM-M-1	la modelación de situaciones a través de funciones

*Las categorías corresponden a una propuesta basada en la agrupación de las evidencias del caso estudiado y no pretende ser exhaustiva. Las dos últimas pueden agruparse en una categoría asociada a las estrategias sobre la resolución de problemas en matemáticas.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Teorías de enseñanza

El conocimiento de teorías de enseñanza permite al profesor, entre otros, organizar sus clases y dar sentido a esta organización, así como determinar las potencialidades y limitaciones de sus estrategias de enseñanza. En esta categoría se incluye el conocimiento que responde a la pregunta ¿Cómo se enseña el concepto de función?

Conocimiento sobre la organización de las definiciones, representaciones, procedimientos, ejemplos y tareas como teoría personal de enseñanza del concepto de función (KMT-T-1)

Un aspecto que se identifica en la organización de las sesiones de clases es aquel que tiene relación con la presentación de las definiciones, representaciones, ejemplos y tareas. Las sesiones de clases que propone Arturo se desarrollan siguiendo la siguiente estructura: se evocan las ideas claves ya estudiadas, se enuncia la definición de un nuevo concepto, se proponen ejemplos para hacer comprensible la definición y comprender los alcances del objeto recién definido, se muestran los procedimientos asociados (validación de funciones, cálculo de imágenes o pre imágenes, construcción de la representación, determinación de dominio, recorrido e inyectividad y el cálculo de inversa) y, finalmente, se proponen tareas directamente relacionadas a los objetos y ejemplos dados.

Esta organización se observa al analizar las sesiones de clases de manera global. Resultan escasas las intervenciones de Arturo en donde se exprese el conocimiento sobre esta estructuración. Solo se cuenta con el siguiente extracto de clase que da cuenta de esta organización.

> *Arturo: Vamos a definir hoy lo que es el dominio y recorrido de una función. Ahora les voy a dar el concepto y de ahí vamos a hacer ejercicios. [432]*

Cuando se le pide caracterizar sus clases, Arturo responde:

> *E: Pensando en tus clases ¿Cómo describirías tu forma de enseñar el concepto de función?*
>
> *Arturo: Como lo hice es una modificación de cómo lo hacía antes. Antes explicaba antes de definirlo. En esas clases, ahí lo definía con ellos. Fue más significativo en estas clases.*
>
> *Lo definiría como proceso inverso, no el tradicional. Traté de que no en todo fuera definición y ejemplo, sino que dar la definición, las características, pero construirla simplificada para que ellos entendieran y luego dar la definición más formal con palabras y luego la definición matemática. En varias de las cosas lo hice así. [Ent2 205-206]*

El cambio en la enseñanza que indica Arturo se ve reflejado en la enseñanza de la inyectividad y de la epiyectividad de la función, donde caracteriza estas propiedades y luego da la definición formal, sin embargo, pese a esa modificación, Arturo mantiene la forma de enseñar a lo largo de todo el estudio de la función que se registró.

Se observa que Arturo, con base en las modificaciones que realiza a la exposición de los contenidos producto de su experiencia enseñando el concepto de función, genera una teoría personal de enseñanza de la función consistente en caracterizar el concepto antes de dar su definición formal y luego incluir ejemplos y tareas.

Recursos materiales y virtuales

El conocimiento en esta categoría responde a la pregunta ¿Qué recursos puede utilizar el profesor para enseñar la función? Y ¿cuáles son los aportes de estos recursos a la enseñanza de la función?

Conocimiento sobre la pizarra y las cuadrículas como recursos para graficar funciones (KMT-R-1)

Al representar las funciones y al interpretar gráficamente el punto de corte de la gráfica de la función con el eje X, Arturo muestra la importancia de contar con ejes bien graduados para obtener conclusiones adecuadas respecto a la función. En este proceso de graficar, Arturo da importancia también al uso de la cuadrícula en las hojas de los cuadernos de sus estudiantes.

> *Arturo: Por eso, porque mis dibujos no están bien graduados. Para ustedes va a ser fácil porque las distancias van a ser todas iguales [los cuadros del cuaderno]. Está claro que aquí mis distancias no son todas iguales porque estoy dibujando en papel blanco. [824]*

El papel blanco que señala Arturo corresponde a la pizarra de la sala. La representación gráfica que produce es un dibujo a mano alzada en el que se incluyen algunos valores de la función. El profesor insta a sus estudiantes a que utilicen la cuadrícula de sus cuadernos para tener uniformidad en la graduación de los ejes y realizar la representación gráfica de la función.

> *Arturo: ¿Qué hacen después de eso? Gradúan bien el plano cartesiano, tienen cuadraditos. Lo ideal es no importa que ocupen más espacio. Cada cuadradito es un número o, por último, el cuadradito lo parten por la mitad. Gradúelo bien.*
>
> *Todos deben tener la misma distancia porque si no, no les queda exacto y no podrían deducir que el punto de corte fuera ese si es que no lo hacen graduado correctamente.*
>
> *Tenemos el punto (0,4) y el (1,6), después toman la regla y unen los puntos, y ese punto, donde corte, tendría que ser el -2 ¿Hay alguna duda de la clase de hoy? [1075]*

Por otro lado, Arturo también expresa la desventaja que implica usar la pizarra al graficar funciones cuya gráfica no es acotada y se prolonga infinitamente mientras que la pizarra le permite solo una representación acotada.

> *Arturo: Es que dibujé un pedacito. Está claro que los ejes del plano cartesiano van aumentando igual que estas rectas. La recta no es ese pedacito y menos el segmento que me estaban dibujando la clase anterior, por eso nosotros trazamos una línea y le hacemos las flechitas para indicar que estamos dibujando una sección. Acá pasa lo mismo, sé que parte acá, pero esto avanza, puede avanzar más suave o de esa forma, pero va aumentando. Esto también va creciendo, pero*

va creciendo hacia la derecha y hacia arriba. Podría inventar un montón. Vamos a trabajar hoy día en base a estas representaciones [Imagen 27]. [915]

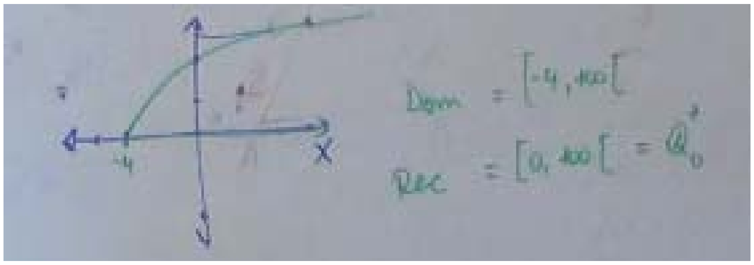


Imagen 27: dominio y recorrido de una función

De los extractos anteriores se puede observar que Arturo conoce la potencialidad de la cuadrícula del cuaderno de los estudiantes como herramienta al graficar una función. Asimismo, el profesor conoce que la graduación de los ejes debe ser con una unidad fija para obtener buenas representaciones para la función. Esta "buena graduación" produciría buenas representaciones y permitiría a los estudiantes obtener mejores conclusiones respecto del trabajo que Arturo les propone: identificar el punto de corte de la gráfica de la función con el eje X. Por otro lado, Arturo conoce las limitaciones de la pizarra respecto a este mismo asunto. En la pizarra no se cuenta con ejes bien graduados, por tanto, las representaciones gráficas serán mucho menos precisas.

E: Cuando los estudiantes copian los ejercicios propuestos en la pizarra les dices que a ellos les quedará mejor, porque ellos utilizan los cuadritos. ¿Cuáles son las ventajas o limitaciones cuando usas solamente el plumón y la pizarra para enseñar la representación de las funciones?

Arturo: La desventaja es que no te queda tan real respecto de lo que es. Lo que ellos hacen en el cuaderno tampoco es real, pero las proporciones quedan mejor cuando tienen cuadrícula. Si quisiera comparar gráficos de funciones cuadráticas, en la pizarra quizás no se note la diferencia entre una y otra, incluso con rectas cambiando las pendientes. Si se cambia el coeficiente de posición, ahí se nota, pero en otros no se nota.

La ventaja es que al menos resulta. Hay una mejor representación.

E: ¿Conoces algún otro recurso para graficar o para la enseñanza de la función?

Arturo: Si es por los gráficos, se puede usar cualquier software que grafique como Geogebra o aplicaciones en el teléfono. Esos los utilizo cuando quiero hacer rápidamente la variación de parámetro para que no esperen tanto rato para hacerlo. [Ent2 233-236]

En este último extracto, Arturo declara conocer la existencia de materiales virtuales que ayudan en la construcción de la gráfica de una función, como GeoGebra, sin embargo, no es utilizado durante las sesiones de clase. Se observa que Arturo conoce la existencia de este tipo de recurso y que, en el uso de la pizarra y el cuaderno, la pizarra presenta limitaciones en comparación al uso de las cuadrículas de los cuadernos de los estudiantes frente a la tarea de graficar una función por la precisión resultante de la graduación de los ejes cartesianos.

Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

El conocimiento en esta categoría responde a la pregunta ¿Qué y cómo hace el profesor para enseñar algo respecto a la función? Las estrategias se encuentran asociadas a los objetivos de enseñanza que se propone Arturo. En el análisis de las clases, el profesor no hace explícito estos objetivos. Sin embargo, algunos de ellos son identificables mediante la frase "hoy vamos a estudiar…", que declara en la primera parte de las sesiones. En esta categoría se ha incluido la presentación de las estrategias particulares de enseñanza que Arturo utiliza para:

- La definición de función.
- La validación una correspondencia funcional.
- La representación de funciones.
- La inyectividad, epiyectividad, biyectividad y la función inversa.

En estas estrategias particulares de enseñanza se identifica el uso de ejemplos, comparaciones o planteamiento de tareas, que organizan y estructuran la estrategia. Recordemos que una estrategia la entendemos como un conjunto de acciones que permiten conseguir un objetivo, por tanto, las estrategias en esta categoría estarán constituidas por las acciones (hitos) que marca el profesor para enseñar los tema antes mencionados. Las técnicas, por su parte, corresponden al modo en que estas acciones se realizan.

En esta categoría también se han incluido otros dos indicadores sobre aspectos más generales: la selección de los ejemplos y el uso de traducciones entre el lenguaje natural y el matemático simbólico. Que se desarrollan de manera transversal a las clases de Arturo.

Conocimiento sobre una estrategia para la enseñanza de la definición de función (KMT-E-1)

Uno de los primeros objetivos que se identifican en las sesiones de Arturo es que los estudiantes comprendan la definición de función y los conceptos asociados a esta. La estrategia de enseñanza que se identifica para ello contempla las siguientes fases: el planteamiento de situaciones cotidianas que tengan relación con los conceptos asociados a la función, la propuesta de la definición, presentación de la representación sagital, propuesta de una analogía para la función y ejemplos de funciones y no funciones. En lo que sigue se describe cada una de estas fases o componentes de la estrategia de Arturo como parte de su conocimiento sobre la enseñanza de la definición de función.

Conocimiento sobre el uso de situaciones cotidianas para la enseñanza de los cuantificadores y la noción de correspondencia (KMT-E-1.1)

Para iniciar la enseñanza del concepto de función, Arturo propone algunas situaciones a sus estudiantes para que comprendan algunos conceptos previos a la enseñanza de la definición de función. Estas situaciones recurren a un contexto conocido por los estudiantes y se relacionan con los contenidos que el profesor se propone enseñarles.

Como se mostró en (KoT-D-1), la definición para la función que Arturo propone involucra los cuantificadores universal y existencial. Resulta necesario para Arturo enseñar el significado y uso de estos cuantificadores previo a dar la definición de función.

Arturo explica a sus estudiantes el significado de estos cuantificadores mediante una primera situación que trata sobre la construcción de proposiciones usando cuantificadores. Arturo pretende hacer comprensible los cuantificadores universal y existencial usando al grupo curso como contexto.

> *Arturo: A ver. Este de aquí significaba "pertenece", este de acá significa "para todo", este de acá significa que "existe", y este es el que estaban diciendo que era el "por lo tanto".*
>
> *Hay uno que es cuando al "existe" le ponemos ese símbolo [signo de exclamación, !] significa que existe un único.*
>
> *¿Cuál va a ser el contexto con esto? Para que entendamos no solamente el nombre de qué significa, sino que podamos comprender en qué contexto lo utilizamos. Por ejemplo, el "para todo" si tomamos como conjunto todo el primero medio, todos ustedes cumplen con una condición, todos están en primero medio, ahora, ¿existe alguien que se llame María?*
>
> *A: Dos.*
>
> *Arturo: Existen, ¿cierto? Porque hay, pero si yo dijera ¿existe alguien que se llame Sandra en este conjunto?... no!*
>
> *Recién dije que existía alguien que se llamara María, pero si yo digo ¿existe alguien que se llame Tomás?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: ¿Y es único?, ¿hay otro Tomás? No, entonces esa es la diferencia entre el "existe" y el "existe un único".*
>
> *Existía y existían dos Marías, pero existe un único Tomás, ahí está la diferencia. Es claro que usted es único.*
>
> *Nosotros podemos hacer conjuntos, hicimos recién un conjunto con todos ustedes, es una colección y cuando decimos cómo relacionamos el "pertenece" con un conjunto. Él es un elemento [se refiere a uno de los estudiantes de la clase] y es un elemento de este conjunto, por lo tanto, él pertenece a primero medio. [25-29]*

Posteriormente, vuelve a utilizar el contexto de la sala de clases y a los estudiantes como elementos de un conjunto para enseñar la idea de correspondencia, concepto clave en la definición de función que Arturo presenta.

> *Arturo: ¿Cuál es nuestro tema? Es lo que nos va a tener trabajando varias clases..."Funciones" [P escribe el título en la pizarra].*
>
> *¿Qué vamos a entender por una función?*
>
> *Hay ciertas palabras que yo voy a hablar ahí y voy a utilizar la palabra correspondencia, ¿en qué contexto lo vamos a usar nosotros?*
>
> *En que a cada uno le corresponde una silla, ¿no?, o sea, cada uno de ustedes está asociado a una silla, entonces eso es hacer una correspondencia: cada uno tiene su*

> *silla, cada uno tiene su mesa, ahí hay una correspondencia. Ustedes, como pertenecientes a un conjunto de alumnos y las sillas a un conjunto de sillas, entonces a todo el curso le corresponde una silla, esa es la idea de la palabra, que en el contexto que vamos a trabajar, por correspondencia. [31-31]*

De lo anterior se puede observar que Arturo conoce la potencialidad del uso de estos contextos, conocidos por los estudiantes, para la enseñanza de los conceptos asociados a la función.

Conocimiento sobre la representación sagital de la función para la enseñanza de la definición de función (KMT-E-1.2)

Con la exposición de los cuantificadores y la idea de correspondencia, Arturo da la definición de función usando los conceptos previamente enseñados.

> *Arturo: Entonces, ¿cómo vamos a definir una función?... Como una correspondencia de elementos, elementos de dos conjuntos en la que a cada elemento de un conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada…lo voy a escribir. [31]*

Este extracto es evidencia de conocimiento de una definición de función (KoT-D-1) y muestra una parte de la estrategia para su enseñanza: la definición del concepto. A continuación, el profesor realiza un diagrama sagital como representación de la función y así explica la relación entre los elementos que la componen.

> *Arturo: Hay distintas correspondencias en distintos contextos. Para que esas correspondencias que uno puede hacer con distintos elementos llegue a ser una función tiene que cumplir con esa condición.*
>
> *[lee la definición que escribió en la pizarra. agrega la palabra "conjunto" de partida]*
>
> *Tenemos dos conjuntos. Un conjunto A y un conjunto B. Aquí tengo elementos y a este elemento [a uno de A, le llama "a"] yo lo voy a asociar y lo voy a hacer llegar a un elemento en el otro conjunto. Como a ustedes les hice sentar en una silla, a usted lo siento en ésa silla y no en otra porque esa es su silla.*
>
> *Aquí está nuestro elemento, que puede ser cualquiera de ustedes y aquí yo los hago que se sienten en su puesto, y llega aquí [al conjunto B] sentados.*
>
> *Un elemento aquí [en A, le llama "x"] lo hago parar y lo hago... [lo une con "x" en B. usa la misma letra, pero luego la cambia por "y"]. Pero estos [indica al conjunto A] van a llegar ahí [a B] mediante una función [ver imagen siguiente. Dibuja una flecha de A a B, la llama "f"] [35]*

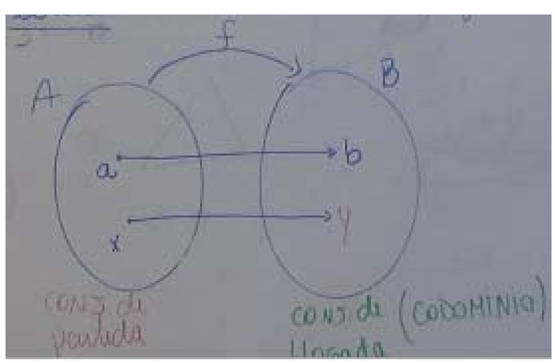


Imagen 28: Diagrama sagital inicial

Además de observar conocimiento de Arturo sobre este tipo de representaciones para la función (Imagen 28), se observa que usa este conocimiento para relacionarlo con la enseñanza de la definición de función y los conceptos asociados a ella, de modo que sean comprensibles para sus estudiantes.

Conocimiento sobre el uso de analogías como parte de la estrategia de enseñanza de la función (KMT-E-1.3)

Luego de haber explicado los cuantificadores, explicado la correspondencia y haber planteado la definición de función, el profesor pretende hacer que sus estudiantes comprendan la definición y el concepto de función recién definido. Para ello, Arturo utiliza nuevamente una situación conocida por los estudiantes: una máquina lavadora. El profesor realiza una comparación de la función con una máquina lavadora mediante una analogía respecto de sus funcionamientos y los elementos que se ven involucrados. En esta comparación, el profesor muestra la función como un proceso de entrada y salida.

> *Arturo: Las funciones, previo a darles más nombres. La función funciona igual que una máquina. Una especie de máquina. Un ejemplo podría ser la lavadora. La lavadora cumple una función, ¿cuál es la función?*
>
> *As: ¡Lavar!*
>
> *Arturo: ¿Qué es lo que usted hace? Toman una prenda, está sucia, la meten en la lavadora y ¿cómo sale? [43- 45]*

En el caso de la analogía, Arturo reconoce que esta comparación se aplica solo al tema de funciones y que alguna otra máquina podría ser menos eficaz en la enseñanza de la función.

> *E: Plantear la máquina de lavar, ¿también es parte de la estrategia?*
>
> *Arturo: Si. Esa es solo para funciones.*
>
> *E: ¿Alguna otra máquina?*
>
> *Arturo: Podría cambiarla por cualquier otra máquina, pero la idea es la misma. Si la cambio por una máquina de café, la idea es la misma. En ese caso, todos los elementos del conjunto de partida son idénticos, entonces la lavadora me da una gran variedad de objetos, de prendas que puedo incorporar.*
>
> *E: Entonces ¿no cualquier máquina da la misma idea de función?*
>
> *Arturo: La máquina de café podría dar a entender solo un tipo de objeto o todos similares o siempre el mismo. Entonces, como quiero ingresar el 5, el 20, el -1, pensando en el ámbito numérico, en la lavadora puedo ingresar poleras, pantalones, faldas, todos viven dentro de un conjunto que es ropa, que tengo una gran variedad ahí, a diferencia de los granos de café en que el conjunto son los granos de café y todos son iguales, no hay una gran variedad. Uno podría buscar algo más, pero esa funciona.*
>
> *E: ¿Cuán efectivo es el uso de la máquina?*
>
> *Arturo: A mi me da resultado.*
>
> *E: ¿Qué aspecto de la función resalta la máquina lavadora?*

> *Arturo: En lo que significa la función, cumple un rol. A lo que ingresa, algo le hace o no le hace. Refuerza el conjunto de partida, el dominio de la función. No cualquier elemento puede ingresar a esa función. No puedo meter una piedra a la máquina, porque no va a tener imagen. [Ent2 217-226]*

Se observa que Arturo conoce esta comparación entre la máquina de lavar y la función como un recurso potente para la enseñanza de la función, incluyendo las limitaciones en caso de tratarse de otro tipo de máquina. Esta comparación le permite identificar otros conceptos asociados a la función como imagen, pre imagen, dominio, recorrido. Además, Arturo reconoce ventajas de la inclusión de la comparación entre la función y la máquina de lavar por sobre el uso de otro tipo de máquinas. En la entrevista, Arturo se refiere a esta comparación de la siguiente manera.

> *E: Cuando un estudiante dice que no entiende la definición que acabas de dar, ¿qué haces?*
>
> *Arturo: Siempre busco ejemplos. Mis ejemplos son "tontos". Incluso en la Universidad usé el de la lavadora. El tacho de la ropa sucia, conjunto de partida. Tacho de la ropa limpia, conjunto de llegada. La ropa sucia pasa por la lavadora y llega al otro lado. Está esto que trato de relacionar con elementos o ejemplos que los puedan visualizar, para luego, a esos elementos ponerles un objeto abstracto que es una x, una f, una y.*
>
> *E: ¿Es importante que quienes escuchen este ejemplo o esta comparación de la función con la lavadora conozcan la lavadora o no es necesario?*
>
> *Arturo: Si no la conoce, se cambia el ejemplo. La idea es que sea algo que todos conozcan o, si no la han ocupado, han visto cómo se ocupa. [Ent1 35-38]*

Se observa aquí conocimiento de Arturo sobre potencialidades de esta analogía para la enseñanza de la función. Además, es posible observar que Arturo conoce las relaciones entre los conceptos asociados a la función y los elementos que se involucran en el proceso de lavar. Por otro lado, el conocimiento de Arturo sobre la potencialidad de plantear esta relación función-máquina en un contexto cercano a los estudiantes, como se mostró también en (KMT-E-1.1), incluye al conocimiento de la efectividad de esta comparación analógica respecto de la enseñanza de la función.

En términos generales, la potencialidad del uso de situaciones con contexto cotidiano para los estudiantes es reconocido por Arturo como parte de su estrategia de enseñanza y forma parte de su KMT. La potencialidad de estas situaciones está en que los conceptos nuevos son relacionados con las experiencias previas de los estudiantes. En la entrevista, Arturo lo declara de la siguiente manera.

> *Arturo: Trato de llevarlos a relacionarlo con lo que ellos saben, ya sea matemático en ciertos puntos o incluso, en extremos, a simplificar o a hacer estas comparaciones con situaciones de la vida cotidiana como el tema de la lavadora.*
>
> *El tema de ir a la raíz... función no solo se ocupa en matemática, sino que dónde lo ocupan ellos en la vida cotidiana.*
>
> *Todos los artefactos que ellos ocupan tienen una función que realizar. [Ent1 10]*

De esta última respuesta, se observa que Arturo conoce la potencialidad para la enseñanza de la función, que presenta el plantear situaciones que sean conocidas por los estudiantes y que permitan relacionar sus experiencias personales con los nuevos conocimientos, esto como parte de su estrategia.

Conocimiento sobre el uso de ejemplos y no ejemplos para la enseñanza de la definición de función (KMT-E-1.4)

La estrategia para la enseñanza de la función también contempla la presentación de ejemplos y no ejemplos de correspondencias funcionales para mostrar los alcances de la definición.

> *Arturo: Con números la función ya no va a ser lavar... va a ser que... al que entre le sume 2. [escribe f(x)=x+2]*
>
> *Al que entre a la función, a la máquina, yo le sumo 2. Si esta es mi máquina que hace que al que entre le sumo 2, si entra el 1, ¿cómo sale?*
>
> *As: 3.*
>
> *Arturo: Si entra a la máquina el 31, ¿cómo sale?*
>
> *As: 33.*
>
> *Arturo: Quiere decir que la función aplicada al 31 sale como 33, ¿no?, entonces ¿cuál es la imagen de 31?*
>
> *As: 33. [63-68]*

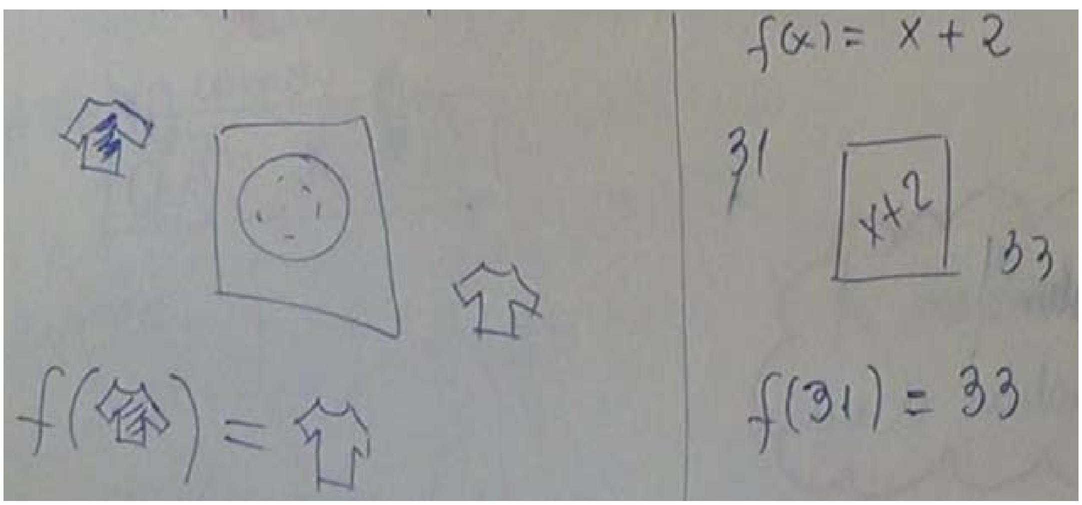


Imagen 29: Analogía pictórica y algebraica

El extracto corresponde al primer ejemplo de una función que propone Arturo. La función se expresa algebraicamente y es dada luego de la comparación de la función con la máquina lavadora (Imagen 29). Se trata de un ejemplo simple que muestra la función como un proceso de entrada y salida, comparado con el proceso de lavar una prenda de vestir. En este caso, Arturo nuevamente recurre a los conocimientos previos de los estudiantes para relacionarlos con el ejemplo propuesto. Como se observa en la imagen anterior, el ejemplo se propone haciendo un paralelismo con la presentación pictórica de la analogía, que Arturo había mostrado para enseñar la función.

Arturo también incluye ejemplos de correspondencias en diagramas sagitales que no son funciones para diferenciarlos de las que sí lo son.

> *Arturo: Voy a poner una que no sea función con los mismos elementos a, b, c,0,1,2, y 3.*
>
> *Eso ¿es función? ¿a cada elemento de aquí le corresponde un único en el...?*

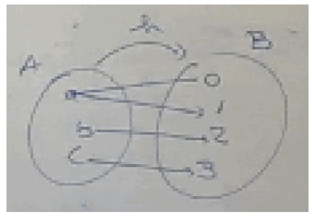


Imagen 30: relación no funcional en diagrama sagital

> *As: No, al a no.*
>
> *A: Al a le corresponde el 0 y el 1*
>
> *Arturo: Esa no es función porque a este elemento le corresponden dos y no es único, entonces, por esto, este ejemplo es una correspondencia, pero es una correspondencia que no es una función. [escribe en la pizarra "este ejemplo no es función] porque para que sea función, ¿qué tiene que pasar? [110-113]*

Se observa que Arturo conoce ejemplos y no ejemplos que son útiles para iniciar la enseñanza de la función y comunicar los límites de la función. Los ejemplos y no ejemplos le permiten al profesor evidenciar las propiedades que incluye en la definición y apoyar la comprensión de sus estudiantes sobre el tema.

Conocimiento sobre una estrategia para la enseñanza de la validación de correspondencias como relaciones funcionales (KMT-E-2)

La estrategia de Arturo para enseñar la validación de correspondencias funcionales tiene como punto de partida la presentación de la definición de función. En esta definición se presentan las propiedades que caracterizan el concepto (KoT-D-1) y proporcionan las primeras herramientas para identificar y validar correspondencias funcionales. La estrategia de Arturo consiste en seleccionar y enseñar diferentes formas para realizar este proceso de validación que articula la definición y las propiedades, ejemplos y no ejemplos de función mediante diagramas sagitales, técnicas de representaciones gestuales y cartesianas y tareas sobre validación de correspondencias funcionales.

Conocimiento sobre la enseñanza de la definición de función y su potencialidad como herramienta para la validación de correspondencias funcionales (KMT-E-2.1)

En el indicador anterior se mostró el conocimiento de la definición de función como parte de la estrategia de enseñanza de este concepto. En el presente indicador se muestra cómo Arturo pone énfasis en las propiedades incluidas en la definición y qué utiliza para validar una correspondencia como función o no. Particularmente, se muestra cómo el profesor destaca la utilidad del uso de la definición para validar si una correspondencia es o no una función.

> *Arturo: Vamos a ir viendo la diferencia [entre función y no función]. Yo hice una combinación, podríamos haber hecho otra, ahí vamos a ir inventando, pero ¿cumple con que a cada elemento de aquí [A] le corresponde un único en el conjunto de llegada?, ¿solo uno? Único [señala la definición]. A este tiene que llegar a uno solo, por eso subrayé que ese elemento del conjunto en que va a parar tiene que ser único, porque si no no sería una función. Dijimos que una función es una correspondencia que tenía que cumplir con estas dos condiciones, si no las cumple no puedo llamarle función, entonces esto sería una función. [86]*

De la definición, el profesor destaca las propiedades que la conforman y las indica como criterios para validar una correspondencia. En la entrevista Arturo confirma que resaltar esas dos condiciones tiene un fin de enseñanza en el proceso de validación.

> *E: Después de definir la función, decides si algo es una función o no. ¿Qué rol tiene la definición en ese procedimiento de decidir si es o no función?*
>
> *Arturo: Hay una parte que no es tan matemática. Esa definición está traducida, no está tan matemática, está la descripción y las características. Yo vuelvo a ella para que noten de que hay dos condiciones, y que esas condiciones son las que se tienen que cumplir para que esa correspondencia sea una función.*
>
> *E: ¿Cuáles son esas dos condiciones?*
>
> *Arturo: Que cada elemento del conjunto de partida… yo subrayo dos palabras: el cada y el única.*
>
> *Cada elemento del conjunto de partida tiene una única imagen. Subrayo esas dos palabras: cada y única.*
>
> *El "cada" significa que en el conjunto de partida no me pueden sobrar elementos y el "único", que a donde va a parar ese elemento sea único, no pueda llegar a dos. [Ent2 147-150]*

Arturo muestra a sus estudiantes la definición de función mediante dos formas de representarla: mediante lenguaje natural y mediante símbolos matemáticos (KoT-D-1). Estas representaciones de la definición buscan destacar las propiedades que la componen. La enseñanza de la definición, de acuerdo al extracto anterior, incluye el ir y venir entre las correspondencias y la definición, destacando palabras claves de la definición que representan las propiedades de unicidad y exhaustividad. Estas propiedades son las que busca hacer comprensibles para sus estudiantes en el proceso de validación de correspondencias funcionales. Se observa que Arturo conoce la necesidad de enfatizar en las propiedades de unicidad y exhaustividad de la función, así como su conocimiento sobre la enseñanza de esta definición y la potencialidad de las propiedades que incluye como condiciones necesarias que debe enseñar a sus estudiantes para que ellos las comprendan.

Conocimiento sobre la potencialidad de las representaciones gestuales como herramienta y recurso para la validación de correspondencias funcionales (KMT-E-2.2)

Arturo presenta a sus estudiantes una forma de recordar cuando una correspondencia, dada mediante un diagrama sagital, es o no una función. Para ello, recurre al uso de sus manos en cierta posición, donde una de las manos representará lo que es una función y la otra representa una correspondencia no funcional.

> *Arturo: Cada vez que nos presenten en un diagrama esto (muestra su mano izquierda con los dedos índice y mayor extendidos horizontalmente) quiere decir que no va a ser una función, porque este elemento tendría dos imágenes, pero esto (muestra la mano derecha en la misma ubicación que la anterior), este elemento (punta del dedo índice) tendría una imagen y este elemento (punta del dedo mayor) tendría una imagen. Entonces, la mano derecha si es función y la mano izquierda no es función. [129]*

Arturo realiza estos gestos con sus manos (Imagen 31) para resaltar la propiedad de univalencia (unicidad) de la función. El uso de estos gestos con sus manos, además de reforzar esta condición, se transforma en una herramienta para decidir sobre algunas correspondencias sobre si son o no funciones mostrando la potencialidad de esta representación en esta tarea de validación. Se observa que Arturo conoce estos gestos como útiles y potentes para la enseñanza de este proceso de validación y la propiedad de unicidad en la asignación de imagen de la función que el gesto resalta.

a)  **b)** 

Imagen 31: Mano derecha (a) y mano izquierda (b) como representaciones de función y no función

Conocimiento sobre la potencialidad del test de la recta vertical como herramienta en la validación de correspondencias funcionales mediante la gráfica cartesiana (KMT-E-2.3)

El test de la recta vertical es presentado por Arturo luego de haber enseñado la representación cartesiana de las funciones, pues requiere de trazar una recta vertical sobre la representación de la función y determinar los puntos de corte entre ambos gráficos. Así como ocurre con los gestos usados para destacar una propiedad de las funciones y un criterio de validación, así también ocurre con el test de la recta vertical.

El test destaca, igual que antes, la condición de unicidad en la asignación de imagen, obteniéndose una relación entre este criterio, la representación cartesiana, lo gestual y la representación sagital de la función.

> *Arturo: Según lo que yo acabo de recordar y lo que es una función, asociándolo con lo que acabamos de conversar, dijimos: una relación es función cuando a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. Este dibujo, esta representación, ¿representará a una función?*
>
> *A: No.*
>
> *Arturo: Un elemento del conjunto de partida ¿tiene un único en el conjunto de llegada?*

As: No.

Arturo: No. ¿Por qué no tiene?

A: Porque era para arriba y para abajo [refiriéndose a que una pre imagen tiene una imagen sobre el eje X y otra imagen bajo el eje X].

Arturo: Ah, muy bien. Este elemento, si yo elijo ese, choca aquí y tendría esa imagen, pero también choca acá y tendría esa imagen, entonces un elemento tendría dos imágenes, ¿es función?

A: Si.

As: No. No, porque cada elemento… [926-934]

Se observa el conocimiento de Arturo sobre la potencialidad del test de la recta vertical en la enseñanza de la validación de correspondencias funcionales expresadas mediante su gráfica cartesiana.

Conocimiento sobre tareas de validación de correspondencias como funcionales (KMT-E-2.4)

La última etapa de la estrategia de enseñanza sobre la validación de correspondencias funcionales es la presentación de tareas a los estudiantes en los que debieron aplicar aquello que Arturo enseñó previamente. Las tareas que Arturo propone tienen una doble finalidad. Por un lado, buscan fortalecer aquellos contenidos recién enseñados como ejercicios de aplicación.

Arturo: [agrega un ejercicio en la pizarra (Imagen 32)] Les di dos conjuntos y quiero que ustedes dibujen un diagrama en que relacionen los elementos de A y los de B y que sea una función. Ustedes ven cómo hacen estas correspondencias, pero tienen que hacerlas de tal forma de que sea una función, después van a hacer otro diagrama que no sea función. [supervisa las producciones de los estudiantes] [195]

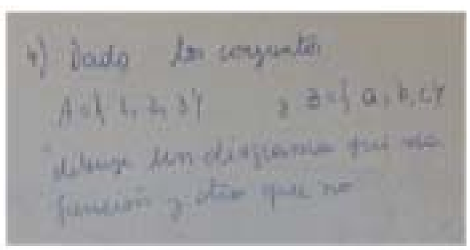


Imagen 32: Ejercicio de construcción de relación funcional

Por otro lado, las tareas presentadas buscan guiar a los estudiantes sobre la evaluación de este contenido como parte de su preparación para la evaluación del tema.

Arturo: Voy a ponerles algunos ejercicios. Con los ejercicios que yo les voy a proponer van a ver cómo esto que vimos se puede preguntar. Con respecto a las observaciones, estábamos diciendo que en el conjunto de partida no me pueden sobrar elementos, pero si me pueden sobrar en el conjunto de llegada. [135]

En este último caso, se trata de tareas dadas como ejemplificación de las posibles preguntas que contendrá la evaluación de esta unidad de funciones, por tanto, cumplen un rol de modelo para los estudiantes.

> *Arturo: Otra forma en que yo puedo preguntar lo que hemos hecho es… Yo les voy a mostrar unos diagramas y ustedes me van a indicar si son o no funciones. [escribe en la pizarra: Determine si los siguientes diagramas son o no función]*

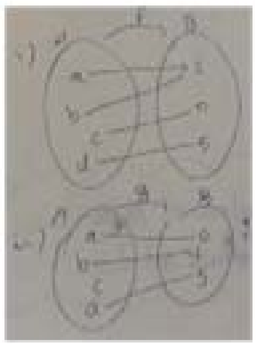


Imagen 29: Ejercicio sobre correspondencias funcionales

> *A: Para eso de los dedos hay que mirarse los dedos así...*
>
> *Arturo: No, así, con los dedos para adentro [mirando las palmas].*
>
> *De esos diagramas, el primero ¿es función?, ¿cumple con que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde una única imagen? [173-175]*

Este tipo de tareas también cumple con el objetivo anterior de aplicar los conceptos y procedimientos recientemente enseñados. Con esto es posible señalar que Arturo conoce tareas específicas para la enseñanza de la validación de correspondencias funcionales. Estas tareas son réplicas de los ejemplos que utiliza para este mismo propósito y Arturo las utiliza para guardar coherencia entre lo enseñado y lo que se pedirá en las evaluaciones.

Por lo anterior, se puede observar el conocimiento de Arturo sobre una estrategia para la enseñanza de cómo validar correspondencias y relaciones funcionales.

Conocimiento sobre una estrategia para la enseñanza de las representaciones de la función (KMT-E-3)

La estrategia de Arturo para la enseñanza de las representaciones de la función contempla mostrar las representaciones de manera articulada. Esta articulación inicia con la definición de función, esta vez presentada en lenguaje formal, luego la presentación sagital de la función y, posteriormente, sigue con la forma algebraica. Con esta última construye pares ordenados, identificando un indicio de tabla de valores, y de ahí pasar a la representación cartesiana.

> *Arturo: Esto también lo voy a poner como observación. La definición de función. En esta parte necesito que me presten atención. Voy a escribir en lenguaje matemático la definición de función, esa que hemos repetido toda la clase de que "a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto*

de llegada", yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [203]

Imagen 33: Definición de función

Luego, Arturo traduce la definición en un diagrama sagital, identificando los conjuntos de partida y llegada, como se ve en el siguiente extracto.

Arturo: Esto que está aquí [la definición] se puede escribir como la función que va de A al conjunto B. Este mismo diagrama. Vamos a hacer una representación de esto.

Si los relacionamos, las funciones las vamos a poder dibujar en el plano cartesiano. Les vamos a poder dar una representación gráfica, entonces esto, que era el conjunto de partida y el conjunto de llegada, se transforman en los ejes del plan cartesiano, esa es su versión, por eso es el x y por eso es el y. [209]

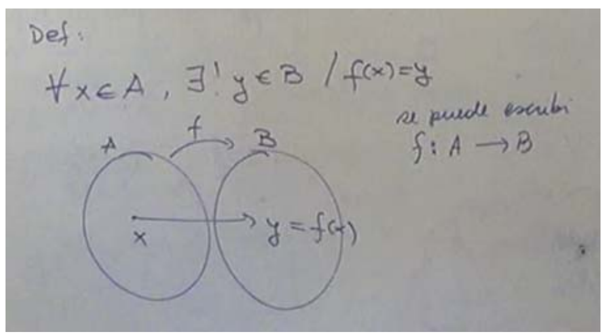


Imagen 34: Definición de función, diagrama sagital y notación

Para construir la representación cartesiana de la función, Arturo ha recordado conceptos del plano cartesiano y la relación de los puntos en el plano con los puntos que forman el gráfico de la función. El profesor utiliza un ejemplo de función, la función $f(x) = x + 1$, dada en su expresión algebraica.

Arturo: Por eso, el x pertenece al conjunto de partida, y el x en el plano cartesiano pertenece al eje horizontal. El y es un elemento del conjunto de llegada, lo habíamos asociado a.… los y los representábamos en el eje vertical, entonces este es el eje X, este es el eje Y. Aquí va a estar considerado nuestro conjunto de partida, y aquí va a estar considerado nuestro conjunto de llegada. Para poder llevar una función a su representación vamos a tener que pasar la función a elementos que yo puedo dibujar aquí. ¿Qué elementos hay aquí? ¿Por qué está formado esto?

A: Coordenadas.

Arturo: Por puntos o coordenadas. Si yo tengo la función f(x), vamos a poner una simple "x+1", y recordamos que los puntos son de la forma (x,y). Los y son los f(x). Pongamos aquí: se lee como "efe de x", función de x.

Vamos a ir relacionando un montón de detalles. [211-213]

Arturo va incluyendo entre cada tipo de representación algunas notaciones y vocabulario técnico asociado a las funciones y la interpretación de los pares ordenados como puntos del plano. A continuación, calcula algunas imágenes generando una especie de registro tabular-numérico.

> *Arturo: Al final, la representación gráfica va a ser un conjunto de puntos que hagan ¿qué cosa? Esto no se los voy a escribir, pero el gráfico de una función va a estar formado por los elementos (x,y), porque necesito puntos que pertenezcan.. el x que pertenezca al conjunto de partida, el y al conjunto de llegada, donde la segunda coordenada sea necesariamente la imagen de la primera.*
>
> *En palabras, con el ejemplo y en contexto, si esta es mi función f(x)=x+1, yo de esta puedo sacar la imagen del 1, puedo sacar la imagen del 0 y puedo sacar la imagen del -1. Yo puse el 1, 0 y -1 porque son números que son fáciles de evaluar en cualquier expresión. Podría elegir el 100, -50, el número que se me ocurra, pero dada esta función, ¿cuál es la imagen del 1 cuando pasa por esa función? [220]*

Por último, construye la representación cartesiana de la función que usa de ejemplo con los tres puntos determinados por los valores que seleccionó como pre imágenes. Arturo marca los tres puntos en el plano con los ejes graduados y luego los une con una recta.

> *Arturo: ¿Qué se nos está formando si yo uniera esos puntitos?*
>
> *As: Una línea.*
>
> *Arturo: Una línea, me quedó una línea. Me quedó una recta. A las funciones les podemos dar una representación gráfica y ¿cómo se hace esa representación gráfica? Es elegir elementos, números cualquiera. Dadas las funciones que vamos a trabajar, no vamos a tener problema con poder elegir cualquier número, meterlos al a función y obtener su imagen. Si tenemos su imagen, podemos obtener puntos, y esos puntos los meto al plano cartesiano. [248-250]*

La imagen 35 muestra el paso desde la definición de función (izquierda) hasta la representación cartesiana de la función (derecha). Arturo expone a sus estudiantes esta articulación utilizando toda la pizarra, sin borrar, de modo que los estudiantes puedan acceder a todas y cada una de ellas.

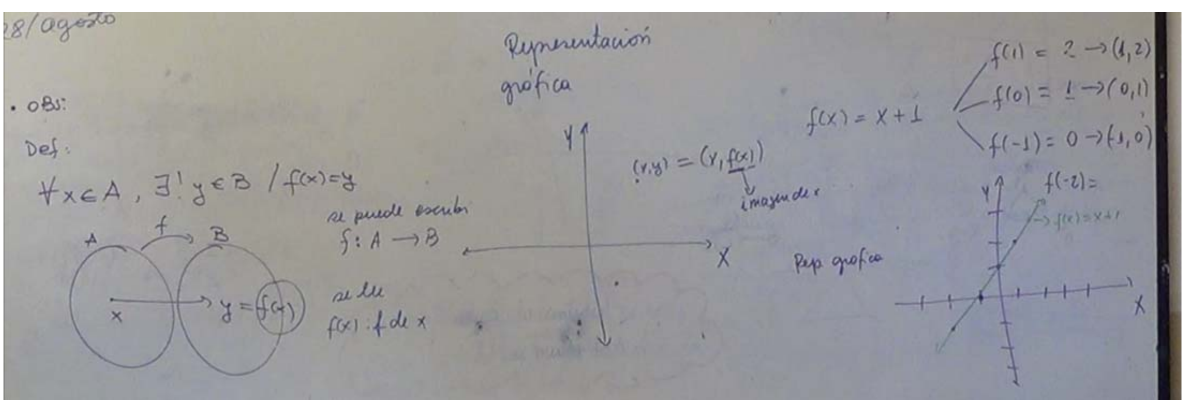


Imagen 35: Articulación de representaciones para la función

El profesor señala, en la entrevista, que su objetivo es mostrar las representaciones articuladas y para ello, tiene como hilo conductor el cálculo de imágenes.

> *Arturo: Las que yo muestro, trato de hacer resúmenes del proceso, entonces hago el diagrama sagital diciendo, por ejemplo, 2x+1. Tomo un elemento y calculo su imagen. Luego, a nivel algebraico ¿cómo lo escribo? O puedo decir f(x)=2x-1 o llevarla al contexto f: A->B o de R en R, o de Q en Q, de x en 2x+1, y que estoy representando gráficamente en RxR o QxQ. [Ent2 88]*

La presentación de estas representaciones para la función se estructura a través del cálculo de imágenes. Arturo enseña las representaciones a sus estudiantes mediante esta articulación, en el cual el rol de la variable independiente es clave y estructura su estrategia para enseñar las representaciones. Arturo reconoce también que la selección y presentación de estas representaciones debe generar un proceso de abstracción en los estudiantes, como se puede ver en el siguiente fragmento de la entrevista.

> *Arturo: Cuando haces el cambio entre los registros debe haber un nivel de abstracción porque el objeto va cambiando de lugar. No sé si hay niveles o categorías. Se trata de seguirle la huella al x, ¿Dónde está y el conjunto dónde está?*
>
> *Tú partes con los elementos que van a pasar por esta función, a ese le llamamos x y está representado en el diagrama sagital en cierto conjunto. A ese conjunto lo llamamos A. Cuando lo paso a otra representación, ¿dónde pasó a estar ese x? El x estaba dentro del conjunto A, ¿Cómo lo represento si lo quiero hacer en forma lineal?*
>
> *El x está debajo de ese A, para indicar lo mismo que estaba en el diagrama. Eso es un ejemplo de cómo se va construyendo el traspaso de registro. Cuando pasas al plano cartesiano, ¿dónde está el x? Lo tomas en el eje horizontal. ¿Dónde está ese conjunto A? Cómo evoluciona o el lugar que ocupa entre una representación y otra. [Ent2 250]*

Por tanto, se observa el conocimiento de Arturo sobre una estrategia para enseñar las diferentes representaciones de la función mediante el cálculo de imágenes, en la cual puede incluir terminología usual para las funciones.

Conocimiento sobre criterios para la selección de ejemplos y tareas en la enseñanza de la función (KMT-E-4)

En los indicadores sobre el conocimiento de estrategias para la enseñanza de la definición, la validación y la representación de la función se incluye el conocimiento de Arturo sobre ciertos ejemplos. Ese conocimiento es tratado como específico de una estrategia de enseñanza, sin embargo, es posible evidenciar conocimiento de Arturo sobre la selección y planteamiento de estos ejemplos y tareas. Por esta razón se ha incluido un indicador aparte de los anteriores. En la entrevista, cuando se le consulta a Arturo por la relación entre ecuación y función, el profesor aborda en su respuesta la forma de realizar dicha selección.

> *E: En el caso del cálculo de pre imágenes para una función tú utilizas ecuaciones. ¿Cómo se relacionan las ecuaciones y las funciones?*
>
> *Arturo: Ahí tú lo utilizas, la resolución de ecuaciones como una herramienta, porque hay ciertos ejemplos en que debes determinar la pre imagen de un elemento; ¿Qué elemento ingresó a la función para que me diera tal número?*

> *Yo parto con ejemplos simples en que sea fácil distinguir, sin resolver… igual están resolviendo, pero mental, cuando no es tan simple se evoluciona a la necesidad de resolver una ecuación y que no se pueda hacer de otra forma. [Ent2 197-198]*

Según lo que señala Arturo, los ejemplos son seleccionados de acuerdo al grado de dificultad que presentan para sus estudiantes respecto de los procesos que deban realizar; primero son ejemplos que pueden ser resueltos mediante cálculos mentales y luego ejemplos en que esa estrategia de resolución no sea adecuada. Los ejemplos que presenta Arturo responden al progreso de sus estudiantes y a los objetivos que propone para cada sesión.

> *E: ¿Son importantes los ejemplos en la clase?*
>
> *Arturo: Si. En todas las clases, porque estás contextualizando. Los estudiantes necesitan ver números. Cuando ven muchas letras empiezan a colapsar. ¿Cómo lo voy a hacer?, ¿Cómo voy a aplicar esto que me está hablando?*
>
> *E: ¿Cómo seleccionas los ejemplos?*
>
> *Arturo: A veces los invento en el momento, porque va a depender de lo que me pregunten. La estructura de la clase ya la tengo, pero los ejemplos generalmente los voy variando. Siempre parto con algo muy simple y luego modificando los ejemplos hasta alcanzar el ejemplo con mayor dificultad pensando en lo que yo vaya a evaluar.*
>
> *E: ¿Cómo mides la dificultad de los ejemplos?*
>
> *Arturo: Va a depender de los tipos de función. Les voy modificando la expresión algebraica asociada a la función, que tenga fracción. [Ent2 211-216]*

Arturo diseña personalmente los ejemplos, improvisando algunos de acuerdo a lo que necesiten profundizar sus estudiantes y aumentando gradualmente su grado de complejidad. Se observa así el conocimiento de Arturo sobre criterios de la selección para los ejemplos respecto de la dificultad del procedimiento que deban realizar los estudiantes y respecto del ámbito numérico de las expresiones algebraicas involucradas que definen a las funciones. Así mismo, los ejemplos le permiten al profesor monitorear el progreso de sus estudiantes respecto de la comprensión del tema.

Conocimiento sobre la traducción entre lenguaje formal y lenguaje natural como parte de la estrategia de enseñanza para las definiciones de función, de dominio y de recorrido (KMT-E-5)

Cuando Arturo presenta las definiciones de conceptos lo hace verbalmente usando los términos formales y luego las escribe en la pizarra utilizando lenguaje natural y lenguaje simbólico. Este último siempre está presente, en mayor o menor medida, de acuerdo a la definición dada. Arturo se preocupa por que sus estudiantes realicen la traducción entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico para que puedan contar con versiones más comprensibles de las definiciones simbólicas. Por ejemplo, cuando define el dominio de una función, señala:

> *Arturo: Va a ser un conjunto que va a estar formado ¿por quién? Recordando ese mismo diagrama que hemos ocupado todas las clases que hemos visto funciones [dibuja un diagrama sagital], el dominio está formado por todos los elementos que*

estén en este conjunto que hacen que tenga una imagen en el conjunto de llegada. Serían… [comienza a escribir por comprensión el dominio de f].

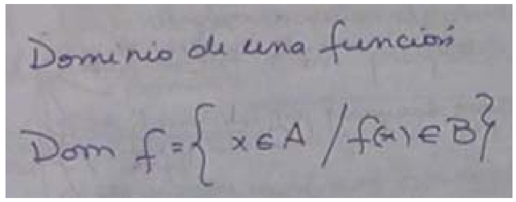


Imagen 36: Definición de dominio de la función

Todos los x que pertenecen al conjunto A, tal que las imágenes de ese valor estén en el conjunto B. Recuerden que cuando yo les escribo algo de este tipo, lo que yo les pido es que abajito, con lápiz grafito o con otro color, escriban la traducción. [435]

Para el caso del recorrido ocurre la misma situación que con la definición del dominio. Arturo presenta verbalmente la definición de recorrido y escribe en la pizarra su definición usando lenguaje simbólico.

Arturo: Vamos a definir ahora lo que es el recorrido de la función. Lo que estaba diciendo recién es que el dominio está formado por elementos que están en el conjunto de partida. El recorrido va a estar formado por elementos que estén en el conjunto de llegada. El recorrido va a ser todos los elementos que están en B tal que esos elementos…

A: ¿Y no que era "pertenece"?

A: Pertenece es la "e" [símbolo de pertenencia].

A: Pertenecen al conjunto B, tal que el "y" sea la imagen de algún elemento del conjunto de partida. [452-455]

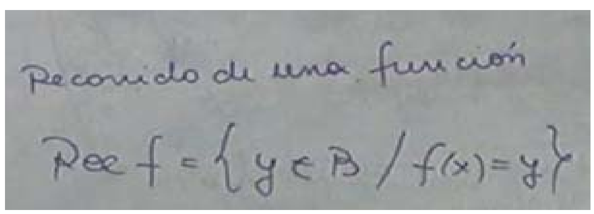


Imagen 37: Definición de recorrido de la función

En el caso de las definiciones dadas primero en lenguaje natural y luego utilizando símbolos, Arturo indica a sus estudiantes que se trata de la traducción y que los símbolos representan aquello que ya está dicho antes. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de la definición de función.

Arturo: Esto también lo voy a poner como observación. La definición de función. En esta parte necesito que me presten atención. Voy a escribir en lenguaje matemático la definición de función, esa que hemos repetido toda la clase de que "a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada", yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [203]

Imagen 38: Definición de función

Esta intervención ya apareció en un indicador más arriba sobre la enseñanza de las representaciones (KMT-E-3) y también en otros subdominios (KoT-D-1 y KPM-C-1), aquí es visto desde la perspectiva de la traducción de enunciados como estrategia de enseñanza de las definiciones. Cuando se le consulta a Arturo la razón de estas traducciones, señala:

> *Arturo: Siempre hago una traducción del lenguaje formal matemático a un lenguaje simple que ellos lo puedan comprender. En esta ocasión, yo partí con un lenguaje simple y después lo llevé a un lenguaje matemático. ¿Cómo decíamos eso en matemática?*
>
> *E: El lenguaje simple, ¿qué es?*
>
> *Arturo: La traducción del concepto, la traducción de la definición matemática.*
>
> *Cuando tú tienes una definición matemática, de repente es muy dura para que alumnos de primero medio la pudieran entender, entonces uno hace una explicación de eso, utilizando sinónimos, de tal forma que ellos puedan comprender lo que ahí está escrito, lo que quieres decir. [Ent1 6-8]*

Arturo destaca la importancia de que los estudiantes comprendan las definiciones dadas, el lenguaje simbólico y el rol de estos símbolos. El uso de estas traducciones obedece a un objetivo de enseñanza de las mismas y de los objetos definidos.

> *Arturo: ¿Por qué lo hago? Porque está lo que escribo, por ejemplo, la definición formal. La idea es no leer lo mismo que uno escribió, sino que tratas de explicarlo con otras palabras. Estas traducciones son esas explicaciones. Es porque eso que digo no lo retienen, pero está escrito abajo. Así los obligo a tener, por lo menos, lo que yo estoy explicando, no solamente lo que estoy definiendo, para que les sea útil cuando estudien solos. [Ent2 230]*

Se observa que Arturo conoce la traducción de enunciados entre el lenguaje formal simbólico y el lenguaje natural como una estrategia para enseñar (y que sus estudiantes recuerden) las definiciones de los conceptos y para hacerlos comprensibles a sus estudiantes.

La tabla 11 reúne los indicadores de conocimiento identificado en las sesiones de clases de Arturo para el subdominio KMT.

Tabla 11: Síntesis de indicadores por categoría del KMT del profesor Arturo

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas - KMT	Teorías de enseñanza	KMT-T-1	la organización de las definiciones, representaciones, procedimientos, ejemplos y tareas como teoría personal de enseñanza del concepto de función
	Recursos materiales y virtuales	KMT-R-1	la pizarra y las cuadrículas como recursos para graficar funciones
		KMT-E-1	una estrategia para la enseñanza de la definición de función 1.1 situaciones cotidianas para la enseñanza de los cuantificadores y la noción de correspondencia 1.2 la representación sagital de la función para la enseñanza de la definición de función 1.3 la analogía entre función y máquina y su uso como parte de la estrategia de enseñanza de la función 1.4 el uso de ejemplos y no ejemplos para la enseñanza de la definición de función
		KMT-E-2	una estrategia para la enseñanza de la validación de correspondencias como relaciones funcionales 2.1 la enseñanza de la definición de función y su potencialidad como herramienta para la validación de correspondencias funcionales 2.2 la potencialidad de las representaciones gestuales como herramienta y recurso para la validación de correspondencias funcionales 2.3 la potencialidad del test de la recta vertical como herramienta en la validación de correspondencias funcionales mediante la gráfica cartesiana 2.4 tareas de validación de correspondencias como funcionales
		KMT-E-3	una estrategia para la enseñanza de las representaciones de la función
		KMT-E-4	criterios para la selección de ejemplos y tareas en la enseñanza de la función
		KMT-E-5	la traducción entre lenguaje formal y lenguaje natural como parte de la estrategia de enseñanza para las definiciones de función, de dominio y de recorrido

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)

Teorías de aprendizaje

Durante las sesiones de clases no identificamos evidencias suficientes para afirmar la presencia de conocimiento de Arturo sobre teorías formales de aprendizaje, sin embargo, del mismo modo que ocurre con las teorías de enseñanza, es posible reconocer algunas acciones del profesor que se pueden asociar al conocimiento sobre la forma en que sus estudiantes aprenden la matemática y, en particular, el concepto de función.

Debido a la escasez de evidencias sobre teorías de aprendizaje, se le ha consultado a Arturo directamente en la entrevista si conoce o aplica alguna teoría que explique el aprendizaje de sus estudiantes.

> *E: ¿Tienes alguna teoría de aprendizaje que aplicas en tus clases?*
>
> *Arturo: No. Solo la experiencia. Solo ensayo y error, modificando la práctica cada vez que hago nuevamente el tema. Las veces anteriores en que me había tocado ver esto, me di cuenta de que no podía seguir haciendo lo mismo si veía que no todos aprendían. [Ent2 252]*

De esta respuesta se extrae que el conocimiento de Arturo sobre el aprendizaje de sus estudiantes correspondería a teorías personales sustentadas en su experiencia como profesor, sin embargo, y como se mencionó, Arturo no aporta otras en sus clases ni en la entrevista para sustentar indicadores en esta categoría.

Fortalezas y dificultades

Separamos en esta categoría los indicadores para el conocimiento de Arturo sobre las Fortalezas de los indicadores de conocimiento sobre las Dificultades que presentan los estudiantes durante el aprendizaje de la función.

Conocimiento sobre las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de función (KFLM-D-1)

En la propuesta de enseñanza de Arturo, la comprensión del concepto de función comienza con la comprensión del lenguaje formal con que se plantea la definición. El profesor presenta los cuantificadores y lenguaje de conjuntos junto con su traducción –cómo se lee- de modo que los estudiantes los comprendan, pues este lenguaje y simbología son utilizados para dar la definición de función. Para estas definiciones, Arturo reconoce una dificultad de los estudiantes al intentar comprender el lenguaje formal-simbólico y presenta la traducción verbal de ellas para enfrentar dicha dificultad. En un indicador anterior (KMT-E-5) se expusieron ejemplos de intervenciones en las cuales Arturo presenta la definición de función, de dominio y de recorrido de la función utilizando lenguaje simbólico junto con su traducción verbal. Luego pide a sus estudiantes que se concentren y tomen nota, lo que da señales de su conocimiento sobre la dificultad de los estudiantes para comprender este lenguaje.

En la entrevista (extracto que también se incluye en el indicador anterior), Arturo declara que, en general, las definiciones expresadas en lenguaje formal son "muy duras" para que los estudiantes las comprendan y por esa razón realiza la traducción al lenguaje natural incluyendo alguna explicación. El profesor además manifiesta su conocimiento sobre la complejidad que presenta el concepto de función respecto a la gran cantidad de aplicaciones que posee y que estas dificultades están presentes en todo nivel escolar.

> *E: Y ¿por qué haces esta traducción?*
>
> *Arturo: Porque el concepto y todo lo que tiene que ver con función es abstracto, es complejo. Tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana, pero que, si tú lo usas para ese nivel, incluso para alumnos de la universidad, no es un concepto que sea fácil de interiorizar. No es un concepto fácil de captar. Pueden captar la mecánica que puede ir detrás, pero lo que es el concepto de una función, lo que hace, las aplicaciones de cada una de estas funciones yo creo que tú sales del colegio sin entender funciones. [Ent1 15-16]*

Arturo da cuenta de su conocimiento sobre la procedencia de las dificultades en la comprensión del concepto de función al tratarse de un tema que involucra otros conceptos que también son difíciles para los estudiantes.

> *E: […] ¿Cómo sabes que existen esas dificultades? ¿Qué asuntos les cuesta comprender a los estudiantes?*
>
> *Arturo: No sé si es el concepto, sino todo lo que tiene que ver con funciones. De repente, la simple idea de relacionar elementos de un conjunto con otro con ciertas condiciones, eso lo pueden comprender si tú lo explicas así. Incluso, lo que significa una imagen, la podrían calcular. Podrían, algunos, llegar a entender todo eso […] Tiene que ver con que no solamente ves imágenes y pre imágenes y haces unos gráficos de la función. Tú ves características de las funciones, por ejemplo, que sea inyectiva. Allí necesitas lógica porque hay una implicancia. También, dentro de eso, juegas con los valores de verdad; porque se descarta, pero no se explica que, si el antecedente es falso, la implicancia es verdadera. Por lo tanto, ese caso no se analiza y por eso se considera la primera como verdadera... en la inyectividad. Ese tipo de cosas te vas encontrando. Funciones como tal, involucra un montón de cosas. Aquí estamos involucrando temas de lógica, conjuntos, tienes cuantificadores... [Ent1 23-24]*

Arturo señala que los aspectos particulares de la función, como cálculo de imagen o la correspondencia entre elementos de dos conjuntos, pueden ser comprendidos por los estudiantes. Sin embargo, las dificultades se presentan al articular todas las ideas involucradas en el concepto de función.

> *E: ¿Hay algunos estudiantes a los que el concepto de función les es más fácil?*
>
> *Arturo: Todos presentan dificultades. La diferencia está en el grado de dificultad. Para ninguno es muy simple. [Ent2 253-254]*

De las intervenciones anteriores, se puede observar el conocimiento de Arturo sobre dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto de función por sí mismos respecto de su definición en lenguaje formal y los conceptos asociados a la función que dan estructura al concepto.

Conocimiento sobre las dificultades para ubicar puntos de la gráfica de la función y sobre los ejes cartesianos (KFLM-D-2)

En una de las sesiones de clase, Arturo enseña diferentes representaciones para la función (KMT-E-3). Una de ellas es la representación cartesiana, para la cual se han recordado los conceptos claves como plano cartesiano, ejes coordenados y punto en el plano. Arturo solicita a sus estudiantes realizar la representación gráfica de la función $f(x) = x + 3$ en la pizarra, momento que permite observar su conocimiento sobre algunas dificultades de los estudiantes.

Arturo: Según el dibujito que yo hice, ¿dónde tendría que estar el -3 si la imagen del -3 es 0?

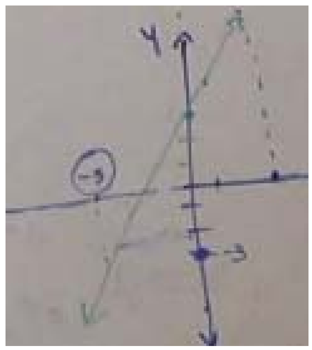


Imagen 39: Bosquejo de la representación gráfica de la función f(x)=x+3

A: Al otro lado, abajo.

Arturo: Alguien tiene otra idea de dónde ubicarlo.

A: Pero cuál es la ...

Arturo: Estaba tratando de ubicar... dije, el -3 estaba aquí [marca el -3 en el eje X], pero...

A: ¡No! está al revés.

Arturo: Puse el -3 ahí [apunta al .3 en el eje X], pero no está, ¿por qué esta incorrecto ahí? Porque la imagen del -3 es el…

A: 0.

Arturo: 0. ¿Quién sabe dónde debe estar el -3 en este gráfico? sin considerar... ¿dónde está el -3?

A: ¿Por qué estaba mal el -3 ahí?

Arturo: Porque la imagen del -3 es 0.

A: ¿Eso no era pre imagen?

Arturo: Si yo lo estoy ubicando el -3 ahí [en el eje X], tendría imagen un valor por acá [se refiere a un punto en el tercer cuadrante sobre la recta] que no es 0, entonces ¿dónde tengo que poner al -3 para que la imagen sea 0 y el dibujo represente eso?

As: En el 3.

Arturo: Yo puse el -3 ahí [en el eje X].

A: ¿En el 0?

Arturo: ¿Dónde? Corran ese punto [se refiere al -3 ubicado en el eje X. Lo encierra en un círculo], ese valor a dónde debe estar.

A: ¿Dónde está la línea verde?

Arturo: Con esa función que está ahí, es la misma, no la he cambiado, dónde tengo que correr ese, ¿cuál es su posición correcta? [ofrece el plumón a los estudiantes para que pasen a la pizarra para ubicar el punto]

A: Ah, en el punto de donde se corta la línea azul y verde.

Arturo: ¡Exactamente! Muy bien. ¿Entendieron por qué tiene que estar aquí?

As: No.

Arturo: Porque si el x es -3, dijimos que su imagen.

A: Pero ese no estaba.

Arturo: Porque es equivalente a lo que... lo que yo estoy escribiendo es equivalente a lo que yo estaba preguntando acá. Si x fuera -3, f(-3) es igual a 0. Eso significa que el punto relacionado con esos datos es…

A: (3,0).

Arturo: (-3,0). El (-3,0) es ese punto que está ahí. Es un error colocarlo en ese punto [se refiere al -3 que está encerrado en el círculo], porque realmente no estaba ahí, estaba acá [marca la intersección entre la recta y el eje X]. Si hubiera estado ahí, la imagen del -3 me hubiera dado un número distinto a 0, pero con esta función no podía pasar porque la imagen de -3 es 0 y la gráfica tiene que representar eso. [786-812]

Arturo propone esta actividad para reforzar la ubicación de puntos en el plano, a la vez que practica la construcción de la representación gráfica de la función y aborda la dificultad de los estudiantes al representar puntos sobre los ejes que son los puntos donde la función tiene imagen 0. En la entrevista se consulta directamente a Arturo si conocía estas dificultades, a lo que responde afirmativamente, reconociendo que la dificultad está, precisamente, al ubicar puntos en los ejes y no en otra región del plano.

E: En el plano cartesiano, al ubicar puntos, también presentaron [los estudiantes] diferentes dificultades al ubicar el (0,3). ¿Conoces estas dificultades?

Arturo: Si. Por eso hice el repaso antes, porque sabía que iban a cambiar ciertos valores en los ejes. No con el (1,5) u otro, sino los que tienen que ver con los ubicados en los ejes. [Ent2 257-258]

Por otra parte, Arturo reconoce las dificultades de los estudiantes para identificar un par ordenado, de la forma (x, $f(x)$), como punto del plano y elemento del gráfico de la función.

Arturo: […]Aquí encontré una dificultad; que un punto pertenece a una función si es que la segunda coordenada es la imagen de la primera. Eso cuesta un montón que lo entiendan. [Ent1 24]

De lo anterior, se puede observar conocimiento de Arturo sobre dificultades que poseen los estudiantes al ubicar y graficar puntos sobre los ejes del plano cartesiano que son parte del gráfico de una función.

Conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la función logaritmo (KFLM-D-3)

Aunque el tema de las funciones logaritmo y exponencial no son parte del curso observado, Arturo acomoda los contenidos que aborda en la enseñanza de las funciones para preparar a los estudiantes en el aprendizaje de estas funciones. La inclusión de la enseñanza de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad de las funciones pretende apoyar las dificultades de los estudiantes en la comprensión de la función logaritmo como la inversa de la función exponencial, más allá que solo como un operador.

> *E: También agregas inyectividad, epiyectividad y biyectividad. ¿Eso aparece en el programa, es parte del Currículum del curso?*
>
> *Arturo: No, no está como tal.*
>
> *E: ¿Por qué lo enseñas?*
>
> *Arturo: Porque necesito eso para ver función inversa.*
>
> *E: Eso si aparece en el Currículum.*
>
> *Arturo: Si. Aparece en el curso siguiente función raíz, función exponencial y logaritmo. Entonces, generalmente el enfoque de los textos es que lo ven como un operador.*
>
> *E: ¿Esa idea de operador es la misma idea de la función como operador anterior?*
>
> *Arturo: Si. El logaritmo hace tal cosa y esa es la idea. El argumento y la base del logaritmo tienen condiciones, pero ¿por qué tiene esas condiciones?*
>
> *Hubo diferencias en los resultados. Fue mejor que los cursos anteriores donde yo había visto el logaritmo como operador, porque tenía un contexto. Lo vi como la función inversa de la exponencial. En la exponencial, analizamos el dominio. Empezamos a "achicar" el dominio para que tuviese una cierta regularidad y que todos se comportaran más o menos de la misma forma y que no se me escapara el comportamiento de los elementos. Por ejemplo, si el x fuera negativo, como saben potencias, significaría que, si es par, entonces queda arriba. ¿Me entiendes?*
>
> *Analizamos. Si no hay una regularidad, un comportamiento similar, entonces no me sirve. Ahí llegamos al dominio para que tuvieran un cierto comportamiento.*
>
> *Volvimos a que era biyectiva, haciendo todo el proceso, no viendo el contenido de nuevo, sino que recordando que la función tenía esas características por lo que habíamos visto. Entonces yo voy a definir la inversa y a esa inversa le llamo logaritmo. De ahí empezamos y definíamos. Entonces logró tener sentido [para los estudiantes]. Tuvo un sentido el dominio y el recorrido de la exponencial, porque se construyó así para que tuviera ese comportamiento, entonces el logaritmo tiene sentido.*
>
> *El estudio de la inyectividad y epiyectividad tenía ese objetivo. Pero no es un tema de ese curso, sino que es para los posteriores. [Ent2 127-134]*

Se observa conocimiento de Arturo sobre dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de la función logaritmo cuando es enseñada solo como operador (a nivel procedimental, aplicando sus propiedades y calculando logaritmos en diferentes bases). De paso, se puede observar conocimiento de Arturo sobre las ventajas que se presentan en el aprendizaje del logaritmo cuando se enseñan los conceptos de funciones biyectivas previamente, lo que ofrece un sentido más concreto para los estudiantes.

Conocimiento sobre las dificultades que presentan los estudiantes frente a la comprensión de la noción de función inversa y la determinación de su expresión algebraica para $f(x) = ax + b$ (KFLM-D-4)

Arturo muestra un primer indicio de conocimiento sobre dificultades de los estudiantes en la comprensión de la función inversa cuando se detiene la explicación de este concepto para solicitar mayor atención de sus estudiantes de modo que no se pierdan los detalles de esta nueva idea.

> *Arturo: Entonces este sería un ejemplo de función biyectiva. ¿Por qué necesitamos tener claro qué es lo que es una función biyectiva?*
>
> *Porque en esta función voy a definir una nueva función, pero en vez de hacer, y aquí préstenme mucha atención. Esta es una función que va de A en B. Puedo definir una función que, en vez de ir de A en B, vaya de B en A, o sea que vaya en este sentido. Este pasaría a ser el conjunto de partida y este el conjunto de llegada, porque la flecha está en ese sentido, entonces en ese sentido, si trato de definir en este sentido la primera función dibujada, ¿Sería función? [1527]*

Arturo procura que sus estudiantes comprendan la necesidad de verificar las condiciones que garantizan la existencia de la función inversa.

> *Arturo: […] ¿Queda más o menos claro la condición que tiene que ser biyectiva para poder definir la función al revés? [1538]*

Por otro lado, Arturo también muestra reconocer una dificultad de los estudiantes en el procedimiento para determinar la expresión de la función inversa. Cuando solicita la inversa de una función de la forma $f(x) = x + b$ o $f(x) = ax$, los estudiantes no presentan problemas en determinar la expresión de la inversa, sin embargo, Arturo reconoce que existen dificultades cuando la función que presenta a sus estudiantes está dada mediante su expresión algebraica de la forma $f(x) = ax + b$.

> *Arturo: Se fijaron que si combino de alguna forma las funciones [se refiere a expresiones algebraicas del tipo $f(x) = ax + b$], ya no es tan evidente encontrar las inversas. ¿Cómo optimizamos ese proceso para encontrarlas siempre? Lo que voy a mostrar es cómo hacer un proceso algebraico para no andarlas buscando al tanteo, porque eso fue lo que hicimos recién; probar y cuál nos funcionaba. [1630]*
>
> *Arturo: Esta es una función que es biyectiva, por tanto, yo puedo definir la función f^{-1}.*
>
> *¿Qué expresión lleva x en un elemento acá? Si el 2 va al 0, el 5 va al 1, el 8 va al 2, el 11 va al 3, ¿qué expresión llevaba? [pregunta por la expresión de la función inversa]*

A: 3x+2.

A: x-2 partido 3.

A: No, todavía estamos de allá para acá.

Arturo: Estamos en el sentido contrario.

A: 3x+2.

Arturo: Esta función lleva un x en 3x+2, pero aquí.

A: 3x-2.

A: x-2 partido 3.

Arturo: Esa era la expresión. Detectar esta no era tan evidente como detectar la otra [se refiere a una función del tipo $f(x) = x + b$]. [1658-1667]

Arturo identifica que los estudiantes pueden determinar la inversa de una función simple, $f(x) = x + b$ o $f(x) = ax$, pero tienen dificultades cuando la función es de la forma $\mathrm{f}(x) = ax + b$. De este modo, se observa el conocimiento de Arturo sobre las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la inversa de la función y en la determinación de su expresión algebraica.

Conocimiento sobre las fortalezas de los estudiantes al evaluar expresiones algebraicas con los números 0 y 1 (KFLM-F-1)

En el cálculo de imágenes y pre imágenes para funciones dadas mediante su expresión algebraica, Arturo señala que los números 0 y 1 son los más fáciles de evaluar en las expresiones algebraicas.

Arturo: Yo podría preguntar: "Determine la imagen de 0"... es fácil. [161]

Arturo: En palabras, con el ejemplo y en contexto; si esta es mi función f(x)=x+1, yo de ésta puedo sacar la imagen del 1, puedo sacar la imagen del 0 y puedo sacar la imagen del -1. Yo puse el 1, 0 y -1 porque son números que son fáciles de evaluar en cualquier expresión. Podría elegir el 100, -50, el número que se me ocurra, pero dada esta función, ¿cuál es la imagen del 1 cuando pasa por esa función? [220]

Arturo: Estábamos diciendo que esto me tenía que dar 6 [escribe 5x+1=6], y si despejábamos, 5x me da 5, por lo tanto, x es 1.

A: Ah, verdad que se tiene que hacer eso.

Arturo: En este caso no fue necesario porque era un valor simple de determinar. La pre imagen del 6 es 1, porque el 1 al evaluarlo en la función me daba 6. [388-390]

Arturo: Por dos puntos pasa una única recta o una recta tiene al menos dos puntos. Con dos valores para x me basta. ¿Qué valores son los mejores para reemplazar?

A: 0 y 1.

Arturo: 0 y 1. Puedo reemplazar cualquier otro, pero los más fáciles son esos. Si el x fuese 0, f(x) ¿Cuánto me va a dar? [767-769]

Al graficar la función, se determinan dos puntos del gráfico usando el 0 y el 1 para formar los puntos y trazar la recta. En este procedimiento también Arturo declara que estos números son los más fáciles de evaluar.

Arturo: Ya sabemos que es una recta, entonces ¿cuántos valores para x necesitamos como mínimo?

As: 2.

Arturo: 2. Y ¿qué valores les doy a la x?

A: 0 y 1.

Arturo: Generalmente 0 y 1, porque son más fáciles. Si x vale 0, ¿cuánto es f (0)? ¿cuál es la imagen de 0? [1064-1068]

Arturo: Uno puede ponerle estos de aquí, por son funciones que tienen por dominio los racionales. Yo puedo darme el lujo de elegir el número que se me ocurra. ¿por qué siempre elegimos estos? porque es fácil reemplazar el 0 y el 1. [1075]

En general, Arturo reconoce la facilidad de evaluar el 0 y el 1, pero no la declara como algo específico de los estudiantes, pues en algunas de las intervenciones anteriores puede leerse que el profesor se refiere a una facilidad generalizada. Debido a esto, en la entrevista, se aclara este punto.

E: Cuando evalúan la expresión algebraica dices que utilicen el 0 y el 1 porque es más fácil, pero ¿es más fácil para ellos o para ti?

Arturo: En general, para todos. Si tengo que evaluar, no tomaré el 3/5. Sé que con un número racional escrito como fracción les cuesta. Siempre un entero va a ser más fácil que una fracción. Ahí empiezas a discriminar qué enteros usar. [Ent2 255-256]

Arturo señala que la evaluación con números enteros es más simple que con números racionales (no enteros) y que, de entre ellos, el 0 y el 1 son más fáciles de evaluar en general, particularmente para sus estudiantes. Durante las sesiones de clase de Arturo, se observa su conocimiento sobre esta facilidad que presentan sus estudiantes sobre la evaluación del 0 y del 1 en las expresiones algebraicas asociadas a las funciones que trabaja en ese nivel.

Conocimiento sobre la facilidad de los estudiantes para representar funciones lineales utilizando la cuadrícula de sus cuadernos (KFLM-F-2)

Durante la construcción de la representación gráfica de una función afín, el profesor identifica que el uso de papel cuadriculado para graficar favorece la construcción de representaciones más precisas.

Arturo: Por eso, porque mis dibujos no están bien graduados [los que realiza en la pizarra]. Para ustedes va a ser fácil porque las distancias van a ser todas iguales [los cuadros del cuaderno]. Está claro que aquí mis distancias no son todas iguales porque estoy dibujando en papel blanco. [824]

Arturo: […] Todos deben tener la misma distancia porque si no, no les queda exacto y no podrían deducir que el punto de corte fuera ese si es que no lo hacen graduado correctamente […] [1075]

De lo anterior, y junto a lo expuesto en (KMT-R-1) sobre la potencialidad de la cuadrícula de los cuadernos de los estudiantes, se observa el conocimiento de Arturo sobre la facilidad que presenta para los estudiantes utilizar la cuadrícula de sus cuadernos para construir la representación cartesiana de una función.

Conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes al trabajar con números racionales no enteros o letras y fortalezas al trabajar con números naturales o enteros (KFLM-DF-1)

Arturo conoce que el ámbito numérico que manejan sus estudiantes incluye hasta los números racionales (KMLS-S-5). Las actividades que el profesor propone en clase incluyen números naturales, enteros y racionales, escritos en cualquiera de sus formas, sin embargo, se observa que Arturo privilegia trabajar con números naturales o enteros durante los primeros ejemplos para luego aumentar el grado de complejidad al incluir números racionales en su representación fraccionaria o decimal (como se mencionó en KMT-E-4). En este sentido, Arturo reconoce que trabajar con números enteros es más simple para sus estudiantes que trabajar con racionales.

> *Arturo: 9/5, ¿verdad? Ese es la pre imagen del 10, que en ese caso no era fácil de determinar como lo fue la pre imagen del 6.*
>
> *A: Es que yo puse 1,8 y también me da.*
>
> *A: ¡Pero es lo mismo!*
>
> *Arturo: Para algunos, encontrar este valor [9/5] puede ser simple y para otros no, pero va a ser el resultado de resolver esta ecuación. [400-403]*

Además, la inclusión de letras que representen números, por ejemplo, en ecuaciones literales de primer grado, constituye otro factor que, según Arturo, dificulta el trabajo de los estudiantes.

> *Arturo: Es un proceso más simple. Todo lo que tenga números y no letras va a ser simple para ellos. [Ent2 140]*

Los ejemplos que propone Arturo para realizar explicaciones consideran estas dificultades de los estudiantes. En la siguiente intervención, se observa que Arturo utiliza números enteros para que sus estudiantes comprendan el ejemplo dado sobre identificar la expresión algebraica de la función que está definida mediante la correspondencia entre números.

> *Arturo: Voy a poner un ejemplo a ver si podemos descubrir. Vamos a hacer conjuntos bien grandes. Vamos a definir una función del conjunto Q al conjunto Q. Voy a tomar algunos ejemplos. El 1 lo voy a mandar [hacer corresponder con] al 3, el 2 al [4, 3 al 5, 4 al 6]. Voy a poner solo números enteros para que se entienda. Voy a seguir mandando, se pueden seguir mandando, incluso puedo seguir para allá; podría decir el 0 lo voy a mandar al 2. Miren aquí, después terminan de copiar. Según esta secuencia, donde el 0 lo mande al 2, el 1 lo mandé al 3, el 2 lo mandé al 4, el 3 lo mandé al 5, el 4 lo mandé al 6, el 5 ¿a dónde lo mandaría? [1564]*

Arturo reconoce que los procedimientos que involucran números enteros son menos complejos para sus estudiantes.

> *E: Los estudiantes usan la técnica del "tanteo" de números. ¿Siempre la utilizan? ¿Conoces otra técnica de los estudiantes para encontrar la pre imagen?*
>
> *Arturo: Si, inicialmente siempre la usan. No recuerdo que usen otra. Generalmente, ellos empiezan a buscar qué número cumple mientras sea entero, pero si no es entero, se les complica. [Ent2 199-200]*

Cuando se le pregunta a Arturo por los ejemplos que selecciona en sus sesiones, señala que busca aquellos que sean abordables por los estudiantes, es decir, que posean números, pues la inclusión de letras que representen números provoca dificultades en ellos.

> *E: ¿Son importantes los ejemplos en la clase?*
>
> *Arturo: Si. En todas las clases, porque estás contextualizando. Los estudiantes necesitan ver números. Cuando ven muchas letras empiezan a colapsar. ¿Cómo lo voy a hacer?, ¿Cómo voy a aplicar esto que me está hablando? [Ent2 211-212]*

Como ya se mostró más arriba (KFLM-F-1), Arturo reconoce la facilidad de los estudiantes al utilizar el 0 y el 1 en las evaluaciones, pero además reconoce la dificultad de utilizar números racionales no enteros en las evaluaciones de expresiones algebraicas, lo que también condiciona la selección de números para que los ejemplos sean accesibles para los estudiantes.

> *Arturo: En general, para todos. Si tengo que evaluar, no tomaré el 3/5. Sé que con un número racional escrito como fracción les cuesta. Siempre un entero va a ser más fácil que una fracción. Ahí empiezas a discriminar qué enteros usar. [Ent2 256]*

De lo anterior, se puede observar conocimiento de Arturo sobre dificultades que presentan los estudiantes al abordar problemas que incluyen números racionales no enteros y su conocimiento de las facilidades de los estudiantes cuando trabajan con números enteros.

Formas de interacción con el contenido

Conocimiento sobre las técnicas utilizadas por los estudiantes para determinar pre imágenes de una función (KFLM-I-1)

Cuando Arturo enseña cómo determinar la pre imagen de un elemento, plantea problemas que pueden ser resueltos mediante un cálculo mental y otros que requieren de la resolución de una ecuación.

El profesor muestra la resolución de ecuaciones como técnica oficial para ello, pero identifica las estrategias que los estudiantes utilizan para determinar las pre imágenes, como se puede ver al final del siguiente extracto.

> *Arturo: Repito. Aquí, porque la función era simple [x+4], yo podía descubrir fácilmente a quién mandé para que la imagen fuera el 2, entonces aquí dijimos que era el -2, porque -2+4 me da 2.*
>
> *Lo que yo quiero hacer es que encontremos una forma de hacer esto independiente de la función que me den, hacer el mismo procedimiento independiente de la función y quiero que lo deduzcamos. Aquí, como era simple, pude descubrir a quién mandé para que les diera el 2, por eso les cambié la función a una en que no sea tan evidente a quién mandé para que llegue al 0.*
>
> *Aquí están pensando "ah, puede ser el -1" pero la imagen de -1 va a ser [calcula]*
>
> *-2+1=-1 ¿cierto? ¿Me sirve ese?... no me sirve. ¿Quién otro podría ser candidato? [345]*

Arturo muestra conocer que la estimación de números -el tanteo o “achunte” como se refiere en el extracto anterior- es uno de los procedimientos que habitualmente los estudiantes aplican para determinar pre imágenes en funciones simples, de la forma $f(x) = x + b$.

Arturo: ¿Podemos encontrar una forma de determinar la pre imagen sin estar jugando al "achunte"? [367]

Arturo: Lo último que estábamos viendo era cómo, dada una función [escribe f(x)=5x+1], cómo poder determinar la pre imagen de una forma más simple y no usar "el tanteo" o el "achunte" para poder determinar ese valor. [378]

En la entrevista, Arturo confirma que conoce esta técnica de “tanteo” como aquella que los estudiantes utilizan al inicio del cálculo de pre imágenes.

E: Los estudiantes usan la técnica del “tanteo” de números. ¿Siempre la utilizan? ¿Conoces otra técnica de los estudiantes para encontrar la pre imagen

Arturo: Si, inicialmente siempre la usan. No recuerdo que usen otra. Generalmente ellos empiezan a buscar qué número cumple mientras sea entero, pero si no es entero, se les complica. [Ent2 199-200]

Se observa el conocimiento de Arturo sobre un procedimiento alternativo que realizan los estudiantes para determinar la pre imagen en una función.

Conocimiento sobre los procedimientos alternativos de los estudiantes para encontrar la intersección entre la función afín y el eje X (KFLM-I-2)

Otro procedimiento que Arturo enseña a sus estudiantes es la determinación del punto de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas. El profesor propone a sus estudiantes ejercicios en los que les pregunta cómo determinar este punto. Como se señaló en el indicador anterior, Arturo presenta la resolución de la ecuación $y = f(x)$ como técnica oficial para encontrar la pre imagen del 0. Además, tanto en el KoT-P-3 y KoT-P-5 como en el KSM-A-1, se menciona el conocimiento de Arturo sobre los conceptos involucrados en esta acción. En el presente indicador destacamos el conocimiento de Arturo sobre las maneras alternativas que tienen los estudiantes para determinar el punto donde la gráfica de la función intersecta al eje X.

A: Yo lo hice con una ecuación para sacar que la función sea igual a 0, y eso me dio -2.

Arturo: Entonces usted tomó la función, la igualó a 0 y calculó el valor de x.

A: Si -2.

Arturo: Y le dio -2. ¿Este es el punto donde la gráfica corta al eje X?

A: Si.

Arturo: El -2 ¿es un punto?

A: No, pero es que tuve que...

A: (-2,0).

Arturo: ¡Eso! el punto es el (-2,0).

> *¿Hay alguien que lo haya pensado de una forma distinta? Que no haya hecho esto que está aquí.*
>
> *A: Yo lo hice gráficamente. Tracé la línea y al pasar cayó en el -2.*
>
> *Arturo: Muy bien. La otra opción es no pensarlo como ecuación, sino que tomar la función, graficarla y darse cuenta que, como tienen sus cuadernos bien graduados, si lo hacen correctamente, ese punto va a ser justamente el -2 en el valor de x, y ese punto como coordenada es el (-2,0). ¿Hay alguien que quiera acotar algo más a lo que estamos diciendo? [1043-1053]*

En el extracto anterior, cuando Arturo pregunta si se ha resuelto de otra manera el problema, se tiene un indicio de conocimiento sobre otras formas en que sus estudiantes pueden obtener la intersección de la gráfica de la función con el eje X. Este indicio se confirma tras la intervención del estudiante que señala haberlo hecho gráficamente. Arturo valida este procedimiento y su resultado, mostrándolo como una respuesta que esperaba de sus estudiantes.

Inmediatamente después, Arturo pregunta a sus estudiantes por su preferencia sobre ambos procedimientos; lo hace preguntando por el sentido que le otorgan a cada uno de ellos, validando ambos.

> *Arturo: Los que no lo hicieron, ¿entienden las dos formas en que se les ocurrió a sus compañeros?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: ¿Cuál les causa más sentido?*
>
> *A: La del gráfico es más simple.*
>
> *A: La ecuación.*
>
> *Arturo: Eso va a ir dependiendo de la función. ¿Hay alguna duda de la clase de hoy? [1055-1060]*

En esto último, se observa que Arturo identifica dos formas en que sus estudiantes abordan la determinación de la intersección entre la gráfica de la función y el eje X, así como también que la técnica utilizada dependerá según el tipo de función que se tenga.

De lo anterior, se observa el conocimiento de Arturo sobre los procedimientos alternativos que utilizan sus estudiantes y las interacciones entre estudiantes y estos procedimientos. Al mismo tiempo, se puede observar que el profesor puede dar sentido a estos procedimientos.

Conocimiento sobre el vocabulario usual de los estudiantes en el contexto de las funciones (KFLM-I-3)

En este indicador reunimos las evidencias de conocimiento de Arturo sobre el vocabulario que comúnmente utilizan sus estudiantes cuando abordan diferentes temas relacionados a la función.

Conocimiento sobre el vocabulario usado por los estudiantes al graficar en el plano cartesiano (KFLM-I-3.1)

El profesor enseña a identificar el recorrido de la función cuando está representada en el plano cartesiano. Uno de los ejemplos que muestra es el de la siguiente función (Imagen 40).

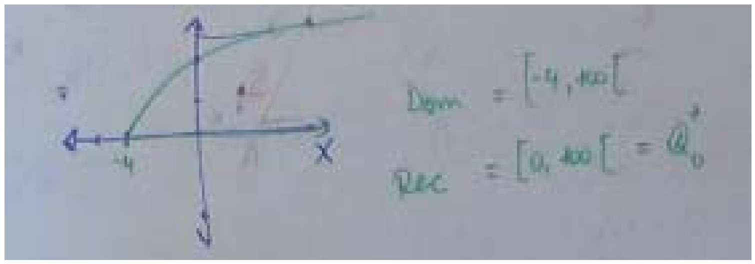


Imagen 40: Dominio y recorrido de una función raíz.

Sobre este ejemplo, los estudiantes señalan con sus palabras cuál es el dominio y recorrido de la función, indicando que el dominio y el recorrido *van hacia* el infinito, pues han estudiado la representación gráfica de los intervalos de ese tipo (ver KMLS-S-4). Por su parte, Arturo utiliza estos términos para referirse al comportamiento de la función y con ello determinar dominio y recorrido.

> *Arturo: Lo único que yo estoy diciendo es que ese intervalo que ustedes me dieron yo también lo puedo escribir de esta forma [escribe en la pizarra* Q^{+}_{0}*]. Ese intervalo, que era del 0 hacia arriba, era del 0 al infinito positivo, pero ese intervalo también lo puedo escribir así [escribe* Q^{+}_{0}*]. Como también lo puedo escribir así [*Q^{+}_{0}*], si yo pongo ese o ese [se refiere al intervalo y a* Q^{+}_{0}*] como respuesta, ambas son correctas. El gráfico que tenemos ahí, tenemos el plano cartesiano y la función.*
>
> *A: ¿Por qué va para arriba?*
>
> *Arturo: Es una visualización de una función. Las funciones, las que estamos viendo, son un tipo de funciones, eso no significa que todas las funciones que vamos a ver su representación van a ser una recta. Estamos, específicamente, en esas. Hay otras que su representación gráfica puede variar de cualquier forma; puede ser cualquier combinación hasta de curvas, de curvas con rectas, combinaciones tenemos por montón.*
>
> *A: ¡Eso si en el recorrido! ¿Por qué serían todos los positivos infinitos si llega y después va hacia el lado así, recto? [ve que la gráfica de la función "no sube siempre"]*
>
> *A: Está subiendo un poquito.*
>
> *Arturo: Aquí me está diciendo que, a medida que avanza, va subiendo un poquito nada más, aquí la hice un poco más [dibuja otra función similar]... a medida que avanza va variando un poco más.*
>
> *A: Pero mientras que varía un poco va subiendo más.*
>
> *Arturo: Siempre va subiendo. [904-911]*

Los estudiantes señalan que la función “*va para arriba*” o “*está subiendo*”. Arturo también utiliza estos términos para continuar con la enseñanza de la determinación del dominio y del recorrido.

Arturo: Estábamos diciendo que el dominio de la función son todos los elementos de acá [eje X] que tengan una imagen, y solo los que me servían eran estos que están aquí [marca el eje en la gráfica (Imagen 41)] porque solamente estos tienen una imagen en la función. En el recorrido no miro en el eje X, miro en el eje Y. Digo: ¿cuáles son los elementos de este eje que vienen de alguien?, o sea, cuáles son estos elementos que son imágenes de algún elemento del otro [dominio], entonces este que está aquí ¿es imagen de alguien? [marca un punto en el eje Y^+] Si, todos los que están acá son imágenes de alguien, porque si yo tomo un elemento aquí [en Y^-], este elemento ¿es imagen de alguien? No.

A: Del 0 para arriba.

Arturo: Del 0 para arriba, del 0 para arriba es del 0 al infinito. [917-919]

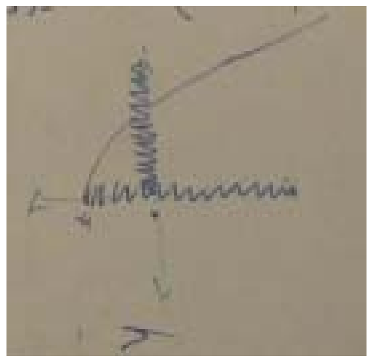


Imagen 41: Dominio y recorrido de la raíz- intervalos.

A los términos anteriores se agrega "para arriba" al referirse al recorrido marcado sobre el eje Y como conjunto no acotado superiormente y el término "avanza" para referirse al comportamiento de la función, sirviendo de referencia espacial para interpretar los componentes o comportamiento de la función. Todos estos términos, empleados por sus estudiantes y por él, son parte del conocimiento de Arturo sobre el vocabulario que utilizan los estudiantes en el contexto de las gráficas de la función.

Conocimiento sobre el vocabulario usado por los estudiantes para referirse a la función inversa (KFLM-I-3.2)

Otro término que hace referencia a una ubicación espacial se identifica cuando Arturo usa la frase "al revés" para indicar que la función inversa se define desde el recorrido al dominio de la función original. La siguiente intervención muestra cómo el profesor utiliza este término.

Arturo: Por eso lo importante cuando quiero definir una función, pero al revés, cambiando los conjuntos en vez de A en B, de B en A, la importancia para poder definir esta nueva función, en el sentido contrario. La importancia de que cumpla con esa condición, porque dimos aquí una función que no era biyectiva y cuando trataba de definir la función de B en A, no la puedo definir, no va a existir una función que vaya de B en A, pero si la función es biyectiva, ¿existe una función de B en A?

As: Si.

Arturo: Si, y esa función que se define de B en A es la inversa de la función original.

¿Qué es lo que vamos a trabajar hoy día? Si una función es biyectiva, entonces vamos a poder decir que existe su inversa, y que, si la función original, que era una función de A en B, la función inversa va a ser de B en A, eso es lo que vamos a definir ahora. ¿Queda más o menos claro la condición de que tiene que ser biyectiva para poder definir la función al revés?

A: Yo, esa parte no la entendí. Eso de 'al revés'. Esa flecha abajo [que va de B hasta A]. [1536-1539]

El profesor utiliza el término "al revés" para sustituir el término "inversa" del lenguaje técnico para las funciones, sin embargo, un estudiante indica que no comprende la idea de "al revés". En la entrevista, el profesor señala que estos términos resultan de la lectura de las funciones dadas en diagramas sagitales y que los estudiantes los conocen en el contexto de las funciones.

E: En la función inversa, le llamas "la función definida al revés" ¿Por qué usas esas palabras?

Arturo: Los estudiantes no usan la palabra "inverso", pero si saben lo que es al revés. En diagrama sagital, como leen de izquierda a derecha, al revés se lee de derecha a izquierda. Esa sería la función al revés. Como sinónimo de inversa.

E: ¿Qué otras palabras o conceptos usan los estudiantes para referirse a asuntos sobre las funciones?

Arturo: Por ejemplo, cuando ven una función creciente en el plano, ellos dicen que va para arriba. Si decrece, dicen que va para abajo. Lo mismo con los ejes. Los positivos para arriba y los negativos para abajo. Ellos seguían por lo que ven en la pizarra y sus puntos de referencia. Lo que está arriba y lo que está abajo. [Ent2 259-262]

Se observa que Arturo conoce que, para los estudiantes, el término "al revés" es más cercano que "inversa" para referirse a la función inversa, además del uso frecuente de las referencias espaciales "arriba-abajo" para la lectura del crecimiento de la función cuando se tiene su representación gráfica. Los indicadores (KFLM-I-3.1) y (KFLM-I-3.2) muestran el conocimiento de Arturo sobre la interacción de los estudiantes con el tema de las funciones respecto a los términos que usan los estudiantes para referirse a conceptos asociados a la función.

Aspectos emocionales del aprendizaje (Intereses y expectativas)

Conocimiento sobre la actitud de los estudiantes frente al nivel de abstracción que requiere el concepto de función (KFLM-E-1)

Arturo se refiere a cómo se sienten los estudiantes cuando estudian las funciones. Señala que los ejemplos inciden en el aprendizaje del tema a trabajar, pues su selección y presentación afecta a la forma en que los estudiantes los perciben.

E: ¿Son importantes los ejemplos en la clase?

Arturo: Si. En todas las clases, porque estás contextualizando. Los estudiantes necesitan ver números. Cuando ven muchas letras empiezan a colapsar. ¿Cómo lo voy a hacer?, ¿Cómo voy a aplicar esto que me está hablando? [Ent2 211-212]

La intervención muestra que Arturo conoce la actitud de los estudiantes frente a contenidos que requieren de la abstracción y el uso de letras como variables.

A continuación, la tabla 12 presenta los indicadores de conocimiento identificados en el subdominio KFLM.

Tabla 12: Síntesis de indicadores por categoría del KFLM

	Categorías	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas - KFLM	Teorías de aprendizaje		No se registraron evidencias
	Fortalezas y Dificultades		Dificultades
		KFLM-D-1	las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de función
		KFLM-D-2	las dificultades para graficar puntos sobre los ejes cartesianos
		KFLM-D-3	las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la función logaritmo
		KFLM-D-4	las dificultades que presenta la comprensión de la noción de función inversa y la determinación de su expresión algebraica para f(x)=ax+b
			Fortalezas
		KFLM-F-1	las fortalezas de los estudiantes al evaluar expresiones algebraicas con los números 0 y 1
		KFLM-F-2	la facilidad de los estudiantes para representar funciones lineales utilizando la cuadrícula de sus cuadernos
			Dificultad y Fortaleza
		KFLM-DF-1	las dificultades de los estudiantes al trabajar con números racionales no enteros o letras y las fortalezas al trabajar con números naturales o enteros
	Forma de interacción de los estudiantes con el contenido	KFLM-I-1	las técnicas utilizadas por los estudiantes para determinar pre imágenes de una función
		KFLM-I-2	los procedimientos alternativos de los estudiantes para encontrar el punto de corte de la función afín y el eje X
		KFLM-I-3	el vocabulario usual de los estudiantes en el contexto de las funciones 3.1 el vocabulario usado por los estudiantes al graficar en el plano cartesiano 3.2 el vocabulario usado por los estudiantes para referirse a la función inversa
	Aspectos emocionales	KFLM-E-1	la actitud de los estudiantes frente a la abstracción que propone el concepto de función

Conocimiento de los estándares de aprendizaje en matemáticas (KMLS)

Este conocimiento se observa cuando el profesor hace referencia a qué y cómo se espera logren sus estudiantes en el estudio del concepto de función, tanto a nivel conceptual como procedimental, y respecto a cómo un tema potencia el estudio de otro.

Expectativas de aprendizaje

En esta categoría incluimos aquel conocimiento que muestra Arturo a cerca de lo que sus estudiantes deben/pueden aprender en el nivel actual sobre el concepto de función. Este conocimiento se ve reflejado en aquello que el profesor enseña y argumenta sobre su pertenencia a documentos que regulan el aprendizaje de los estudiantes.

Conocimiento sobre lo estipulado como aprendizaje esperado de los estudiantes sobre la función (KMLS-E-1)

Una de las categorías con menos evidencias de conocimiento especializado que Arturo manifiesta durante sus sesiones de clases es la actual, que tiene relación con el conocimiento sobre aquello que debe ser enseñado y aprendido en el nivel en que el profesor enseña. Durante las sesiones de clases, Arturo menciona algunos objetivos, pero no se detiene en ello ni sobre su relación con los documentos oficiales.

En la entrevista Arturo se refiere a los programas de estudio, a la propuesta de enseñanza para la función y a lo que deben aprender sus estudiantes en este nivel escolar explícitamente.

> *Arturo: Por ejemplo, justo antes habíamos visto ecuaciones e inecuaciones. ¿Para qué me sirve eso? Ahora se usa...*
>
> *Y ¿para qué me sirven funciones?*
>
> *Bueno, está todo modelado con funciones. Un montón de cosas que se modelan.*
>
> *Ese es el objetivo. De hecho, es el rol principal por el que se ven funciones con el tema de modelación. [Ent1 16]*

Arturo muestra conocer cuál es el objetivo y enfoque de la enseñanza para la función, el que consiste en la modelación de situaciones.

> *E: ¿Sabes cómo se propone el estudio de las funciones en el programa de estudio del nivel?*
>
> *Arturo: Se aborda a nivel de aplicaciones y modelación. [Ent2 247-248]*

Para Arturo, el programa posee un enfoque que determina, en parte, lo que deben aprender sus estudiantes.

> *Arturo: El enfoque [del programa de estudio] es que ellos aprendan que las funciones nos ayudan en un contexto cotidiano. Que hay funciones que solucionan las cuentas. Para allá va. Uno hace este previo para que el concepto matemático de función no quede solo en la aplicación.*

> *Si me pongo a analizar la idea que tienen los que hicieron el programa, en el programa de funciones se ve el concepto, pero no contextualizan en el conjunto. No está contextualizado, eso lo hice yo, porque yo necesitaba un contexto en un conjunto numérico donde trabajar con la función. Para mí, no tenía sentido [estudiar la función sin contextos] [Ent2 72]*

Arturo destaca el rol que tiene el contexto y situaciones cotidianas en las que se debe mostrar la función.

> *E: Hablas de que la orientación del programa tiene que ver con la aplicación. La aplicación ¿está enfocada en las cuentas?*
>
> *Arturo: No me acuerdo bien cuál es el objetivo de la función como tal, pero el enfoque general es interpretar información pensando en la incorporación de datos en estadística; cómo manejas datos y cómo manejas tu cotidianeidad, cómo la matemática está ahí. [Ent2 75-76]*

Pese a que en las sesiones de clases de Arturo la modelación de situaciones no está presente, el profesor la reconoce como parte de la orientación del programa para el estudio de la función y, con ello, lo que se espera que aprendan sus estudiantes.

De lo anterior, se puede observar conocimiento de Arturo sobre la orientación del programa de estudio para las funciones respecto a su aplicación a diferentes situaciones contextualizadas, lo que determina las expectativas de aprendizaje para la función en su rol en el modelamiento de acuerdo al nivel en que realiza sus clases.

Conocimiento sobre la inclusión de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad como temas de estudio en el contexto de la función (KMLS-E-2)

Se ha querido incluir aquí el conocimiento de Arturo sobre aspectos relacionados con el estudio de las funciones, pero que no se incluyen en los documentos oficiales, como la inyectividad, la epiyectividad y la biyectividad. Estos temas son presentados por Arturo como propiedades de la función y por tanto nos llevan a considerarlos dentro de nuestro análisis y márgenes de la investigación.

> *E: También agregas inyectividad, epiyectividad y biyectividad. Eso ¿aparece en el programa?, ¿es parte del currículum del curso?*
>
> *Arturo: No, no está como tal.*
>
> *E: ¿Por qué lo enseñas?*
>
> *Arturo: Porque necesito eso para ver función inversa.*
>
> *E: ¿Eso si aparece en el currículum?*
>
> *Arturo: Si. Aparece en el curso siguiente función raíz, función exponencial y logaritmo. Entonces, generalmente, el enfoque de los textos es que lo ven como un operador. [Ent2 127-132]*

En el extracto de entrevista, Arturo comenta sobre el estudio de los logaritmos en los cursos siguientes y la relación con el estudio de la biyectividad. Él indica que la inyectividad y epiyectividad no corresponde a ser enseñado en el curso actual y su inclusión atiende al estudio posterior de otras funciones, como logaritmos y exponencial. Se observa, por tanto, que Arturo conoce que los temas de inyectividad, epiyectividad y biyectividad no son incluidos como temas de estudio en el nivel en que imparte clases, sin embargo, él los incluye para dar sustento a los temas que posteriormente deberá enseñar.

Nivel de desarrollo conceptual y procedimental

En esta categoría se incluye el conocimiento de Arturo acerca de la profundidad con la que se espera deben aprender sus estudiantes los conceptos y procedimientos asociados a la función. Hemos separado aquellas intervenciones de Arturo que dan cuenta del conocimiento sobre los aspectos conceptuales de las que dan cuenta del conocimiento de aspectos procedimentales, organizándolos en dos grupos.

Conocimiento sobre el nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes sobre conceptos asociados a la función (KMLS-DC-1)

En este indicador se han incluido aquellas intervenciones que dan cuenta del conocimiento del profesor sobre la profundidad con la que sus estudiantes aprenden o deben aprender un determinado concepto vinculado a la función.

Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual esperado sobre la comprensión del concepto de función (KMLS-DC-1.1)

Como se muestra en los subdominios anteriores (KoT y KMT), Arturo conoce y enseña la definición del concepto de función. En esta definición destaca la unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen como propiedades que le permiten caracterizar la función y también identificar aspectos conceptuales que se desea que aprendan los estudiantes acerca de esta definición.

En este sentido, Arturo muestra conocimiento sobre el nivel con que sus estudiantes deben comprender lo que es y lo que no es una función y cómo se caracteriza este concepto. Este conocimiento se evidencia cuando Arturo solicita a sus estudiantes que decidan si una correspondencia es o no funcional.

> *Arturo: De esos diagramas, el primero ¿es función?, ¿cumple con que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde una única imagen?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: ¿Cuál es la imagen de b?*
>
> *As: 1.*
>
> *Arturo: ¿Cuál es la pre imagen de 5?*
>
> *As: d.*
>
> *Arturo: Y el segundo, ¿es función?*
>
> *As: No.*
>
> *Arturo: ¿Por qué no es función?*
>
> *As: Porque el c está solo.*
>
> *Arturo: Porque el c no tiene imagen. Aquí van a poner "esto si es función", porque cumple que cada elemento del conjunto tiene una única imagen, por ejemplo.*
>
> *A: ¿Hay que poner el porqué?*

> *Arturo: Si es que encuentra que sea necesario.*
>
> *Este ¿es función? [primer ejercicio] Si, es función. ¿Y el segundo?*
>
> *As: No.*
>
> *Arturo: No es función, y ¿por qué? En este si me interesa que pongan el porqué. ¿Por qué no es función el segundo? [175-189]*

Cuando Arturo solicita a sus estudiantes argumentar por qué una correspondencia no es función, busca evaluar el grado de comprensión de los estudiantes sobre el concepto a través de las propiedades que lo caracterizan. Previamente, en el mismo extracto, se puede observar que pide a sus estudiantes testear las propiedades incluidas en la definición y así poder concluir si las relaciones presentadas son o no funciones. En este sentido, los argumentos de sus estudiantes y la verificación de las propiedades le permiten observar si sus estudiantes reconocen la función a través de sus propiedades.

En el siguiente extracto, se confirma este énfasis en el desarrollo conceptual que Arturo espera en sus estudiantes.

> *Arturo: [inicia el segundo bloque de la clase] En el ejercicio 1, y aquí es donde quiero que me hagan las preguntas con respecto a qué es lo que tienen que hacer. En el ejercicio 1 dice: determina en cuáles de los siguientes diagramas se representa una función. ¿Qué es lo que queremos evaluar? Si reconocen o no el concepto de función. ¿Qué tiene que pasar para que algo sea una función? [1299]*

Se observa que Arturo pone como meta de aprendizaje el reconocimiento de correspondencias funcionales, marcando la profundidad con la que el concepto debe ser aprendido.

Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual esperado sobre la representación de la función (KMLS-DC-1.2)

Como una profundización en el conocimiento sobre la función se encuentra el grado de abstracción que los estudiantes deben lograr en cuanto a la identificación de diferentes representaciones para la función. Arturo muestra este conocimiento al posicionar la representación algebraica en un nivel más avanzado de abstracción respecto a la representación sagital.

> *Arturo: En esa función, ¿cómo entran? Lo multiplican por -3 y le suman 1, porque es lo mismo. Directamente reemplazas la x por el número para calcular la imagen.*
>
> *A: ¿No es necesario hacer el dibujito? [diagrama sagital]*
>
> *Arturo: No es necesario hacer el dibujito. Ya pasamos del dibujito hacia la forma algebraica [se refiere al paso de lo pictórico a lo simbólico]. [416-418]*

Se observa que el profesor conoce que el trabajo con expresiones algebraicas requiere un nivel de abstracción mayor al trabajo con diagramas sagitales y esto es lo que espera que logren sus estudiantes. En este sentido, Arturo da cuenta de su conocimiento sobre el desarrollo conceptual sobre las representaciones de la función pasando de lo sagital a lo algebraico, como meta de aprendizaje.

Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual esperado sobre la inyectividad de la función (KMLS-DC-1.3)

Respecto a los niveles de abstracción en los conceptos vinculados a la función, Arturo señala que la inyectividad de la función es una propiedad que sus estudiantes han de comprender visualizándola tanto en representaciones sagitales como en representaciones cartesianas para la función.

> *Arturo: Acabamos de discriminar, a nivel de gráficos, cuándo una función es inyectiva o 1 a 1. Lo que yo estoy haciendo acá, el fundamento, por lo menos eso quiero que les quede claro, si yo pongo distintos diagramas o gráficos de funciones, ustedes podrían visualizar si la función es inyectiva o no. [1141]*

En este extracto, es posible observar el conocimiento de Arturo acerca del reconocimiento de la inyectividad de una función, representada gráficamente, que deben lograr los estudiantes como manejo conceptual de la misma.

Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual esperado sobre la biyección de la función (KMLS-DC-1.4)

Por otro lado, también se identifica conocimiento de Arturo sobre el desarrollo conceptual de los estudiantes en el estudio de la biyectividad. En la siguiente intervención se observa que Arturo espera que sus estudiantes comprendan la biyectividad de la función para poder definir la inversa de la misma.

> *Arturo: Entonces este sería un ejemplo de función biyectiva. ¿Por qué necesitamos tener claro qué es lo que es una función biyectiva?*
>
> *Porque en esta función voy a definir una nueva función. [1527]*
>
> *Al mismo tiempo de trabajar la biyectividad, y debido al enfoque con que el tema es abordado, Arturo espera que el estudio de la biyectividad sea la base para la comprensión de la función inversa.*
>
> *Arturo: ¿Qué es lo que vamos a trabajar hoy día? Si una función es biyectiva, entonces vamos a poder decir que existe su inversa, y que, si la función original que era una función de A en B, la función inversa va a ser de B en A, eso es lo que vamos a definir ahora.*
>
> *¿Queda más o menos claro la condición de que tiene que ser biyectiva para poder definir la función al revés? [1538]*

En la entrevista Arturo se refiere a la inclusión de la biyectividad en sus clases y señala que esto se debe a que la comprensión de la biyectividad por parte de los estudiantes facilita el aprendizaje de la función logaritmo que se estudia en los siguientes niveles.

> *Arturo: Volvimos a que era biyectiva, haciendo todo el proceso, no viendo el contenido de nuevo, sino que recordando que la función tenía esas características por lo que habíamos visto. Entonces yo voy a definir la inversa, y a esa inversa le llamo logaritmo. De ahí empezamos y definíamos la función. Entonces logró tener sentido. Tuvo un sentido el dominio y el recorrido de la exponencial, porque se construyó así para que tuviera ese comportamiento, entonces el logaritmo tiene sentido. El estudio de la inyectividad y epiyectividad tenía ese objetivo, pero no es un tema de ese curso, sino que es para los posteriores. [Ent2 134]*

Arturo manifiesta conocer la biyectividad como meta de aprendizaje y que también debe ser comprendida por sus estudiantes como condición necesaria para definir la inversa de una función.

Conocimiento sobre el nivel de desarrollo procedimental de los estudiantes en procesos asociados a la función (KMLS-DP-1)

En este indicador se incluyen las intervenciones que dan cuenta del conocimiento del profesor sobre la profundidad con la que sus estudiantes aprenden o se espera que aprendan ciertos procedimientos vinculados a la función.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la identificación de correspondencias funcionales (KMLS-DP-1.1)

Junto con la enseñanza de la definición de función se encuentra la enseñanza sobre cómo reconocer una correspondencia funcional. En el indicador anterior (KMLS-DC-1.1) se señala que Arturo espera que sus estudiantes comprendan la función mediante la comprensión de las propiedades que la definen. Estas propiedades también permiten identificar cuándo una correspondencia es o no funcional, lo que genera un procedimiento que Arturo también espera que aprendan sus estudiantes. Este procedimiento consiste en chequear el cumplimiento de estas propiedades en las correspondencias dadas.

> *Arturo: Vamos a ir viendo la diferencia. Yo hice una combinación, podríamos haber hecho otra, ahí vamos a ir inventando, pero ¿cumple con que a cada elemento del aquí [A] le corresponde un único en el conjunto de llegada, ¿solo uno? único [señala la definición] a éste tiene que llegar a parar a uno solo, por eso subrayé que ese elemento del conjunto en que va aparar tiene que ser único, porque si no, no sería una función. Dijimos que una función es una correspondencia que tenía que cumplir con estas condiciones, si no las cumple no puedo llamarle función, entonces esto sería una función. [86]*

> *Arturo: Otra forma en que yo puedo preguntar lo que hemos hecho es que yo les voy a mostrar unos diagramas y ustedes me van a indicar si son o no funciones. [Escribe en la pizarra: Determine si los siguientes diagramas son o no función] [173]*

> *Arturo: Es que aquí están las dos en una. Son dos condiciones... que aquí [en el dominio] no me pueden sobrar, pero aquí si [en el conjunto de llegada], y que a cada uno de aquí... como en resumen ¿cuáles son esas dos condiciones? Que en el conjunto de partida no te pueden sobrar elementos y que todos los elementos de acá vayan a parar… que tengan una sola imagen. Esas son las dos condiciones. [299:1-2]*

En KoT-P-1, KMT-E-2 y KPM-V-1 se muestran más evidencias sobre el conocimiento de este procedimiento, así como diferentes estrategias para abordarlo, por ejemplo, mediante el uso de gestos o del trazado de una recta vertical. Asimismo, Arturo espera que sus estudiantes puedan construir ejemplos de correspondencias que sean funcionales utilizando las propiedades incluidas en la definición. Esto también se evidencia en la propuesta del siguiente ejercicio y la intervención del profesor.

> *Arturo: [agrega un ejercicio en la pizarra] Les di dos conjuntos y quiero que ustedes dibujen un diagrama en que relacionen los elementos de A y los de B y que sea una*

> *función Ustedes ven cómo hacen estas correspondencias, pero tienen que hacerlas de tal forma de que sea una función, después van a hacer otro diagrama que no sea función [supervisa las producciones de los estudiantes]. [195]*

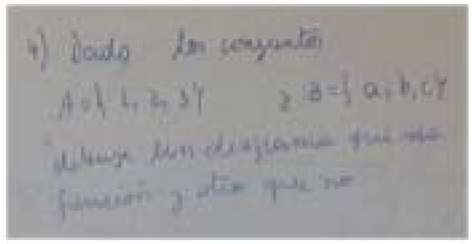


Imagen 42: Ejercicio planteado por Arturo

De este modo, se observa que Arturo espera que los estudiantes sean capaces de aplicar las propiedades contenidas en la definición de función para determinar cuándo una correspondencia es una función y cuándo no lo es, del mismo modo, Arturo espera que sus estudiantes puedan construir ejemplos de relaciones que cumplan las propiedades de unicidad y exhaustividad contenidas en la definición de función.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la determinación de imágenes y pre imágenes (KMLS-DP-1.2)

La determinación de imágenes y pre imágenes es otro procedimiento que Arturo espera que logren sus estudiantes. Este conocimiento del profesor se identifica mediante afirmaciones que destacan estos procedimientos como metas de aprendizaje para profundizaciones en el estudio de la función en los que serán evaluados los estudiantes.

> *Arturo: Por lo tanto, estos de acá son las imágenes de estos de acá que son las pre imágenes, entonces ¿cuál es la imagen del 0?*
>
> *A: -1.*
>
> *Arturo: -1, porque g (0) = 2·0-1 me da -1. Y así es una de las formas en que puedo preguntar lo que acabamos de hacer. [169-171]*

Cuando Arturo señala: “así es una de las formas en que puedo preguntar”, se observa que establece estos procedimientos como parte de lo que deben realizar sus estudiantes cuando estudian las funciones.

> *Arturo: Nosotros podemos sacar imágenes y pre imágenes. Como resumen de la clase anterior es que, si me piden determinar la imagen de 10, ¿qué es lo que teníamos que hacer?*
>
> *Evaluar el 10 en la función y encontrar su imagen. [escribe la consigna de la tarea en la pizarra] Sería 5 por 10 más 1. [380]*

El profesor muestra este procedimiento de calcular la imagen de un número como algo que deben realizar los estudiantes. En este sentido, se observa su conocimiento sobre el desarrollo procedimental que espera de ellos en el estudio de la función.

Asimismo, el procedimiento sobre la determinación de pre imagen también es algo que el profesor espera desarrollar en sus estudiantes. Para ello, Arturo indica la resolución de ecuaciones como técnica para lograrlo. A continuación, el profesor compara ambos procedimientos e indica qué se espera que hagan los estudiantes, según sea el caso.

> *Arturo: Habíamos dicho que en el conjunto de partida teníamos las pre imágenes de los que estaban acá, y aquí estaban las imágenes del conjunto de partida. Si aquí yo tenía el 10, el 10, por esta función que era 5x+1, llegaba como 51. Si aquí yo tenía 6, ¿a quién mandé para que llegara como 6?...*
>
> *Entonces una forma es buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me de 6.*
>
> *Yo tengo dos formas de encontrar esto; va a depender del número, si encontrarlo es simple como encontrar la pre imagen de 6, que era buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me diera 6, y ese era el 1, pero ¿cuál va a ser la pre imagen del 10? ¿es un número que sea tan simple de determinar?*
>
> *As: No.*
>
> *A. 1,8.*
>
> *A: Estoy confundida, ¿qué tengo que hacer? ¿tengo que multiplicar 10 por 5?*
>
> *Arturo: Una cosa es la imagen. Si yo quiero la imagen del 10, el 10 lo hago pasar por la función y me llega como 51; otra cosa es que yo quiera la pre imagen del 10, o sea que el 10 no está en el conjunto de partida, está en el conjunto de llegada, entonces el 10, ¿a quién mandé para que ese número, al pasar por la función, llegara como 10?*
>
> *Significa que la función, esta que está aquí, me tiene que dar 10. Dijimos que encontrar pre imágenes era lo mismo que resolver una ecuación, porque yo quiero que la función 5x+1 me de 10, entonces se convierte en una ecuación.*
>
> *Cuando encuentro imágenes, tomo el valor, lo meto en la función y me arroja su imagen, pero cuando quiero pre imágenes yo tomo la función y lo igualo a ese valor que quiero que sea o que me dicen que quiere que sea, al despejar aquí, ¿qué me va a quedar? [392-396]*

Arturo promueve la obtención de pre imágenes mediante la resolución de ecuaciones en lugar de favorecer técnicas alternativas de sus estudiantes, como el tanteo. De este modo, se observa que la obtención de pre imágenes mediante la resolución de ecuaciones es un procedimiento que Arturo espera desarrollen sus estudiantes cuando se estudian las funciones.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la construcción de representaciones para la función (KMLS-DP-1.3)

Otro de los procedimientos que Arturo evidencia como algo que espera desarrollar en sus estudiantes es la construcción de diferentes representaciones para la función.

> *Arturo: [agrega un ejercicio en la pizarra (Imagen 42)] Les di dos conjuntos y quiero que ustedes dibujen un diagrama en que relacionen los elementos de A y los de B y que sea una función. Ustedes ven cómo hacen estas correspondencias, pero tienen*

> *que hacerlas de tal forma de que sea una función, después van a hacer otro diagrama que no sea función [supervisa las producciones de los estudiantes] [195]*

Arturo indica a sus estudiantes lo que espera que desarrollen en cuanto a las representaciones y la construcción de ejemplos. Señala:” quiero que ustedes dibujen un diagrama…”, esto es que logren realizar una representación de una función en diagrama sagital. Del mismo modo, les solicita a sus estudiantes construir ejemplos de relaciones que no sean funciones. Aquí se deja ver la relación entre el desarrollo conceptual sobre la función al requerir de sus estudiantes la comprensión de las propiedades que caracterizan la función y el procedimiento de construir representaciones que cumplan dichas propiedades.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la resolución de diferentes tipos de ecuaciones (KMLS-DP-1.4)

Como parte de los conocimientos procedimentales de la función se encuentra la resolución de ecuaciones. En este indicador, este conocimiento se muestra como parte del estudio de los procedimientos asociados al cálculo del recorrido o pre imágenes para las funciones.

Arturo conoce que los conocimientos previos de los estudiantes incluyen las ecuaciones (más adelante en la Secuenciación de temas) y evidencia conocer que los estudiantes han logrado aprender el procedimiento de resolución de diferentes ecuaciones lineales: con una variable, con dos variables, con coeficientes literales y con coeficientes numéricos.

> *Arturo: Va a ser epiyectiva. ¿Cómo calculamos el recorrido? El recorrido está formado por todos los elementos y de la función.*
>
> *Si esto de aquí es f(x). f(x) es lo mismo que y, Vamos a hacer y igual a la función 6x+3. Vamos a despejar x, ¿qué vamos a hacer?, despejar x.*
>
> *Si yo quiero despejar ese elemento de ahí, nosotros sabemos despejar en ese tipo de expresiones.*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: Entonces, es equivalente a y-3=6x, y eso, ¿a qué es equivalente si yo quiero despejar el x? ese es el objetivo [1218-1220]*

Por otro lado, Arturo propone ejercicios que incluyen ecuaciones racionales que no espera que sus estudiantes puedan resolver.

> *E: En cuanto a simplificar las cosas, en un momento, cuando están calculando el recorrido, despejando y, tienen que hacer un despeje de una función y=x/x-1, tienen que multiplicar por (x-1), pero los estudiantes no comprenden ese procedimiento. Se muestra un procedimiento similar usando números racionales. ¿Cómo se relacionan los dos procedimientos?*
>
> *Arturo: Quizás no debí poner ese ejemplo, porque no estaban en el contexto, aunque yo sabía que eran capaces de hacerlos porque se resolvieron ecuaciones con coeficientes fraccionarios, por lo tanto, por eso recurrí a eso.*

> *Es un proceso más simple. Todo lo que tenga números y no letras va a ser simple para ello.*
>
> *El objetivo del procedimiento es dejarlo en una expresión lineal y no con fracción. El objetivo de los dos procedimientos es el mismo. [Ent2 139-140]*

Arturo manifiesta conocer que sus estudiantes saben resolver ecuaciones con coeficientes fraccionarios, pero que aún no es el momento para que logren comprender el procedimiento para resolver ecuaciones racionales, por ejemplo, que incluyan expresiones como x/(x-1). La resolución de este tipo de ecuaciones no es un conocimiento procedimental que Arturo espera logren sus estudiantes en el nivel actual.

> *Arturo: Para determinar el recorrido, como el recorrido es que "y" es igual a función, entonces decimos y va a ser la función [se refiere a plantear la ecuación y=f(x)], pero la función ¿quién es? 2x/(x-1).*
>
> *Este tipo de expresiones [y=2 x/(x-1)], esto yo se los voy a mostrar con cosas que podemos hacer, pero no lo voy a hacer hasta un tiempo más que yo se los voy a pedir hacer a ustedes. [676]*

En esta intervención, el foco está puesto en el uso de las ecuaciones en el contexto del recorrido de la función y en el hecho de que Arturo da indicio de que no espera que sus estudiantes logren aprender dicho procedimiento en este nivel.

> *Arturo: Esto de aquí, a ver, quiero que les quede claro. Yo les voy a mostrar porque quiero que vean lo que yo voy a hacer al final. Este proceso [la resolución de ecuaciones como y=2x/(x-1)] todavía ustedes no lo pueden hacer. Ustedes todavía no pueden hacer este proceso porque todavía no les he enseñado a hacer eso. [686]*

En la entrevista, Arturo confirma que resolver este tipo de ecuaciones no es algo que se deba enseñar en este nivel, por tanto, no se espera que lo logren sus estudiantes.

> *E: Cuando calculan el recorrido de una función, se pone una función 2x/x-1. Al calcular el recorrido hay que hacer un despeje y dices que este tipo de expresiones se los vas a mostrar como cosas que pueden hacer, pero no lo vas a hacer hasta un tiempo más, pero después se los pedirás, que es despejar la y cuando tienes ese tipo de ecuaciones. ¿por qué los estudiantes de ese nivel no pueden hacer ese tipo de despeje?*
>
> *Arturo: Porque no han trabajo con expresiones algebraicas de tipo racionales.*
>
> *E: ¿Eso es posterior o no se ve?*
>
> *Arturo: Es de segundo medio [siguiente nivel escolar]. [Ent2 239-240]*

Arturo señala que las ecuaciones con la incógnita en el denominador no son parte de lo que espera puedan resolver sus estudiantes. Esas afirmaciones también dan cuenta del nivel de desarrollo procedimental que Arturo espera en sus estudiantes. Se observa que Arturo conoce que la resolución de ecuaciones racionales no es un procedimiento esperado para el actual nivel escolar.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la determinación del dominio y el recorrido de una función (KMLS-DP-1.5)

Arturo muestra a sus estudiantes que el cálculo del recorrido de una función se realiza resolviendo la ecuación *y*=*f*(*x*), para la variable *x*. Como se vio antes, Arturo sabe que hay cierto tipo de ecuaciones que los estudiantes aún no saben resolver. Estas ecuaciones se presentan en el cálculo del recorrido y, asimismo, se asocian a las fronteras que tiene el desarrollo procedimental de los estudiantes acerca de la determinación del recorrido de la función. En el siguiente extracto, Arturo muestra el despeje de x en la ecuación *y=2x*/(*x-1*). En este procedimiento se evidencia cómo se produce la relación entre el tipo de ecuaciones racionales y el cálculo de recorrido de las funciones.

Arturo: El objetivo de esto es despejar x, pero x está en el denominador. Yo puedo multiplicar por el denominador, ¿no? Si multiplico por el denominador (x-1), me va a quedar (x-1) multiplicando al y. Aquí, cuando multiplique ese (x-1) con ese (x-1), ¿qué pasa con el denominador cuando estoy multiplicando por el mismo número?

As: Se elimina.

Arturo: Se elimina, entonces me queda 2x. [(x-1) y=2x]

A: ¿Por qué?

Arturo: Esto de aquí, a ver, quiero que les quede claro. Yo les voy a mostrar porque quiero que vean lo que yo voy a hacer al final. Este proceso todavía ustedes no lo pueden hacer. Ustedes todavía no pueden hacer este proceso porque todavía no les he enseñado a hacer eso.

A: Pero (x-1) por (x-1) no es 1.

Arturo: Si y=2x/5 lo multiplicara por 5, te quedaría 5y=2x, ¿no?

A: Ah, se van, verdad.

Arturo: Aquí, lo que yo estoy haciendo es que el 5 es el (x-1), pero es de la misma forma. Si tengo eso [(x-1) y=2x] tendría xy-y=2x.

A: Ah, porque lo multiplicó.

Arturo: Multipliqué. Como el objetivo es despejar x, voy a juntar todas las x a un lado y el resto en el otro lado [de la igualdad], sería xy-2x=y. Acá podemos factorizar por x, y me queda x, ¿factor de quién? de y -2, igual a y [x(y-2) =y]. Como el objetivo es despejar x, este paréntesis está multiplicando a mi incógnita, ¿cómo queda?

A: x-x.

Arturo: y/(y-2) Este proceso, esto que está aquí yo se los tengo que enseñar, pero no ahora. lo que yo quiero es que, dado una función y despejando x, dejándolo en términos de y yo puedo llegar a esta expresión, entonces la pregunta es ¿y puede tomar cualquier valor?

A: No.

Arturo: ¿Qué valor no podría tomar?

A: 2.

> *Arturo: El 2. Entonces, como el y no puede ser 2, concluimos que el recorrido de esta función es…*
>
> *A: Todos los racionales menos el 2.*
>
> *Arturo: … Sigo diciendo, este tipo de funciones, para calcular el recorrido todavía nos faltan cosas... todo esto nos falta para hacer. Yo, lo que quería era mostrarles que, dado una función, lo mismo que nos preguntamos allá podemos preguntarnos el recorrido. [682-700]*

El extracto muestra el conocimiento de Arturo sobre los procedimientos que aún no corresponde que logren sus estudiantes, pero que resultan necesarios para determinar el recorrido de una función como la que presenta. Se observa que Arturo conoce que sus estudiantes aún no logran el conocimiento para resolver estas ecuaciones racionales y que no corresponde al nivel escolar actual. En este sentido, se evidencia el conocimiento del profesor sobre el desarrollo procedimental acerca del cálculo del recorrido para una función en relación a la resolución de ecuaciones con la variable en el denominador.

Por otro lado, el profesor también espera que sus estudiantes sean capaces de determinar el dominio de funciones sin contar con la representación algebraica. En el siguiente extracto, Arturo muestra cómo determinar este conjunto utilizando la representación gráfica de la función.

> *Arturo: Se fijan que el domino de la función lo podemos determinar mirando el dibujo, la representación de la función sin necesidad de que nos den la expresión que representa la función, solamente con su gráfico a veces podemos determinar su dominio. [859]*

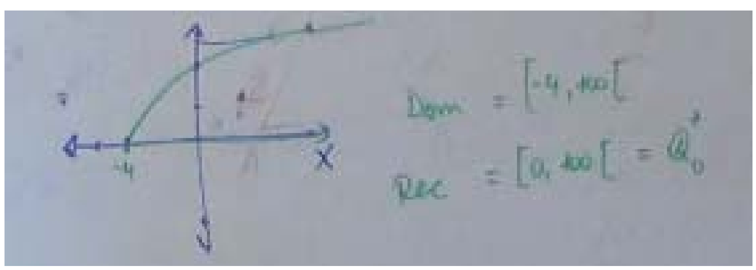


Imagen 43: Representación del dominio y recorrido de una función

Arturo propone diferentes situaciones en las que solicita y enseña a sus estudiantes determinar el dominio y recorrido de una función si contar con su expresión algebraica. La Imagen 43 es un ejemplo de ello.

Aquí, Arturo busca que sus estudiantes puedan identificar el dominio y el recorrido mediante la gráfica cartesiana de la función y el conocimiento de la representación de estos conjuntos sobre los ejes. La enseñanza sobre cómo se hace la identificación del dominio de la función se corresponde con aquello que Arturo espera desarrollen sus estudiantes. De un modo similar, Arturo enseña a (y espera que sus estudiantes sean capaces de) encontrar también el recorrido de la función. A continuación, se muestra un extracto en que el profesor plantea un ejercicio para que los estudiantes identifiquen el dominio y el recorrido de una función.

Arturo: Y en el ejercicio 4, tienen el gráfico de una función. Yo lo marqué. Tengo una función que parte, que está definida de este valor a este valor, no hay más función en el resto del plano, solo de ahí hasta ahí, y la función llega de aquí hasta acá. Dado eso, determinar dominio y recorrido. ¿Aquí hay elementos de la función? ¿hay imágenes? (indica parte del plano cartesiano).

A: No.

Arturo: Entonces, esta parte de aquí ¿es parte del dominio?

As: no.

Arturo: No. Esa es la idea de que mirando identifiquen cuál es el dominio y también el recorrido. El dominio lo miro en el eje X, y el recorrido lo miro en el eje Y.

A: Esa línea, ¿sigue o no?

Arturo: No. Si te fijas le voy a hacer flechitas cuando quiera indicar que van a seguir creciendo y voy a indicar con un punto que llega solamente hasta ahí. no hay flechitas. Yo puse ciertos valores, como no tengo esto [la pizarra] cuadriculado, seguí con líneas para que determinar quiénes van con quién. Dado este dibujo, quiero que determinen dominio y recorrido, la imagen de -3 y la imagen de 7 y la imagen del 0. La pre imagen del 2 y quiero que respondan si el punto (-3,5) es un punto del gráfico de la función que yo les di. [1307-1313]

Arturo espera que sus estudiantes sean capaces de determinar dominio y recorrido cuando la función a través de su gráfico. Asimismo, Arturo espera que puedan determinar si un punto pertenece o no a la gráfica de una función. Se observa, por tanto, el conocimiento de Arturo sobre procedimientos que deben lograr realizar sus estudiantes para determinar dominio y recorrido de una función.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la restricción del dominio de una función (KMLS-DP-1.6)

Arturo presenta un caso en el cual se puede restringir el dominio de la función $f(x) = x^2$ para tener una función inyectiva. En su presentación señala que la restricción corresponde a otra función, diferente a la original, pues poseen diferentes dominios y agrega que dicho procedimiento es posible que lo puedan hacer sus estudiantes.

Arturo: Esto es función, pero no inyectiva porque hay un elemento, el 1, que tiene por imagen al 1, pero hay otro elemento del dominio que también tiene al 1 por imagen, entonces estaría pasando esto [muestra la función x^2].

A: Si ese de ahí [el -1] estuviese más abajo podría ser de otro, pero tendría lo mismo.

Arturo: ¿Qué pasa con el 2? También pasa. La imagen del 2 es... ¿cuál es la imagen del 2 con esta función?

A: 4.

Arturo: Es 4, entonces esto va a parar al 4, y ¿qué pasa con la imagen del -2?

A: 4.

Arturo: También es 4, entonces pasó con el 1 y el -1. Pasó con el 2 y el -2. Por la forma que tiene la función.

A: Si estuviera más así.

Arturo: Si a las ramitas, no sería esta misma función, sería otra, incluso si yo dejara una sola de las ramitas. Porque en esta función ¿cuál es su dominio? Porque esto va creciendo; a medida que voy avanzando va creciendo. ¿Cuál es el dominio de esta función?

A: Todos los racionales menos...

Arturo: Todos los racionales.

A: Menos los de abajo.

Arturo: No, porque el dominio lo veo en el eje X.

A: Ah, verdad.

Arturo: El dominio es todos los racionales. Como el dominio son todos los racionales, si yo le saco parte al dominio y le quitara una de las ramitas, la podría hacer inyectiva. No es algo que nosotros vamos a hacer, pero son cosas que se pueden hacer. [1126-1140]

La intervención del profesor destaca que restringir el dominio de una función no es algo que se espera desarrollen los estudiantes en ese nivel. Sin embargo, señala que los estudiantes podrían hacerlo. De este modo, se observa que Arturo conoce el nivel procedimental que se espera desarrollen sus estudiantes en el caso de restringir el dominio de una función.

Conocimiento sobre el desarrollo procedimental de la determinación de la inversa de una función (KMLS-DP-1.7)

El procedimiento para determinar la inversa de una función que Arturo espera que desarrollen los estudiantes es enseñado previamente por el profesor como se muestra a continuación.

Arturo: Hay una alternativa algebraica, y esa alternativa algebraica ¿cómo la obtengo? Como esta expresión f(x) es lo mismo que y, nosotros igualamos [f(x)=y], igual como obteníamos el recorrido de la función, y igual a la expresión 3x+2, luego despejamos x. Al despejar x, esta expresión, ¿a qué queda equivalente? Para ir despejando x, tengo que deshacerme del 2, por lo tanto, restamos 2 y queda y-2 =3x. Tenemos que deshacernos del 3, ¿qué hacemos? [1667]

Esta acción de Arturo pretende modelar lo que deben hacer sus estudiantes, dando luces del nivel procedimental que espera que logren sus estudiantes. Esto último se observa también en la propuesta de ejercicios a sus estudiantes en los que les pide encontrar la expresión algebraica de la función inversa de una función dada.

Arturo: Para ver cómo hacemos esto, les voy a dar un listado de funciones, que se las voy a dar ya biyectivas y que van a determinar su inversa. ¿Alguna duda? Especialmente los que no estuvieron la clase anterior. [1669]

Arturo: Yo voy a dar un listado de funciones que son biyectivas y van a determinar su inversa. [escribe ejercicios en la pizarra "Dadas las siguientes funciones biyectivas, determine su inversa" 2x+5, 1-5x, 1/x, (4x-1)/3, (4-3x)/2] Hay 5 funciones que son biyectivas. Dadas las siguientes funciones, determine su inversa. [1675]

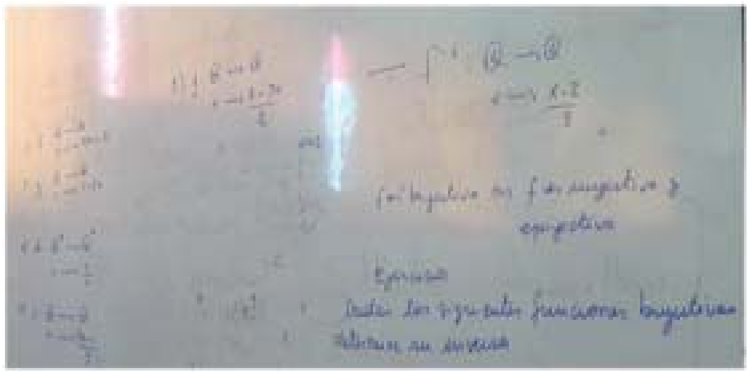


Imagen 44: Ejercicios propuestos

Así, se observa el conocimiento de Arturo sobre el nivel procedimental esperado para determinar la expresión algebraica de la inversa de una función.

Secuenciación de temas anteriores y posteriores

En esta categoría incluimos aquel conocimiento del profesor sobre la ubicación y organización temporal de los temas relacionados con el concepto de función, con una perspectiva secuenciadora que puede estar dada por el programa de estudio, el Currículum Nacional, otro documento interno al establecimiento donde el profesor se desempeña o resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática. Esta secuenciación de temas también se incluye la potencialidad del estudio de un tema para los posteriores.

Conocimiento sobre el estudio del plano cartesiano y los puntos en el plano (KMLS-S-1)

Arturo inicia la enseñanza del concepto de función recordando la organización del plano cartesiano, la posición de los ejes y la ubicación de puntos en él. Arturo señala que estos temas ya han sido estudiados por los estudiantes, pero que es necesario recordarlos por su utilidad en el estudio de la función.

> *Arturo: Vamos a recordar ciertos conceptos, vamos a recordar algunas mezclas de cosas. Una de las cosas que vamos a recordar es el plano cartesiano. ¿Qué necesitamos recordar del plano cartesiano?*
>
> *A: La "Y" es así (indica con la mano la ubicación del eje).*
>
> *A: X es horizontal.*
>
> *A: Abajo están los negativos y a la izquierda.*
>
> *Arturo: Los negativos están a la izquierda y abajo. ¿Qué más recordamos de eso?, ¿qué hay aquí? (muestra con su mano un plano dibujado en la pizarra, ejes sin graduación) ¿por qué está formado todo esto?*
>
> *A: [no se entiende].*
>
> *Arturo: Estos son negativos, estos son negativos (señala los semi ejes negativos X Y). Aquí tenemos el 1, el 2, el 3, el 4, etc., -1,-2... [gradúa el eje X] y son lo que es*

una intersección de dos rectas. ¿Por qué elementos está formado todo esto? ¿qué hay aquí? ¿Qué es lo que dibujamos en el plano cartesiano?

A: Vectores.

Arturo: Ya, y los vectores ¿qué tienen?

A: Coordenadas.

Arturo: Coordenadas. Lo que dibujamos aquí, y que está formado, esto está lleno de puntos, que son coordenadas. Si tomo aquí un elemento cualquiera, un "x", y después aquí tomo un "y", lo que nosotros hacíamos es la asociación a un punto de coordenadas (x, y), ¿o no? [1-11]

Se observa que Arturo conoce que estos conocimientos sobre el plano cartesiano, la ubicación de los ejes y su graduación, potencian el estudio de la función y serán utilizados al momento de representar las funciones y determinar dominio y recorrido. Además, muestran que Arturo tiene conocimiento de que son temas estudiados previamente por sus estudiantes. Esto lo confirma en la entrevista, pues declara que él mismo les enseñó ese tema.

E: Sobre los conocimientos previos de los estudiantes. Al inicio dedicas tiempo a recordar el plano cartesiano, los puntos y la simbología. ¿Cómo sabes tú que son conocimientos previos de los estudiantes?, pues no son parte del currículum.

Arturo: Es que yo les había hecho clases en los cursos anteriores y sabía lo que habían visto. Plano cartesiano si habían visto. Quizás a nivel del lenguaje matemático, es transversal en mis clases, siempre los ponía. [Ent2 237-238]

Asimismo, Arturo confirma conocer la potencialidad del plano cartesiano en el estudio de la función.

E: ¿Por qué haces ese repaso?

Arturo: Porque dentro de las cosas que se van a hacer con funciones es llevar la representación gráfica de la función en el plano cartesiano. Por lo tanto, tengo que chequear que se acuerden de los puntos en el plano. [Ent1 3-4]

Estas respuestas, junto con el extracto anterior, permiten observar el conocimiento de Arturo sobre el plano cartesiano y sus componentes como tema previo que potencia el estudio de la función.

Conocimiento sobre la simbología de conjuntos y cuantificadores como conocimientos previos y potenciadores de temas posteriores (KMLS-S-2)

Otro tema al que Arturo hace referencia como conocimiento previamente visto por los estudiantes es el uso de símbolos de conjuntos y cuantificadores. Luego de recordar el plano cartesiano, Arturo señala:

Arturo: …Eso es una de las cosas que quería recordar [el plano cartesiano].

Otra, en momentos hemos hablado de ciertos símbolos matemáticos que hemos utilizado [dibuja el cuantificador universal].

A: ¡Ángulo!

Arturo: No, el ángulo es así [dibuja el símbolo para representar "ángulo"]. Ese símbolo [dibuja $\in$ *y* $\forall$*].*

A: Pertenece.

A: El del medio es pertenece.

A: El "por lo tanto".

Arturo: Ah, el "por lo tanto" se acuerdan.

A: "Por lo tanto" no sé cuál es, pero es tres puntitos.

Arturo: Los tres puntitos es "por lo tanto".

A: ¡Pertenece!, el de arriba es pertenece.

Arturo: A ver. Este de aquí significaba "pertenece", este de acá significa "para todo", este de acá significa que "existe", y este es el que estaban diciendo que era el "por lo tanto". Hay uno que es cuando al "existe" le ponemos ese símbolo [el signo de exclamación] significa que existe un único. [15-25]

Arturo da indicios de conocer que este tipo de simbología y el (uso del) lenguaje formal son temas previos para sus estudiantes, pese a no ser parte de la propuesta del currículum oficial. Su inclusión en las clases sobre el concepto de función responde al grado de formalización que Arturo busca para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a la potencialidad para el estudio de temas posteriores. En la entrevista, Arturo es consultado sobre la razón de incluir estos temas. Al respecto, señala lo siguiente:

Arturo: Porque estoy enseñando matemáticas. Hay un cierto lenguaje matemático que ellos tienen que dominar. Los [símbolos] uso ahí porque antes ya los he incorporado.

E: Que aprendan ese lenguaje es tu decisión, no parece en el currículum. ¿Qué importancia le das?

Arturo: No es una cosa que yo evalúe. Yo estoy pensando y proyectando a los cursos siguientes. No lo evalúo, pero si lo voy nombrando y ellos lo conocen. Después les toca el electivo y siempre incorporo la lógica como primera unidad del curso de electivo. [Ent2 142-144]

La inclusión de esta simbología y formalización del lenguaje es una iniciativa personal de Arturo. Como se observa en su respuesta, el profesor manifiesta conocer que este lenguaje formal se ha estudiado antes de la función y que potencia no solamente al estudio de las funciones, sino que más allá de eso. De este modo, se observa el conocimiento de Arturo sobre la organización temporal de temas que potencian el estudio de la función, particularmente, sobre la simbología de conjuntos y los cuantificadores.

Conocimiento sobre la evaluación de expresiones algebraicas como un conocimiento procedimental previo de los estudiantes (KMLS-S-3)

La evaluación de expresiones algebraicas es aplicada para determinar imágenes en una función, particularmente, cuando esta viene dada mediante su expresión algebraica. Son diversas las intervenciones de Arturo en las que muestra la evaluación de la expresión algebraica para determinar imágenes (ver KoT-P-3). Por ejemplo, en el siguiente extracto Arturo muestra esta evaluación.

Arturo: ¿Cómo determinamos la imagen? Es reemplazar ese valor en la función. La función, al evaluarla en el 5 es 1-3 por 5, como esto es 15, 1 menos 15 nos da -14. La imagen del -4 es evaluar -4 en la función y sería 1-3 por-4, eso sería 1+12, esto nos da 13. ¿Hay alguna duda con eso? [420]

Sin embargo, el profesor no señala explícitamente que la evaluación de expresiones algebraicas es un tema conocido por sus estudiantes, lo que nos motiva a consultarle en la entrevista sobre ello, a lo que responde:

Arturo: Si. En ese curso se vio el año anterior.

E: Tú ¿usas ese conocimiento como base para la función?

Arturo: En un principio no se dan cuenta que está evaluando. Algunos si, otros no. Pues se hace con ejemplos que sean bastante obvios.

E: ¿Obvios para ellos?

Arturo: Si. Al final, uno termina diciendo: "¿qué estamos haciendo aquí?"

Estamos evaluando el número en esa expresión algebraica que está asociada a la función. Lo que pasa es que antes de funciones tienes que ver Álgebra. Y cuando ves Álgebra, pasan por conceptos básicos.

E: ¿Cuáles son esos conceptos?

Arturo: Coeficientes, evaluación. Eso se ve en 7º. [Ent2 56 - 62]

El indicio del conocimiento que Arturo conocía que la evaluación de expresiones algebraicas, es confirmado con esta respuesta y muestra la profundidad de dicho conocimiento al indicar que no solamente que se trata de un tema estudiado previamente, sino que conoce en qué nivel se estudia. Además, en la misma respuesta se observa el conocimiento de Arturo sobre el aporte que hace el conocimiento de la evaluación de expresiones algebraicas al estudio de la función.

Conocimiento sobre la resolución de ecuaciones e inecuaciones como tema previo al estudio de la función (KMLS-S-4)

A diferencia de lo que ocurre con el indicador anterior, Arturo señala explícitamente conocer que la resolución de ecuaciones e inecuaciones son temas que sus estudiantes conocen previo al estudio de la función.

Arturo: ¿Podemos encontrar una forma de determinar la pre imagen sin estar jugando al "achunte"?

As: Si.

Arturo: Si lo que queremos es, por ejemplo, que esto [la imagen de la función] nos diera 5, y si esto quiero que me diera 5, se convierte en una ecuación. Para eso vimos ecuaciones e inecuaciones antes. [367-369]

La última línea del extracto anterior permite observar el conocimiento de Arturo sobre la resolución de ecuaciones e inecuaciones como temas previos al estudio de la función, al mismo tiempo muestra que el profesor identifica la ayuda que ese tema brinda al estudio de la función.

Junto a lo anterior se tiene la relación entre la función y la ecuación que Arturo muestra cuando determina el punto donde la gráfica de la función corta el eje X.

Arturo señala cuál es el aporte, en este caso, de las ecuaciones al estudio de las funciones.

> *Arturo: Una vez nada más. Se hace 0 solo una vez. Vamos a poder relacionar lo que es función con lo que vimos de ecuaciones de primer grado. Porque si la función la hago igual a 0, ¿cuál es la solución de esa ecuación?*
>
> *As: -3.*
>
> *Arturo: La solución de esa ecuación es -3, ¿x valía -3? ¿qué estamos sacando como conclusión?*
>
> *A: Que esas serían la solución.*
>
> *Arturo: ¿De qué?*
>
> *A: Que se puede sacar la imagen.*
>
> *Arturo: La recta, cuando contra al eje X, ese punto que me da ahí es la representación de la solución de la ecuación. [990-996]*

De los extractos anteriores se puede observar que Arturo conoce que las ecuaciones son un tema previo y que potencia el estudio de las funciones, especialmente en la determinación de pre imágenes para una función.

Para el caso de las inecuaciones, estas son utilizadas indirectamente cuando Arturo muestra una representación para el dominio y del recorrido de la función. El profesor recuerda a sus estudiantes las notaciones en intervalos para las soluciones de inecuaciones y lo vincula a la representación del dominio y del recorrido de la función.

> *Arturo: Exactamente un intervalo va a ser el dominio. Puede ser un conjunto de todos los racionales, pero también puede ser un intervalo, y ¿qué intervalo es este?*
>
> *As: De -4 al infinito positivo, incluido el -4.*
>
> *Arturo: En infinito, ¿qué tengo que poner?*
>
> *As: Abierto.*
>
> *Arturo: ¿Y en el otro?*
>
> *As: Cerrado.*
>
> *Arturo: Cerrado en el otro, muy bien.*
>
> *A: ¿Desde cuándo que ocupamos esto?*
>
> *Arturo: Estoy recién mostrándoselos. Por algo vimos inecuaciones antes y porque en las inecuaciones ocupábamos intervalos [857]*

Se observa que Arturo conoce que tanto ecuaciones como inecuaciones son temas abordados antes por los estudiantes y que constituyen un potencial para el estudio del dominio y recorrido de la función respecto de la representación de ellos como intervalos.

En la entrevista Arturo se refiere a la necesidad de estudiar ecuaciones e inecuaciones previo al estudio de la función, señalando desde qué nivel escolar comienza el tema de ecuaciones a ser estudiado.

> *E: ¿Ecuaciones también es algo previo?*
>
> *Arturo: También es algo previo. Ecuaciones se ve desde más pequeños, desde 5º. Lo que va cambiando en las ecuaciones es el conjunto numérico donde resuelven las ecuaciones. [Ent2 63-64]*

Además, destaca en qué situaciones se aplican estos conocimientos.

> *Arturo: […] Porque para calcular dominio tú tienes que saber muy bien resolver inecuaciones. Para calcular el recorrido, también tienes que saber... tienes que saber despejar muy bien, tienes que saber agregarle condiciones a una expresión, y ya dentro de las habilidades cuesta más, porque supone que tienes un dominio no maximal. Ahí le estás agregando condiciones al "y", con las condiciones que tiene "x". [Ent1 26]*

En estas respuestas es posible observar el conocimiento de Arturo sobre aquellos aspectos de la función en que las ecuaciones apoyan en su estudio.

Conocimiento sobre los sistemas numéricos conocidos por los estudiantes (KMLS-S-5)

Arturo da ejemplos y propone actividades con funciones numéricas, utilizando conjuntos que son subconjuntos de los números racionales para el dominio y para el recorrido de las funciones. En diferentes momentos de las clases menciona que el sistema numérico que conocen los estudiantes es el de los racionales, Q. Arturo hace esta referencia del siguiente modo:

> *Arturo: A esta función [escribe Sea f(x)=x+9] ¿yo puedo meter a la función cualquier tipo de número que conocemos hasta el momento?*
>
> *As: Si.*
>
> *Arturo: Y ¿cuáles son todos esos números que conocemos?*
>
> *A: Los racionales.*
>
> *Arturo**:** Los racionales. El dominio de la función va a ser todos los valores que van a tener una imagen, en este caso son todos los racionales. [506-510]*

Pese a que el dominio de la función del extracto puede ser el conjunto de números Reales, Arturo confirma que es Q, lo que supone la presencia de conocimiento sobre el dominio de la función y sobre los sistemas numéricos que se abordan en el nivel que atiende. Por otro lado, un asunto que llama la atención es el uso de notaciones de intervalos (ver indicador anterior KMLS-S-4) para representar el dominio y recorrido de las funciones. Esta situación deja ver el conocimiento del profesor sobre el tipo de números que sus estudiantes conocen hasta este nivel. Debido a esto, Arturo es consultado en la entrevista sobre el sistema numérico utilizado y por qué se restringe a los números racionales.

> *Arturo: Ese es el contexto de ellos. Hasta ahí han llegado.*
>
> *E: En ese curso ¿han trabajado solo Q o Q se ve antes?*
>
> *¿Cómo progresan los sistemas numéricos para estos estudiantes?*
>
> *Arturo: Resuelven en Naturales, después en los Enteros. En 7º ya están en los Enteros, en 8º también, y recién en primero los Racionales.*

E: ¿Y los números Reales no los ven?

Arturo: Si. Al año siguiente, en 2º medio. No puedes hacer funciones reales en ellos.

E: ¿Estas son funciones racionales? ¿Cómo se entienden los intervalos que aparecen cuando escribes el dominio y el recorrido de las funciones?

Arturo: Lamentablemente, el programa está hecho así, porque no es el enfoque de las funciones como tal dentro del programa. [Ent2 66- 72]

Arturo confirma conocer que la progresión de los sistemas numéricos, de acuerdo al programa de estudio, posiciona los números racionales en el nivel que atiende y que los números reales son para el siguiente nivel escolar. Se observa en su respuesta que conoce cuál es la secuenciación de los sistemas numéricos que los estudiantes trabajan, la que inicia con los números Naturales, previos a la enseñanza de la función, hasta los números Reales, posteriores al concepto de función. Como se observa en la respuesta de la entrevista, el profesor indica que la fuente de este conocimiento es el programa de estudio.

Conocimiento sobre la biyectividad de la función como conocimiento necesario para el estudio de algunas funciones (KMLS-S-6)

El profesor identifica algunos temas que son necesarios para el estudio de la función, ya sea en el nivel actual o en los siguientes. Hemos incluido aquí el conocimiento sobre la biyectividad de la función respecto a su rol potenciador para temas posteriores en el estudio de la función. Más arriba, en este mismo subdominio, se incluye como parte del conocimiento del profesor acerca del desarrollo conceptual de los estudiantes; aquí se incluye como parte del conocimiento de la secuencia de temas asociados a las funciones. La biyectividad e inversa de una función son, de acuerdo con lo que señala Arturo, temas que potencian el estudio de otras funciones, como la función exponencial y logaritmo, en los cursos siguientes. En la entrevista se le pregunta a Arturo por este asunto y se obtiene lo siguiente:

E: También agregas inyectividad, epiyectividad y biyectividad. ¿Eso aparece en el programa, es parte del Currículum del curso?

Arturo: No, no está como tal.

E: ¿Por qué lo enseñas?

Arturo: Porque necesito eso para ver función inversa. [Ent2 127-130]

Se observa que Arturo conoce la biyectividad como un tema que no se incluye en el programa de estudio, pero es requisito para potenciar el estudio de la relación entre una función y su función inversa, particularmente el logaritmo y la exponencial.

Arturo: Si. El logaritmo hace tal cosa y esa es la idea. El argumento y la base del logaritmo tienen condiciones, pero ¿por qué tiene esas condiciones?

Hubo diferencias en los resultados. Fue mejor que los cursos anteriores donde yo había visto el logaritmo como operador, porque tenía un contexto. Lo vi como la función inversa de la exponencial. [Ent2 134]

La experiencia de Arturo le hace validar la inclusión de la biyectividad y función inversa pues conoce que en los siguientes cursos se estudian funciones que son una inversa de la otra. Por esta razón, es posible identificar el conocimiento de Arturo sobre la biyectividad como un tema que debe incluirse en el estudio del concepto de función pues potencia el estudio de las funciones que se ven en los siguientes niveles escolares.

Conocimiento sobre la resolución de ecuaciones racionales con la variable en el denominador como tema posterior (KMLS-S-7)

El cálculo del recorrido es realizado por Arturo mediante la resolución de la ecuación *y*=*f*(*x*) cuando la función está dada en su expresión algebraica. El conocimiento del profesor sobre el desarrollo procedimental de los estudiantes se aborda más arriba (KMLS-DP-1.4). En el presente indicador se plantea que el conocimiento de Arturo sobre la resolución de estas ecuaciones desde la perspectiva de la secuencialidad de procedimientos que serán estudiados en el futuro por los estudiantes.

Arturo muestra la resolución de la ecuación $y = 2x/(x-1)$ como un procedimiento que sus estudiantes aún no pueden realizar.

> *Arturo: Para determinar el recorrido, como el recorrido es que "y" es igual a función, entonces decimos y va a ser la función [se refiere a plantear la ecuación y=f(x)], pero la función ¿quién es? 2x/(x-1).*
>
> *Este tipo de expresiones [y=2 x/(x-1)], esto yo se los voy a mostrar con cosas que podemos hacer, pero no lo voy a hacer hasta un tiempo más que yo se los voy a pedir hacer a ustedes. [676]*
>
> *Arturo: Este proceso, esto que está aquí yo se los tengo que enseñar, pero no ahora. Lo que yo quiero es que, dado una función y despejando x dejándolo en términos de y yo puedo llegar a esta expresión, entonces la pregunta es ¿'y' puede tomar cualquier valor? [694]*

En estas intervenciones sobre la incapacidad de los estudiantes para resolver este tipo de ecuaciones, el profesor no declara cuándo será el momento en que se estudiará este tipo de ecuaciones. Sin embargo, da luces de conocer la secuencialidad de este tema asociado al estudio de la función.

Se observa que Arturo conoce que este tipo de ecuaciones no corresponde al nivel actual, lo que se confirma en las respuestas de la entrevista.

> *E: Cuando calculan el recorrido de una función, se pone una función* $2x/(x-1)$*. Al calcular el recorrido hay que hacer un despeje y dices que este tipo de expresiones se los vas a mostrar como cosas que pueden hacer, pero no lo vas a hacer hasta un tiempo más, pero después se los pedirás, que es despejar la y cuando tienes ese tipo de ecuaciones. ¿por qué los estudiantes de ese nivel no pueden hacer ese tipo de despeje?*
>
> *Arturo: Porque no han trabajo con expresiones algebraicas de tipo racionales.*
>
> *E: ¿Eso es posterior o no se ve?*
>
> *Arturo: Es de segundo medio. [Ent2 239-242]*

De lo anterior se puede observar conocimiento de Arturo sobre la resolución de ecuaciones con la variable en el denominador, asociadas al cálculo del recorrido, como un contenido que se estudia en el siguiente nivel, dando cuenta de su conocimiento sobre la secuenciación de los temas asociados a la función.

Conocimiento sobre los tipos de funciones que se estudian posteriormente (KMLS-S-8)

Arturo inicia el estudio del concepto de función mostrando ejemplos de funciones mediante diagramas sagitales. La función lineal y función afín son los primeros ejemplos de funciones que estudia con mayor profundidad y a las que les da un nombre. Arturo declara que estos tipos de funciones son los que inician el estudio de las funciones.

> *Arturo: […]Cuando recién se ven las primeras funciones que surgen son las función lineal, afín y constante. [Ent2 86]*

Durante las clases, Arturo señala que hay otro tipo de funciones, pero no menciona cuales son ni en qué nivel se estudian.

> *Arturo: […] Las funciones, las que estamos viendo, son un tipo de funciones, eso no significa que todas las funciones que vamos a ver su representación va a ser una recta. Estamos, específicamente, en esas. Hay otras que su representación gráfica puede variar de cualquier forma; puede ser cualquier combinación hasta de curvas, de curvas con rectas, combinaciones tenemos por montón. [906]*

Aunque Arturo habla de otro tipo de funciones y sobre sus representaciones gráficas, no se refiere a alguna en particular. En la entrevista, el profesor realiza una precisión respecto a cuáles son las funciones que se estudian en el curso siguiente.

> *Arturo: Aparece en el curso siguiente la función raíz, la función exponencial y el logaritmo. Entonces, generalmente el enfoque de los textos es que lo ven como un operador. [Ent2 132]*

Además de identificar los tipos de funciones que se estudian en el siguiente nivel escolar, señala la forma cómo estas se estudian.

> *E: En la línea de funciones, ¿qué sigue en el siguiente año?*
>
> *Arturo: Raíz, logaritmo y exponencial, eso viene en el curso siguiente. Se ven como operador y después como función. Así viene planteado en los textos escolares. Lo que hice fue invertirlo. [Ent2 245-246]*

En esta última respuesta se puede observar que Arturo realiza modificaciones respecto a lo que indica el programa de estudio al momento de presentar estos tipos de funciones. El objetivo de estos cambios es mejorar la comprensión de los estudiantes sobre estos nuevos conceptos.

> *Arturo: […] En ese curso tuve que hacer la fusión de dos cursos en uno: 8º y 1º, y con ideas para el curso siguiente, porque yo agregué compuesta de funciones para poder partir desde ahí con logaritmos. [Ent2 126]*

Las modificaciones que realiza Arturo tienen relación con la incorporación de nociones que el programa no contempla. Por ejemplo, la compuesta de funciones y la biyectividad, conceptos que son usados por el profesor para sustentar el estudio de otras funciones, como ya se ha mencionado antes respecto a las funciones inversas.

De lo anterior se observa el conocimiento de Arturo sobre cuáles son las funciones que se estudian en el nivel actual y en los siguientes, además de cómo los contenidos que enseña en este nivel potencian la enseñanza y el aprendizaje de las funciones que se estudian posteriormente.

La tabla 13 reúne los indicadores de conocimiento identificado en las clases de Arturo sobre el concepto de función en el subdominio KMLS.

Tabla 13: Síntesis de indicadores por categoría del KMLS

	Categorías	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS	Expectativas de aprendizaje	KMLS-E-1	lo estipulado como aprendizaje de los estudiantes sobre la función
		KMLS-E-2	la inclusión de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad como temas de estudio en el contexto de la función
	Nivel de desarrollo esperado	KMLS-DC-1	nivel de desarrollo *conceptual* de los estudiantes sobre conceptos asociados a la función sobre
			1.1 la comprensión del concepto de función
			1.2 la representación de la función
			1.3 la inyectividad de la función
			1.4 la biyección de la función
		KMLS-DP-1	nivel de desarrollo *procedimental* de sus estudiantes en procesos asociados a la función sobre
			1.1 la identificación de correspondencias funcionales
			1.2 la determinación de imágenes y pre imágenes
			1.3 la construcción de representaciones para la función
			1.4 la resolución de diferentes tipos de ecuaciones
			1.5 la determinación del dominio y el recorrido de una función
			1.6 la restricción del dominio de una función
			1.7 la determinación de la inversa de una función

Tabla 13: Síntesis de indicadores por categoría del KMLS (continuación)

	Categorías	Código	Conocimiento del profesor sobre
KMLS	Secuenciación de temas	KMLS-S-1	el estudio del plano cartesiano y los puntos en el plano
		KMLS-S-2	la simbología de conjuntos y cuantificadores como temas previos y posteriores
		KMLS-S-3	la evaluación de expresiones algebraicas como conocimiento procedimental de los estudiantes
		KMLS-S-4	la resolución de ecuaciones e inecuaciones como tema previo al estudio de la función
		KMLS-S-5	los sistemas numéricos conocidos por los estudiantes
		KMLS-S-6	la biyectividad de la función como conocimiento necesario para el estudio de algunas funciones
		KMLS-S-7	la resolución de ecuaciones racionales con la variable en el denominador como tema posterior
		KMLS-S-8	los tipos de funciones que se estudian posteriormente

A continuación, el Diagrama 3 muestra el conjunto de los indicadores (mediante sus códigos) asociados a los subdominios y categorías del MTSK de Arturo como síntesis de esta sección.

La lectura de este diagrama se puede realizar desde el centro hacia afuera. En el centro se encuentra la representación del modelo MTSK. Sobre este modelo se incluyen los nodos correspondientes a cada uno de sus subdominios, rotulados con la sigla en inglés. En los nodos rectangulares que siguen, se incluye el nombre de cada una de las categorías del subdominio. En el siguiente nivel de diagrama se encuentran los rótulos de los indicadores y subindicadores de conocimiento que se identifican en el caso de Arturo. El Diagrama 3 nos muestra conexiones entre nodos de diferentes categorías, pues pretende ilustrar el conjunto de indicadores de conocimiento que se identifican a lo largo de las sesiones de clases que fueron analizadas. Esta representación da cuenta de los conocimientos manifestados y evidenciados como conocimiento especializado sobre el concepto de función. En este sentido, corresponde a una forma de mostrar la información disponible (en el sentido de Schoenfeld, 2010) y como red compleja de nodos interconectados (en el sentido de Ponte, 1994). Estas conexiones se mostrarán en el siguiente apartado.

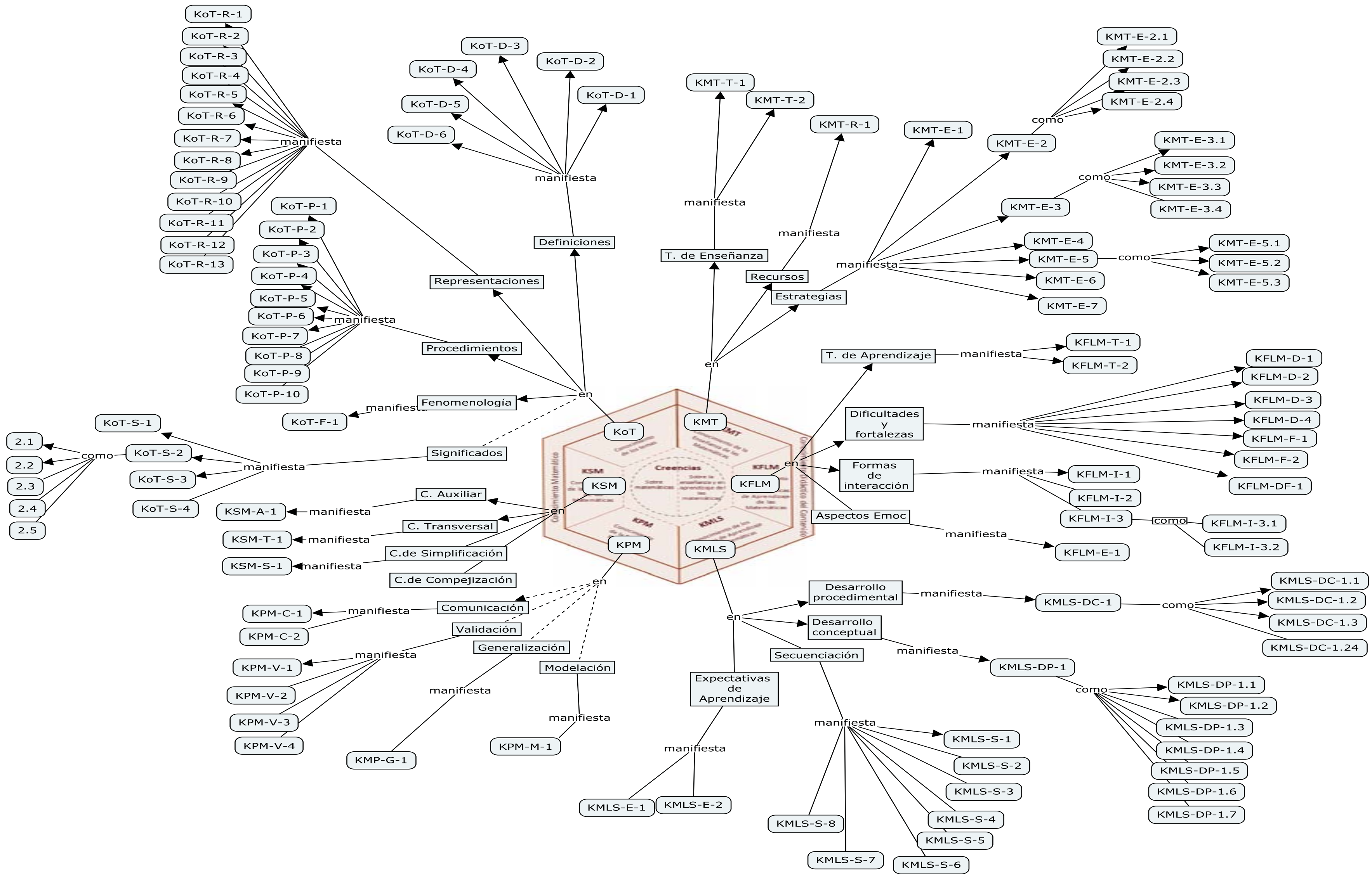


Diagrama 3: Indicadores de conocimiento especializado de Arturo.

Relaciones dentro de los subdominios del conocimiento especializado de Arturo

Atendiendo al objetivo específico 2, además del análisis cronológico de las sesiones de clases de Arturo que permite identificar los conocimientos que manifiesta durante la enseñanza de la función y su descripción basada en las categorías del MTSK, se realiza el análisis de las sesiones de Arturo y los conocimientos identificados en búsqueda de relaciones dentro de su conocimiento especializado sobre la función. Con el fin de agilizar la lectura de este apartado, hemos suprimido las evidencias correspondientes a los extractos de clases que dan cuenta de conocimiento especializado de Arturo, poniendo el foco en cómo se interpretan las relaciones. Los códigos utilizados en esta sección corresponden a aquellos que se usaron en la identificación de indicadores para el conocimiento de Arturo y pueden ser consultados en las tablas que cierran los apartados anteriores en este mismo capítulo.

La identificación y descripción de estas relaciones se basan en el conocimiento que Arturo manifiesta sobre la Matemática, sobre el conocimiento de su enseñanza y/o sobre el conocimiento de su aprendizaje. Asimismo, estas relaciones corresponden a la interpretación de los conocimientos manifestados durante la enseñanza de la función realizada a la luz del MTSK y del carácter especializado con que él considera el conocimiento del profesor.

Las relaciones dentro del conocimiento corresponden por tanto a la integración de los conocimientos de Arturo y pueden ser observadas en diferentes momentos dentro de las sesiones de clase o también a lo largo de las nueve sesiones de clases. Estos momentos permiten observar relaciones dentro de las categorías o los subdominios del MTSK de Arturo, de modo que, en nuestro caso, es posible identificar relaciones entre categorías de un mismo subdominio y relaciones entre categorías de diferentes subdominios las que producen las relaciones entre subdominios y, consecuentemente, relaciones entre los dominios MK y PCK.

A continuación, presentamos aquellas relaciones dentro de cada subdominio y, posteriormente, las relaciones dentro del conocimiento de Arturo que se manifiestan en la enseñanza de la función.

Relaciones al interior del KoT

Arturo presenta la definición de la función destacando dos propiedades: la unicidad de la imagen y la exhaustividad en la asignación de imagen (KoT-D-1). Este énfasis permite al profesor, por un lado, realizar los procedimientos de verificación de correspondencias como funciones (KoT-P-1) y, por otro lado, construir ejemplos y representaciones sagitales de la función (KoT-P-2). Respecto de la verificación de correspondencias, Arturo usa una representación gestual de la función para resaltar una de sus propiedades: la unicidad (KoT-R-3).

Algo similar ocurre con la definición de imagen y pre imagen (KoT-D-2), que le permite establecer un procedimiento (evaluación de la expresión algebraica y resolución de ecuaciones, respectivamente) para calcularlas (KoT-P-3). La definición de inyectividad (KoT-D-4) es otro caso en que se observa que este conocimiento le permite realizar el procedimiento de comprobar si la función (dada en diagrama sagital) es o no inyectiva (KoT-P-8).

Por otro lado, el conocimiento sobre la definición de la función (KoT-D-1) se encuentra relacionado con los significados que Arturo proporciona al concepto (KoT-S-1). Al definir la función como una correspondencia, Arturo asigna este significado (la función como correspondencia) a la función y, a partir del uso de la función va asignando el significado de la función como un proceso (KoT-S-2).

Arturo también presenta las definiciones de inyectividad y de epiyectividad de la función (KoT-D-4) con el significado de relación uno a uno para la inyectividad (KoT-S-3) y como que no pueden sobrar elementos en el conjunto de llegada para la epiyectividad (KoT-S-4).

Otra relación que se observa dentro del Conocimiento del Tema es la que se produce entre el conocimiento de las representaciones de la función (KoT-R-2, KoT-R-3, KoT-R-6, KoT-R-7, KoT-R-8) y el conocimiento sobre cómo se construyen dichas representaciones (KoT-P-2, KoT-P-4, KoT-P-5).

De este modo, las categorías de Definiciones, propiedades y sus fundamentos, de Procedimientos, de Registros de representación y los Significados se relacionan al interior del KoT de Arturo.

Relaciones al interior del KSM

La ecuación $y = f(x)$ y el ámbito numérico en el cual puede trabajar Arturo con sus estudiantes genera una relación entre su conocimiento sobre la conexión auxiliar de la función con la ecuación (KSM-A-1) y su conocimiento sobre la simplificación del trabajo con expresiones algebraicas fraccionarias para el cálculo del recorrido de una función (KSM-S-1). Arturo conoce que la ecuación $y = f(x)$ permite determinar pre imágenes y también que es la que se debe resolver (como ecuación literal) para determinar el recorrido de una función. Cuando la expresión de $f(x)$ es fraccionaria y se debe resolver la ecuación $y = f(x)$, Arturo vincula el trabajo con números racionales al trabajo con expresiones algebraicas fraccionarias.

Relaciones al interior del KPM

En la demostración de la inyectividad de la función intervienen conocimientos del KPM de Arturo que permiten observar relaciones entre ellos. Cuando Arturo muestra las definiciones de función, inyectividad y epiyectividad lo hace utilizando e interpretando el lenguaje formal y simbólico (KPM-C-1; KPM-C-2), lo que muestra su conocimiento sobre el papel de esta simbología para comunicar estas ideas matemáticas. El significado de estos símbolos le permite fundamentar los mecanismos que deben ser empleados para verificar correspondencias funcionales (KPM-V-1) y funciones inyectivas (KPM-V-3). Esto último muestra también la comprensión de la estructura lógica $p \Rightarrow q$ en la propiedad con la que define la inyectividad de la función y la forma de abordar su demostración (KPM-V-2).

De lo anterior, es posible observar que el conocimiento sobre la comunicación de ideas matemáticas, manifestado en el conocimiento del papel que juegan los símbolos y el conocimiento de la lógica proposicional, se relaciona con su conocimiento de las formas de validar en matemáticas, particularmente, mediante el examen de las definiciones de los conceptos de función y de función inyectiva.

Relaciones al interior del KMT

La teoría de enseñanza que Arturo conoce le permite organizar las sesiones de clases mediante el planteamiento de definiciones, representaciones, procedimientos asociados, ejemplos y las tareas para aplicar los conceptos definidos (KMT-T-1) a lo largo de todas las clases observadas. En esta estructuración, Arturo implementa las diferentes estrategias de enseñanza que manifiesta conocer de acuerdo a aquello que se proponga enseñar. Por ejemplo, al enseñar la definición de función se observa su estrategia de enseñanza (KMT-E-1) que incluye usar situaciones cotidianas para los estudiantes en relación al concepto de función, la representación sagital de la función y el uso de ejemplos y no ejemplos para determinar los alcances de la definición. Por otro lado, cuando enseña las representaciones de la función, también es posible observar una estrategia de enseñanza para ello (KMT-E-3), consistente en mostrar, de manera articulada, las representaciones sagital, algebraica, numérica (como transición entre la tabular y un conjunto de pares ordenados) y cartesiana de la función. El punto de partida de esta articulación es la definición de función y la articulación se produce mediante la identificación de a qué elemento corresponde ser imagen y cuál es pre imagen.

La enseñanza de la definición de función también se transforma en el punto de partida para la enseñanza del procedimiento sobre cómo validar correspondencias como funcionales (KMT-E-2). La teoría personal de enseñanza también contempla el planteamiento de ejemplos, cuyo planteamiento se basa en el conocimiento de Arturo sobre criterios de selección (KMT-E-4) de acuerdo al grado de complejidad y el ámbito numérico que puede trabajar con sus estudiantes. De este modo se observa una relación entre la teoría personal de enseñanza, que le permite estructurar sus clases, y las diferentes estrategias de enseñanza que se insertan en el desarrollo de esta.

Dos asuntos que se destacan como estrategias aplicadas de manera transversal en la enseñanza de la función son la traducción del lenguaje formal que Arturo utiliza para definir los conceptos nuevos (KMT-E-5) y el ofrecimiento de ayudas sobre los procedimientos asociados a la función.

Relaciones al interior del KMLS

La enseñanza y aprendizaje de cierto tipo de ecuaciones permite relacionar el conocimiento del desarrollo procedimental esperado y el conocimiento sobre la secuenciación de temas. Arturo conoce que sus estudiantes saben cómo resolver ecuaciones lineales, en una y dos variables, con coeficientes numéricos y literales pues es un tema estudiado antes (KMLS-S-4), pero además conoce que las ecuaciones racionales quedan fuera de lo que se espera puedan resolver en el nivel que está atendiendo (KMLS-DP-1.4) y que se estudiarán en el curso siguiente

(KMLS-S-7). El conocimiento sobre la secuenciación de temas parece influir en el conocimiento sobre el nivel de desarrollo procedimental que se espera en los estudiantes. Por otra parte, este conocimiento de Arturo le permite conocer los límites sobre lo que se espera puedan desarrollar sus estudiantes en cuanto al cálculo del recorrido de alguna función (KMLS-DP-1.4 y KMLS-DP-1.5), limitando a casos en que la determinación del recorrido requiera de resolver solo este tipo de ecuaciones. De este modo se presenta la relación entre el conocimiento de la secuencia de temas y los niveles de profundización con que dichos temas deben ser enseñados y aprendidos, ya sean anteriores o posteriores al estudio de la función.

El aprendizaje de la definición de función es un conocimiento que Arturo espera que sus estudiantes desarrollen tanto a nivel conceptual, mediante la comprensión de las propiedades que caracterizan a la función (KMLS-DC-1.1), como a nivel procedimental, mediante la aplicación de estas propiedades para determinar si una correspondencia es o no funcional (KMLS-DP-1.1). Este aprendizaje de la función también relaciona el conocimiento procedimental (KMLS-DP-1.3) y conceptual (KMLS-DC-1.2) sobre la construcción de representaciones de la función. En este caso, el vínculo que conecta el conocimiento del desarrollo conceptual y el desarrollo procedimental que Arturo espera de sus estudiantes está basado en el conocimiento de las propiedades que definen a la función.

El conocimiento sobre la inclusión de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad es considerado como parte del KMLS de Arturo, quien enseña estos temas con la finalidad de sustentar y potenciar la comprensión de la función inversa, a la vez que esta inclusión permite ver la profundidad con que Arturo espera que sus estudiantes comprendan la función. Particularmente, Arturo se refiere a estos temas respecto de las ventajas que proporcionan en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial como funciones inversas una de la otra. En este sentido, se observa una relación entre los conocimientos de Arturo acerca del desarrollo conceptual (KMLS-DC-1.3, KMLS-DC1.4) y procedimental (KMLS-DP-1.7), el conocimiento sobre la secuenciación de temas asociados a la función (KMLS-S-6, KMLS-S-8) y el conocimiento sobre las expectativas de aprendizaje que no incluyen la inyectividad, la epiyectividad y la biyectividad (KMLS-E-2). La inyectividad, epiyectividad y biyectividad se presentan como un tema que el programa de estudio del nivel deja fuera, sin embargo, el profesor los incluye como tema de enseñanza. En este sentido, Arturo conoce que no son metas de aprendizaje (expectativas), pero su experiencia profesional enseñando las funciones logaritmos/exponenciales y raíces/potencias en los siguientes niveles escolares(secuenciación) le llevan a incluir la biyectividad de la función en este nivel para sustentar el estudio de la función inversa como pare de su conocimiento sobre el desarrollo conceptual de sus estudiantes.

Relaciones al interior del KFLM

Varias de las acciones realizadas por Arturo enseñando la función, la biyectividad y otras funciones que se estudian en los siguientes niveles, tiene sustento en el conocimiento sobre las dificultades que presentan los estudiantes al aprender la función (KFLM-D-1).

Arturo reconoce que los estudiantes pueden comprender la idea de correspondencia, pueden realizar el cálculo de imágenes o algún otro concepto asociado a la función, sin embargo, las dificultades se presentan al intentar entender la función como un todo, englobando todos estos conceptos. De esta forma, Arturo aplica su teoría de enseñanza sobre el aprendizaje de la función y deja ver su conocimiento general sobre el aprendizaje como concatenación de conceptos, en la que los estudiantes avanzan en la comprensión de la función ayudados de la comprensión de los conceptos que la componen.

El cálculo de imágenes y pre imágenes de una función también permite observar relaciones dentro del conocimiento de Arturo. Por una parte, Arturo conoce la técnica de ensayo y error que los estudiantes utilizan para determinar pre imágenes de una función (KFLM-I-1) y el punto de intersección de una función afín con el eje X (KFLM-I-2) y, por otro lado, Arturo conoce la facilidad que tienen los estudiantes para trabajar con cierto tipo de números (KFLM-F-1 y KFLM-DF-1) al determinar imágenes y resolver ecuaciones. En este sentido, se produce un complemento entre las categorías de conocimiento de las Interacciones de los estudiantes con el contenido y el conocimiento de las Dificultades y Fortalezas de los estudiantes en el concepto de función de modo que al conocer cuáles son las técnicas que habitualmente aplica los estudiantes, el profesor puede gestionar las actividades y tareas que propone a sus estudiantes articulando lo que saben, cómo lo sabe y qué dificultades deben superar sus estudiantes.

Una situación similar ocurre con las dificultades que presentan los estudiantes al ubicar putos de la forma $(a, 0)$ en el plano y que pertenezcan al gráfico de una función. Arturo reconoce que existe una dificultad en esta representación para sus estudiantes y propone actividades que la abordan (también como parte de su estrategia de enseñanza- KMT), por ejemplo, al graficar la función $f(x) = x + 3$ y determinar el punto donde corta al eje X. En esto, el profesor aplica su teoría personal de aprendizaje sobre el reforzamiento y concatenación de conceptos. Arturo realiza un repaso del plano cartesiano y la ubicación de puntos durante la primera clase de funciones, temas que necesitarán sus estudiantes al realizar las actividades descritas antes.

Relaciones dentro del conocimiento especializado de Arturo en distintos momentos de la enseñanza del concepto de función

Como se mencionó más arriba, retornamos al carácter especializado del conocimiento estableciendo e interpretando relaciones dentro del conocimiento que Arturo manifestó durante la enseñanza de la función. Hemos mostrado diferentes relaciones al interior de cada subdominio, sin embargo, la especialización contempla la integración de diferentes conocimientos sin restringirse a subdominios particulares. En esta sección mostramos esta integración dada en cuatro momentos de la enseñanza de la función. Estos momentos pueden ser considerados como macro episodios, pues quedan determinados por distintos objetivos del profesor. Su identificación y selección se realizó, como se mencionó en el capítulo sobre la Metodología, reuniendo los episodios con mayor número de identificaciones de conocimiento especializado. Estos momentos son: 1) la enseñanza de la definición del concepto de función, 2) la presentación de una analogía y significados para la función, 3) la enseñanza de las representaciones de la función y 4) la enseñanza de la biyectividad de la función. Una quinta sección de este apartado tiene relación con dos situaciones que ocurren a lo largo de las clases analizadas: el uso del lenguaje simbólico y la resolución de diversos tipos de ecuaciones, las que también se aprecian relaciones al interior del conocimiento del profesor.

1 Durante la enseñanza de la definición del concepto de función

La presentación de la definición de la función, así como de los conceptos asociados a ella permiten observar conocimientos de Arturo de todos los subdominios. Cuando Arturo presenta la función se observa su conocimiento de la definición (KoT-D-1). Ello sirve de punto de partida para establecer relaciones entre su conocimiento matemático sobre el concepto y conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje. La definición de función se da en términos de una correspondencia entre elementos y conjuntos (KoT-D-1), aportando un significado al concepto (KoT-S-1) y se destaca la unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen. Arturo señala la condición de no vacío para los conjuntos involucrados como partida y llegada (KoT-D-1).

La teoría personal de enseñanza que Arturo conoce (KMT-T-1) le señala cómo organizar las definiciones, las representaciones, los procedimientos, ejemplos y tareas del concepto, por tanto, el planteamiento de la definición constituye la primera parte de la implementación de esta teoría. Para ello, Arturo emplea una estrategia para enseñar esta definición (KMT-E-1) consistente en usar situaciones cercanas para los estudiantes, dar una primera representación para la función para hacer comprensible este nuevo concepto. En dichas situaciones se destaca el uso de los cuantificadores como temas vistos previamente (KMLS-S-2) y que aportan en el estudio de la función y, desde la perspectiva de Arturo, también aportan al aprendizaje del lenguaje formal (KMT-E-5), pues Arturo da la definición en lenguaje natural y usando simbología matemática. En esto interviene también su KPM (KPM-C-1) respecto del papel que juegan estos símbolos en la comunicación de ideas matemáticas.

La relación entre el KMT y el KFLM de Arturo se produce al considerar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función. La elección de las estrategias de Arturo responde, en parte, a su conocimiento sobre las dificultades que ellos presentan al comprender la función (KFLM-D-1). Además, su conocimiento sobre el aprendizaje de las definiciones dadas en lenguaje formal le permite generar una estrategia de enseñanza para ellas (KMT-E-5) consistente en presentar a sus estudiantes la traducción al lenguaje natural cada definición que da en lenguaje formal. Esto ocurre también con las definiciones de dominio y recorrido de la función.

La teoría de enseñanza de Arturo (KMT-T-1) también involucra la representación de la función. Arturo muestra el diagrama sagital como la primera representación de la función, la que le permite introducir otros conceptos: dominio, recorrido, imagen y pre imagen (vistos como parte de su KoT-Definiciones) y dejando ver lo que espera aprendan sus estudiantes sobre la función conceptualmente (KMLS-DC-1). Estos conceptos llevan consigo procedimientos que Arturo enseña a sus estudiantes: calcular dominio y recorrido, calcular imágenes y pre imágenes (KoT-procedimientos), que Arturo enseña desde su KoT esperando que los estudiantes sean capaces de realizarlos como parte de su desarrollo procedimental para la función (KMLS-DP-1). La teoría personal de enseñanza que conoce Arturo también puede ser vista aplicada para estos conceptos asociados a la función (dominio, co-dominio, recorrido, imagen y pre imagen) al presentar su definición (KoT-D-2), notación o representación (KoT-R-5 y 9), los procedimientos asociados (KoT-P-6 y 7) y ejemplos de ellos.

Los procedimientos asociados a la función que muestra Arturo inician por la verificación de correspondencias como relaciones funcionales (KoT-P-1). Para ello, Arturo enfatiza las propiedades contenidas en la definición de función (KoT-D-1) y cómo ellas permiten decidir cuándo una correspondencia es una función o no. Este último, muestra el conocimiento de Arturo sobre el rol de la definición en este procedimiento (KPM-V-1) y en la construcción de ejemplos de correspondencias funcionales y no funcionales. El primer procedimiento que Arturo espera aprendan sus estudiantes es el de validar correspondencias como funciones (KMLS-DP-1.1), lo que implica la comprensión del concepto y las propiedades que lo definen (KMLS-DC-1.1). Para lograr esta comprensión, Arturo ejecuta otra estrategia (KMT-E-2) que contempla distintas formas de destacar las propiedades de la definición de función: representaciones gestuales de la función o el test de la recta vertical.

Otro de los procedimientos contemplados en la enseñanza de la función es el cálculo de imágenes y pre imágenes (KoT-P-3). Arturo conoce que el cálculo de imágenes es más fácil para los estudiantes pues esto ya han estudiado la evaluación de expresiones algebraicas (KMLS-S-3) y hay ciertos números que facilitan esta evaluación (KFLM-F-1). Arturo enseña estos procedimientos, sabiendo que sus estudiantes poseen técnicas propias (KFLM-I-1). El conocimiento sobre la selección de ejemplos y tareas (KMT-E-4) le permite aumentar la dificultad de los procedimientos para determinar imagen y pre imagen para una función dada, dejando obsoletas las técnicas alternativas de los estudiantes y posicionar técnicas que espera que sus estudiantes logren aplicar posteriormente (KMLS-DP-1.2). Una de estas técnicas es el planteamiento de ecuaciones para determinar pre imágenes de una función. Esto permite observar su conocimiento sobre la conexión entre ecuación y función (KSM-A-1).

En el cálculo del dominio y recorrido (KoT-P-6 y 7), el espacio que concede Arturo a sus estudiantes está dado por su el ofrecimiento de ayudas o planteamiento de preguntas para conseguirlo, aunque estas muchas veces son retóricas, siendo menos evidente el conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con este contenido. Arturo pide a sus estudiantes que expresen cuales fueron sus procedimientos y razonamientos para que, junto a ellos, formalice estos procedimientos.

En el Diagrama 4 se presentan estas relaciones entre las diferentes categorías a las que pertenecen los conocimientos involucrados en las relaciones identificadas. Observamos que, en comparación con el diagrama 3, la cantidad de nodos involucrados es menor, pues se han seleccionado solo aquellos que representan conocimientos que intervienen en las relaciones expuestas.

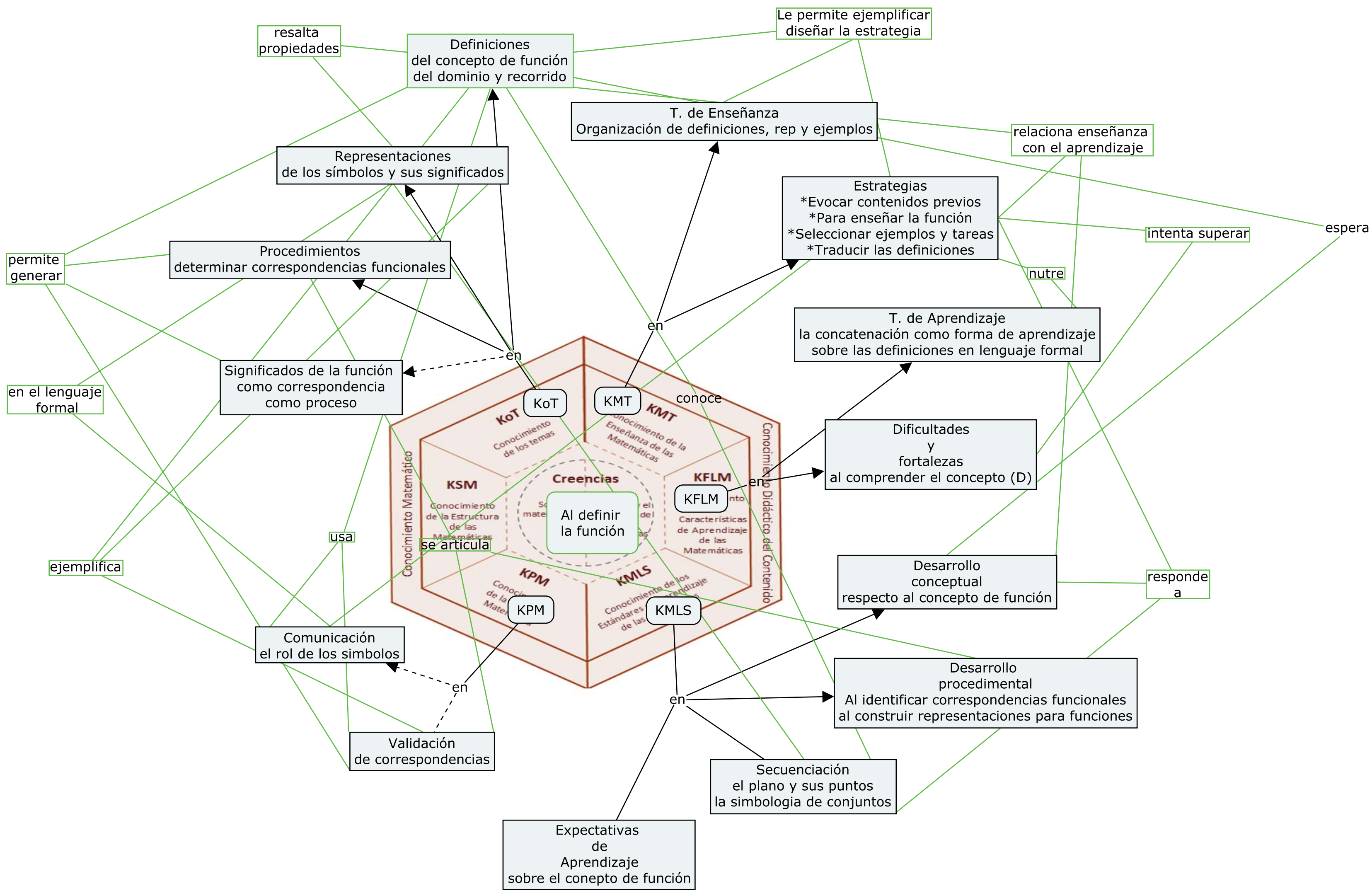


Diagrama 4: Relaciones dentro del MTSK de Arturo al definir la función.

2 Durante la presentación de una analogía

Destacamos la presentación de una analogía para la función como un momento en que predomina el KMT de Arturo. Este planteamiento responde a una estrategia de enseñanza para la función que Arturo conoce (KMT-E-1) en la que la analogía es una fase importante (KMT-E-1.3). Dicho planteamiento muestra un cambio de significado de la función desde su definición como correspondencia (KoT-S-1) a su significado como proceso (KoT-S-2.1 y 2.2). Se pueden observar diferentes conocimientos con el propósito de hacer comprensible la idea de función. El uso de esta analogía permite identificar relaciones entre conocimientos de los subdominios KoT, KMT, KFLM y KMLS.

Arturo realiza una pausa en la enseñanza de la definición de función (KoT-D-1) para mostrar una analogía entre la función y una máquina lavadora (KMT-E-1.3). La pausa se debe al conocimiento de Arturo sobre las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar e intentar comprender la función (KFLM-D-1) y los conceptos nuevos que involucra (dominio, co-dominio, imagen, pre imagen) y que espera aprendan sus estudiantes (KMLS-DC-1.1).

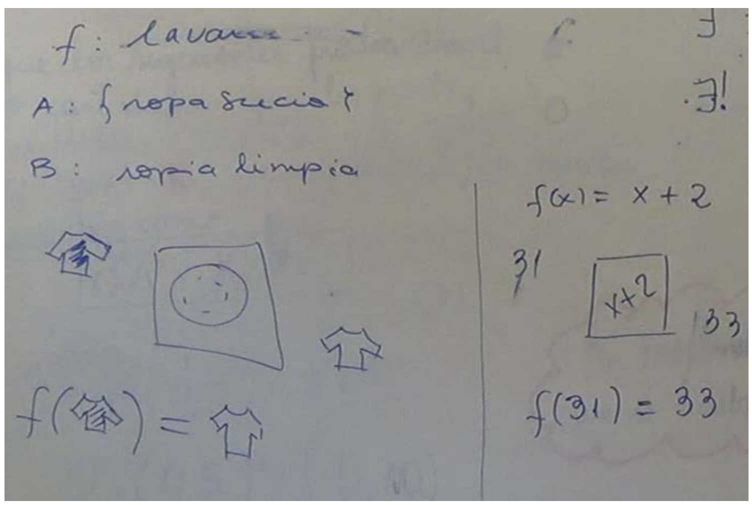


Imagen 45: Analogía pictórica y algebraica.

Por un lado, la analogía evidencia el conocimiento de Arturo sobre los significados de correspondencia y proceso de entrada/salida para la función. Además, le permite introducir las notaciones usuales para la función (KoT-R-4) y su representación algebraica (KoT-R-6) mediante un ejemplo de función afín. Como se observa en la Imagen 35, la relación entre el proceso que realiza la máquina con la ropa sucia y lo que ocurre con las pre imágenes en una función dada algebraicamente vincula también el proceso de cálculo de imágenes de una función, reforzando el significado de proceso de la función (KoT-S-2).

Como relaciones al interior del KoT de Arturo, el conocimiento de la función en su carácter estructural se presenta en la definición y el significado de correspondencia atribuido, (KoT-D-1, KoT-S-1), mientras que el significado de proceso se presenta en el indicador (KoT-S-2) y sus diferenciaciones de la función como una aplicación

(KoT-S-2.3), como una transformación (KoT-S-2.4) y como un operador (KoT-S-2.5). De este modo, Arturo complementa el significado de la función proporcionado por la definición con los significados que derivan del uso de la función.

A continuación, se diagraman las relaciones anteriores entre los conocimientos (Diagrama 5) que Arturo manifiesta cuando plantea la analogía entre la función y la máquina lavadora. A pesar de tratarse de un momento puntual dentro de la enseñanza de la función, observamos que este tipo de situaciones permite ver relaciones entre diferentes conocimientos de distintos subdominios, lo que, a su vez, da cuenta de la complejidad del conocimiento del profesor.

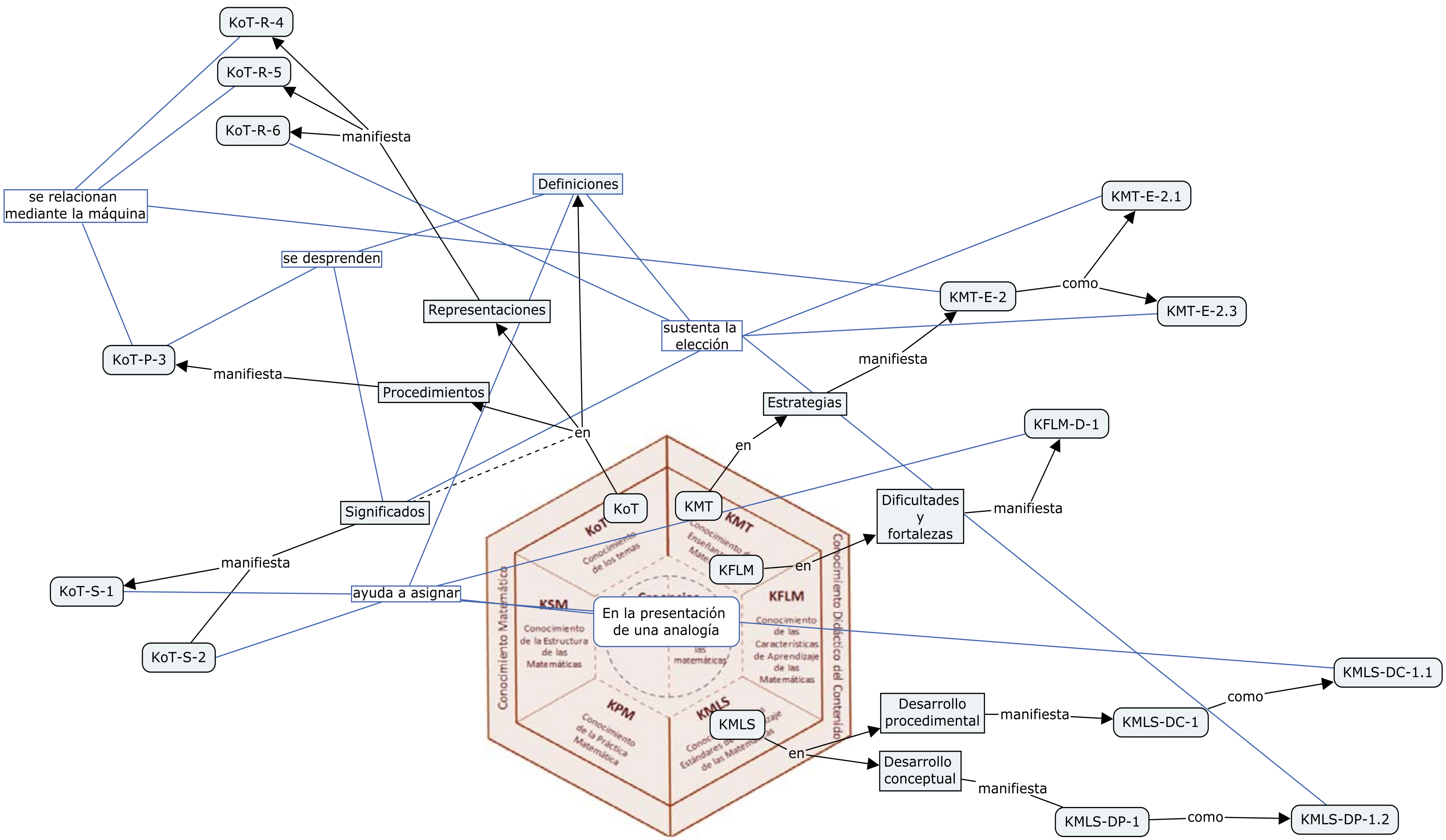


Diagrama 5: Relaciones dentro del MTSK de Arturo al plantear una analogía para la función.

3 Durante la enseñanza de las representaciones para la función

El conocimiento de Arturo sobre las representaciones de la función se presenta desde el planteamiento de la definición (KoT-D-1), la que es acompañada de un diagrama sagital como primera representación (KoT-R-2) y se transforma en el primer eslabón de la cadena de representaciones de la función que conoce y enseña Arturo. Así, desde la categoría de Registros de representación se inicia el establecimiento de relaciones dentro del MTSK de Arturo.

Arturo dedica parte de una sesión de clase a la construcción de las representaciones. Como se observa en la Imagen 36, Arturo conoce diferentes representaciones de la función: sagital, algebraica, tabular-numérica y cartesiana (KoT-Registros de representación). La presentación de ella a sus estudiantes la realiza mediante una estrategia de enseñanza (KMT-E-3). La estrategia consiste en ir articulando una representación con la siguiente mediante la identificación de imagen y pre imagen en cada caso. El diagrama sagital (KoT-R-2) le permite identificar estos conceptos de imagen, pre imagen, conjunto de partida, conjunto de llegada, dominio y recorrido, mostrando relaciones al interior de su KoT entre las definiciones y representaciones de estos conceptos.

La Imagen 46 muestra el conjunto de representaciones que Arturo escribió en la pizarra de la sala de clases. Los números se han insertados para efectos del análisis y el establecimiento de las relaciones.

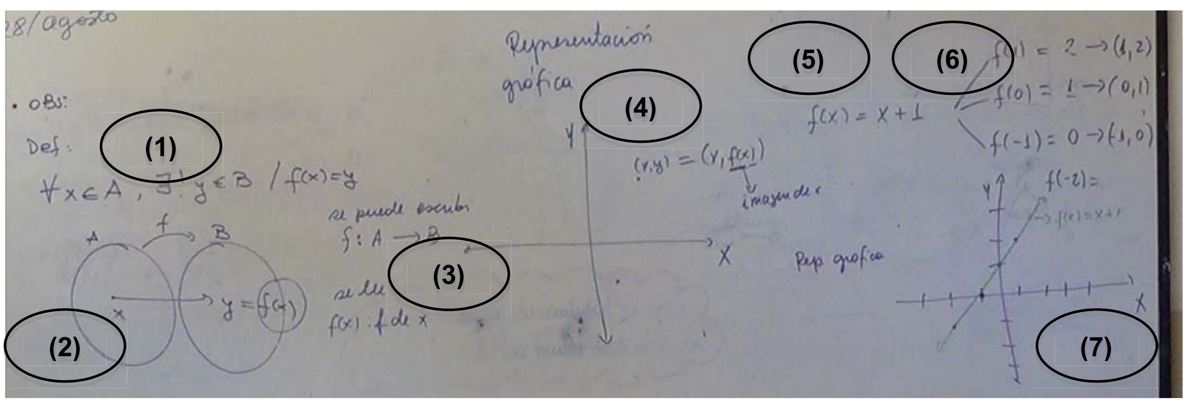


Imagen 46: Articulación de representaciones

El pasaje de (1) a (2) articula la definición de la función con el diagrama sagital, donde interviene también el uso del lenguaje formal como parte de su KPM, enfatizando en el rol de los cuantificadores (KPM-C-1). En (3), Arturo expresa conocimiento de las notaciones usuales para la función (KoT-R-4), derivada del diagrama sagital. La representación gráfica (4) se refiere a la que utiliza los puntos del plano cartesiano, conocimientos que Arturo señala como previos y potenciadores en el estudio de la función (KMLS-S-1). El profesor destaca en esta representación gráfica (KoT-R-7) la estructura de los elementos del gráfico de la función como pares ordenados (x,f(x)), y el concepto de imagen que articula lo sagital con lo cartesiano.

Como parte de su estrategia de enseñanza de las representaciones de la función (KMT-E-3) se incluye un ejemplo de función afín (5) para construir su representación cartesiana. Arturo conoce este procedimiento (KoT-P-4) y el resultado que se debe obtener al graficar este tipo de función (KoT-R-8, KoT-P-5), siendo una línea recta. En relación a esta representación, Arturo establece una diferencia entre función lineal y función afín, donde la primera es una recta que pasa por el origen del sistema y la segunda no pasa por el origen (KoT-D-3).

En este punto se vincula la recta euclidiana con la función afín como conocimiento en su KSM (KSM-T-1). Para lograr esta representación, involucra el cálculo de imágenes y la determinación de puntos de la gráfica motivado por lo que espera logren sus estudiantes a nivel procedimental (KMLS-DP-1.3). En (6) se observa el registro numérico que intenta ser una tabla de valores. Arturo conoce las fortalezas de sus estudiantes en la evaluación de expresiones algebraicas con los números 0, 1 y -1 (KFLM-F-1) y que la evaluación de expresiones es un tema estudiado previamente (KMLS-S-3). Por otro lado, Arturo manifiesta conocer que los estudiantes tienen dificultades para ubicar puntos de la forma (a,0) en el plano (KFLM-D-2) y que el uso de las cuadrículas de los cuadernos que ellos utilizan constituye un mejor recurso para graficar funciones (KFLM-F-2) en comparación al uso de la pizarra blanca (7), en donde debe hacer estimaciones para graduar los ejes (KMT-R-1).

Esta articulación de representaciones se desarrolla vinculando la estrategia de enseñanza de las representaciones de la función (KMT-E-3) y la concatenación de las ideas previas sobre la función, previamente aprendidas, para ir construyendo y enseñando los siguientes.

A continuación, el Diagrama 6 muestra los conocimientos que Arturo pone en juego cuando enseña las representaciones de la función y las relaciones entre ellos. De manera similar a los diagramas anteriores, el Diagrama 6 solo incluye aquellos (indicadores de) conocimientos que intervienen en la enseñanza de las representaciones que el profesor realiza para la función. En él se puede observar que el profesor usa conocimiento de casi todos los subdominios, salvo KPM.

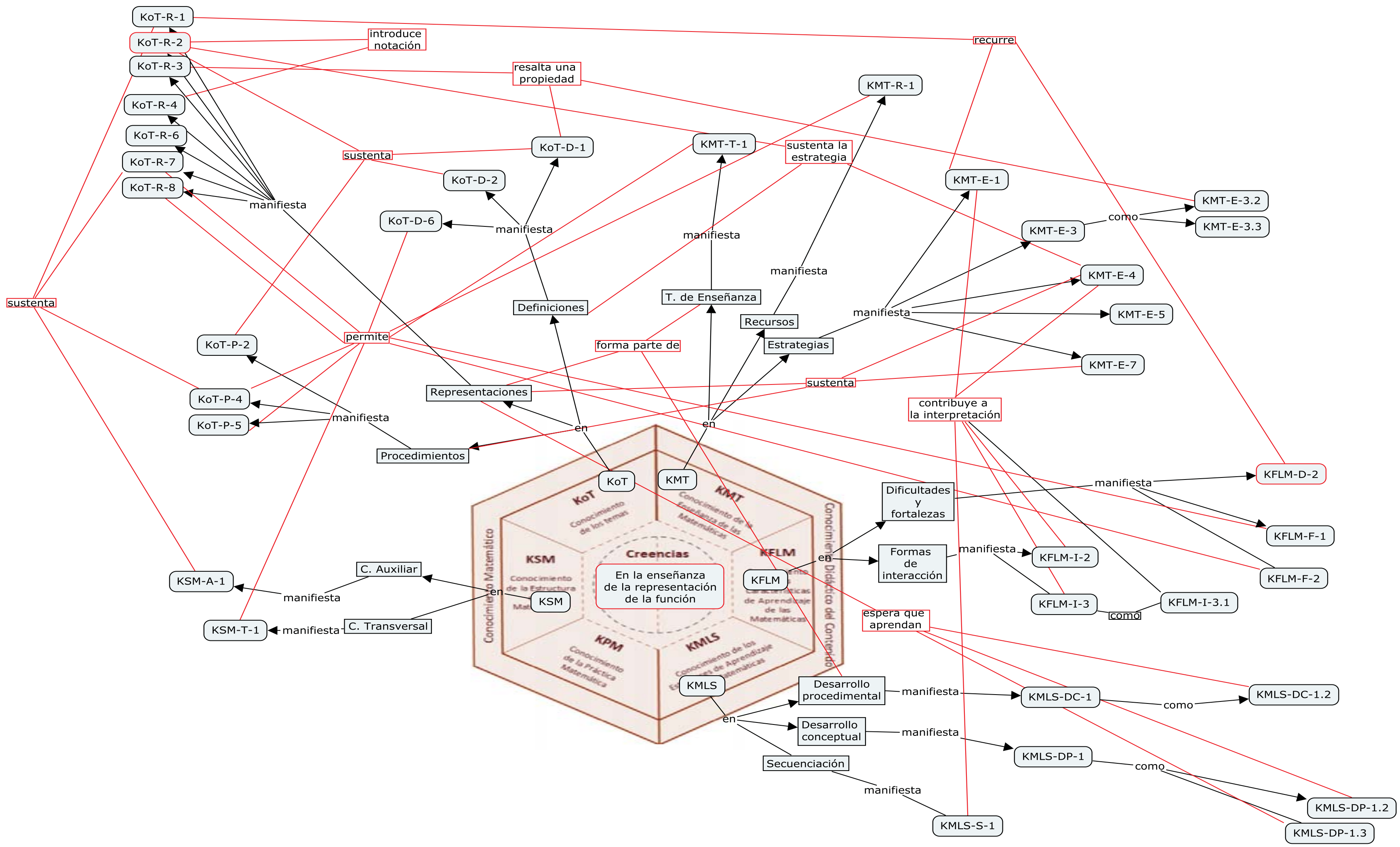


Diagrama 6: Relaciones dentro del MTSK de Arturo al enseñar las representaciones de la función.

4 Durante la enseñanza de la biyectividad de la función

La inclusión de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad en la enseñanza de la función (KMLS-E-2) responde las necesidades que detecta Arturo en la comprensión de las funciones logaritmo y exponencial (KFLM-D-3), las que se estudian en el curso siguiente (KMLS-S-8) como una inversa de la otra (KMLS-S-6). En este sentido, cobra relevancia incluir este momento de la enseñanza de la función pues muestra relaciones dentro del conocimiento especializado de Arturo que se desprenden de su conocimiento sobre la función.

Arturo enseña la inyectividad, la epiyectividad y la biyectividad siguiendo su teoría de enseñanza (KMT-T-1), que estructura la presentación de estos conceptos. La presentación de cada uno de estos conceptos se estructura siguiendo su teoría de enseñanza (KMT-T-1), la que inicia con su definición mediante el uso del lenguaje formal y del lenguaje natural, lo que da cuenta de su KPM (KPM-C-1 y 2). En el caso de la inyectividad, su definición (KoT-D-4) incluye el uso de cuantificadores y simbología de la lógica proposicional (KPM-C-1), cuyo conocimiento le permite estructurar la forma de validar funciones como inyectivas o no (KPM-V-2 y 3). Además, Arturo aplica su estrategia de enseñanza sobre la traducción de las definiciones (KMT-E-5) desde el lenguaje formal a lenguaje natural para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, lo que atiende a las dificultades que presentan sus estudiante en la comprensión la función inversa y la función logaritmo (KFLM-D-3), apoyado en su conocimiento sobre los cuantificadores y la simbología de conjuntos como un conocimiento previo de los estudiantes (KMLS-S-2) y proyectados como potenciadores de los conocimientos del curso siguiente.

Arturo caracteriza los conceptos asignándoles un significado; la inyectividad la aborda como una correspondencia 1 a 1 (KoT-S-3) y la epiyectividad la señala como una correspondencia en la que no pueden sobrar elementos del co-dominio (KoT-S-4). Esto se acompaña de representaciones de ejemplos de funciones que son inyectivas y otras que no son inyectivas como aplicación de su teoría de enseñanza y muestra su conocimiento sobre lo que espera aprendan conceptualmente sus estudiantes (KMLS-DC-1.3 y 1.4). Respecto de los aprendizajes procedimentales, Arturo manifiesta que los estudiantes deben saber establecer la expresión algebraica de la inversa de una función dada (KMLS-DP-1.7), pero no enfatiza en la demostración de inyectividad o epiyectividad, a pesar de mostrar su conocimiento sobre cómo determinar si una función particular es inyectiva o epiyectiva (KoT-P-8 y 9).

Las primeras representaciones de la inyectividad y de la epiyectividad son dadas mediante diagramas sagitales (KoT-R-10 y 11), las que también son relacionadas con los significados que Arturo atribuye a estos conceptos, incluidos para hacer comprensible los conceptos a sus estudiantes.

El Diagrama 7 muestra los indicadores de conocimiento que se ven relacionados durante la enseñanza de la biyectividad. Se presentan relaciones de conocimientos de distintos subdominio, salvo KSM, que no fue evidenciado en este contexto.

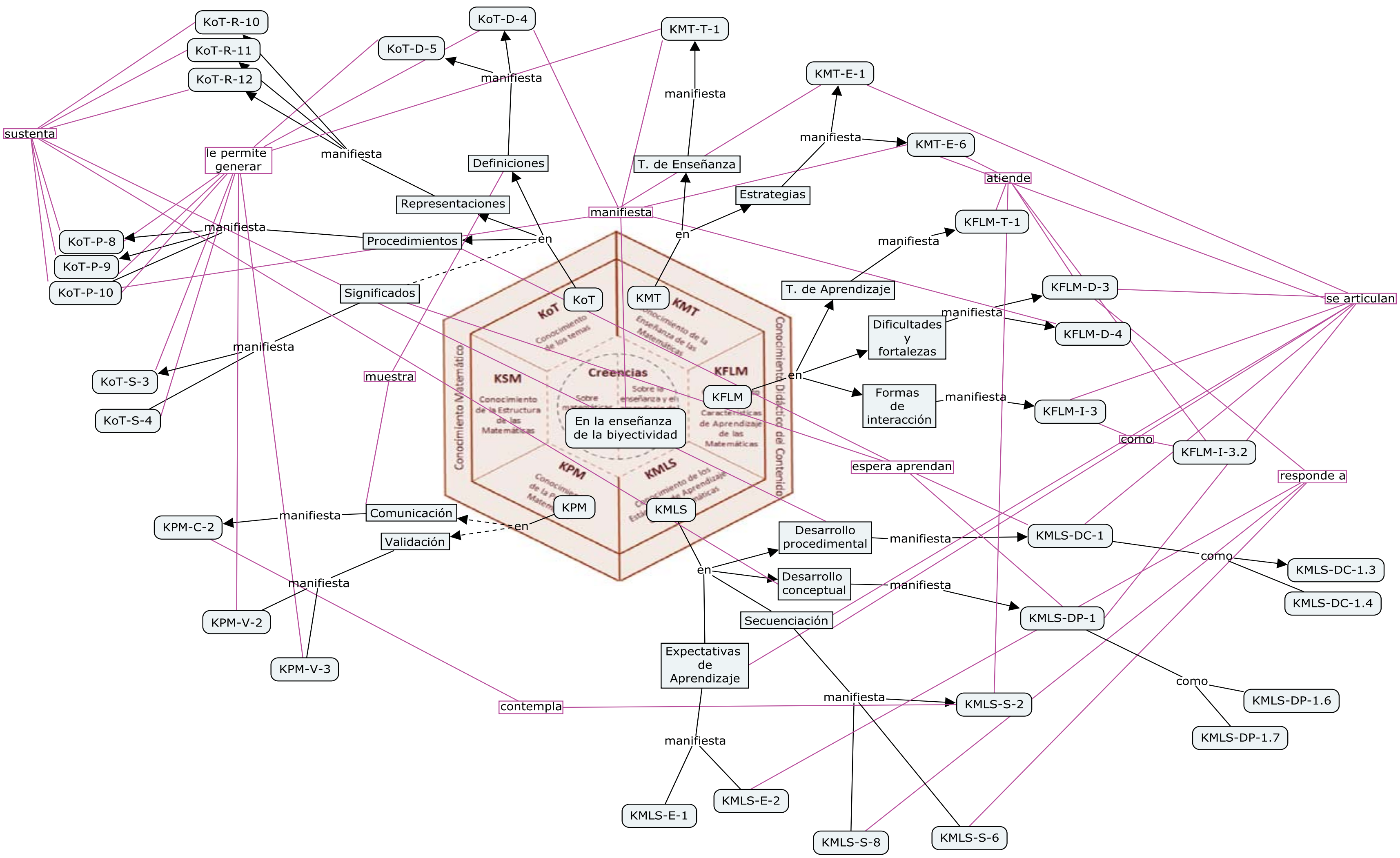


Diagrama 7: Relaciones dentro del MTSK de Arturo al enseñar las biyectividad de la función.

5 Otras relaciones entre subdominios

La resolución de diferentes ecuaciones y el uso del lenguaje formal y simbólico son situaciones que ocurren a lo largo de la enseñanza de la función. Estas situaciones, vistas durante toda la enseñanza, también permiten observar relaciones dentro del conocimiento de manera integrada.

El uso del lenguaje simbólico en la enseñanza de la función

El planteamiento de definiciones de la función y de los conceptos asociados es, en general, dado mediante el lenguaje formal y con el uso de simbología matemática. En ello se expresa la relación entre KoT – Definiciones, propiedades y sus fundamentos y el KPM de Arturo respecto del rol que tienen estos símbolos en la comunicación de ideas matemáticas. Además, le permiten dar sentido a los procedimientos asociados a cada concepto (KPM-V-1, KPM-V-2 y KPM-V-4).

Las definiciones marcan el inicio de su teoría personal de enseñanza (KMT-T-1) y le permiten generar sus estrategias de enseñanza (KMT-E-1, KMT-E-2 y KMT-E-5). Al mismo tiempo, esta importancia que le asigna al uso de simbología y lenguaje formal incide en la forma de enseñar el concepto de función cuando se propone como objetivo que los estudiantes comprendan, junto con la definición, los procedimientos que de ella se derivan, lo que deja ver la relación entre aquello que espera logren sus estudiantes, tanto a nivel conceptual (KMLS-DC-1) como procedimental (KMLS-DP-1), y las definiciones y procedimientos enseñados, por ejemplo en el caso del dominio (KoT-P-6), el recorrido (KoT-P-7)y la inyectividad (KoT-P-8).

La presentación y resolución de diferentes tipos de ecuaciones

La resolución de ecuaciones constituye otro eje sobre el cual se observan diferentes conocimientos relacionados. Las ecuaciones aparecen como parte del cálculo de pre imágenes (KoT-P-3) y mostrando la conexión entre la función y la recta euclidiana (KSM-T-1).

Arturo conoce que sus estudiantes ya han estudiado ecuaciones e inecuaciones previamente al estudio de la función (KMLS-S-4) y dicho conocimiento apoya el estudio del cálculo de pre imágenes, del recorrido y de la función inversa, mostrando también lo que se espera logren sus estudiantes en este nivel (KMLS-DP-1.2 y 1.4). Arturo selecciona los ejemplos y ejercicios que propone a sus estudiantes graduando la complejidad de los mismos (KMT-E-4) pues comprende que sus estudiantes presentan dificultades al resolver cierto tipo de ecuaciones (KFLM-D-4), particularmente aquellas que involucran números racionales (KFLM-DF-1) o expresiones algebraicas fraccionarias (KMLS-DP-1.4).

Cuando Arturo propone resolver ecuaciones también es posible ver su conocimiento sobre las técnicas alternativas para ello que poseen los estudiantes (KFLM-I-1) y (KFLM-I-2). Este conocimiento permite a Arturo proponer ejemplos y tareas que aumentan gradualmente la dificultad (KMT-E-4) y orientan los procedimientos alternativos hacia la resolución de ecuaciones como una forma de generalizar en matemáticas (KPM-G-1)

Finalmente, el planteamiento y la resolución de ecuaciones para el cálculo de pre imágenes, el cálculo de recorrido y la determinación de inversa permite observar conocimientos de diferentes subdominios de manera integrada.

CAPÍTULO 5. Discusión

Discusión sobre el conocimiento especializado de Arturo

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados expuestos en el capítulo anterior que dan cuenta del conocimiento especializado del profesor. Precisamente, se han establecido e interpretado las relaciones dentro y entre distintos subdominios del MTSK de Arturo teniendo en cuenta nuestro objetivo final que ha sido comprender el conocimiento que manifiesta el profesor como una red compleja y resultado de la interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático necesario para la enseñanza.

Asumiendo la postura del grupo de investigación SIDM frente al conocimiento, entendemos el conocimiento como una red amplia y compleja en la que se ubican conceptos, imágenes de conceptos y habilidades (Ponte, 1994), como nodos interrelacionados de modo que esta red constituya información útil para el profesor en el abordaje y resolución de una tarea o problema (Schoenfeld, 2010). En esta línea, la discusión que presentamos en este capítulo trata de destacar esta complejidad e interconexión del conocimiento del profesor en cuatro momentos y dos situaciones transversales a las sesiones de clases de Arturo en los cuales se identificaron diferentes relaciones entre sus conocimientos.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza del concepto de función

La visión general de las clases de Arturo permite reconocer cuatro momentos en la enseñanza de la función: (1) la enseñanza de la definición del concepto de función, (2) la presentación de una analogía y significados para la función, (3) la enseñanza de las representaciones de la función y (4) la enseñanza de la biyectividad de la función.

Además de caracterizar la práctica de Arturo, estos momentos son ricos en evidencias de conocimiento especializado y permiten la discusión de la integración de estos conocimientos de cara a la enseñanza de la función.

5.1. Durante la enseñanza de la definición del concepto de función

Como se puede apreciar tanto en el análisis del conocimiento de Arturo como en la propia descripción de las clases analizadas, la enseñanza de la función está marcada por un estilo tradicional en el que se privilegia la perspectiva formal e instrumental de la matemática. Esta observación permite avanzar en la comprensión del conocimiento de Arturo y convienen tenerla presente para en su caracterización, sin embargo, esto corresponde a una parte del modelo que no hemos considerado para este reporte, el dominio de las concepciones de Arturo sobre la matemática, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje. De acuerdo con Carrillo et al. (2018), permean a todos los subdominios del MTSK e influyen en las acciones que realiza el profesor y permiten obtener imágenes más precisas del conocimiento especializado del profesor.

En general, el inicio de cada clase que realiza Arturo incluye la evocación de conocimientos que Arturo conoce como estudiados previamente, ya sea en ese nivel o en los anteriores, lo que le permite estructurar su estrategia de enseñanza apoyándose en los conocimientos previamente revisados. La primera sesión de clase analizada comienza con un recordatorio sobre el plano cartesiano, la ubicación de los ejes y puntos en él. Arturo conoce que estos temas ya han sido estudiados (KMLS-S-1) y, para él, son potenciadores del estudio de la función, pues le serán útiles cuando se trabaje la representación cartesiana. En esta sesión, el profesor define la función con base en la idea de correspondencia (KoT-D-1) mediante lenguaje natural e identifica el dominio y el recorrido (KoT-D-2), mostrando el carácter estructural del concepto (Sfard, 1991) y evidenciando además un significado para la función (KoT-S-1) con el nivel de abstracción que proponía Dirichlet en su formalización para el concepto (Roque, 2012; Youschkevitech, 1976).

La definición de función que proporciona Arturo muestra la función como una correspondencia entre conjuntos (KoT-S-1) e incluye las condiciones de unicidad y exhaustividad en la asignación de imagen que, de acuerdo con Even (1990), caracterizan el concepto de función. El profesor agrega la condición de no vacío para los conjuntos involucrados como partida y llegada (KoT-D-1). Esta condición no está presente en las definiciones actuales de función de los textos matemáticos que abordan el tema (en la rama del Cálculo, por ejemplo, Apostol, 1999; Spivak, 1996), lo que permitiría una relación vacía como función. Sin embargo, para Arturo es necesaria pues no podría establecerse la correspondencia entre los elementos de los conjuntos, según lo señala el propio profesor durante la entrevista (KoT-D-1). En efecto, si la función *f* es definida como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, y se tiene que, por ejemplo, A es vacío, entonces $A \times B$ también es vacío así como cualquiera de sus subconjuntos. De aquí, *f* sería una función (como conjunto de pares) vacía.

Al considerar la propiedad que define a la función $\{(x,y),(x,z) \in f\} \Rightarrow \{y = z\}$, donde el par ordenado (x,y) se define como $(x,y) = \{x,\{x,y\}\}$, entonces, si alguno de los dos conjuntos (A o B) es vacío, *f* sería un conjunto vacío y se tendría que $(x,y),(x,z) \notin f$, haciendo a la proposición $\{(x,y),(x,z) \in f\} \Rightarrow \{y = z\}$ verdadera, por tanto *f* sería una función (vacía).

En la presentación de la definición, además de observarse el conocimiento del tema, se observa la relación entre el KMT y el KFLM. De acuerdo con Montes (2015), la elección de una estrategia de enseñanza puede estar sujeta a otros subdominios, por ejemplo, al KFLM cuando es realizada de acuerdo al conocimiento del profesor sobre las características del aprendizaje de sus estudiantes. La relación entre enseñanza y aprendizaje, como subdominios del MTSK, también es reportada por Zakaryan *et al*. (2018), declarando como esperable que el diseño de la enseñanza sea a partir del conocimiento sobre el aprendizaje. Esta relación también es identificada en el caso de Arturo.

La estrategia de enseñanza del profesor para la definición de función incluye el planteamiento de situaciones cotidianas para los estudiantes en las que se involucra la idea de correspondencia (KMT-E-1.1 y KMT-E-1.3). De acuerdo con Thompson (1994), esto es una forma apropiada de iniciar el estudio de la función, haciendo más significativo el concepto a los estudiantes. Con estas situaciones busca hacer comprensible el concepto a sus estudiantes. Sin embargo, las relaciones presentadas quedan en segundo plano tras centrarse en la función desde una perspectiva más algebraica y procedimental. Junto con ello, presenta distintas representaciones (KMT-E-3), ejemplos y no ejemplos para el concepto (KMT-E-1.4) para determinar los alcances del concepto y asignarle significado al concepto (Mitchell *et al.,* 2014).

Los subdominios KMT y KFLM, además de relacionarse, se nutren mutuamente (e.g. Zakaryan *et al*., 2018). Así, el conocimiento sobre la evocación de los conocimientos previos es sustentado por el conocimiento de Arturo sobre las dificultades que presentan los estudiantes al aprender el concepto (KFLM-D-1) lo que le permite generar su propia estrategia de enseñanza para avanzar en la comprensión de la función. De acuerdo a lo que Arturo comenta en la entrevista, estos conocimientos emergen de los resultados de sus estudiantes en las evaluaciones que les aplica sobre el aprendizaje del concepto de función, pues las buenas calificaciones son interpretadas por Arturo como logro de aprendizajes en sus estudiantes y el éxito de su estrategia.

Como se mencionaba, esta estrategia del profesor incluye la primera representación de la función mediante el diagrama sagital (KoT-R-2). Además de esta representación, Arturo enseña otras representaciones de la función y cómo ellas se articulan (se muestra en el siguiente apartado, más adelante en este capítulo).

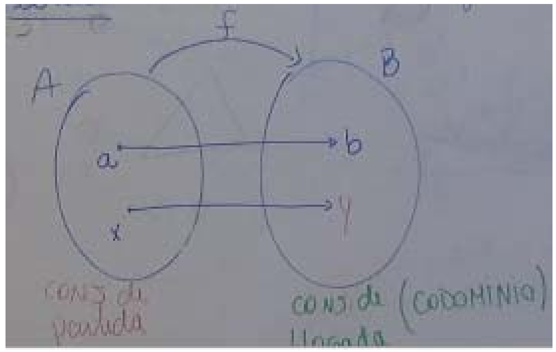


Imagen 47: Diagrama sagital inicial

El diagrama sagital (Imagen 47) le permite a Arturo identificar el conjunto de partida y el conjunto de llegada y, posteriormente, el dominio y recorrido de la función. Junto con ello, Arturo introduce la nomenclatura de imagen y pre imagen mediante el mismo diagrama sagital (KoT-R-5). Sin embargo, debe detener su explicación pues conoce las dificultades que presentan sus estudiantes para comprender este nuevo concepto (KFLM-D-1), lo que coincide con lo expuesto por Delgado (2018) respecto a la comprensión del lenguaje formal empleado en la definición actual de función (Imagen 48), pues Arturo también presenta esta definición utilizando lenguaje simbólico como formalización de la definición.

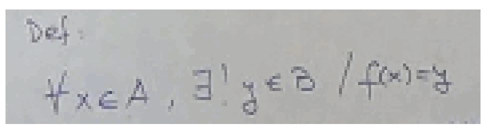


Imagen 48: Definición de la función usando lenguaje formal.

Las dificultades en la comprensión de esta definición son reportadas por otras investigaciones (e.g. Youschkevitech, 1976), apuntándola como dificultades intrínsecas de la definición formal. No se trata de una nueva definición de la función, sino que es otra forma de plantear la misma definición inicial. Arturo señala que no recuerda otra definición más que la anterior (KoT-D-1). En este sentido, la búsqueda de definiciones alternativas que señala Steele *et al*. (2013) se limita a su conocimiento de una sola definición de la función, omitiendo otras fuentes de información.

Esta definición corresponde a una traducción de la definición dada en lenguaje natural que Arturo escribió antes en la pizarra. Además, esta refleja la búsqueda de formalismo en la clase de matemáticas y la intención de Arturo de acercar ambos lenguajes, simbólico y natural, mediante traducciones (KMT-E-1 y KMT-E-5) que ayuden en la comprensión de la definición y a abordar las dificultades de sus estudiantes (KFLM-D-1) que el lenguaje formal implica (*e.g.*, Souza y Lazarrin, 2018; Tasdan y Koyunkaya, 2017; Zuffi y Pacca, 2002).

En esta nueva presentación, resalta el conocimiento de Arturo sobre el papel de los cuantificadores y la simbología de conjuntos (KPM-C-1), en contraste a lo que exponen Tasdan y Koyunkaya (2017) cuando los profesores hacen uso inadecuado del lenguaje formal. La interpretación de estos símbolos en la definición refleja las propiedades que caracterizan el concepto que permiten validar correspondencias como funciones y construir ejemplos de funciones (KPM-V-1). Además, estas propiedades permiten generar un procedimiento para determinar cuándo una correspondencia es o no una función (KoT-P-1). De esta forma, Arturo puede construir tareas y actividades (KMT-E-4) y seleccionar ejemplos (KMT-E-1.4) en los que sus estudiantes pongan a prueba las propiedades de la definición. Con ello, el profesor evidencia su conocimiento sobre lo que espera aprendan sus estudiantes a nivel conceptual (KMLS-DC-1.1) y procedimental (KMLS-DP-1.1 y KMLS-DP-1.2). La definición formal de función no aparece explícitamente en el programa de estudio de acuerdo al currículo nacional (MINEDUC, 2016b). Este documento señala que se espera que los estudiantes apliquen el concepto a situaciones contextualizadas, asunto que Arturo declara saber (KMLS-E-1), pero que no está presente en sus clases como conocimiento de la fenomenología o aplicaciones fuera de la matemática (KoT-F-1). Las aplicaciones que realiza del concepto se enmarcan en la matemática y no la relaciona con otras áreas del conocimiento.

En la enseñanza de la función, Arturo espera lograr que sus estudiantes puedan decidir si una correspondencia dada en diagrama sagital es o no una función (KMLS-DP-1.1). Para ello les enseña que deben verificar las propiedades de unicidad y exhaustividad que definen la función, que se refleja en su conocimiento de este procedimiento (KoT-P-1), lo que implica también que espera que sus estudiantes comprendan dichas propiedades (KMLS-DC-1.1). La estrategia que Arturo propone a sus estudiantes consiste en identificación unicidad de imagen mediante una representación gestual de la función (KoT-R-3). Esto es posible asociarlo a su conocimiento sobre las características del aprendizaje de la función respecto a las dificultades que poseen los estudiantes en la comprensión del concepto (KFLM-D-1). Arturo recurre a estos esquemas gestuales y corporales (Goldin, 1998) para representar una característica de la función. De acuerdo con Fernández y Arias (2013), "cualquier aprendizaje matemático en cualquier etapa educativa tiene que haber tenido un referente físico y visual que posteriormente pueda ser evocado por la persona para desarrollar una abstracción sobre él" (p. 159). En este sentido, las manos y su uso para representar una función constituyen el referente físico al que se refieren Fernández y Arias para mostrar la condición de unicidad de imagen de la función, la que debe ser comprendida conceptual y procedimentalmente por los estudiantes de acuerdo a lo que enfatiza Arturo (KMLS-DC-1.1 y KMLS-DP-1.1).

Asimismo, en la definición simbólica (Imagen 48), en su enseñanza y en el tratamiento del lenguaje formal se observa el conocimiento del rol y la importancia de los símbolos en la comunicación de la noción de función (KPM-C-1) cuando escribe su definición utilizando cuantificadores y simbología de conjuntos formando una función proposicional. Al mismo tiempo, esta importancia que le asigna al uso de simbología y lenguaje formal incide en la forma de enseñar el concepto de función (KMT-E-1.1) cuando se propone como objetivo que los estudiantes comprendan (KMLS-E-1), junto con la definición, esta forma de escribir la definición de función.

El conocimiento de la definición y las propiedades que caracterizan la función (KoT-D-1) permite a Arturo, por una parte, conocer el procedimiento para validar correspondencias como funcionales (KoT-P-1) y, por otro lado, estructurar su estrategia de enseñanza sobre dicho proceso de validación (KMT-E-2) con el propósito de que sus estudiantes aprendan conceptual (KMLS-DC-1) y procedimentalmente (KMLS-DP-1). Al resaltar la unicidad y exhaustividad como condiciones necesarias para validar relaciones como funcionales, se observa también el rol que el profesor asigna al uso de la definición en procesos de validación (KPM-V-1).

5.2 Durante la presentación de una analogía

La profundización sobre la función comienza cuando Arturo plantea una analogía, entre el concepto de función y una máquina lavadora, como parte de su estrategia de enseñanza y para hacer comprensible el concepto de función (KMT-E-1.3) a sus estudiantes. El uso de la analogía permite identificar relaciones entre conocimientos de los subdominios KoT y KMT.

Por una parte, el conocimiento de la definición de función (KoT-D-1) permite a Arturo decidir si la máquina representa lo que quiere enseñar de la función, lo que sustenta la elección de esta analogía como parte de su estrategia de enseñanza para la función (KMT-E-1).

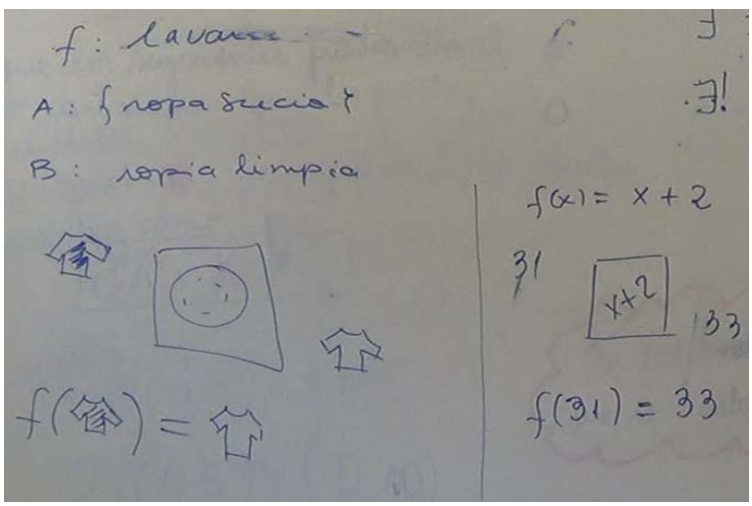


Imagen 49: Analogía pictórica y algebraica.

En el planteamiento de la analogía, como se ve en la Imagen 49, se establece la relación entre el proceso que realiza la máquina con la ropa sucia y lo que ocurre con las pre imágenes en una función dada algebraicamente. Aquí se relacionan los conocimientos de Arturo sobre la nomenclatura (KoT-R-5) y el cálculo de imágenes y pre imágenes (KoT-P-3), pues señala que la ropa sucia es el conjunto de partida y una prenda sucia es pre imagen, con la estrategia de enseñanza para la función (KMT-E-1). La relación analógica entre la función y la máquina lavadora pretende destacar, a nivel estructural, la relación entre los dominios que se vinculan (Espinoza-Vásquez *et al*., 2018). En este sentido, se establece la relación entre los conceptos involucrados en la función y aquellos del proceso de lavar: conjunto de partida con la ropa sucia, el conjunto de llegada con la ropa limpia, imagen con prenda limpia y pre imagen con prenda sucia. Al mismo tiempo, la comparación analógica muestra la función como un proceso (KoT-S-2): como una máquina (KoT-S-2.1) y como proceso de entrada y salida (KoT-S-2.2), lo que se apoya de la experiencia de los estudiantes con el proceso de lavar como se mostró en (KMT-E-1.3) y aborda las dificultades que presentan los estudiantes acerca de la comprensión de la función (KFLM-D-1). La presentación de la función como una máquina es reportado en varias investigaciones como conocimiento del profesor (e.g., Figueiredo *et al.*, 2015; Tasdan y Koyunkaya, 2017). Estas investigaciones señalan que es conveniente iniciar el estudio de la función presentando la función como una máquina, pues se comprende mejor esta idea que su carácter estructural, sin embargo, Arturo no se detiene en la potencialidad o limitaciones que tiene esta presentación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, manteniendo el foco en el carácter estructural de la función sin espacio para la fenomenología o aplicación del concepto fuera de la matemática.

En Espinoza-Vásquez *et al*. (2018) se realiza un análisis en profundidad sobre la analogía como recurso para la enseñanza de la función y sobre su presentación como parte del conocimiento especializado del profesor. Los resultados de ese trabajo plantean que esta analogía resalta el carácter operacional de la función (Sfard, 1991) y que se apoya en las experiencias previas de los estudiantes para hacer significativo el aprendizaje (Espinoza-Vásquez *et al*., 2017). Sin embargo, no incluye otros significados de la función como la co-variación de magnitudes (Vasco, 2010) o la función como conjunto de pares ordenados que presentan además el carácter estructural de la función (Sfard, 1991). La presentación de dicha analogía requiere que el profesor reflexione sobre las ventajas y limitaciones que ofrece esta comparación en la comprensión del concepto de función, pues, como señalan Hitt y Morasse (2009), esta comparación no es suficiente para que los estudiantes logren la idea de función como co-variación, clave en el desarrollo del pensamiento variacional (Vasco, 2010).

Cuando Arturo presenta la función como una correspondencia, muestra su conocimiento sobre la definición de la función (KoT-D-1), mientras que cuando propone la analogía, cambia el significado de la función por la idea de proceso hacia una perspectiva operacional (Sfard, 1991). Este cambio de perspectiva no muestra que Arturo conozca otra definición de la función, sino que conoce otra forma de comprender el concepto; lo estructural versus lo operacional del mismo concepto aportan comprensiones diferentes de él. Al observar que el indicador (KoT-D-1) da cuenta de que el profesor no recuerda ni usa otra definición para la función, podemos pensar que el conocimiento de Arturo sobre la función como un proceso corresponde a un conocimiento diferente al de la función como una correspondencia, en el marco de la misma definición. Sin embargo, pareciera no estar consciente de esta diferencia entre los significados.

Esta diferencia entre proceso (presentado, por ejemplo, por la analogía) y correspondencia (presentado en la definición) nos lleva a considerar el conocimiento del profesor sobre los distintos *Significados* que se atribuyen al concepto de función (o a un objeto matemático en general) como una categoría en sí misma y que tiene sentido diferenciarla de la categoría de Definiciones, Propiedades y sus Fundamentos y de la categoría de Fenomenología y aplicaciones del concepto, aunque puede ser enmarcada en esta última en la que se han considerado las situaciones que dan significado a los conceptos (Gómez y Cañadas, 2016). En esta propuesta de nueva categoría para los Significados (o subcategoría si se posiciona al interior de la Fenomenología) se incluiría el conocimiento del profesor sobre el tema –es decir, que es parte del subdominio KoT- que tiene relación con las diferentes formas de interpretar y dar sentido al concepto de acuerdo al tratamiento que se le dé. Es decir, se trata de conocimiento de los distintos acercamientos al objeto que conducen a las distintas formas de comprenderlo basados en la relación que el profesor muestre con el objeto.

Como se deja ver en las investigaciones de Farfán y García (2005), de Ruiz-Higueras (1994) y en Youschkevitech (1976), cada definición de la función tiene asociado un significado del concepto y responde a la forma de comprenderlo a lo largo de su desarrollo histórico-epistemológico. Una relación similar se produce entre el uso del concepto y el significado atribuido. Sin embargo, estas relaciones no son biunívocas de acuerdo a lo que se puede observar en el caso de Arturo. El profesor muestra conocer una definición de la función, a partir de la cual se desprende el significado de correspondencia, mientras que en el tratamiento del concepto es posible identificar a la función con significados asociados a la idea de proceso: de transformaciones, de aplicación, de entrada-salida o la función como una máquina.

La importancia de considerar un lugar especial para los Significados de los objetos matemáticos en el MTSK se basa en contemplar diversas formas de comprender los objetos, desde distintas perspectivas. Al incluir el conocimiento de los Significados atribuibles a los objetos matemáticos, estaríamos abordando la pregunta sobre cómo conoce cierto tema el profesor, lo que resulta ser parte de las preguntas que se plantea el modelo MTSK (Carrillo *et al*., 2014; 2018).

Estas formas de comprender el objeto, o de atribuirles un significado, pueden verse reflejadas por la referencia a las propiedades del objeto, a su definición o a los aspectos epistemológicos que moldean la construcción del objeto. Por ejemplo, en el caso de la derivada, conocer que la derivada puede entenderse como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, como un límite con una forma particular, como una función entre espacios de funciones o como una transformación lineal entre espacios de funciones.

Sfard (1991) señala dos modos de comprender el concepto de función: el operacional y el estructural, lo que asigna dos significados para este objeto. En el caso de Arturo, el conocimiento de la función en su carácter estructural se presenta en la definición que conoce y las propiedades que la caracterizan (KoT-D-1, KoT-S-1). Asimismo, se evidencia el carácter operacional en el indicador (KoT-D-2) y sus diferenciaciones de la función como una aplicación (KoT-S-2.3), como una transformación (KoT-S-2.4) y como un operador (KoT-S-2.5).

El significado atribuido a un objeto o concepto matemático puede ser observado en el tratamiento que un individuo haga a este concepto. Por ejemplo, desde la teoría

APOE (ver Arnon *et al.*, 2014) se muestra la comprensión de la función como Acción, como Proceso, como Objeto o como Esquema, caracterizada por lo que el individuo puede hacer con el concepto. Lo expuesto por Arnon *et al.* (2014) se basa en los trabajos de Dubinsky respecto al concepto de función, en los que la descomposición genética de la función caracteriza estas concepciones del sujeto sobre el concepto.

Por otro lado, la noción de variabilidad, también cercana al concepto de función, es una perspectiva que permite asignar un significado a la función como co-variación (Vasco, 2002; 2010). Este significado no aparece en las sesiones de clases de Arturo ni es declarado en la entrevista como parte de su conocimiento. Según Sastre *et al*. (2008), es importante que el profesor tenga conocimiento de la historia de la matemática para acercar al estudiante al desarrollo de los conceptos. En el caso de la función, la evolución histórica del concepto inicia con la idea de correspondencia y de co-variación, por tanto, desde esta perspectiva, es importante que la co-variación sea uno de los significados de la función que se incluya en su enseñanza.

En Camacho y Sánchez (2010) se aborda la variabilidad como una de las caracterizaciones que se utilizan para definir el concepto de función mediante los conceptos de variable, variación y variabilidad. Una de las fases de la propuesta de estos autores consiste en identificar la función como una dependencia de cantidades variables. En este caso, el concepto de función emerge al modelar un fenómeno: la variación del área de un polígono al variar sus lados mediante el significado de la función como co-variación y relación entre magnitudes.

Respecto de los significados que se evidencian como parte del conocimiento de Arturo, la función es presentada como un *proceso* (KoT-S-2) en el que se identifican distintos matices de la función que tienen que ver con cómo se realiza este proceso. Diferenciamos el significado para la función como un proceso de *entrada-salida* (KoT-S-2.2) del significado para la función como una *máquina* (KoT-S-2.1), pese a que Hitt y Morasse (2009) los tratan como igual. La principal diferencia entre estos dos significados es que, de acuerdo a la máquina que se considere para relacionar con la función, no toda máquina permite realizar un ingreso de una variable, por ejemplo, un taladro o máquina perforadora. En este tipo de máquinas no se produce un ingreso de objetos, sino que es la máquina la que se aplica sobre algo, lo que da un nuevo significado a la función como un proceso de aplicación. (KoT-S-2.3). Esto se evidencia cuando Arturo hace referencia a que la función actúa o se aplica sobre un elemento de un conjunto.

Por otro lado, debemos notar que no todo proceso corresponderá a la acción de una máquina, especialmente cuando se trata de situaciones como elevar al cuadrado o derivar una función. Por su parte, toda máquina reflejará una especie de proceso que consiste en el fin para el que la máquina fue diseñada. El paralelismo entre estos dos significados se refleja en la presentación de la analogía (ver Imagen 39 de más arriba) donde se muestra la máquina lavadora y una función dada algebraicamente.

La función como *transformación* (KoT-S-2.4) pone el énfasis en que la imagen obtenida es producto de un cambio que sufre un elemento, que puede ser de naturaleza distinta a la imagen, como ocurre en el caso de la máquina dispensadora de golosinas (Espinoza-Vásquez *et al*., 2018) en la que ingresa una moneda y sale una golosina. Esta característica de la máquina refleja además la arbitrariedad de los conjuntos involucrados en la función (Even, 1990).

El último significado que Arturo atribuye a la función es el de *operador* (KoT-S-2.5). Este significado muestra la función definida como una operación expresada en términos algebraicos. Esto está estrechamente relacionado con la idea de función que se tenía en el siglo XVIII como expresión algebraica (Ruiz-Higueras, 1994) y que marca la evolución del concepto hasta como lo conocemos actualmente.

Por otro lado, las ideas de co-variación o dependencia de variables, como la definía Euler (1707-1793), son otras definiciones que marcan la evolución del concepto y aportan otros significados, pero estas no están presentes en las intervenciones de Arturo. Las formas de entender la función como proceso, como co-variación o como relación de dependencia entre variables se incluyen en el programa de estudio que regula la enseñanza del concepto de función (MINEDUC, 2016b). Este documento estipula que los estudiantes comprendan la función como una máquina, es decir, en su significado de proceso, y señala que también deben establecer la relación entre la función lineal y la proporcionalidad como variación entre variables (Ibid). De acuerdo a la orientación entregada por estos estándares de aprendizaje, la idea de proceso es complementada con la relación entre variables a través de la proporcionalidad para lograr la comprensión del concepto de función. Por su parte, Pino-Fan *et al.,* (2019) muestran cuáles son los significados de la función que los textos escolares chilenos incluyen en relación con la propuesta curricular y los destacan como un elemento de la estrategia de enseñanza de la función.

En las clases observadas, Arturo no menciona esta relación entre función lineal y proporcionalidad, que es uno de los enfoques del programa de estudio (MINEDUC, 2016b), centrando la enseñanza de la función lineal en su expresión algebraica (KoT-D-3 y KoT-R-6) y su representación cartesiana (KoT-R-8) como rectas que contienen al origen.

5.3 Durante la enseñanza de las representaciones para la función

Uno de los momentos que cuenta con la mayor cantidad de indicadores de conocimiento especializado es cuando Arturo enseñanza las diferentes representaciones de la función. Aunque las evidencias de conocimiento de Arturo en la categoría de Registros de representación no se limitan al episodio en que enseña las representaciones (episodio 7), este contiene diversas intervenciones de Arturo que muestran conocimiento sobre la representación de la función, la definición del concepto, el lenguaje formal, las dificultades del aprendizaje de las definiciones y las fortalezas y las dificultades de los estudiantes, asociadas a las representaciones de la función.

El conocimiento de Arturo en la categoría de Registros de representación es el punto de partida para establecer relaciones con otros conocimientos. En la construcción de la representación cartesiana de la función se articulan diferentes representaciones: sagital, algebraica, tabular-numérica y cartesiana. La primera representación que muestra conocer Arturo es el diagrama sagital (KoT-R-2) y se muestra en relación al conocimiento de la definición de la función (KoT-D-1). Este diagrama le permite identificar los conceptos de imagen, pre imagen (KoT-R-5), conjunto de partida, conjunto de llegada, dominio y recorrido en otros momentos de las sesiones. El diagrama sagital también muestra el carácter estructural de la función y su significado de correspondencia.

La Imagen 50 corresponde a lo que Arturo escribió en la pizarra de la sala de clases de Arturo cuando enseñó las representaciones que utilizarían para la función. El profesor decide organizar la pizarra como se muestra y mantener lo escrito de modo que los estudiantes tengan el panorama completo sobre las representaciones.

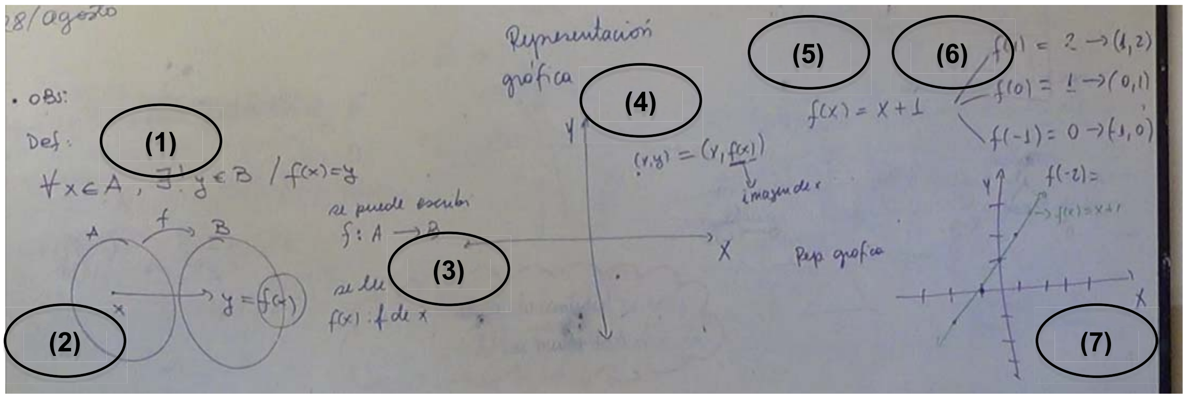


Imagen 50: Articulación de representaciones

Esta intervención escrita de Arturo muestra su conocimiento sobre las transformaciones y articulación entre distintas representaciones para la función. Los números insertados en la imagen indican distintas formas de representación y notaciones que conoce Arturo. A continuación, nos referimos al conocimiento del profesor sobre estas representaciones y al conocimiento que le permite articularlas junto a su relación con conocimientos de otros subdominios.

1) Arturo escribe la definición de la función que conoce (KoT-D-1), expresada en lenguajes simbólico, poniendo énfasis en el rol de los cuantificadores que se incluyen (KPM-C-1).
2) El profesor conoce cómo producir el diagrama sagital (KoT-P-2) y lo muestra como primera representación de la función (KoT-R-2) que marca el significado estructural de correspondencia para la función (KoT-S-1).
3) En este diagrama se incluye la notación usual f(x) para la función (KoT-R-4) y la notación moderna para la función usando flechas.
4) Arturo diferencia el gráfico de la función de la representación gráfica (KoT-D-6). Señala que la representación gráfica de la función está formada por puntos del plano (KoT-R-7), conceptos que han sido estudiados por sus estudiantes (KMLS-S-1) y que son recordados al inicio de la sesión, producto de la interacción de su teoría de enseñanza (KMT-T-1) y su conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de sus estudiantes para graficar funciones (KFLM-D-2, KFLM-F-2).
5) Arturo conoce que las funciones lineales y afines son las primeras que se estudian (KMLS-S-8), por tanto, las incluye como ejemplo y utiliza su representación algebraica para ello (KoT-R-8).

6) Solo en esta ocasión el profesor incluye un indicio de representación numérico-tabular para la función como transición de la representación algebraica a la cartesiana. El profesor organiza el cálculo de imágenes para la función (KoT-P-4) y con ello determina los puntos de la gráfica cartesiana. Este procedimiento muestra a la función como un proceso (KoT-S-2) y utiliza la evaluación de expresiones algebraicas como herramienta, la que es conocida por sus estudiantes (KMLS-S-3).
7) Finalmente, Arturo construye la representación cartesiana sabiendo que el resultado será una línea recta (KoT-P-5).

Según lo que indican Carlson y Oehrtman (2005), la presentación de diferentes registros pretende dar una imagen amplia del concepto para potenciar su comprensión, en este sentido, pareciera que Arturo busca apoyar la comprensión de la función mediante esta articulación de representaciones. Respecto a la presentación de la definición (1), como señalan Sierra *et al.* (1998), la definición moderna de función es excesivamente abstracta ya que no permite verla con su significado original como relación entre variables, por lo que trabajar diferentes representaciones resulta ser una forma eficaz para mejorar la comprensión del objeto (Souza y Lazarrin, 2018). Pareciera ser que Arturo es consciente de esto (KFLM-D-1) y que abordar la función mediante representaciones desarticuladas podría producir desconexión entre los registros y dificultar la comprensión del objeto, como señala Duval (1999). Así también, como exponen Mitchell *et al*. (2014), el uso de las representaciones puede reforzar concepciones erradas de los estudiantes sobre el objeto matemático cuando ellas no son tratadas adecuadamente. La potencialidad de las mismas estará en el uso que el profesor dé a dichas representaciones. Los autores señalan que la conexión entre las representaciones ayudará a los estudiantes a aprender las ideas matemáticas que se están representando.

La enseñanza de la función se observó permeada por conocimiento de Arturo sobre el aprendizaje en general como una concatenación de conceptos de modo que los conceptos nuevos son aprendidos en relación a los conocimientos anteriores, lo que puede ser observado cuando muestra la articulación de representaciones de la función, pues va relacionando la nueva representación con la anterior. Este conocimiento sobre el aprendizaje le permite organizar la presentación de todas las representaciones como parte de su estrategia para la enseñanza de la función, teniendo como hilo conductor la relación que existe entre imagen y pre imagen, según se muestra en (KMT-E-3). En este sentido, pareciera que Arturo busca modelar las relaciones entre las representaciones del concepto que espera puedan lograr sus estudiantes (KMLS-DC-1.2 y KMLS-DP-1.3), atendiendo a lo indicado por Duval (2006) respecto al desarrollo de la capacidad de representar el concepto de función de diferentes formas como objetivo del uso de las representaciones durante la enseñanza (Souza y Lazarrin, 2018) y a la comprensión profunda de la función que plantea Gómez (2013) que se logra cuando se presentan de manera integrada diferentes representaciones.

En una de las siguientes sesiones de clase, Arturo solicita a los estudiantes construir una representación cartesiana de una función afín dada en su representación algebraica $f(x) = x + 3$. Parte de esta tarea consiste en ubicar puntos de la forma (a,0) en el plano y que pertenezcan al gráfico de una función, es decir, los puntos en los que la gráfica de la función interseca al eje X. Arturo reconoce que existe una dificultad en esta parte de la tarea para sus estudiantes (KFLM-D-2) y propone actividades para superarlas (KMT-E-4) de modo que sus estudiantes logren la comprensión de estos procedimientos (KMT-E-3 y KMLS-DP-1.3).

Como se verá más adelante, el profesor posiciona la ecuación lineal $0 = f(x)$ como la herramienta para determinar el punto de corte de la gráfica de la función con el eje X (Carrillo *et al*., 2014, Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018), lo que refleja el conocimiento del *cómo* y del *por qué* se hace de este modo (KoT-P-3), pues conoce que los estudiantes pueden realizar procedimientos alternativos, como graficar otros puntos de la gráfica y extender la recta obtenida hasta determinar dicho punto usando la cuadrícula de sus cuadernos (KFLM-I-2). Sobre estos procedimientos, Arturo reconoce la ventaja del uso de la cuadrícula y las limitaciones que implica el uso de la pizarra para construir gráficas precisas (KMT-R-1) así como las facilidades que tienen los estudiantes al usar el papel cuadriculado (KFLM-F-2), ya que les permite graduar los ejes de manera correcta y precisar la ubicación de puntos. No se prestaron evidencias sobre el conocimiento del uso de otros recursos para trabajar las representaciones gráficas de la función, por ejemplo, GeoGebra. Este recurso otorga la posibilidad de dinamismo a las gráficas que la representación estática en la pizarra no permite mostrar para las funciones (Souza y Lazarrin, 2018).

Puesto que el profesor conoce que uno de los objetivos del nivel es que los estudiantes logren graficar la función (KMLS-DP-1.3) usando los puntos de intersección con los ejes, ha realizado la recapitulación de temas sobre el plano y la ubicación de puntos durante la primera sesión de clase como aplicación de su estrategia de enseñanza. Arturo conoce que estos temas ya fueron estudiados por este grupo (KMLS-S-1). En la elaboración de las representaciones gráficas de la función lineal y afín se observa el conocimiento de Arturo sobre una *conexión transversal* entre la función y la recta euclidiana. Dicha conexión se expresa cuando Arturo da una justificación al procedimiento de graficar la función (KoT-P-4) mediante la elección de solamente dos pares ordenados, es decir, dos puntos del plano, basado en la axiomática euclidiana (KSM-T-1). El profesor señala que, de acuerdo a un axioma de incidencia de esta geometría, por dos puntos distintos del plano pasa una única recta. Con esta justificación que da Arturo, se produce un pasaje súbito de lo discreto de la representación numérica a lo continuo de la gráfica cartesiana, identificado por Zuffi y Pacca (2002) cuando los profesores seleccionan solo algunos puntos para graficar la función sin considerar los puntos intermedios.

Al considerar los aspectos de temporalidad y delimitación que generan las conexiones interconceptuales que se contemplan en el subdominio KSM (Carrillo *et al*., 2018), observamos que, por una parte, la función lineal-afín y la recta euclidiana son objetos que pertenecen a dominios distintos de la matemática. La función la ubicamos en el dominio del Análisis, mientras que la recta en el dominio de la Geometría.

Por otro lado, la conexión que expresa Arturo no se trata sobre la temporalidad del desarrollo de la función o la recta, pues no se complejiza la función a la recta euclidiana ni tampoco se simplifica en la misma dirección. Por tanto, se trata de conexiones referidas a la delimitación de los objetos involucrados.

Respecto a la delimitación, la recta podría tomar un rol de herramienta en el estudio de la función para considerarse esta conexión como auxiliar. Aunque es posible interpretar que Arturo busca el fundamento en la geometría axiomática euclidiana para el procedimiento de graficar la función, se trataría, en ese caso, de una conexión auxiliar de la función con los axiomas y no con la recta.

Por lo anterior, consideramos el conocimiento de una conexión transversal entre estos objetos: función y recta, que se produce al identificar a ambos con una misma representación gráfica. En Carrillo *et al*. (2014) se señala que la conexión transversal se manifiesta entre los objetos cuando “hay una cualidad común en estos que les relaciona, y los modos de pensamiento asociados a dichos temas contemplan esta característica común” (p. 61). En este sentido, ambos pueden ser pensados como una línea recta desde una perspectiva geométrica, siendo la cualidad común su representación gráfica como una línea recta en el plano, o pensándolas estructuralmente como un conjunto (infinito) de puntos.

La definición de la categoría de Registros de Representación del KoT se ha realizado considerando los trabajos de Duval, sin hacer referencia explícita a la distinción entre representación interna o externa que realizan Goldin y Kaput (1996) y Sierra *et al*. (1998). Estos autores incorporan las representaciones gestuales como parte de la producción de representaciones externas de los conceptos. Arturo muestra conocimiento sobre este tipo de representaciones en (KoT-R-3) mediante el uso de sus manos para destacar una de las propiedades que incluye en la definición de función que conoce (KoT-D-1). A la vez, esta representación gestual le proporciona un elemento (como herramienta) para estructurar su estrategia de enseñanza sobre la validación de correspondencias como funcionales (KMT-E-2.2) en relación a su conocimiento sobre las prácticas matemática de validar (KPM-V-1). Podemos relacionar este conocimiento con lo señalado por Aparicio y Cantoral (2006) sobre la generación de representaciones gestuales por parte de los estudiantes sobre las funciones lineales, quienes muestran alguna de sus propiedades utilizando sus brazos (la inclinación, por ejemplo). En ese sentido, la representación gestual que Arturo conoce se relaciona con las interacciones de los estudiantes con el contenido, es decir con su KFLM.

5.4 Durante la enseñanza de la biyectividad de la función

Otro de los momentos interesantes de las sesiones de clase de Arturo es aquel en el que se aborda la biyectividad por tratarse de un concepto que no se incluye en el currículo nacional en el nivel observado (MINEDUC, 2016b). Desde la enseñanza de la inyectividad, hasta la determinación de la función inversa, estos episodios dejan ver una serie de conocimientos de distintos subdominios. Asimismo, el abordaje de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad también permite observar relaciones entre los conocimientos de los subdominios KoT, KMT, KFLM y KMLS.

Durante la enseñanza de la inyectividad

La sesión 6 de clase se destina a mostrar la inyectividad como una propiedad de la función. Arturo muestra el conocimiento de la definición (KoT-D-4) acompañado de la notación 1 a 1 (KoT-R-10) que le proporciona el significado de “uno con cada uno” o unicidad en la pre imagen (KoT-S-3).

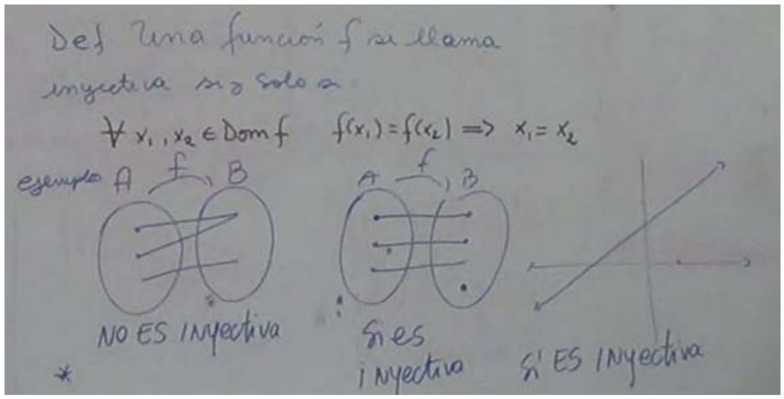


Imagen 51: Presentación de la inyectividad de la función

La definición de la propiedad se realiza utilizando una mezcla entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural, como se ve en la Imagen 51, junto con ejemplos y no ejemplos de funciones inyectivas. Esta organización deja ver la forma en que Arturo presenta la inyectividad como objeto de enseñanza y lo que espera que aprendan sus estudiantes (KMLS-DC-1.3).

La interpretación de la propiedad, desde la perspectiva de la lógica proposicional, brinda el procedimiento para demostrar si una función es o no inyectiva (KPM-C-2). Arturo muestra conocer cómo comprobar si una función es inyectiva, tanto para el caso específico de las funciones lineales que estudia (KoT-P-8), como en general para una función arbitraria (KPM-V-3). Señala que hay una estructura lógica de esta propiedad (KPM-V-2) que condiciona la forma en que se prueba la inyectividad. Arturo señala que espera que sus estudiantes puedan identificar en los diagramas una función inyectiva y no necesariamente poder demostrarlo (KMLS-DC-1.3).

De esta forma, vemos que su KoT y su KPM sustentan la estrategia de enseñanza (KMT) de la inyectividad, puesto que la presentación del tema se realiza mediante el uso de lenguaje formal y con conocimiento de la estructura lógica de la propiedad. El KMLS establece los límites de la enseñanza de la inyectividad marcando el carácter conceptual de la identificación por sobre lo procedimental de la demostración de la inyectividad.

Durante la enseñanza de la epiyectividad

Siguiendo la secuencia inyectividad-epiyectividad-biyectividad, la séptima sesión de clase está destinada a la epiyectividad. La clase inicia recordando la inyectividad como parte de la estrategia de enseñanza en respuesta a su forma de comprender el aprendizaje como anidación o concatenación de ideas.

Al igual que lo que ocurre con la inyectividad, Arturo presenta la definición de epiyectividad (Imagen 52) (KoT-R-11) y le da un significado conjuntista en el que no deben sobrar elementos en el conjunto de llegada (KoT-S-4). Con este significado, el profesor muestra un diagrama sagital que representan una función epiyectiva y una no epiyectiva (KoT-R-11) de modo que se puedan comparar.

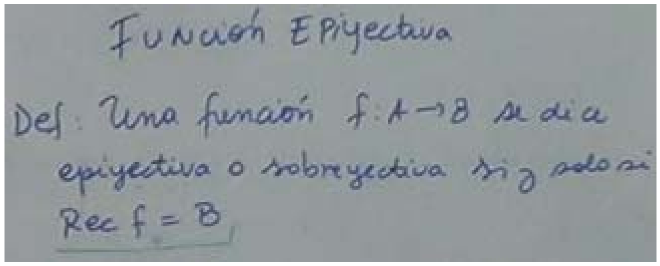


Imagen 52: Definición de epiyectividad

La presentación de los ejemplos y no ejemplo (Imagen 53), junto con la definición de epiyectividad (Imagen 52), responden a la estrategia de enseñanza de esta propiedad. Por otro lado, Arturo muestra cómo se determina si una función es o no epiyectiva (KoT-P-9) en relación al cálculo del recorrido de la función (KoT-P-7), pero no muestra indicios de esperar que sus estudiantes comprendan conceptualmente o procedimentalmente esta idea.

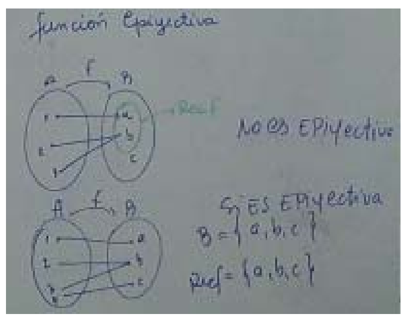


Imagen 53: Representación sagital de la epiyectividad

Durante la enseñanza de la biyectividad

El conocimiento de Arturo sobre la biyectividad articula las tres categorías del KMLS. Por una parte, Arturo conoce que la inyectividad, la epiyectividad y la biyectividad no son temas que se deben enseñar en el nivel actual, primero medio, dando cuenta de conocimiento de las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, pues el programa de estudio del nivel no incluye estos temas (MINEDUC, 2016b). Por otro lado, Arturo conoce que estos temas potencian el estudio de otras funciones que se estudian en el curso posterior, como parte de su conocimiento sobre la secuenciación de los temas. Además, Arturo manifiesta conocer qué es lo que deben lograr comprender los estudiantes cuando estudian la biyectividad a nivel conceptual para luego, en el curso que corresponda, comprender la función logaritmo y la exponencial como una inversa de la otra. Esto último como conocimiento acerca del desarrollo conceptual que han de lograr sus estudiantes cuando estudien la biyectividad y la función inversa. El conocimiento de esta secuenciación de temas y habilidades a desarrollar en los estudiantes se relaciona con lo que señala De la Rosa (2003) respecto a ampliar el repertorio de conocimientos que permiten a los estudiantes sustentar los temas que posteriormente deberán ser aprendidos.

De este modo, y de acuerdo a lo que señala Arturo, la inclusión de la inyectividad y epiyectividad en la enseñanza de la función tiene por objetivo sustentar el estudio de la biyectividad (KMT-T-1; KMLS-S-6), la que a su vez sustenta el estudio de la función inversa como preparación para el estudio de las funciones logaritmo, exponencial, cuadrática y raíz cuadrada en los cursos siguientes (KMLS-S-8) (MINEDUC, 2016a). Por su parte, la asignación de los significados para la inyectividad, epiyectividad y biyectividad (KoT-S-3 y KoT-S-4), así como la traducción de las definiciones dadas en lenguaje formal al lenguaje natural responden al conocimiento sobre la enseñanza (KMT-E-5), sustentado en su experiencia enseñando estos conceptos, y a plantear los nuevos conceptos mediante situaciones contextualizadas para mejorar su comprensión según recomienda Thompson (1994).

Arturo espera que los conceptos de inyectividad, epiyectividad y biyectividad sean comprendidos a nivel conceptual (KMLS-DC-1.3;1.4), como base para el cálculo de la función inversa (KMLS-DP-1.7), aunque reconoce que estos temas no son parte del currículum del nivel en que enseña (KMLS-S-6) y (KMLS-E-2), pero que se incluyen en los siguientes niveles. Las propiedades de inyectividad, epiyectividad y biyectividad de las funciones se estudian en cuarto año medio de acuerdo a las Bases Curriculares (MINEDUC, 2016a), sin embargo, Arturo enseña estas propiedades en el primer año de enseñanza media.

Finalmente, en la definición de función inversa se observa que Arturo construye la base del trabajo con funciones en los próximos cursos. Tal como se ha mencionado, la función inversa no es parte del programa del nivel actual (MINEDUC, 2016a). Esta profundidad tiene un fin de enseñanza: mostrar la función logaritmo como función inversa de la exponencial, no solo como operación inversa una de la otra, sino que también en su estructura (KoT) para que los estudiantes comprendan las restricciones que tendrá el dominio del logaritmo. Con ello Arturo busca superar las dificultades que presentan sus estudiantes en el estudio del logaritmo y exponencial abordando la relación existente entre las variables de ambas funciones para mostrar que una función es la inversa de la otra. En este sentido, Arturo aborda uno de los obstáculos que identifica Trujillo *et al.* (2007) respecto a la comprensión de las funciones.

5.5 Otras relaciones entre subdominios

Además de los cuatro momentos expuestos arriba, existen otras situaciones en las que se observa la integración e interacción de conocimientos de Arturo. Estas corresponden a situaciones puntuales dentro de las sesiones de clase o situaciones que se identifican como un patrón en las intervenciones del profesor, algunos de estas se identifican a lo largo de las nueve clases y otras se dan esporádicamente en algunas sesiones. Estos momentos también permiten establecer relaciones entre categorías o subdominios del MTSK. A continuación, presentamos otras relaciones que se dan entre algunos subdominios.

El uso del lenguaje simbólico en la enseñanza de la función

En la presentación de la definición de función hemos visto la búsqueda de formalidad en el uso del lenguaje. Esto también ocurre en la presentación de la definición del dominio, del recorrido (KoT-D-2) y de la inyectividad (KoT-D-4). Todas estas definiciones se enuncian utilizando cuantificadores o la lógica proposicional. En el indicador (KPM-C-1 y KPM-C-1-2) mostramos que estas definiciones reflejan conocimiento de Arturo que va más allá de la lectura de los símbolos; en ellas se interpreta el rol que cumplen los símbolos, la lógica proposicional y la sintaxis en la comunicación de ideas en lenguaje matemático.

Las definiciones presentadas por Arturo son parte de su conocimiento del tema (KoT) y componen su estrategia de enseñanza (KMT-E-1, KMT-E-5). Su presentación y sus traducciones a lenguaje natural responden al conocimiento de Arturo sobre las dificultades en la comprensión de la función (KFLM-D-1) (Zuffi y Pacca, 2002; Youschkevitech, 1976) y se posicionan como conceptos clave para que los estudiantes comprendan los siguientes conceptos y procedimientos asociados a la función. Estas definiciones se observan como articuladores de una teoría general de aprendizaje con su forma de presentar las ideas en matemática cuando Arturo se propone como objetivo conseguir que los estudiantes desarrollen ciertos conocimientos conceptuales (KMLS-DC-1) y procedimentales (KMLS-DP-1) referidos a estas definiciones.

Arturo utiliza el significado de los símbolos que componen las definiciones con distintos fines. Por una parte, las propiedades de la definición de función le permiten establecer criterios para validar correspondencias como funciones (o no) y construir algunos ejemplos de correspondencias funcionales. Estas dos situaciones permiten observar el conocimiento del profesor sobre el rol de la definición en la validación de correspondencias funcionales como una práctica matemática (KPM-V-1), el conocimiento de los procedimientos asociados a esta validación (KoT-P-1), el conocimiento sobre su estrategia de enseñanza para la función (KMT-E-1.4) y el conocimiento sobre lo que se espera que logren desarrollar los estudiantes conceptual y procedimentalmente (KFLM-DC-1.1 y 1.3) y (KFLM-DP-1.1).

Particularmente, el conocimiento de los cuantificadores aplicados a situaciones de contexto cotidiano permite al profesor diseñar actividades y situaciones que apoyen la enseñanza (Thompson, 1994), tanto de los cuantificadores como de la definición y del concepto de función (KMT-E-1.1).

En el caso de las definiciones de dominio, recorrido e inyectividad, Arturo también las utiliza como fundamento para los procedimientos asociados a estos conceptos. En el caso del cálculo del dominio y del recorrido, el rol de los cuantificadores y el lenguaje de conjuntos resulta importante para Arturo para identificar estos conjuntos, como se puede ver en (KoT-P-6) y en (KoT-P-7). Este conocimiento también da cuenta de su KPM al destacar este rol en la comunicación de estos conceptos matemáticos (KPM-C-1). Asimismo, en el caso de la inyectividad, el conocimiento de Arturo sobre su estructura lógica le permite utilizarla para señalar cómo se valida una función arbitraria (KPM-V-3) o una función afín (KoT-P-8) como inyectiva. Lo anterior muestra la inclusión que hace Arturo del lenguaje formal y la búsqueda de rigurosidad en la enseñanza de la función.

Arturo presenta los nuevos conceptos mediante el lenguaje formal y simbólico, procurando traducir a lenguaje natural estas ideas (su estrategia en KMT), pese a que reconoce que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de este tipo de lenguaje (en su KFLM) (Souza y Lazarrin, 2018). Arturo conoce cómo definir la función (KoT) y cómo usar esta definición en la construcción de representaciones, procedimientos y ejemplos para la función (KoT). Asimismo, Arturo muestra conocer el rol de la definición como un elemento que permite dichas construcciones como práctica habitual en matemáticas (KPM). Los productos de estas construcciones contribuyen a organizar su estrategia de enseñanza (KMT) seleccionando aquellos elementos que se espera que aprendan o desarrollen los estudiantes en este nivel escolar (KMLS).

La presentación y resolución de diferentes tipos de ecuaciones

El conocimiento de Arturo en torno a las ecuaciones que surge durante el estudio de la función comprende todos los subdominios del modelo MTSK. Cada subdominio tiene, al menos, una de sus categorías implicadas en el conocimiento sobre las ecuaciones asociado a la función.

El punto de partida lo ubicamos en el cálculo de pre imágenes para una función afín dada algebraicamente (KoT-P-3). Arturo señala conocer que las ecuaciones lineales has sido estudiadas antes (KMLS-S-4) y pueden ser utilizadas por los estudiantes para resolver las tareas propuestas. Este conocimiento se pone en juego junto con el conocimiento de los números racionales como el sistema numérico que los estudiantes han trabajado (KMLS-S-5), lo que de paso condiciona la selección de ejemplos y tareas (KMT-E-4) que los estudiantes pueden realizar (KMLS-DP-1.4) e indica aquellas ecuaciones que aún no pueden resolver, como es el caso de ecuaciones con la variable en el denominador de una fracción algebraica (KMLS-S-7) para determinar el recorrido de una función. Lo anterior le permite conocer cuál es el nivel de profundización que se espera que logren sus estudiantes al respecto (KMLS-DP-1.4) en este nivel.

El conocimiento sobre la secuenciación de temas y el nivel de desarrollo procedimental parece cobrar sentido frente a su teoría de aprendizaje como concatenación de conceptos, lo que le permite implementar sus estrategias de enseñanza para la función (KMT-E-1, KMT-E-2). La progresión de los conceptos y procedimientos regula la implementación de la estrategia de enseñanza al ajustar progresivamente el nivel de dificultad de las tareas propuestas respecto al ámbito numérico (KFLM-DF-1). Este hecho parece ser la fuente de su conocimiento sobre los métodos de los estudiantes al enfrentarse a ecuaciones literales en el cálculo de pre imágenes (KFLM-I-1) y al determinar el punto de intersección de la gráfica de la función con el eje X (KFLM-I-2), coincidiendo con los resultados de Hitt y Morasse (2009) respecto de la resistencia de los estudiantes al uso de variables al plantear relaciones. En el caso de los estudiantes de Arturo, ellos desarrollan procedimientos geométricos alternativos para determinar dichos puntos de intersección.

Arturo muestra conocer que la técnica de ensayo y error (tanteo) de números es una forma que tienen sus estudiantes para encontrar la pre imagen para una función afín dada (KFLM-I-1). La resolución de la ecuación $y = f(x)$ es presentada por Arturo como el procedimiento para obtener la pre imagen (KoT-P-3) y como la técnica que generaliza y asegura la determinación de pre imágenes (KPM-G-1). Es así que Arturo presenta la ecuación como una herramienta, fuera del concepto de función, que ayuda en la determinación de pre imágenes, lo que da cuenta del conocimiento sobre una conexión auxiliar entre ecuación y función (KSM-A-1). Notamos aquí que Arturo conoce la distinción entre ambos conceptos, en contraste a los resultados del estudio de Wilhelmi *et al*. (2014), en el que muestra que, tanto estudiantes como profesores poseen dificultades para distinguir ambos conceptos y que utilizan como sinónimos de función las palabras ecuación o fórmula. En el caso de Arturo, en el indicador (KSM-A-1) se muestra que conecta ambos temas, entendiéndose como conceptos diferentes.

Por otro lado, el cálculo del recorrido y la determinación de la función inversa también son momentos en que la ecuación $y = f(x)$ tiene un rol especial. Se trata de ecuaciones literales, al respecto, Arturo ha manifestado conocer una conexión de simplificación al comparar el trabajo realizado con una expresión algebraica fraccionaria con la operatoria con números racionales (KSM-S-1). Esta conexión de simplificación es usada como parte de la estrategia de enseñanza de Arturo para que los estudiantes comprendan el procedimiento realizado para determinar el recorrido de una función.

El cálculo de pre imágenes de una función permite a Arturo movilizar diferentes conocimientos, también asociados a la resolución de ecuaciones. Entre ellos se encuentran el conocimiento de la resolución de ecuaciones como conocimiento de procedimientos (KoT), el conocimiento de la conexión auxiliar entre función y ecuación (KSM) y el conocimiento de los procedimientos alternativos que realizan sus estudiantes (KFLM). Arturo conoce cómo resolver las ecuaciones y ello le permite validar, supervisar y corregir estos procedimientos de sus estudiantes. Así mismo, este procedimiento es parte de los conocimientos que se espera logren los estudiantes como desarrollo procedimental (KMLS). Arturo enfoca la enseñanza del cálculo de pre imágenes hacia la resolución de ecuaciones, proponiéndola como técnica oficial y segura para realizar estas tareas. La selección de tareas, desde funciones simples de la forma $f(x) = x + b$ a funciones que determinan ecuaciones hasta más complejas para los estudiantes, se sustenta en el conocimiento de la enseñanza de las funciones (KMT) y del aprendizaje de los estudiantes (KFLM). Esto se refleja en la relación que se produce entre su criterio de selección de tareas mediante la graduación de su complejidad (KMT-E-4), su conocimiento sobre la forma de comprender los nuevos conceptos, la estrategia que emplea para enseñar estos nuevos conceptos y las dificultades (KFLM-D-1) y fortalezas que presentan sus estudiantes sobre el tema (KFLM-F-1, KFLM-DF-1).

CAPÍTULO 6. Conclusiones

Conclusiones

Esta investigación se planteó como un trabajo que busca avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Nos preguntamos cuáles son las características del conocimiento que manifiesta el profesor durante la enseñanza. Las respuestas a esta pregunta, permiten conseguir una caracterización del conocimiento del profesor.

En este trabajo nos hemos propuesto, como objetivo general, **Caracterizar el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas sobre el concepto de función que manifiesta durante su enseñanza.** La caracterización fue entendida, como lo propone el modelo MTSK, como la integración del conocimiento de Arturo de cara a la enseñanza de la función y su presentación detallada de los aspectos que hacen único al conocimiento del profesor. Para lograr esto se determinaron objetivos específicos cuyo cumplimiento permitiría lograr la caracterización. La división del objetivo general resultó ser en dos objetivos específicos que, por su parte, determinaron las siguientes fases de esta investigación.

1) **Identificar** evidencias e indicios de conocimiento del profesor en sus intervenciones orales, escritas y gestuales realizadas durante las clases destinadas a la enseñanza del concepto de función, lo que dio origen a un primer nivel de análisis de los datos recolectados.
2) **Describir** cada conjunto de evidencias e indicios de conocimiento en términos de los elementos teóricos considerados, lo que dio origen a los indicadores de conocimiento.
3) **Establecer** relaciones dentro de los conocimientos identificados en las fases anteriores, dándole sentido como parte de una red interconectada.
4) Finalmente, **Interpretar** dichas relaciones en el conocimiento especializado del profesor como la integración de conocimientos en distintas dimensiones de cara a la enseñanza del concepto de función.

El logro de los objetivos específicos y de las fases planteadas de manera secuencial nos lleva a poder establecer una caracterización del conocimiento especializado de Arturo. Por una parte, la lista de indicadores de conocimiento que se obtiene como síntesis de los resultados de la primera fase da cuenta de la amplitud de conocimientos que Arturo manifiesta durante la enseñanza del concepto de función y los conceptos asociados. A la vez, y considerando que esto contempla solamente el conocimiento de Arturo del que podemos dar cuenta mediante sus intervenciones, se deja ver la complejidad de abordar el conocimiento del profesor en sus distintas dimensiones: como el conocimiento que manifiesta, el que pone en uso y el que posee para la enseñanza de la función, pudiendo ser grupos de conocimientos diferentes.

Por otro lado, el conocimiento del Arturo expresa su complejidad cuando se presenta relacionado en diferentes momentos de la enseñanza. Dado el posicionamiento desde el cual hemos conducido esta investigación, sabemos que el conocimiento se manifiesta de manera integrada y que las divisiones producidas por el MTSK son, efectivamente, con fines analíticos. Así se ha evidenciado cuando observamos los diferentes momentos de la enseñanza de la función en el caso de Arturo; la enseñanza de la definición de función, de sus representaciones, del planteamiento de una analogía y la inclusión del estudio de la biyectividad, son momentos en que esta complejidad e integración puede observarse y avanzar en la comprensión del carácter especializado que plantea el modelo.

Las múltiples relaciones que se identifican dentro del conocimiento de Arturo ratifican nuestra concepción sobre el conocimiento como una red compleja de conexiones entre conceptos, imágenes y habilidades. En el caso de Arturo, esta red está compuesta por los indicadores de conocimiento identificados, los que se expresan conectados de acuerdo a los propósitos de enseñanza que caracteriza cada uno de los momentos antes señalados. En este sentido, se trata de conocimientos que Arturo tiene a su disposición para abordar la tarea de enseñanza de la función.

De la interpretación de las relaciones identificadas dentro del conocimiento de Arturo obtenemos que la enseñanza de la función se ve influenciada por su conocimiento sobre la forma de enseñar el concepto lo que estructura las clases de Arturo. Las definiciones y las caracterizaciones de los conceptos que Arturo enseña se presentan con una marcada tendencia a lo formal y a la rigurosidad matemática. Esta situación nos ha permitido recolectar evidencia del KPM en relación a otros subdominios, a la enseñanza de la función y en el nivel escolar que Arturo atendía al momento de recolectar los datos. Pese a que el KPM no era nuestro foco de investigación, la evidencia recolectada apunta a considerar ciertas prácticas de Arturo como parte de su conocimiento especializado, por ejemplo, la Comunicación de ideas matemáticas y las Formas de validar.

Las relaciones establecidas al interior de cada subdominio también dan cuenta de complejidades locales que presenta el MTSK de Arturo, de modo que las particularidades de cada uno de ellos aportan en la caracterización que se realiza del conocimiento identificado. Cada subdominio aporta, desde su definición y con sus evidencias, a armar una visión del MTSK de Arturo. Contrario a lo ocurrido con el KPM, esperábamos encontrar mayor evidencia de conocimiento del KSM en Arturo dada su formación matemática, sin embargo, no se evidenciaron conocimientos en todas sus categorías. A pesar de ello, lo que resultó del KSM de Arturo aporta profundidad a la enseñanza de la función mediante la conexión con otros temas: ecuación y recta euclidiana. Del mismo modo ocurrió con la inclusión del estudio de la biyectividad como un tema que no contempla el Currículum Nacional, pero que Arturo considera relevante al momento de estudiar la función.

El Conocimiento Matemático (MK) de Arturo se ve robustecido por lo evidenciado de KPM y, principalmente, por la amplitud de manifestaciones de su KoT en la mayoría de sus categorías, con la excepción de la Fenomenología, asunto que queda fuera de las clases de Arturo para acotarse solo al estudio de la función como objeto matemático dentro de la Matemática. Sin embargo, esta baja presencia de fenomenología de la función es compensada por el conocimiento de diferentes significados ~~para~~ de la función, aportando también elementos a la enseñanza y al aprendizaje de la función.

Por su parte, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se presenta más equilibrado en la cantidad de indicadores de conocimiento en cada uno de sus subdominios. El rol central que se le da a la Matemática desde el MTSK se hace evidente en el caso de Arturo al mostrar su PCK fuertemente influenciado por su MK, especialmente en la forma de organizar la enseñanza de la función y el uso de diferentes estrategias de enseñanza.

Finalmente, frente a la pregunta que guía esta investigación sobre cómo es el conocimiento especializado de Arturo, podemos señalar que el conjunto de conocimientos identificados por los indicadores conforma una red compleja, cuyos nodos interconectados son estos conocimientos, los que se encuentran disponibles para ser empleados en diferentes momentos de la enseñanza de la función y que se conectan de acuerdo a estos propósitos.

Respecto a la metodología

A continuación, presentamos algunos comentarios que resulta interesante destacar sobre la metodología empleada en virtud de los objetivos trazados y los resultados conseguidos.

La búsqueda de un profesor que resultase *buen informante* parecía ser un factor importante para lograr obtener información rica en evidencias de conocimiento especializado. Frente a esto subyacía la hipótesis de que las características del profesor experto como un buen informante serían criterios que auguraban un panorama donde fuese posible observar conocimientos de todos los subdominios del MTSK. Los resultados de nuestro estudio confirman que Arturo, con sus características secundarias verificadas de profesor experto, es un caso en el que es posible observar la integración de diferentes conocimientos contemplados en el modelo MTSK de cara a la enseñanza del concepto de función. En este sentido, y como se pudo apreciar en los capítulos anteriores, Arturo es un caso que ha entregado evidencia de todos los subdominios del modelo y relaciones dentro de su conocimiento que involucran los diferentes subdominios.

Las características de Arturo han dado forma a sus sesiones de clase. Consideramos que su formación matemática obtenida durante sus estudios en pregrado y en magister en Matemática, junto con su experiencia en cursos de educación universitaria, inciden en el tipo de conocimiento que el profesor manifiesta durante la enseñanza de la función y hace que la forma de presentar los conceptos matemáticos busque la rigurosidad matemática de su formación más allá de la propuesta en el Currículum Nacional. En este documento oficial no se contempla el uso de la simbología que utiliza Arturo para dar la definición de función, y tampoco se incluye el estudio de la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la función; sin embargo, Arturo las incluye en sus clases. La forma de abordarlas también es mediante el lenguaje simbólico y formal. Además de su formación matemática, su experiencia en cursos de nivel universitario donde Arturo debe enseñar el concepto de función le proporcionan estrategias de enseñanzas que, aunque son aplicables en los cursos universitarios, requieren de adaptaciones necesarias para que sean más efectivas en cursos elementales de enseñanza media.

Por otra parte, al realizar un acercamiento y alejamiento hacia los datos podemos analizar, en lo micro y en lo global, el conocimiento del profesor para identificar, por una parte, diferentes conocimientos especializados y, por otro lado, cómo ellos interactúan en bloques más grandes de información. Esto permite plantear la hipótesis de que un alejamiento (Zoom-out) de los datos ya analizados de manera atómica (Zoom-in) permite evidenciar otras relaciones (más gruesas) entre subdominios y categorías cuando el estudio sobre el conocimiento especializado del profesor se aborda desde el MTSK completo.

Mirar el detalle de las intervenciones del profesor permitió identificar conocimientos en categorías específicas del MTSK, pero dificulta la observación de las relaciones de estos conocimientos. En la medida en que se amplió la mirada, y se incorporaron más datos analizados al panorama, se pudieron obtener relaciones dentro de los distintos subdominios y dominios.

La mirada global de las intervenciones de Arturo, los episodios de clase y el desarrollo completo de la enseñanza del concepto de función posibilitó interpretar las relaciones entre los distintos conocimientos que manifestó para comprenderlo desde su carácter especializado. El panorama completo junto con las relaciones entre los conocimientos puestos en juego con el propósito de enseñar el concepto de función nos lleva a dar una caracterización del conocimiento del profesor.

Por último, la técnica de análisis consistente en ir y volver entre la teoría y los datos permitió, por un lado, poner a prueba al MTSK como modelo analítico a través de las definiciones de sus categorías y comprobar su efectividad en el estudio del conocimiento del profesor. Por otro lado, puesto que este modelo se presenta abierto a la emergencia de nuevas categorías y consideraciones sobre la precisión de sus definiciones (Carrillo *et al*., 2018), estuvimos atentos a la emergencia de evidencias de conocimiento que sustentaran el planteamiento de nuevas categorías. Con esta apertura, tanto del modelo como del análisis se pudieron realizar algunos aportes a la configuración de nuevas categorías: Significados para el KoT, Comunicación y lenguaje y Formas de validar para el KPM.

Aspectos Teóricos

Los aportes de esta investigación al modelo MTSK comienzan con el abordaje de una de las tareas vigentes para el MTSK sobre la precisión en las definiciones de sus categorías (Carrillo y Contreras, 2017). En la descripción del Marco Teórico hemos pretendido avanzar en esta tarea a la vez que buscamos complementar las diferentes definiciones hasta ahora propuestas para las categorías y añadiendo la operacionalización del marco mediante ejemplos de conocimientos que se esperaría encontrar en cada una de sus categorías.

Por otro lado, consideramos que el conjunto de indicadores para el conocimiento especializado del profesor sobre el concepto de función y sobre los conceptos asociados constituye uno de los principales aportes de este trabajo al avance en la comprensión del profesor. Del mismo modo lo hacen las relaciones establecidas entre los conocimientos identificados. Los indicadores y las relaciones identificadas muestran la amplitud, la complejidad y el carácter especializado del conocimiento de Arturo, lo que permite comprender el posicionamiento del MTSK frente lo que se considera como conocimiento y a su carácter especializado. Además, la profundización en las relaciones entre subdominios es otra de las tareas propuestas en relación al marco (Carrillo y Contreras, 2017). La ausencia de otros estudios del MTSK sobre el concepto de función posiciona a esta investigación como un avance en la aplicación del modelo a temas no explorados hasta la fecha, constituyendo otro aporte.

Como ya se mencionó, otro aporte es la estructuración de la categoría para los Significados de los temas. La relevancia que hemos puesto en el estudio de estos significados permite definir, con mayor precisión, las categorías del KoT y profundizar en cómo el profesor conoce los temas que enseña. Asimismo, se presenta un conjunto de evidencias que busca avanzar en la caracterización de las prácticas matemáticas contempladas en el KPM. Somos conscientes de las dificultades que esta caracterización implica, sin embargo, consideramos que aportar evidencia de KPM en diferentes niveles educativos (secundaria en nuestro caso) contribuye a perfilar algunas prácticas matemáticas. Hemos presentado la Comunicación y el conocimiento del lenguaje matemático como una de estas prácticas sociales que buscan generar conocimiento matemático. En esta categoría se incluiría el conocimiento del papel que juegan los símbolos y la sintaxis matemática, así como el conocimiento sobre cómo se estructuran las proposiciones o enunciados (como teoremas, definiciones, propiedades, axiomas, etc.) mediante el uso de la lógica proposicional.

Además, aportamos evidencia sobre la práctica de demostrar en el aula de secundaria como conocimiento de Formas de Validar dentro del estudio del KPM. En este sentido, se aportan ejemplos de conocimiento especializado sobre el concepto de función pertenecientes al subdominio KPM. Actualmente se realizan investigaciones que buscan avanzar en la categorización de este subdominio y son escasos los ejemplos de conocimiento en educación media (secundaria). Este trabajo no solamente permitió evidenciar conocimiento especializado del profesor de matemáticas en este subdominio, sino, además, el conjunto de evidencias de este subdominio posibilitó agruparlas e identificar categorías emergentes, que no se encontraban formalizadas en el principal documento de referencia sobre el modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018).

Esta investigación se desarrolla en la línea de la Formación de profesores de matemáticas, con foco en el conocimiento del profesor. Los resultados de este trabajo también contribuyen al desarrollo de esta área de estudio dentro de la Didáctica de la Matemática. En este sentido, consideramos que los indicadores de conocimiento especializado en la enseñanza de la función son aportes a la formación profesional del profesor, pues ellos constituyen un recurso interesante cuando la función, como objeto matemático y objeto de enseñanza, es parte de los temas que se espera los profesores puedan aprender. Lejos de tratarse de una prescripción de conocimientos deseados en el profesor de matemáticas, la lista de indicadores expuesta puede ser tomada en cuenta para profundizar en ciertos temas asociados a la función, como por ejemplo el uso de la analogía en la enseñanza y la reflexión que debe realizar el profesor a cerca de sus ventajas y limitaciones en la enseñanza, así como cuál es el conocimiento matemático que sustenta dicha comparación. La lista de indicadores, si bien no se puede generalizar como el conocimiento que tiene cualquier profesor de matemáticas o con las mismas características de Arturo, da pie para reflexionar sobre el impacto que tiene la formación inicial en los profesores y cómo ella asegura que el futuro profesor adquiera las herramientas necesarias para la enseñanza. La formación de Arturo puede estar polarizada hacia lo disciplinar y esto condiciona su labor de enseñanza a enmarcarse en cierto tipo de prácticas.

Asimismo, los indicadores de conocimiento y las relaciones entre ellos proporcionan una fuente de información que puede ser estudiada con los futuros profesores para reconocer fortalezas y oportunidades de mejorar la formación inicial y continua. En este reporte contamos con diversos ejemplos que puede servir de punto de partida para reformulaciones de la propuesta de enseñanza que propone Arturo para la función. Este asunto puede ser discutido también entre los formadores de profesores y por los profesores en ejercicio, lo que requiere de publicar y divulgar estos resultados.

El caso de Arturo, su conocimiento y su caracterización tienen un uso potencial en la formación profesional del profesor, debido a que ellos pueden ser aplicados al diseño de tareas para la formación de profesores como estudio de caso, como ejemplo de prácticas reales de aula o servir de referencia para la analizar la efectividad de las estrategias y técnicas de enseñanza para el concepto de función en algún nivel educativo. Las relaciones dentro del conocimiento de Arturo muestran cuáles son las características de la función que resalta durante su enseñanza y permiten reflexionar sobre cuáles quedan ocultas. Por ejemplo, Arturo resalta el carácter procedimental de la función en el cálculo de imágenes, en la construcción de representaciones y en el cálculo de inversas, pero no se incluye el uso de la función como una herramienta que va más allá de lo operatorio y que es útil en la construcción de modelos que representen algún fenómeno. Tampoco se relaciona el cambio lineal o proporcionalidad con la función, pero si se muestran las propiedades de inyectividad, epiyectividad y biyectividad de la función como útiles en el cálculo de la función inversa.

Lo anterior permite a los profesores (en formación o ejercicio) diseñar sus propias estrategias de enseñanza con mejoras, modificaciones o alternativas respecto a la propuesta de Arturo y que contemple tanto diferentes definiciones de la función como el uso de cualquier conocimiento en cualquier subdominio.

Por otra parte, la reflexión puede centrarse en la incidencia de la formación de post grado en la disciplina a la que pueden acceder los profesores y cuestionar cuáles son los elementos que este tipo de formación debe considerar cuando se busca contribuir al desarrollo del conocimiento profesional del profesor. Por ejemplo, el hecho de que Arturo no dé cuenta explícitamente de teorías de enseñanza o de aprendizaje puede ser indicio de que éstas deben abordadas con mayor profundidad y concretizadas a los temas que los profesores deben enseñar.

Respecto al conocimiento puramente matemático, como eje importante en el conocimiento profesional del profesor, el caso de Arturo muestra una profundidad en el conocimiento de la red conceptual del concepto de función que puede ser ampliada en búsqueda de relaciones de la función con otros objetos matemáticos a través del estudio de la función y su rol dentro de la matemática.

Por otro lado, las relaciones dentro del conocimiento especializado de Arturo también aportan a la formación del profesor al dar cuenta de sus prácticas de enseñanza sobre el concepto de función a través de su interpretación desde el MTSK. La integración de distintos conocimientos en determinados momentos de la enseñanza de la función da cuenta de la complejidad del conocimiento, la que debe ser abordada por la formación del profesor. En este sentido, se debe comprender que el Conocimiento Matemático y el Conocimiento Didáctico están estrechamente conectados y no se desarrollan de manera separada, sino que de manera integral en donde cada uno es influenciado e influye en el otro, al mismo tiempo, el Conocimiento Matemático debe construirse contemplándolo como sustento de la matemática que el (futuro) profesor deberá enseñar a sus estudiantes.

Sobre las relaciones entre subdominios

En la presentación del modelo MTSK se indica que se trata de una división con fines analíticos (Carrillo *et al*., 2018), pero se espera que, en el estudio del conocimiento del profesor, interactúen diferentes conocimientos de manera integrada. Los resultados dejan ver la complejidad tanto del estudio del conocimiento del profesor como del mismo conocimiento. El carácter especializado para el conocimiento del profesor, desde la perspectiva del MTSK, está basado en la integración de diferentes conocimientos en diferentes dimensiones.

En nuestra investigación, se logró evidenciar diferentes relaciones entre subdominios del modelo y también relaciones entre conocimientos que se ubican al interior de un solo subdominio. Por ejemplo, se identifican diversas relaciones al interior del KoT respecto del conocimiento de la definición de función y cómo esta permite determinar procedimientos para validar y construir relaciones funcionales.

Consideramos que una de las aportaciones de este trabajo es el avance que se produce en la comprensión del conocimiento de profesor en cuanto se logran establecer estas relaciones intra e inter subdominios, pues el modelo no describe en su presentación dichas relaciones. Comprendemos que es una tarea compleja describir cómo se relacionan todas las categorías y subdominios del modelo, pues las relaciones que emergen de este estudio en particular interpretan el conocimiento que el profesor manifiesta en una acción específica: la enseñanza del concepto de función. En este sentido, estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas durante el desarrollo de otra actividad, como la planificación de la enseñanza, la discusión entre pares, la construcción de instrumentos o recursos para la enseñanza-aprendizaje o, incluso, durante la enseñanza de otro tema, puede dar como resultado otras relaciones entre conocimientos que aquí no se presentan. De este modo, y de acuerdo al diseño de la investigación, las relaciones entre los conocimientos expuestas son particulares del caso seleccionado y permiten comprender su conocimiento en su contexto y realidad.

Para evidenciar estas relaciones hemos seleccionado cuatro momentos de las sesiones de clase de Arturo (Ver Capítulo 5) que son ricos en evidencias e indicios de conocimiento especializado y que permiten establecer relaciones entre sus conocimientos. Lo que se obtiene del estudio de estos momentos es una imagen del conocimiento que pone en juego el profesor al momento de enseñar la función.

Respecto a los resultados de este estudio observamos que la enseñanza y el aprendizaje de la función son asuntos que están estrechamente relacionados. La elección o conformación de alguna teoría y estrategia de enseñanza tiene por objetivo el aprendizaje de los estudiantes, a la vez que los aprendizajes estarán supeditados a la forma en que se comprenda la enseñanza. El origen de esta relación se encuentra en las directrices que sigue el profesor respecto a lo que debe ser enseñado y aprendido de acuerdo a los documentos oficiales, cuyo conocimiento se incluye en el KMLS. Pese a que el profesor cuenta con una fuente de información que incluye lo que se debe enseñar, lo que deben aprender los estudiantes e incluso cómo debe ser enseñado, Arturo determina sus propias condiciones para la enseñanza. Por una parte, el profesor agrega contenidos (la biyectividad) a la enseñanza de la función para fortalecer la comprensión de los estudiantes de las funciones exponencial y logaritmo y, por otro lado, incorpora el lenguaje formal en la definición de los objetos matemáticos. Ninguno de estos dos elementos está incluido en el programa de estudio. El profesor, para plantear una estrategia de enseñanza, podrá primero saber qué es lo que debe enseñar, cuál es el grado de abstracción que se debe lograr y cuáles son las expectativas de aprendizaje. Las teorías y estrategias de enseñanza (KMT) indicarán al profesor cómo poder conducir la enseñanza para conseguir el nivel de desarrollo conceptual y procedimental (KMLS) que se espera en ese nivel. A esto se agrega que la estrategia elegida estará condicionada o se adaptará por el conocimiento que tenga el profesor sobre las características del aprendizaje de sus estudiantes (KFLM) respecto a lo que debe ser enseñado-aprendido, lo que responde a la pregunta sobre cómo se aprende dicho tema.

Se trata aquí de un asunto de comprensión de la matemática, de su enseñanza y de su aprendizaje. Consideramos que esto corresponde al dominio de las creencias desde le MTSK y, por tanto, se escapa del objetivo planteado ara esta investigación. Sin duda, considerar estos aspectos contribuye a elaborar una mejor imagen del conocimiento de Arturo, pues, como se observa, su posicionamiento frente a la matemática le hace aplicar cierto tipo de estrategia que resalta la visión procedimental e instrumental de la matemática y comprende el aprendizaje como memorístico y de repetición de técnicas.

Los conocimientos anteriores están condicionados por el conocimiento del profesor sobre la red conceptual para la función (KoT) y las conexiones con otros conceptos como ecuaciones (KSM) y conocimientos sobre la producción de conocimiento matemático como metaconocimiento (KPM) en el siguiente sentido: la estrategia de enseñanza de Arturo (KMT) se nutre del conocimiento de las dificultades de los estudiantes (KFLM) para comprender esta red conceptual de la función como un todo organizado y le lleva a incluir conceptos como la biyectividad, que no son parte del nivel escolar actual (KMLS) y que buscan apoyar el aprendizaje de las funciones que se estudian en el siguiente nivel escolar (KMLS).

El conocimiento de Arturo sobre la definición parece ser clave al momento de diseñar la enseñanza de la función. Como se mostró en el capítulo anterior, la enseñanza de la función moviliza todos los subdominios del MTSK en diferentes categorías y a diferentes niveles de acuerdo al momento de la enseñanza de la función que antes se expusieron.

De acuerdo a lo observado en el tratamiento que Arturo da a las funciones durante el resto de las sesiones, hay una tendencia al manejo de ellas en el registro algebraico, evocando constantemente las definiciones formales de la función en distintas tareas. Pese a que Arturo pretende mostrar diferentes representaciones de la función, y con ello conseguir una mejor comprensión del concepto por parte de sus estudiantes, los significados de la función que muestra en las clases son limitados. La tendencia al manejo algebraico se vincula al significado operacional (Sfard, 1991) de la función. No aparece en las clases de Arturo el significado de co-variación entre magnitudes ni aspectos relacionados a modelos en que la función esté involucrada, que aportan a la construcción de este significado. La resolución de problemas contextualizados o la generación de modelos matemáticos basados en las funciones lineales o afines tampoco son abordados por Arturo. En este contexto, no es esperable que surjan las condiciones para desarrollar el pensamiento variacional a través de la modelación.

Las conclusiones de este trabajo apuntan a que el KFLM del profesor puede ampliarse mediante la reflexión, por ejemplo, sobre la analogía presentada y cómo afecta el aprendizaje de los estudiantes, atendiendo los aspectos que la propia analogía deja fuera. Esto último debe producirse contrastando la comparación analógica que propone con el KoT que posee el profesor sobre la función y complementando con otros significados para la función, por ejemplo, el de co-variación, que estuvo ausente en todo el trabajo de Arturo.

La elección de la estrategia para la enseñanza de la inyectividad, epiyectividad, biyectividad y función inversa (KMT) obedece a la experiencia de Arturo respecto a las características del aprendizaje de los estudiantes (KFLM) en cuanto a los logros que obtienen cuando estudian la función logaritmo. Arturo conoce que cierto tipo de funciones son estudiadas en el curso siguiente (como secuenciación de temas en el KMLS) y que deben ser comprendidas tanto como un operador, es decir, la operatoria que implica el trabajo con los logaritmos, como la función inversa de otra función. Particularmente, se refiere al caso de las funciones exponencial y logaritmo. Para ello, Arturo considera necesaria la enseñanza de la biyectividad y de la función inversa en el curso actual como apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la función logaritmo que estudiarán sus estudiantes en el curso siguiente. Los fundamentos para esta relación entre las funciones como una inversa de la otra provienen del KoT de Arturo, pero de la función logaritmo. Por su parte, consideramos que la necesidad de dar esta fundamentación responde a la formación matemática que ha recibido Arturo. Esto trasciende a toda la enseñanza de la función en la que se identifica el constante uso de la simbología y del lenguaje formal. Asimismo, debido a su experiencia docente, la visión que tienen de la enseñanza de la función apunta más al nivel universitario que al escolar en el tratamiento del tema, pues las orientaciones dadas en el programa de estudio (MINEDUC, 2016b) apuntan a contextualizar la función en situaciones cercanas a los estudiantes sobre el estudio conceptual, como ocurre en las propuestas de textos de uso universitario (e.g., Spivak, 1996).

Por otro lado, el conocimiento de los procedimientos y los conceptos sobre la función son, de alguna manera, cotas para determinar lo que espera desarrollar en sus estudiantes. Estos conocimientos son identificables en el KoT de Arturo y actúan sobre el KMLS como filtros para los niveles de desarrollo procedimental/conceptual que espera para sus estudiantes. Así ocurre, por ejemplo, con la verificación de correspondencias funcionales, la demostración de la inyectividad de una función o la enseñanza del dominio y recorrido de las funciones. Estos conocimientos no se encuentran en el programa de estudio, pero Arturo los incorpora desde su KoT como parte del nivel procedimental esperado en el KMLS, regulando con ello su estrategia de enseñanza en KMT.

En sentido contrario, el subdominio KoT que manifiesta Arturo también es condicionado por su KMLS. Puesto que el KoT incluye los conocimientos del profesor que tiene del tema y que se espera aprendan los estudiantes, pero con una profundización mayor (Carrillo *et al.*, 2018), la manifestación del KoT del profesor dependerá de lo que estipulen los estándares de aprendizaje que conozca. Por ejemplo, el dominio y recorrido de las funciones trabajadas en las sesiones de Arturo, se definió siempre como un subconjunto de números racionales, sin embargo, las funciones propuestas podían ser vistas como funciones con variable real (o compleja), pero el ámbito numérico de los estudiantes limitaba esa presentación. En este sentido, el KMLS está condicionando lo que el profesor manifiesta de su KoT y, de paso, su KMT sobre los ejemplos y actividades que el profesor puede plantear a sus estudiantes. Además, el profesor debe decidir qué del concepto (como parte de su KoT) enseñará a sus estudiantes y cómo lo hará (KMT) de acuerdo a estos estándares.

Las teorías de enseñanza y de aprendizaje son un asunto en que es difícil hacer una separación; la enseñanza tiene por finalidad que el otro aprenda y, para que el otro aprenda, se debe contar con una estrategia y teoría (tácita o implícita) sobre la enseñanza. En este sentido, las categorías del KMT y del KFLM a las que se hace referencia se nutren y sustentan mutuamente (Zakaryan *et al*., 2018). En el caso de Arturo, se observaron teorías personales generales para explicar la enseñanza de y el aprendizaje, que no podemos vincular exclusivamente a la matemática o, específicamente, a la función. Comprendemos que esto se asocia a sus creencias sobre cómo se aprende y como se enseña matemática, lo que está marcado por lo que pareciera ser su creencia sobre lo que es la matemática, asuntos que en este escrito no abordamos.

Según lo que señalan Vanegas y Escalona (2013), una de las metas del profesor debe ser plantear estrategias que faciliten al estudiante interactuar con los nuevos conocimientos, contemplando las concepciones sobre la función que los estudiantes puedan generar de modo que el resultado de la enseñanza sea el aprendizaje significativo y más cercano al conocimiento científico.

Finalmente, dos categorías nos llaman la atención respecto a su escasa o nula aparición en el conocimiento especializado de Arturo. Nos referimos a la categoría de Conexiones de complejización en el KSM y la categoría de Fenomenología y sus aplicaciones en el KoT. Respecto del conocimiento en esta última, Arturo señala en la entrevista que, en relación a los estándares de aprendizaje, el programa de estudio se orienta a ver la función en el ámbito de la resolución de problemas y de la modelación, sin embargo, estos aspectos no aparecen en sus sesiones de clases. Arturo se refiere a algunas situaciones que se modelan con funciones o en las que se puede identificar una función en áreas de conocimiento diferentes a la matemática, sin embargo, estos conocimientos permanecen desarticulados al enfrentar la tarea de enseñar la función.

Por su parte, no hay indicios ni evidencias del conocimiento sobre conexiones de complejización para la función. Cuando en la entrevista se le consulta sobre la progresión de la función en la línea de la complejización que contempla el MTSK, Arturo se refiere a la progresión en la dificultad de las tareas asociadas a la función (expresiones algebraicas más complejas) y no a la progresión del concepto de función en su complejidad como objeto matemático. La elección de Arturo como profesor experto permitió obtener información rica en evidencias de su conocimiento especializado, especialmente, la formación matemática de Arturo permitía suponer el conocimiento de diversas conexiones interconceptuales. Sin embargo, no logramos conseguir evidencias de conocimiento sobre conexiones de complejización.

Proyecciones

A continuación, se presentan algunas posibilidades sobre la ampliación o continuación de este estudio, manteniendo la línea de profundizar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor. Estas líneas contemplan diferentes niveles educativos, profundización en un subdominio o categoría, los cambios que se producen al utilizar definiciones alternativas y el diálogo con otros referentes teóricos para robustecer los análisis.

1) Una ampliación de este estudio, que aborda el conocimiento del profesor de secundaria, puede proyectar la investigación sobre el conocimiento de Arturo cuando da clases a nivel universitario para contrastar los conocimientos que se ponen en juego en estos dos escenarios educativos. Esta nueva investigación buscaría estudiar el conocimiento especializado del profesor universitario sobre el concepto de función y, como se trata del mismo profesor, ampliar la comprensión del MTSK desde la transversalidad a los niveles educativos. En la misma línea, es posible continuar esta ampliación atendiendo los niveles iniciales del desarrollo del pensamiento variacional para así tener un panorama más amplio de los conocimientos que tiene o podría tener un profesor al enseñar el concepto de función como eje articulador del currículo de matemáticas.

2) En la exposición de los resultados y en la discusión se incluyen aspectos poco abordados desde el MTSK. Por ejemplo, resulta interesante profundizar en las representaciones gestuales que utiliza el profesor para comunicar el concepto de función u otro tema y que le sirven como recursos para la enseñanza. En nuestro caso, Arturo realiza algunos gestos y movimientos de manos que pretenden representar una propiedad de la función, pero la literatura sobre el modelo no hace

mención a este tipo de acciones, que reflejan la concepción del concepto que tiene el profesor. Asimismo, es posible profundizar en el estudio del KPM para el profesor de Enseñanza Media (secundaria), pues es uno de los subdominios menos trabajados y son escasas las evidencias de conocimiento de este subdominio para ese nivel escolar.

3) Tal como se señaló en el apartado del Marco Teórico y en la declaración de nuestro objetivo, en este trabajo no abordamos el dominio de las creencias. De este modo, queda abierta la interrogante sobre cómo se manifiestan las creencias del profesor, ya sea respecto a la matemática en general, respecto al concepto de función o sobre su enseñanza y aprendizaje. Esta profundización contribuiría a generar una imagen más precisa del conocimiento del especializado del profesor, que pueda interpretar, por ejemplo, el uso del lenguaje formal en la enseñanza de la función como una forma de concebir la matemática y su enseñanza.

4) Finalmente, como trabajo paralelo al desarrollo de esta tesis, se han estudiado relaciones entre el modelo del Espacio de Trabajo Matemático y el MTSK apuntando a avanzar en la comprensión del conocimiento del profesor y la caracterización de sus prácticas. Sin duda es una línea de investigación ambiciosa e interesante que pretende nutrir ambos modelos desde la perspectiva de la conexión entre teorías y las diferentes estrategias/fases de conexión. Actualmente, nos encontramos trabajando en un proyecto que busca estudiar estas relaciones y aplicar sus resultados en la formación inicial de profesores de matemáticas.

El estudio del ETM considera ciertas prácticas matemáticas que pueden ayudar tanto en la definición de categorías para el subdominio KPM, como para una interpretación más profunda y amplia del conocimiento especializado. Asimismo, la idea de considerar tres ETM: Referencia, Idóneo y Personal, nos lleva a pensar también en diferencias en el MTSK observado en diferentes escenarios: preparando la enseñanza, durante la enseñanza o en la formación del profesor como directrices del conocimiento que sería útil tuviese el profesor.

Preguntas abiertas

Arturo evidenció conocimiento de una definición de la función, y se vio cómo este conocimiento incide en la estructura de la enseñanza de concepto, de la elección y construcción de sus representaciones, la forma de validar correspondencias funcionales y lo que espera Arturo que sus estudiantes aprendan. En este sentido, resultaría interesante indagar en cómo este peso que toma la definición de la función condiciona la enseñanza del concepto cuando el profesor conoce definiciones alternativas. Por ejemplo, ¿cómo cambia la enseñanza del concepto de función cuando esta se presenta desde el significado de co-variación de variables? Surge, como hipótesis, que este significado movilizaría conocimiento sobre la fenomenología de la función pues está más ligado al origen del concepto.

Otro aspecto que se deriva de esta investigación como materia de investigación es respecto a la condición de profesor experto que se ha establecido para seleccionar el caso de estudio. Señalamos en el capítulo de Metodología que un profesor experto permite suponer que será un caso que puede expresar evidencias ricas en conocimiento especializado. Frente a esto cabe preguntarse cómo afecta la condición de profesor novel al establecimiento de relaciones dentro de su conocimiento especializado. En este sentido, es posible preguntar ¿en qué difieren los conocimientos manifestados por un profesor novel respecto a lo que expresa el profesor experto? O ¿se pueden esperar las mismas relaciones dentro del conocimiento de un profesor novel que las encontradas en el caso de un profesor con características similares a las de Arturo? En esta línea, puede cuestionarse sobre los aspectos del conocimiento especializado que se van modificando de acuerdo a la experiencia docente del profesor experto, esto supone la realización de estudios longitudinales para observar a un profesor en distintas etapas de su desarrollo profesional.

Referencias

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso.* Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva. Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006.

Akkoç, H., y Tall, D.O. (2003). The Function Concept: Comprehension and Complication. En S. Pope (Ed.), *Proceedings of the Day Conference of British Society of Research into Learning Mathematics 23,* (pp.1-6). UK: Sheffield Hallam University.

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J., y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa,* 9, 6-19.

Amaya, T.R., Pino-Fan, L., y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, *28*(3), 111-144. Recuperado en 11 de diciembre de 2017, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttextypid=S1665-58262016000300111ylng=esytlng=es.

Aparicio, E., y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 7-30.

Apostol, T. (1999). *Calculus (vol I)*. Editorial Reverté, S.A.: México.

Arias, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería, 18*(1), 13-26.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York, NY: Springer. doi:10.1007/978-1-4614-7966-6

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino‐aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham, UK: Open University Press.

Bohórquez, L (2016). Sobre el conocimiento del profesor y el estudiante para profesor de matemáticas. En M. Iori (Ed.), *International Conference*

Mathematics and Mathematics Education (pp. 79-86). Bologna, Italia: Pitagora Editrice Bologna.

Bosch, M., y Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. Recuperado de http://goo.gl/rsB1db.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas* (Trad. Jesús Hernández). Madrid, España: Alianza Editorial.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247–285.

Brousseau, G. (1986). *La téorie des situations didactiques.* [Theory of Didactic Situations]. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las situaciones didácticas* (Trad. Dilma Fregona). Buenos Aires: Libros el Zorzal.

Bruns, B., y Luque, J. (2014). *Docentes excelentes: Cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe, resumen.* Washington, DC: Banco Mundial.

Camacho, A., y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-I), 29-52.

Carlson, M., y Oehrtman, M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function.* Recuperado de www.mma.org: http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function#references

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., y Contreras, L.C. (2017). *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Huelva: CGSE.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (Eds.), (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Escudero, D., y Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. *FOR-MATE. Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1*(1),16- 26.

Castro, E. (2010). El estudio de caso como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista nacional de administración, 1*(2), 31-54.

Castro, A., Mengual, E., Monserrat, P., Albarracín, L., y Gorgorio, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: Inicio de una línea de investigación. En M. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (págs. 227-236). Salamanca: SEIEM.

Climent, N., Carreño, E., y Ribeiro, C.M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática: el caso de los polígonos. En P. Lestón (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 27*, (pp. 1761-1769). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñán, M.M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V.J., y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85 - 103.

Contreras, L.C., Montes, M., Climent, N., y Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista For-Mate,* 3, 7-15.

Corica, A. R., y Otero, M. R. (2007). Las ideas de algunos estudiantes acerca de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el nivel medio. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *2*(1), 40-68.

Creswell, J.W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. California, Estados Unidos de América: Sage.

De la Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente: el grado de visualización. *Mosaicos Matemáticos*, 11, 121-133.

Delgado, M. (2018). Comunicación icónica y gestual en Análisis Matemático. *Pi-InnovaMath*, *0*(1). Recuperado de: http://revistas.uned.es/index.php/pIM/article/view/21921/17931. Doi:10.5944/pim.1.2018.21921.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587. Doi: 10.1007/s10763-019-09977-0

Díaz, V., Belmar, H., y Poblete, A. (2018). Manifestación emocional y modelación de una función matemática. *Bolema, Río Claro, 32*(62), 1198-1218.

Dubinsky, E. y Harel (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). *MAA notes*, 25.

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education, 75*(6), 649-672. doi: 10.1002/sce.3730750606

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemática de secundaria*. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Espinoza-Vásquez, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 439–450). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo, J. (2017). Use of analogies in teaching the concept of function: Relation between knowledge of topics and knowledge of teaching. En Dooley, T., y Gueudet, G. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* - CERME10 (pp. 3288-3295). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 301-324. doi: 10.12802/relime.18.2133

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M, y Zakaryan, D. (2018). Avance en la compresión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research MENON*, 4, 146-161.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, *21*, 521-544. doi: 10.1007/BF00315943

Farfán, R. M., y García, M. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* (pp. 489-494). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Fernández, B., y Arias, J. R. (2013). La expresión corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en educación infantil. *Retos. Nuevas tendencias en Educación Física, Deporte y Recreación*, *24*, 158-164.

Figueiredo, C., Contreras, L., y Blanco, L. (2012). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación Matemática, 24*(1), 73-105.

Figueiredo, C., Contreras, L., y Blanco, L. (2015). Concepto de función: definición, representación y ejemplificación en la enseñanza y aprendizaje. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.T. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 67-80). Universidad de La Laguna: España.

Flick, U. (2007). *Managing quiality in qualitative research.* Londres: Sage.

Flick, U. (2009). *An introduction to quialitative research* (4º edición). Londres: Sage.

Flick, U. (2015*). El diseño de investigación cualitativa*. (Trad. Tomás del Amo y Carmen Blanco). Madrid, España: Ediciones Morata S.A.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). Huelva: SGSE.

Flores, E., Escudero, D., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D., y Carrillo, J., (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3055–3064). Antalya, Turkey: ERME.

Freudental, H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publisher.

García. M. (2005). La formación de profesores de matemáticas: un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática, 17*(2), 153-166.

García, G., y Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(3), 357-370. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503306

Glaser, B.G., y Strauss, A.L. (1967). *The discovery of Grounded Theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J.D., Aké, L., Gonzato., M., y Whilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 135-165

Goldin, G., y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A., y Greer, B. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gómez-Chacón, I. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo (Ed.), *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas* (197-227). Huelva: Universidad de Huelva.

Gómez, O. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. *Revista científica, 2*, 115-120. doi.org/10.14483/23448350.5966

Gómez, C., y Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico [Pre-service mathematics teachers' difficulties in the learning of phenomenological analysis]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(3), 311–334.

González, J. (2001). *Cálculo I*. Valparaíso, Chile: Instituto de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Guerrero-Ortiz, C. y Heriquez-Rivas, C. (2016). El espacio de trabajo matemático en el estudio de propiedades sintéticas y analíticas de la parábola. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 425–439). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165–178. doi:10.1007/s10649-005-9019-8

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des representations. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, *8*, 975-999.

Hitt, F., y Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: constructing the concept of covariation as a prelude of the concept of function. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(17), 243-260.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, *7*(2), 1-20.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A., y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM, 48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime, 17*(4.1), 17–26

Lakoff, G., y Nuñez, F. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York, USA: Basic Books.

Liñán, M.M. (2017). *Conocimiento especializado en geometría en un aula de 5º de primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva, España.

Liñán, M.M., Barrera, V., e Infante, J.M. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17, 41-63.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, y C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação?* (pp. 47-82). Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao.

Lougrhan, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education, 30*(10), 1301-1320.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Medina, J.L., y Jarauta, B. (2013). Análisis del conocimiento didáctico del contenido de tres profesores universitarios. *Revista de Educación*, *360*, 600-623. doi: 10-4438/1988-592X-RE-2011-360-131

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016a). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016b). *Matemática: Programa de estudio octavo básico*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Mitchell, R., Charalambous, C., y Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 37-60. DOI 10.1007/s10857-013-9253-4

Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Nespor, J. (1987). The Role of Beliefs in the Practice of Teaching. *Journal of Curriculum Studies*, *19*(4), 317-328. doi:10.1080/0022027870190403

Nyikahadzoyi, M. (2015). Teachers' knowledge of the concept of a function: a theorical framework. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 261-283.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(39), 307-332.

Pazuch, V., y Ribeiro, A.J. (2017). Conhecimento profissional de profesores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa, 19*(1), 465-496.

Pecharomán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 121-134.

Pino-Fan, L. R., Parra-Urrea, Y. E., y Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Ponciano, E., y Sosa, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *11*, 83-97.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94), Barcelona: Horsori.

Ribeiro, A., y Cury, H. (2018). *Álgebra para a formaçao do profesor: Explorando os conceitos de equaçao e de funçao*. Brasil: Autêntica.

Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado (Informe). Granada: Universidad de Granada.

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J. y Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *UNICIENCIA, 32*(1), 89-107. doi:10.15359/ru.32-1.6

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada, España: Ediciones Aljibe.

Rodríguez, D., y Valldeoriola, J. (2010). *Metodología de la investigación*. Cataluña: Universitat Oberta de Catalunya.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor: un estudio de casos.* Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema*, *29*(51), 143-166.

Roque, T. (2012). História da matemática – Uma visao crítica, desfazendo mitos e lendas. Brasil: Zahar.

Ruffinelli, A. (2013). La calidad de la formación inicial docente en chile: la perspectiva de los profesores principiantes. *Calidad en la Educación*, 39, 118-154.

Ruffinelli, A. (2016). Ley de desarrollo profesional docente en Chile: de la precarización sistemática a los logros, avances y desafíos pendientes para la profesionalización. *Estudios Pedagógicos, 16*(4), 261-279.

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sastre, P., Rey, G., y Boubée, C. (2008) El concepto de función a través de la história. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L.R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(1), 153-172. doi:10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A.H. (2010*). How we think*. Nueva York: Routledge.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática - SIDM. (2016). Documento interno sin publicar del Seminario de Investigación en Didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva.

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, *10*, 89-104.

Souza, D., Y Lazarrin, J. (2018). Funçoes: construindo conceitos a partir da análise gráfica. *Revista Ciencias exatas e Naturais, 20*(1), 91-104.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal.* México: Editorial Reverté S.A.

Steele, M., Hillen, A., y Smith, M. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teachers Education, 16*(6), 451-482. doi:10.1007/s10857-013-9243-6

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (Trad. Eva Zimmerman). Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). Washington, DC: MAA Series.

Sosa, L., Aguayo, L.M., y Huitrado, J.L. (2013). KFLM: un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores.* (269-297). Chilpancingo, México: Ediciones Díaz de Santos S.A.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, (María del Carment Rodriguez, trad.) (7ª ed.). México D.F.: Cengage Learning Editores, S.A.

Tasdan, B., y Koyunkaya, M. (2017). Examination of pre-service mathematics teacher's knowledge of teaching function concept. *Acta Didactica Napocensia, 10*(3), 1-18.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues In mathematics Education*, 4, 21–44.

Trujillo, M., Guerrero, J., y Castro, N. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de Investigación, 7*(2), 223-233.

Vanegas, D., y Escalona, M. (2013). Concepciones sobre funciones matemáticas de una variable, en estudiantes del primer semestre de ingeniería. *Omnia*, *19*(1), 99-113.

Vargas, M.E. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno*. Tesis de Magister. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Vargas, V., Reyes, A., y Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática, 28*(2), 59-83.

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas* (pp. 61-70). Bogotá, Colombia.

Vasco, C. E. (2010). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario.* Tesis Doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Ribeiro, M. (2016), Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona, España: Editorial Gedisa, S.A.

Verdugo, P. (2017). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad*. Tesis Doctoral. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias, Chile.

Verdugo-Hernández, P., y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Utilización de las herramientas en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática, 11*(2), 91-101.

Villa, J., (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa XXI* (pp. 245-254), DF, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

Winicki, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 528-537). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Youschkevitech, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th Century (Rosa María Farfán, Trad.). *Serie: Antologías 1* (pp. 99-145). México: Cinvestav-IPN.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, R., Olfos, E., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123.

Zakaryan, D., Ribeiro, C.M., y Valenzuela, P. (2015). Conocimiento matemático especializado de los números racionales-un caso de una profesora chilena. En P. Scott y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015*. *Volumen 2: Formación Inicial para Secundaria,* (pp. 137-148). Chiapas, México: CIAEM.

Zuffi, E. M. y Pacca, J. L.A. (2002). O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. *Ciência y Educação*, *8*(1), 1-12.

Anexos

En esta sección presentamos los documentos anexos de la tesis, correspondientes a: 1) la tabla resumen con los códigos e indicadores de conocimiento especializado de Arturo, 2) consentimiento informado a los apoderados de los estudiantes del curso en que se registraron los datos, 3) la invitación al profesor para participar de esta investigación y la carta enviada al director del establecimiento donde trabajaba Arturo, 4) el protocolo y transcripción de las entrevistas.

Debido al compromiso de confidencialidad de los participantes, los anexos 2) y 3) son los formatos de los documentos utilizados, sin nombres ni datos que permitan identificar a los participantes.

Anexo 1: Tablas de códigos e indicadores

Tabla 8: Códigos e indicadores del KoT en el caso de Arturo.

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento del Tema - KoT	Procedimientos	KoT-P-1	cómo determinar si una correspondencia es o no una función
		KoT-P-2	la construcción del diagrama sagital para representar una función
		KoT-P-3	cómo determinar imágenes y pre imágenes
		KoT-P-4	la construcción de la gráfica cartesiana de una función
		KoT-P-5	las características del resultado al representar una función lineal o afín en el plano cartesiano
		KoT-P-6	cómo determinar el dominio de una función
		KoT-P-7	cómo determinar el recorrido de una función
		KoT-P-8	cómo determinar la inyectividad de una función
		KoT-P-9	cómo determinar la epiyectividad de una función
		KoT-P-10	cómo determinar la función inversa
	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	KoT-D-1	la definición de función
		KoT-D-2	la definición de dominio y recorrido
		KoT-D-3	la definición de función lineal y función afín
		KoT-D-4	la definición de inyectividad, epiyectividad y biyectividad
		KoT-D-5	la definición de la inversa de una función
		KoT-D-6	la definición de gráfico de una función
	Registros de representación	KoT-R-1	la representación del plano cartesiano y puntos en él
		KoT-R-2	la representación de la función mediante diagrama sagital
		KoT-R-3	la representación de la función mediante gestos
		KoT-R-4	la notación para las funciones
		KoT-R-5	la nomenclatura de imagen y pre imagen en una función
		KoT-R-6	la representación algebraica de la función lineal y afin
		KoT-R-7	la representación cartesiana de la función
		KoT-R-8	la representación cartesiana de las funciones lineales y afines
		KoT-R-9	la representación del dominio y recorrido de la función
		KoT-R-10	la notación y representación de la inyectividad
		KoT-R-11	la representación de la epiyectividad
		KoT-R-12	la notación para la función inversa

Tabla 8: Códigos e indicadores del KoT en el caso de Arturo (continuación).

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento del Tema - KoT	Fenomenología y aplicaciones	KoT-F-1	la aplicación de las funciones a situaciones cotidianas
	Significados	KoT-S-1	la función como una correspondencia entre conjuntos
		KoT-S-2	la función como un proceso
		KoT-S-2.1	la función como una máquina
		KoT-S-2.2	la función como un proceso de entrada y salida
		KoT-S-2.3	la función como una aplicación
		KoT-S-2.4	la función como una transformación
		KoT-S-2.5	la función como un operador
		KoT-S-3	un significado para la inyectividad
		KoT-S-4	un significado para la epiyectividad

Tabla 9: Códigos e indicadores del KSM en el caso de Arturo.

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la estructura de las matemáticas - KSM	Conexiones Auxiliares	KSM-A-1	la ecuación lineal para la determinación de pre imágenes
	Conexiones Transversales	KSM-T-1	la conexión entre la función afín y la recta euclidiana
	Conexiones de Simplificación	KSM-S-1	El tratamiento de expresiones algebraicas fraccionaras como similar al tratamiento de números racionales
	Conexiones de Complejización		No se observan

Tabla 10: Códigos e indicadores del KPM en el caso de Arturo.

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la práctica matemática - KPM	*Comunicación y lenguaje	KPM-C-1	el papel de los cuantificadores universal y existencial y la simbología de conjuntos en el concepto de función
		KPM-C-2	el papel de las proposiciones y conectores lógicos en la comunicación de conceptos asociados a la función
	*Formas de validación	KPM-V-1	el rol de la definición de función en la verificación y elaboración de relaciones funcionales
		KPM-V-2	las características de la demostración de una proposición del tipo p=>q
		KPM-V-3	la demostración de la inyectividad de una función
		KPM-V4	la demostración matemática y la verificación como prácticas formales
	*Generalización	KPM-G-1	la generalización en el trabajo algebraico con funciones
	*Modelación	KPM-M-1	la modelación de situaciones a través de funciones

Tabla 11: Códigos e indicadores del KMT en el caso de Arturo.

	Categoría	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas - KMT	Teorías de enseñanza	KMT-T-1	la organización de las definiciones, representaciones, procedimientos, ejemplos y tareas como teoría personal de enseñanza del concepto de función
	Recursos materiales y virtuales	KMT-R-1	la pizarra y las cuadrículas como recursos para graficar funciones
		KMT-E-1	una estrategia para la enseñanza de la definición de función 1.1 situaciones cotidianas para la enseñanza de los cuantificadores y la noción de correspondencia 1.2 la representación sagital de la función para la enseñanza de la definición de función 1.3 la analogía entre función y máquina y su uso como parte de la estrategia de enseñanza de la función 1.4 el uso de ejemplos y no ejemplos para la enseñanza de la definición de función
		KMT-E-2	una estrategia para la enseñanza de la validación de correspondencias como relaciones funcionales 2.1 la enseñanza de la definición de función y su potencialidad como herramienta para la validación de correspondencias funcionales 2.2 la potencialidad de las representaciones gestuales como herramienta y recurso para la validación de correspondencias funcionales 2.3 la potencialidad del test de la recta vertical como herramienta en la validación de correspondencias funcionales mediante la gráfica cartesiana 2.4 tareas de validación de correspondencias como funcionales
		KMT-E-3	una estrategia para la enseñanza de las representaciones de la función
		KMT-E-4	criterios para la selección de ejemplos y tareas en la enseñanza de la función
		KMT-E-5	la traducción entre lenguaje formal y lenguaje natural como parte de la estrategia de enseñanza para las definiciones de función, de dominio y de recorrido

Tabla 12: Códigos e indicadores del KFLM en el caso de Arturo.

	Categorías	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas - KFLM	Teorías de aprendizaje		No se registraron evidencias
	Fortalezas y Dificultades		Dificultades
		KFLM-D-1	las dificultades que presentan los estudiantes para comprender el concepto de función
		KFLM-D-2	las dificultades para graficar puntos sobre los ejes cartesianos
		KFLM-D-3	las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la función logaritmo
		KFLM-D-4	las dificultades que presenta la comprensión de la noción de función inversa y la determinación de su expresión algebraica para f(x)=ax+b
			Fortalezas
		KFLM-F-1	las fortalezas de los estudiantes al evaluar expresiones algebraicas con los números 0 y 1
		KFLM-F-2	la facilidad de los estudiantes para representar funciones lineales utilizando la cuadrícula de sus cuadernos
			Dificultad y Fortaleza
		KFLM-DF-1	las dificultades de los estudiantes al trabajar con números racionales no enteros o letras y las fortalezas al trabajar con números naturales o enteros
	Forma de interacción de los estudiantes con el contenido	KFLM-I-1	las técnicas utilizadas por los estudiantes para determinar pre imágenes de una función
		KFLM-I-2	los procedimientos alternativos de los estudiantes para encontrar el punto de corte de la función afín y el eje X
		KFLM-I-3	el vocabulario usual de los estudiantes en el contexto de las funciones 3.1 el vocabulario usado por los estudiantes al graficar en el plano cartesiano 3.2 el vocabulario usado por los estudiantes para referirse a la función inversa
	Aspectos emocionales	KFLM-E-1	la actitud de los estudiantes frente a la abstracción que propone el concepto de función

Tabla 13: Códigos e indicadores del KMLS en el caso de Arturo.

	Categorías	Código	Conocimiento del profesor sobre
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS	Expectativas de aprendizaje	KMLS-E-1	lo estipulado como aprendizaje de los estudiantes sobre la función
		KMLS-E-2	la inclusión de la inyectividad, epiyectividad y biyectividad como temas de estudio en el contexto de la función
	Nivel de desarrollo esperado	KMLS-DC-1	nivel de desarrollo *conceptual* de los estudiantes sobre conceptos asociados a la función sobre
			1.1 la comprensión del concepto de función
			1.2 la representación de la función
			1.3 la inyectividad de la función
			1.4 la biyección de la función
		KMLS-DP-1	nivel de desarrollo *procedimental* de sus estudiantes en procesos asociados a la función sobre
			1.1 la identificación de correspondencias funcionales
			1.2 la determinación de imágenes y pre imágenes
			1.3 la construcción de representaciones para la función
			1.4 la resolución de diferentes tipos de ecuaciones
			1.5 la determinación del dominio y el recorrido de una función
			1.6 la restricción del dominio de una función
			1.7 la determinación de la inversa de una función

Anexo 2: Consentimiento informado a los apoderados, director y profesor

Consentimiento Informado de Participación en Proyecto de Investigación Dirigido a: Apoderado o Tutor

Mediante la presente, se le solicita su autorización para que su pupilo participe de estudios enmarcados en la investigación de tesis Doctoral “Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre el concepto de función. Un estudio de caso”, para el programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la P. Universidad Católica de Valparaíso, a cargo del profesor Sr. Gonzalo Espinoza.

Dicho proyecto tiene como objetivo principal identificar y comprender el conocimiento especializado sobre el concepto de función matemática que se manifiesta durante su enseñanza. En función de lo anterior es pertinente la participación de su pupilo en el estudio, por lo que mediante la presente, se le solicita su consentimiento informado.

Al colaborar con esta investigación, deberá **participar en las grabaciones de clases de matemáticas en calidad de estudiante**, lo cual se realizará mediante **cámara de video**. Dicha actividad durará aproximadamente **4 semanas, será realizada en el centro escolar, durante la jornada escolar**.

Además, la participación en este estudio no implica ningún riesgo de daño físico ni psicológico para el estudiante, y se tomarán todas las medidas que sean necesarias para garantizar la **salud e integridad física y psíquica** de quienes participen del estudio.

Todos los datos que se recojan, serán estrictamente **anónimos y de carácter privados**. Además, los datos entregados serán absolutamente **confidenciales** y sólo se usarán para los fines científicos de la investigación. El responsable de esto será el Investigador Responsable del proyecto, quien tomará todas las medidas necesarias para cautelar el adecuado tratamiento de los datos, el resguardo de la información registrada y la correcta custodia de estos. **Las video-grabaciones se usarán estrictamente para analizar las actividades del profesor determinadas en el proyecto. En ningún momento se mencionará el centro escolar, el aula de los estudiantes participantes o los nombres de las personas involucradas.**

El investigador Responsable del proyecto asegura la **total cobertura de costos** del estudio, por lo que la participación no significará gasto alguno. Por otra parte, la participación en este estudio **no involucra pago o beneficio económico** alguno.

Si presenta dudas sobre este proyecto o sobre su participación en él, puede hacer preguntas en cualquier momento de la ejecución del mismo. Es importante que usted considere que la participación en este estudio es **completamente libre y voluntaria**, y que tiene derecho a negarse a participar o a suspender y dejar inconclusa la participación cuando así se desee, sin tener que dar explicaciones ni sufrir consecuencia alguna por tal decisión.

Desde ya le agradecemos su participación.

Gonzalo Espinoza,

Investigador Responsable

Modelo de Aceptación de participación en la investigación

Fecha________________________

Yo_______________________________________, apoderado del alumno(a)_______________________________________, del curso ____________, en base a lo expuesto en el presente documento, acepto voluntariamente participar en la investigación "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre el concepto de función. Un estudio de caso", conducida por el profesor Gonzalo Espinoza, candidato a doctor del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

He sido informado(a) de los objetivos, alcance y resultados esperados de este estudio y de las características de mi participación. Reconozco que la información que provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y anónima. Además, esta no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio.

He sido informado(a) de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento y que puedo retirarme del mismo cuando así lo decida, sin tener que dar explicaciones ni sufrir consecuencia alguna por tal decisión.

De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo contactar al profesor Gonzalo Espinoza al correo electrónico gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Entiendo que una copia de este documento de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar al Investigador Responsable del proyecto al correo electrónico anterior.

Nombre y firma del participante

Gonzalo Espinoza

Investigador Responsable

Consentimiento Informado de Participación en Proyecto de Investigación Dirigido a: Director(a)

Mediante la presente, se le solicita su autorización para participación en estudios enmarcados en la investigación de tesis Doctoral "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre el concepto de función. Un estudio de caso", para el programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la P. Universidad Católica de Valparaíso, a cargo del profesor Sr. Gonzalo Espinoza.

Dicho Proyecto tiene como objetivo principal identificar y comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de función que se manifiesta durante su enseñanza. En función de lo anterior es pertinente la participación de su pupilo en el estudio, por lo que mediante la presente, se le solicita su consentimiento informado.

Al colaborar usted con esta investigación, deberá **permitir las grabaciones de clases de matemáticas**, lo cual se realizará mediante **cámara de video**. Dicha actividad durará aproximadamente **4 semanas, será realizada en el centro escolar, durante la jornada escolar**.

Esta investigación espera contribuir a la caracterización del conocimiento especializado de profesores de matemática sobre la enseñanza de las funciones y a la formación de los futuros profesores de nuestro país, por lo que los beneficios reales o potenciales que usted podrá obtener de su participación en la investigación es **la aportación a la generación del conocimiento científico**. Además, la participación en este estudio no implica ningún riesgo de daño físico ni psicológico, y se tomarán todas las medidas que sean necesarias para garantizar la **salud e integridad física y psíquica** de quienes participen del estudio.

Todos los datos que se recojan, serán estrictamente **anónimos y de carácter privados**. Además, los datos entregados serán absolutamente **confidenciales** y sólo se usarán para los fines científicos de la investigación. El responsable de esto será el Investigador Responsable del proyecto, quien tomará todas las medidas necesarias para cautelar el adecuado tratamiento de los datos, el resguardo de la información registrada y la correcta custodia de estos. **Las video-grabaciones se usarán estrictamente para analizar las actividades del profesor determinadas en el proyecto. En ningún momento se mencionará el centro escolar y el aula de los estudiantes participantes.**

El investigador Responsable del proyecto asegura la **total cobertura de costos** del estudio, por lo que la participación no significará gasto alguno. Por otra parte, la participación en este estudio **no involucra pago o beneficio económico** alguno.

Si presenta dudas sobre este proyecto o sobre su participación en él, puede hacer preguntas en cualquier momento de la ejecución del mismo. Es importante que usted considere que la participación en este estudio es **completamente libre y voluntaria**, y que tiene derecho a negarse a participar o a suspender y dejar inconclusa la participación cuando así se desee, sin tener que dar explicaciones ni sufrir consecuencia alguna por tal decisión.

Desde ya se agradece su participación.

Gonzalo Espinoza,

Investigador Responsable

Consentimiento Informado de Participación en Proyecto de Investigación Dirigido a: Profesor(a)

Mediante la presente, se le solicita su autorización para participación en estudios enmarcados en la investigación de tesis Doctoral "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre el concepto de función. Un estudio de caso", para el programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la P. Universidad Católica de Valparaíso, a cargo del profesor Sr. Gonzalo Espinoza.

Dicho Proyecto tiene como objetivo principal identificar y comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de función que se manifiesta durante su enseñanza. En función de lo anterior es pertinente la participación de su pupilo en el estudio, por lo que mediante la presente, se le solicita su consentimiento informado.

Al colaborar usted con esta investigación, deberá **participar en entrevistas y las grabaciones de clases de matemáticas en su calidad de profesor**, lo cual se realizará mediante **cámara de video**. Dicha actividad durará aproximadamente **4 semanas, será realizada en el centro escolar, durante la jornada escolar**.

Esta investigación espera contribuir a la caracterización del conocimiento especializado de profesores de matemática sobre la enseñanza de las funciones y a la formación de los futuros profesores de nuestro país, por lo que los beneficios reales o potenciales que usted podrá obtener de su participación en la investigación es **la aportación a la generación del conocimiento científico**. Además, la participación en este estudio no implica ningún riesgo de daño físico ni psicológico para usted, y se tomarán todas las medidas que sean necesarias para garantizar la **salud e integridad física y psíquica** de quienes participen del estudio.

Todos los datos que se recojan, serán estrictamente **anónimos y de carácter privados**. Además, los datos entregados serán absolutamente **confidenciales** y sólo se usarán para los fines científicos de la investigación. El responsable de esto será el Investigador Responsable del proyecto, quien tomará todas las medidas necesarias para cautelar el adecuado tratamiento de los datos, el resguardo de la información registrada y la correcta custodia de estos. **Las video-grabaciones se usarán estrictamente para analizar las actividades del profesor determinadas en el proyecto. En ningún momento se mencionará el centro escolar y el aula de los estudiantes participantes.**

El investigador Responsable del proyecto asegura la **total cobertura de costos** del estudio, por lo que la participación no significará gasto alguno. Por otra parte, la participación en este estudio **no involucra pago o beneficio económico** alguno.

Si presenta dudas sobre este proyecto o sobre su participación en él, puede hacer preguntas en cualquier momento de la ejecución del mismo. Es importante que usted considere que la participación en este estudio es **completamente libre y voluntaria**, y que tiene derecho a negarse a participar o a suspender y dejar inconclusa la participación cuando así se desee, sin tener que dar explicaciones ni sufrir consecuencia alguna por tal decisión.

Desde ya se agradece su participación.

Gonzalo Espinoza,

Investigador Responsable

Modelo de Aceptación de participación en la investigación

Fecha_________________________

Yo____, en base a lo expuesto en el presente documento, acepto voluntariamente participar en la investigación "Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemática sobre el concepto de función. Un estudio de caso", conducida por el profesor Gonzalo Espinoza, candidato a doctor del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

He sido informado(a) de los objetivos, alcance y resultados esperados de este estudio y de las características de mi participación. Reconozco que la información que provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y anónima. Además, esta no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio.

He sido informado(a) de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento y que puedo retirarme del mismo cuando así lo decida, sin tener que dar explicaciones ni sufrir consecuencia alguna por tal decisión.

De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo contactar al profesor Gonzalo Espinoza al correo electrónico gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Entiendo que una copia de este documento de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar al Investigador Responsable del proyecto al correo electrónico anterior.

Nombre y firma del participante	Gonzalo Espinoza Investigador Responsable

Anexo 3: Invitación al profesor para participar de la investigación y la carta enviada al director del establecimiento

Carta a profesor participante

Estimado/a Profesor/a

Esperando se encuentre muy bien, quisiera comentarle que este 2015 comienza mi proceso de tesis doctoral en Didáctica de la Matemática, donde pretendemos identificar y caracterizar el conocimiento del profesor, especializado para la enseñanza de la matemática, de manera particular sobre el concepto de *función.* No pretendemos hacer evaluación o crítica sobre el conocimiento de los profesores participantes, más bien intentaremos comprender aquel que es evocado con la intención de enseñar este concepto.

Nos enfocamos en profesores destacados, reconocidos por sus pares, jefes y estudiantes como buenos profesores, esta es la razón que me dirige a usted para consultarle por su interés y posibilidades en apoyarnos en esta investigación como profesor de aula.

Esta investigación proyecta la recolección de datos, lo que implica registrar (audio y/o video) de sesiones de clases, entrevistas personales, revisión de instrumentos de planificación y evaluación, entre otros. Todo con un carácter confidencial y anónimo de requerirse. Para ello es necesario que usted, como profesor de aula esté a cargo del curso y unidad donde comienza el estudio de este objeto matemático.

Esperando su respuesta y atento a cualquier inquietud, me despido.

Gonzalo Espinoza V.
Profesor de Matemáticas
Dr. (c) Didáctica de la Matemática

Carta a director de establecimiento

Señor XXX YYY

Director Académico

(institución)

En el desarrollo de mi tesis de doctorado en Didáctica de la Matemática en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso se aborda el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, identificando al profesor como un profesional de la enseñanza de la matemática. En este marco, la observación de sesiones de clases de profesores destacados tanto por sus rendimientos, los logros en sus estudiantes y el reconocimiento entre sus pares es un factor fundamental que permite pesquisar características del conocimiento antes indicado.

Por lo anterior es que mediante esta carta solicito a usted la autorización para acceder al establecimiento a su cargo y a las sesiones de clases del **PROFESOR XX**, en los cursos **(CURSOS),** en el horario en que el docente tenga asignado a las clases de matemáticas para así videograbar las sesiones correspondientes a la enseñanza del concepto de *función matemática.* La duración de la grabación será hasta que la profesora **(Apellido profe)** concluya la enseñanza de este objeto de estudio, de acuerdo a su planificación. El acceso a datos adicionales como estructura de la planificación y evaluación serán coordinados directamente con el profesor.

Cabe destacar que esta observación y registro son de carácter no participativo, por tanto no se interviene en el normal desarrollo de las sesiones de clases, y que los datos recolectados serán utilizados exclusivamente para esta investigación doctoral, resguardando la identidad tanto del establecimiento, como de los estudiantes y sobre todo del docente protagonista.

Las transcripciones y análisis de los datos serán comunicados al docente para que confirme que ellos se apegan a la realidad, pudiendo eventualmente realizar algún comentario respecto a esta información.

Esperando tenga buena acogida de mi petición, se despide,

Gonzalo Espinoza V.
Profesor de Matemáticas
Licenciado en Educación
Magister en Matemáticas
Candidato a Doctor en Didáctica de la Matemática
P. Universidad Católica de Valparaíso.

Anexo 4: Protocolo de las entrevistas

Entrevista 1

Utiliza clip C1 28 agosto 1.MTS [min 13:15]

¿Cuál es el motivo de hacer un repaso del plano cartesiano y de los cuantificadores antes de iniciar el estudio de las funciones?

Sobre la definición:

¿Cómo define una función?

Esta definición ¿es la misma que da en clases?

> Como una correspondencia de elementos, elementos de dos conjuntos en la que a cada elemento de un conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. Lo voy a escribir [en la pizarra] "es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos (no vacíos), A y B tales que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada, B".

¿Qué dificultades presentan los estudiantes cuando se les presenta esta definición?

* Se dice "previo a darles más nombres". El lenguaje técnico constituye un

Si un estudiante dice no comprender la definición dada en clases, ¿qué podría hacer usted?

¿Le propone una definición alternativa?

¿Qué ocurría si el conjunto A fuese vacío?

Los conjuntos A y B, ¿pueden ser cualquier tipo de conjuntos?

Sobre la analogía:

¿Cómo surge la relación entre la función y la máquina lavadora?

¿Es una comparación habitual en sus clases? ¿por qué? ¿es parte del currículum o programas oficiales?

¿De qué forma esta relación da cuenta de la función como una máquina?

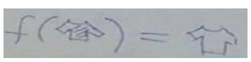
¿Qué consideró para proponer esta comparación? (contexto familiar, relación entrada salida, componentes de la función, etc.)

¿La máquina lavadora es una función?

¿Qué características o componentes de la función resalta la máquina? y

¿Cuáles quedan ocultos con esta comparación?

¿Qué representa y cuál es la intención de la siguiente escritura?



¿Cuál es la noción de función que pretende transmitir con esta comparación entre función y máquina de lavar?

¿Hay diferencia entre lo que usted enseña y lo que aprenden los estudiantes?

¿Qué espera que comprendan (qué comprenden) sus estudiantes con esta comparación?

¿De qué manera ayuda en el aprendizaje a los estudiantes la comparación entre la lavadora y la función? (Al inicio de la unidad o en etapas posteriores)

¿Qué ventajas y/o desventajas para la enseñanza-aprendizaje observa en la comparación presentada?

Sabemos que hay ocasiones en que la lavadora no entrega la ropa limpia. ¿Qué ocurre con esas las "malas experiencias" de los estudiantes con las lavadoras respecto al concepto de función?

Si pudiese utilizar otra comparación para la función, ¿cuál sería?

Si no se recurre a una máquina, ¿de qué otra forma se puede comprender el concepto de función?

¿Qué relación ve entre la comparación de la función como máquina con los Objetivos de aprendizaje propuestos en el currículum?

¿Cómo responde esta comparación a los OA?

Transcripción Entrevista 1

1	1	E: Vamos a ver un extracto de tu clase. [se le presenta el extracto de clase en que presenta la comparación entre función y lavadora]
	2	Esta es la primera clase que se destina a la enseñanza del concepto de función. Previo a eso, tú haces un repaso de cuantificadores, lenguaje de conjunto, del plano cartesiano.
2		PA: Un poco de la simbología que se va a utilizar y el plano cartesiano.
3		E: ¿Por qué haces ese repaso?
4		PA: Porque dentro de las cosas que se van a hacer con funciones es llevar la representación gráfica de la función en el plano cartesiano. Por lo tanto tengo que chequear que se acuerden de los puntos en el plano.
5		E: ¿Por qué mencionas los cuantificadores?
6	1	PA: Los cuantificadores porque hago la explicación simple, luego hago una explicación más formal matemática, tratando de hacer la comparación entre...
	2	Siempre hago una traducción del lenguaje formal matemático a un lenguaje simple que ellos lo puedan comprender. En esta ocasión, yo partí con un lenguaje simple y después lo llevé a un lenguaje matemático. ¿Cómo decíamos eso en matemática?
7		E: El lenguaje simple, ¿qué es?
8	1	PA: La traducción del concepto, la traducción de la definición matemática.
	2	Cuando tu tienes una definición matemática, de repente es muy dura para que alumnos de primero medio la pudieran entender, entonces uno hace una explicación de eso, utilizando sinónimos, de tal forma que ellos puedan comprender lo que ahí está escrito, lo que quieres decir.
9		E: Esta traducción, ¿A qué lenguaje es? ¿qué tipo de sinónimos buscas?
10	1	PA: Trato de llevarlos a relacionarlo con lo que ellos saben, ya sea matemático en ciertos puntos o incluso, en extremos, a simplificar o a hacer esta comparaciones con situaciones de la vida cotidiana como el tema de la lavadora.

	2	El tema de ir a la raíz... función no solo se ocupa en matemática, sino que dónde lo ocupan ellos en la vida cotidiana.
	3	Todos los artefactos que ellos ocupan tienen una función que realizar.
11		E: En ese caso, la palabra "función" la estas reemplazando por "rol", porque dices ¿Cuál es la función de la lavadora? En la palabra "función" tienes dos significados; una que es la función matemática, la que estás enseñando y la otra es la función pero como el rol.
12		PA: No sé si ver el rol de... no sé si el rol sea la palabra adecuada para decir lo que hace un artefacto eléctrico.
13		E: Entonces ¿la función es lo que hace?
14		PA: Claro.
15		E: Y ¿por qué haces esta traducción?
16	1	PA: Porque el concepto y todo lo que tiene que ver con función es abstracto, es complejo. Tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana, pero que si tú lo usas para ese nivel, incluso para alumnos de la universidad, no es un concepto que sea fácil de interiorizar. No es un concepto fácil de captar.
	2	Pueden captar la mecánica que puede ir detrás, pero lo que es el concepto de una función, lo que hace, las aplicaciones de cada una de estas funciones yo creo que tú sales del colegio sin entender funciones.
	3	Tú puedes decir "una función es esto"... pero es que las funciones son más que ese como operador. Tú puedes ver hasta como un operador a una función, y te pones a calcular imágenes y pre imágenes, puedes hacerlo súper algebraicamente, pero va un poco más allá de eso, de como lo relaciones ese nuevo concepto con todo lo anterior que se ve. Cómo vas haciendo una continuidad de los contenidos y los vas enlazando.
	4	Por ejemplo, justo antes habíamos visto ecuaciones e inecuaciones. ¿Para qué me sirve eso? Ahora se usa...
	5	Y ¿para qué me sirve funciones?
	6	Bueno, está todo modelado con funciones. Un montón de cosas que se modelan.

	7	Ese es el objetivo. De hecho, es el rol principal por el que se ve funciones con el tema de modelación.
17		E: ¿Cómo entiendes la modelación?
18		PA: Situaciones, tratando de hacerlo más general...
19		E: ¿Qué sería, por ejemplo modelar?
20		PA: Ver gráficamente el comportamiento de ese "algo" y ver si puedo asociar ese comportamiento a una expresión que me de todos eso datos.
21		E: ¿Una expresión algebraica?
22	1	PA: Si. es una expresión que me genera el comportamiento de algo o de una determinada situación.
	2	Es que son tantos tipos de funciones y cada una modela distintas cosas. Es muy amplio.
	3	Si tu quieres saber cómo se comporta el crecimiento de cierto "bicho", puede estar asociado a un cierto tipo de función.
	4	Este tema de modelamiento ni siquiera es que el comportamiento de ese bichito sea idéntico, o sea se comporte como esa función, sino que sea similar a ese comportamiento de lo que te genera la función.
	5	Los parquímetros de los estacionamientos; ahí hay una función que te está modelando y que, de hecho, es una de las funciones que menos se "pesca" la función parte entera y ahora es la que nos "pega más palos" [más importante]
23	1	E: Hablabas recién de las dificultades. Decías que del colegio salían sin entender el concepto de función. Llegaban a la universidad y también era complejo comprender el concepto de función por lo abstracto que es.
	2	¿Cómo sabes que existen esas dificultades? ¿Qué asuntos les cuesta comprender a los estudiantes
24	1	PA: No sé si es el concepto, sino todo lo que tiene que ver con funciones. De repente, la simple idea de relacionar elementos de un conjunto con otro con ciertas condiciones, eso lo pueden comprender si tú lo explicas así. Incluso, lo que significa una imagen. La podrían calcular. Podrían, algunos, llegar a entender eso.

	2	Aquí encontré una dificultad; que un punto pertenece a una función si es que la segunda coordenada es la imagen de la primera. Eso cuesta un montón que lo entiendan.
	3	Tiene que ver con que no solamente ves imágenes y pre imágenes y haces un gráficos de la función. Tú ves características de las funciones, por ejemplo, que sea inyectiva. Allí necesitas lógica porque hay una implicancia. También, dentro de eso, juegas con los valores de verdad; porque se descarta, pero no se explica que, si el antecedente es falso, la implicancia es verdadera. Por lo tanto ese caso no se analiza y por eso se considera la primera como verdadera... en la inyectividad.
	4	Ese tipo de cosas te vas encontrando. Funciones como tal, involucra un montón de cosas. Aquí estamos involucrando temas de lógica, conjuntos, tienes cuantificadores...
25		E: ¿Todo este conglomerado de conocimientos es lo que produce la dificultad?
26	1	PA: Si. ¿Por qué? Porque para calcular dominio, tú tienes que saber muy bien resolver inecuaciones. Para calcular el recorrido, también tienes que saber... tienes que saber despejar muy bien, tienes que saber agregarles condiciones a una expresión, y ya dentro de las habilidades cuesta más, porque supone que tienes un dominio no maximal. Ahí le estás agregando condiciones al Y, con las condiciones que tiene X.
	2	Entonces, son cosas que van haciendo que incluso esa parte, que puede ser algebraica ya se vaya complicando.
27		E: **Y ¿qué ocuure cuando las funciones no tiene una expresión algebraica**? Por ejemplo, funciones que no se puedan describir mediante una expresión algebraica, mediante una igualdad f(x) igual a algo.
28		PA: No sé a cuáles te refieres
29		E: No conoces ese tipo de funciones.
30		PA: No.
31		E: **¿Cómo defines tú una función?**

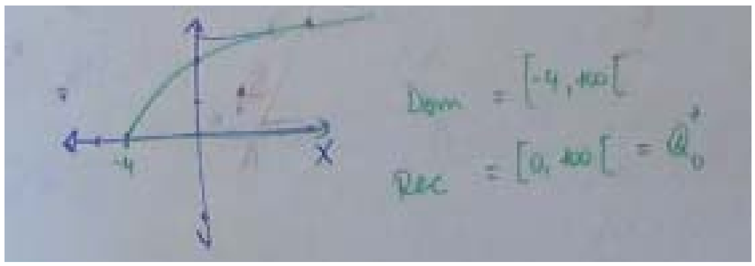
32		PA: La defino como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, en donde tenemos un conjunto de partida y un conjunto de llegada y que a esa correspondencia, que podemos establecer muchas correspondencias, pero no todas esas correspondencias que tu puedes hacer van a ser funciones, entonces a esta correspondencia uno le pone condiciones. Esas condiciones son: a cada elemento en el conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.
33		E: Cuando tú presentas esta definición, ¿les provoca alguna dificultad a los estudiantes?
34		PA: No. De hecho, por lo que puedo ir viendo es que es la parte que mejor comprenden dentro de funciones. Es después que se empiezan a complicar.
35		E: **Cuando un estudiante dice que no entiende la definición que acabas de dar, ¿qué haces?**
36		PA: Siempre busco ejemplos. Mis ejemplos son "tontos". Incluso en la Universidad usé el de la lavadora. El tacho de la ropa sucia, conjunto de partida. Tacho de la ropa limpia, conjunto de llegada. La ropa sucia pasa por la lavadora y llega al otro lado. Está esto que trato de relacionar con elementos o ejemplos que los puedan visualizar, para luego, a esos elementos ponerles un objeto abstracto que es una x, una f, una y
37		E: Es importante que quienes escuchen este ejemplo o esta comparación de la función con la lavadora conozcan la lavadora ¿o no es necesario?
38		PA: Si no la conoce, se cambia el ejemplo. La idea es que sea algo que todos conozcan o, si no la han ocupado, han visto cómo se ocupa.
39		E: Qué otra comparación podrías hacer si no es la lavadora?
40		PA: Una cafetera.
41		E: ¿Cómo sería lo de la cafetera? Se te ocurre en estos momentos o ya lo tenías pensado?

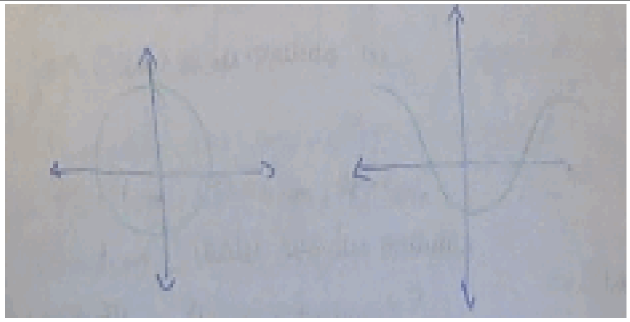
42		PA: No, se me ocurre ahora. Esto de aquí te ayuda tanto al tema del dominio de la función. Por ejemplo, el dominio de la función son las restricciones que tiene x, de donde puedes sacar los x para meterlos en la función. Estamos claros que no puedo tomar un tostador y meterlo a la lavadora, entonces el tostador no está en el conjunto de partida, no está en el dominio de la función. No puede ir en el tacho. Entonces, hay ciertos elementos que pueden pasar por esa función y hay otros elementos que no pueden pasar por esa función.
43		E: Al definir la función dices: "a cada elemento del conjunto de partida". ¿Cuál es la diferencia entre ese conjunto de partida y el dominio?
44		PA: El conjunto de partida y conjunto de llega es para la definición más simple y después estos conjuntos pasan a tener el rol que les corresponde dentro de la función como dominio y co-dominio en una segunda vuelta.
45		E: El conjunto de partida, **¿Cómo se relaciona con el dominio de la función?**
46		PA: ¿Me estás preguntando si lo considero como el mismo conjunto?
47		E: Si. ¿Son el mismo conjunto?
48		PA: Si.
49		E: ¿Y en el conjunto de llegada con el recorrido?
50		PA: No son necesariamente el mismo.
51		E: En esa definición de función que das, **¿podrías plantear alguna definición alternativa? ¿Conoces otra definición de función?**
52	1	PA: Llevo tanto tiempo usando esa definición que no me he planteado presentar otra.
	2	Porque, como los conjuntos son una idea intuitiva, puede ser la más simple.

53		E: En algún momento das la definición y cuando la vas a escribir en la pizarra dices que los conjuntos A y B, como conjuntos de partida y llegada, tienen que ser no vacíos. ¿Qué ocurre si A fuese vacío? o ¿Tienen alguna otra condición o pueden ser conjuntos arbitrarios?
54		PA: Si se supone que tú vas a establecer una correspondencia entre elementos, si no tienes elementos, ¿qué correspondencia vas a hacer?
55		E: hay función en ese caso no?
56		PA: No habría función, porque estas estableciendo una correspondencia, una relación entre... sino no tendría sentido si no tienes elementos que relacionar.
57		E: Sobre las condiciones de estos dos conjuntos, A y B, ¿ellos pueden ser cualquier tipo de conjunto? o ¿tienen que ser necesariamente numéricos, racionales o reales?
58		PA: No, porque yo puedo establecer una función y definir una en que tengo elementos que pueden ser letras y relacionarlo con un conjunto finito que sean números. Establecer pares ordenados que pertenezcan a la función, que te formen la función, establecer esa relación.
59		E: Mencionas los "pares ordenados" que no aparece dentro de lo que defines como función. ¿Cómo relacionas estos pares ordenados con la correspondencia?
60		PA: Eso es lo que me estas preguntando a mí y yo te respondo qué hago, pero esta traducción no se los muestro como pares ordenados, sino que se los muestro en monitos. En los diagramas tú estableces la correspondencia y haces la relación, a lo más escribes los elementos del conjunto de partida, del dominio. Incluso puedes establecer, con ese tipo de diagrama, la diferencia entre conjunto de llegada y recorrido, porque lo están viendo.

Entrevista 2

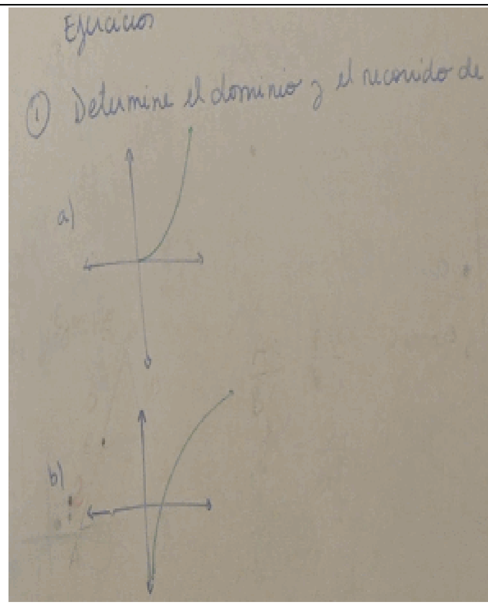
Subdominio	Pregunta
KoT Definiciones	**Definición** [dar la definición que el profesor propone en clases] una correspondencia de elementos de dos conjuntos no vacíos, en la que a cada elemento de un conjunto de partida, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada ¿Qué definición alternativa para la función conoce? ¿Qué diferencia existe entre correspondencia y función? ¿Qué ocurre si los conjuntos son vacíos? ¿De qué manera están vinculados los conjuntos Dominio y Recorrido en una función? ¿uno de ellos condiciona al otro?
KoT Significados	¿Qué significado le atribuye a la función? ¿Qué es o qué representa una función?
Reg. Rep.	¿Qué representación considera usted que entrega mayor información sobre una función? ¿A qué se debe? ¿Qué representación cree usted es mejor para que los alumnos comprendan el concepto de función? **¿Qué tipos de representaciones para la función conoce? (la tabla de valores no aparece, solo un indicio de tabla al calcular 3 imágenes)** En el caso de la representación gráfica de la función lineal-afín, ¿Por qué necesita solo dos valores o puntos para graficar una función afín o lineal?
Fenom	[658- 660]

	Un estudiante le pregunta para qué sirven las funciones y usted señala que sirven para modelar. ¿Qué es lo que modelan? Si pudiese profundizar la respuesta al estudiante, ¿qué le diría?
Procedimientos	Cuando se encuentra determinando el dominio de una función surge la situación de "dividir por 0". ¿Por qué no se puede dividir por 0?
	¿Como determina el dominio o recorrido de una función gráficamente? (Sabiendo que se grafica solo una parte de la función) 
	[194; 560] Señala que usa letras diferentes para nombrar funciones diferentes, pero ¿Cuándo efectivamente dos funciones son iguales o diferentes?
KoT definiciones	¿Por qué señala que la gráfica de la función afín no pasa por el origen? [944; 953; 961; 965] Usted señala que en la función afín estudiada, los coeficientes a y b no son 0, ¿qué tipo de función es f(x)=ax+b cuando a y b=0? ¿qué significa que una función sea lineal y qué representa la linealidad de la función?
KPM	Frecuentemente utiliza lenguaje simbólico para definir los objetos matemáticos. ¿Cuál es el papel que cumplen los símbolos y el lenguaje formal en matemáticas?
KPM	Al elaborar ejemplos y representaciones de funciones usted solicita a sus estudiantes decidir si esas representaciones son o no funciones.

	 Señala que se debe tener presente la definición de función para poder decidir correctamente. Según usted, ¿esto corresponde a un modo de proceder en matemática? (práctica habitual) ¿lo consideraría como una forma de comprobar o demostrar?(diferencia entre ambos?) ¿Cuál es el rol de la definición del concepto de función para decidir si una correspondencia es o no una función?
	¿Qué significa definir en matemáticas? ¿Cómo se define en matemáticas? ¿cuáles son las características de una definición? ¿Cuál es el rol de las definiciones en la construcción de conocimiento matemático? Cuando estudia la inyectividad, $\forall x_1, x_2 \in Dom\, f \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ¿Esto corresponde a una definición o una propiedad? ¿cuales son las características de la definición de la inyectividad? Señala la definición de la inversa de una función como: *Arturo: Def. Una función f de A en B (f: A-->B) tiene su correspondiente función inversa (f^{-1}: B-->A) si y solo si f es biyectiva.*

	Frente a esto, ¿cómo diferencia entre la definición de inversa de una función y la propiedad de existencia de funciones inversas cuando la función es biyectiva?
Formas de validar	Al demostrar que una función es o no inyectiva asume que f(x1)=f(x2), señalando que x1 y x2 son elementos cualquiera del dominio de f. a) ¿Por qué deben ser cualquiera? b) ¿A qué se debe este supuesto f(x1)=f(x2)?
	Al hacer esta demostración y explicarla a sus estudiantes señala que " ***Para poder demostrarlo, en palabras simples y simplificando un montón de detalles que hay detrás, es que asuma que se cumple esta condición que está acá, y si con esa yo llego a concluir que se cumple que x1 es igual con x2, yo puedo decir que la función es inyectiva."*** ¿Cuáles son esos detalles que señala? ¿Cuál es el método de demostración que utiliza?
KSM	¿Cómo se relacionan las funciones con las ecuaciones e inecuaciones? ¿Qué importancia tienen estos contenidos con el estudio de la función?
	Al realizar el procedimeinto para determinar el recorrido, multiplica por (x-1) y explica lo realizado con otra ecuación. PA: si yo multiplicara, y=2x/5, y multiplicara por 5 te quedaría 5y=2x, no? ¿Cómo se relacionan estos dos procedimientos?
	¿Cómo se conecta el estudio de las funciones con el estudio de otros objetos o conceptos matemáticos que son más complejos? ¿Cuáles serían esos objetos ?

KSM C. trans	¿Cómo entiende usted los conceptos de función afín y de recta euclidiana? ¿Cómo establece usted una conexión entre la recta euclidiana y la función afín?
KMT	¿Cómo definiría su estrategia para la enseñanza del concepto de función? (explicar lo que es la estrategia en caso de ser necesario) ¿Cuál es la importancia de los conocimientos previos para la enseñanza de la función (o en general en matemáticas)?
	¿Se basa en alguna teoría de enseñanza para enseñar el concepto de función?
	¿Cuál es el rol que le asigna a los ejemplos en la enseñanza de la función? ¿Cómo selecciona los ejemplos y representaciones que muestra a los estudiantes? ¿La "maquina lavadora" es uno de estos ejemplos?
	¿Cuál es la utilidad para la enseñanza la inclusión de este tipo de comparaciones?
	La traducción de los enunciados o definiciones es un asunto que ha señalado en varias ocasiones. Por ejemplo, cuando define el dominio de una función señala [598] *Recuerden que cuando yo les escribo algo de este tipo, lo que yo les pido es que 'abajito', con lápiz grafito o con otro color, escriban la traducción*. ¿Cuál es la importancia de estas traducciones?
	[1276] [25 septiembre 44:15] propone dos gráficos de funciones en los que se debe indicar el dominio y recorrido.

<table>
<tr><td></td><td>

¿Por qué elige estos dos gráficos?</td></tr>
<tr><td>recursos</td><td>¿Qué ventajas o limitaciones tiene el usar la pizarra y plumón en la enseñanza de las representaciones de la función?

¿Conoce o utiliza algún otro recurso (como software o materiales) que potencie la enseñanza de la función?
(qué características poseen)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>KMLS
secuenciación</td><td>Usted dedica tiempo de la primera clase a recordar plano cartesiano, puntos en el plano, lenguaje y simbología matemática entre otros. ¿Cómo sabe que son conocimientos previos de los estudiantes?</td></tr>
<tr><td></td><td>¿Por qué señala como dominio de las funciones a los racionales o subconjuntos de ellos?</td></tr>
<tr><td>Secuenciación</td><td>¿Qué conocimientos sobre ecuaciones racionales tienen y cuales deben tener los estudiantes del curso para poder determinar el recorrido de una función?</td></tr>
</table>

	para determinar el recorrido ahora, como el recorrido es que tengo que y es la misma función, entonces decimos y va a ser la función, pero la función quién es? 2x/(x-1). *Este tipo de expresiones, esto yo se los voy a mostrar con cosas que podemos hacer pero no lo voy a hacer hasta un tiempo más que yo se los voy a pedir hacer a ustedes.* ¿Por qué no lo pueden hacer?
	¿Cuáles son los contenidos que siguen en el estudio de la función en este nivel?
Expectativas app	¿Sabe cómo se propone el estudio de la función en el programa de estudio del nivel?
	¿Por qué enseña la inyectividad y epiyectividad en este nivel?
	¿Cuáles son los niveles de abstracción requeridos para comprender las diferentes representaciones presentadas?
KFLM	¿Conoce y aplica alguna teoría relativa al aprendizaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función?
KFLM	En [456 - 458] sobre la facilidad de encontrar imágenes y pre-imágenes ¿a qué se debe esa facilidad? ¿Qué estrategia o procedimiento privilegian sus estudiantes para resolver las ecuaciones más simples para encontrar la pre imagen de un número? (el "tanteo") [459] ¿Qué tan habitual es "el tanteo" o estimación en los estudiantes para la determinación de imagen y pre-imagen?
fortalezas y dificultades	¿Qué tan simple o complejo resulta para los estudiantes ubicar puntos en el plano? (0,-3); (-3,0); (x,f(x))

	El 0 y el 1 son números que usted elige para evaluar en las expresiones algebraicas, ya sea para obtener la imagen de un elemento o para graficar una función afín. ¿Por qué utiliza estos números y no otros?
	[1906 ;1936] Se dice que la función inversa está definida "al revés". Este concepto ¿es usado frecuentemente por los estudiantes para referirse a la función inversa? ¿Cuál es la intención de utilizar esta palabra?

Transcripción entrevista 2

1		E: La entrevista pretende indagar en algunos puntos por clasificar desde el marco con que estamos analizando los datos. Al iniciar la enseñanza de la función das una definición del concepto, dices: "es una correspondencia de elementos de dos conjuntos no vacíos, en la que cada elemento de un conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada". ¿Conoces alguna definición alternativa para el concepto de función?
2		PA: Sé que existen pero me quedé con ésta por la simplicidad. Si me preguntas si me acuerdo, no, no me acuerdo.
3		E: Las que sabes que existen, ¿cómo las conoces? Y ¿de dónde las conoces?
4		PA: De la universidad. Esta [definición] es una modificación porque antiguamente se veía la función como un caso especial de una relación.
5		E: Acá la defines como correspondencia. ¿Cuál es la diferencia entre correspondencia y función?
6		PA: Como paso previo, nos vamos al concepto de relación entre elementos de conjuntos para relacionar cosas. Una relación la puedes establecer entre distintos elementos sin tanta condición como en una función.
7		E: Tienes: Relación, Correspondencia y Función.
8		PA: Una relación es una correspondencia entre elementos. Cuando a esa correspondencia le ponemos más condiciones tenemos, por ejemplo las funciones.
9		E: ¿Y las relaciones de equivalencia, por ejemplo, también están consideradas para poder definir funciones? o ¿son relaciones de otro tipo?
10		PA: ¿Me preguntas desde el punto de vista matemático?
11		E: Si.
12		PA: Hay distintos tipos de relaciones, dependiendo de las condiciones que le pones a esa relación.
13		E: ¿Como cuáles?

14		PA: Por ejemplo, cuando hablamos de relaciones de equivalencia, para que sea una relación de equivalencia cumple con ciertas condiciones. Como se relacionan elementos pero bajo ciertas condiciones, ahí se le llama relación de equivalencia.
15		E: ¿Cómo pasas de las relaciones a la función?
16		PA: Una función es un tipo de relación.
17		E: ¿Cómo entra la correspondencia?
18		PA: Creo que el cómo hacer funciones sin pasar por relaciones, creo que se utilizó la palabra correspondencia como un sinónimo para relacionar elementos.
19		E: Es la semántica.
20	1	PA: Porque yo puedo relacionar distintos objetos pensando en cómo llevar esta idea a los alumnos.
	2	La idea de hacer corresponder un objeto con otros para ellos [los estudiantes] es más intuitivo, es natural. Está relacionado con el relacionar.
21		E: La relación es el vínculo, ¿Y la correspondencia?
22		PA: También.
23		E: Los conceptos de Correspondencia y Relación ¿serían sinónimos?
24		PA: Si.
25		E: Cuando defines la función, dices "Son conjuntos no vacíos". ¿Qué ocurriría si los conjuntos fuesen vacíos?
26		PA: No tendríamos elementos para relacionar, para hacer corresponder.
27		E: ¿No sería una función?
28		PA: Creo que alguna vez los mismos niños preguntaron por qué eran no vacíos. Hay que imaginarse qué pasa si no tuviéramos elementos con los que corresponder, y pensando en que si se pueden relacionar “no elementos”? No logra tener sentido, no hay una relación, y si no hay una relación, no va a haber una función.
29		E: De esta definición salen los conceptos de dominio, recorrido, codominio. Hay alguna dependencia entre estos dos conjuntos, es decir, ¿el dominio está condicionado por el recorrido de la función o al revés, el recorrido está condicionado por el dominio de la función?

30		PA: Si. El recorrido es el conjunto de los elementos que tienen imagen, vienen del dominio. Por lo tanto, hay una relación entre ese conjunto y el dominio.
31		E: ¿Hay una relación de dependencia?
32		PA: Si, si dependen. El recorrido del dominio.
33		E: ¿Qué ocurre en los casos en que pongo funciones definidas de A en un intervalo?
34	1	PA: También se condicionan. La más natural es porque los elementos del dominio, este elemento va a pasar por la función y va a caer en el conjunto de las imágenes, entonces hay una relación de la que dependen. Este elemento va a estar aquí si es que estaba acá primero. Ahí hay una dependencia.
	2	La dependencia al revés [del dominio hacia el recorrido], si yo achico el recorrido, también va a ser afectado el dominio de la función.
35		E: Pensaba en el caso de la función logaritmo natural. Qué ocurre si esta función se define con conjunto de llegada los reales extendido [incluyendo los infinitos], ¿cuál es el dominio de la función?
36		PA: Tendría el mismo del logaritmo natural. A veces uno no alcanza a hacer ese tipo de análisis con los chicos del colegio.
37		E: Menos cuando estas estudiando el concepto de función en una etapa inicial. ¿Le puedes asignar algún significado a la función? ¿qué es una función? No como la definición de la función. Por ejemplo, la derivada tiene varias formas de poder verse: como la variación, como la pendiente de la recta tangente, etc. Tienes varias formas de ver la derivada. En el caso de la función, ¿tienes alguna otra forma de ver la función que no sea la correspondencia como la defines?
38		PA: Podría ser como un operador. Como un objeto matemático que…. [piensa] Oh, qué difícil. Estaba pensando en mi idea de máquina, de funcionamiento, de hacer pasar por un proceso al objeto o al elemento. En eso estaba pensando.

39		E: ¿Qué sería la función ahí?
40		PA: No sé cómo definir ese algo que modifica o a veces no, porque como ingresa es como sale…. No sé. Creo que tengo una idea pero no podría ponerle la palabra de lo que estoy pensando, lo que estoy imaginando.
41		E: ¿Podrías describirlo?
42		PA: Estaba tratando de definirlo por el rol que hace.
43		E: ¿Una función sería “lo que hace”?
44		PA: Pensé en llamarle “operador”, pero pensándolo en forma algebraica como “a*b= a algo”
45		E: Como operaciones “inventadas”, operaciones binarias
46		PA: Exactamente. Estaba tratando de definirlo algebraicamente, inventando algo. Definirlo algebraicamente como una especie de operación, por eso como un operador, pensando en una relación entre elementos. Está la idea, pero no la puedo concretar porque nunca me había puesto a tratar de definirla de otra forma.
47		E: Eso sería la misma idea que cuando piensas en la máquina o ¿Sería otra forma de acercarse a la función?
48		PA: En una primera instancia pensé en la máquina, el proceso, pero lo pasé al rol algebraico de la función. Pensaba en eso para cambiarle el sentido. No como una correspondencia entre elementos de conjuntos, sino como un operador algebraico.
49		E: La suma, por ejemplo, ¿sería una función?
50		PA: No. En cómo lo estoy pensando, era un operador, no como una operación. Tengo una idea, pero no puedo sacarla. Tengo que darle más vueltas.
51		E: De estas formas de acercarse a la función, ¿cuáles de ellos parecen en tus clases? ¿Cómo presentas la función?
52		PA: Se pasa primero por el concepto de función. Luego, al mostrar funciones, ya sea con ejemplos concretos, pasamos a los ejemplos matemáticos.

		Como le ponemos nombre y se lo aplicamos a este elemento, que vamos a llamar x. Esto, como cumple una función, ¿qué le hace a este elemento? ¿Cómo va a pasar por esta máquina? Haciendo el nexo entre lo concreto y lo matemático. Por ejemplo, quiero que esta máquina los duplique. ¿Cómo escribo eso? 2x. Todo el que entra, se va a duplicar. Si alguien ingresa 5, va a salir 10. O, a todo el que ingrese, le voy a restar 1. Entonces, es cómo vamos traduciendo o llevando esta expresión algebraica asociada a la función que tenga un sentido, ¿qué significa eso? ¿Qué significa que f(x)=x-1?, que a todo el que ingresa, le quitamos 1
53		E: Esta es la idea de la máquina.
54		PA: Claro. Lo que significa es relacionarlo con lo anterior que, al fin de cuentas, es evaluar un valor, sacar la imagen es evaluar en la función, evaluar una expresión algebraica.
55		E: La evaluación de expresiones algebraicas, ¿Es un contenido que ellos estudiaron antes?
56		PA: Si. En ese curso se vio el año anterior.
57		E: Tú ¿usas ese conocimiento como base para la función?
58		PA: En un principio no se dan cuenta que está evaluando. Algunos si, otros no. Pues se hace con ejemplos que sean bastante obvios.
59		E: ¿Obvios para ellos?
60		PA: Si. Al final, uno termina diciendo ¿Qué estamos haciendo aquí? Estamos evaluando el número en esa expresión algebraica que está asociada a la función. Lo que pasa es que antes de funciones tienes que ver álgebra. Y cuando ves álgebra, pasan por conceptos básicos.
61		E: ¿Cuáles son esos conceptos?
62		PA: De coeficientes, evaluación. Eso se ve en 7º
63		E: ¿Ecuaciones también es algo previo?
64		PA: También es algo previo. Ecuaciones se ve desde más pequeños, desde 5º. Lo que va cambiando en las ecuaciones es el conjunto numérico donde resuelven las ecuaciones.
65		E: ¿Cómo es esa evolución de los conjuntos numéricos?

		Ya que cuando hablan del dominio, hablan de dominio como el conjunto Q.
66		PA: Ese es el contexto de ellos. Hasta ahí han llegado.
67		E: En ese curso ¿han trabajado solo Q o Q se ve antes? ¿Cómo progresan los sistemas numéricos para estos estudiantes?
68		PA: Resuelven en Naturales, después en los enteros. En 7º ya están en los enteros, en 8º también, y recién en primero racionales
69		E: ¿Y los números reales no los ven?
70		PA: Si. Al año siguiente, en 2º medio. No puedes hacer funciones reales en ellos.
71		E: ¿Estas son funciones racionales? ¿Cómo se entienden los intervalos que aparecen cuando escribes el dominio y el recorrido de las funciones?
72	1	PA: Lamentablemente, el programa está hecho así, porque no es el enfoque de las funciones como tal dentro del programa.
	2	El enfoque es que ellos aprendan que las funciones nos ayudan en un contexto cotidiano. Que hay funciones que solucionan las cuentas. Para allá va. Uno hace este previo para que el concepto matemático de función no quede solo en la aplicación.
	3	Si me pongo a analizar la idea que tienen los que hicieron el programa, en el programa de funciones se ve el concepto, pero no contextualizan en el conjunto. No está contextualizado, eso lo hice yo, por que yo necesitaba un contexto en un conjunto numérico donde trabajar con la función. Para mí, no tenía sentido.
	4	Ellos no tenían los números reales como tal, pero si sabían que hay intervalos. Ya se les había hablado de que existen más números.
73		E: ¿Había aparecido la idea de densidad?

74		PA: Se les dijo, saben que siempre hay… cuando se ven los conjuntos numéricos y pasamos a los racionales es cuando perdemos la idea de consecutivos y antecesor, porque no lo encontramos. Ahí aparece la idea de densidad, dentro de las características. No sé si les queda profundamente arraigada la idea, pero si estuvo dentro.
75		E: Hablas de la orientación del programa tienen que ver con la aplicación. La aplicación ¿está enfocada a las cuentas?
76		PA: No me acuerdo bien cuál es el objetivo de la función como tal, pero el enfoque general es interpretar información pensando en la incorporación de datos en estadística; cómo manejas datos y como manejas tu cotidianeidad, cómo la matemática está ahí.
77		E: Hay un estudiante que te pregunta ¿para qué sirven las funciones? Tú le dices "para modelar"
78		PA: Mi respuesta ahora es distinta. Es un poco más concreta. La idea de modelar está pues esa es la idea de función. Para qué me sirve esto no es solamente para las cuentas. Muchas de las cosas que nosotros manejamos tienen una función detrás, hasta el parquímetro está como función. Yo pondría como respuesta a esa pregunta, que en muchas situaciones cotidianas está detrás.
79		E: y ¿además del parquímetro?
80		PA: Contexto de temblores. También hay una función detrás para poder medir la intensidad.
81		E: ¿Conoces el modelo?
82		PA: alguna vez lo escribí.
83		E: En qué otra cosa?
84		PA: En la medición del PH.
85		E: Son cosas que se podrían estudiar en ese nivel?
86	1 2	PA: En ese nivel no. Quizás en el curso siguiente, por que ahí se ven logaritmos, tanto el PH como en la intensidad de los temblores. Las cuentas son lineales, pero hay un contexto que ello no se dan cuenta de lo que están cobrando. Ellos no miran las cuentas.

	3	Cuando tú les empiezas a decir que cobran por varias cosas, te terminan creyendo que cobran eso. Si no consumes agua, igual hay un cargo fijo que cobran. En el contexto telefónico también puede hacerse.
	4	Cuando recién se ven las primeras funciones que surgen son las función lineal, afín y constante.
87		E: Hay una clase donde se presenta la definición de la función, se da el diagrama sagital y se grafica una función afín. ¿Qué tipos de representaciones para las funciones conoces?
88		PA: Las que yo muestro, trato de hacer resúmenes del proceso, entonces hago el diagrama sagital diciendo, por ejemplo, 2x+1. Tomo un elemento y calculo su imagen. Luego, a nivel algebraico ¿cómo lo escribo? O puedo decir f(x)=2x-1 o llevarla al contexto f:A→B o de R en R, o de Q en Q, de x en 2x+1, y que estoy representando gráficamente en RxR o QxQ.
89		E: Aparece en ese paso de la expresión algebraica al plano el cálculo de imágenes. Pones pares ordenados. ¿eso sería otra forma de representarlos?
90		PA: Viene de una relación. Una relación es un conjunto. Tu puedes generar pares ordenados, pero acá no tienes eso, no pasas por ese estudio de Relaciones y tampoco tienes la idea de conjunto como tal, como escritura. El gráfico de f está formado por pares ordenados
91		E: ¿Qué diferencia hay entre el gráfico y la representación gráfica?
92	1	PA: Son dos cosas distintas. El gráfico es un conjunto de pares ordenados (x,y) tales que x pertenezca al dominio e y al recorrido.
	2	Yo paso a la representación gráfica de eso.
	3	Todo lo que hicimos en el diagrama sagital los vamos a llevar a otra representación, por ejemplo como una tabla. Estos elementos de los que tomamos para el conjunto de partida y en la segunda columna de eso ponemos lo que nos arrojan [en la función]. En algún momento de la clase yo digo (x,y) que pertenezcan a la función como un par.
93		E: Aparecen los pares, pero no parece la tabla.

94		PA: Para poder pasar [entre representaciones], tuve que pasar por una tabla para poder representarlo en el plano. Para pasar a la tabla, en ese instante ya pasé por el hecho de que y es la imagen del x. Ya se ha escrito (x,y) como pares. Esos son los que llevaba al plano cartesiano.
95		E: Cuando graficas una función lineal o afín dices que solo es necesario dos pares.
96		PA: Cuando ya se conoce la función y qué es lo que genera, decimos que su representación gráfica es una línea recta. Ahí me voy a los axiomas de geometría: Por dos puntos pasa una única recta. Entonces, si por dos puntos pasa una única recta, yo puedo tomar eso para solamente graficar dos pares.
97		E: ¿Eso sería en un contexto que es propio de la función o está fuera de ese tema?
98		PA: No es propio de la función, es una característica de la recta a nivel geométrico, más euclidiano que analítico. El contexto que yo doy es ese. Hemos pasado por graficar varios puntos, pero pensando en que a ellos yo ya les había hablado de axiomática. Con ese curso siempre hable de los axiomas en geometría. Era algo que yo podía hacer con ellos. Bajo ese contexto, ese axioma nos permitía hacer eso.
99		E: Cuando graficas la función afín dices que la función afín no pasa por el origen. ¿Nunca la función afín pasa por el origen?
100		PA: Es una característica de la función afín.
101		E: Y ¿en el caso de la lineal?
102		PA: Esa si pasa por el origen.
103		E: ¿Cómo haces la distinción entre estas dos funciones? Entre la función lineal y la función afín?
104		PA: Por la estructura que tiene: ax+b, siempre que b no sea cero, por que si el b fuese 0, sería lineal.
105		E: ¿Dejaría de ser afín y pasaría a ser lineal o seguiría siendo afín?
106	1 2	PA: En el contexto de colegio se hace esa distinción entre afín y lineal. Alguna vez yo argumenté por qué se llamaba lineal y por qué la otra no es lineal. Porque cumple con la linealidad que son las características de f(kx)=kf(x) y que separa la suma

	3	f(x+y)=f(x)+f(y)
	4	La única que cumple es la que tiene la forma ax.
	5	ax+b no va a cumplir con eso.
107		E: ¿Y si el b=0?
108		PA: Si el b es cero, caeríamos en ese.
109		E: Se separa entonces. ¿Hay funciones que cumplan ambas?
110		PA: No.
111		E: Eso es a nivel de colegio, ¿Así lo muestras tú? Eso es lo que propone el curriculum? Y para ti, ¿hay funciones que cumplan ambas?
112		PA: ¿Qué sean lineales y afines?. Ax+0
113		E: y ¿si los dos son ceros, el a y el b?
114		PA: Ya deja de ser función lineal, sería función constante.
115		E: No sería ni afín ni lineal.
116		PA: Ahí se analizan los distintos casos. Partes con ax+b, las que tienen esa estructura, donde a y b son distintos de cero, es función afín. Luego empiezas a jugar “si el A es cero, Si el b el es cero”. Se le van poniendo sus categorías y cómo cambia su representación gráfica.
117		E: las funciones afines y lineales. ¿Hay funciones que podrían se funciones afines y lineales simultáneamente?
118		PA: Cuando el a y el b son cero, te da lineal y afín.
119		E: Cuando estás buscando el dominio de la función pones una expresión algebraica fraccionaria con la variable en el denominador y dices que el 0 no está en el dominio porque “no se puede dividir por cero”. ¿Por qué no se puede dividir por cero?
120		PA: Porque no tiene sentido. Yo lo explico antes, cuando hacemos divisiones en el contexto de racionales y la operatoria con racionales. En un libro encontré un ejemplo práctico de por qué no tiene sentido dividir por cero, no para que ellos lo asuman que no se puede porque no se puede nomas.

121		E: en el cálculo del dominio, tienes una estrategia para calcularlo cuando la función está representada gráficamente. Tienes solo la gráfica de la función y le preguntas a los estudiantes cuál es el dominio de la función. ¿Cómo puedes tener la certeza del dominio de la función cuando tienes solo la representación gráfica?
122		PA: Generalmente cuando grafico en un sector acotado y esto se extiende más, hago puntitos y se entiende que eso continúa y que no lo voy a graficar completo.
123		E: En algún momento te preguntan porqué la función se llama f, g o h.
124		PA: No lo cuestionan. Generalmente eso lo preguntan por qué se llaman así con los conjuntos numéricos.
125		E: Los estudiantes te preguntan por qué no todas se llaman f. En ese caso ¿Cuándo dos funciones son iguales? Tienes que ponerles letras distintas si es que son funciones distintas.
126		PA: No alcanzo a hacer ese análisis. En ese curso tuve que hacer la fusión de dos cursos en uno, 8º y 1º, y con ideas para el curso siguiente, porque yo agregué compuesta de funciones para poder partir desde ahí con logaritmos.
127		E: También agregas inyectividad, epiyectividad y biyectividad. Eso aparece en el programa, es parte del curriculum del curso?
128		PA: No, no está como tal.
129		E: ¿Por qué lo enseñas?
130		PA: Porque necesito eso para ver función inversa.
131		E: Eso si aparece en el curriculum.
132		PA: Si. Aparece en el curso siguiente la función raíz, la función exponencial y logaritmo. Entonces, generalmente el enfoque de los textos es que lo ven como un operador
133		E: ¿Esa idea de operador es la misma idea de la función como operador anterior?
134	1	PA: Si. El logaritmo hace tal cosa y esa es la idea. El argumento y la base del logaritmo tienen condiciones, pero ¿por qué tiene esas condiciones?

	2	Hubo diferencias en los resultados. Fue mejor que los cursos anteriores donde yo había visto el logaritmo como operador, porque tenía un contexto. Lo vi como la función inversa de la exponencial.
	3	En la exponencial, analizamos el dominio. Empezamos a "achicar" el dominio para que tuviese una cierta regularidad y que todos se comportaran más o menos de la misma forma y que no se me escapara el comportamiento de los elementos. Por ejemplo, si el x fuera negativo, como saben potencias, significaría que, si es par, entonces queda arriba. Me entiendes?
	4	Analizamos. Si no hay una regularidad, un comportamiento similar, entonces no me sirve. Ahí llegamos al dominio para que tuvieran un cierto comportamiento.
	5	Volvimos a que era biyectiva, haciendo todo el proceso, no viendo el contenido de nuevo, sino que recordando que la función tenía esas características por lo que habíamos visto. Entonces yo voy a definir la inversa y a esa inversa le llamo logaritmo. De ahí empezamos y definíamos la función. Entonces logró tener sentido. Tuvo un sentido el dominio y el recorrido de la exponencial, porque se construyó así para que tuviera ese comportamiento, entonces el logaritmo tiene sentido.
	6	El estudio de la inyectividad y epiyectividad tenia ese objetivo, pero no es un tema de ese curso, sino que es para los posteriores
135		E: Se menciona eso? Tu dices que lo van a utilizar para estudiar después
136	1	PA: Si. Se ocupa en el curso siguiente.
	2	La prueba de logaritmos no tuve que hacerla de nuevo. Antes siempre tenía que repetirse y, con ese cambio, viendo la inyectividad y epiyectividad, no se tuvo que repetir la prueba.
137		E: Podría proyectarse el concepto de función proyectarse a algo más complejo?
138		PA: Si. Cualquier tema lo puedes hacer más difícil si le pones un contexto de aplicación.

139		E: En cuanto a simplificar las cosas, en un momento, cuando están calculando el recorrido, despejando y, tienen que hacer un despeje de una función y=x/x-1, tienen que multiplicar por (x-1), pero los estudiantes no comprenden ese procedimiento. Se muestra un procedimiento similar usando números racionales. ¿Cómo se relacionan los dos procedimientos?
140	1	PA: Quizás no debí poner ese ejemplo, porque no estaban en el contexto, aunque yo sabía que eran capaces de hacerlos porque se resolvieron ecuaciones con coeficientes fraccionarios, por lo tanto, por eso recurrí a eso.
	2	Es un proceso más simple. Todo lo que tenga números y no letras va a ser simple para ello.
	3	El objetivo del procedimiento es dejarlo en una expresión lineal y no con fracción. El objetivo de los dos procedimientos es el mismo.
141		E: Cuando defines el concepto de función, la inyectividad, el dominio, etc. Utilizas mucha simbología matemática, cuantificadores, pertenencia, etc. ¿Cuál es el papel que cumplen los símbolos y el lenguaje formal en matemática? ¿por qué los incluyes en la clase?
142		PA: Porque estoy enseñando matemáticas. Hay un cierto lenguaje matemático que ellos tienen que dominar. Los uso ahí porque antes ya los he incorporado.
143		E: Que aprendan ese lenguaje es tu decisión, no parece en el curriculum. ¿Qué importancia le das?
144		PA: No es una cosa que yo evalúe. Yo estoy pensando y proyectando a los cursos siguientes. No lo evalúo, pero si lo voy nombrando y ellos lo conocen. Después les toca el electivo y siempre incorporo lógica como primera unidad del curso de electivo.
145		E: desde la generación de conocimiento matemático, ¿Es importante ese papel de los símbolos y de la formalidad del lenguaje?
146		PA: Siempre he pensado que leer matemáticas es como leer otro idioma. Yo hago un acercamiento a esa lectura. Lo muestro solamente por conocimiento general, no porque vaya a generar matemáticos de ahí. Ese es el objetivo.

		La dificultad es que no leen o no leen bien. Les aparecen símbolos distintos en la PSU y que por lo menos los identifiquen porque aparecen. Hay cosas generales y transversales que se deben enseñar, no con un objetivos matemático. En mi clase siempre van a haber otros objetos, no porque estén en el curriculum, no porque sea algo que necesiten inmediatamente. Mis clases van a tener un toque transversal, de proyección y de conocimiento general en el contexto matemático.
147		E: Después de definir la función, decides si algo es una función o no. ¿Qué rol tiene la definición en ese procedimiento de decidir si es o no función?
148	1	PA: Hay una parte que no es tan matemática. Esa definicón está traducida, no está tan matemática, está la descrpción y las características.
	2	Yo vuelvo a ella para que noten de que hay dos condiciones, y que esas condiciones son las que se tienen que cumplir para que esa correspondencia sea una función.
149		E: ¿Cuáles son esas dos condiciones?
150	1	PA: Que cada elemento del conjunto de partida… yo subrayo dos palabras: el "cada" y el "única"
	2	Cada elemento del conjunto de partida tiene una única imagen. Subrayo esas dos palabras: cada y única.
	3	El cada significa que en el conjunto de partida no me pueden sobrar elementos y el único, que a donde va a parar ese elemento sea único, no pueda llegar a dos.
151		E: Este proceso es verificar que se cumplen propiedades. ¿Eso es una práctica característica del quehacer matemático, es habitual en matemáticas?, sin pensar en el contexto escolar.
152		PA: No se si es habitual. Es algo que hago para verificar si se entendió y si tiene sentido el concepto.
153		E: ¿Es una forma de demostrar o comprobar si algo es función o no?
154		PA: No lo he pensado como el comprobar, pero si me permite chequear de que se entiende desde otro punto la idea de función, ese concepto que se dio. Es como un chequeo.

155		E: Verificar si algo es o no una función mediante la comprobación de las propiedades que dice la función, ¿es una comprobación o una demostración?
156		PA: Es una comprobación. En general, en el colegio no hago demostraciones como tal. Hago justificaciones. Le quito lo formal de la demostración. Incluso en contexto de primer año de universidad no hago una demostración tan formal, formal matemática.
157		E: ¿qué significa eso?
158		PA: Con hipótesis, con tesis y una estructura lógica matemática. Al final de cuenta pierde el objetivo en un contexto de colegio. O en un contexto de primer año que no estudia matemática. El objetivo de ellos es otro. Necesitan que justifiques el porqué, pero no necesitan que les "tires" la demostración matemática, y que también son demostraciones… Que yo le llame justificación es otra cosa.
159		E: ¿Hay varias formas de demostrar si algo es o no una función?
160	1 2	PA: Yo creo que esto es una forma de demostrar. Esto es una comprobación de si es que se entendió el concepto.
161		E: No es matemático, ¿es de enseñanza?
162		PA: Si. Tienes que chequear si lo que tu enseñaste se entendió o no, y hay distintas formas. Esa es una de mis formas para chequear si se entendió, o vuelvo a enseñar el mismo concepto, pero de otra forma, desde otro punto.
163		E: Desde el punto de vista matemático, solo matemático, ¿Qué significa definir en matemáticas?
164		PA: Es decir lo que es el objeto matemático. Qué es, en qué contexto está. Todo lo que esté relacionado con eso, si es una expresión, dónde viven los coeficientes, si hay exponente decir dónde están. Decir qué es y en qué contexto está (numérico…) Ahora, lo que le agregas a la definición es notaciones.
165		E: ¿Cuál sería el rol de las definiciones en la construcción del conocimiento matemático?

166		PA: Es la formalización de algo que se está enseñando. Pienso en las “clases invertidas” que nos mostraron en una de las últimas capacitaciones en la universidad, en que tú enseñas a hacer algo, pero ese algo tiene un contexto, una definición. Independiente de cómo lo veas, siempre hay que formalizar lo que se está enseñando, ya sea de que partas con la formalización o termines con la formalización.
167		E: Cuando estudias las inyectividad, la das como una definición. ¿Esto corresponde a la definición o a una propiedad?
168		PA: Ahí la doy como definición para los alumnos.
169		E: Y ¿cuáles serían las características de esta definición? ¿Qué es lo relevante si en la de función de función destacabas dos palabras, aquí hay algo que destacar?
170		PA: Ahí yo hago el juego de cómo esas características que yo expliqué de manera más simple, cómo eso yo lo llevaba al lenguaje matemático y qué pasaba a nivel algebraico eso que yo estaba diciendo.
		Para que fuese inyectiva, si yo tomaba dos elementos cualquiera de dominio y sus imágenes llegaban a ser iguales, es porque esos elementos que yo me tomé necesariamente tenían que ser iguales.
171		E: Tú das una explicación así antes de plantear la definición del inyectividad.
172		PA: Eso que yo dije, ponerlo en un ejemplo de funciones que claramente fueran inyectivas y que se cumple eso: las imágenes de esos elementos cualquiera que yo me tomé realmente son iguales, mediante procesos equivalente llego a que las pre imágenes son iguales. Realmente, los elementos que yo me tomé eran el mismo.
173		E: ¿por qué pueden ser cualquiera?
174		PA: Porque para que eso se cumpla, se tiene que cumplir para todos los elementos del dominio de la función. Entonces, se supone que con eso todos tienen que cumplir, entonces, si todos tienen que cumplir, puedo tomarme cualquiera, cualquier par.
175		E: ¿Es una forma de generalizar? O es la forma en que se debe hacer o aplicar esa definición de inyectividad?
176	1	PA: Matemáticamente, en esa proposición hay un cuantificador y una implicancia.

	2	Como es un par cualquiera, si yo uso otro par, va a pasar exactamente lo mismo, porque con cualquier par de elementos que yo me tome del dominio, por las características de la función, vamos a tener las misma consecuencias.
177		E: ¿Y si ese par se tomase como números fijos, por ejemplo el 1 y el 2?
178	1	PA: Lo que va a pasar es que puede ser que sea verdadera f(1) igual a f(2), o que sea falsa. Ahí entra a jugar al implicancia. Si es falsa, la implicancia siempre va a ser verdadera, entonces ya está listo, está probado. Si es verdadera, hay que probar que 1=2.
	2	Ahí ya estas tomando un caso particular. Estarías ejemplificando y no demostrando. No puedes demostrar, a menos que utilices un contraejemplo, ahí utilizas algo numérico, pero si quieres demostrarlo, no te sirven los números.
179		E: Esos x1 y x2, ¿no son cualquiera?
180	1	PA: Tomas dos elementos cualquiera del dominio tal que cumplan una condición. Que las imágenes sean iguales.
	2	Ahí está el juego. Tomar dos elementos cualquiera, pero que cumplan con esa condición.
181		E: ¿Podría tomarme el 1 y el 2?
182		PA: Si, porque puedo tomar dos números cualquiera dentro del dominio. Si llegara a pasar que las imágenes del 1 y del 2 fueran iguales, lo que va a pasar con la otra parte del entonces, eso no se va a cumplir. Ahí hace que la proposición sea falsa, que la función no sería inyectiva.
183		E: Cuando estás haciendo la demostración de la inyectividad dices que para poder demostrar la inyectividad, usando palabras simples y “simplificando varios detalles que hay detrás”, se asume que se cumple esa condición primera. ¿Por qué se asume verdadera? y¿cuáles serían esos detalles que hay detrás?
184		PA: Primero, los valores de verdad de la implicancia. En la inyectividad hay una estructura lógica que ellos no conocen.

		Entonces, la implicancia puede ser verdadera no solo en el caso en que Verdadero implica Verdadero, porque si fuese Falso el antecedente, la implicancia sería verdadera igual. Por eso se asumen verdadero, porque la otra opción de que sea falso el antecedente ya está lista, ya es verdadera y se cumpliría. Por eso el proceso de la demostración se hace con la otra parte, suponiendo el antecedente como verdadero.
185		E: En general en matemáticas se dan varios teoremas y propiedades con la estructura de implicancia. Esa forma de demostrar se aplica a todo estos tipos de teoremas para demostrar la implicancia?
186		PA: No. No es la única forma de demostrarlo. Por ejemplo, demostrar la negación. Nunca va a haber una forma de demostración; hay unas que son más clásicas, más simples. Depende de lo que quieras demostrar. A veces no hay “como agarrarte” en esa forma directa, entonces hay que buscar otra forma de demostrar. Si me preguntas, no hay una única forma.
187		E: ¿qué otras formas conoces como demostraciones alternativas?
188		PA: Depende del problema. Por ejemplo, en geometría hay muchos teoremas en que claramente hay una implcancia, demostrar una característica directamente de los antecedentes no se puede, entonces tú demuestras otra cosa. La negación de eso. Por ejemplo, para la unicidad es típica. Si no se puede directo, se demuestra lo otro.
189		E: Algo menos estructurados como recurrir a dibujos, esquemas, casos particulares?
190		PA: Demostrar por casos particulares no estaría siendo válido desde el punto de vista matemático, no cómo yo podría hacer mi clase.
191		E: ¿Y los contraejemplos?
192		PA: Los contraejemplos son en el caso de que la proposición sea falsa.
193		E: Cuando hablas de la función inversa dices “una función f: A→B, tiene su correspondiente función inversa de B →A, si y solo si es biyectiva”

		¿Cómo diferencias la definición de la función inversa de la propiedad de existencia de la función inversa cuando las funciones son biyectivas?
194		PA: Eso es lo primero. Ahí estoy definiendo que existe. Tomo la biyectividad para decir que si la función es biyectiva, entonces existe una única f^-1 que es la inversa. Después se define cómo se relaciona esa f^-1 con la f.
195		E: Volviendo a las ecuaciones e inecuaciones. ¿Cómo se relacionan estos dos conceptos con las funciones?
196		PA: Por ejemplo, el dominio y el recorrido son conjuntos, y cuando defines un conjunto, son los elementos tales que cumplan con cierta condición, en esa condición puede ser una desigualdad o puede ser una ecuación.
197		E: En el caso del cálculo de pre imágenes para una función tú utilizas ecuaciones, ¿Cómo se relacionan las ecuaciones y las funciones?
198	1 2	PA: Ahí tú lo utilizas la resolución de ecuaciones como una herramienta, porque hay ciertos ejemplos en que debes determinar la pre imagen de un elemento, ¿Qué elemento ingrese a la función para que me diera tal número?. Yo parto con ejemplos simples en que sea fácil distinguir, sin resolver… igual están resolviendo pero mental, cuando no es tan simple se evoluciona a la necesidad de resolver una ecuación y que no se pueda hacer de otra forma.
199		E: Los estudiantes usan la técnica del “tanteo” de números. ¿Siempre la utilizan? ¿Conoces otra técnica de los estudiantes para encontrar la pre imagen?
200		PA: Si, inicialmente siempre la usan. No recuerdo que usen otra. Generalmente ellos empiezan a buscar qué número cumple mientras sea entero, pero si no es entero, se les complica.
201		E: Otra relación de la función que se plantea es con la recta euclidiana. Tú recurres a los axiomas de la geometría euclidiana
202		PA: Eso es para justificar la gráfica de la función lineal o afín. Ese es el fundamento de porque pasar de graficar varios pares ordenados a quedarnos solo con dos, eso es suficiente.

203		E: ¿Cómo estableces la relación entre la recta euclidiana y la función afín?
204		PA: Para las clases, solo con la axiomática, por que es lo que necesito. No he pensado otra forma.
205		E: Pensando en tus clases ¿Cómo describirías tu forma de enseñar el concepto de función?
206	1	PA: Como lo hice es una modificación de cómo lo hacía antes. Antes explicaba antes de definirlo. En esas clases, ahí lo definía con ellos. Fue más significativo en estas clases.
	2	Lo definiría como proceso inverso, no el tradicional. Traté de que no en todo fuera definición y ejemplo, sino que dar la definición, las características pero construirla simplificada para que ellos entendieran y luego dar la definición más formal con palabras y luego la definición matemática. En varias de las cosas lo hice así.
207		E: La recurrencia de activar conocimientos previos en cada una de las clases ¿es parte de tu forma de enseñar la función o lo haces en todas las clases?
208		PA: Específico en la función. Generalmente lo hago, porque en este tema hay tantos detalles, y pensando en la diversidad de estudiantes de la clase, yo necesitaba volver a pasar por ciertos detalles para reforzarlos. Destacar lo importante y lo que necesito que hayan retenido, para otro, hacerlo en forma más corta, resaltar lo que necesitan captar los que son más dispersos. Lo que tiene que ver con funciones es complejo, son muchos detalles. Necesitaba volver, cada cierto tiempo, ir haciendo resúmenes.
209		E: En tus clases también aparecen muchas preguntas, algunas retóricas y otras que esperas que los estudiantes respondan durante la clase. ¿Eso también es parte de tu forma de enseñar las funciones?
210		PA: Eso es en general, especialmente cuando lo que enseño no es producto de un proceso que es distinto a resolver una ecuación. Si estoy en el contexto de ecuaciones, ese tipo de preguntas se dan menos. Va a depender del contexto en que estemos trabajando, también va a influir en como enseñas eso.
211		E: ¿Son importantes los ejemplos en la clase?

212		PA: Si. En todas las clases, porque estás contextualizando. Los estudiantes necesitan ver números. Cuando ven muchas letras empiezan a colapsar. ¿Cómo lo voy a hacer?, ¿Cómo voy a aplicar esto que me está hablando?
213		E: ¿Cómo seleccionas los ejemplos?
214		PA: A veces los invento en el momento, porque va a depender de lo que me pregunten. La estructura de la clase ya la tengo, pero los ejemplos generalmente los voy variando. Siempre parto con algo muy simple y luego modificando los ejemplos hasta alcanzar el ejemplo con mayor dificultad pensando en lo que yo vaya a evaluar.
215		E: ¿Cómo mides la dificultad de los ejemplos?
216		PA: Va a depender de los tipos de función. Les voy modificando la expresión algebraica asociada a la función, que tenga fracción. Va cambiando porque tengo que hacer un poco más de cosas.
217		E: Plantear la máquina de lavar, ¿también es parte de la estrategia?
218		PA: Si. Esa es solo para funciones.
219		E: ¿Alguna otra máquina?
220		PA: Podría cambiarla por cualquier otra máquina, pero la idea es la misma. Si la cambio por una máquina de café, la idea es la misma. En ese caso, todos los elementos del conjunto de partida son idénticos, entonces la lavadora me da una gran variedad de objetos, de prendas que puedo incorporar.
221		E: Entonces ¿no cualquier máquina da la misma idea de función?
222		PA: La máquina de café podría dar a entender solo un tipo de objeto o todos similares o siempre el mismo. Entonces, como quiero ingresar el 5, el 20, el -1, pensando en el ámbito numérico, en la lavadora puedo ingresar poleras, pantalones, faldas, todos viven dentro de un conjunto que es ropa, que tengo una gran variedad ahí, a diferencia de los granos de café en que el conjunto son los granos de café y todos son iguales, no hay una gran variedad. Uno podría buscar algo más, pero esa funciona.
223		E: ¿Cuán efectivo es el uso de la máquina?
224		PA: A mi me da resultado.
225		E: ¿Qué aspecto de la función resalta la máquina lavadora?

226		PA: En lo que significa la función, cumple un rol. A lo que ingresa, algo le hace o no le hace. Refuerza el conjunto de partida, el dominio de la función. No cualquier elemento puede ingresar a esa función. No puedo meter una piedra a la máquina, porque no va a tener imagen.
227		E: Algunas de las cosas que se repiten en la enseñanza es que al poner el lenguaje simbólico, tú dices que lo van a traducir. ¿por qué es importante hacer estas traducciones?
228		PA: Más que el lenguaje matemático. Los alumnos leen algo y formalmente está correcto, pero la formalidad hace que el alumno no entienda lo que quiere decir eso, por diferentes razones. Porque tienen un vocabulario reducido y porque tienen problemas de comprensión lectora. Se trata de simplificar, no necesariamente desde el lenguaje matemático. Se trata de traducir a algo mucho más simple que lo que está escrito.
229		E: Las dificultades que presentan los estudiantes al leer lo que está escrito formalmente.
230		PA: ¿Por qué lo hago? Porque está lo que escribo, por ejemplo, la definición formal. La idea es no leer lo mismo que uno escribió, sino que tratas de explicarlo con otras palabras. Estas traducciones son esas explicaciones. Es porque eso que digo no lo retienen, pero está escrito abajo. Así los obligo a tener, por lo menos, lo que yo estoy explicando, no solamente lo que estoy definiendo, para que les sea útil cuando estudien solos.
231		E: Cuando calculan el dominio y recorrido usando el gráfico de la función les muestras dos casos. ¿Por qué son importantes esos dos caso?
232		PA: Porque tenían un dominio parecido, o el mismo, pero distintos recorridos. Ellos pueden pensar que el dominio y el recorrido tienen que ser iguales. Esos eran gráficos en que tenían el mismo dominio, pero no necesariamente el mismo recorido. Siempre estoy jugando con ejemplos en que no tienen el mismo dominio o el mismo recorrido.

233		E: Cuando los estudiantes copian los ejercicios propuestos en la pizarra les dices que a ellos les quedará mejor, porque ellos utilizan los cuadritos. ¿Cuáles son las ventajas o limitaciones cuando usas solamente el plumón y la pizarra para enseñar la representación de las funciones?
234		PA: La desventaja es que no te queda tan real respecto de lo que es. Lo que ellos hacen en el cuaderno tampoco es real, pero las proporciones quedan mejor cuando tienen cuadrícula. Si quisiera comparar gráficos de funciones cuadráticas, en la pizarra quizás no se note la diferencia entre una y otra, incluso con rectas cambiando las pendientes. Si se cambia el coeficiente de posición, ahí se nota, pero en otros no se nota. La ventaja es que al menos resulta. Hay una mejor representación.
235		E: ¿Conoces algún otro recurso para graficar o para la enseñanza de la función?
236		PA: Si es por los gráficos, se puede usar cualquier software que grafique como Geogebra o aplicaciones en el teléfono. Esos los utilizo cuando quiero hacer rápidamente la variación de parámetro para que no esperen tanto rato para hacerlo.
237		E: Sobre los conocimeintos previos de los estudiantes. Al inicio dedicas tiempo a recordar el plano cartesiano, los puntos y la simbología. ¿Cómo sabes tú que son conocimientos previos de los estudiantes, pues no son parte del curriculum?
238		PA: Es que yo les había hecho clases en los cursos anteriores y sabía lo que habían visto. Plano cartesiano si habían visto. Quizás a nivel del lenguaje matemático, es transversal en mis clases, siempre los ponía.
239		E: Cuando calculan el recorrido de una función, se pone una función 2x/x-1. Al calcular el recorrido hay que hacer un despeje y dices que este tipo de expresiones se los vas a mostrar como cosas que pueden hacer, pero no lo vas a hacer hasta un tiempo más, pero después se los pedirás, que es despejar la y cuando tienes ese tipo de ecuaciones. ¿por qué los estudiantes de ese nivel no pueden hacer ese tipo de despeje?

240		PA: Porque no han trabajo con expresiones algebraicas de tipo racionales.
241		E: Eso es posterior o no se ve?
242		PA: Es de segundo medio.
243		E: Después de estudiar funciones, ¿cuál es el siguiente tema?
244		PA: A nivel de álgebra y funciones ya estarían listos en ese nivel. En el curso siguiente, después en funciones vienen la expresiones algebraicas fraccionarias según el orden del programa. Se parte con números reales, raíces, logaritmos, exponencial. Igual se puede invertir.
245		E: En la línea de funciones, ¿qué sigue en el siguiente año?
246		PA: Raíz, logaritmo y exponencial, eso viene en el curso siguiente. Se ven como operador y después como función, así viene planteado en los textos escolares. Lo que hice fue invertirlo.
247		E: ¿Sabes cómo se propone el estudio de las funciones en el programa de estudio del nivel?
248		PA: Se aborda a nivel de aplicaciones y modelación.
249		E: Hay un momento en que muestras todas las representaciones, desde el diagrama sagital a la gráfica. Se ve que vas pasado de una a otra. ¿Cuál es el nivel de abstracción que requieran los estudiantes cuando haces estos cambios en las representaciones?
250	1 2	PA: Cuando haces el cambio entre los registros debe haber un nivel de abstracción porque el objeto va cambiando de lugar. No sé si hay niveles o categorías. Se trata de seguirle la huella al x, ¿Dónde está y el conjunto dónde está?. Tu partes con los elementos que van a pasar por esta función, a ese le llamamos x y está representado en el diagrama sagital en cierto conjunto. A ese conjunto lo llamamos A. Cuando lo paso a otra representación, ¿dónde pasó a estar ese x? El x estaba dentro del conjunto A, ¿Cómo lo represento si lo quiero hacer en forma lineal?

	3	El x está debajo de ese A, para indicar lo mismo que estaba en el diagrama. Eso es un ejemplo de cómo se va construyendo el traspaso de registro. Cuando pasas al plano cartesiano, ¿dónde está el x? Lo tomas en el eje horizontal. ¿Dónde está ese conjunto A?
	4	Cómo evoluciona o el lugar que ocupa entre una representación y otra.
251		E: Tienes alguna teoría de aprendizaje que aplicas en tus clases.
252		PA: No. Solo la experiencia. Solo ensayo y error, modificando la práctica cada vez que hago nuevamente el tema. Las veces anteriores en que me había tocado ver esto, me doy cuenta de que no podía seguir haciendo lo mismo si veía que no todos aprendían.
253		E: Hay algunos estudiantes a los que el concepto de función les es más fácil?
254		PA: Todos presentan dificultades. La diferencia está en el grado de dificultad. Para ninguno es muy simple.
255		E: Cuando evalúan la expresión algebraica dices que utilicen el 0 y el 1 porque es más fácil, pero es más fácil para ellos o para ti?
256		PA: En general, para todos. Si tengo que evaluar, no tomaré el 3/5. Sé que con un número racional escrito como fracción les cuesta. Siempre un entero va a ser más fácil que una fracción. Ahí empiezas a discriminar qué enteros usar.
257		E: En el plano cartesiano, al ubicar puntos, también presentaron diferentes dificultades al ubicar el (0,3). ¿Conoces estas dificultades?
258		PA: Si. Por eso hice el repaso antes, porque sabía que iban a cambiar ciertos valores en los ejes. No con el (1,5) u otro, sino los que tienen que ver con los ubicados en los ejes.
259		E: En la función inversa, le llamas "la función definida al revés" ¿Por qué usas esas palabra?
260		PA: Los estudiantes no usan la palabra "inverso", pero si saben lo que es al revés. En diagrama sagital, como leen de izquierda a derecha, al revés se lee de derecha a izquierda. Esa sería la función al revés. Como sinónimo de inversa.
261		E: ¿Qué otras palabras o concpetos usan los estudaintes para referirse a asuntos sobre las funciones?

262		PA: Por ejemplo, cuando ven una función creciente en el plano, ellos dicen que va para arriba. Si decrece, dicen que va para abajo. Lo mismo con los ejes. Los positivos para arriba y los negativos para abajo. Ellos se guían por lo que ven en la pizarra y sus puntos de referencia. Lo que está arriba y lo que esta abajo.