CONTINUIDAD EN LA FORMA

APROXIMACIÓN A LO CONTINUO A TRAVÉS DE LO DISCRETO

ALUMNO DE TÍTULO: GABRIEL CHIANG GONZÁLEZ
PROFESOR DE TÍTULO: MARCELO ARAYA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO, 2005

CONTINUIDAD EN LA FORMA

APROXIMACIÓN A LO CONTINUO A TRAVÉS DE LO DISCRETO

TESELAS 9

Introducción **10**
Definición 12
Teselas a través de las civilizaciones 13
Teselación y composición 15
Composiciones por repetición 16
Composiciones por radiación 17
Tipos de teselaciones 18
Teselación periódica 19
Teselación periódica y no periódica 20
Teselación periódica 22
Identificando los 17 grupos de simetría 26
Teselación hiperbólica 28
El mundo bidimensional 30
El mundo tridimensional 31
Desarrollo y propuestas 32

POLIEDROS 37

Introducción 38
Clases de poliedros 39
Historia 40
Sólidos platónicos 42
Sólidos arquimedianos 46
Prismas, antiprismas y deltaedros 47
Poliedros y arte 48
Aplicaciones 51
Poliedros flexibles 53

FRACTALES 55

Introducción 56
Nuevas maneras de ver 57
Conjunto de fractales clásicos 58
Fractales en todas partes 59
El conjunto de cantor 60
La alfombra de Sierpinski 61
El triángulo de Sierpinski 62
La curva de Koch 64
Curvas que cubren una superficie 65
El conjunto de Mandelbrot 66
Sobre los colores de los fractales 67
Fractales en la naturaleza 68
Aplicaciones de la teoría fractal 69

TOPOLOGÍA 71

Introducción 72
Propiedades geométricas cualitativas 73
La teoría de los grafos 74
El problema de los siete puentes de Königsberg 75
Coloración de mapas geográficos 76
Teoría de los nudos 77
Geometría del gaucho 78
Homeomorfismo 79
Topología, geometría de la continuidad 80
Características de una superficie 81
Superficies uniláteras 82
Orientabilidad y no orientabilidad 83
Superficies orientables 84
Superficies no orientables 85
De las 2 a las 3 dimensiones y la no orientabilidad 86
Definición topológica de las superficies cerradas 87
Problema principal de la topología de las superficies 88
Geometría global: teoría de curvas y superficies 89
Del plano a la tridimensionalidad 90
Exposición final 92
Maquetas 94
Vistas y planimetrías 96
Ubicación y montaje general 105

TESELAS

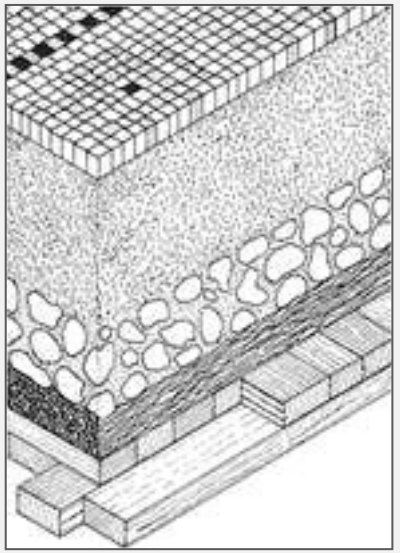
INTRODUCCIÓN

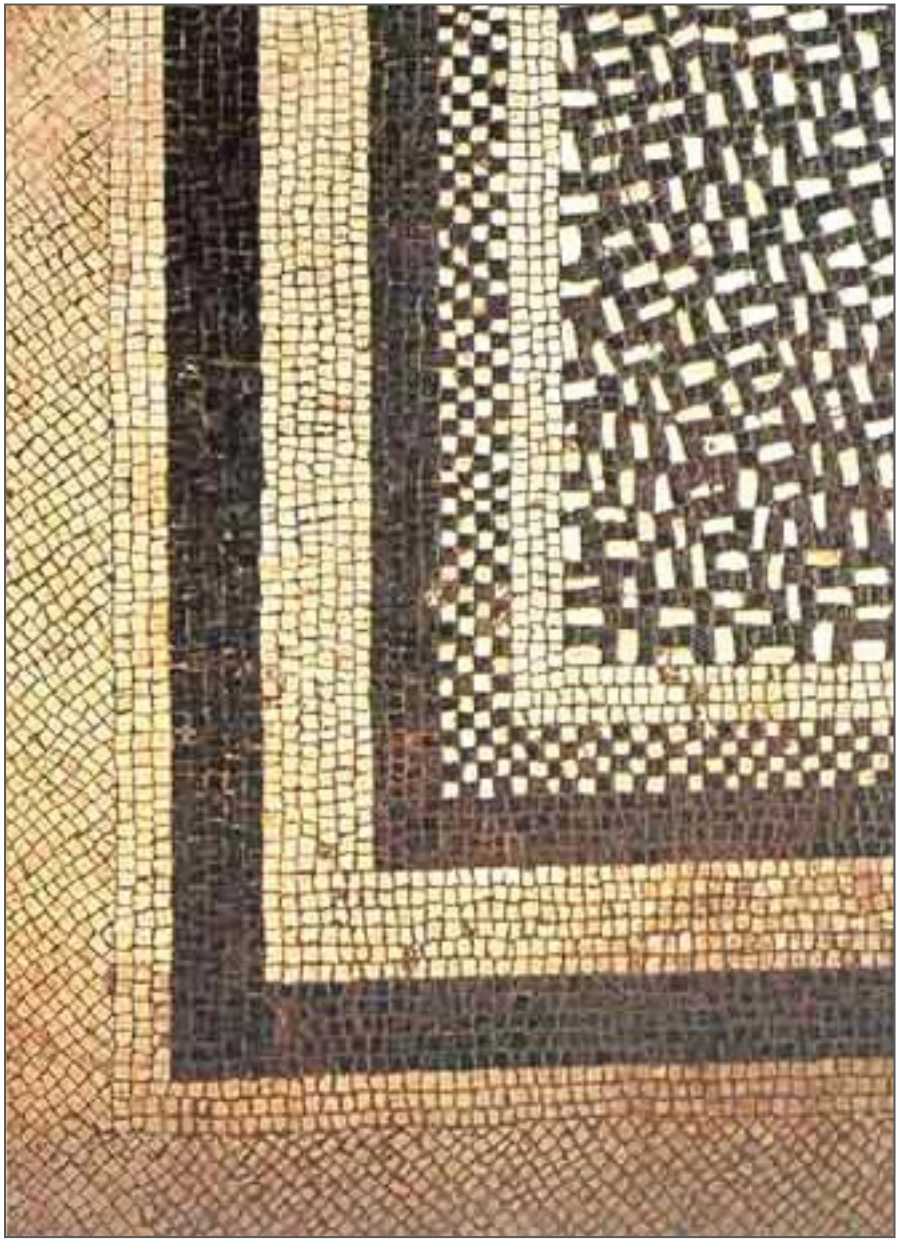
Los romanos construían los mosaicos con pequeñas piezas llamadas teselas (palabra que viene del latín tessellae, que a su vez viene del griego τεσσερες, que significa, cuatro). De ahí que se refiriesen a la técnica como opus tessellatum. Las teselas eran en ese entonces, piezas de forma cúbica, hechas de rocas calcáreas o materiales de vidrio o cerámicas, muy cuidadas y elaboradas y de distintos tamaños. El artista las disponía sobre la superficie, como un puzzle, distribuyendo el color y la forma y aglomerándolas con una masa de cemento.

Desde fines del siglo V a.C., en el mundo griego, era frecuente ver el pavimento compuesto por guijas de río (piedrecillas chicas que se encuentran en las orillas) de tamaños y de colores distintos. Con estas guijas se hacían dibujos sencillos de temas geométricos. A finales del siglo III a.C., las teselas vinieron a sustituir estos guijarros policromos.

Los romanos llegaron a dominar el trabajo hecho con las teselas. Las primeras obras se hacían con teselas muy pequeñas y ya en época imperial el tamaño se hizo mayor, de 1 cm. cuadrado. El mosaísta llamado Sosos de Pérgamo hizo en el mosaico que se conoce con el nombre de “Las palomas” el trabajo de un gran profesional; este mosaico está compuesto con teselas muy pequeñas: sesenta teselas ocupan el espacio de 1 cm. cuadrado.

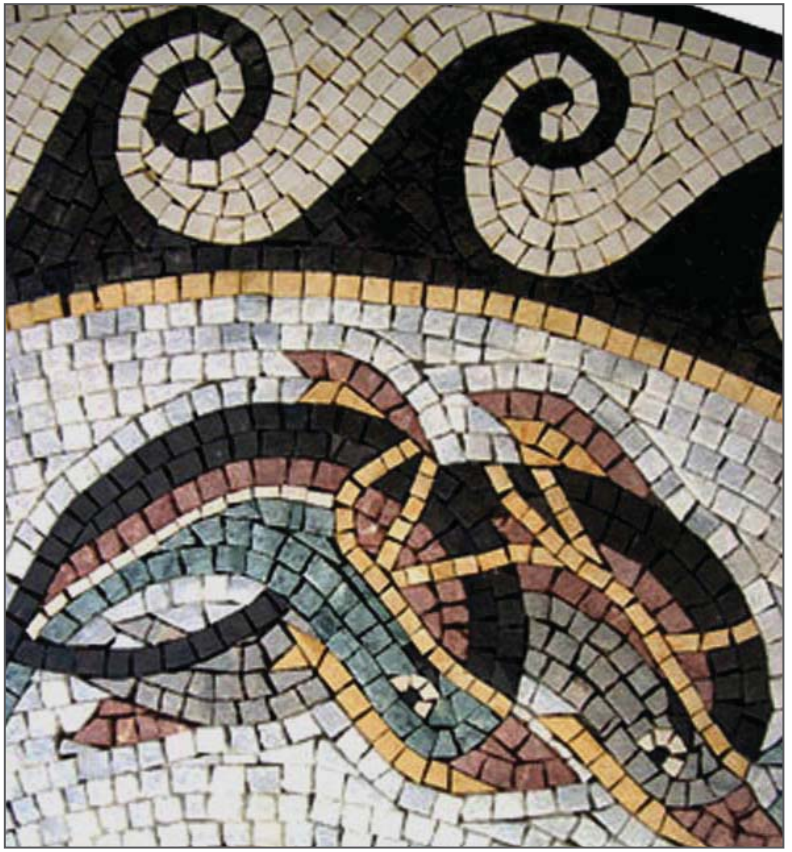
Las teselas se colocaban sobre un lecho de cemento casi líquido. Era una técnica que puede compararse con el puntillismo de los pintores impresionistas del siglo XIX. Para fabricar un pavimento hecho de mosaicos había que seguir una serie de pasos que con el tiempo se fueron perfeccionando. El lugar de fabricación era un taller especial. Allí lo primero que se hacía era diseñar el cuadro. Después de haber diseñado el cuadro se hacía una división de acuerdo con el colorido. Se sacaba a continuación una plantilla en papiro o en tela de cada una de esas parcelas divididas y sobre dicha plantilla se iban colocando las teselas siguiendo el modelo escogido con anterioridad. Las teselas se colocaban invertidas, es decir la cara buena que luego se vería tenía que estar pegada a la plantilla. Cuando este trabajo estaba terminado, los expertos lo transportaban in situ para que el artista concluyera allí su obra.





Pavimentación en Villa Romana, Pomepeya.

Mosaico de una de las entradas de la Iglesia de Santa Mónica, EEUU.

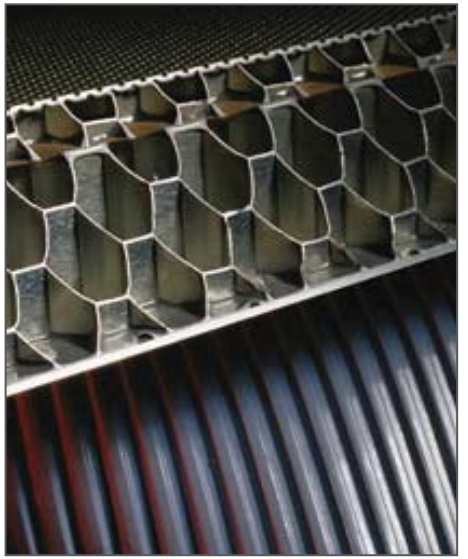


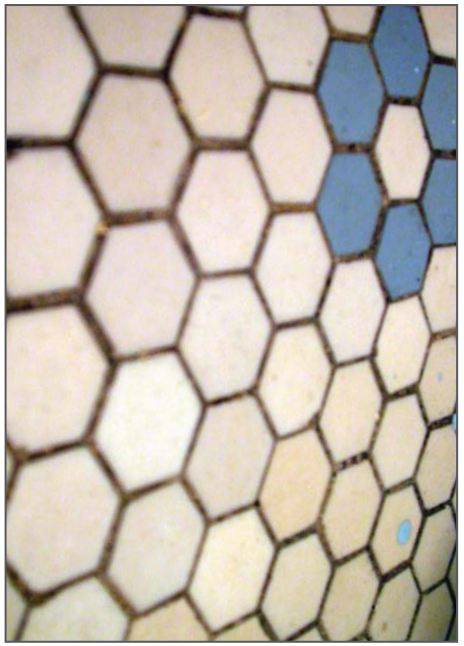
Parte de un medallón de 6 delfines construido con teselas de mármol.

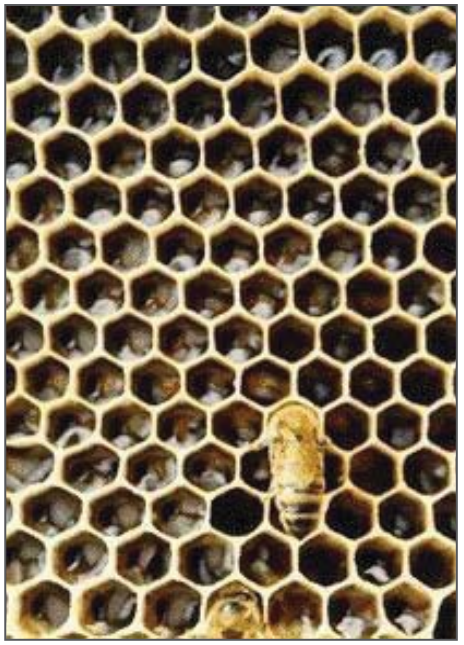
Pavimentación en Tivoli, Villa Adriana.

DEFINICIÓN

Generalmente, una teselación (a veces llamada embaldosamiento o mosaico) es una división del espacio en pedazos con área o volumen finito llamado teselas. Las teselaciones han estado en el arte por lo menos 2 mil años. Antiguos objetos decorados con patrones repetitivos, mosaicos en los marcos de las obras y edificios históricos, son evidencia de lo difundida y antigua que son las teselaciones. Teselaciones en la naturaleza incluyen los panales de abeja, estructuras de cristales, orden celular en seres vivos, una superficie de barro seco y el diseño de una telaraña. La manufacturación de componentes, al obtenerlo de placas de metal, son hechos eficientemente aminorando la porción no usada del metal. Así la teselación tiene aplicaciones al diseño industrial y la industria en general. También teóricos de la comunicación utilizan “teselaciones aleatorias” para el aumento de la imagen y la codificación. La cristalografía utiliza teselaciones del espacio tridimensional para entender las estructuras de moléculas.

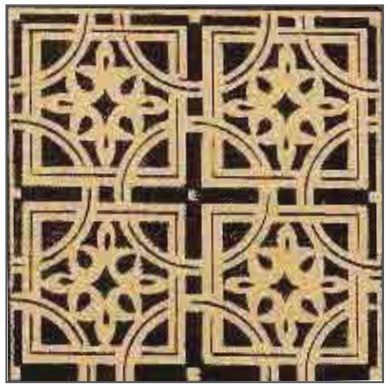


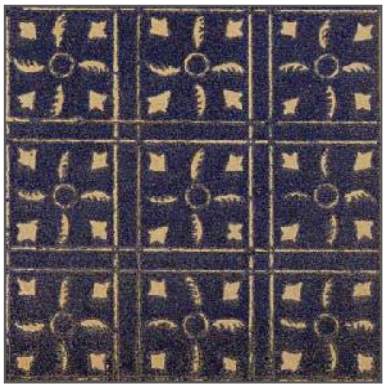


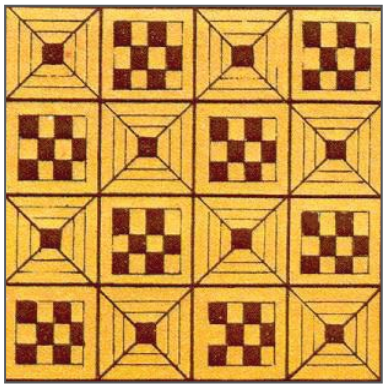


TESELAS A TRAVÉS DE LAS CIVILIZACIONES

Variedad de teselaciones encontradas en distintas regiones. Estas aparecen tanto en pisos, muros, ornamentos, alfombras y objetos. Cada una con sus propios lenguajes, colores y distribución de teselas.


Bizantino

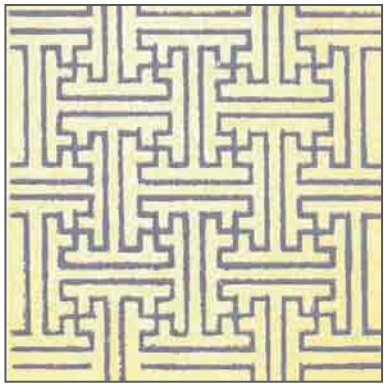

Renacimiento


Hindú

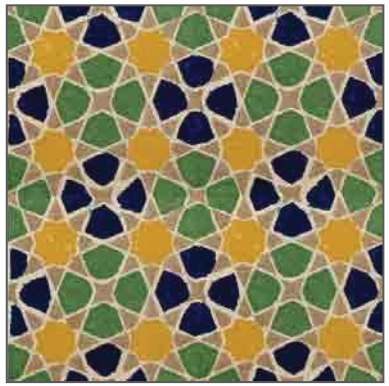
Árabe

Edad Media

Egipcia


China

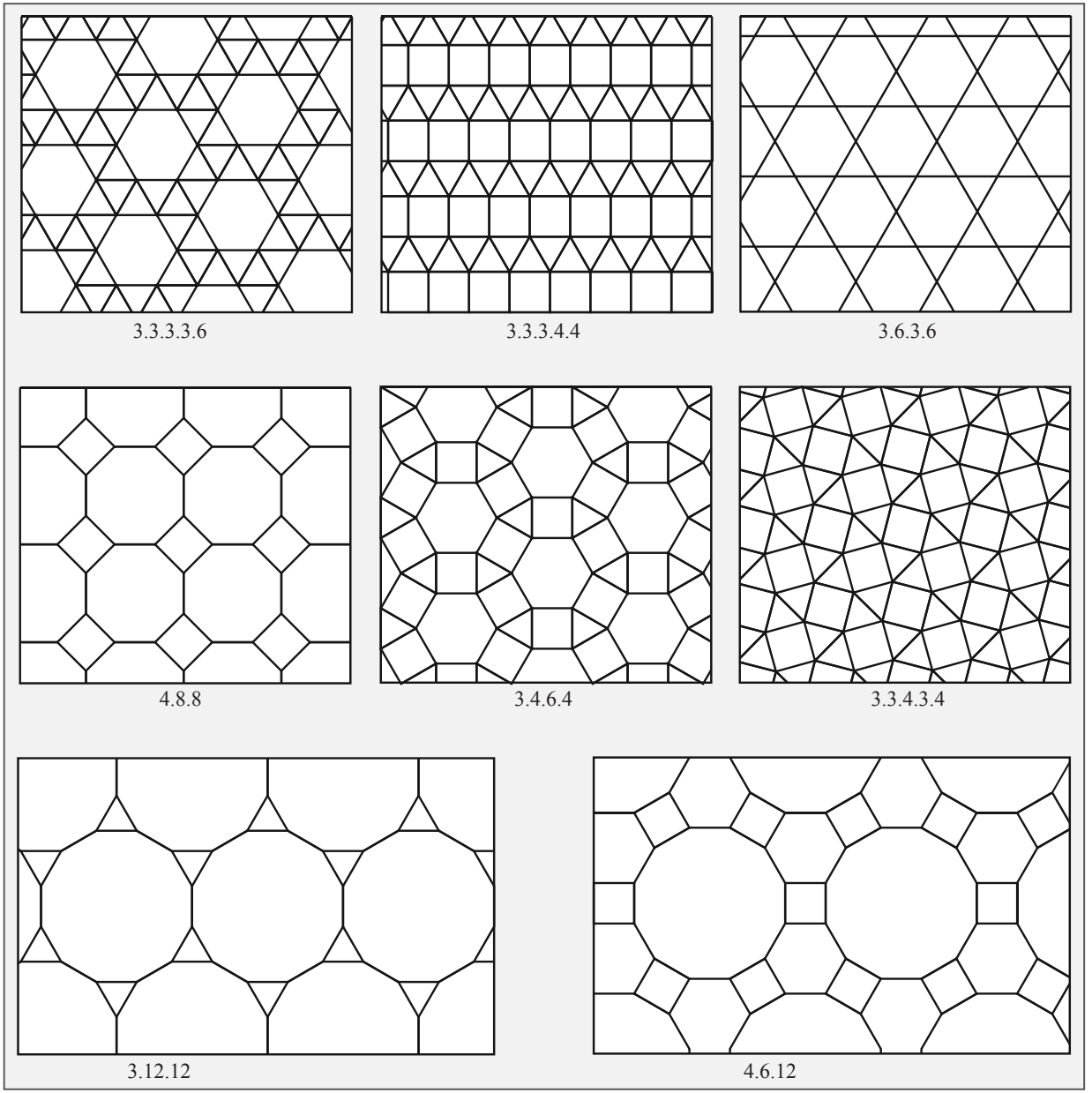
Persa


Islámica

Egipcia

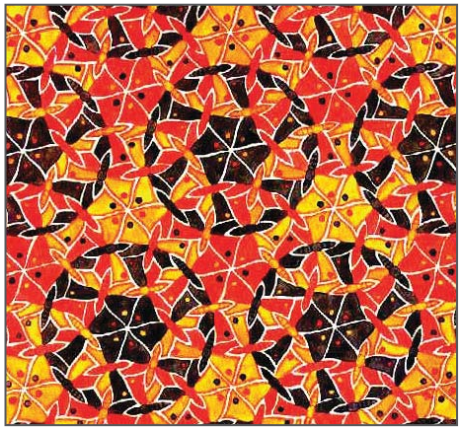
China

La teoría matemática de las teselaciones, sin embargo, tiene alrededor de un siglo de antigüedad. En matemáticas, teselación significa un plano-lleno ordenado por polígonos de tal manera que la intersección de cualquier polígono es vacía, un punto o un segmento de línea. Esta definición fácilmente generaliza a mayores dimensiones. Por ejemplo, la grilla estándar es una teselación de cuadrados y el enrejado cúbico es una teselación de cubos. Fedorov (1891) clasificó los grupos de simetría de todas las teselaciones bidimensionales y tridimensionales. Los grupos cristalográficos son los grupos de simetría para los cuales hay un dominio fundamental con área finita (o volumen). Fedorov mostró que hay 17 grupos bidimensionales cristalográficos y 230 tridimensionales.



TESELACIÓN Y COMPOSICIÓN

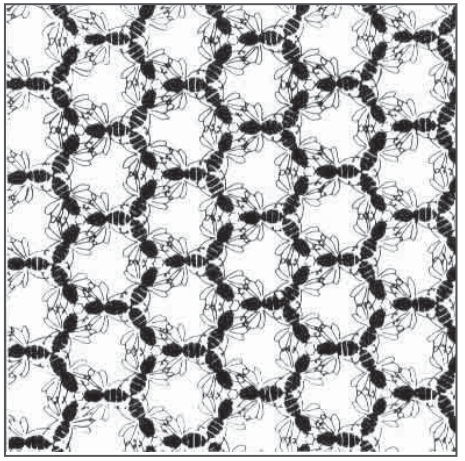
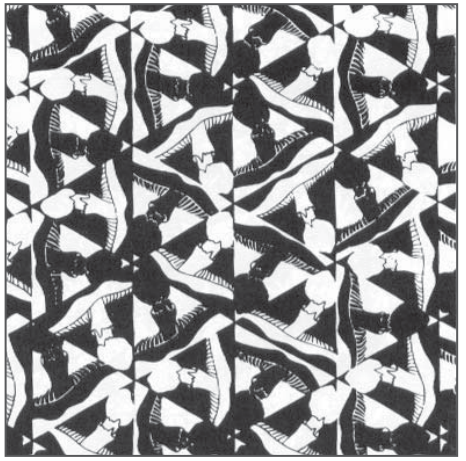
Las repeticiones, traslaciones y reflexiones ordenadas de una misma figura son habituales en la naturaleza. Las podemos apreciar en las flores, los insectos como también en la estructura de los minerales. Al mismo tiempo, en el arte surgen obras en base a este tipo de conceptos geométricos. Tanto pinturas como obras arquitectónicas reflejan, ya sea desde su total a un detalle, este tipo de características tal vez como imitación a la naturaleza.

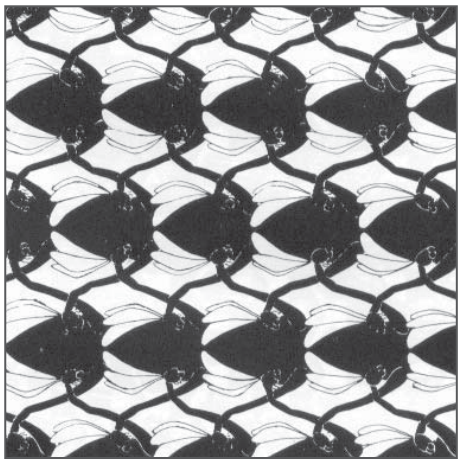


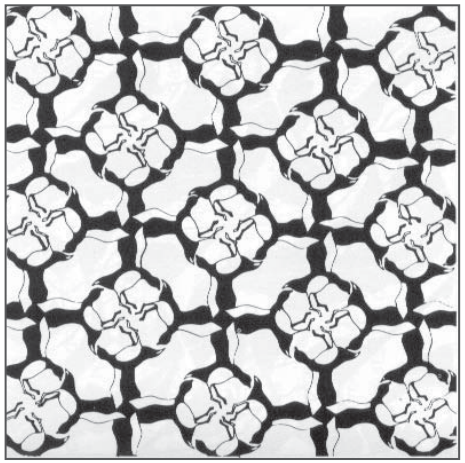
COMPOSICIONES POR REPITICIÓN

Las formas simples pueden aplicar como formas en repetición dentro de un marco de referencia definido. Su disposición regular puede construir una composición formal; todos los elementos están organizados en una especie de orden matemático.

La repetición implica reproducir la misma figura de diseño, así como colocar las figuras a intervalos que pueden quedar determinados mediante líneas que forman una retícula estructural.



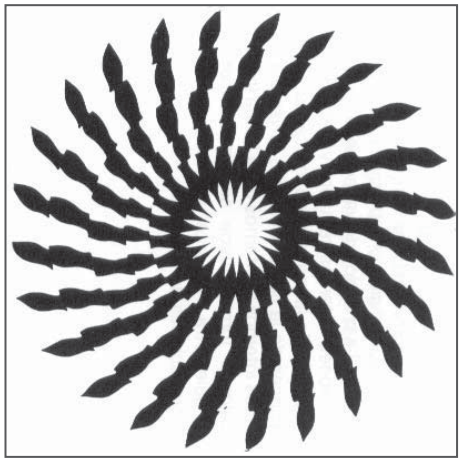


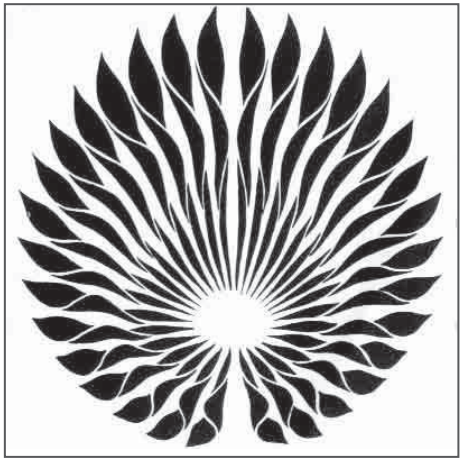
COMPOSICIONES POR RADIACIÓN

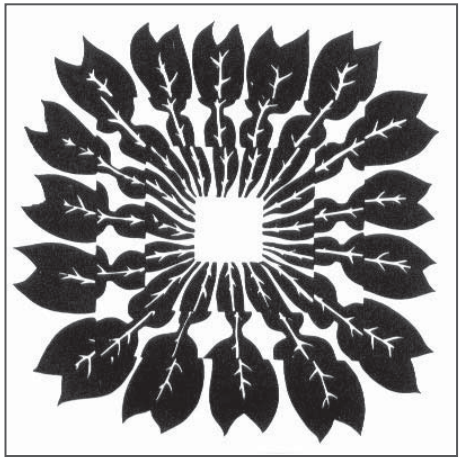
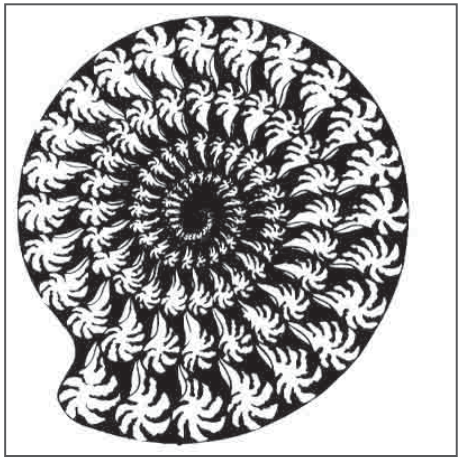
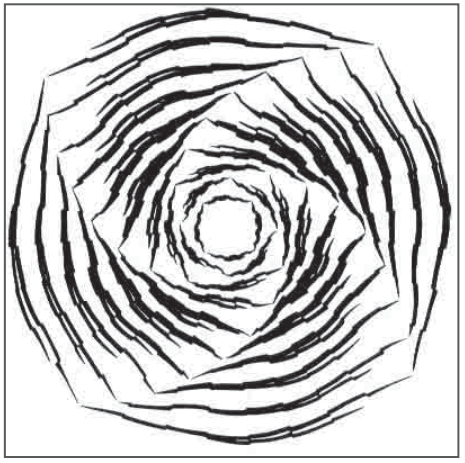
La repetición de las formas unitarias o superunitarias alrededor de un centro común produce una radiación, que es una técnica usada en composiciones formales.

La retícula básica estructural de un diseño con radiación tiene un centro de referencia; el punto de encuentro de todas las líneas radiales, o el punto alrededor de cual giran todas las líneas estructurales. La radiación normalmente presenta líneas que aumenta a medida que sea alejan del centro.

Las líneas estructurales guían la colocación de las formasque están directamente unidas al centro de referencia e equidistantes del mismo.

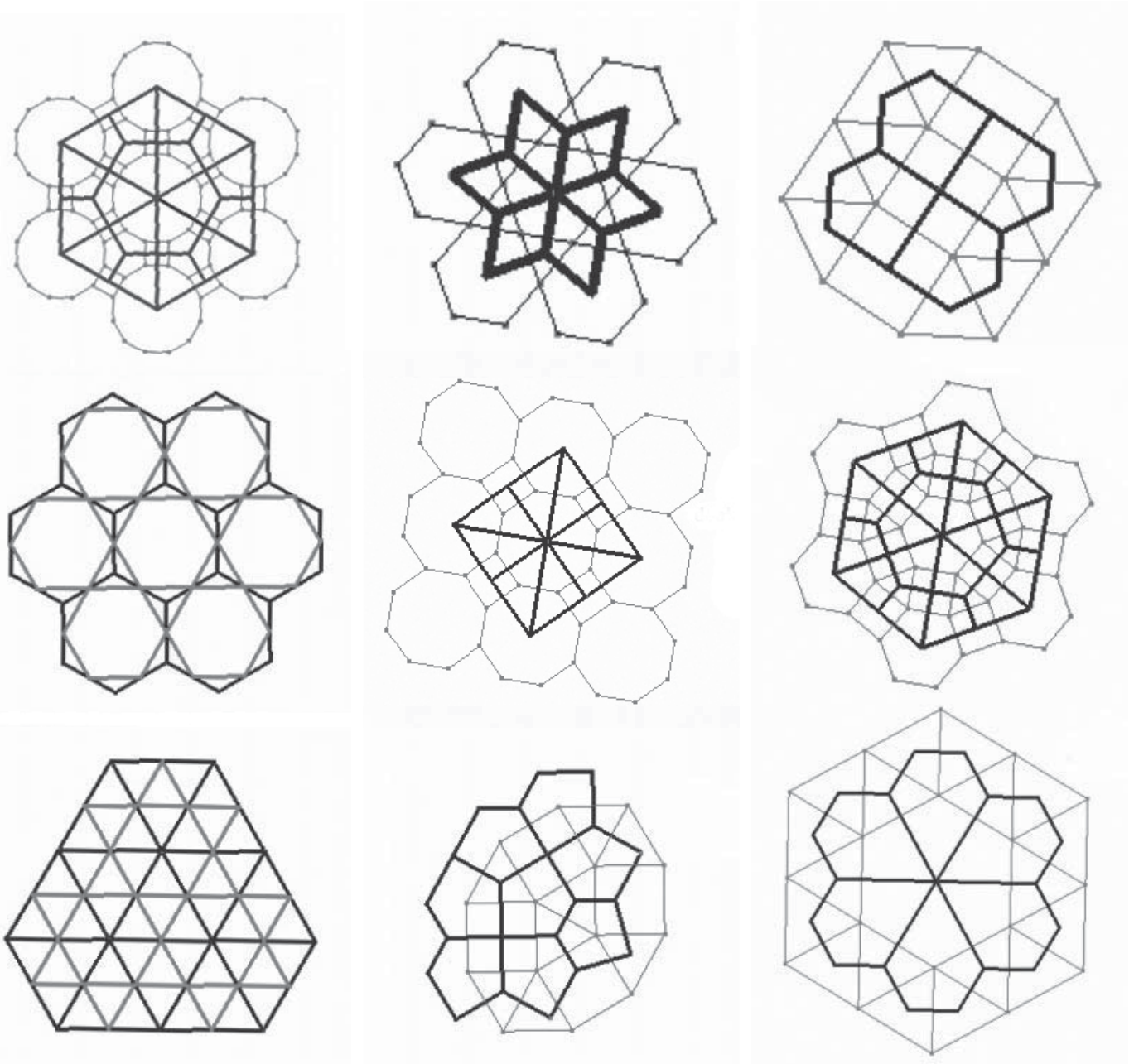




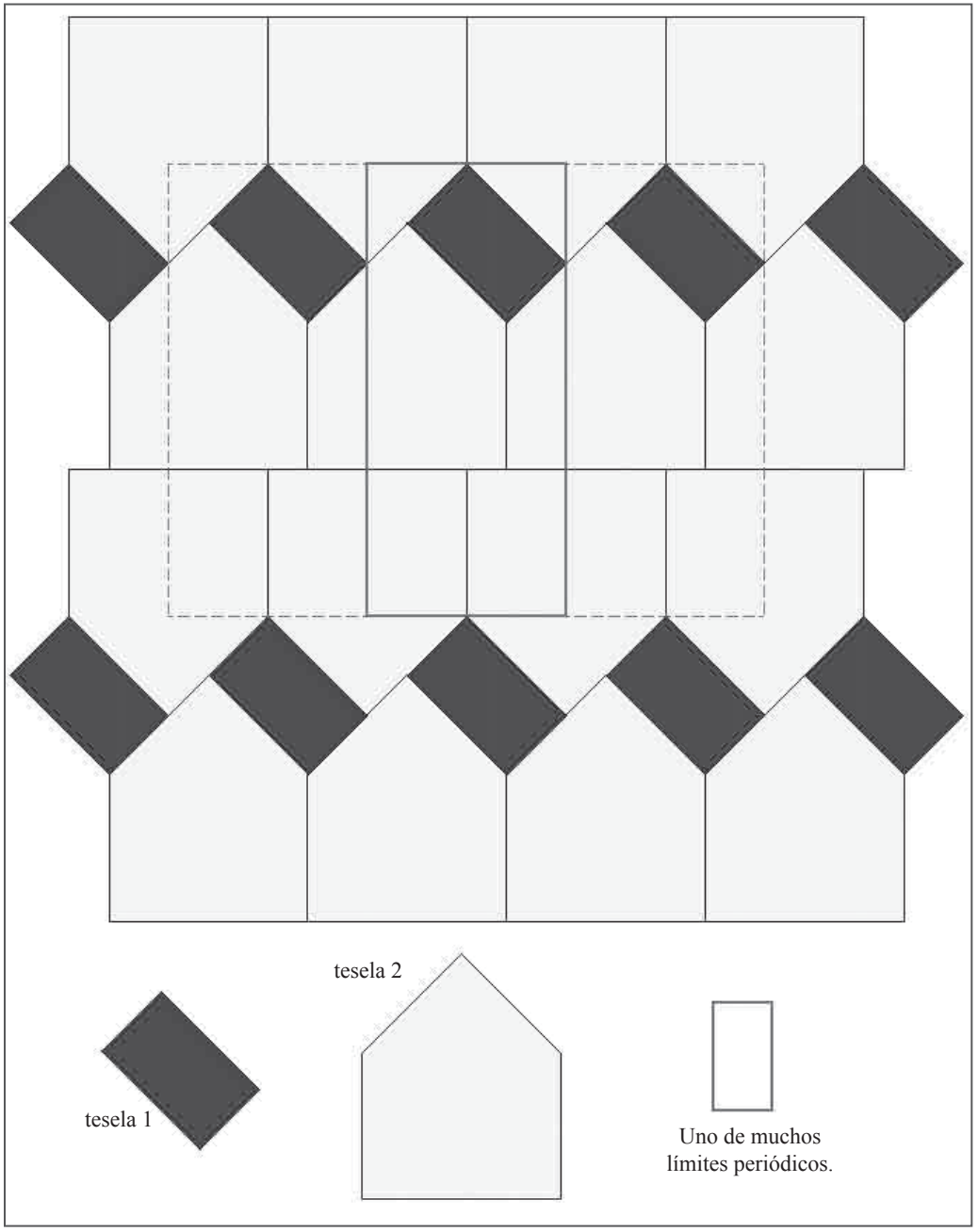
TIPOS DE TESELACIONES

Embaldosar un plano con solo formas geométricas es un antiguo ejercicio en geometría. Los sólidos platónicos son formas que teselan las 3 dimensiones usando poliedros regulares; en 2 dimensiones ejemplos de polígonos regulares que teselan el plano, sin intersticios y traslapes, son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Al trabajar en ello, nos vamos encontrando con distintos tipos y maneras de conformar un plano en base a conceptos geométricos.



TESELACION PERIÓDICA

Hay muchos ejemplos de polígonos generales (no regulares) que teselan el plano, pero en la mayoría de los casos ellos forman teselaciones periódicas. Una teselación periódica es aquella en que es posible hacer un paralelogramo (generalmente más grande que las teselas) que puede ser repetido para producir la misma teselación. Un ejemplo común de una teselación periódica es mostrado acá por dos teselas (oscura y más clara), el límite dibujado ilustra una posible región que puede ser replicada para crear el mismo efecto como las teselas. En general la forma periódica necesita ser un rectángulo más que otro paralelogramo. También cabe destacar que hay generalmente un gran, si no es infinito, número de paralelogramos periódicos de una teselación periódica en particular.

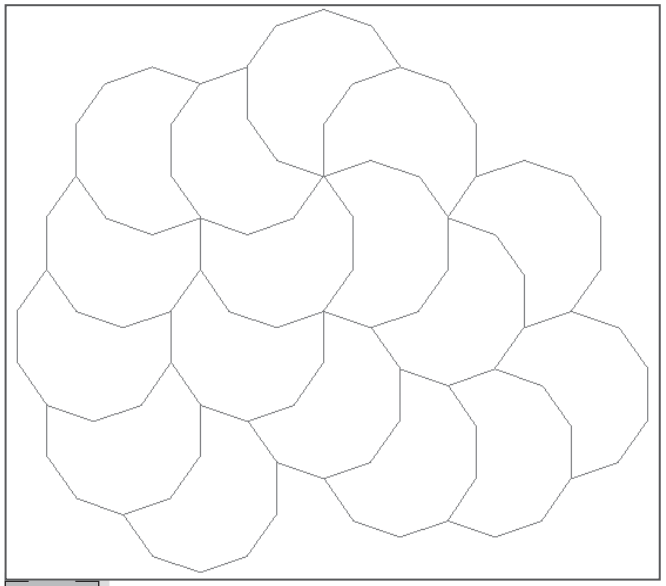


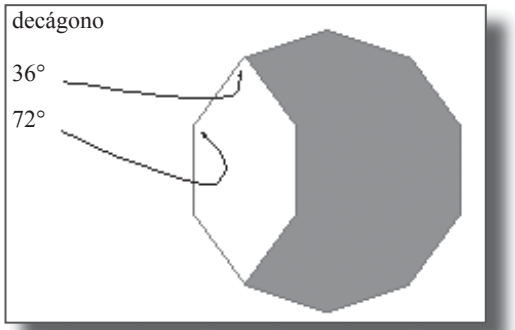
TESELACION PERIODICA Y NO PERIODICA

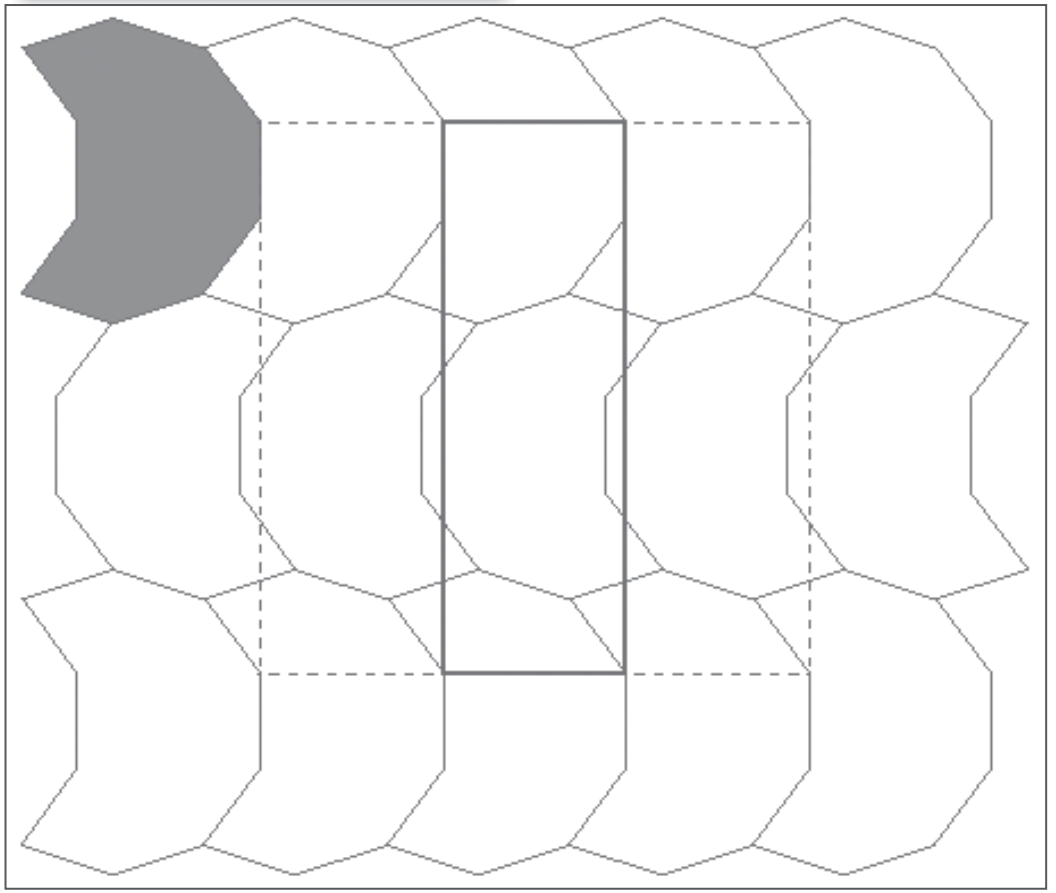
Un ejemplo de una tesela que puede "teselar" periódica y no-periódicamente es el decágono (10 lados) con un sacado del mismo. Teselas que pueden formar tanto teselas periódicas como no periódicas son referidas como teselas versátiles.

Un ejemplo de este tipo de teselación es mostrado a la derecha. Para que una teselas no tenga intersticios, todos los ángulos en un vértice deben sumar 360 grados. En este caso cada ángulo es de 72, 144 o 216 grados. Un número de combinaciones de estos números pueden sumar 360.

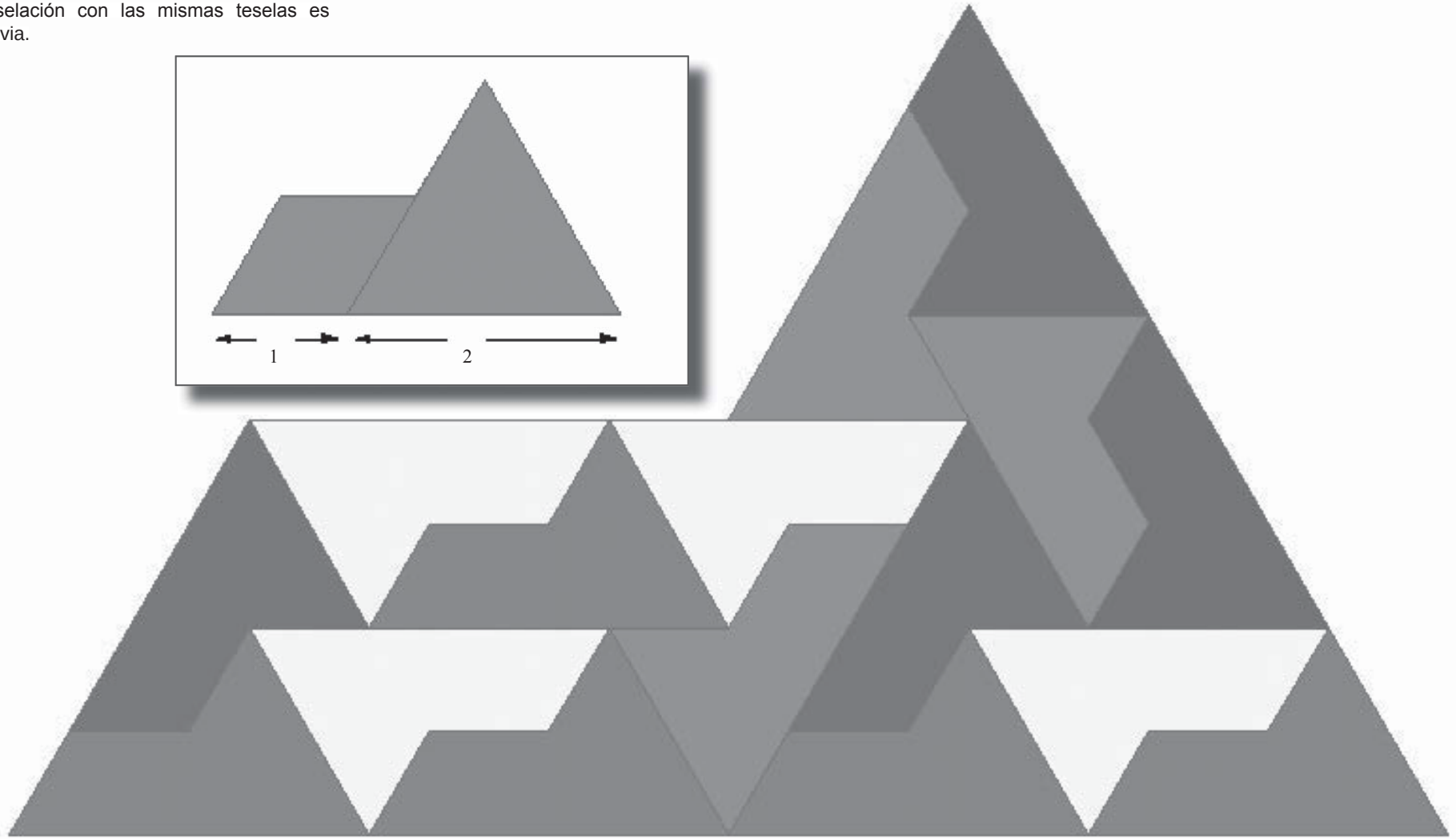
La teselación periódica como se muestra abajo tiene a los decágonos orientados en múltiplos de 180 grados. Si los decágonos fuesen rotados en múltiplos de 36 grados (10 orientaciones distintas) la teselación se convierte en no periódica.







Algunas formas que pueden ser combinadas para formar versiones más grandes de si mismas, tienen una obvia teselación no periódica. Por ejemplo la siguiente es llamada “esfinge”. Una teselación con las mismas teselas es obvia.

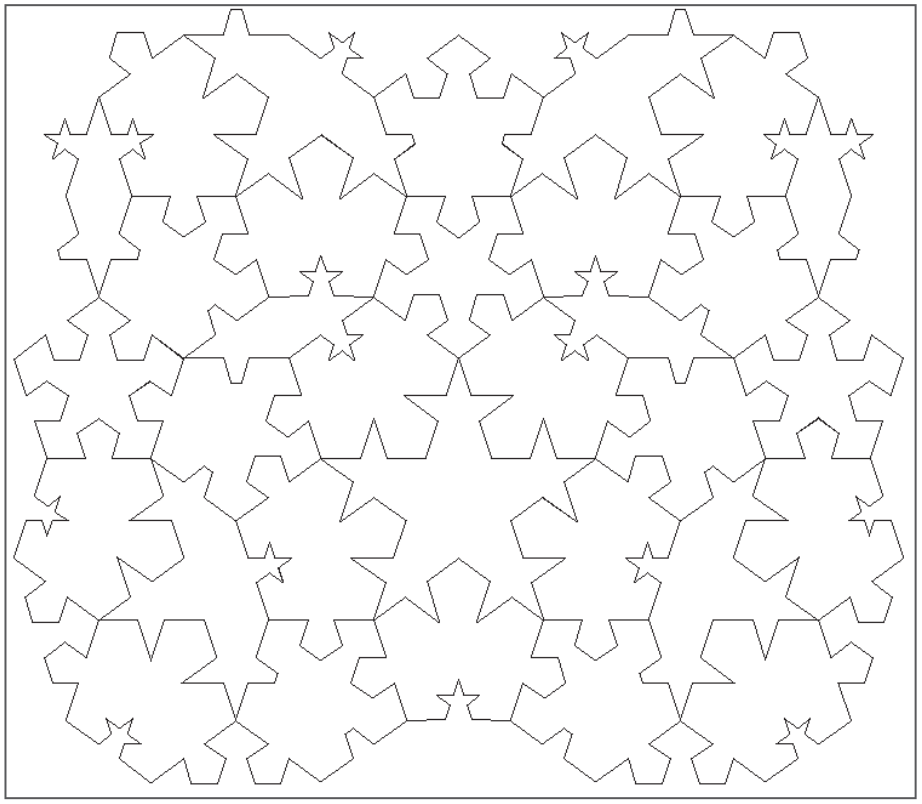


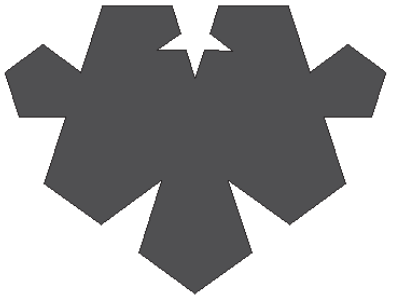
TESELACION NO PERIODICA

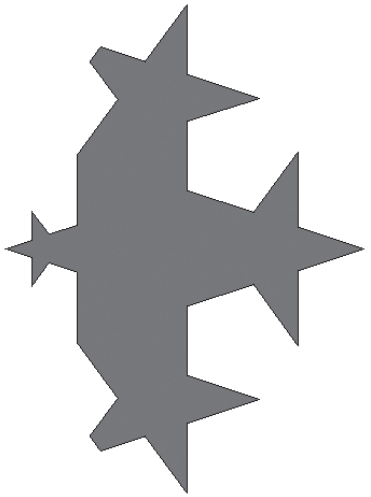
Las teselaciones puramente no periódicas cuentan con una serie de polígonos que teselan el plano pero nunca forman una teselación periódica. Por un tiempo se asumió que cualquier combinación de teselas que formaran una teselación periódica podía ser usada también para hacer una teselación periódica. En 1966 Robert Berger demostró que no era posible determinar que un grupo particular de teselas se construyera no periódicamente.

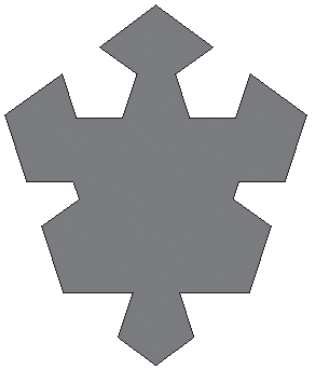
Robert Berger dio el primer ejemplo de una teselación no periódica de polígonos.

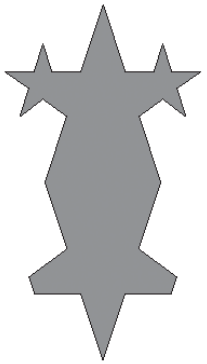
El siguiente grupo de 6 teselas no periódicas fueron “descubiertas” por Roger Penrose alrededor del 1973.

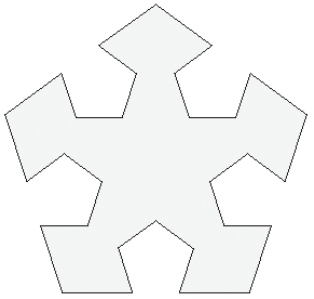




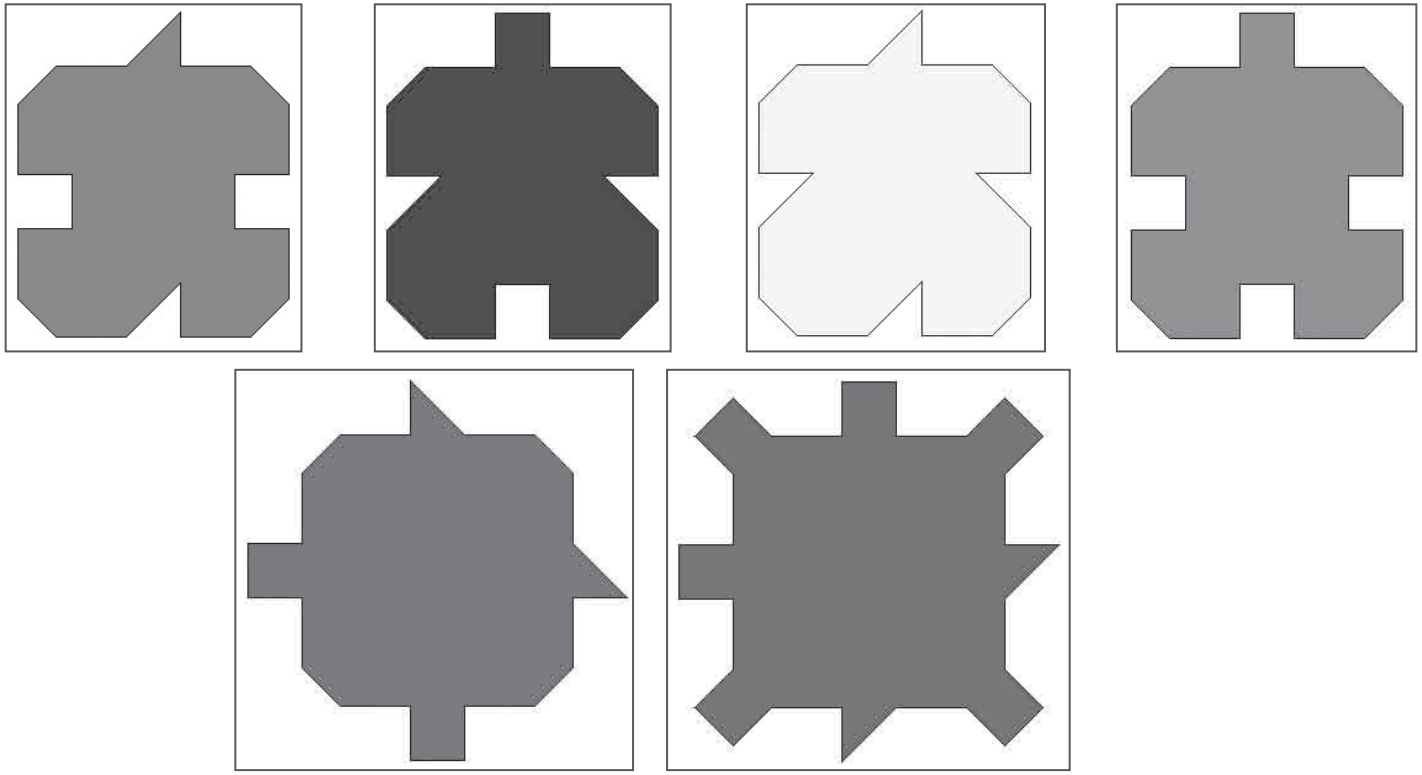








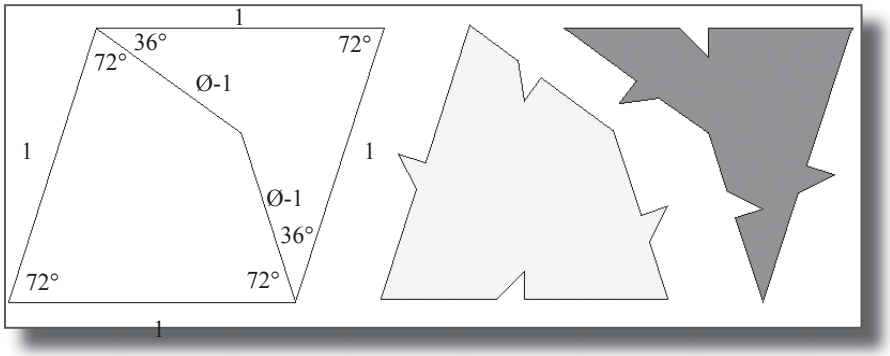
Las siguientes 6 teselas son atribuidas a Richard Robinson que en 1971 redujo un grupo de 104 teselas aperiódicas (que eran una reducción de un grupo originariamente de 20426) a solo 6 teselas.

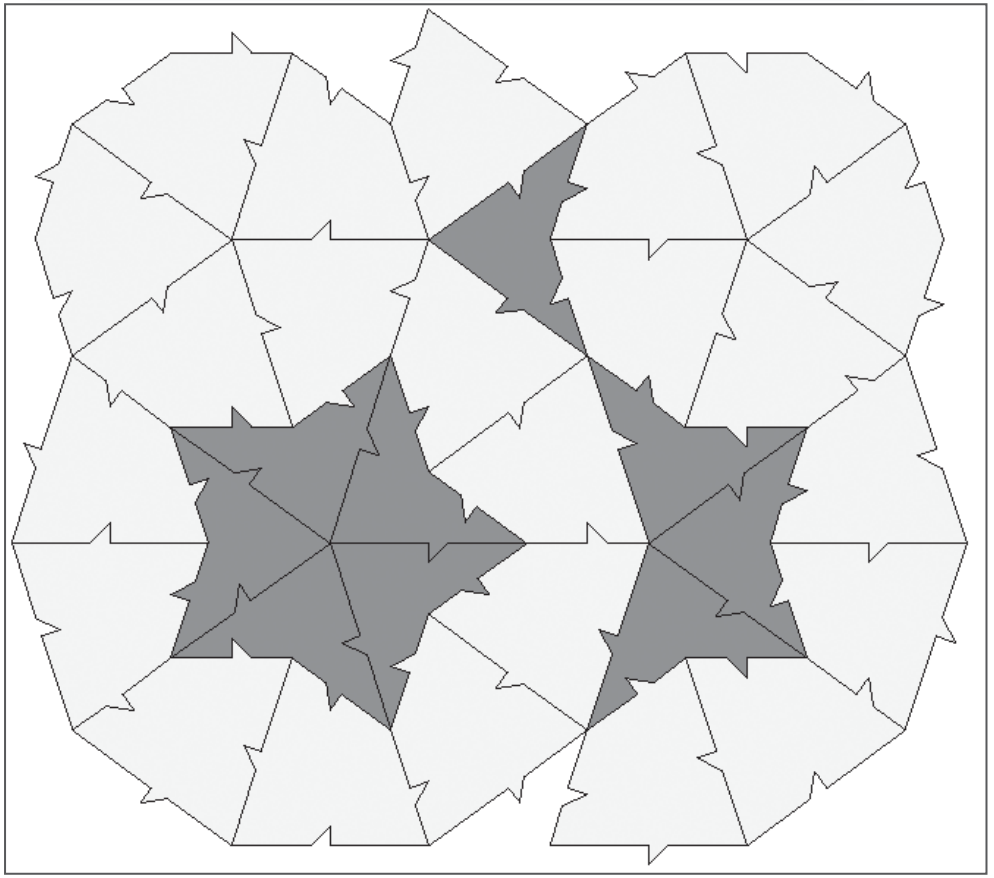


Alrededor de 1973/74 Roger Penrose encontró un grupo de 2 teselas que solo “teselaban” no periódicamente. Mientras estas se convierten en una serie de formas, la más común es mostrada acá.

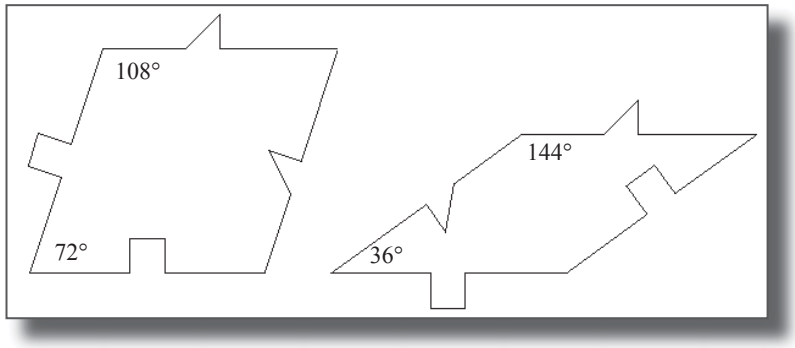
El comienzo de la teselación de estas 2 teselas es mostrado acá. Las 2 teselas son usualmente referidas como el cometa y el dardo. El rombo, en consecuencia, teselaría periódicamente; las piezas triangulares forzarían a seleccionar una combinación que permitiera otras conexiones.

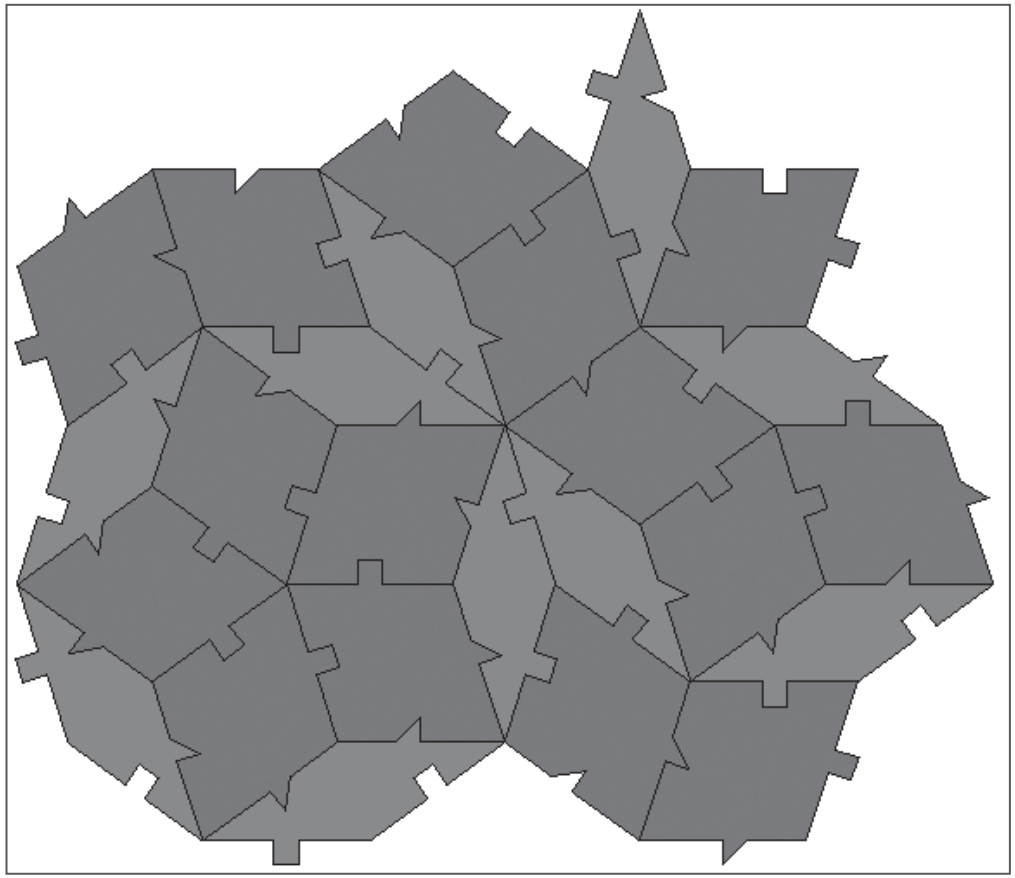
Hay una serie de propiedades “elegantes” de esta teselación. Por ejemplo, la razón de los cometas con los dardos en una teselación infinita, es la razón dorada o más conocida como la proporción divina. Proporción que se observa en muchas figuras geométricas como también en elementos de la naturaleza. Esta es una razón con resultado 1.618… denominada con phi Ø.





"Otra teselación no periódica de 2 teselas por Roger Penrose".





IDENTIFICANDO LOS 17 GRUPOS DE SIMETRÍA

Tipo	"enrejado"	Rotación menor	Refeljos	Reflejos deslizantes	Región que genera	Notas
p1	Paralelogramo	ninguna	no	no	1 unidad	Las únicas simetrias son traslaciones.
p2	Paralelogramo	1/2 revolución	no	no	1/2 unidad	4 tipos de 180 grados de rotación.
pm	Rectangular	ninguna	sí	no	1/2 unidad	2 tipos de reflexión paralela.
pmm	Rectangular	1/2 revolución	sí	no	1/4 unidad	2 tipos de reflexión horizontal y vertical.
pg	Rectangular	ninguna	no	sí	1/2 unidad	
pgg	Rectangular	1/2 revolución	no	sí	1/4 unidad	
pmg	Rectangular	1/2 revolución	sí	sí	1/4 unidad	Ejes de reflexiión paralelos uno a otro.
cm	Rómbico	ninguna	sí	sí	1/2 unidad	
cmm	Rómbico	1/2 revolución	sí	sí	1/4 unidad	Ejes de reflexión son perpendiculares unos a otros.
p4	Cuadrado	1/4 revolución	no	no	1/4 unidad	
p4m	Cuadrado	1/4 revolución	sí	sí	1/8 unidad	Centros rotacionales están en ejes de reflexión.
p4g	Cuadrado	1/4 revolución	sí	sí	1/8 unidad	Centros rotacionales no están en ejes de reflexión.
p3	Hexagonal	1/3 revolución	no	no	1/3 unidad	
p3m1	Hexagonal	1/3 revolución	sí	sí	1/6 unidad	Centros de rotación están en ejes de reflexión; 3 tipos de centro de reflexión.
p31m	Hexagonal	1/3 revolución	sí	sí	1/6 unidad	No todos los centros de rotación están en ejes de reflexión; 2 tipos de centro de reflexión.
p6	Hexagonal	1/6 revolución	no	no	1/6 unidad	
p6m	Hexagonal	1/6 revolución	sí	sí	1/12 unidad	

La p o c significa celda primitiva o centrada.

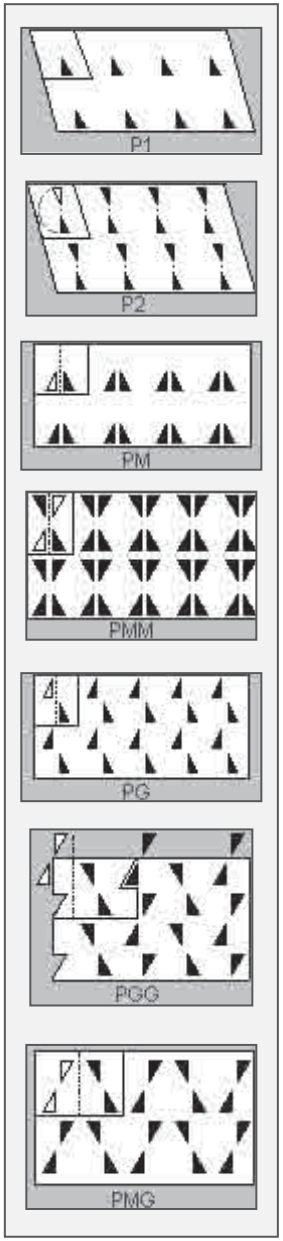
El número después de p es el mayor orden de rotación; por ejemplo si hay un 6, entonces hay una revolución de 1/6.

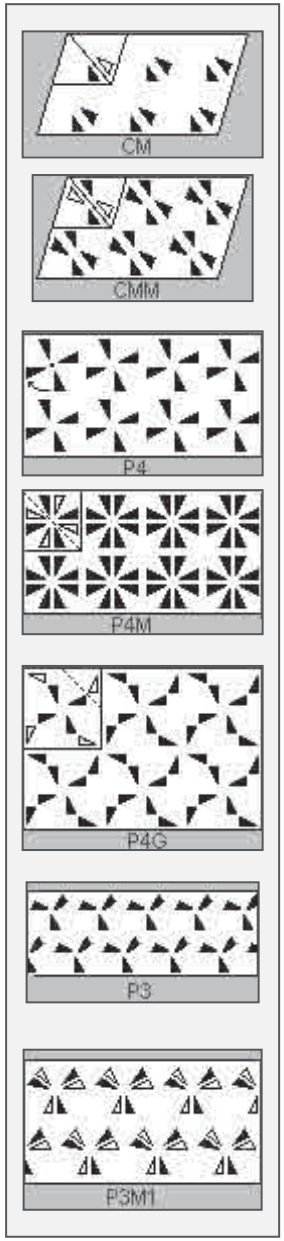
M es por (mirror:espejo) reflejo perpendicular al eje x.

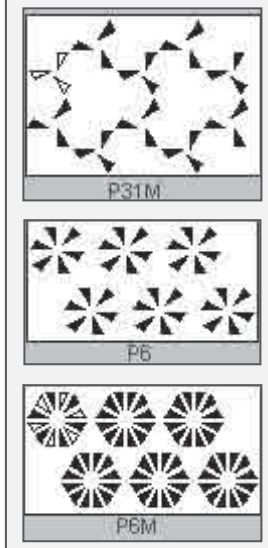
G siginifica Glide Reflection (reflejo deslizante), reflexión no perpendicular al eje x.

"El eje X" es el eje vertical izquierda de la celda.

1 significa ningún eje de simetría perpendicular a x.

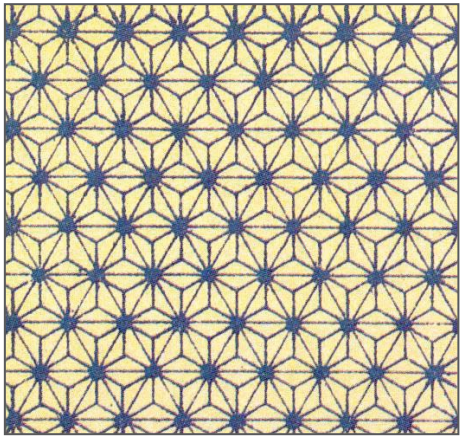




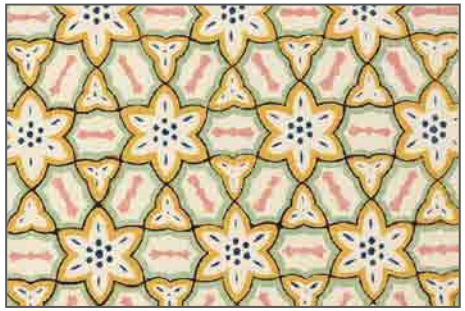


Retomando las teselas históricas, se pueden evidenciar los distintos grupos en las composiciones.

tipo pgg

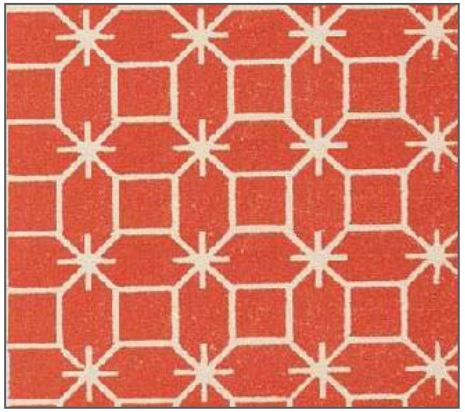


tipo p6m

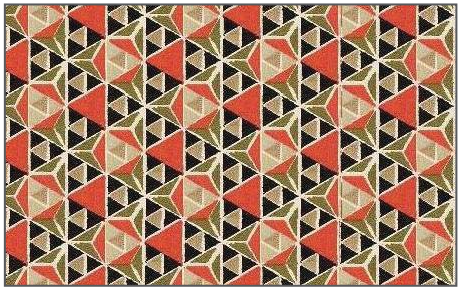


tipo p6m

tipo pmm



tipo p4m



tipo p3m

TESELACIÓN HIPERBÓLICA

Una teselación hiperbólica será una forma de recubrir perfectamente o dividir el espacio hiperbólico a través de elementos geométricos. Entonces cabe preguntarse, ¿qué es un espacio hiperbólico?

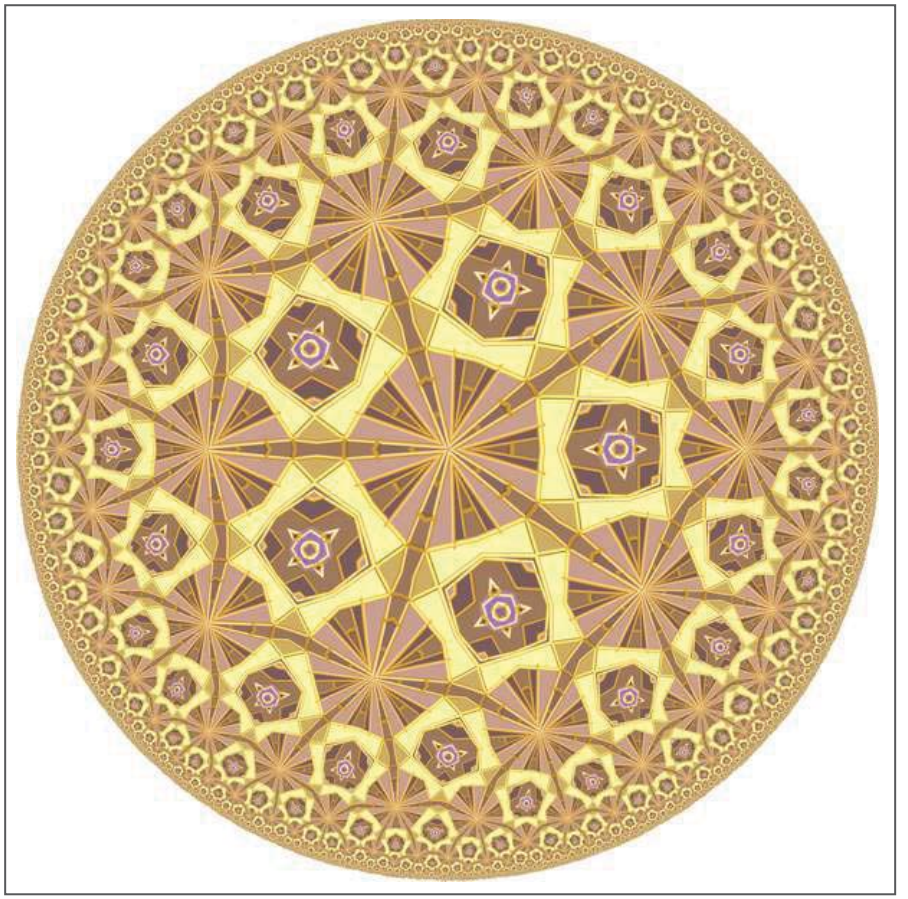
Todos estamos familiarizados con el espacio euclídeo por nuestra experiencia cotidiana. En la geometría euclídea ocurren dos cosas básicas:

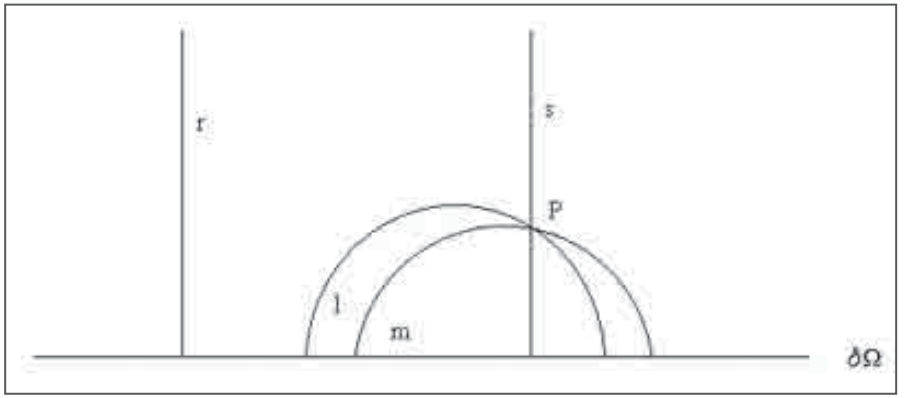
1. Se puede extender una recta de forma ilimitada.
2. Por un punto dado sólo pasa una única recta paralela a una cierta dirección.

A lo largo de la historia de la matemática han surgido nuevos espacios. Un ejemplo es el espacio elíptico. Pensemos en una esfera. Si definimos como rectas en este espacio a los círculos máximos, ya no nos será posible trazar dos rectas paralelas. En el plano euclídeo es posible trazar una única recta que pase por un punto y sea paralela a otra dada, mientras que en el plano esférico no es posible trazar ninguna.

¿Existe un espacio en el que sea posible trazar más de una recta que pase por un punto y sea paralela a una dada? Sí, el hiperbólico. Para describir el plano hiperbólico es conveniente utilizar el modelo de Poincaré. El plano hiperbólico consiste en un semiplano infinito limitado por una recta horizontal que constituye la frontera de nuestro dominio. La particularidad de este espacio consiste en que los objetos se van haciendo más y más pequeños según nos vamos acercando a la frontera, de forma que ésta se hace inalcanzable. Por mucho que caminemos en dirección a la frontera, como nuestros pasos se van haciendo cada vez más pequeños, el límite del plano no puede ser alcanzado.

En el plano hiperbólico hay dos tipos de rectas: las semirrectas verticales, que constituyen el camino más corto entre dos puntos situados “uno encima del otro” y semicírculos con centro en la frontera del plano. Este tipo de rectas se justifica al intentar buscar la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera (no alineados verticalmente), teniendo en cuenta la particularidad antes mencionada de que el tamaño de los objetos disminuye a medida que nos acercamos a la frontera del dominio. De esta forma se puede obtener más de una recta que pase por un punto y sea paralela a otra dada. Ya que, para que dos rectas sean paralelas, basta con que no se corten en ningún punto, o que lo hagan en la frontera, ya que se trata de un conjunto abierto.



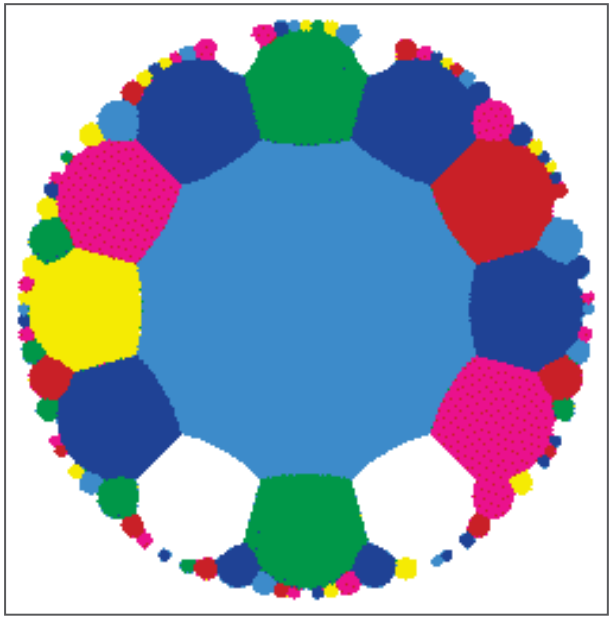


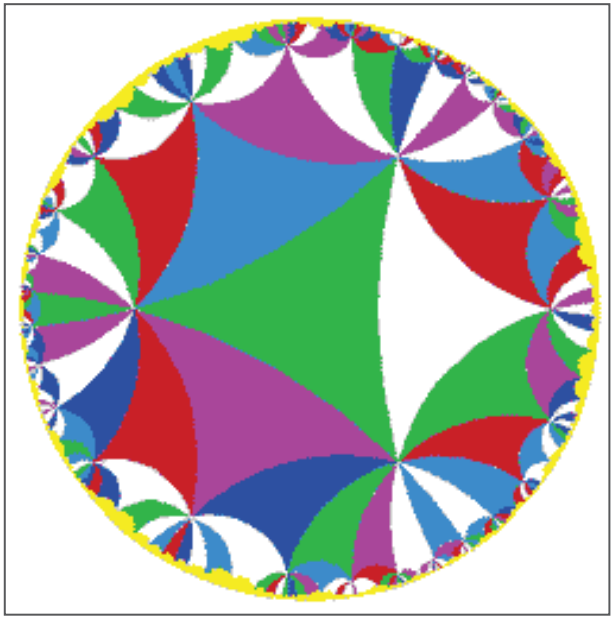
En la imagen, las rectas s, l y m son paralelas a la recta r y pasan por el punto P. De esta forma se ve que es posible trazar más de una recta que pase por un punto y sea paralela a otra dada.

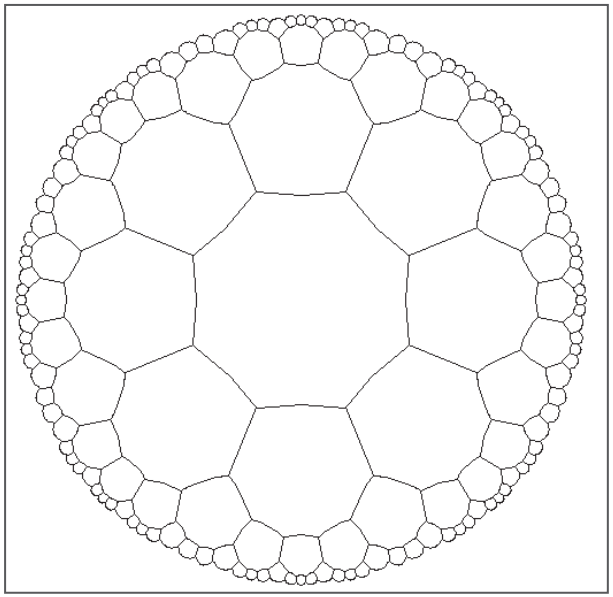
Una teselación regular consiste en cubrir el plano con polígonos regulares de forma que el número de polígonos que confluyen en cada vértice se mantenga. Para describir este tipo de teselaciones se usa la siguiente notación: {p,q}. En este par, p representa el número de lados del polígono regular y q el número de polígonos que se pueden encontrar en cada vértice. Las posibles teselaciones del plano euclídeo son {3,6}, {4,4} y {6,3}.

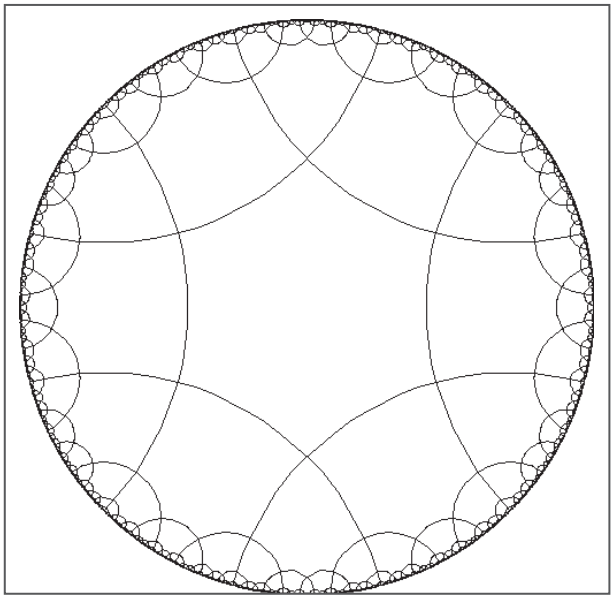
Sin embargo, y debido a las especiales propiedades de las rectas, en el plano hiperbólico existen infinitas posibles teselaciones hiperbólicas. Se puede determinar si una teselación {p,q} pertenece al plano euclídeo, al hiperbólico o al elíptico sólo con observar la suma de (1/p)+(1/q). Si la suma es igual a ½ se trata de una teselación euclídea, si es menor que ½ se trata de una teselación del plano hiperbólico y si es mayor, del plano elíptico.

Para poder representar estas teselaciones utilizaremos el disco de Poincaré: deformaremos la frontera del plano hiperbólico para convertirla en un círculo. De esta forma pasamos de un dominio semi-infinito a uno finito. De acuerdo con las propiedades del plano hiperbólico los objetos serán más grandes en el centro del círculo y se irán haciendo más pequeños a medida que nos vamos acercando al círculo que establece la frontera, de forma que ésta resulta inalcanzable. Además, las rectas de los polígonos aparecerán distorsionadas como curvas.







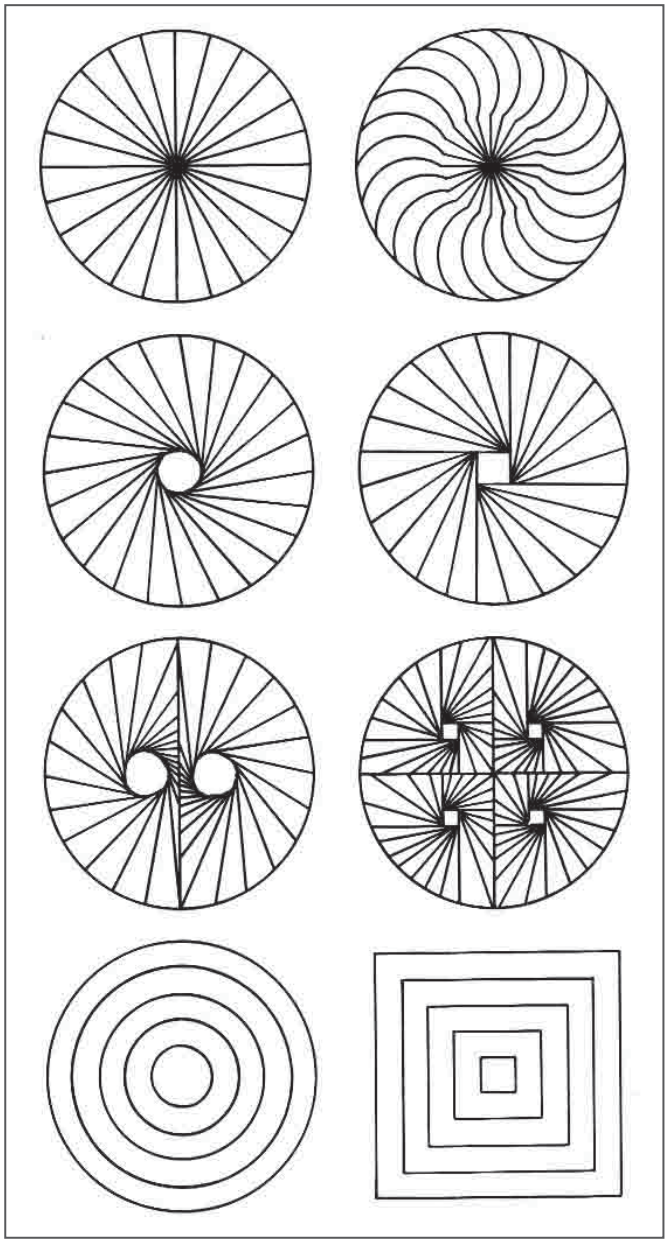


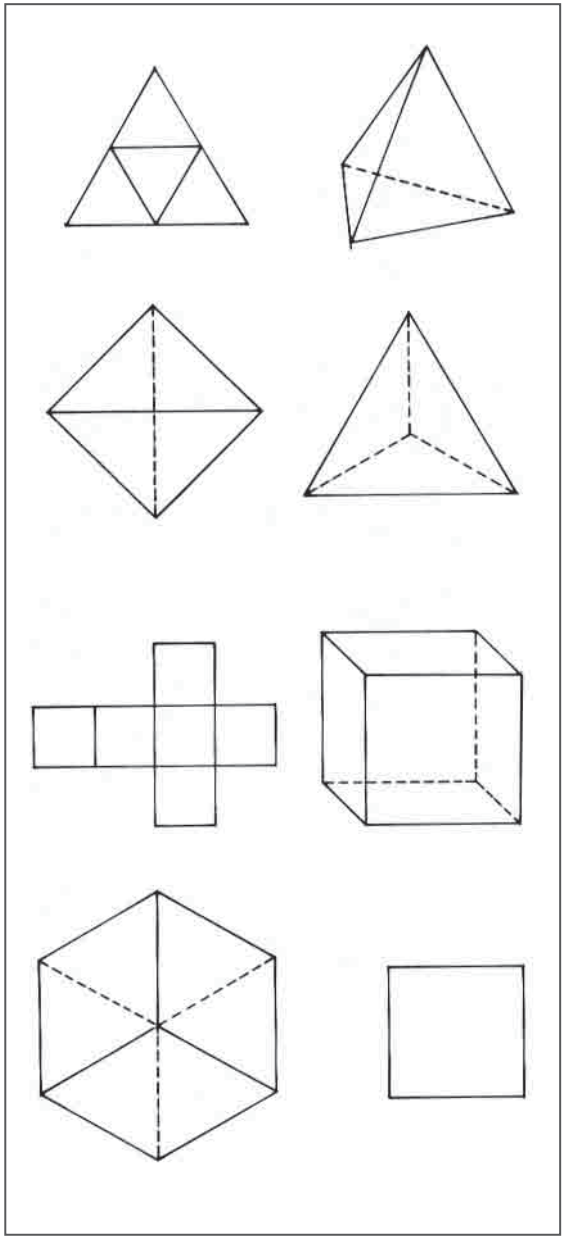
EL MUNDO BIDIMENSIONAL

Las dos dimensiones son longitud y anchura. Entre ambas determinan un plano, sobre el que pueden mostrarse trazaos visibles, y que no tiene ninguna profundidad que no sea de tipo ilusorio. Los trazos no tienen espesor y pueden ser tan abstractos como figurativos. La superficie y los trazos tomados en conjunto revelan un mundo bidimensional que difiere por completo de nuestra experiencia cotidiana.

El mundo bidimensional es esencialmente una creación humana. Dibujar, pintar, imprimir, teñir o incluso escribir son actividades que conducen directamente a la formación del mundo bidimensional.

A veces podemos ver bidimensionalmente las cosas tridimensionales, como una vista que disfrutamos por su pura belleza pictórica. En la actualidad, con los progresos de la tecnología, la cámara transforma inmediatamente todo lo que hay frente a su lente en una imagen plana, y la televisión transmite instantáneamente las imágenes móviles hacia una superficie definida. Las señales texturizadas de materiales naturales lisos, como la piedra, la madera, etc., también sugieren imágenes bidimensionales. Con todo a través de un ojo humano el mundo bidimensional adquiere su significado.



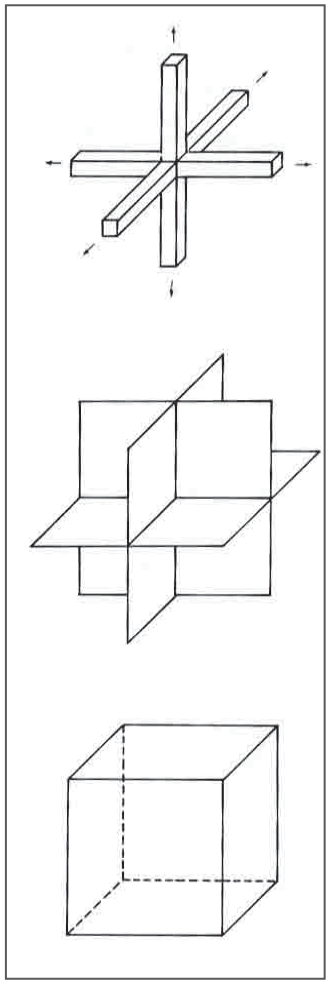


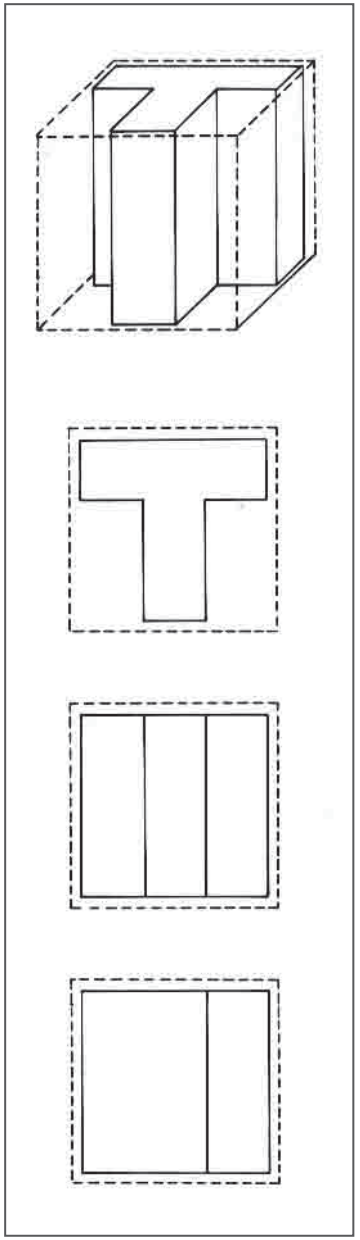
EL MUNDO TRIDIMENSIONAL

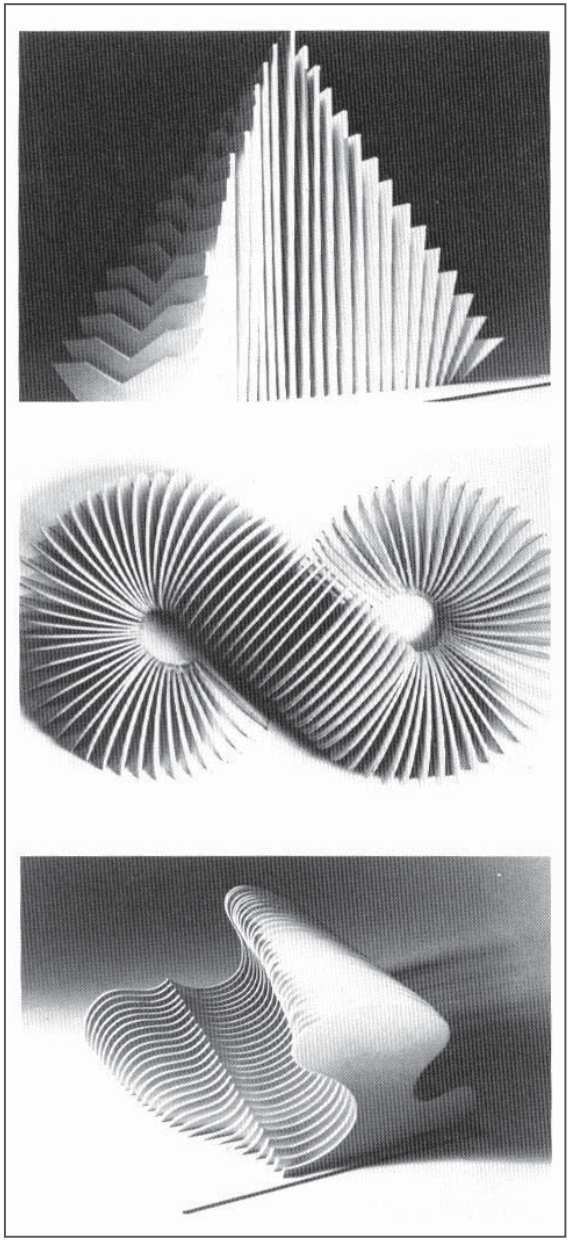
Vivimos en un mundo de tres dimensiones. Lo que vemos delante de nosotros no es una imagen lisa, que tiene sólo largo y ancho, sino una expansión con profundidad física, la tercera dimensión. El suelo que hay bajo nuestros pies se extiende hasta el horizonte distante. Podemos mirar directamente adelante, hacia atrás, hacia la izquierda, hacia la derecha, hacia arriba, hacia abajo. Lo que vemos es un espacio continuo en el que estamos incluidos. Hay muchos objetos cercanos que podemos tocar, objetos más lejanos que se hacen tangibles si tratamos de llegar hasta ellos.

Todo objeto que sea pequeño, liviano y cercano puede ser levantado y sostenido por nuestras manos. Cada movimiento del objeto muestra una figura diferente, porque ha cambiado la relación entre el objeto y nuestros ojos. Si caminamos directamente adelante hacia una escena (esto no es posible en el mundo bidimensional) no sólo los objetos que están a la distancia se vuelven gradualmente más grandes, sino que sus figuras cambian, porque vemos más de ciertas superficies y menos de otras.

Nuestra comprensión de un objeto tridimensional nunca puede ser completa con un vistazo. La perspectiva desde un ángulo fijo y una distancia puede ser engañosa. Una figura circular que sea primeramente vista desde cierta distancia alejada puede terminar por ser, tras un examen más cercano, una esfera, un cono, un cilindro o cualquier otra figura que tenga una base redonda. Para comprender un objeto tridimensional, tenemos que verlo desde ángulos y distancias diferentes y luego reunir en nuestras mentes toda la información para comprender plenamente su realidad tridimensional. Es a través de la mente humana que el mundo tridimensional obtiene su significado.

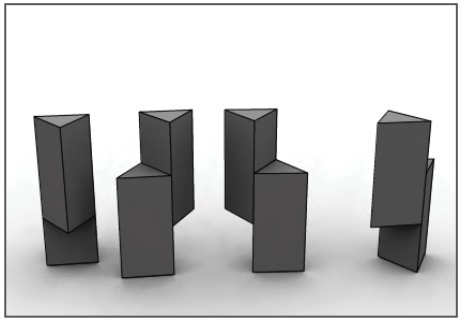


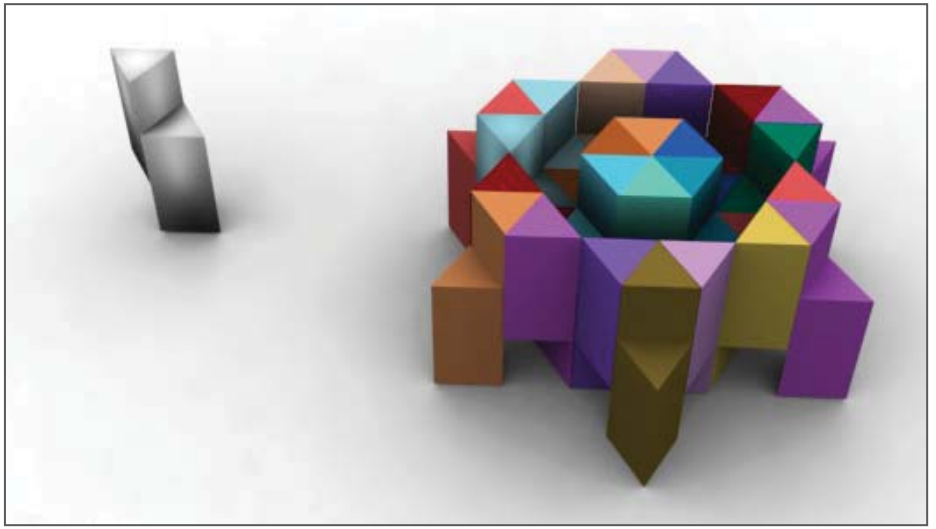


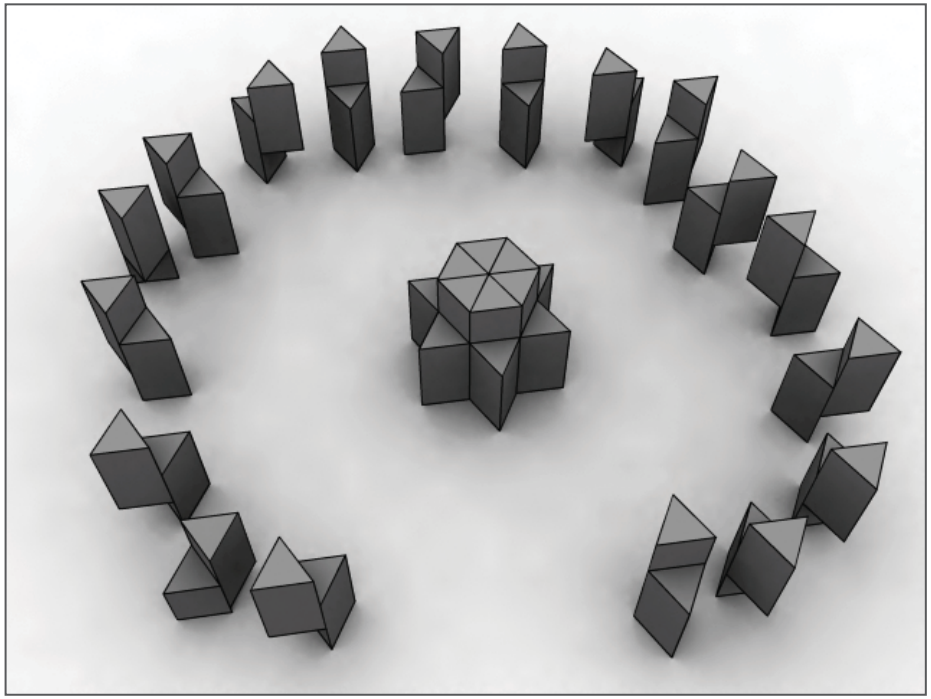


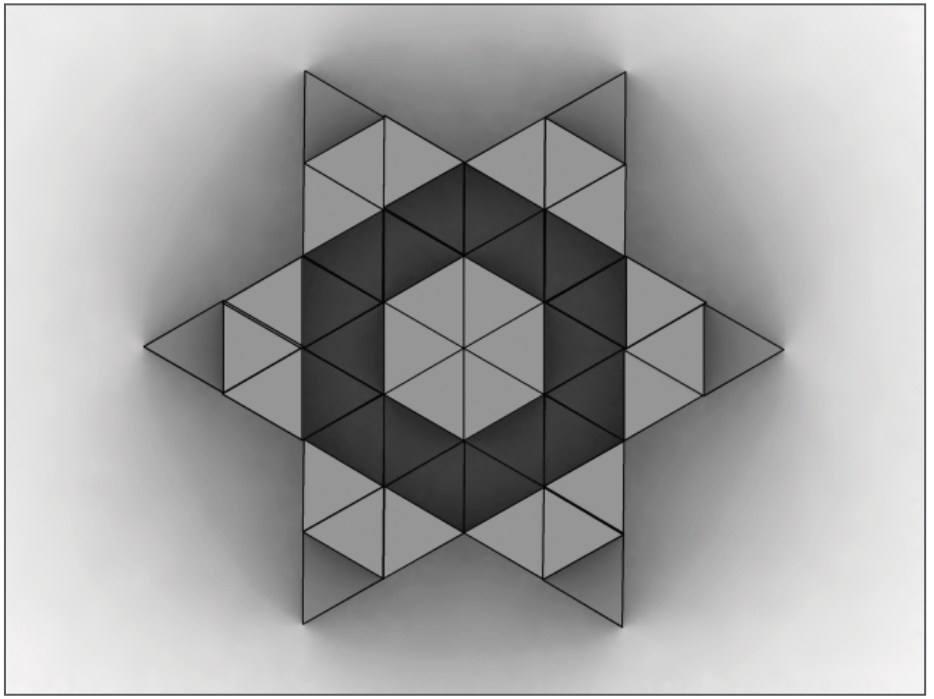
DESARROLLO Y PROPUESTAS

Paralelamente al estudio, se realizan propuestas tridimensionales de una teselación. Se va jugando con la geometría, las formas y los vacíos que va dejando la teselación. Tratándose como unas piezas de Lego, se construyen tanto virtualmente como en maquetas una serie posibilidades. Este desarrollo, tuvo como opción, el captar tanto ideas como relaciones para aplicarlo posteriormente a alguna obra de travesía.

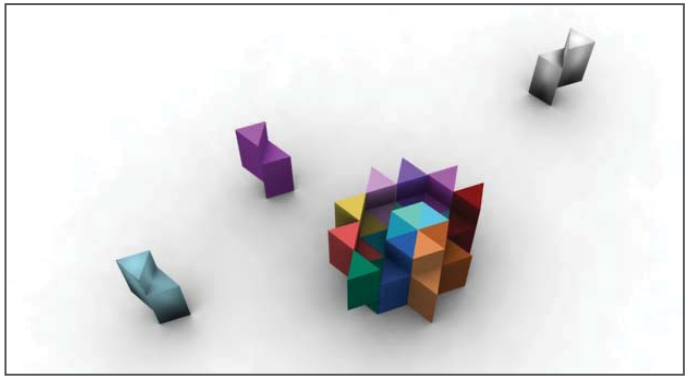


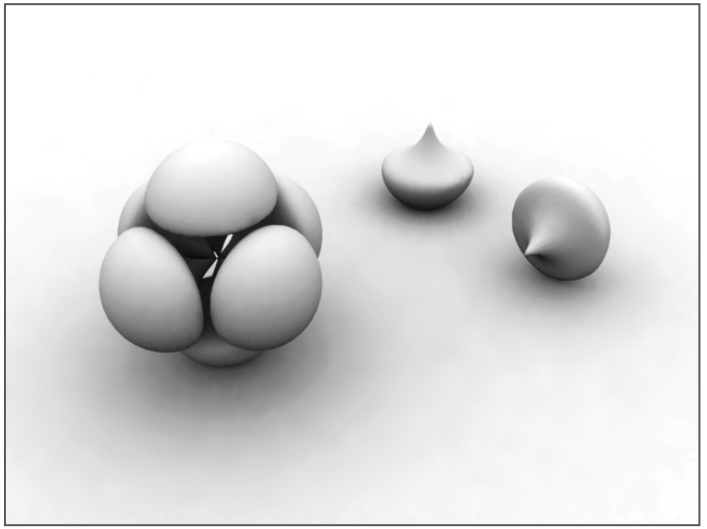


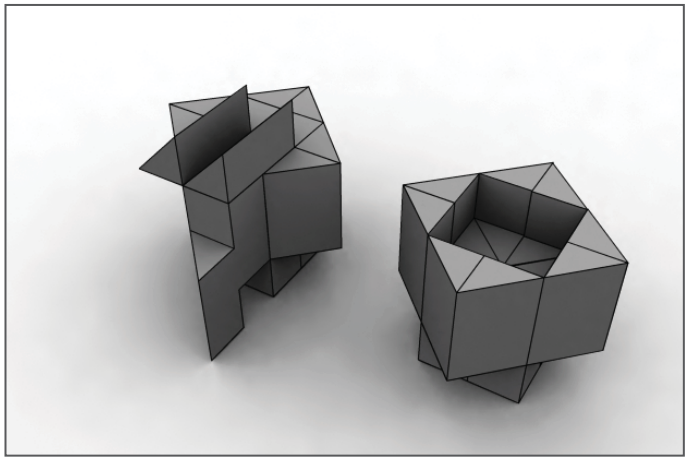


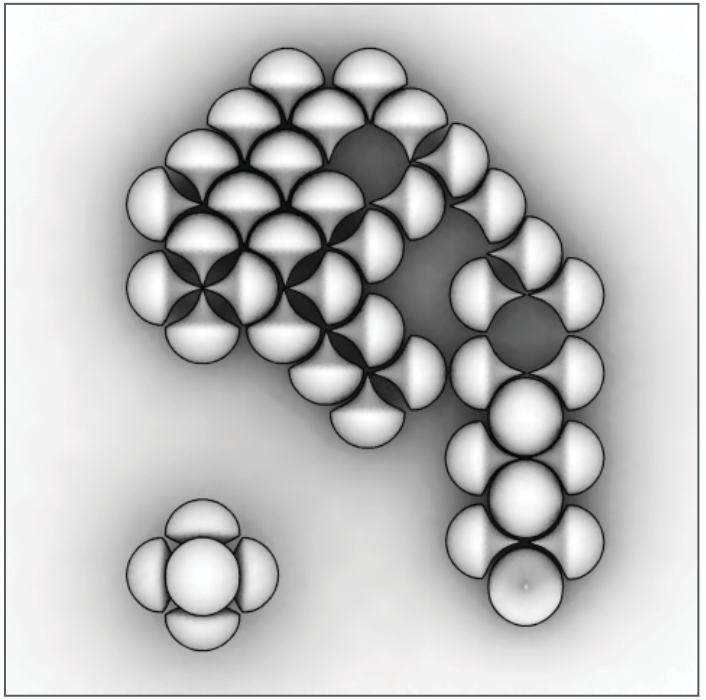


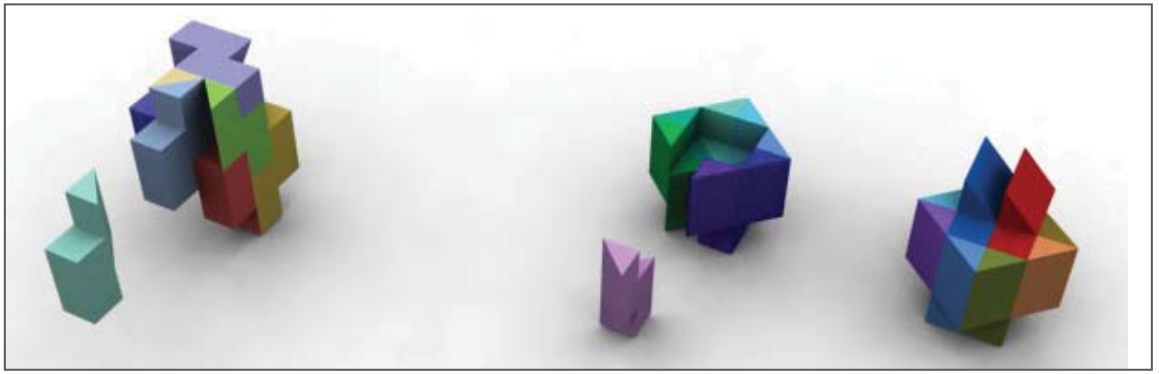
Se trata de diseñar algún modelo básico de una o dos piezas que permitan la mayor cantidad de configuraciones posibles y al mismo tiempo, la menor complejidad para construirlas en los distintos materiales.





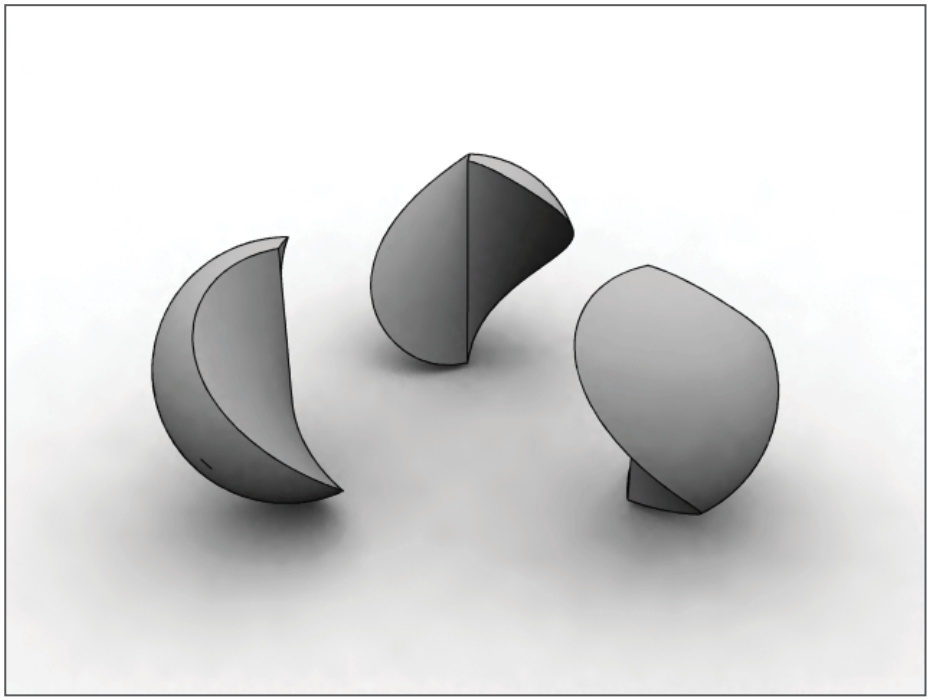


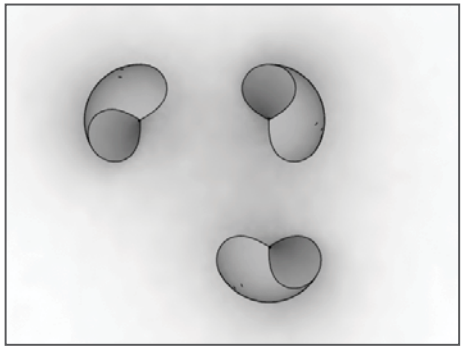




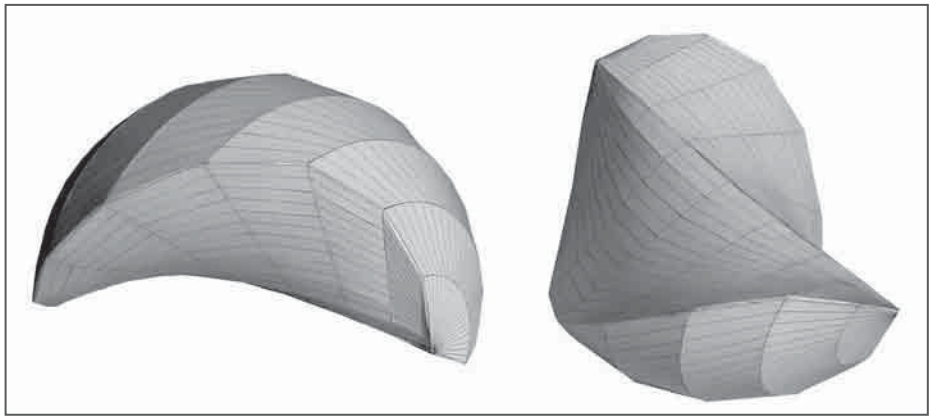
Tres tercios de esfera torcida en 120°. Más que como una posibilidad real de aplicarla para algo, se tomo como desafío en su construcción y observación de su geometría. Se trata de una esfera ya dividida en 3 partes que son torcidas respecto al eje central. Como resultado, se obtiene una teselación tridimensional cerrada de 3 unidades, cada unidad de superficies curvas y compuestas que llevan a mirarla detenidamente para comprender ahí sus posibilidades de construcción más exacta.

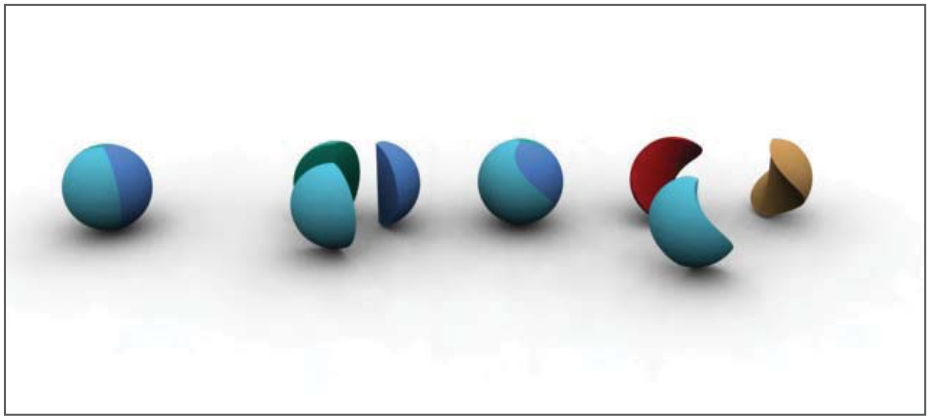
El problema geométrico y de su facturación, terminó en una serie de pruebas con distintos materiales y métodos de construcción. Desde una construcción por moldes, matrices, mallas y una extensa construcción a través de capas que finalmente, por tiempo quedo descartada. Con la idea de encontrar la planimetría a este tipo de objetos, se decidió realizar una unidad de papel por segmentos. El resultado fue una tesela tridimensional seccionada y dividida en su superficie por polígonos: lo más cercano a la precisión geométrica que se buscaba y que decidió la manera de construcción y representación del total del proyecto.

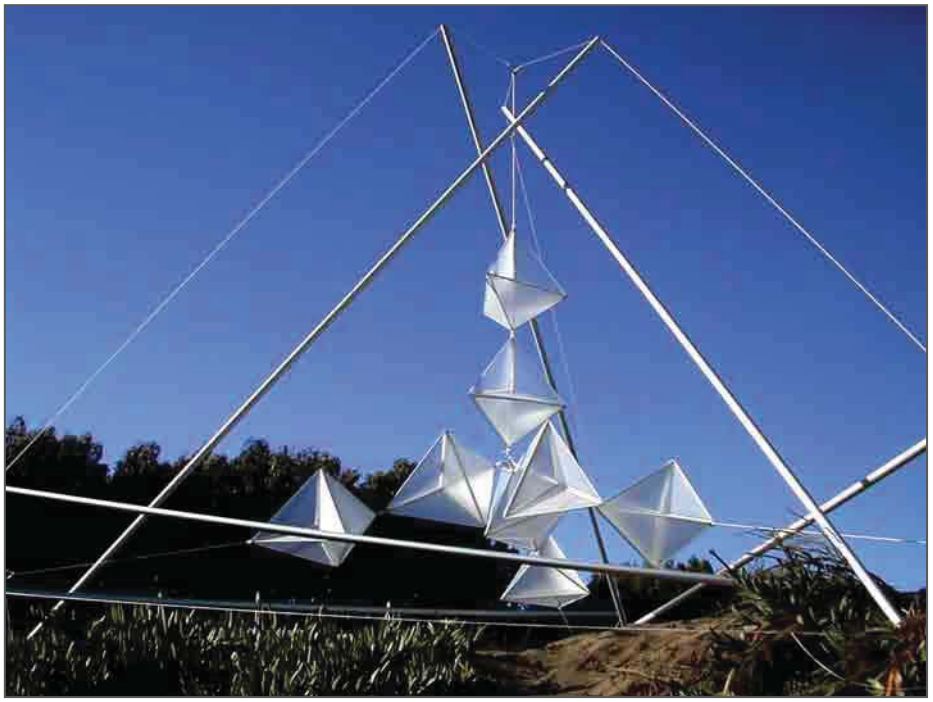




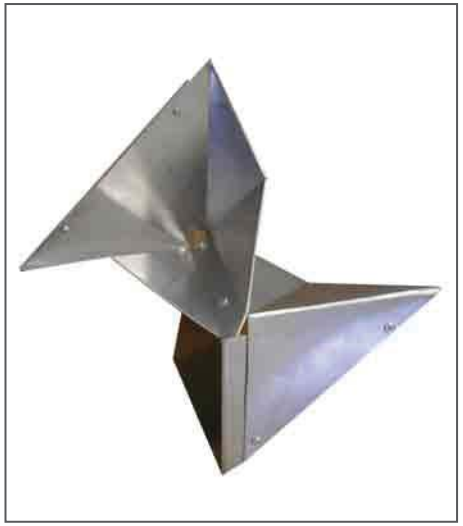
La planimetría de los tercios de esfera fue obtenida a través de la utilización de programas 3D (Autocad y Studio Max).



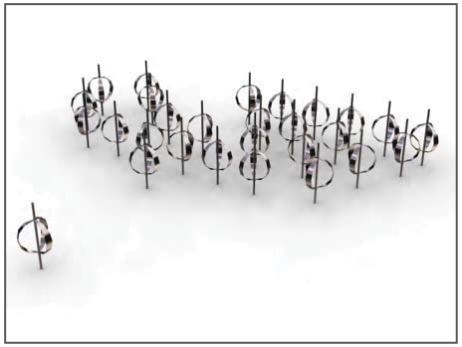




Durante la etapa se realizaron pruebas de teselas tridimensionales que funcionaran con el viento. Una traducción del concepto trabajado con una fuerza natural. El movimiento de ellas, se conjugaban con la conformación de figuras al igual que una teselación plana. Finalizada la etapa, se construyeron dos estructuras; dos tetraedros ligeros y tensados que contenían teselas traslucidas que por medio del viento iban componiendo y descomponiendo un tetraedro menor. Relacionándolo con el tema a seguir, los fractales, la unidad se repetía tratando de lograr una repetición continua de una misma figura a distintas escalas.



Arriba: Teselas eólicas inscritas en un tetraedro tensado. Se ubicaron 2 de estas estructuras en el día de los exámenes de primer y segundo año.

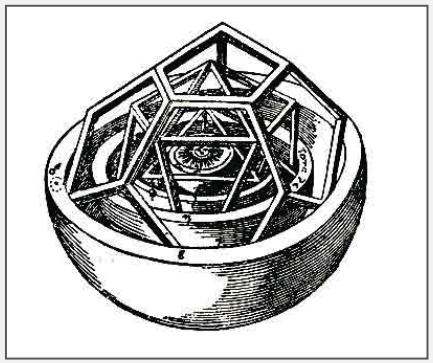


POLIEDROS

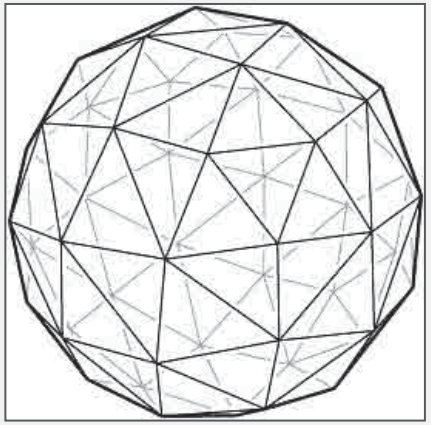
INTRODUCCIÓN

El estudio de los poliedros es una de las áreas más versátiles de las Matemáticas, en lo que respecta tanto a sus aplicaciones como a las posibilidades que ofrece a entendidos de la materia y a aquellos que trabajan con la geometría.

Los poliedros más comunes son conocidos por gran parte de la sociedad; sin embargo, muy pocas veces se da una mirada exhaustiva que permita analizar y comprender la estructura de las formas geométricas como lo son los poliedros. Se trata acá de introducir los poliedros como una manera de teselación que se proyecta en tres dimensiones, de una planimetría teselada a un volumen teselado y cerrado. Una manera de demostrar en continuidad el traspaso de un plano a una figura que mantiene sus propiedades cualitativas (características geométricas visuales) ante otras dentro de un mismo grupo. No dejando de lado el propósito de profundizar en el tema y de estudiar la continuidad como concepto en la forma, se consideraran aspectos de una interacción entre la historia, el arte y la ciencia.



Un poliedro es una forma tridimensional acotada por polígonos (una región del plano limitada por segmentos). Una clase especial de poliedros son los poliedros convexos. Algebraicamente, un poliedro convexo es el conjunto de soluciones del sistema MX≤B, donde M es una sx3-matriz real y B es un s-vector. Geométricamente, que es aquel aspecto más tangible y visible para nosotros como diseñadores, un poliedro convexo es aquél en el que el segmento que une dos puntos del mismo está contenido en el poliedro o en su interior. En un poliedro convexo, el número de vértices V, el de caras F y el de aristas E están relacionados por la fórmula de Euler V+F-E=2.



La "figura vértice" de un vértice de un polígono es el segmento que une la mitad de los dos lados adyacentes

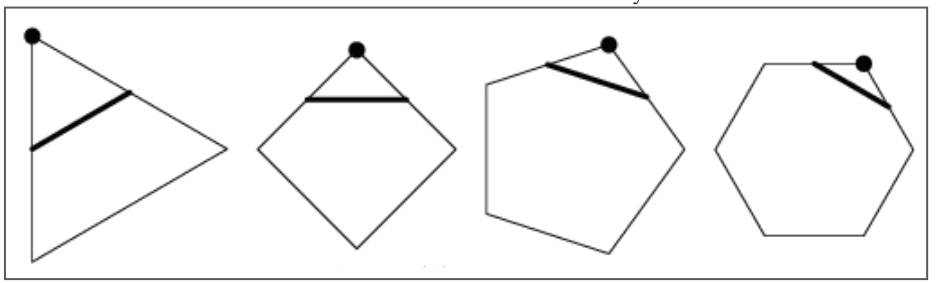


Figura vértice de diferentes polígonos

De igual forma, en un poliedro, la figura vértice de uno de sus vértices es el polígono cuyos lados son las figuras vértice de las caras adyacentes a dicho vértice

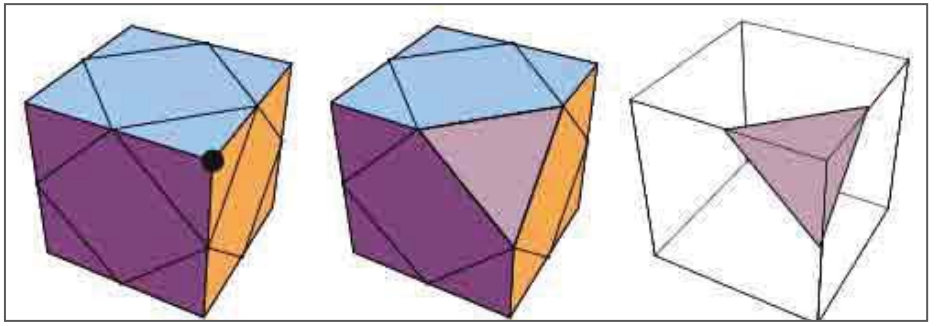
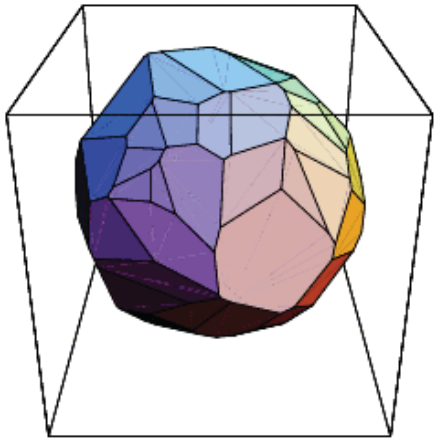


Figura vértice de un poliedro

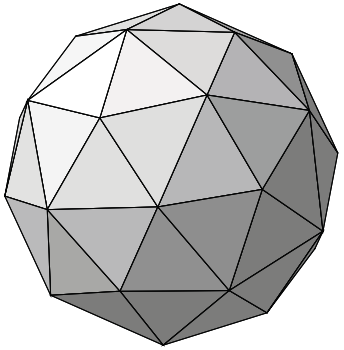
CLASES DE POLIEDROS

Teniendo en cuenta que todas las caras son polígonos regulares (polígonos con lados y figuras vértices de igual longitud) y barajando las propiedades “caras iguales”, “figuras vértice iguales” y ”convexidad”, los poliedros se pueden clasificar en clases

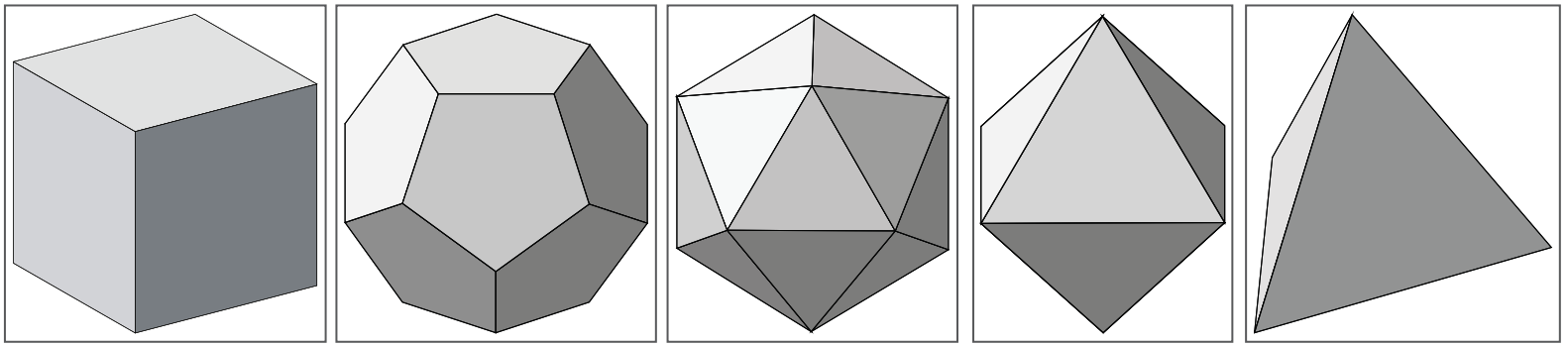
Etimológicamente la palabra poliedro deriva del griego que significa “muchos planos/ caras”.



Clase	Número de Sólidos	Caras idénticas	Figuras vértice idénticas	Convexidad
Sólidos Platónicos	5	sí	sí	sí
Sólidos Arquimediano	13	no	sí	sí
Prismas y Antiprismas	Infinitos	no	sí	sí
Poliedros de Kepler-Poinsot	4	sí	sí	no
Deltahedros	8	sí	no	sí
Poliedros uniformes no convexos	53	no	sí	no
Prismas y Antiprismas no convexos	Infinitos	no	sí	no
Sólidos de Johnson	92	no	no	sí

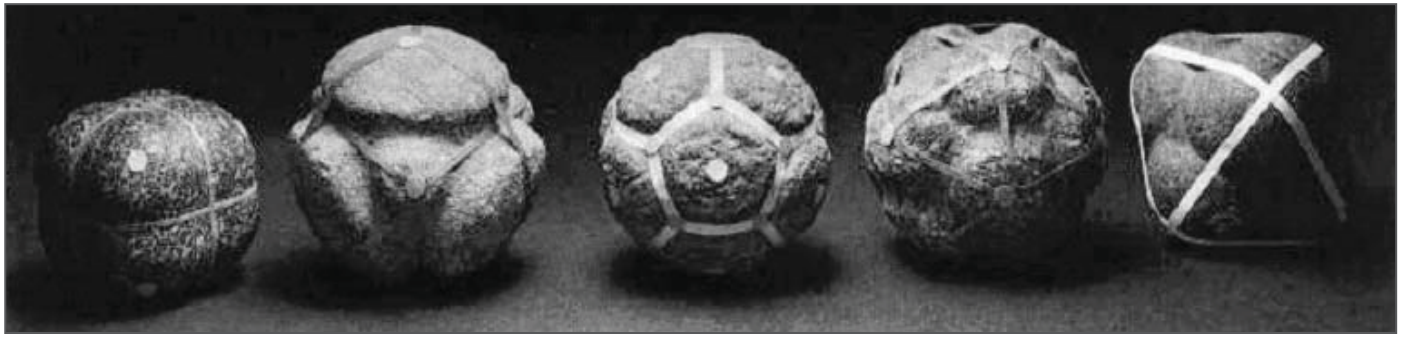


Sólidos Platónicos



HISTORIA

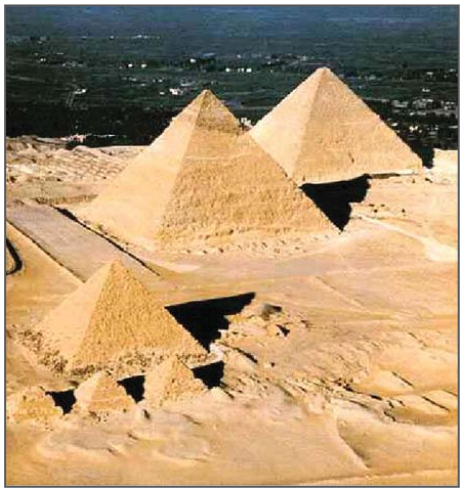
Los vestigios encontrados en algunas zonas de Escocia nos hacen pensar que ya algunos pueblos neolíticos conocían la existencia de ciertos poliedros. Estos restos, actualmente localizados en el Ashmolen Museum de Oxford, son piedras esculpidas que recuerdan a algunos poliedros (cubo, icosaedro, dodecaedro.) y que se sospecha pudieron ser usados como dados, elementos de juego o decorativos.



Algunas civilizaciones como la egipcia y la babilónica tenían conocimientos más explícitos de algunos de estos poliedros (cubo, tetraedro, octaedro). Una evidencia de ello la encontramos en las famosas pirámides egipcias, santuarios de eternidad de los faraones, en donde ya comienza a ponerse de manifiesto la conexión entre los poliedros y ciertos aspectos religiosos y místicos.

Estos conocimientos pudieron haberse propagado desde Egipto y Babilonia a Grecia a través de los viajes de Tales y Pitágoras. Se sospecha que el interés de Pitágoras por los poliedros regulares viene de la observación de estas formas geométricas en los minerales, ya que su padre era grabador de piedras preciosas.

Izquierda: La pirámide de Jufu, generalmente conocida como la “Gran Pirámide”.
Abajo: Pirámides de Gizeh

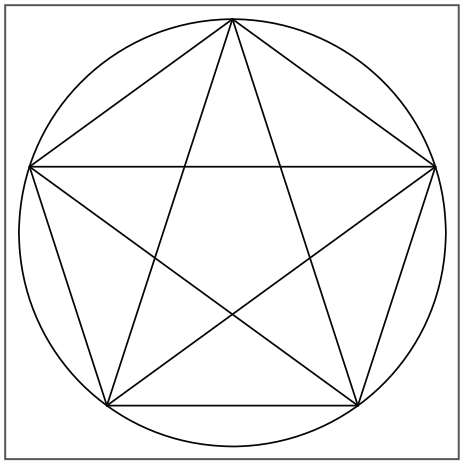


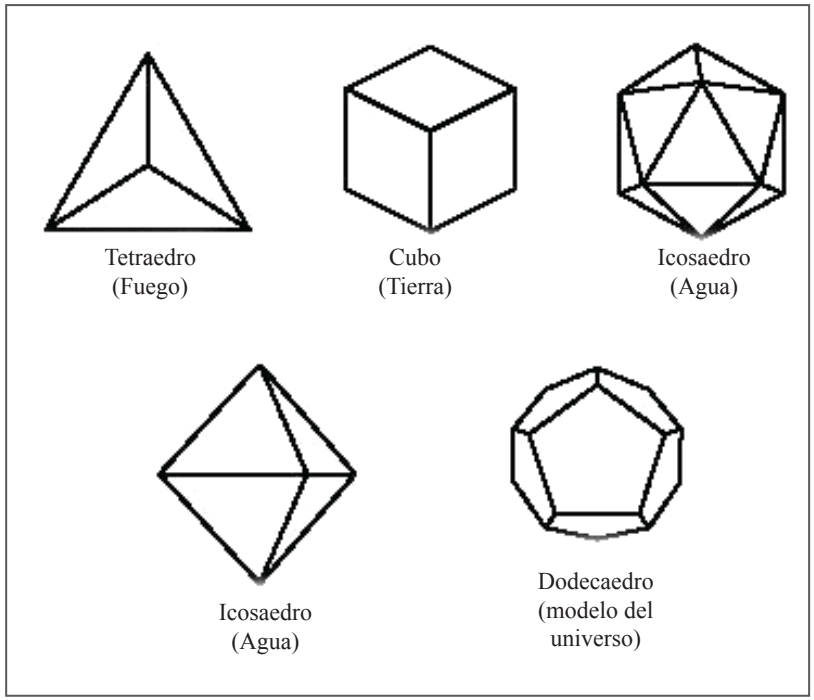
Los Pitagóricos estaban fascinados por los poliedros conocidos, pero sobre todo, por el dodecaedro y por su relación con el cosmos. Relata Jámblico cómo la divinidad elimina al delator de uno de sus grandes secretos: "la divinidad se disgustó con el que divulgó las doctrinas de Pitágoras, de tal forma que pereció en el mar, por el sacrilegio cometido, el que reveló como se inscribía en una esfera la constitución del dodecaedro".

La razón de esta fascinación se debe a su relación con el pentagrama místico (pentalfa) o estrella de 5 puntas, emblema de la salud y símbolo de identificación de los Pitagóricos. Esta estrella se obtiene al trazar en un pentágono regular las diagonales o prolongar sus lados. Una de las bellas propiedades que tiene el pentagrama es que los cortes entre las diagonales determinan segmentos que están en proporción áurea (divina proporción), siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono. Recordamos que un punto C entre el segmento AB determina la sección áurea si AC/BC = BC/AB. La sección áurea, en forma de rectángulo áureo (los lados del rectángulo están en proporción áurea), aparece en muchas obras arquitectónicas emblemáticas a lo largo de la historia: el Partenón, la gran muralla China, el castillo de Windsor, la Plaza de la Concordia en París, etc,

El pentagrama ya era conocido en Egipto. En el templo de Kurna (1700 a.C.) fue encontrado un tablero con este símbolo en el que se practicaba un juego (pentalfa), que todavía subsiste en algunos lugares de Creta.

Aunque Proclo atribuye a Pitágoras la construcción de las figuras "cósmicas" que relacionan los 4 elementos primarios (fuego, tierra, aire y agua) con el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro, respectivamente, parece que esto es poco probable, ya que Empédocles de Agrigento fue el primero que distinguió los cuatro elementos primarios. Al parecer los Pitagóricos sólo conocían el tetraedro, el cubo y el dodecaedro. El icosaedro y el octaedro se atribuyen a un amigo de Platón, Teeteto, a quien se debe el estudio sistemático de los cinco poliedros regulares. Los poliedros regulares (el tetraedro, el cubo, el icosaedro, el octaedro y el dodecaedro) se llaman sólidos Platónicos por el papel que tiene en el diálogo de Platón (Timeo) en donde se pone de manifiesto la relación entre los cuatro primeros sólidos Platónicos y los 4 elementos primarios. Del quinto poliedro regular, el dodecaedro, dice: "Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final" Para Platón la belleza de los poliedros regulares no reside en su apariencia física, sino en el ámbito del pensamiento matemático: "cada uno de los 5 sólidos participa en la idea de sólido regular e inversamente esta idea se plasma en 5 casos particulares".





SÓLIDOS PLATÓNICOS

Euclides mejoró los trabajos de Teeteto en relación con los sólidos Platónicos, probando que los únicos poliedros convexos regulares (con caras y figuras vértices iguales) eran los Sólidos Platónicos. De hecho, este resultado es importante en la historia de las Matemáticas ya que constituyen el primer ejemplo de teorema fundamental de clasificación: “Ninguna otra figura, además de estos cinco (los sólidos Platónicos) se pueden construir con polígonos equiláteros y equiángulos”. Su demostración es muy simple, ya que si tenemos un poliedro regular con m polígonos regulares de n lados que confluyen en cada vértice, entonces la suma (m sumandos) de los ángulos ((n-2)180º/n) que determinan las aristas en un vértice es menor que 360º

m (n-2) 180º/n < 360º,

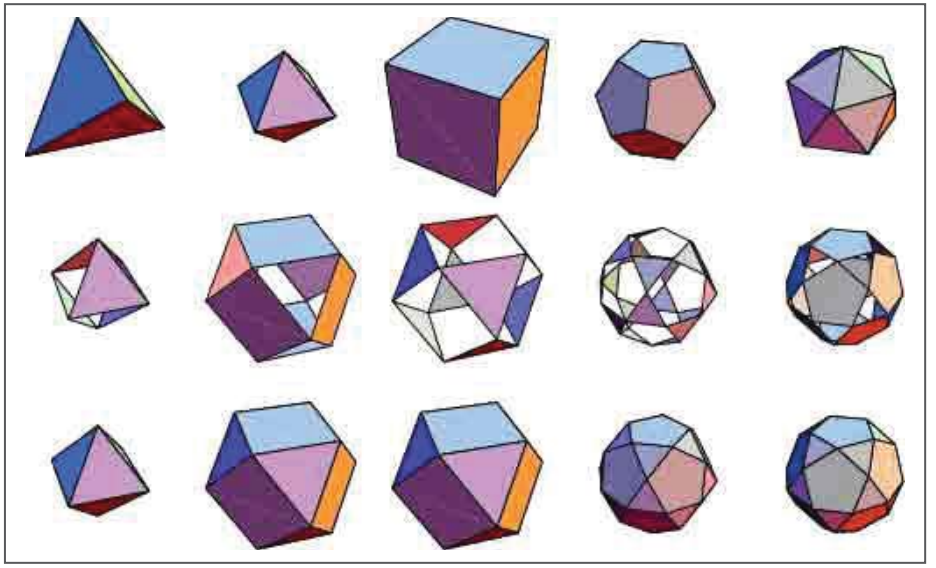
esto es, (m-2)(n-2)<4. Las soluciones (m,n) a esta desigualdad son (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3) correspondiendo en cada caso con uno de los sólidos Platónicos.

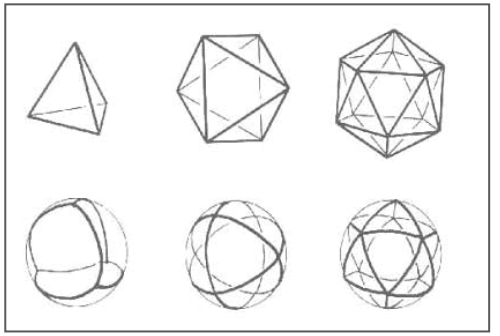
Los poliedros Platónicos pueden ser considerados como poliedros en el límite de la perfección. Algunas evidencias a este respecto son las siguientes:

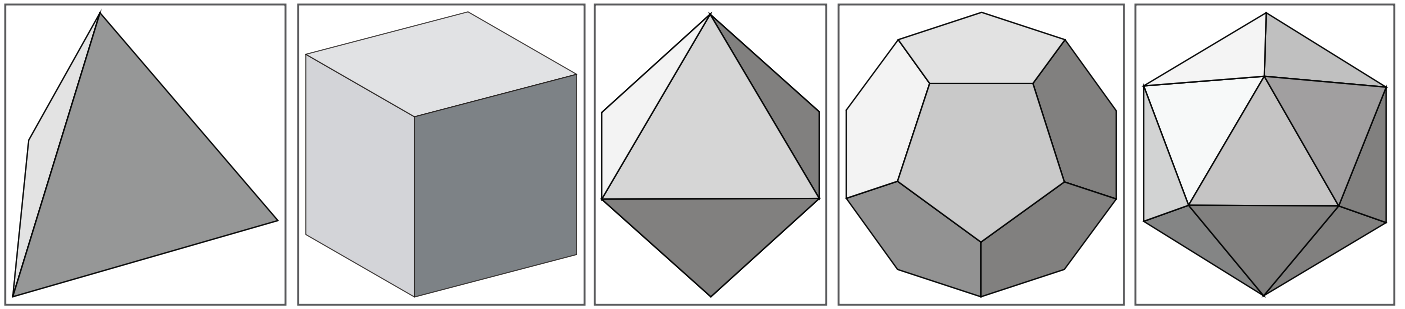
- Los sólidos Platónicos son poliedros convexos cuyas caras y figuras vértices son polígonos regulares. Las figuras vértice también son polígonos regulares. Esta última condición es equivalente a que los vértices del poliedro estén en una esfera o que los ángulos diedrales (ángulos que determinan las caras adyacentes del poliedro) sean iguales.

- Las figuras vértice de los sólidos Platónicos generan nuevos poliedros.

- Si circunscribimos una esfera en un sólido Platónico, y colocamos un rayo de luz en el centro del poliedro, las aristas del sólido Platónico se proyectan en arcos de círculos máximos (esto es, sobre las geodésicas de la esfera).







Los sólidos platónicos: Tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

- Los sólidos Platónicos pueden además ser proyectados sobre un plano. Esta proyección se obtiene eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro Platónico desde un punto por encima del centro de esta cara. La figura que se obtiene se llama diagrama de Schlegel. También se pueden obtener si rompemos una cara y estiramos las restantes caras sobre la pared , sin romper las aristas. Parte de las características del poliedro (como la conexión entre vértices y lados y algunas de sus simetrías) se preservan en su correspondiente diagrama de Schlegel. Esto facilita el estudio de determinados problemas, tales como los de recorrido y coloración.

En el caso de los sólidos Platónicos estos diagramas son únicos (no depende de la cara desde la que se proyecte).

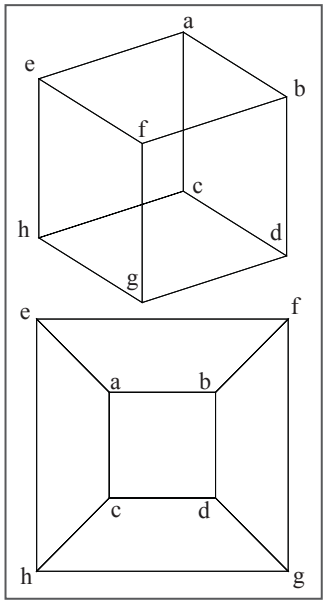
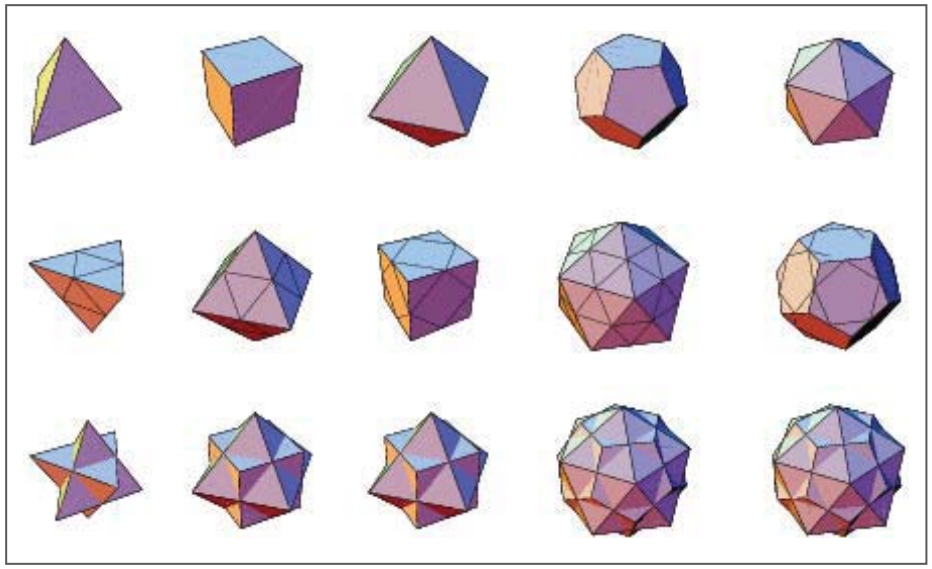


Diagrama de Schlegel

- Los sólidos Platónicos, aunque son completamente diferentes, están relacionados entre sí por la dualidad. A todo poliedro P le podemos asociar otro, que llamaremos poliedro dual, de forma única, tal que las caras y los vértices de P están en correspondencia biyectiva con los vértices y caras, respectivamente, de su dual. De esta forma si P* es el dual de P, entonces P es el dual de P*. Para visualizar el poliedro dual de uno dado, consideramos el poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del poliedro de partida y las caras están formadas por vértices que corresponden a caras adyacentes.

Entonces, el dual del tetraedro es el propio tetraedro, el dual del cubo es el octaedro y el dual del icosaedro, el dodecaedro.
Nótese que como los centros de las caras de cada poliedro Platónico son vértices de sus duales ellos equidistan de un centro común, con lo que podemos construir una nueva esfera tal que cada cara del sólido de partida es tangente a ella. Por tanto, la esfera inscrita de un sólido Platónico es la circunscrita de su dual.

Como hemos visto, poliedros regulares convexos, sólo hay cinco. Si eliminamos la condición de ser convexo, tenemos 4 más. Éstos son conocidos como los poliedros de Kepler-Poinsot.

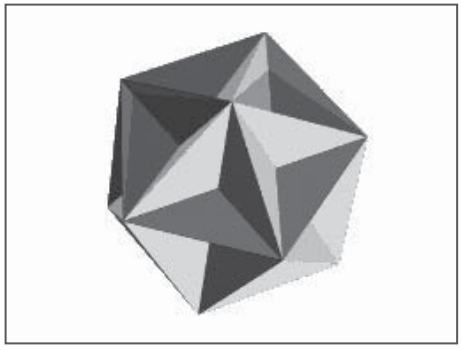


Kepler en 1619 se dio cuenta de que existían dos maneras diferentes de pegar 12 pentagramas a lo largo de sus aristas para obtener un sólido regular. Si 5 de ellos se unen en un solo vértice, obtenemos el pequeño dodecaedro estrellado. Si son 3 pentagramas los que se encuentran en cada vértice, tenemos el gran dodecaedro estrellado.

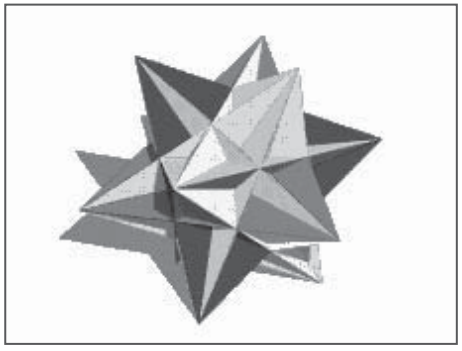
Posteriormente, en 1809 Louis Poinsot descubrió los otros dos poliedros no-convexos regulares, el pequeño icosaedro (ver Fig. 12) y el gran dodecaedro (ver Fig. 11). Las 12 caras del gran dodecaedro son pentágonos, pero que, a diferencia del dodecaedro, se intersecan unas a otras. Si observas detenidamente el gran dodecaedro parece que contiene varias estrellas que conforman su estructura, pero sólo se puede ver una. El gran icosaedro se obtiene con 20 triángulos, intersecándose entre sí. Los sólidos de Poinsot son de hecho los duales de los sólidos de Kepler.

Pequeño dodecaedro estrellado

Gran dodecaedro estrellado

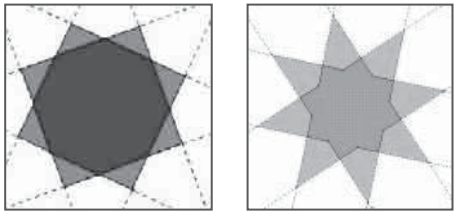


Gran dodecaedro



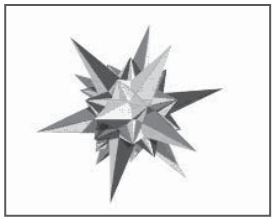
Gran icosaedro

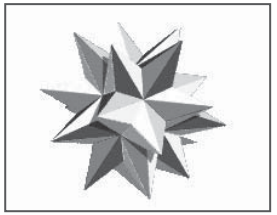
Todos estos poliedros de Kepler-Poinsot pueden ser obtenidos usando el proceso estelación a partir de los sólidos Platónicos. Para ello extendemos las caras del poliedro hasta que se intersequen. En el caso bidimensional, la estelación consiste en un nuevo polígono que se construye a partir de las extensiones de los lados del polígono original.

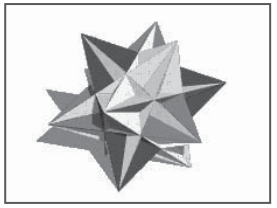


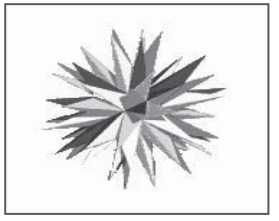
Estelaciones sucesiva de un octógono y de un octaedro.

Estelación del octaedro







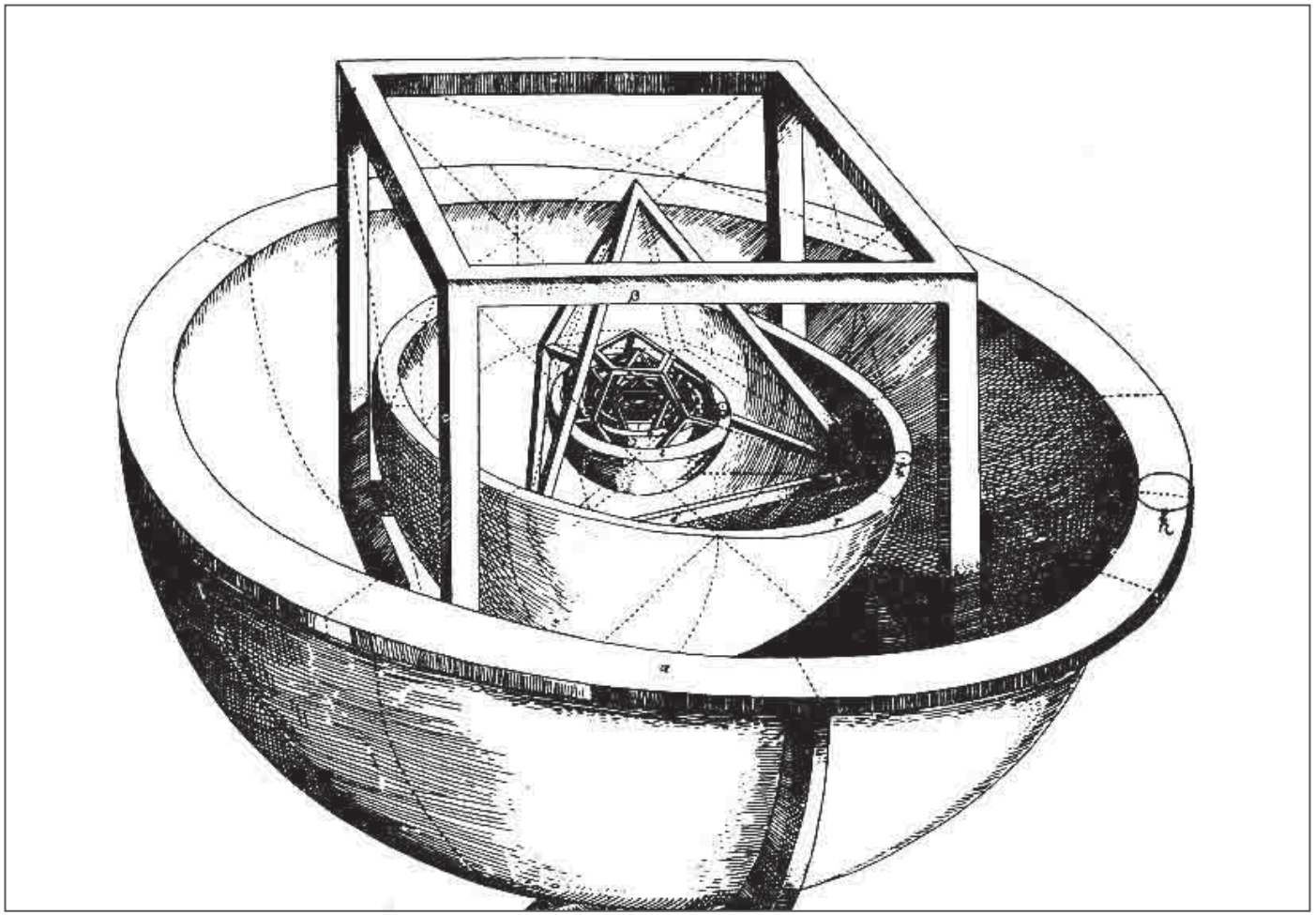


Estelaciones del icosaedro

Kepler estuvo muy interesado por las propiedades de los sólidos Platónicos, ya que éstos le permitieron elaborar una teoría cosmológica (en su libro El secreto del Universo), justificando que las hipótesis de Copérnico sobre la configuración del universo resultan apropiadas .

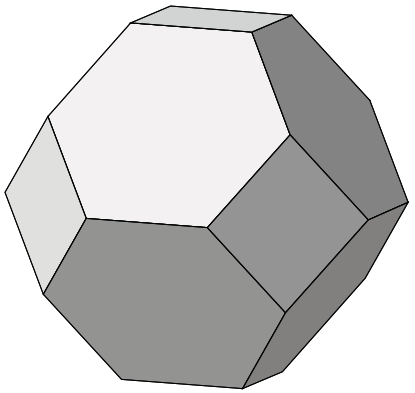
En la época de Kepler sólo se conocían 6 planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. La mano de un Dios geómetra debía vincular la existencia de estos 6 planetas con los cinco sólidos Platónicos. Para ello, Kepler da una visión del sistema solar que consiste en sólidos Platónicos inscritos en esferas cuyos radios estaban relacionados con las órbitas de los planetas (el misterio cósmico): dentro de la órbita o esfera de Saturno, inscribió el cubo, y en el interior de éste la esfera de Júpiter circunscrita a un tetraedro. En la esfera inscrita de este tetraedro situó la órbita de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra el dodecaedro; entre la Tierra y Venus, el icosaedro y entre Venus y Mercurio, el octaedro. En el centro del sistema colocó el Sol.

Como una anécdota más que refleja el interés que en Kepler despertaron los sólidos Platónicos, recordamos aquí la ingeniosa explicación de la relación Platónica entre los sólidos Platónicos y los elementos naturales: El tetraedro encierra menor volumen (humedad) en relación con su superficie (sequedad) mientras que el icosaedro encierra el mayor de todos los sólidos platónicos. Por eso identificamos el tetraedro con el fuego y el icosaedro con el agua. El cubo como es el poliedro de mayor estabilidad se identifica con la tierra. El octaedro que, cogido mínimamente se puede hacer girar con facilidad es el aire. Finalmente, el dodecaedro está asociado con el universo porque tiene 12 caras, como 12 son los signos del Zodíaco.

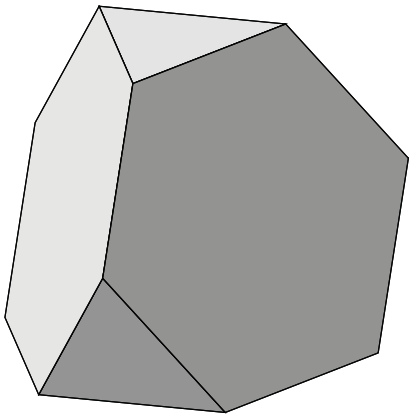


SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS

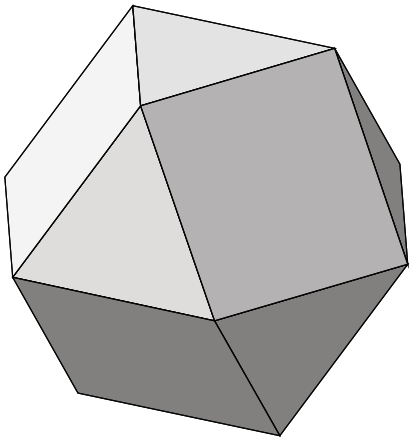
Un poliedro convexo es semi-regular si sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos. A estos sólidos se les llama sólidos Arquimedianos, ya que se cree que fueron descubiertos por Arquímides, aunque no se tiene ninguna prueba documental que lo acredite. Existen 13 sólidos Arquimedianos. Siete de ellos se obtienen por truncamiento de los sólidos Platónicos, es decir, por cortes de las esquinas, acción que se puede ejecutar de distintas maneras. Así, los denominados con los nombres de los sólidos Platónicos de origen más el término "truncado", se obtienen al dividir cada arista en tres partes y cortar por estas divisiones. Si l dividimos la arista a la mitad y truncamos, sólo obtenemos dos nuevos poliedros: el cuboctaedro y el icosidodedaedro. Sus nombres se deben al hecho de que al realizar el proceso de truncamiento que acabamos de describir, en el caso de un cubo y de un octaedro (respectivamente, icosaedro y dodecaedro) obtenemos el mismo poliedro. Este fenómeno está relacionado con la dualidad entre los sólidos Platónicos. Si realizamos este proceso de truncamiento al tetraedro, obtenemos de nuevo un tetraedro (recuerda que el dual del tetraedro es de nuevo en tetraedro).



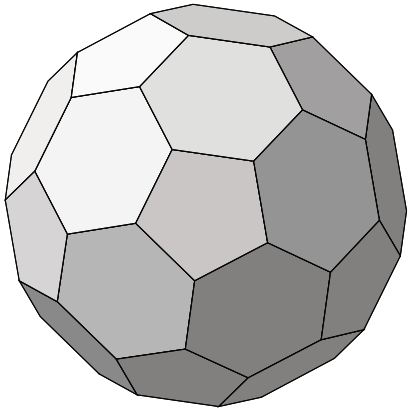
Octaedro Truncado



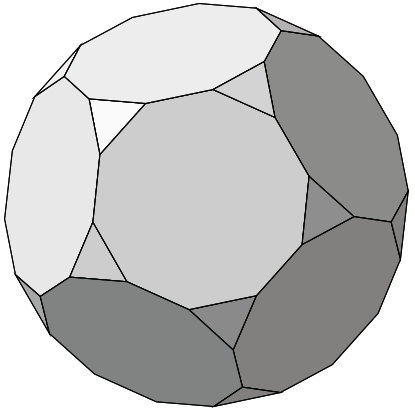
Tetraedro Truncado



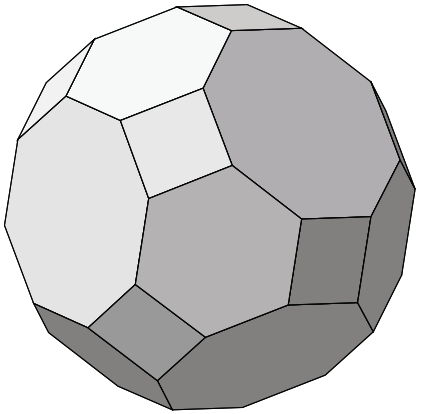
Cuboctaedro



Icosaedro Truncado



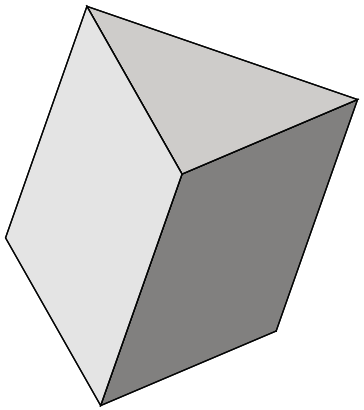
Dodecaedro Truncado



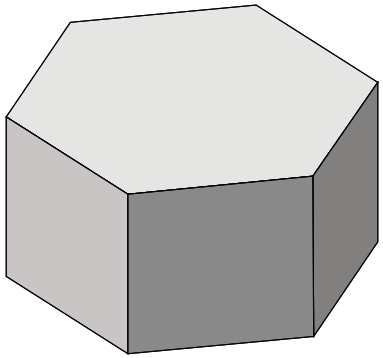
Rombitruncado Cuboctaedro

PRISMAS, ANTIPRISMAS Y DELTAEDROS

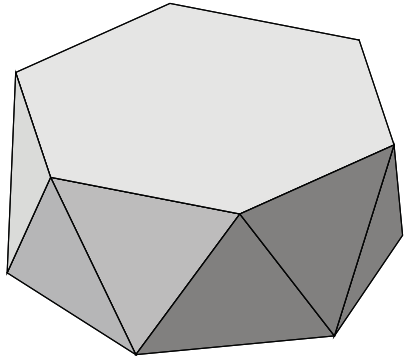
Un prisma es un poliedro formado por dos copias idénticas de un polígono con aristas que conectan sus vértices iguales. Así todas sus caras salvo dos son rectángulos. Un antiprisma está generado también por dos copias idénticas conectadas por triángulos equiláteros. El número de prismas y antiprismas es infinito. El cubo es un prisma y el tetraedro es un antiprisma. Dependiendo si el polígono que genera el prisma o el antiprisma es convexo o no, tenemos los prismas (antiprismas) convexos o no-covexos.



Prisma Triangular

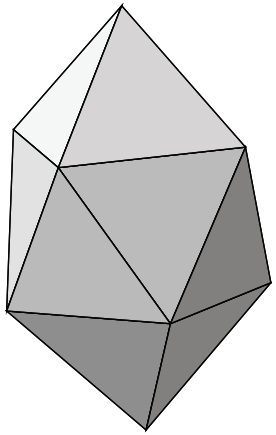


Prisma Hexagonal

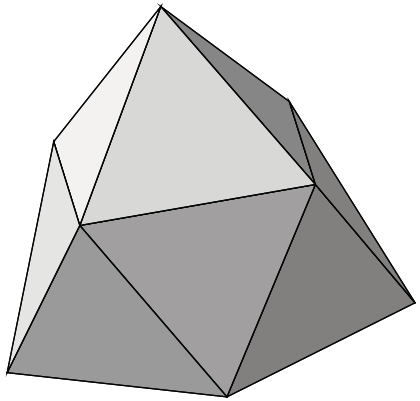


Antiprisma Hexagonal

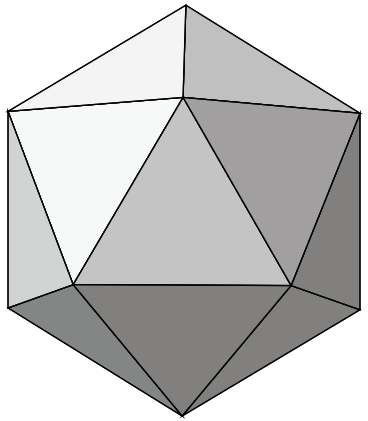
Si las caras de un poliedro son triángulos congruentes equiláteros estamos ante un deltaedro. El más pequeño de los deltaedros es el tetraedro con 4 caras. Teniendo en cuenta que un poliedro no puede tener más de 5 triángulos alrededor de un vértice, el número de caras de un deltaedro convexo debe estar entre 4 y 20. De hecho, el número de caras es 3F/2 (y por tanto, tiene un número par de caras). Además, no se puede construir un deltaedro de 18 caras. De todo ello resulta que sólo hay 8 deltaedros convexos. Si eliminamos la condición de convexidad, el número de deltaedros es infinito.



Bipirámide Cuadrada



Deltaedro de 14 lados

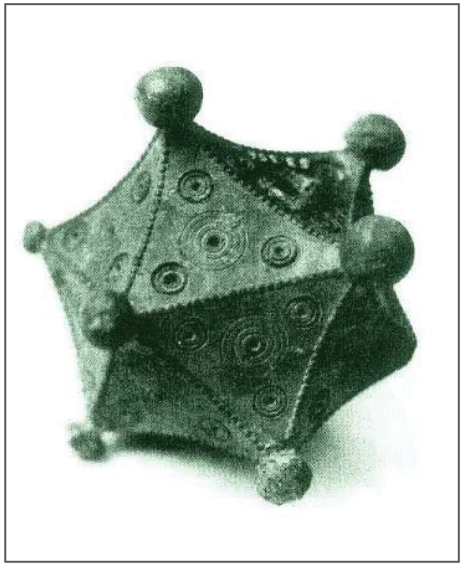


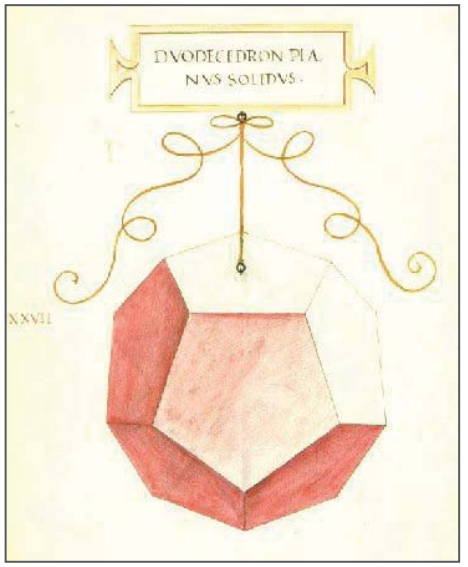
Icosaedro

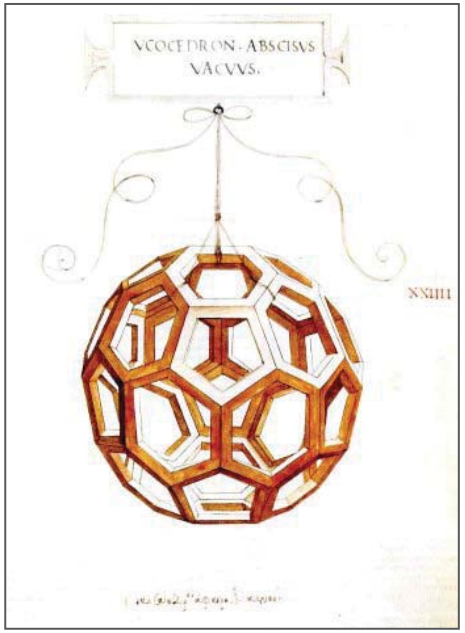
POLIEDROS Y ARTE

Los poliedros han sido utilizados en muchas épocas de la historia como elementos decorativos. Como ejemplo, el objeto de la época romana que se ilustra al costado.

Pero, quizás el período histórico en el que la conexión entre arte y poliedros ha sido realmente fructífera ha sido el Renacimiento. Muchos de los grandes artistas de la época utilizaron los poliedros como un instrumento para desarrollar ciertas técnicas relacionadas con la perspectiva. Esto supuso el descubrimiento de algunos nuevos poliedros o el redescubrimiento de otros que habían quedado en el olvido. Éste es el caso de Paolo Uccello, pintor florentino e importante mosaiquista, o de Piero della Francesca, pintor renacentista cuyas técnicas sobre la perspectiva fueron olvidadas y atribuidas posteriormente a Luca Pacioli. En su principal trabajo "De Divine Proportione" de Pacioli, incorporó los dibujos poliedrales de Leonardo da Vinci de indudable belleza y realismo, algunos de ellos tomados de modelos huecos en madera. Estos modelos fueron interesantes objetos para aplicar las técnicas relacionadas con la perspectiva.



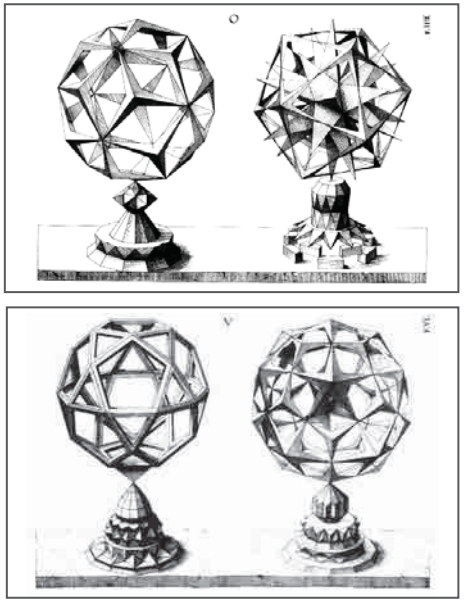




Dibujos poliedrales de Leonardo Da Vinci.

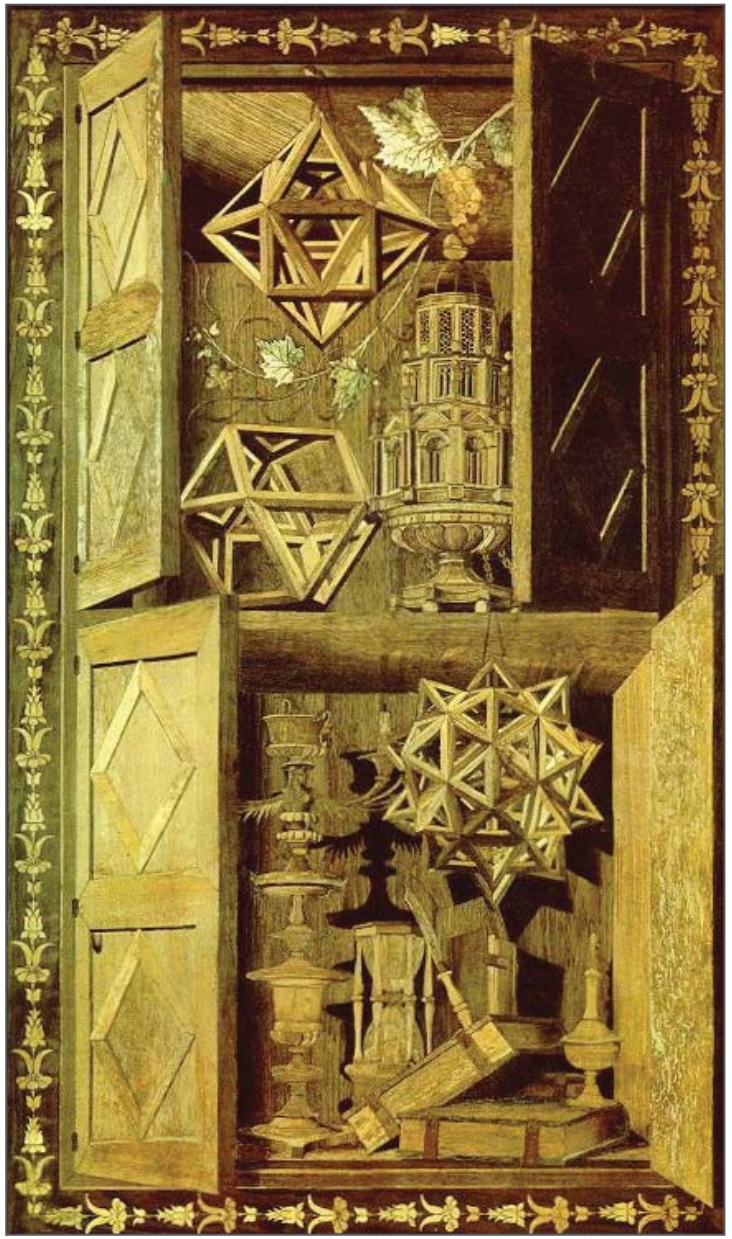
También son de esta época (1520) los famosos mosaicos elaborados con maderas de diversas tonalidades elaborados por Fra Giovanni y en donde se muestran poliedros o esquemas de poliedros.

En la escuela alemana Renacentista, algunos de sus más famosos artistas han usado estructuras poliedrales en sus trabajos. Este es el caso de Alberto Durero, autor de "Melancolía", cuadro que representa a un frustrado pensador sentado al lado de un romboide truncado, al que se le han buscado diferentes interpretaciones; otro exponente de esta escuela se encuentra el orfebre Jamnitzer, uno de los más creativos artistas poliedrales tal y como se ven en las imágenes inferiores.



Esculturas de Jamnitzer.

"Melancolía" de Alberto Durero

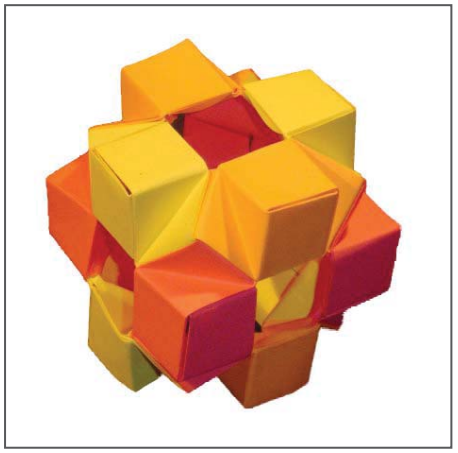


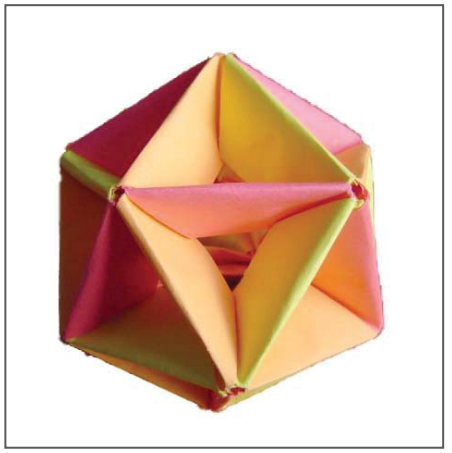
Mosaicos con piezas de madera de Fra Giovanni

La introducción de estas nuevas estructuras poliedrales supusieron un desarrollo matemático posterior de las mismas.

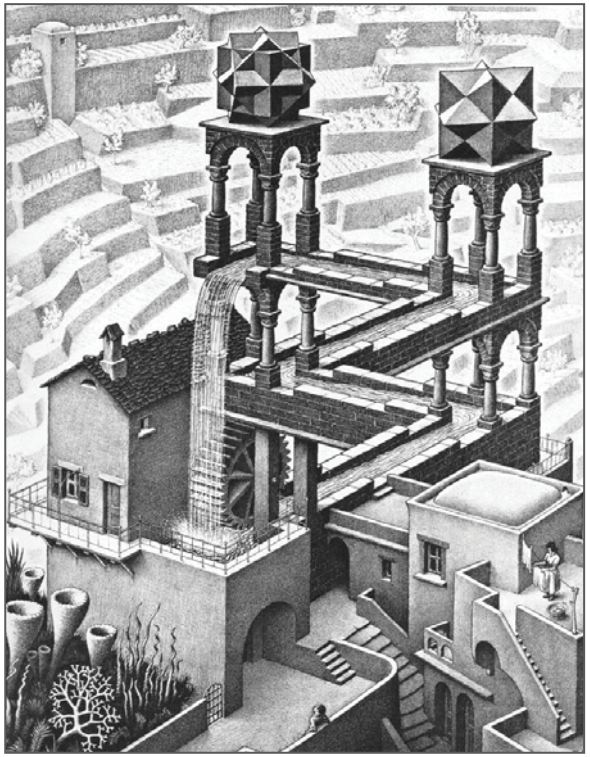
Esta conexión entre poliedros y arte ha permanecido a lo largo de la historia, en diferentes manifestaciones artísticas.

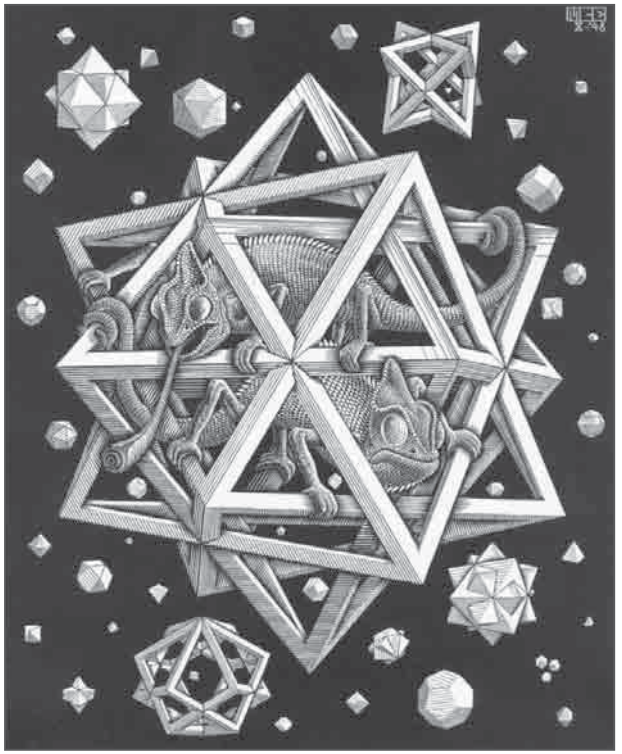
La papiroflexia u origami, el arte de origen japonés del papel doblado; Diversas construcciones de objetos pueden ser hechas usando una simple hoja de papel. Muchas formas matemáticas pueden ser realizadas usando esta técnica. Este es el caso de los poliedros.





El imaginativo Escher creó imágenes en donde se superponen mundos de diferentes espacios en los que incluyó estructuras poliedrales. Su interés por los poliedros pudo estar influenciado por su hermano, geólogo interesado en la cristalografía. Dos de sus obras emblemáticas, donde los poliedros son elementos fundamentales en sus composiciones, son “Waterfall”, en donde aparece la primera estelación del dodecaedro como elemento decorativo en las torres que coexisten en mundos diferentes; y “Stars”, en donde se muestra un cielo poliedral.





APLICACIONES

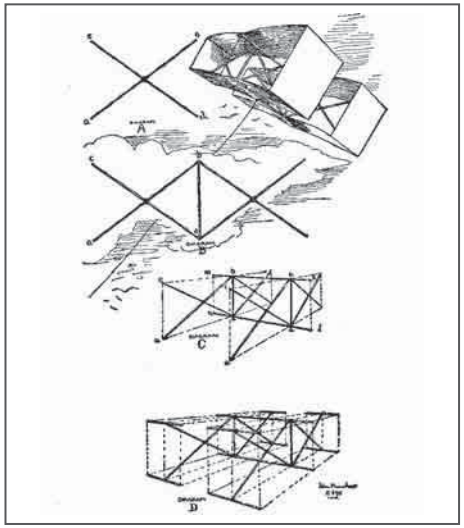
Debajo de todo recubrimiento exterior de cualquier estructura tridimensional subyace una forma esquelética que proporciona a la estructura gran parte de sus propiedades. Así por ejemplo, la estructura de un puente está condicionada a la disposición de sus vigas. Estas formas esqueléticas están relacionadas en muchos casos con los poliedros. También a nivel microscópico la estructura química y biológica de la materia está formada por átomos y moléculas unidas en complejas formas espaciales que, en muchos casos, son poliedrales.

La aparición de ciertas estructuras poliedrales en las soluciones de problemas de diversas ramas de la ciencia es uno de los aspectos que han originado el interés de muchos científicos por el estudio matemático de los poliedros. (De ahí la relación de los 5 sólidos Platónicos con los elementos básicos que configuran el mundo o el significado cosmológico de las estructuras poliedrales).

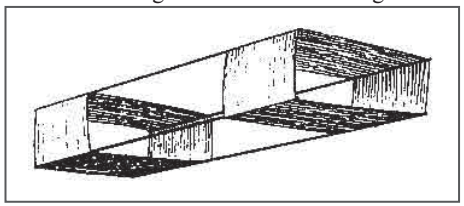
Un aspecto de estas áreas son la construcción de cometas. A finales del siglo XIX el ingeniero y astrónomo Lawrence Hargrave comienza a interesarse por la aerodinámica con el fin de conseguir un aparato que pudiera volar tripulado por un hombre. Su investigación se centró entonces en resolver el problema de cómo ciertos pájaros eran capaces de remontar el vuelo sin batir las alas. Estos estudios le llevaron a diseñar varias cometas intentando buscar la forma más aerodinámica. Sus primitivas cometas desembocaron en la cometa de caja o celular, basada en el siguiente principio:

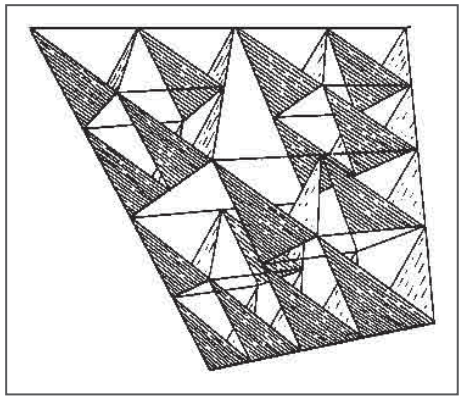
Si se tienen dos o más superficies una encima de otra, se logra una mayor sustentación que con una sola superficie más larga.

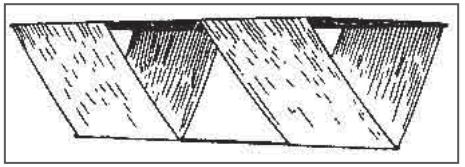
Concluye entonces que la cometa de dos celdas rectangulares es la más estable y con mayor empuje. Esta cometa es la base del diseño de las mayoría de las cometas meteorológicas que se desarrollaron con posterioridad. Sin embargo, este tipo de cometas tiene un problema de construcción: para adquirir su forma necesitan unos segmentos diagonales que tensen y den rigidez a la estructura.

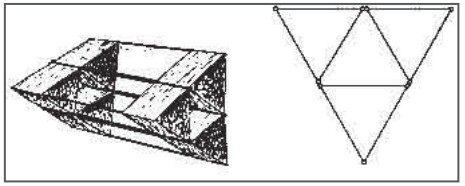


Cometa rectangular de Lawrence Hargrave.

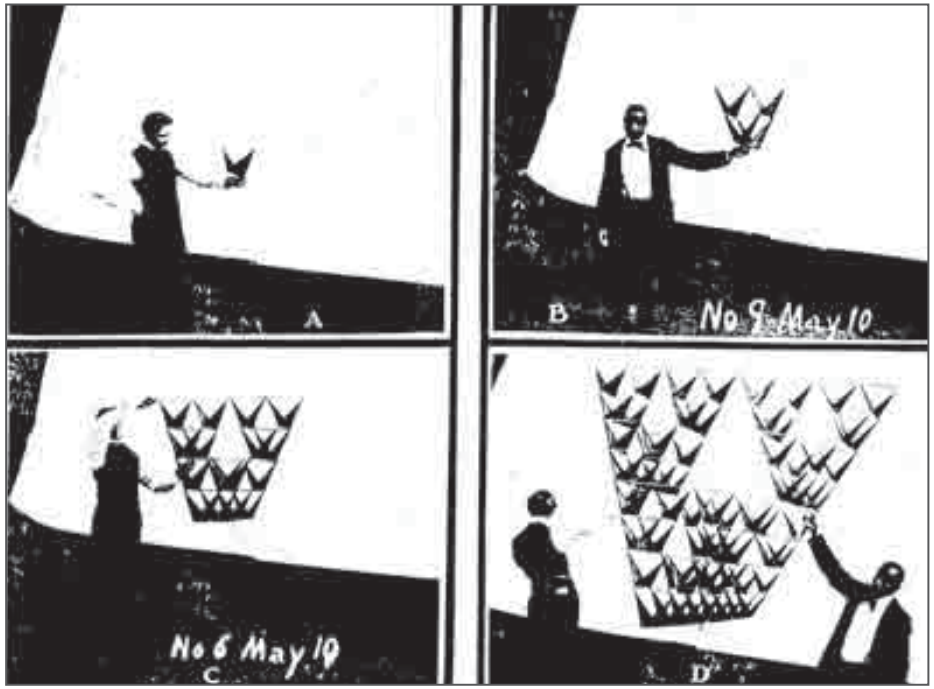






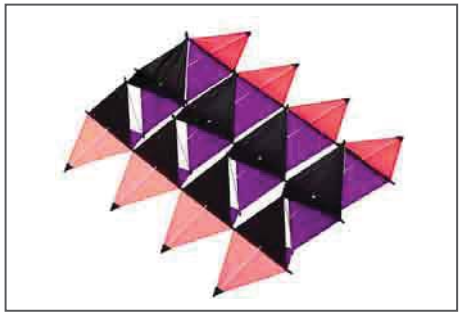


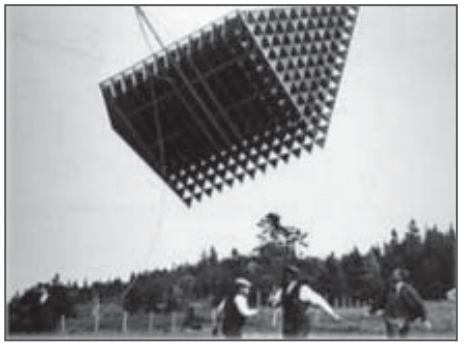
Las cometas tetraédricas de Graham Bell

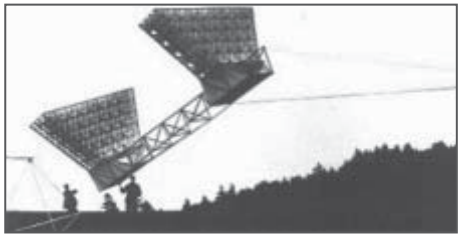


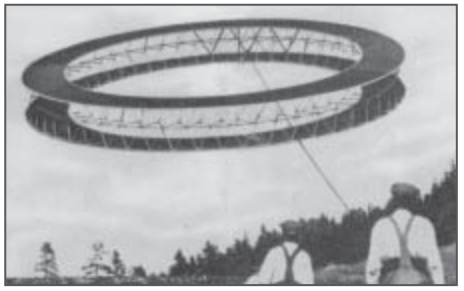
Es por ello que a principios del siglo XX, Alexander Graham Bell (más conocido por ser el inventor del teléfono) inicia sus estudios en la búsqueda de cometas con estructuras más rígidas. En 1903, la revista National Geographic Magazines publica el artículo de Bell "The tetrahedral Principle in Kite structures", en el que explica cómo la estructura de la cometa celular en forma triangular, aunque tiene mayor superficie, es más rígida al no necesitar ningún tensor diagonal. Tras hacer varias pruebas concluye que partiendo de una celda longitudinalmente rectangular, mejora sus resultados si en todas las direcciones hacemos que posea forma triangular, esto es, una celda en forma de tetraedro siendo la más óptima para sus intereses. En 1905, una cometa de 1300 celdas con un peso de 57 kilos eleva por accidente a uno de los manipuladores hasta una altura de 10 metros. Este hecho hizo albergar en Bell esperanzas en la construcción de cometas más potentes. Sin embargo, los avances de la aeronáutica siguieron otros derroteros.

Cometa celular





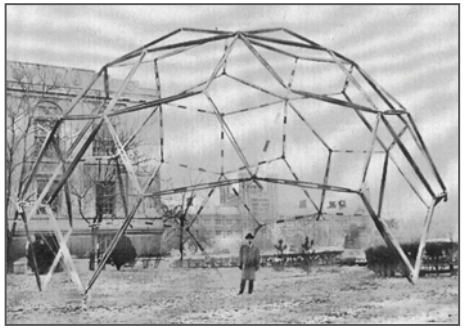




En 1905, una cometa de 1300 celdas con un peso de 57 kilos eleva por accidente a uno de los manipuladores hasta una altura de 10 metros.

Los problemas relacionados con la rigidez de las cometas tienen que ver con las propiedades de rigidez de los poliedros. Cuando se construyen los sólidos Platónicos con palillos, notamos que el tetraedro, el octaedro y el icosaedro se mantienen firmes, pero las estructuras asociadas al cubo y al dodecaedro no son tan estables.

Consideraremos que un poliedro es rígido si podemos hacer cambiar la forma sin modificar la longitud de las aristas que lo configuran. El problema de la rigidez de los poliedros ha tenido intrigado a los matemáticos durante varios siglos.



Domo de Buckminster Füller

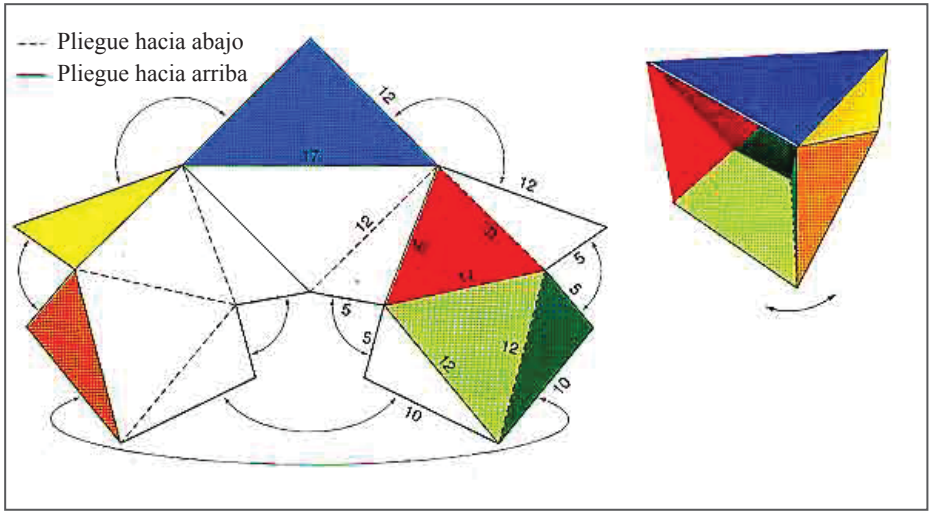
POLIEDROS FLEXIBLES

Pero, ¿cómo hacer que un poliedro que es flexible, se convierta en rígido? La respuesta es clara: incluyendo más aristas. Pero nos interesa introducir el menor número de aristas.

La condición de rigidez se puede hacer más restrictiva. En este caso entendemos que un poliedro es flexible cuando puede cambiar de forma sin que se deformen sus caras (las suponemos, por ejemplo, de metal). Cuando el poliedro se flexiona sólo cambian los ángulos con los que se cortan las caras. Es como si en las aristas pusiéramos bisagras. Con esta nueva definición de rigidez incluimos la categoría de los poliedros convexos (lo cual fue probado por Cauchy en 1813, aunque 50 años después se descubrió que su demostración tenía errores). Hasta hace poco se daba por supuesto que todo poliedro con caras triangulares era rígido ya que el triángulo es el único polígono rígido. Pero esto no es cierto. En 1897, un ingeniero francés, Raoul Bricard descubrió que los poliedros no convexos podrían ser flexibles si se permitiera que sus caras pasasen unas a través de otras (lo cual es imposible para cualquier objeto real). Posteriormente, Connelly (1978) modificó el poliedro no convexo de Bricard eliminando el problema de la auto-intersección de las caras y obteniendo el primer ejemplo de poliedro flexible real (formado por 18 caras triangulares). Recientemente, Steffen obtuvo otro ejemplo de poliedro flexible de 9 vértices y 14 caras triangulares.

La flexibilidad de un poliedro parece indicar que intuitivamente el volumen total del poliedro flexible permanece cuando cambia de forma. Sin embargo, este hecho ha sido una conjetura (la conjetura del fuelle) durante muchos años. La conjetura del fuelle para poliedros es sorprendente, ya que la correspondiente versión en dimensión 2 es falsa. En efecto, si, por ejemplo, si se flexiona un rectángulo, su área cambia. Parece que el espacio tridimensional no admite fuelles poligonales.

Experimentalmente la conjetura del fuelle fue "demostrada" por Dennis Sullivan, perforando un agujero diminuto en un poliedro flexible lleno de humo y comprobando que no salía humo cuando lo flexionaba. La prueba matemática se presentó en 1997 por Sabitov, Connelly y Walz. La idea de la demostración es dar una fórmula general que permitiera obtener el volumen de un poliedro cualquiera en términos de las longitudes de sus aristas y de las áreas de las caras. Esto implicaba que el volumen sólo dependía de estos parámetros y por tanto, la conjetura del fuelle es cierta (en la flexión del poliedro no varían las caras).



Poliedro flexible de Klaus Steffen

Los origamis no son poliedros flexibles. Cuando la rana mueve las patas o el pajaro bate las alas, el papel se curva ligeramente. Lo mismo vale para un acordeón: el fuelle del instrumento puede expandirse y contraerse porque las facetas del fuelle se doblan y se estiran. Pero las caras de un poliedro flexible no se curvan absolutamente nada, ni siquiera una millonésima de milímetro

FRACTALES

INTRODUCCIÓN

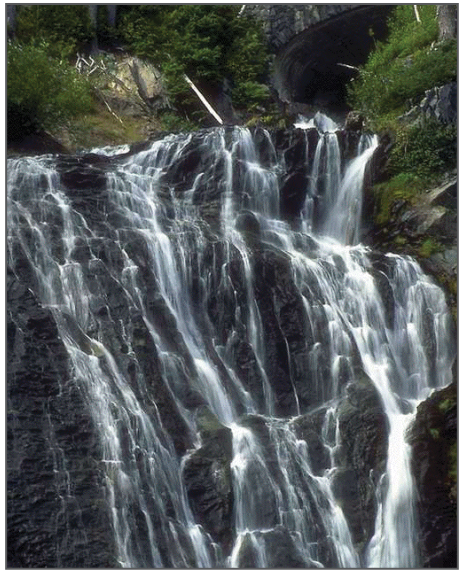
Está claro que con la geometría clásica o euclidiana no son las maneras más adecuadas para generar formas más complejas como son las orgánicas o naturales. Esto se debe en parte en que si uno amplia una de estas figuras de geometría euclidiana, como un círculo, estas, pierden forma. El círculo al ampliar uno de sus arcos, va tender a convertirse en una recta. En el caso de una esfera, tiende a ser plano.

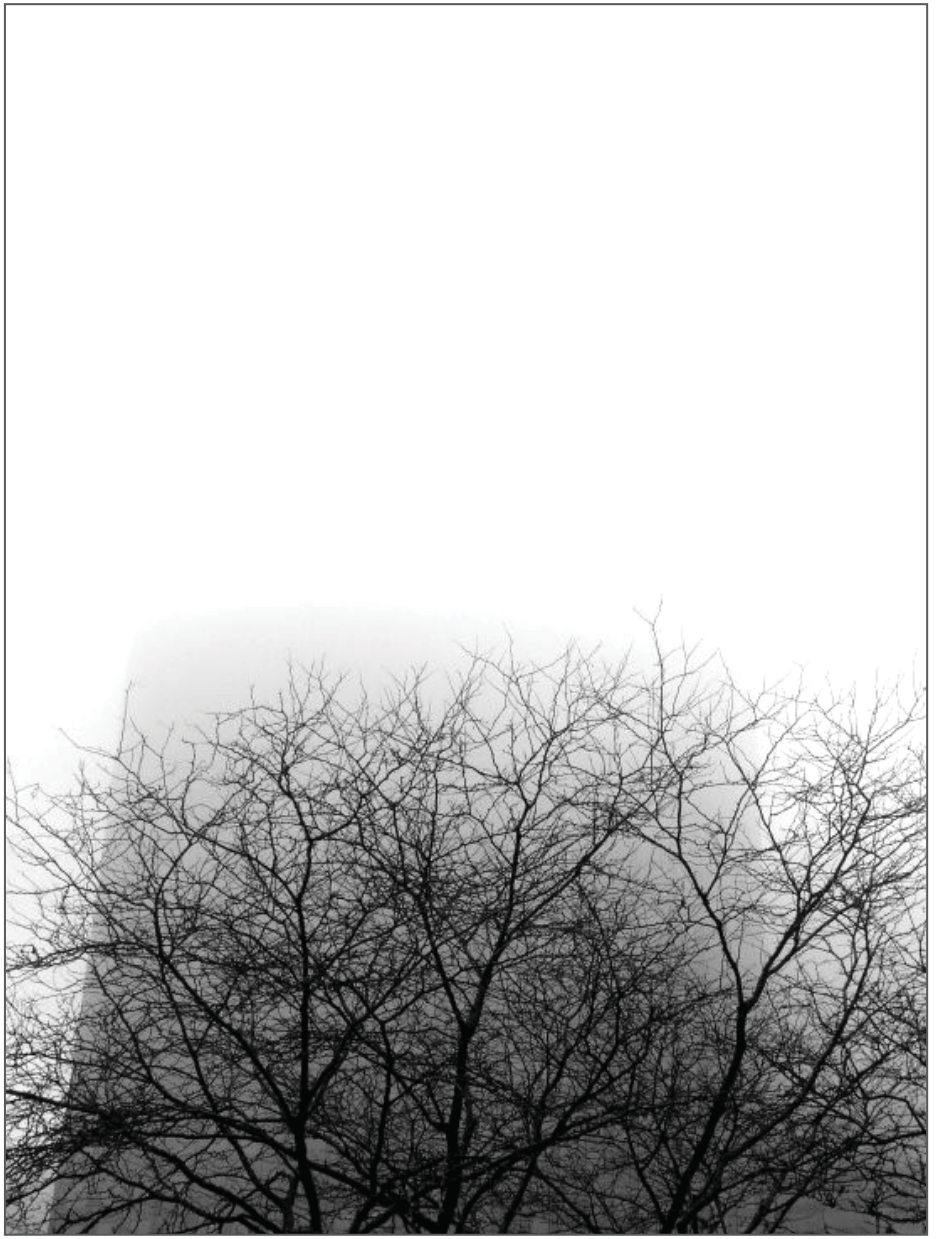
Un cuerpo fractal es un ente geométrico “distinto” e “infinito”. En esto toma parte la iteración. Una iteración es la repetición de “algo” una cantidad infinita de veces. Los fractales se generan a través de iteraciones de un patrón geométrico establecido como fijo. Como entidades geométricas un fractal tiene cualidades que lo caracterizan: tiene detalles en escalas arbitrariamente grandes o pequeñas, es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales, tiene auto-similitud exacta o estadística, tiene dimensión fractal, o es definido recursivamente.

Los fractales han revolucionado la tecnología de la generación y reproducción de imágenes. Hoy no sólo se ocupa para almacenar o transmitir señales visuales, sino también para simular paisajes y terrenos tridimensionales; Un terreno construido en un programa de modelado y animación en tres dimensiones, por medio de la utilización de modificadores que se basan en niveles de fractales con su respectiva semilla.

En términos generales, las formas naturales son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con Euclides (geometría común), la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que ésta se da a un nivel completamente diferente. El número de estas escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos e infinitos.

La existencia de estas formas representa un desafío: el estudio de las formas de Euclides descarta por “informe”, la investigación de la morfología de lo “amorfo”. En respuesta de esto, los matemáticos desarrollan una nueva geometría de la naturaleza: los fractales.





NUEVAS MANERAS DE VER

Nuestro mundo está constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas animales, etc.; sin duda alguna es el reino de la forma. Si quisiéramos describirlo, un vistazo rápido podría desalentar todo intento de realizar simplificaciones; más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos.

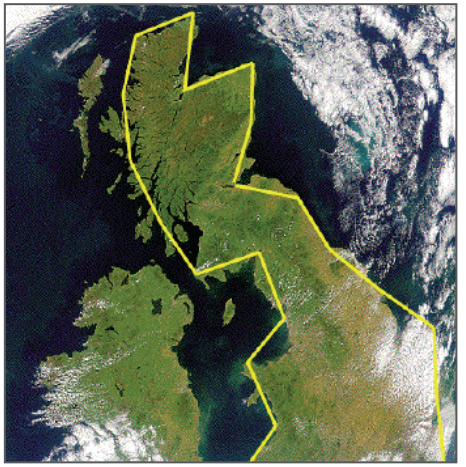
Cuerpos amorfos desde rocas hasta planetas, flujos turbulentos desde ríos a tornados, patrones asimétricos que sobrepasan con mucho el número de cuerpos regulares con los que el hombre se ha obsesionado desde el inicio de los tiempos. Azar y desorden en un Universo aparentemente estructurado.

Sin embargo, en este mar de caos, una observación más cuidadosa de la naturaleza muestra que aun dentro de su enorme complejidad existen ciertos patrones que la caracterizan.

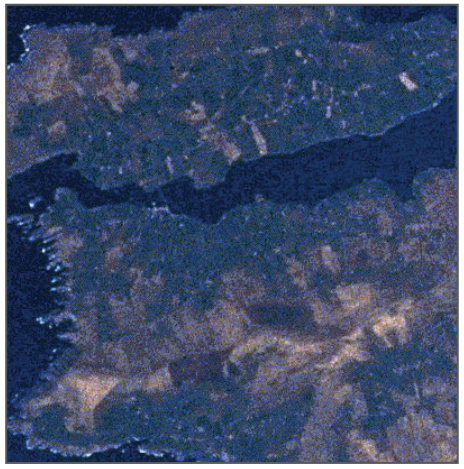
Una roca es similar a la montaña de la que forma parte; una rama tiene la misma estructura que la del tronco del que nace; como si la decisión hubiera sido repetir la misma forma a diferentes escalas dentro de un mismo objeto, asegurando la preservación de una copia original a cualquier nivel de amplificación; como si se pensara en generar al máximo nivel de detalle con el mínimo costo en el diseño. Las muñecas de los artesanos rusos o un helecho cuerno de ciervo, un brócoli, son objetos que en sus detalles se repiten a sí mismos. Fractales en la naturaleza.

x1

x2



x3



x4

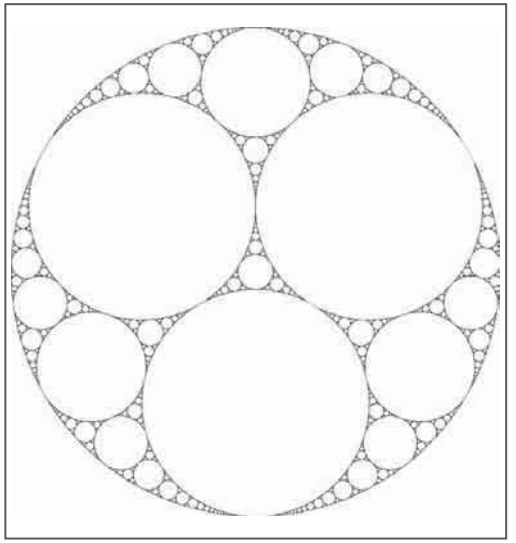
CONJUNTO DE FRACTALES CLÁSICOS

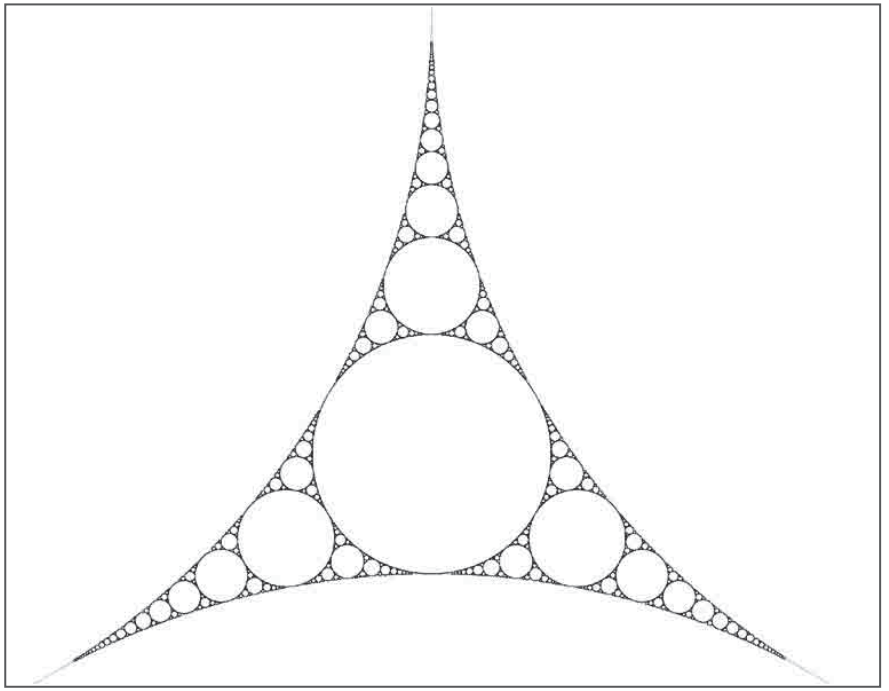
Un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala. En otras palabras, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal.

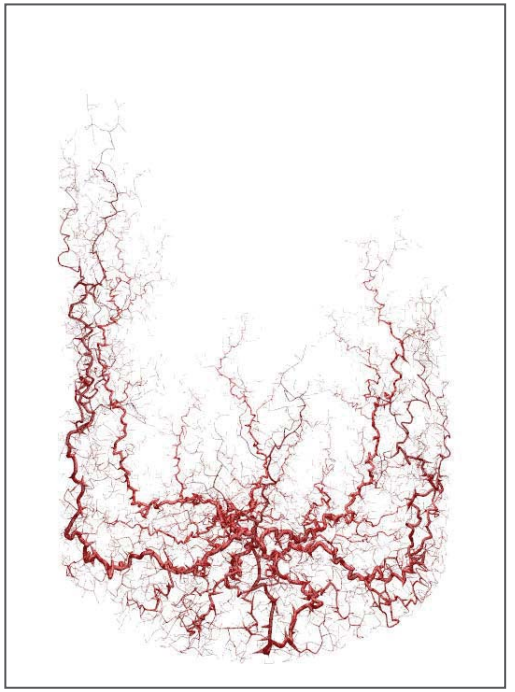
Otro aspecto importante sobre los fractales es que su dimensión es fraccionaria. Es decir, en vez de ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (como es el para los objetos que nos son más familiares), la dimensión en la mayoría de los fractales no se ajusta a dichos conceptos tradicionales. Más aún, su valor raramente puede ser expresado con un número entero. Esto es, precisamente, lo que les ha dado su nombre.

Muchas veces, los fractales se subscriben a la definición anterior. Otras no: en vez de observarse la misma estructura en proporciones menores de la figura principal que estemos observando, serán evidentes rasgos y patrones nuevos. Ello dependerá del tipo de fractal que examinemos y, como debe ser evidente, de la función matemática que hayamos utilizado para producirlo.

Los fractales son entidades matemáticas, pero mucho más también. Los primeros ejemplos de este tipo de objeto fueron figuras matemáticas como el polvo de Cantor, la curva de Koch (1904) y el triángulo de Sierpinski que se explican más adelante.. Luego de éstos, que datan de finales de siglo XIX y principios del XX, vinieron los trabajos de Gaston Julia y Pierre Fatou sobre los fractales del conjunto de Julia (1918-19) y, varias décadas más tarde, los estudios de Benoît Mandelbrot y otros matemáticos sobre el conjunto de Mandelbrot, atractores extraños y bifurcaciones, entre otros. No obstante, los fractales están por todas partes.







FRACTALES EN TODAS PARTES

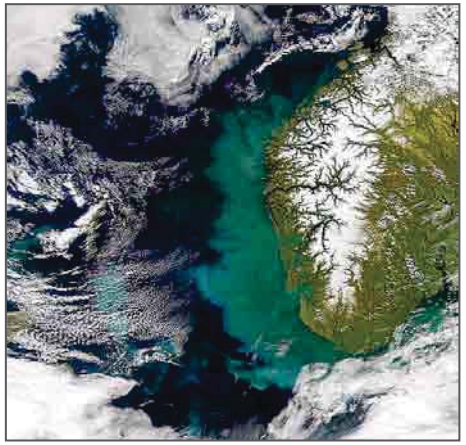
En 1975 Benoit Mandelbrot denominó fractales (del latín fractus, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional. Adicionalmente, construyó con ellas un conjunto de nuevas reglas para explorar la geometría de la naturaleza, y las reconoció como herramientas potencialmente útiles para analizar un gran número de fenómenos físicos.

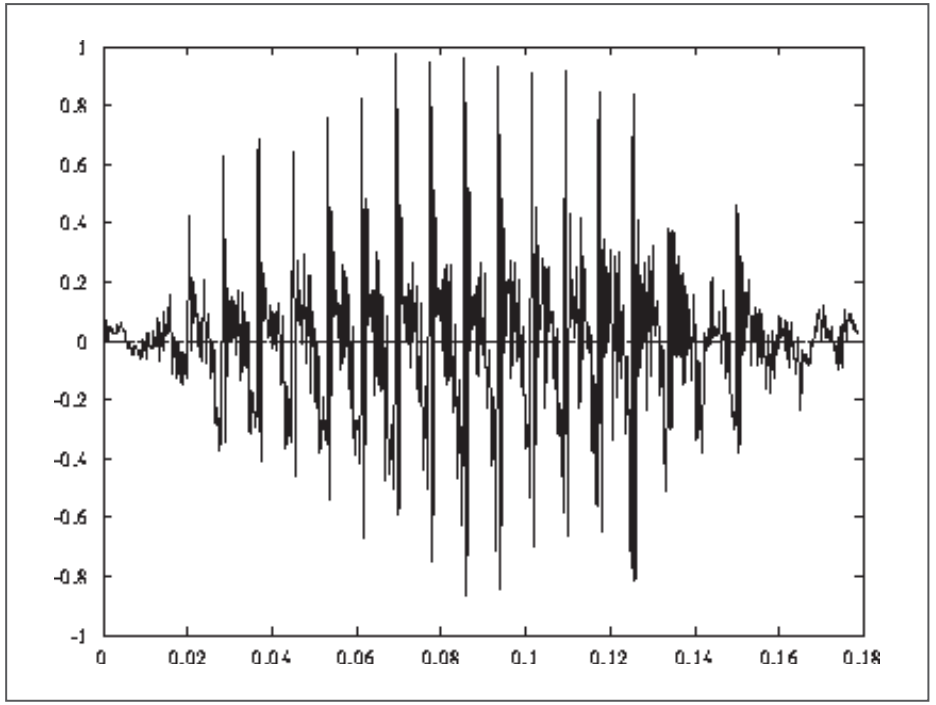
El interés de Mandelbrot en los fractales nació de su certeza de que “las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, como la corteza de un árbol no es plana ni un rayo viaja en línea recta… la naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad” (Mandelbrot, 1984).

Hoy día se han identificado innumerables manifestaciones naturales de estructuras fractales. Se sabe que su geometría está presente en depósitos coloidales (como los generados por el polvo y el esmog), poliméricos y electroquímicos; en aparatos y sistemas de los seres vivos, como los vasos capilares, tubos intestinales, biliares y bronquiales, y en las redes neuronales. De manera similar, hay evidencia de que la localización geográfica de epicentros en temblores exhibe un patrón fractal, y en la actualidad la dimensión fraccional (dimensión fractal) de la superficie irregular de una falla en un material ya se utiliza como medida indirecta de su resistencia y dureza.

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de ruido en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación (del tipo de las que estamos acostumbrados a oír cuando hablamos por teléfono o escuchamos la radio). El análisis de las señales demostró que las interrupciones aparecían como por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente, y dentro de ésta otra, y así continuamente. Un registro gráfico de las interrupciones dio lugar a un patrón fractal que cuando el procedimiento se repite a toda escala, se obtiene el fractal conocido como conjunto de Cantor.

Hay muchos objetos “ordinarios” que, debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales aunque no los reconozcamos como tales de primera instancia. Las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales naturales; se diferencian de sus contrapartes matemáticos por ser entidades finitas en vez de infinitas. Ejemplos adicionales de fractales son el mercado de valores y el crecimiento poblacional.





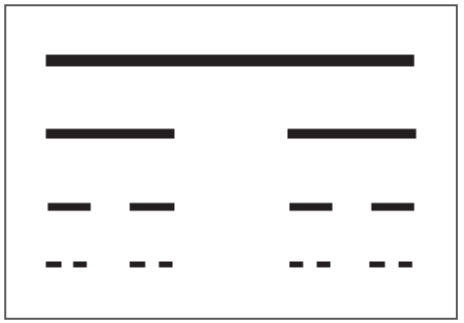
EL CONJUNTO DE CANTOR

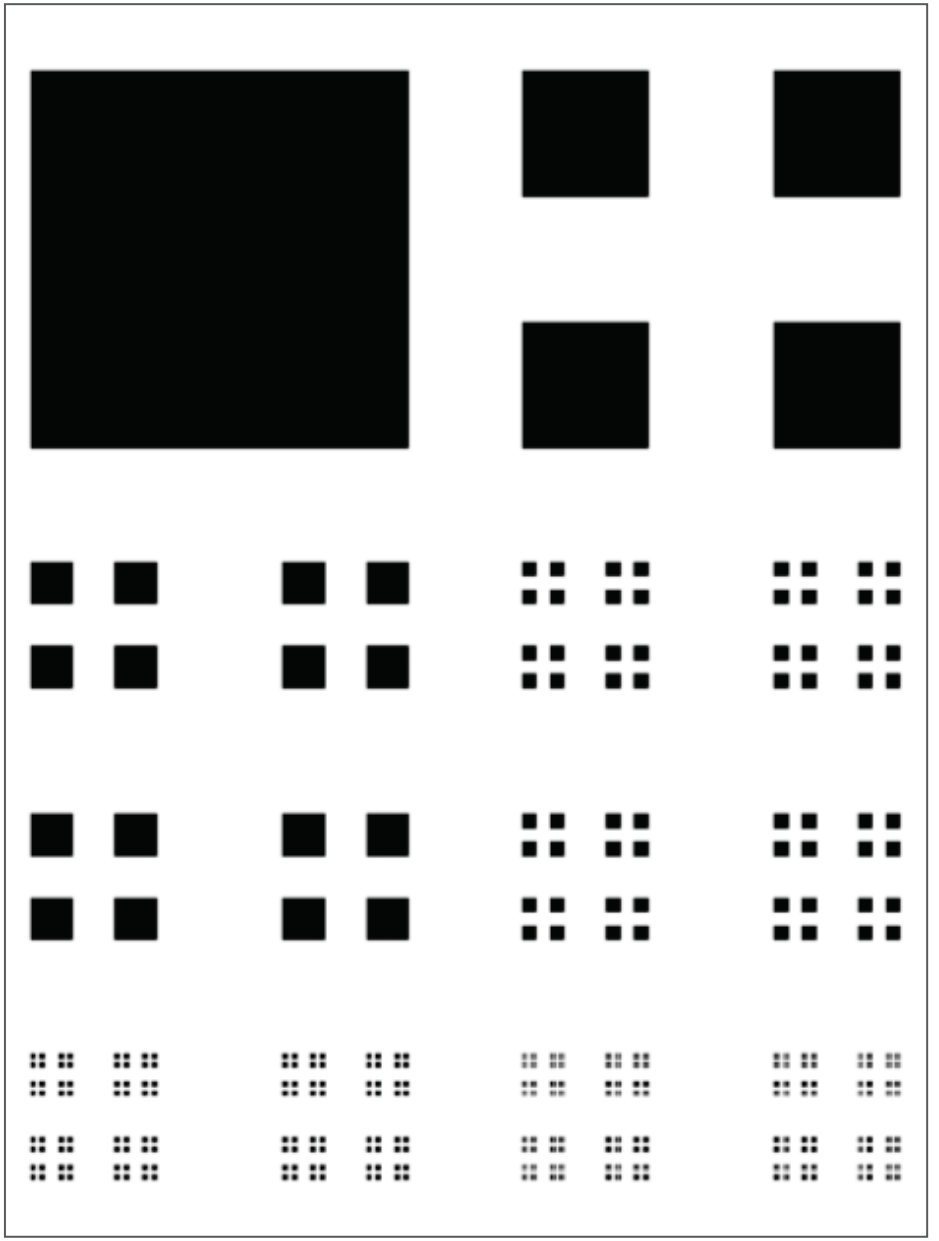
Probablemente, el primer objeto fractal puro en la historia, el polvo de Cantor, fue descrito por el matemático alemán Georg Cantor, inventor de la teoría de los conjuntos, alrededor de 1872. A pesar de ser una figura extremadamente sencilla, recoge todos los atributos discutidos sobre los fractales hasta el momento: presenta autosimilitud a cualquier escala y su dimensión es fraccionaria, con valor aproximado de 0,630929753571457437 099527114 (log 2/log 3,si utilizamos una expresión más adecuada). Igualmente, podemos basarnos en él para introducir otra característica general de este tipo de objeto: son producidos por procesos de iteración.

La iteración puede describirse como un mecanismo de retroalimentación, que se repite un número n de veces. Esto se refiere, por ejemplo, al acto de utilizar un valor inicial en el cálculo de cierta función, y luego tomar el producto, o resultado, como valor inicial para el próximo cálculo de esa misma función. Dicha operación puede repetirse indefinidamente (incluso infinitamente), produciendo una iteración. Cualquier proceso semejante tendrá como resultado un fractal.

El polvo de Cantor se inicia con un segmento lineal (justamente, conocido como el iniciador); éste se divide en tres segmentos menores de la misma longitud, en donde el central se extrae. Este proceso (denominado, usualmente, como el generador) se repite indefinidamente, al final de lo cual, si tiene final, se habrá producido el polvo de Cantor.

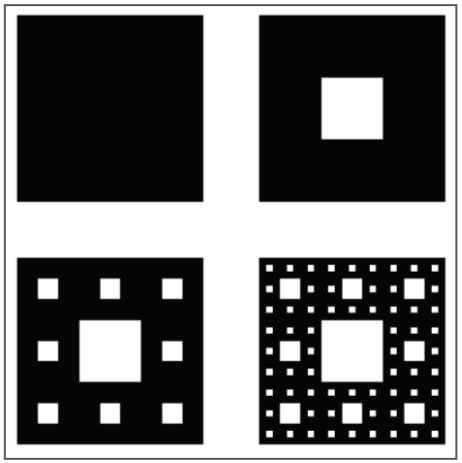
El conjunto de Cantor fue publicado por primera vez en 1883 como un ejemplo de cierta familia de conjuntos excepcionales. Para construirlo consideramos el intervalo unidad y le quitamos el intervalo central de longitud 1/3; a cada uno de estos nuevos intervalos le quitamos a su vez el intervalo central que ahora tendrá longitud 1/9 y así sucesivamente.

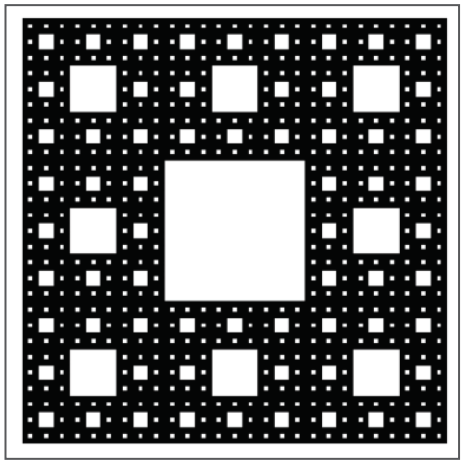


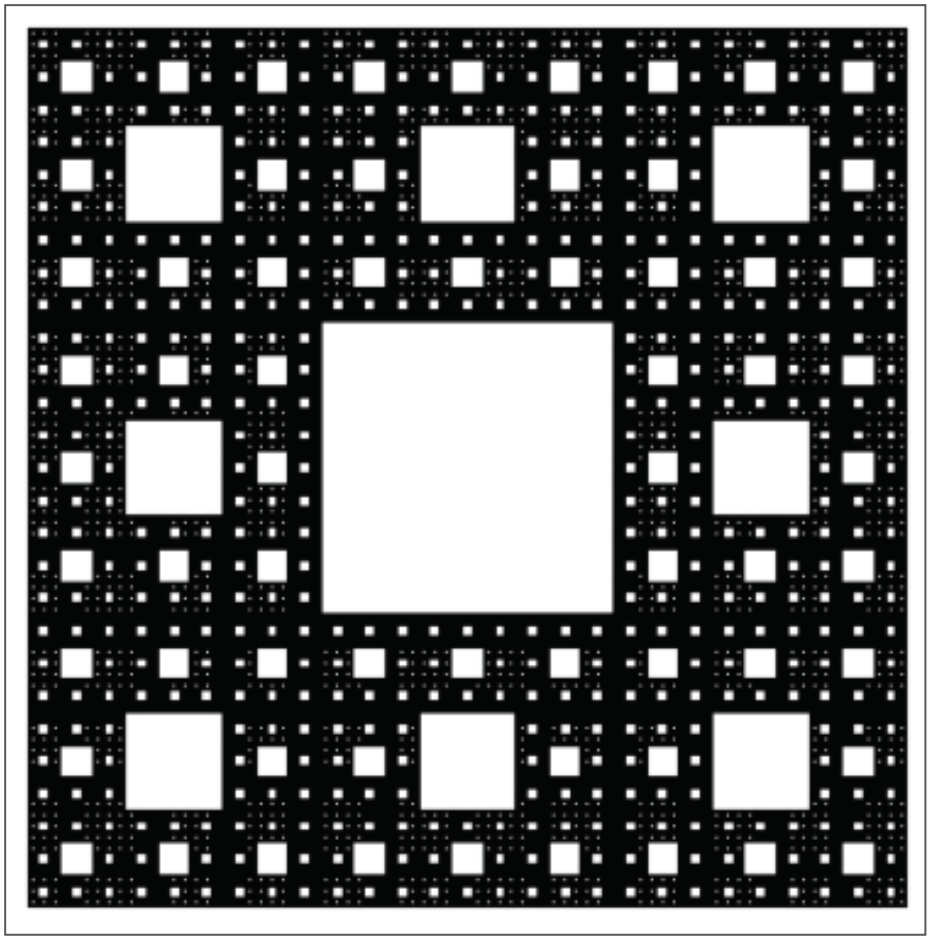


LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI

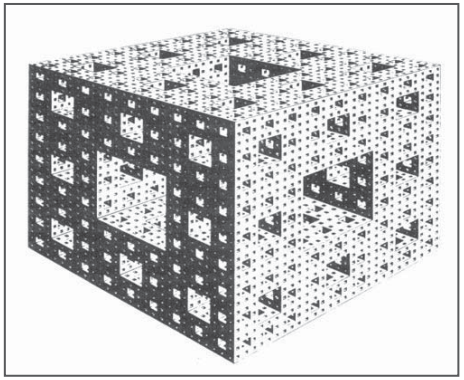
La alfombra de Sierpinski es una variante de un Conjunto de Cantor plano en la que el cuadrado inicial se transforma suprimiéndole el cuadrado central de lado 1/3. En cada uno de los 8 cuadrados de lado 1/3 que forman la figura restante se repite esta operación. Y así sucesivamente.

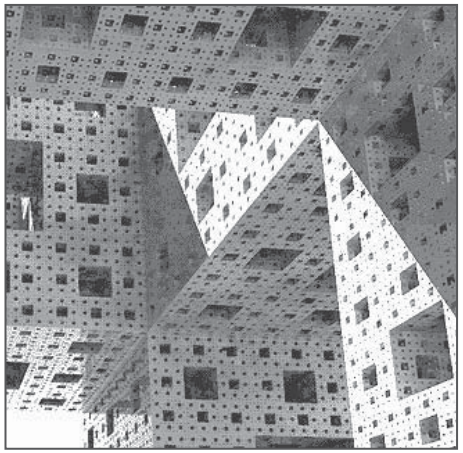






La esponja de Menger. La alfombra de Sierpinski en tres dimensiones.





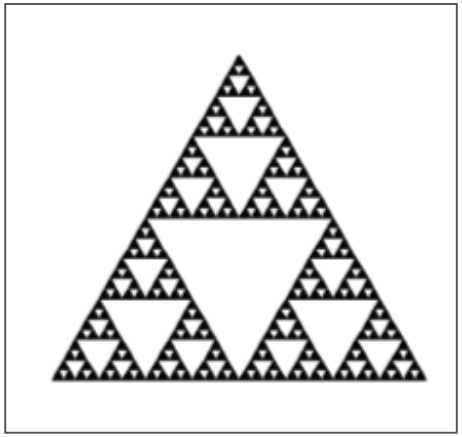
EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

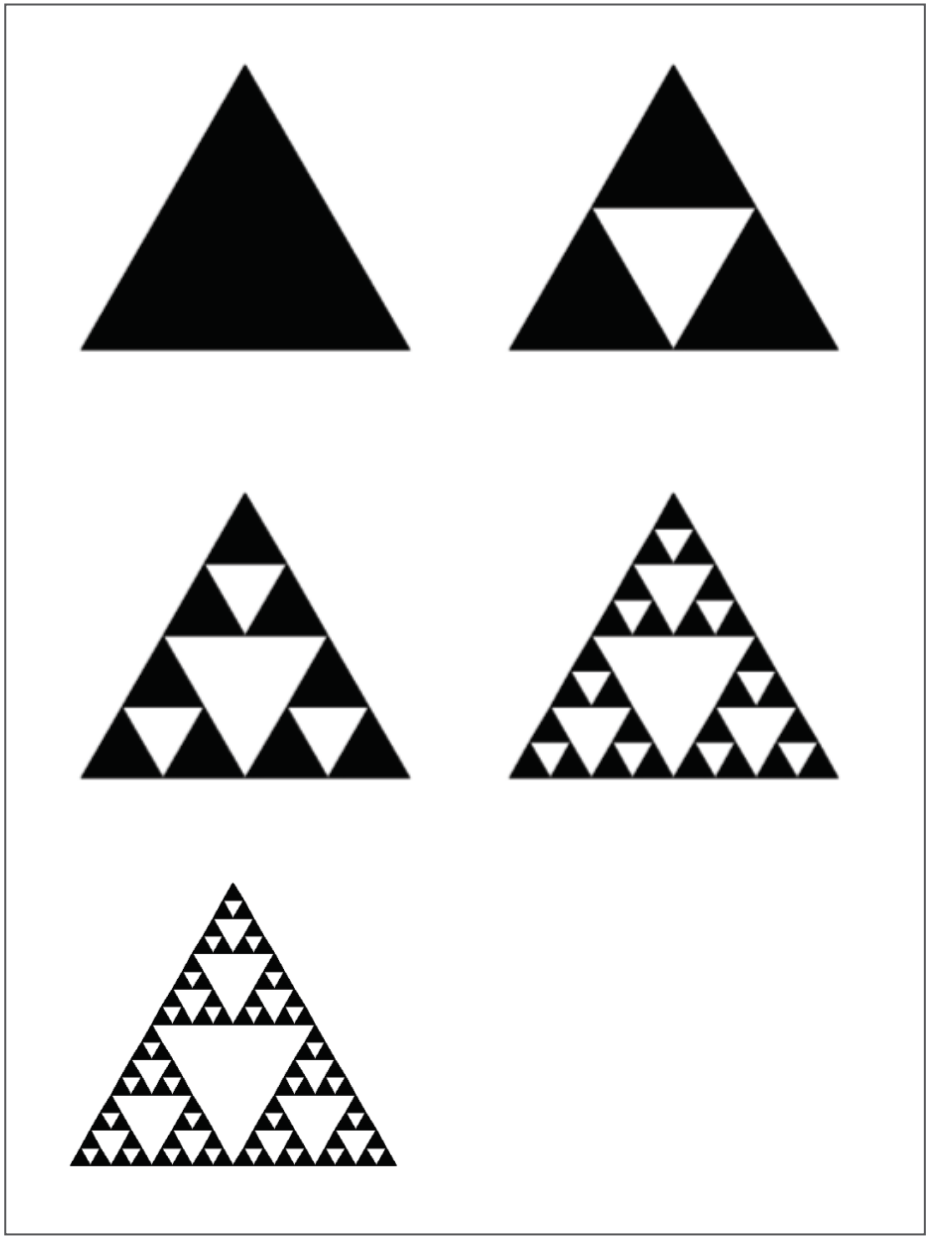
El triángulo de Sierpinski es una simplificación de la alfombra de Sierpinski en la que se parte de un triángulo equilátero. El triángulo de Sierpinski, una figura inventada por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915:

Para éste, se comienza con un triángulo equilátero. En su interior, se traza otro triángulo equilátero, cuyas puntas, o esquinas, deben coincidir con los puntos medios de cada lado del triángulo mayor. Esta nueva figura tendrá una orientación invertida con respecto a la primera. Seguido, se retira, o se elimina, de la figura ese nuevo triángulo invertido, tal que solamente se conserven los tres triángulos equiláteros menores y similares que se observan dentro del grande. Luego, se realiza el mismo procedimiento (de iteración) para cada triángulo pequeño, obteniéndose, como resultado, un triángulo de Sierpinski.

Hay que tener en cuenta que cuando decimos que se elimina ese nuevo triángulo no solamente significa que quitaremos ese triángulo del medio y nos olvidamos de él, sino que los puntos contenidos en esa área, específicamente, no pertenecen al conjunto de puntos comprendidos en el triángulo de Sierpinski; o dicho de otro modo, esa sección no pertenece al conjunto.

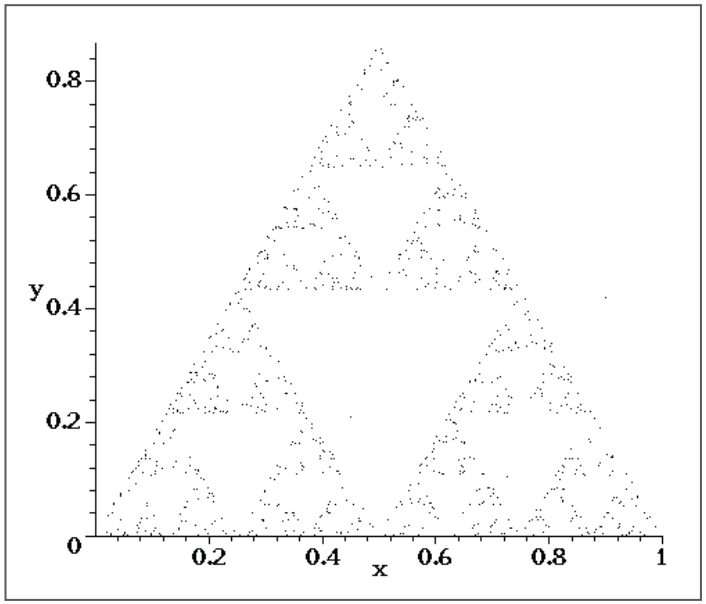
Aunque la existencia de los fractales se conoce desde fines del siglo XIX (cuando eran considerados, simplemente, como curiosidades matemáticas), su verdadera identidad no fue plenamente expresada hasta las décadas de 1960 y 1970,

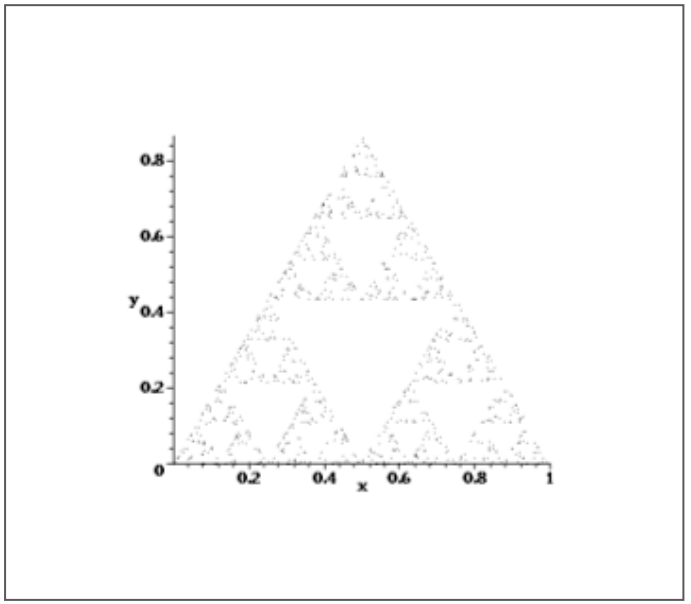


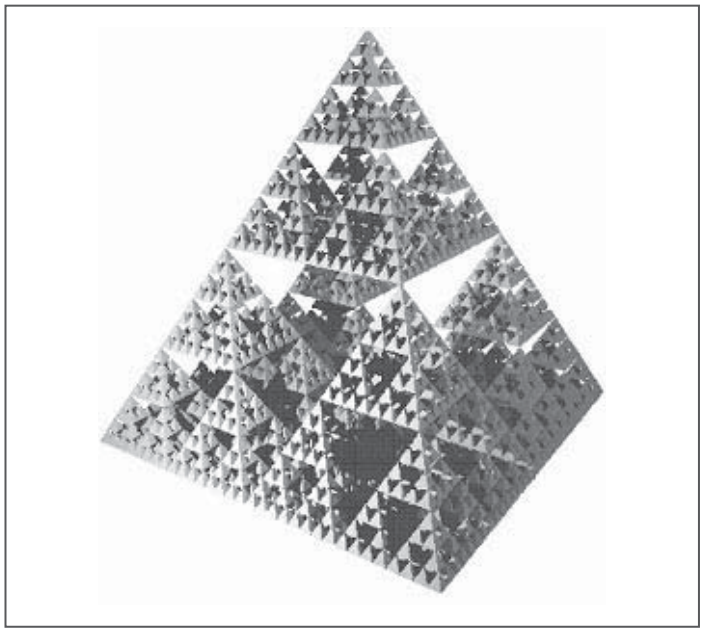


gracias a los importantes estudios de Benoît Mandelbrot y otros científicos.

El triángulo de Sierpinski también surge como proceso límite de lo que Michael Barnsley llamó el Juego del Caos. Éste consiste en lo siguiente: Se toma un punto arbitrario del plano. Se tira un dado. Si sale 1 ó 2 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto (0,0), si sale 3 ó 4 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto (1,0), y si sale 5 ó 6 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto (1/2,3/2). Este juego de tirar el dado se repite con el nuevo punto obtenido. Iteramos este proceso indefinidamente. Aparentemente, este juego debería proporcionarnos una nube amorfa de puntos. El resultado de jugar este juego con 10000 y 1000 puntos respectivamente se puede ver en las siguientes gráficas.







Traducido a las tres dimensiones, la pirámide de Sierpinski.

LA CURVA DE KOCH

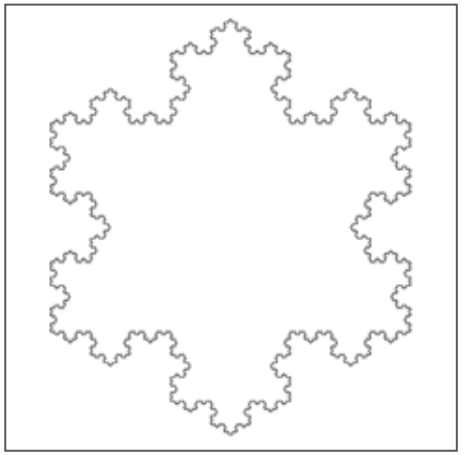
La curva de Koch fue introducida por Helge von Koch en 1904. Para construirlo consideramos el intervalo unidad, y reemplazamos el intervalo central de longitud 1/3 por dos segmentos de la misma longitud formando un ángulo de 60° a cada uno de estos nuevos intervalos le quitamos a su vez el intervalo central que ahora tendrá longitud 1/9 y así sucesivamente.

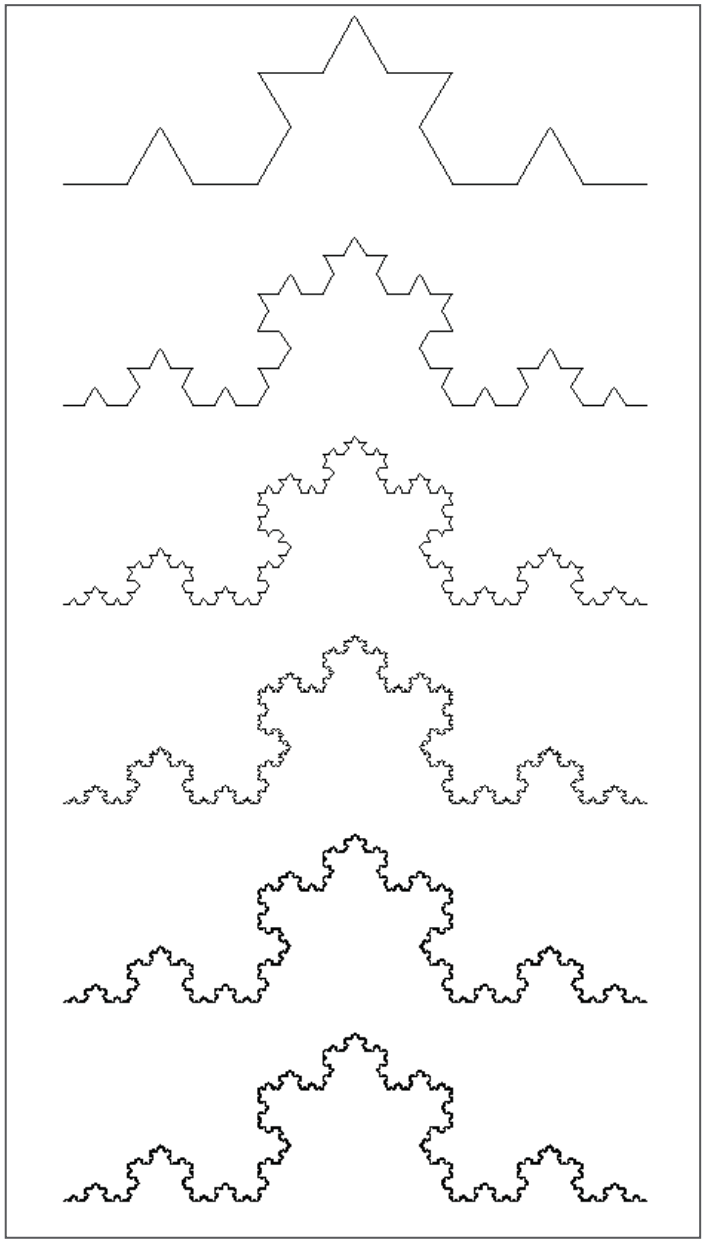
¿Cuál es la longitud de la curva de Koch? Es claro que la respuesta depende del tipo de regla que se utilice para medirla. Si nuestro instrumento de medida es poco flexible y sus divisiones no son muy finas, el valor obtenido será inexacto y sólo un burdo reflejo de la extensión de la curva real. La regla no puede penetrar y considerar todos los detalles de la figura.

Si para delinear mejor las sinuosidades de la ruta decidiéramos recorrer la curva ajustando un hilo sobre su perímetro nos permitiría ver que la presencia de detalle a toda escala hace imposible nuestra tarea si no contamos con un filamento inmensamente largo; sólo así podríamos visitar todos los recovecos del contorno. La curva es generada en un proceso de repetición que añade más y más detalle a cada paso, extendiendo su longitud sin límite alguno. Si la cortamos en un punto y la estiramos, podemos generar con ella una recta de longitud infinita; pensemos que siempre habrá un pico que desdoblar, y dentro de éste otro, y luego otro, y otro, y así hasta el cansancio.

El resultado es sorprendente; nos encontramos con un objeto que a pesar de estar definido sobre una región finita del espacio posee una frontera de extensión ilimitada. La curva de Koch envuelve un área que no es mucho mayor que la que tiene el primer triángulo del que se parte, de hecho, se puede demostrar que es sólo 1.6 veces más grande.

El contorno del copo de nieve de Koch es tan irregular que entre dos puntos cualquiera sobre él existe una distancia infinita y un número incontable de quiebres y zigzags. Esto último hace que sea imposible dibujar una tangente (recta que toque, sin cortar, a la curva en un solo punto) en algún lugar a lo largo de su perímetro. En esta curva, todo punto es un punto de quiebre al que no se puede ajustar una recta tangente con inclinación única; esto la distingue de las curvas suaves con las que estamos más acostumbrados a tratar, en las que en cada punto se puede hacer pasar una tangente. Sólo para caracterizar este hecho diremos que la curva no es diferenciable.



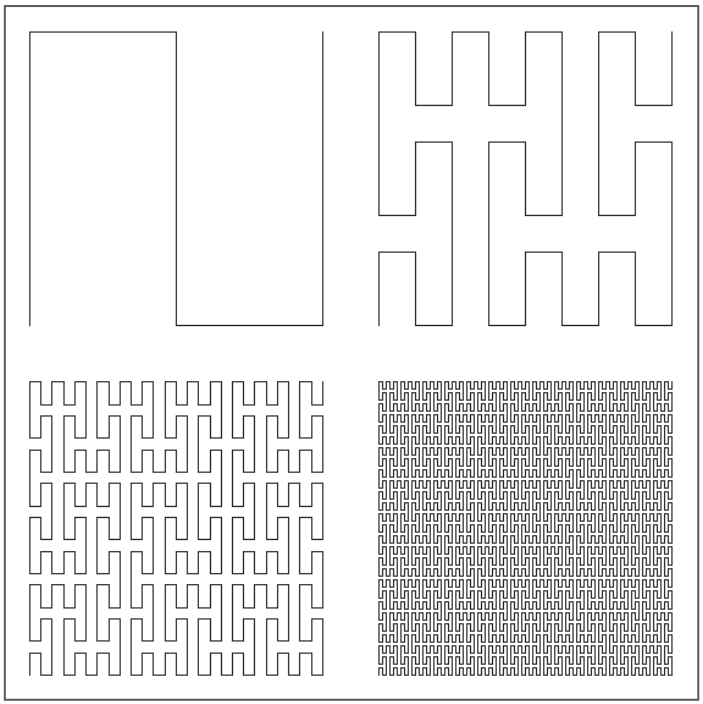


CURVAS QUE CUBREN UNA SUPERFICIE

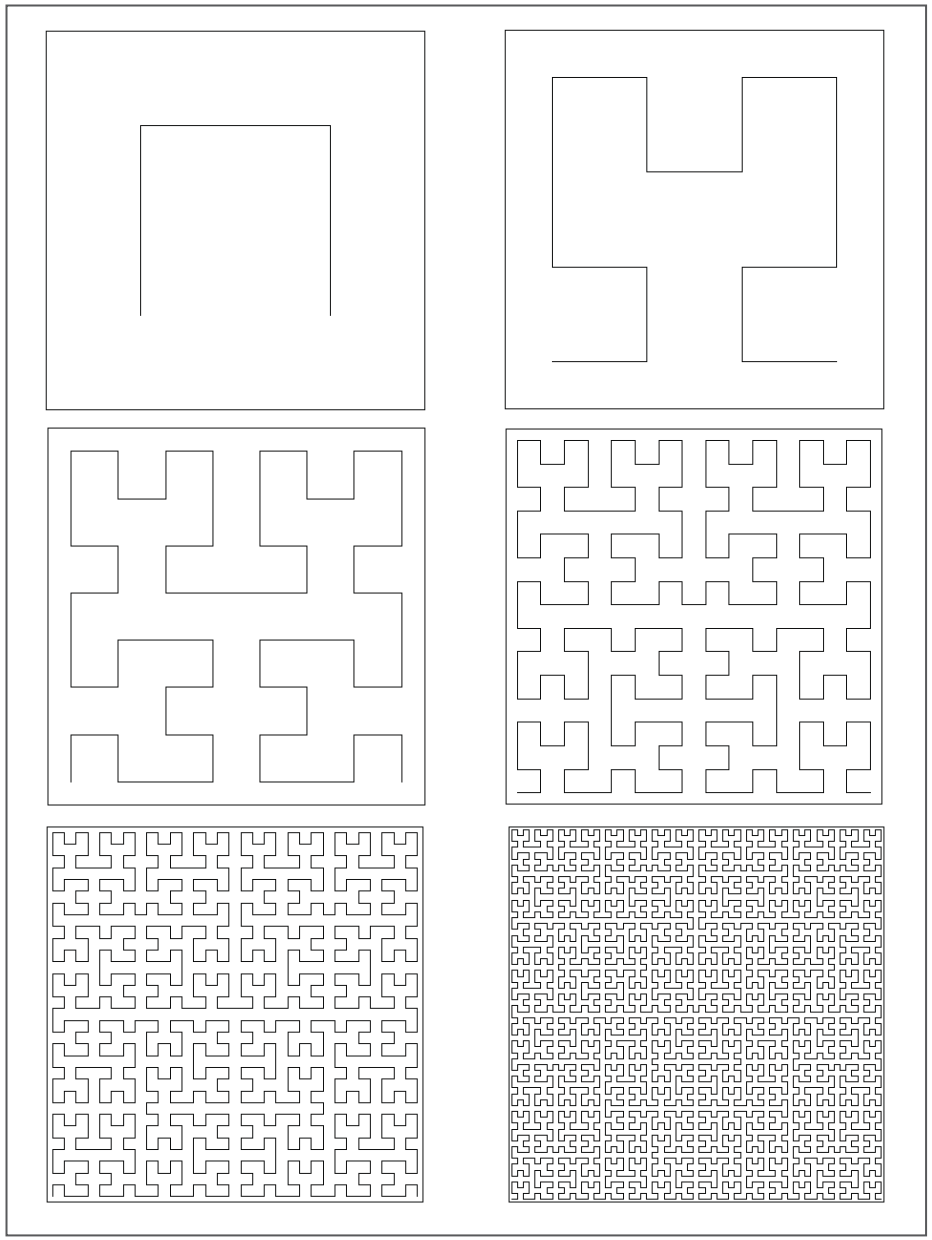
En 1890, Giuseppe Peano dio la construcción de una curva que rellenaba todo el cuadrado unidad. Su construcción sigue el mismo mecanismo que la de la curva de Koch. Comenzando con un intervalo de longitud 1, éste se sustituye por una curva poligonal autointersecante formada por 9 segmentos iguales. Esta construcción se repite en cada uno de estos nueve segmentos continuando el proceso indefinidamente.

Un año después que Peano, David Hilbert daría una versión más sencilla de una curva que también rellena todo el intervalo unidad. Para construirla consideramos la curva generadora: y la vamos reemplazando por cuatro copias de la misma, situadas como se ve en la imagen y unidas por segmentos en los puntos que se indican:

La curva de Hilbert es el límite de iterar este proceso indefinidamente. Las siguientes curvas son sucesivas aproximaciones de la curva de Hilbert.



Curva de Peano



Curva de Hilbert.

EL CONJUNTO DE MANDELBROT

El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los conjuntos fractales, y el más estudiado.

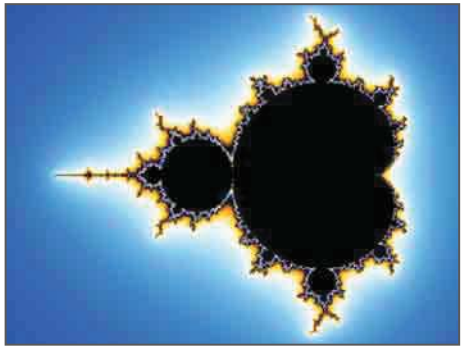
Los colores dan una indicación de la velocidad con la que diverge (tiende al infinito, en módulo) la sucesión. La propiedad fundamental de los fractales es una cierta invariabilidad con relación a la escala, o dicho de otro modo, al acercarse a ciertas partes de la imagen reaparece en miniatura la imagen total. Un mismo motivo aparece a distintas escalas, a un número infinito de escalas.

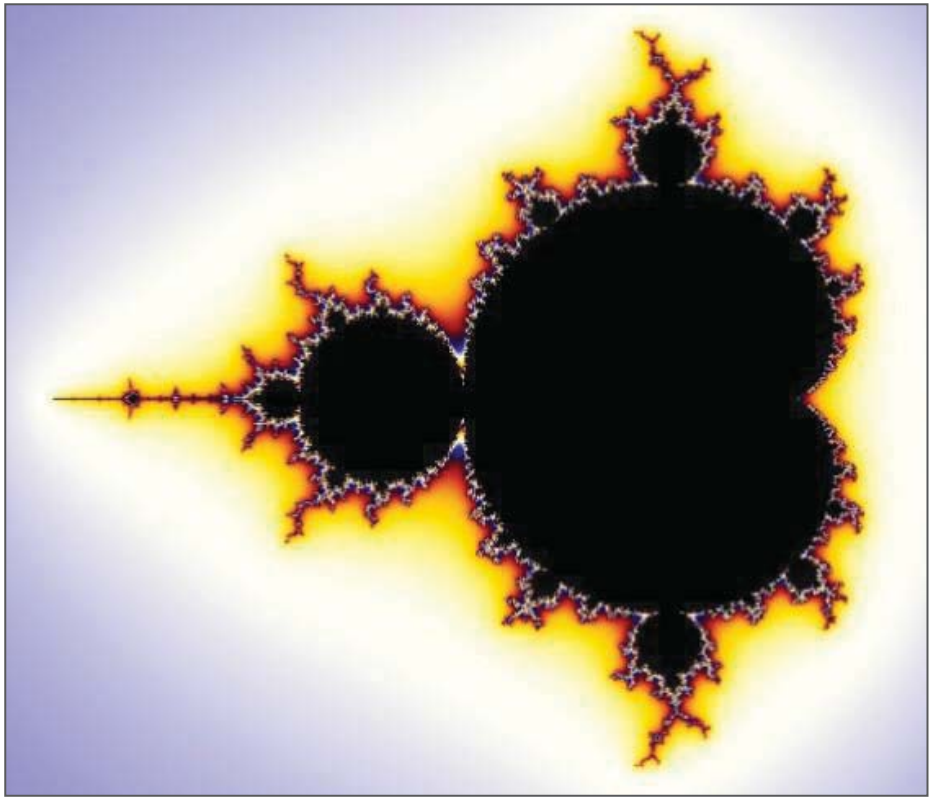
El Conjunto de Mandelbrot ha sido el estandarte ondeado al viento por los estudiosos y divulgadores de los fractales; ha sido el símbolo por antonomasia esgrimido para dar a conocer una nueva dimensión de la realidad o una nueva realidad del concepto dimensión, según como se vea. Publicaciones con reconocimiento como la Scientific American han dicho de él que, hasta la fecha, es el objeto matemático más complicado creado por el hombre.

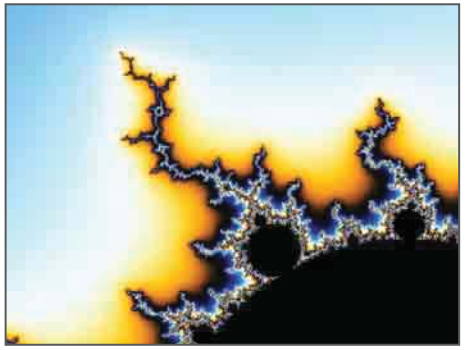
Mandelbrot es considerado el padre de los fractales, no por “inventarlos”, sino más bien por aglutinar ciertos estudios matemáticos y físicos en una rama propia de la Matemática y la Física, una rama real, con forma y sentido propios.

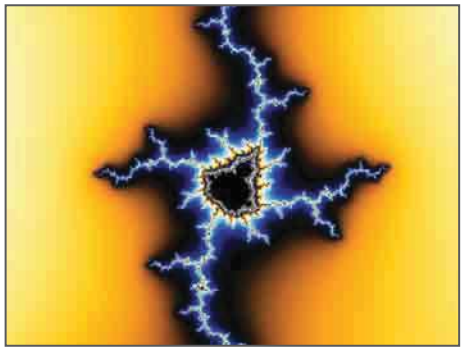
El Conjunto de Mandelbrot se genera estudiando el comportamiento de la iteración de la ecuación compleja:
$Zn+1 = Zn2 + C$
donde Z, C son números complejos en nuestro caso tenemos $Z=ReZ+ImZi$ y $C=ReC+ImCi$, la condicion inicial es $Z=0+0i$ y a C se le asignan todos los puntos del plano complejo.

Las demostraciones matemáticas de los fractales llegan a ser algo complicadas y escapa tanto a mis conocimientos como al propósito de este proyecto.







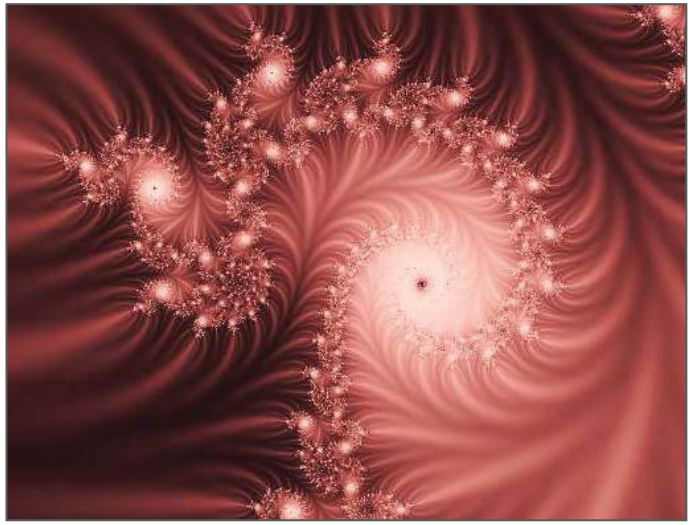


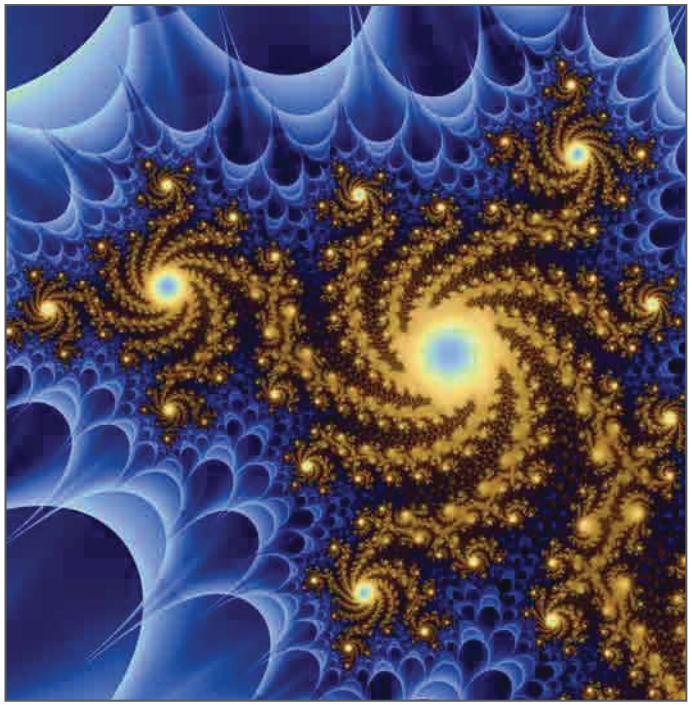
SOBRE LOS COLORES DE LOS FRACTALES

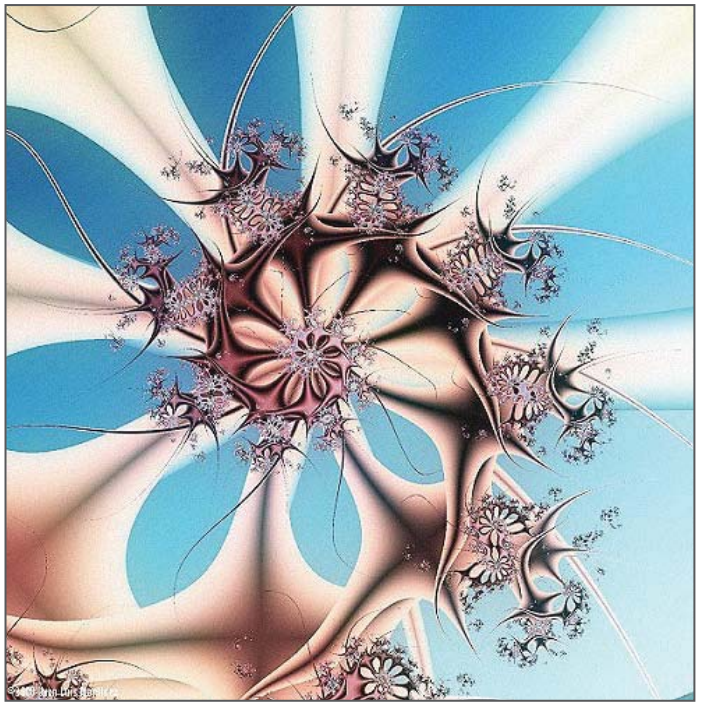
Las imágenes de los fractales obtienen sus formas y colores cuando le asignamos un rango determinado de colores a una serie de puntos, dependiendo de su comportamiento matemático mientras se resuelve la función, con la ayuda indispensable de un computador. En efecto, esa es la única manera de captarlos visualmente. Existen varias posibilidades al momento de asignar los valores que determinarán los colores:

Si el resultado se aproxima a cero (en cuyo caso, pertence al conjunto).
Si escapa al infinito (y por tal, no pertence al conjunto).
Si oscila entre varios estados.
Si no exhibe ningún patrón discernible.

El primer caso ocurre dentro de los límites que comprenden la figura fractal; el segundo, fuera de sus límites; y los tercero y cuarto ocurren en la frontera. Si no fuera por esa asignación artificial de colores, los fractales lucirían como cualquier otra gráfica poco atractiva y a fines prácticos nos permiten diferenciar densidades y orden en la figura.







FRACTALES EN LA NATURALEZA

La geometría fractal modela una gran variedad de fenómenos: las líneas de costa, las corrientes de agua, las nubes, los helechos, las galaxias, los árboles y las hojas, los vasos sanguíneos…

Algo tan común como una coliflor representa de manera bastante evidente una forma fractal. Si cortamos un trozo, su aspecto es en todo semejante a la coliflor entera. Cada "arbolito" de la planta es similar al conjunto, pero con menor tamaño; y cada ramificación de cada arbolito es similar, también, pero con un tamaño aun menor.

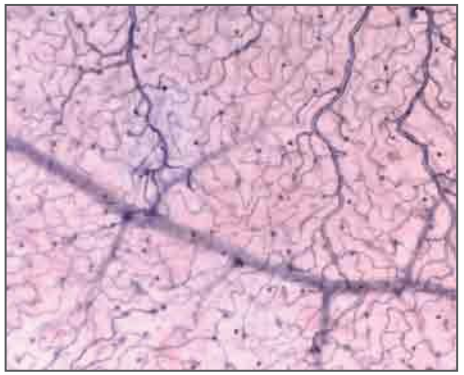
Y si hay elementos de la Naturaleza con formas muy próximas a un fractal también es posible generar fractales que parezcan objetos naturales utilizando ecuaciones simples en computadores, para hacer los cálculos y representar figuras geométricas.

Se ha insistido hasta el cansancio que los fractales están por todas partes y que las características de sus estructuras los hacen particularmente adecuados para describir la geometría de una infinidad de formas naturales. Ahora surgen las preguntas inevitables: ¿por qué? ¿qué tipo de mecanismo o proceso de crecimiento los produce? ¿Qué se esconde detrás de la formación de un fractal en el mundo real?

Si bien es cierto que los fractales son en muchos casos buenas aproximaciones de la realidad, la verdad es que no hay estructura real que soporte ser ampliada repetidamente un número infinito de veces y siga mostrando la misma cara; para todo hay límites. A nivel microscópico llegará el momento en que la figura se desdibuje y nos encontremos con los átomos y las moléculas; a nivel macroscópico siempre hay una frontera en la que el objeto real cambia de un tipo de patrón a otro.

Por otra parte, como las estructuras fractales han aparecido en áreas tan distintas como la propagación de enfermedades infecciosas o distintos tipos de índices, es todavía muy pronto para decir si se trata de problemas diferentes que requieren de una explicación particular, o si hay un principio general único que permite explicarlo todo.

Han surgido así diversos modelos que consideran las características físicas, químicas o biológicas del sistema de interés y proponen mecanismos de crecimiento que dan lugar a estructuras fractales muy semejantes al objeto real. Las distintas propuestas contienen ingredientes comunes que hacen pensar en la presencia de principios universales, pero no todo es claro y pocos se atreven a aventurarse.



Venas de la retina de un ojo

APLICACIONES DE LA TEORÍA FRACTAL

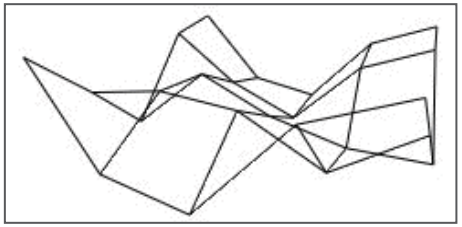
Gracias a los descubrimientos de la teoría del caos y de la geometría fractal, los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles. Una de las contribuciones más significativas de la geometría fractal ha sido su capacidad para modelar fenómenos naturales tales como las plantas, las nubes, las formaciones geológicas y los fenómenos atmosféricos. Esta teoría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la lingüística, la psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y otras aplicaciones electrónicas.

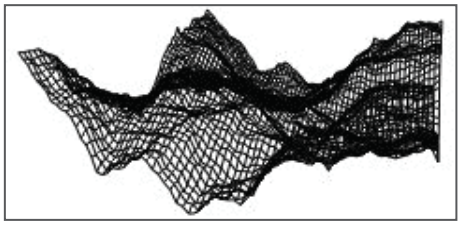
Fractales en la compresión de imágenes. Pixeles que se repiten o asimilan se traducen como uno para así reducir el peso de una imágen.

Los fractales también han cruzado la frontera entre la ciencia y el arte. Hoy en día, muchos artistas que han escogido este medio para sus expresiones producen magníficas representaciones hábilmente elaboradas de estos objetos matemáticos. Los valores (numéricos) que se asignan a los parámetros que definen un fractal también pueden convertirse a notas musicales para generar composiciones intrigantes y refrescantes. Esto último se denomina, generalmente, música fractal.

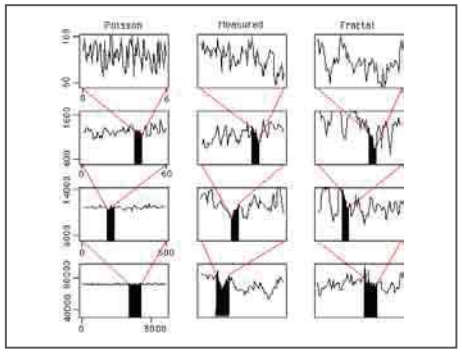
Recientemente, expertos han postulado que los fractales han estado asociados al arte mucho antes de que se estableciera su evidencia matemática. Por siglos, el ser humano ha utilizado patrones geométricos repetitivos, o recursivos, como elementos decorativos en vasijas, arquitectura, la ilustración de libros y muchas otras manifestaciones artísticas que, de algunas manera, pueden relacionarse con estructuras fractales.

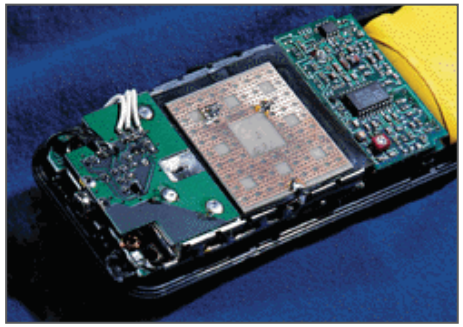
Otros estudios han demostrado que muchos estilos musicales siguen la relación 1/f asociada a frecuencias en la naturaleza, como la encontrada en la interferencia de ruido y el flujo de un río (Voss y Clark, 1975).



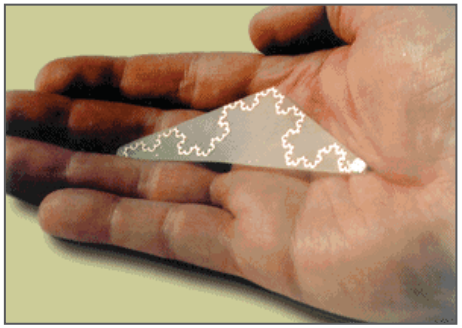


Terreno tridimiensional de estudio con distintos niveles de fractales. Abajo, fractales en la medida del tráfico de internet.





Hay antenas que son producidas en base a fractales con una pequeña cantidad de iteraciones para obtener una mayor sensibilidad a distintas frecuencias.



TOPOLOGÍA

INTRODUCCIÓN

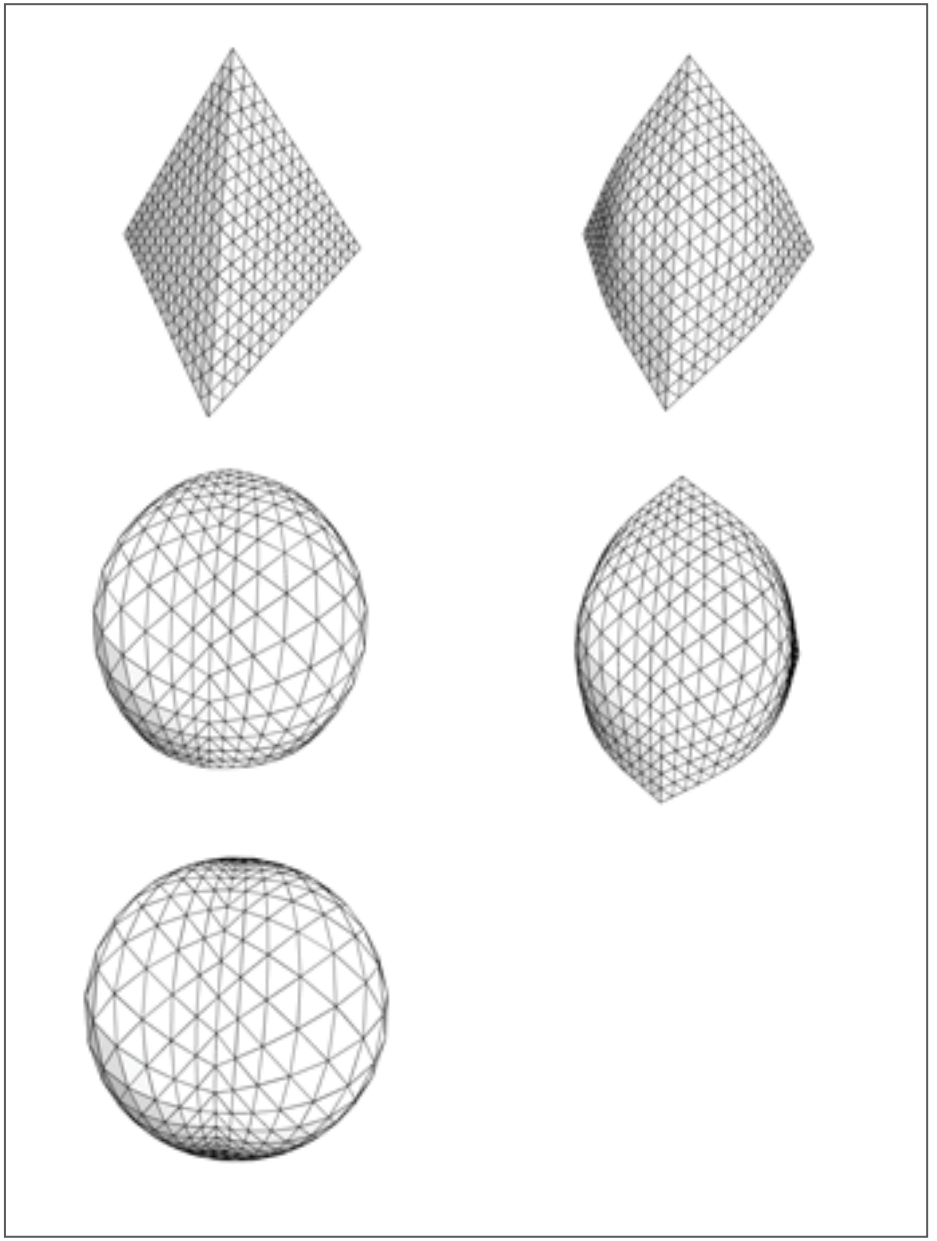
"... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición..."

L. Euler.

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo diecisiete, con el nombre de análisis situ, esto es, análisis de la posición. De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos diferentes.

La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Esta última propiedad se llama continuidad, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: así, trabajamos con homeomorfismos.

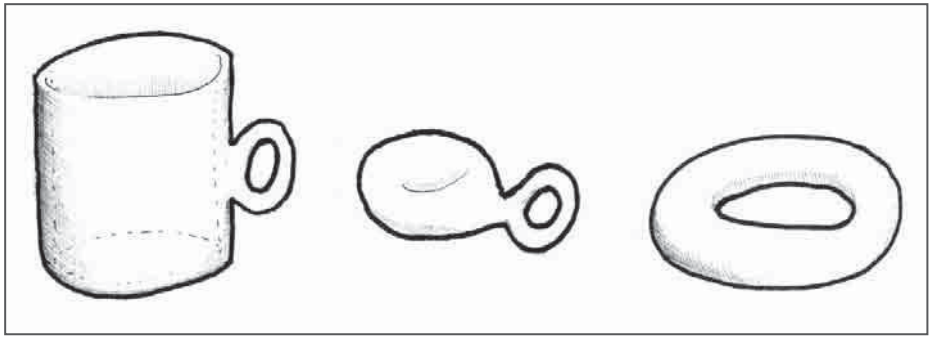
El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.



PROPIEDADES GEOMÉTRICAS CUALITATIVAS

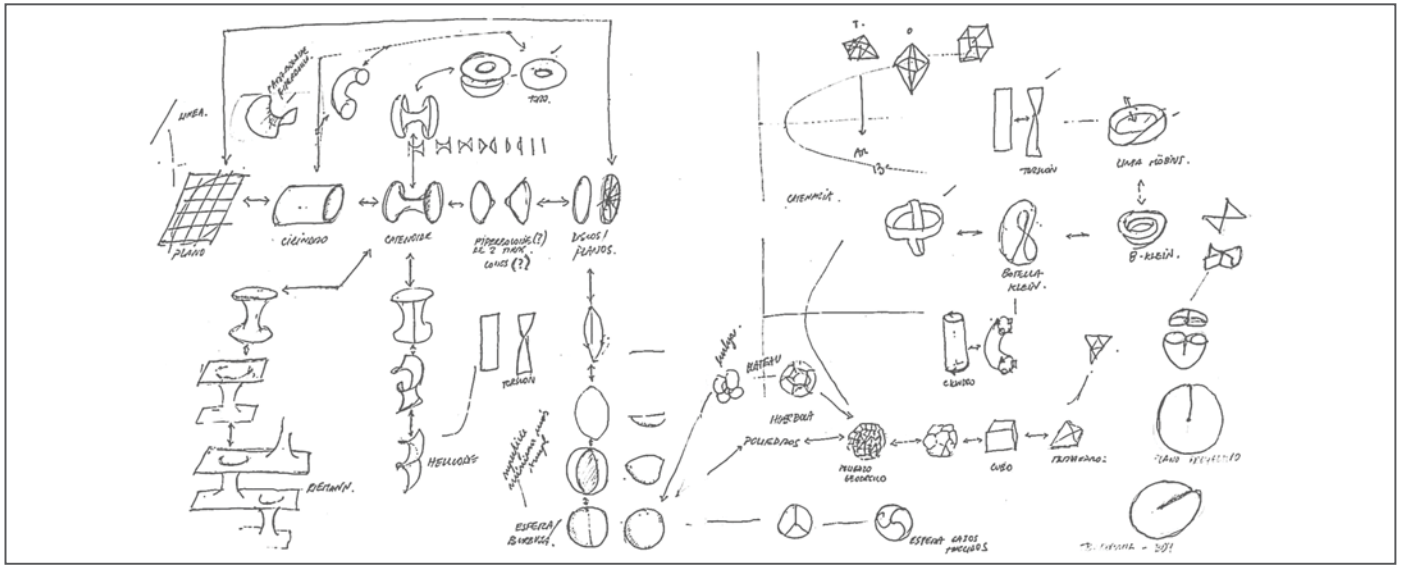
Las propiedades de las figuras que se enuncian explícitamente en la geometría elemental son, en su mayor parte, propiedades métricas, es decir, propiedades que dependen de magnitudes o medidas. Tales son, por ejemplo, la igualdad de dos triángulos, la de dos ángulos, la propiedad de un cuadrilátero de ser cuadrado, etc. Pero ciertas propiedades de las figuras son completamente independientes de magnitudes y medidas, y no se consideran por separado en geometría elemental. Tomemos, por ejemplo, por una parte de interior de un círculo, el interior de una elipse, el interior de un cuadrado, y por otra, una corona circular. Todas estas figuras tienen, evidentemente, propiedades métricas diferentes. Sin embargo, la intuición nos enseña que hay para las tres primeras algunas propiedades comunes que la última no posee. Las tres primeras tienen por ejemplo, esta propiedad en común: cualquiera sea la línea poligonal simple cerrada situada en el interior de una de ellas, la superficie limitada por tal línea pertenece completamente al interior de la figura. Es claro que la corona circular no goza de esta propiedad. Se puede pues, decir que hay ciertas propiedades cualitativas que el interior de un círculo, el de una elipse y el de un cuadrado poseen en común, pero que el interior de una corona circular no posee.

Si consideramos ahora una circunferencia en el plano, ésta divide el resto del plano en dos partes. Dos puntos de una misma parte pueden unirse siempre por medio de una línea poligonal plana sin que ésta corte a la circunferencia, mientras que toda línea poligonal plana que una dos puntos cualesquiera pertenecientes a cada una de las dos partes, respectivamente, corta a la circunferencia. Pero, se puede modificar convenientemente la forma métrica de la circunferencia sin alterar esta propiedad: si se reemplaza la circunferencia por una elipse o una línea poligonal simple, cerrada, esta propiedad subsiste.



Para un topólogo, una taza con oreja es lo mismo que una rosquilla (un toro). En palabras más simples, al topólogo, despreciando dimensiones, le importa qué relaciones hay, cuántos hoyos tiene, sus vínculos y transformaciones.

Cuadro esquemático de relaciones para transformaciones continuas entre distintas superficies. Cada elemento es relacionado según sus propiedades cualitativas y similitudes visibles



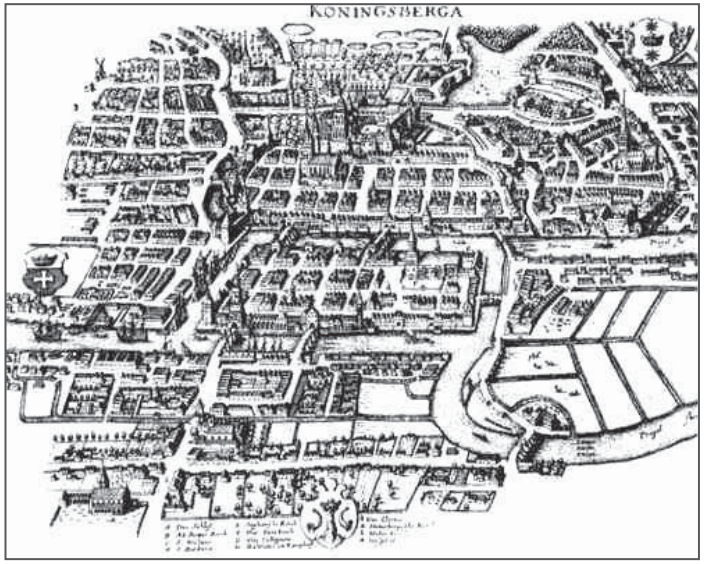
LA TEORÍA DE LOS GRAFOS

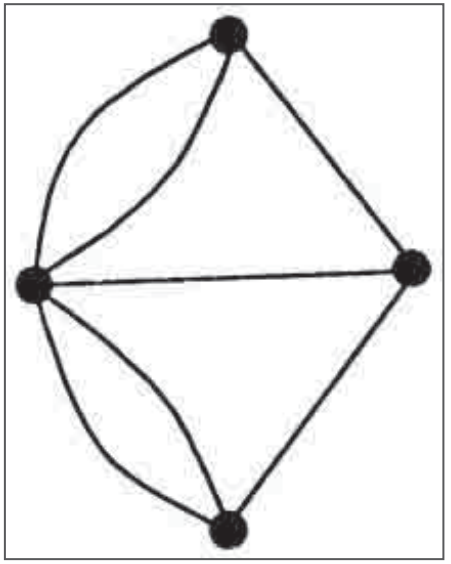
El estudio de grafos está ligado habitualmente a la topología. Un grafo es sencillamente un conjunto de puntos, los vértices, algunos de los cuales están ligados entre ellos por medio de líneas, las aristas. La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados.

En el plano de la red de metro de Santiago, están representadas las estaciones y líneas de metro que las une. Geométricamente, bajo sus dimensiones, no es exacto. La curvatura de las líneas con la de la línea y recorrido real del metro no coinciden, ni su longitud a escala ni la posición relativa entre estaciones. Pero aun así es un plano perfectamente útil. De hecho, si se trazara el plano con exactitud, seguramente sería más difícil de orientarse y leerlo. Sin embargo este plano es exacto en cierto sentido. Representa fielmente un tipo de información, la única que necesitamos para decidir nuestro camino por la red del metro: la información topológica.

EL PROBLEMA DE LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG

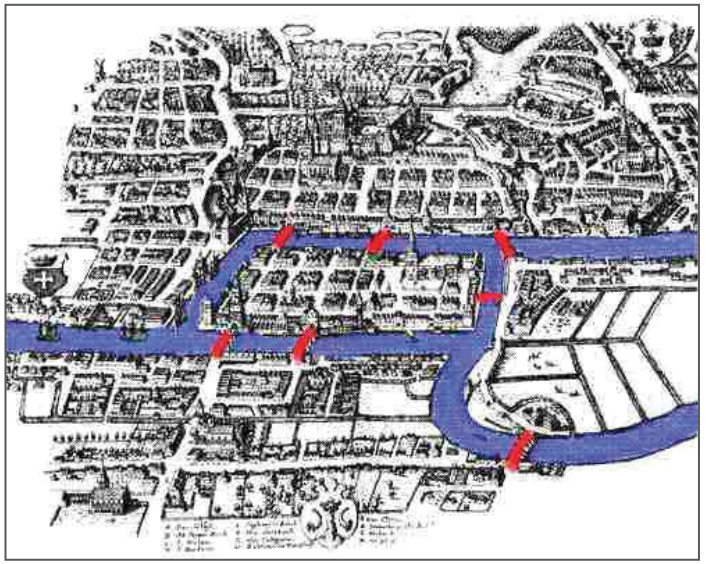
En 1700, los habitantes de Königsberg (hoy en día Kaliningrado, Rusia), se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad pasando una vez y sólo una por cada uno de los puentes sobre el río Pregel, y volviendo al punto de partida. En aquella época, Könisberg tenía siete puentes uniendo las cuatro partes de la ciudad separadas por las aguas, y dispuestas como se indica.

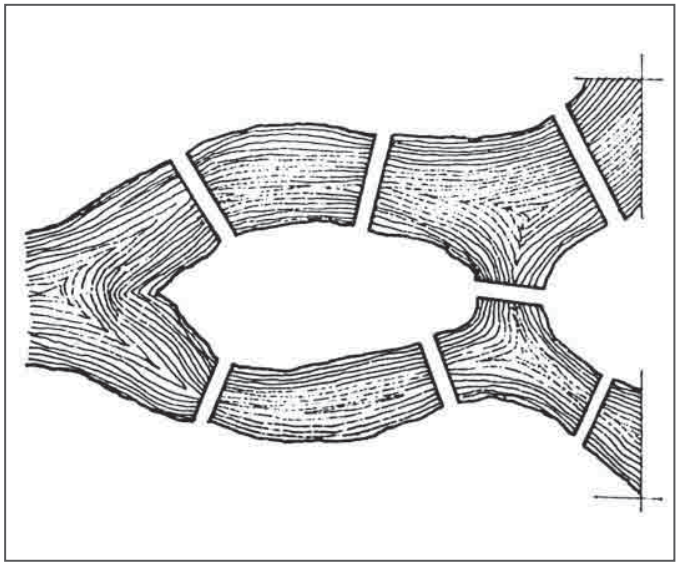




En 1736 Euler probó que la respuesta era negativa, usando un grafo: se dibujan sobre una hoja de papel cuatro vértices que simbolizan las cuatro partes separadas de la ciudad, después se trazan entre estos vértices las aristas, simbolizando los puentes:

Un grafo se llama conexo si existe un camino ligando cada par de vértices. Un camino sobre un grafo se llama euleriano, si pasa por cada arista exactamente una vez. Un circuito es un camino cerrado. El grado de un vértice es el número de aristas que llegan a él. Teniendo en cuenta estas definiciones, Euler demuestra el Teorema de Euler. Existe un circuito euleriano en un grafo si y sólo si el grafo es conexo y cada vértice tiene grado par.

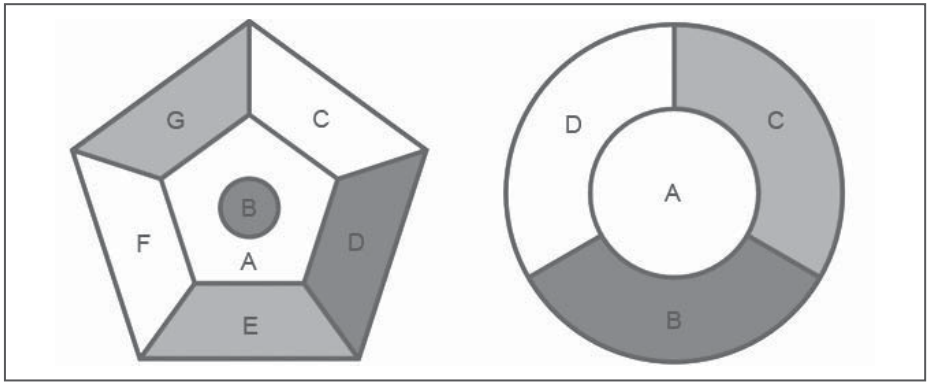




COLORACIÓN DE MAPAS GEOGRÁFICOS

Cayley, en 1878, atribuyó a de Morgan el enunciado del teorema de los cuatro colores. Según éste, si un mapa geográfico cualquiera representa Estados distintos con sus fronteras bastan cuatro colores a lo sumo para colorearlo de tal modo, que dos Estados cualesquiera, que se toquen a lo largo de una frontera, posean colores diferentes. (Por otra parte Frederic Guthre afirmó en 1880 que su hermano Francis Guthrie había dado una demostración de este teorema treinta años atrás). Se ha demostrado que cinco colores bastan siempre, y es fácil ver que tres no bastan.

Consideremos, por ejemplo, un mapa de siete regiones A, B, C, D, E, F, G situadas como en la figura. Se comprueba fácilmente que para colorear estas siete regiones se necesitan ya cuatro colores. También se puede imaginar un mapa de sólo cuatro regiones, dos cualesquiera de las cuales son adyacentes; se necesitan, pues, cuatro colores para colorearlas.

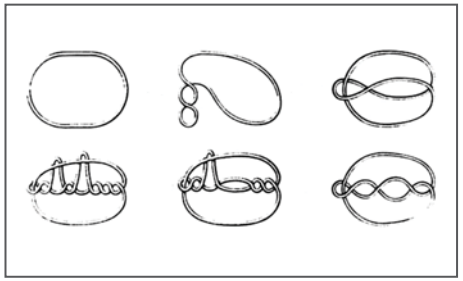


TEORÍA DE LOS NUDOS

La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen ya métodos que permiten unir una lámina de silex a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos. En la época actual, los marinos se han apropiado de esta técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley (1881-1947) describe y dibuja en su libro “The Ashley Book of Knots” exactamente 3.854 nudos.

Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite en la actualidad ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

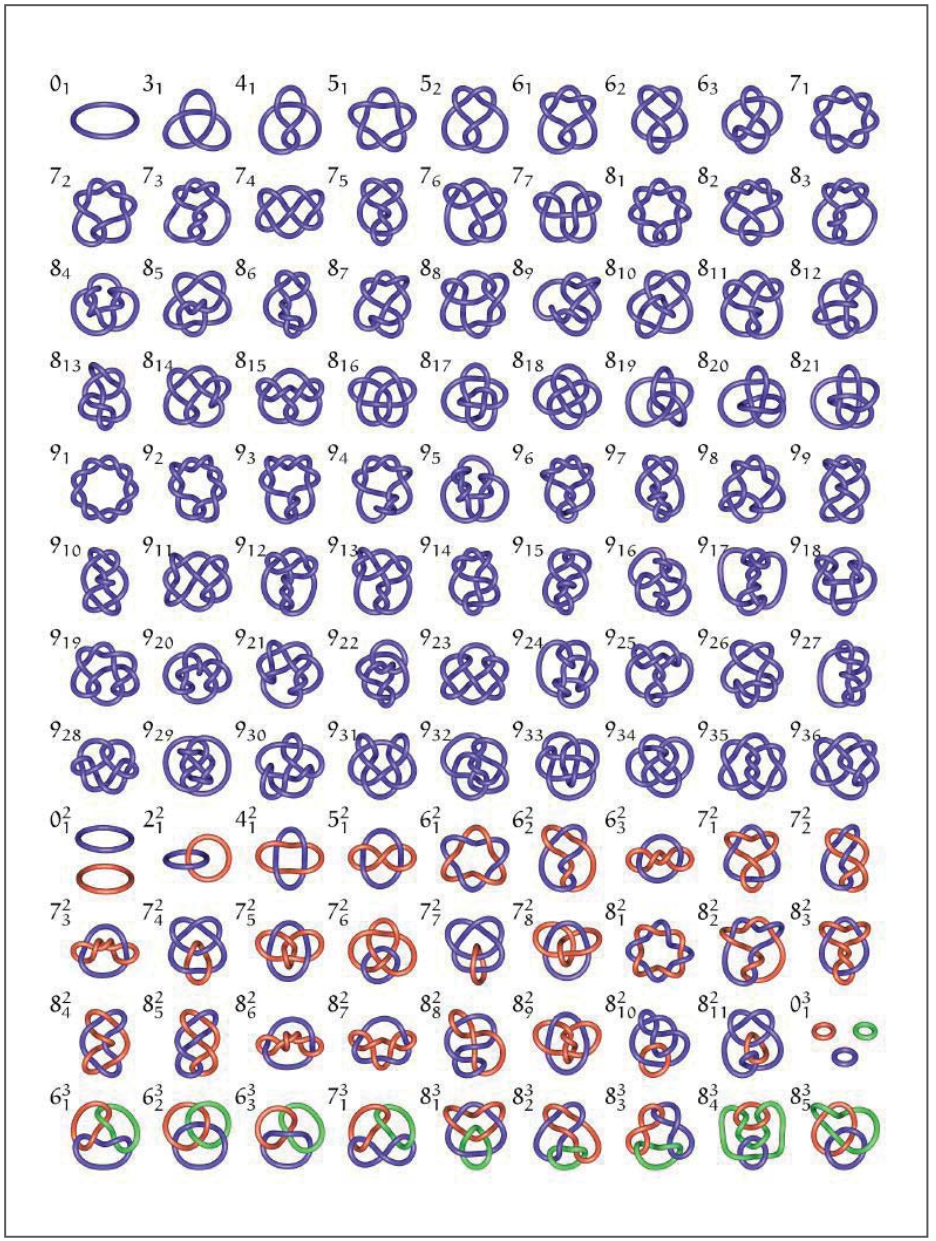
Para el matemático, un nudo es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles. Esta curva está situada en un espacio de dimensión tres y se admite que pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes. Cuando se puede, a través de manipulaciones de este tipo (es decir, por medio un homeomorfismo) pasar de un nudo a otro, se dice que son equivalentes. En general, es muy difícil decidir cuando dos nudos son equivalentes, y gran parte de la teoría de nudos está precisamente dedicada a intentar resolver esa cuestión. Por ejemplo, a la derecha, el nudo trivial (no hay nudo) equivale a este otro de apariencia complicada:



Los nudos están catalogados teniendo en cuenta su complejidad. Una medida de la complejidad es el número de cruce, es decir, el número de puntos dobles en la proyección plana más simple del nudo. El nudo trivial tiene número de cruce cero. El trébol y la figura de ocho son los únicos nudos con número de cruce tres y cuatro, respectivamente.

Hay dos nudos con número de cruce cinco, tres con seis y siete con número de cruce siete. Pero el número crece radicalmente: hay 12.965 nudos con trece o menos cruces en una proyección minimal, y 1.701.935 con dieciseis o menos cruces...

Los nudos se pueden sumar, restar, multiplicar e incluso dividir (el álgebra de los nudos). Pero cuando los nudos se complican, su simple descripción no basta para distinguirlos. Así, partiendo de su forma (la geometría del nudo), se han desarrollado fórmulas que funcionan para todos los nudos, hay invariantes topológicos que se obtienen al estudiar el complementario del nudo.



GEOMETRÍA DEL CAUCHO

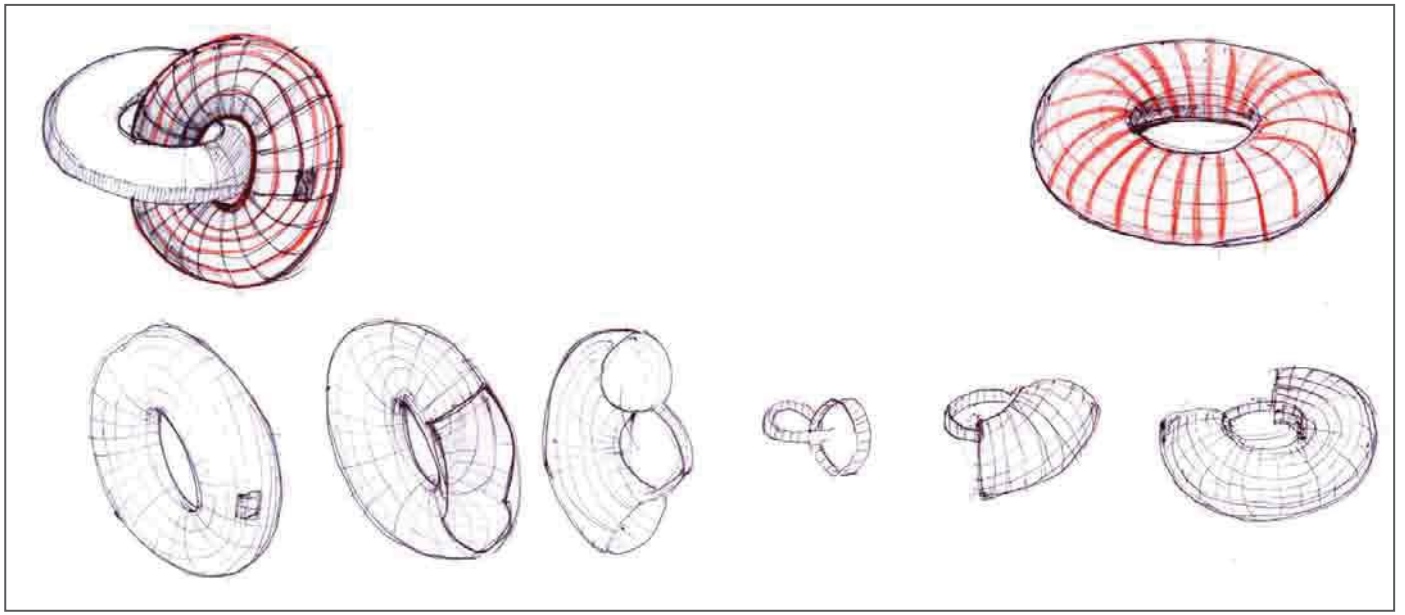
No estoy negando ni cambiando el significado al decir que la Topología es ahora la geometría del Caucho y no de la Continuidad, sino estoy apoyando su definición al poder representarlo a través de este elemento.

En los problemas anteriores no se toma en cuenta ni la magnitud ni la medida: sólo se trata de ciertas propiedades cualitativas. Y estas propiedades cualitativas tienen, sobre todo, un carácter común que interesa aclarar.

Se tiene una figura hecha de una especie de materia elástica que podamos torcer a voluntad en forma continua sin desgarrarla y sin que se adhiera. Ciertas propiedades de la figura cambian por la deformación, pero hay otras que quedan inalteradas. Estas propiedades que permanecen invariables a través de la deformación se llaman propiedades topológicas de la figura. Las propiedades topológicas se estudian en topología.

Si un círculo estuviese hecho de este caucho, se lo puede deformar sin desgarramiento ni adherencias, convirtiéndolo en la superficie de una elipse, de un cuadrado, etc. Las propiedades comunes a las superficies de un círculo, de una elipse, de un cuadrado y, más generalmente, a toda figura obtenida deformando, sin desgarramiento ni adherencias, la superficie de un círculo, se estudian en topología.

Así, expresándonos de un modo vago y aproximado, se puede decir que la topología es la geometría de las figuras de caucho. La noción de homeomorfismo va a permitirnos precisar esto.



De A a B

El “Toro caníbal” al tener un agujero en su superficie, es capaz, tratándola como este gaucho sin desgarramiento ni adherencias, de revertirlo, es decir, sacarlo de adentro hacia afuera quedando el sentido de su generatriz y directriz invertidas.

HOMEOMORFISMO

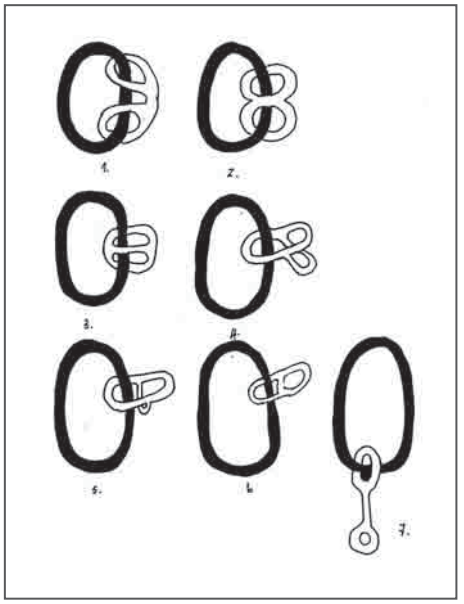
Cuando se tuerce una figura de caucho sin desgarramiento ni adherencias, se comprueba que existen dos relaciones notables entre la figura inicial y la obtenida por deformación: a todo punto de una figura corresponde un punto y sólo uno de la otra, y a dos puntos vecinos de una corresponden dos puntos vecinos de la otra. Estas dos relaciones pueden ser expresadas bajo una forma matemática que vamos a precisar, y son en realidad, las úinicas que hemos tenido en cuenta hasta aquí, en la "deformación de una figura de caucho sin desgarramiento ni adherencias".

Sean E y F dos figuras o conjuntos de puntos distintos o no. Supongamos que a todo punto de E corresponde un punto determinado de F, pudiendo el mismo punto de F corresponder a varios puntos de E, y, por otra parte, correspondiendo todo punto de F por lo menos a un punto de E.

Se llama homeomorfismo o trasformación topológica a cada transformación biunívoca y bicontinua. Si se desea expresarlo de una manera intuitiva se puede decir que un homeomorfismo entre dos figuras o entre dos conjuntos de puntos es una correspondencia tal que a todo punto de una de las dos figuras corresponde un punto, y sólo uno, de la otra, y que a dos puntos vecinos de una corresponden a dos puntos vecinos de la otra.

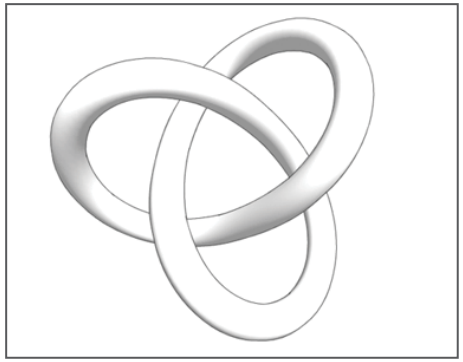
En realidad, la deformación no es más que un procedimiento muy particular para la realización concreta de un homeomorfismo. Se puede también lograr, por ejemplo, cortando un toro según la circunferencia generatriz. Se obtiene una superficie en forma de tubo con dos bordes. Con esta superficie se puede lograr un nudo reuniendo después los dos bordes de manera que los puntos que coincidían en la superficie obtenida. De esta manera existe una correspondencia biunívoca y bicontinua entre el toro y la superficie de un nudo. Se ha pasado de la primera superficie a la segunda por medio de corte deformación y pegadura. Este ejemplo nos muestra que no hay que creer que el homeomorfismo es una traducción matemática completa de la "deformación sin desgarramiento ni adherencias" a la que corresponde más bien otra noción matemática: la isotopía.

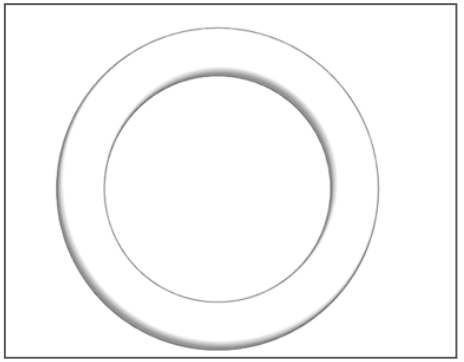
Ambas figuras son topológicamente equivalentes. Tanto el toro como el nudo, poseen las mismas propiedades cualitativas. Ambas figuras son homeomorfas.



Transformación continua, paso a paso, de una figura a otra.

Ambas figuras son topológicamente equivalentes. Tanto el toro como el nudo, poseen las mismas propiedades cualitativas. Ambas figuras son homeomorfas.





TOPOLOGÍA, GEOMETRÍA DE LA CONTINUIDAD

La Topología o Análisis situs es una rama moderna de la geometría que, como hemos visto, no hace intervenir la noción de magnitud o de medida, sino únicamente la de continuidad. Se ocupa, pues solamente de propiedades cualitativas de las figuras.

Es posible definir el objeto de la topología, con más precisión, de la manera siguiente. Se dice que una propiedad de un conjunto es topológica si puede ser expresada por medio de la noción de continuidad. Una propiedad topológica de un conjunto se llama invariante topológico si se conserva en todo homeomorfismo. La topología es el estudio de las propiedades topológicas y, sobre todo, de los invariantes topológicos de las figuras.

La noción de homeomorfismo desempeña en la topología el mismo papel que el de igualdad en la geometría elemental. En geometría elemental, dos figuras iguales tienen las mismas propiedades. De igual modo, ya que las propiedades principales estudiadas en topología son los invariantes topológicos, y que éstos son comunes a dos conjuntos homeomorfos cualesquiera, dos de tales conjuntos deben ser mirados en topología como esencialmente no diferentes o, más exactamente, como equivalentes.

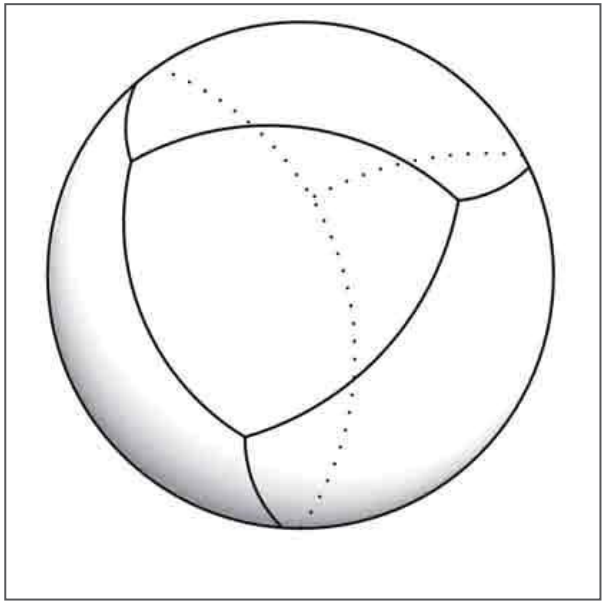
Así, dos conjuntos homeomorfos son topológicamente equivalentes. La relación de homeomorfismo entre dos conjuntos puede ser considerada como una relación de equivalencia porque verifica las tres condiciones de equivalencias siguientes:
1°, todo conjunto es homeomorfo consigo mismo.
2°, si E es homeomorfo con F, F es homeomorfo con E.
3°, si E es homeomorfo con F y F es homeomorfo con G, E también es homeomorfo con G.

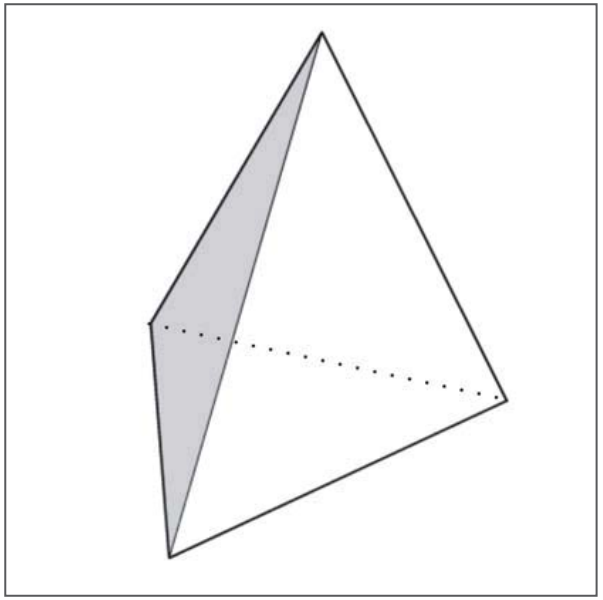
Es la información topológica la que permite realizar transformaciones continuas en la construcción y animación de modelos tridimensionales.

CARACTERÍSTICAS DE UNA SUPERFICIE

Si deformamos un poliedro simple transformándolo en la superficie de una esfera se obtiene una división de la superficie de la esfera en lo que podemos llamar polígonos curvilíneos correspondientes a las caras del poliedro. Inversamente, si se divide la superficie de una esfera en un número finito de polígonos curvilíneos, de manera que para toda arista curvilínea existan dos, y solamente dos, polígonos curvilíneos que tengan esta arista en común, se puede deformar la esfera como una pelota de goma, transformándola en un poliedro simple cuyas caras provengan de los polígonos curvilíneos trazados sobre ella.

Resulta así que el teorema de Descartes subsiste para toda división de la superficie de una esfera en polígonos curvilíneos, con tal que la división verifique la condición susodicha. En la figura se ve una división de la esfera en cuatro triángulos curvilíneos. Esta división corresponde a los tetraedros y se llama división tetraédrica.



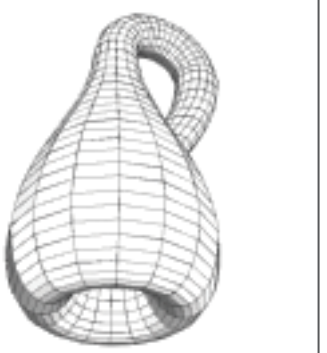


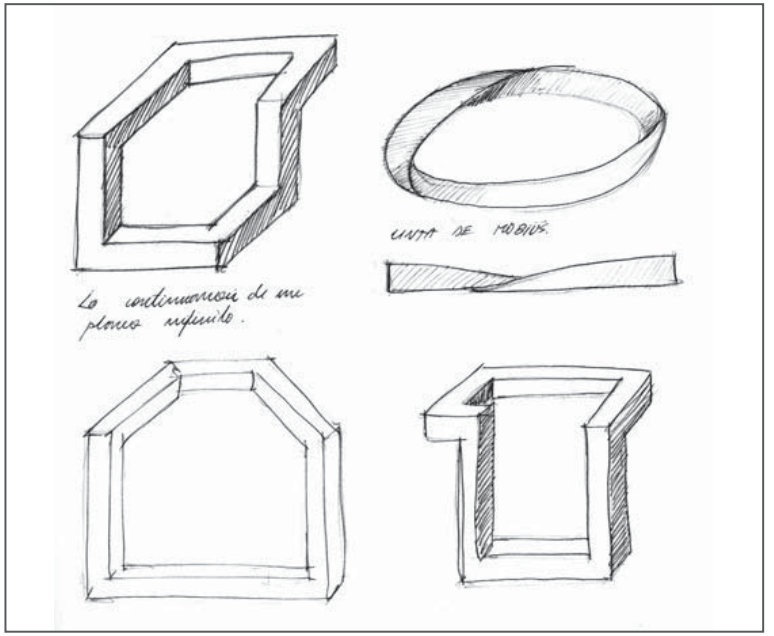
SUPERFICIES UNILÁTERAS

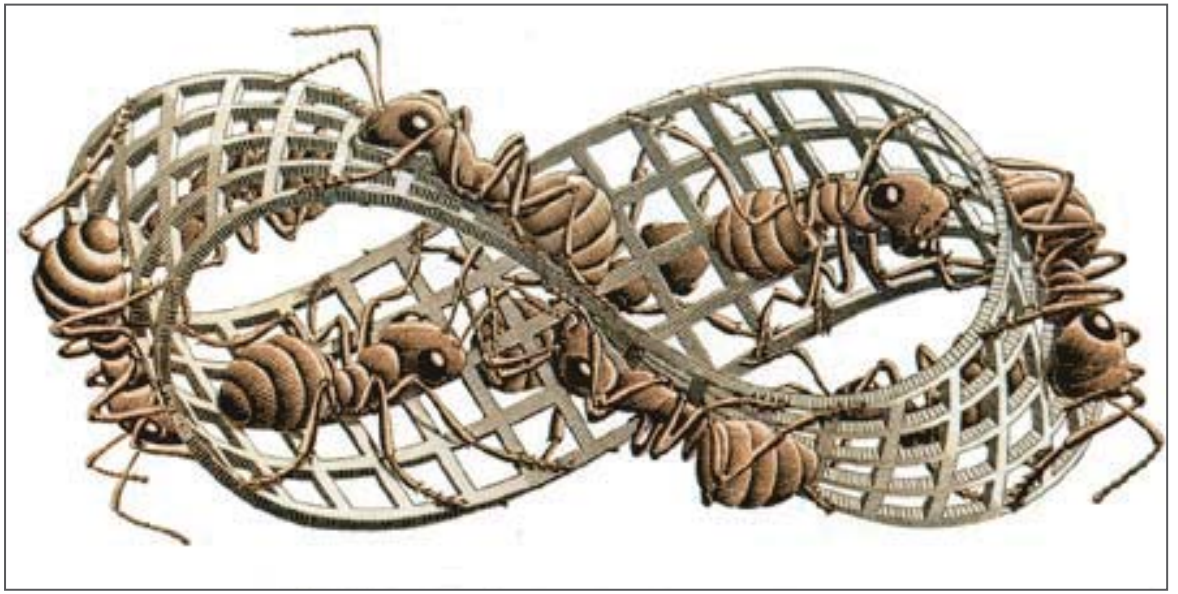
Cuando una hormiga se mueve en la superficie de una esfera, no puede pasar del interior al exterior de la misma, siguiendo un camino sobre la superficie, sin traspasarla. Del mismo modo una hormiga se mueve en la superficie de una semiesfera, no puede pasar de un lado a otro de la superficie , recorriendo un camino sobre la misma, sin franquear el borde de la semiesfera. Una superficie que goza de esta propiedad se llama bilátera.

Existen superficies que poseen la propiedad de ser una superficie unilátera tales como la cinta de Möbius. En esta superficie se ve que el borde de la cinta está formado por una sola línea cerrada. Una hormiga puede pasar de un lado al otro marcando una línea sobre la cinta sin franquear el borde. Así, la cinta de Möbius no tiene, como una semiesfera, los lados separados por el borde, que se pueden teñir uno de rojo y otro de azul de manera que los dos colores no se toquen más que a lo largo del borde. Se dice que la cinta de Möbius es, en el espacio de la geometría elemental, una superficie unilátera.

La cinta de Möbius no es una superficie cerrada puesto que tiene un borde. Uno no puede preguntarse si existen, en el espacio de la geometría elemental, superficies cerradas uniláteras. Una superficie que no tenga más que un lado, no posee interior ni exterior. Ésta debe pues, necesariamente, penetrarse a sí misma en algunos sitios. Ejemplos como estos son la botella de Klein y el plano proyectivo.







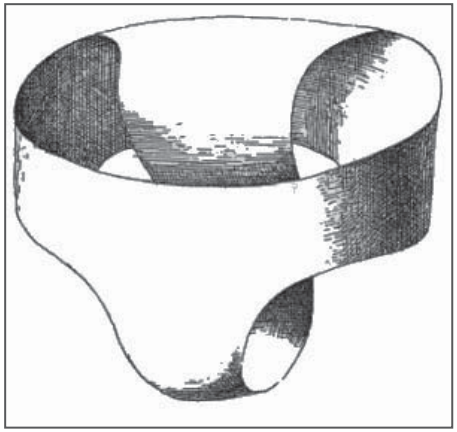
ORIENTABILIDAD Y NO ORIENTABILIDAD

Las superficies uniláteras en el espacio de la geometría elemental pueden caracterizarse por otra propiedad topológica. Para demostrar esto, se marca alrededor de cada punto de la superficie, salvo aquellos que se encuentran en los bordes, si existen, una pequeña circunferencia. Ahora se da cada una de estas circunferencias un sentido determinado de recorrido cíclico, de modo que dos circunferencias de centros muy próximos reciban el mismo sentido. Si esto es posible, diremos que la superficie es orientable; en caso contrario, la llamaremos no orientable.

Una superficie unilátera no puede ser orientable. En efecto, en toda superficie unilátera existe por lo menos una línea cerrada que no corta los bordes, si existen, según la cual una hormiga puede pasar de un punto situado en un lado de la superficie al punto superpuesto del otro lado.

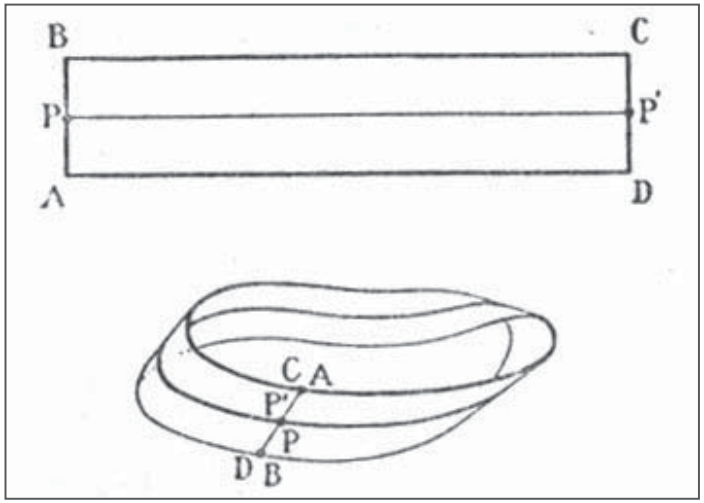
Por ejemplo, la mediana PP' sobre la cinta de Möbius un punto móvil se mueve a lo largo de esta línea de P a P', y dos circunferencias trazadas alrededor de dos posiciones muy próximas del punto móvil se orientan en el mismo sentido, el sentido de la circunferencia trazada alrededor de P' es necesariamente opuesto al de la circunferencia de centro P. Ahora bien, estando P y P' superpuestos, son un mismo punto. La Superficie de Möbius es entonces no orientable. Esta singularidad se debe únicamente a que la superficie en cuestión es unilátera..

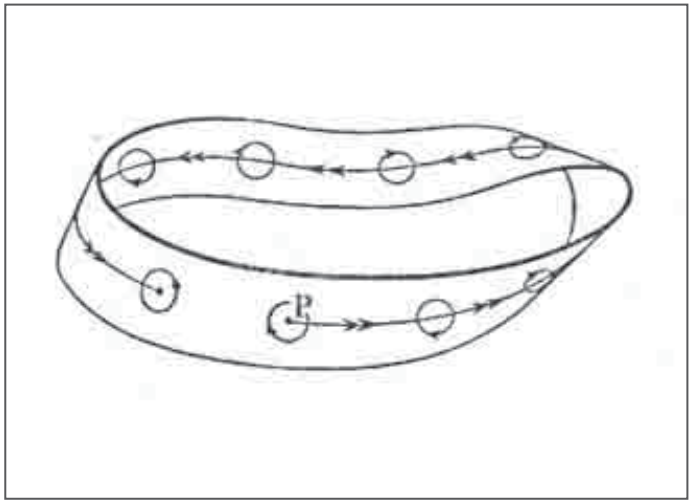
Si se llegara a cortar la cinta a lo largo de la curva cerrada PP', no se dividirá en dos partes. Esta curva cerrada PP' posee, sobre todo, la notable propiedad siguiente: si un punto móvil se mueve cerca de la curva PP', y a todo lo largo de ésta, pasará de un lado a otro de la misma sin atravesarla. De esta manera, si la superficie de un continente tuviera la forma de una de estas cintas, y fuera atravesado por un río según la curva PP', se podría pasar a pie de un borde del río al borde opuesto sin franquearlo. Entonces se puede decir de la cinta de Möbius que tiene un solo borde. Se ve fácilmente que la existencia, en una superficie, de por lo menos una curva cerrada que no tenga más que un borde, es condición necesaria y suficiente para que la superficie sea unilátera. Utilizando este hecho se puede demostrar que toda superficie bilátera es orientable.



La botella de Klein llevada a una cinta de papel continua.

La cinta de Möbius al cortarla a lo largo por su mitad, se obtiene dos cintas enlazadas, una que es una cinta de Möbius de las de medio giro, y otra más grande con cuatro medias vueltas.

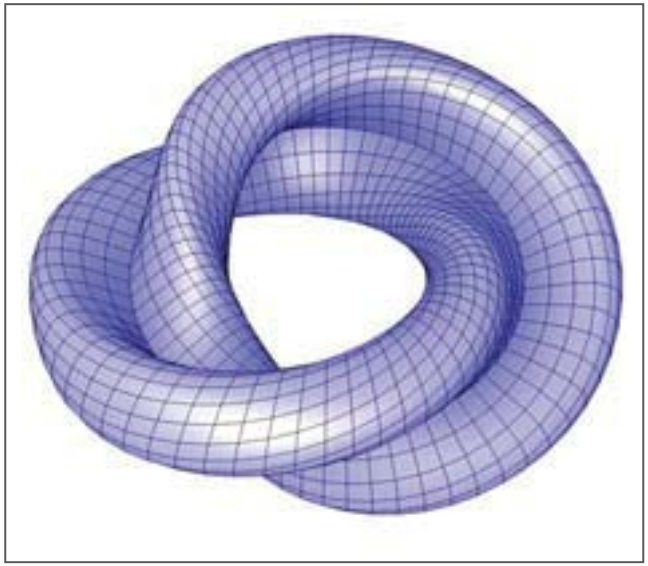




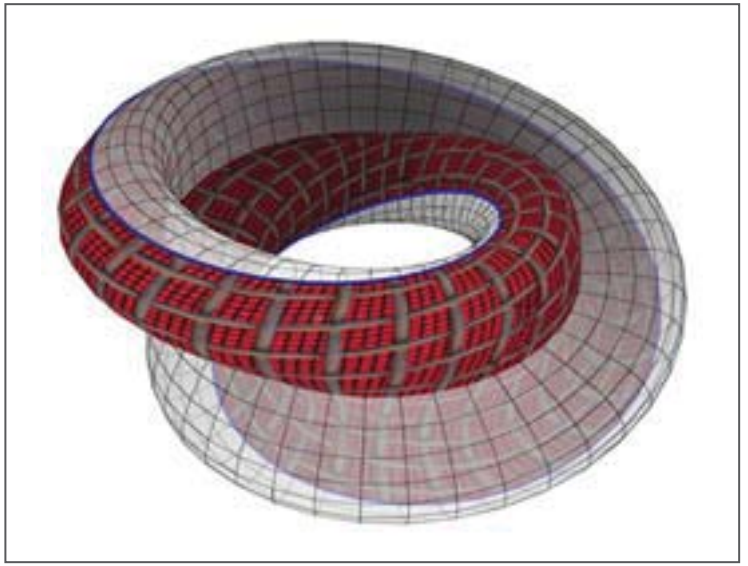
SUPERFICIES ORIENTABLES

Ejemplos de estas figuras son el toro o el toro 8. La figura toro 8 es una figura algo que a primera vista no se parece a un toro. El toro 8 puede ser pensado como 2 toros que estan construidos uniendo los extremos de 2 cilindros que estan conectados entre si de tal manera que la sección de cruce aparece como una figura 8. Además, los extremos del cilindro figura 8 son unidos entre si con un giro de 360°.

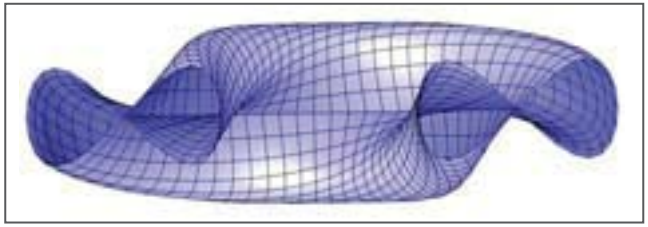
Se puede pensar que el toro 8 se parece a la botella de Klein 8, pero esto es debido a que son construidos de formas similares. Sin embargo, hay una diferencia importante entre las 2 formas. La figura toro 8 es orientable mientras que la botella de Klein 8, no lo es. La figura toro 8 esta hecho de dos tiras con un giro de 360° mientras que la cinta de Möbius y la botella de Klein tienen un giro de 180°, esto es literalmente la diferencia entre ser ORIENTABLE y NO ORIENTABLE. La figura toro 8 tiene una curva continua y cerrada de auto intersección, cuya imagen es un circulo.

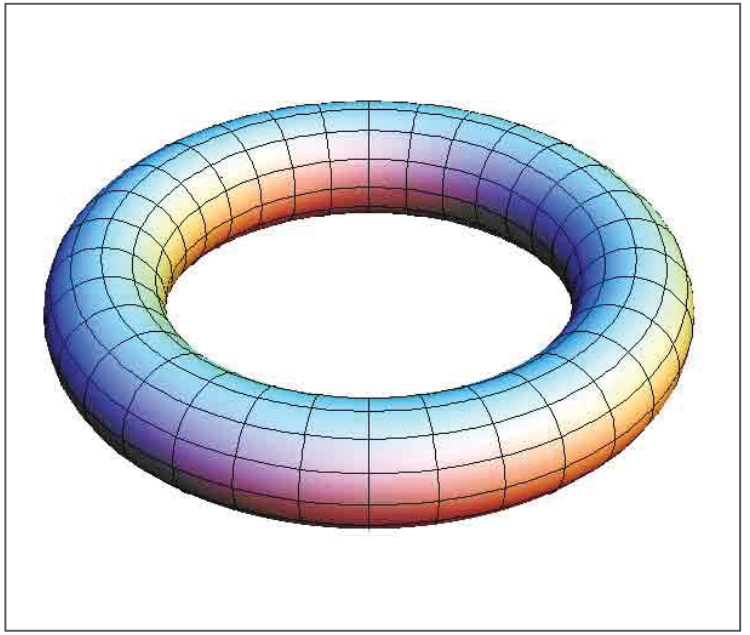


Toro 8, transparencia y corte



Botella de Klein 8

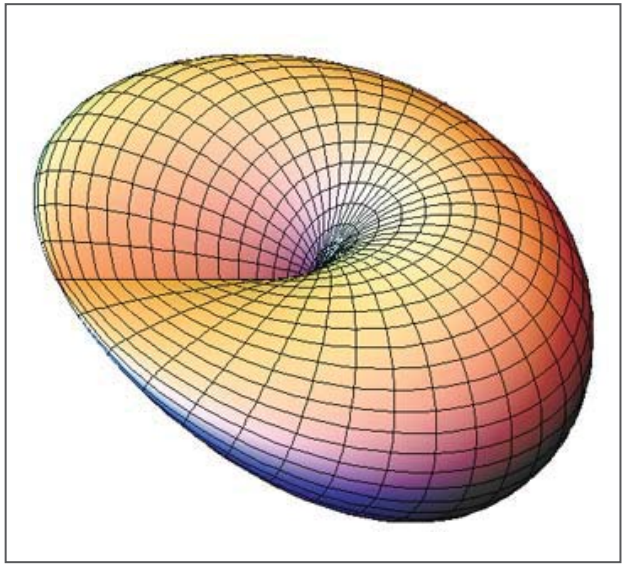




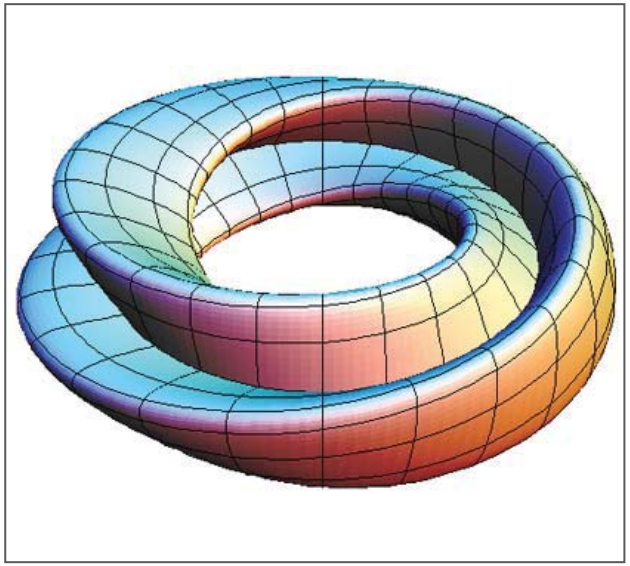
Toro

SUPERFICIES NO ORIENTABLES

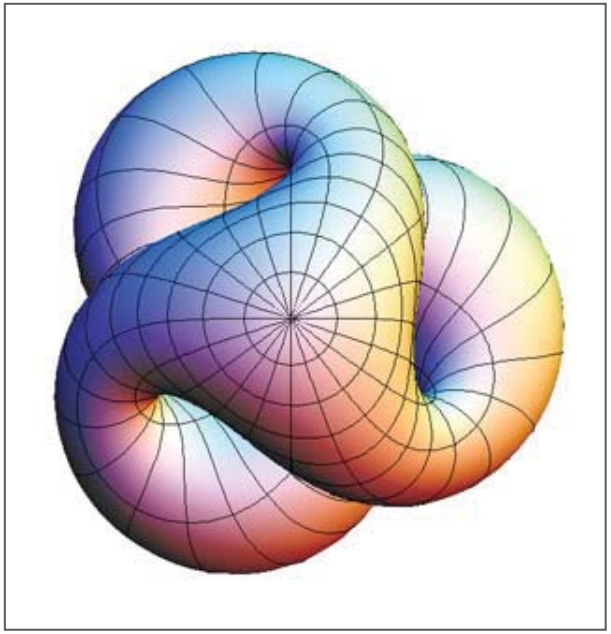
La definición básica de una superficie no orientable es cualquier superficie en que una trayectoria cerrada que conforma una superficie, puede ser trazada de tal manera que la dirección se revierte. Suena algo complicado, pero ejemplos visuales de este tipo de trayectoria se puede apreciar mejor en la cinta de Möbius y la botella de Klein o la superficie Romana o superficie Romana de Steiner.



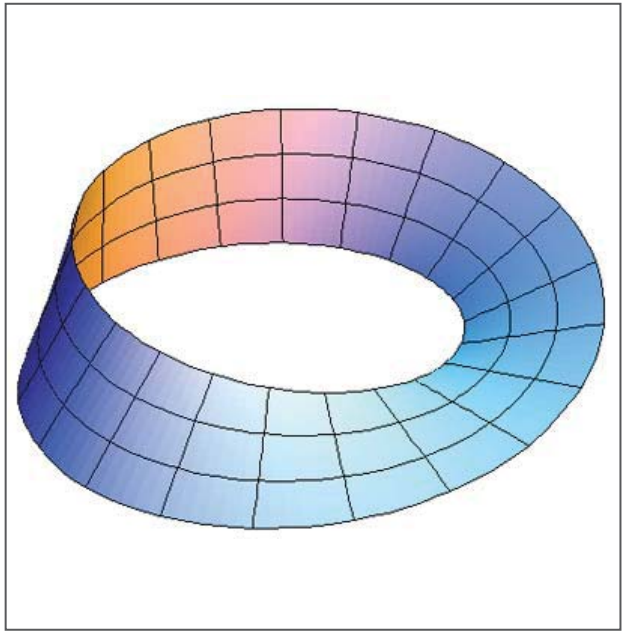
Gorro cruzado



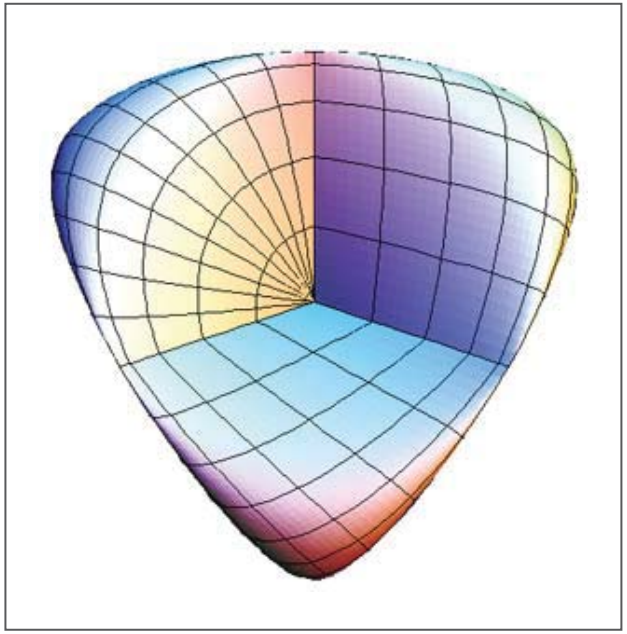
Botella de klein 8



Boys Bryant Kusner



Cinta de Möbius



Superficie de Steiner

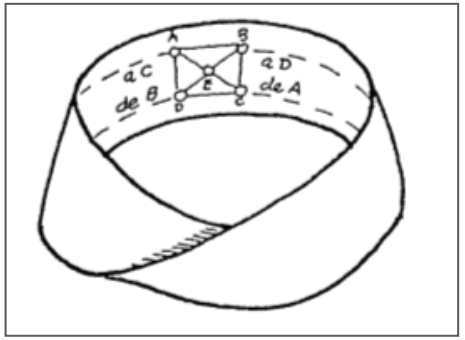
DE LAS 2 A LAS 3 DIMENSIONES Y LA NO ORIENTABILIDAD

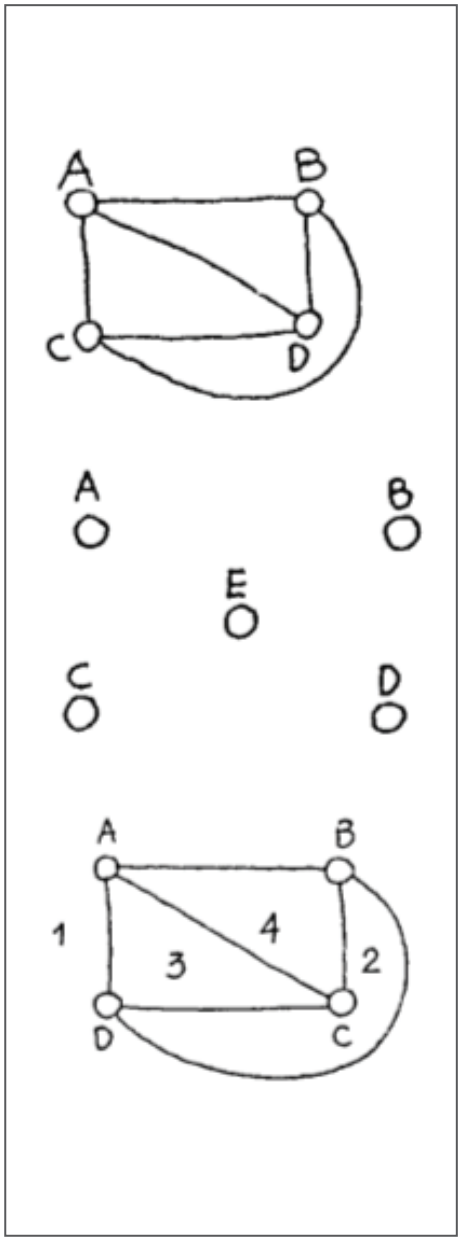
Si tenemos 4 puntos, A, B, C, D, si queremos que cada uno se una con los otros 3, estos se pueden unir sin que las líneas se cruzen. Cada línea contiene 2 de los puntos.

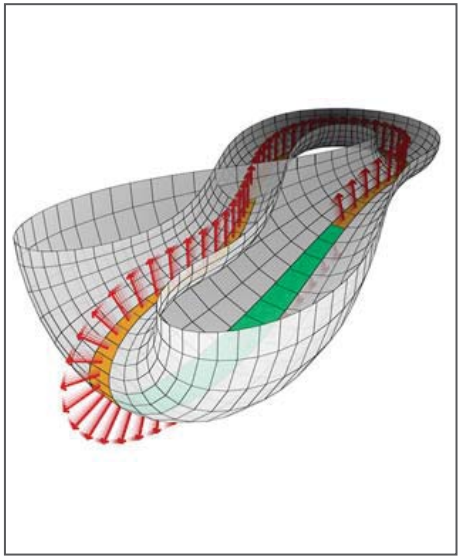
Pero si tenemos 5 puntos, el problema cambia, llegando a ser imposible la operación realizada anteriormente.

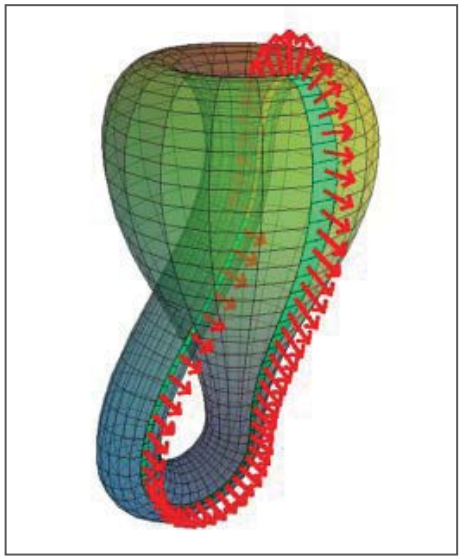
La pregunta puede ser dónde se puede ubicar el quinto punto, el E, para que el problema tuviese respuesta. Si esta en 1 no se puede unir a C, si está en 2, no se puede unir a A, si está en 3 no se puede unr a B y si está en 4 no se puede unir a D. Entonces, como conclusión, resulta ser imposible la unión de estos 5 puntos sin intersecciones a menos que la superficie en que se trazan los puntos varie.

Si la superficie se tratara de la cinta de Möbius, el problema se resuelve. La torsión de la superficie y la unilateralidad, permiten la unión de los 5 puntos sin intersecciones.







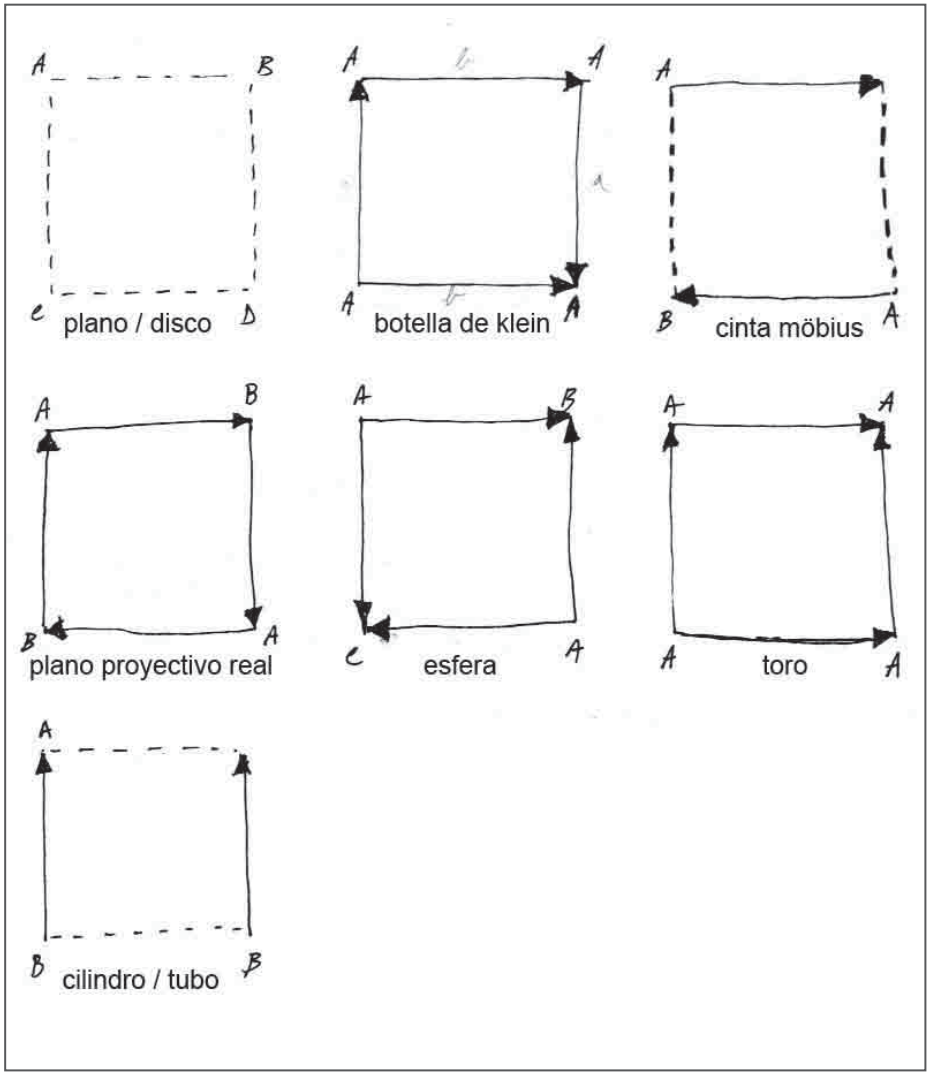


La botella de Klein corresponde a una superficie no orientable, en la que si se analiza un segmento de él, se logra ver que posee un solo lado, por lo tanto no tiene ni interior ni exterior.

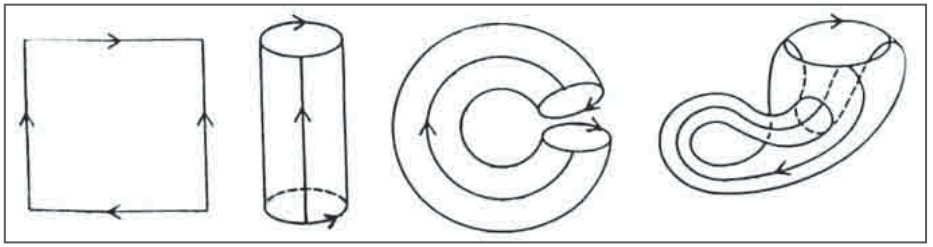
DEFINICIÓN TOPOLÓGICA DE LAS SUPERFICIES CERRADAS

En este proyecto como se da en estudios de topología, se han construido superficies cerradas a partir de polígonos, identificando sus lados. Esta forma de construcción nos da la posibilidad de realizarlo en sentido inverso, de descomponer cualquiera de estas superficies en uno o varios polígonos que verifiquen ciertas condiciones. Estas superficies son tan variadas desde el punto de vista de su forma métrica, que su generalidad misma nos autoriza a limitarnos a considerar solamente aquellas superficies que pueden ser descompuestas en polígonos sujetos a ciertas condiciones. A causa de esta limitación, será natural llamar a estas superficies, superficies cerradas poliedrizables. Pero, como se puede comprobar que esta limitación es más aparente que real, se utiliza el término superficies cerradas.

Se puede construir ciertas superficies cerradas simples por medio de la deformación y pegado de polígonos, es decir, haciendo coincidir ciertos lados. Estas operaciones no son, evidentemente, homeomorfismos, ya que dos puntos distintos pueden coincidir después del pegado. Pero, la construcción pondrá en evidencia la posibilidad de descomponer ciertas superficies simples en uno o más polígonos que verifiquen ciertas condiciones. Es esta posibilidad la que sugerirá una regla que permita limitar el tema de la topología de las superficies en este proyecto (debido al problema principal de la topología de las superficies).



Bordes paralelos dibujados en línea continua son unidos entre sí bajo la orientación de las flechas, así las esquinas designadas con una misma letra corresponden al mismo punto. Las líneas segmentadas muestran bordes libres.



Construcción de superficies cerradas orientables y no orientables a partir de polígonos, identificando sus lados.

PROBLEMA PRINCIPAL DE LA TOPOLOGÍA DE LAS SUPERFICIES

El problema principal en la topología de las superficies cerradas es buscar los invariantes topológicos de cada una de ellas, a fin de que se pueda reconocer si dos superficies cerradas dadas arbitrariamente son o no homeomorfas.

Hay una enorme variedad de superficies homeomorfas con una superficie dada. El punto de vista topológico permite simplificar el problema enunciado más arriba disponiendo las superficies cerradas en clases disjuntas dos a dos, de manera que dos superficies homeomorfas pertenezcan a una misma clase, y dos superficies no homeomorfas a dos clases distintas. Así, el problema consiste en enumerar todas las clases distintas de superficies cerradas, y en caracterizar cada clase por medio de invariantes topológicos. Como invariantes topológicos dentro de este estudio, la propiedad de ser orientable o no orientable, bastan para individualizar cada clase. Dicho de otra manera, dos superficies cerradas son homeomorfas si, y solamente si, tienen la misma característica y son, a la vez, orientables o no orientables, lo que resuelve completamente el problema principal de la topología de las superficies cerradas.

1774 Euler

catenoide

1775 Meusnier

helicoide

1835 Scherk

scherk

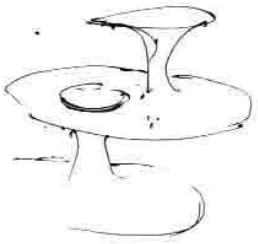
1864 Enneper

enneper

1865 Schwarz

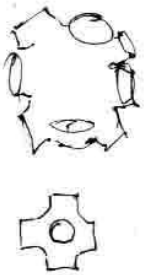
parabolide hiperbolico

1868 Riemann



escalera de riemann

1970 Schoen



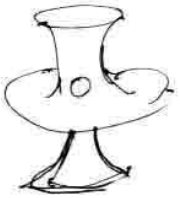
schoen

cristalografia

1981 Chen-Gackstatter

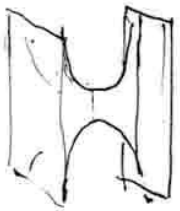
enneper con manilla

1982 C. Costa D.Hoffman



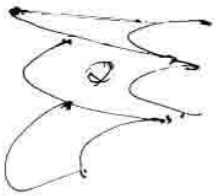
superficie de costa

1988 Karcher



karcher

1993 Karcher D.Hoffman - F. Wei



helicoide con manilla

GEOMETRÍA GLOBAI: TEORÍA GLOBAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

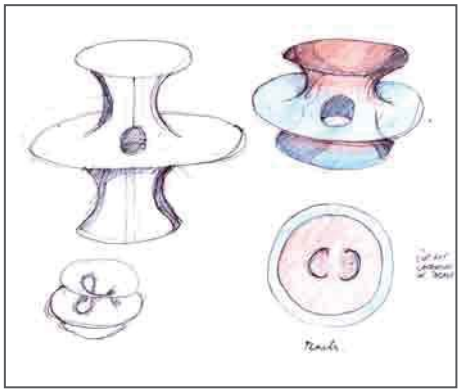
En el desarrollo del proyecto, la construcción de estas superficies, presentan un análisis en sus propiedades, geometría y curvaturas. Se están tratando superficies topológicas en que para poder construirlas uno se pregunta sobre la manera de verlas, tanto por sus mismas propiedades cualitativas como el resultado visual que este tenga.

Una curva, o una superficie nos la imaginamos habitualmente contenidas en el espacio euclídeo de dimensión 3. Podemos estudiar su geometría desde este punto de vista, y resulta así la geometría extrínseca de curvas y superficies, que es por donde comienza el estudio de la geometría diferencial. Al realizar este estudio aparecen distintos tipos de curvaturas, que miden el modo en que se ve a la curva o superficie curvarse (alejarse de la forma plana) desde fuera de la superficie. Estas curvaturas se definen localmente: las curvaturas en cada punto dependen de la forma de la superficie en un entorno de cada punto. El problema de la geometría global es el siguiente: ¿que influencia tienen estas curvaturas (locales) en el comportamiento global (topológico y/o métrico) de la superficie?, o, de otra manera: ¿qué geometrías extrínsecas son posibles para determinadas superficies topológicas?, o, todavía: ¿está la topología determinada por las curvaturas extrínsecas?

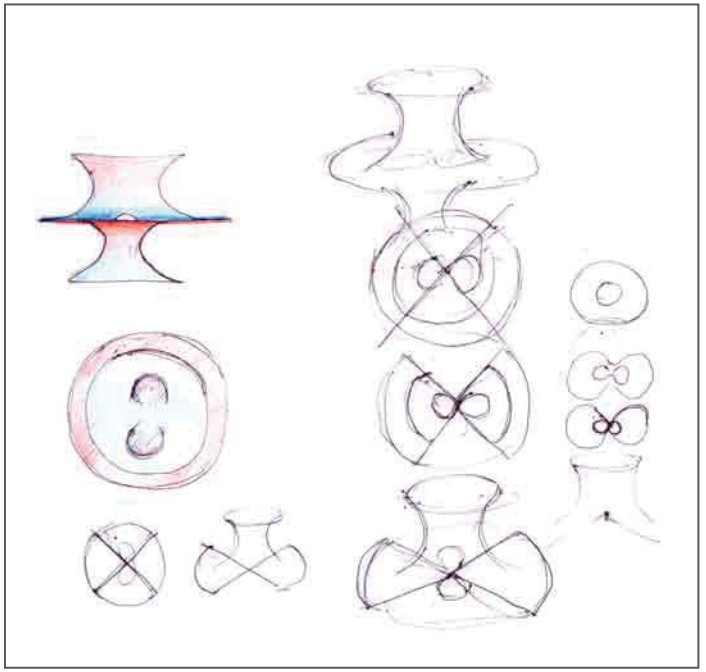
Podemos ahora considerar una superficie vista desde su interior, tal y como la vería un ser plano situado sobre ella que no pudiese mirar hacia afuera. Tendríamos así la geometría intrínseca. La única curvatura de las vistas en el curso de curvas y superficies que resulta ser intrínseca es la curvatura de Gauss. Y podemos volver a plantear el mismo problema global que para el caso extrínseco: ¿está la topología y/o la distancia en una superficie determinada por su curvatura de Gauss?

La diferencia entre las geometrías extrínseca e intrínseca no solo está en las hipótesis sobre las curvaturas, sino también en las conclusiones. Así, por ejemplo, en geometría intrínseca podemos concluir que una superficie con determinadas cotas sobre las curvaturas es una esfera topológica, pero ya no podemos concluir nada más, la esfera podría tener formas muy extrañas (por ejemplo la de una estrella de mar). Sin embargo, en geometría extrínseca podemos decir más acerca de la forma de esa esfera, por ejemplo, que es un ovaloide (una superficie cerrada en el espacio euclídeo y convexa), lo que impide que tenga forma extrañas, o también podemos caracterizar las que tienen formas extrañas.

El estudio de la dimensión 2, además del interés en sí y de sus peculiaridades, muestra ya todos los fenómenos geométricos interesantes que se producen, y tiene la ventaja de no utilizar las complicadas construcciones tensoriales que se requieren para la dimensión arbitraria.

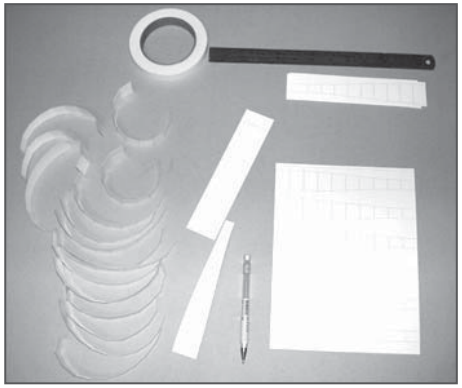
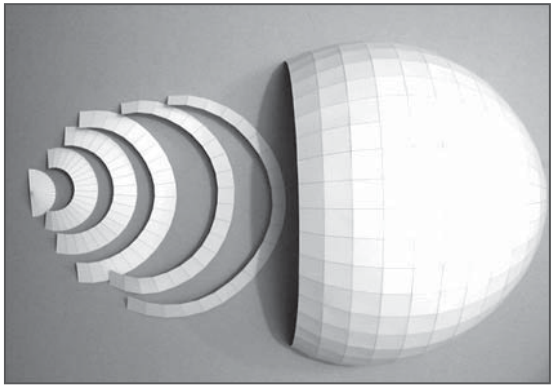
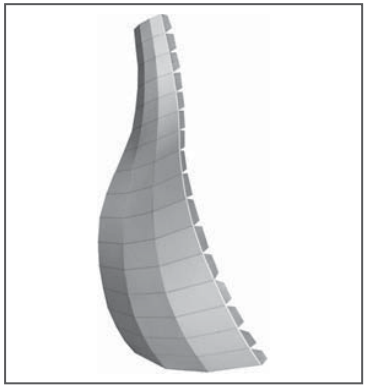


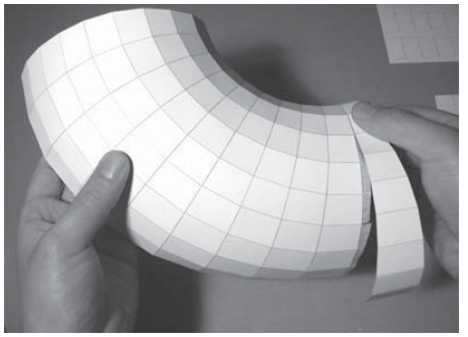
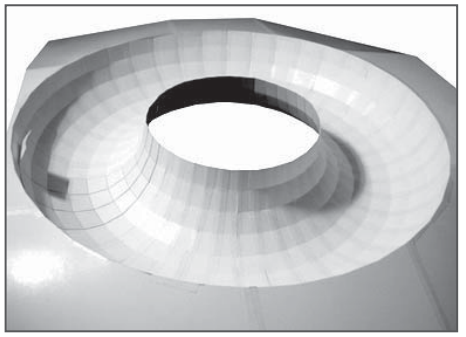
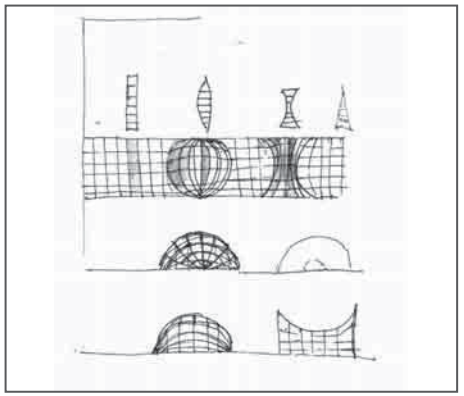
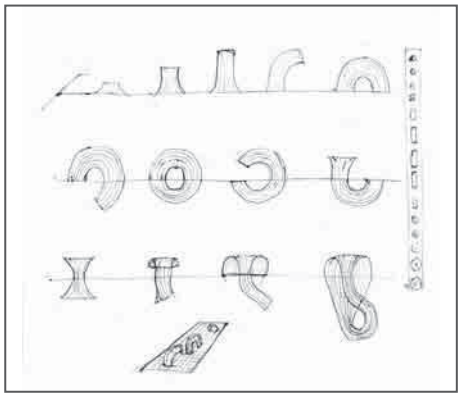
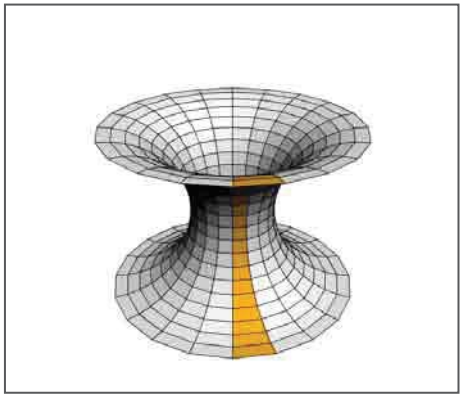
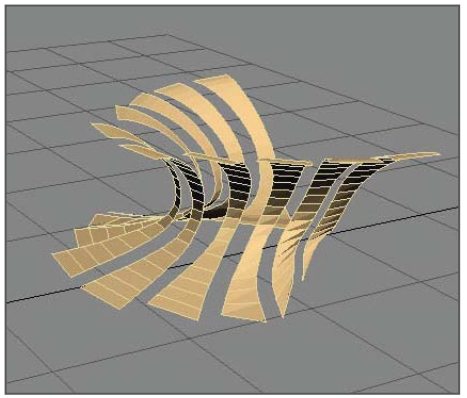
Análisis y disección previa a la modelación en 3D de la Superficie de Costa. Un objeto puede ser proyectado a través del uso de imágenes como referencia.



DEL PLANO A LA TRIDIMENSIONALIDAD

Durante el estudio se seleccionaron figuras y superficies existentes dentro del mundo matemático o derivado de ellas (como conclusión personal de alguna); Superficies Mínimas, Superficies No Orientables y Orientables fueron dispuestas para lograr adentrarse en el tema de la continuidad y cómo esta se expresa en la forma. Partiendo desde un mínimo, nos vamos dando cuenta de cierta manera de ver las cosas. El proyecto de estudio va siendo apoyado por las Teselas más conocidas por la conformación de planos bidimensionales a través de relación de unidades, polígonos o figuras que construyen planos mayores en infinitos, pasando por los Fractales, aquella geometría de la naturaleza en que una línea, una “curva”, a través de iteraciones y cambios de escalas, logran otorgar profundidad y continuidad: otorga volumen. La Topología se presenta con ese punto que se relaciona con otro punto, puntos vecinos con los vecinos del otro. El análisis de la posición. Nos lleva a experimentar la Continuidad como transformaciones entre distintas figuras o puntos en un plano.

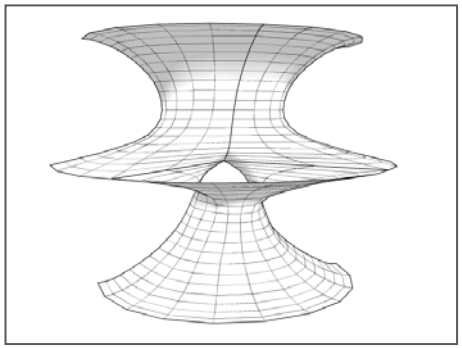




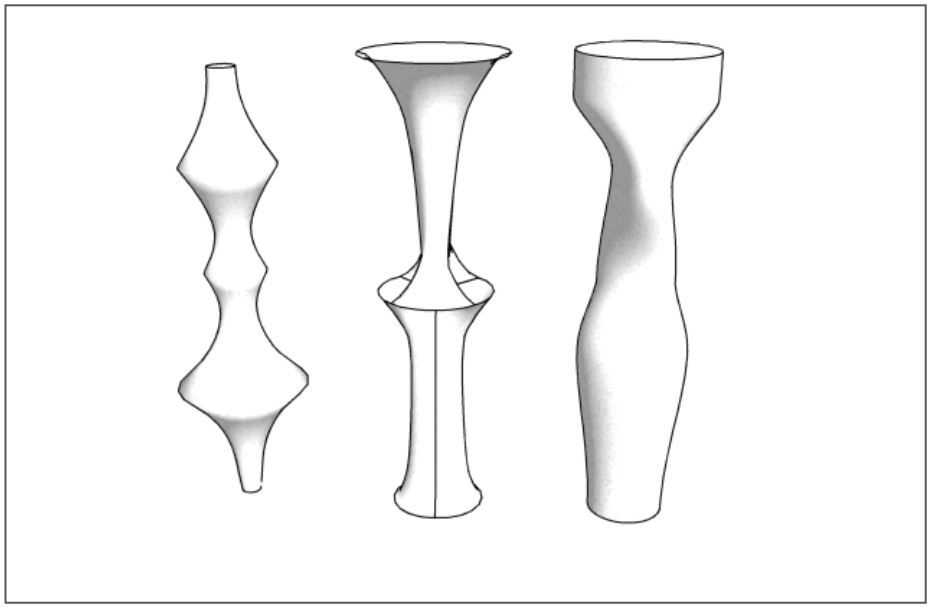
Uno necesita ubicarse en si mismo con respecto al entorno. Localizar objetos y personas respecto a uno o respecto a lo que les rodea. En el colegio se hacen representaciones que involucran el paso de las tres dimensiones a las dos dimensiones. Se hacen descripciones de los objetos sólidos usando palabra o dibujos y se empieza a usar medidas para hacer más precisas estas descripciones. La construcción de imágenes en la anticipación de movimientos puede ser aprendida desde pequeño. El dominio de situaciones complejas requiere bastante tiempo, varios años. La habilidad para hacer representaciones bidimensionales de configuraciones tridimensionales se apoya sobre lo anterior, lo vivido y sobre algún conocimiento de la geometría bidimensional. La habilidad para leer dibujos bidimensionales, planos o mapas, que representan configuraciones tridimensionales, para razonar en tres dimensiones usando estas representaciones bidimensionales requiere que todo lo anterior se tenga desarrollado a cierto nivel.

Un diseñador que trabaja con las tres dimensiones debe ser capaz de visualizar mentalmente la forma completa y rotarla mentalmente en toda dirección, como si la tuviera en sus manos.

Creo por mi parte, que la mejor manera de analizar una figura u objeto, es “rehaciéndola” ya sea a través de su trazado en proporciones y dimensiones en el caso de las figuras bidimensionales y en el caso tridimensional, a través del armado y desarmado, o pliegue y despliegue para así encontrarse con la estructura principal o unidad discreta que define el elemento junto a sus propiedades cualitativas de las que se han hablado anteriormente. De esta manera, se lleva a cabo la construcción de superficies del plano a la tridimensionalidad a través de polígonos.



Superficie de costa construida con laicra en ocasión del Claustro Pleno 2005. La tela elástica, físicamente imita bastante bien las características de una superficie mínima, al tener estas una tensión en su superficie con área mínima.



Propuestas previas a la construcción de los pilares. Es una variación de la la superficie de Costa (centro) la que se llevó a cabo.

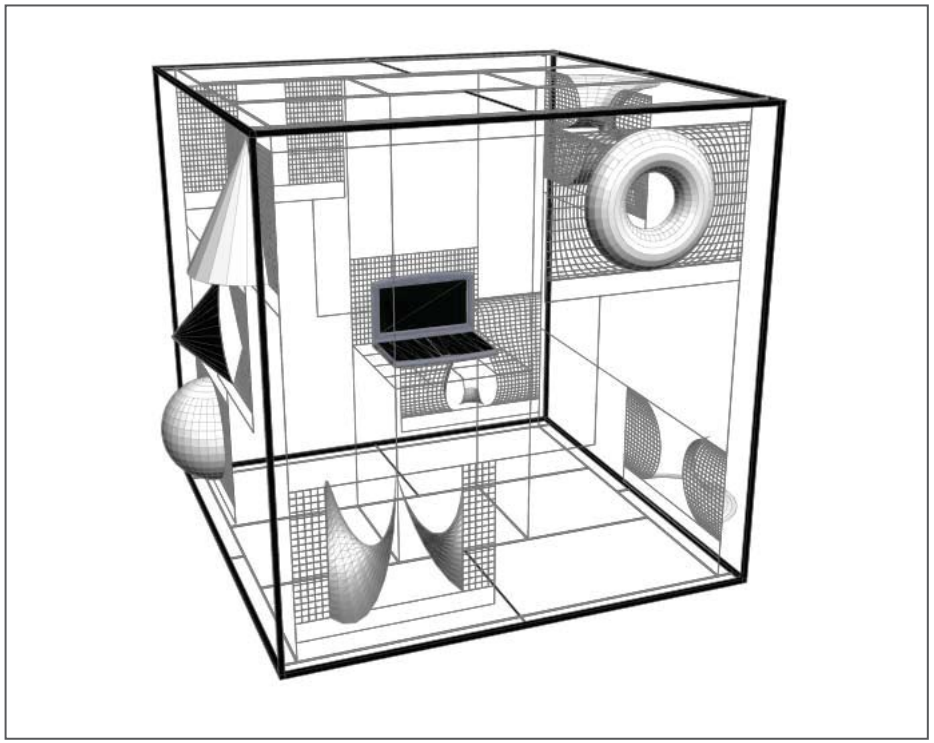
EXPOSICIÓN FINAL

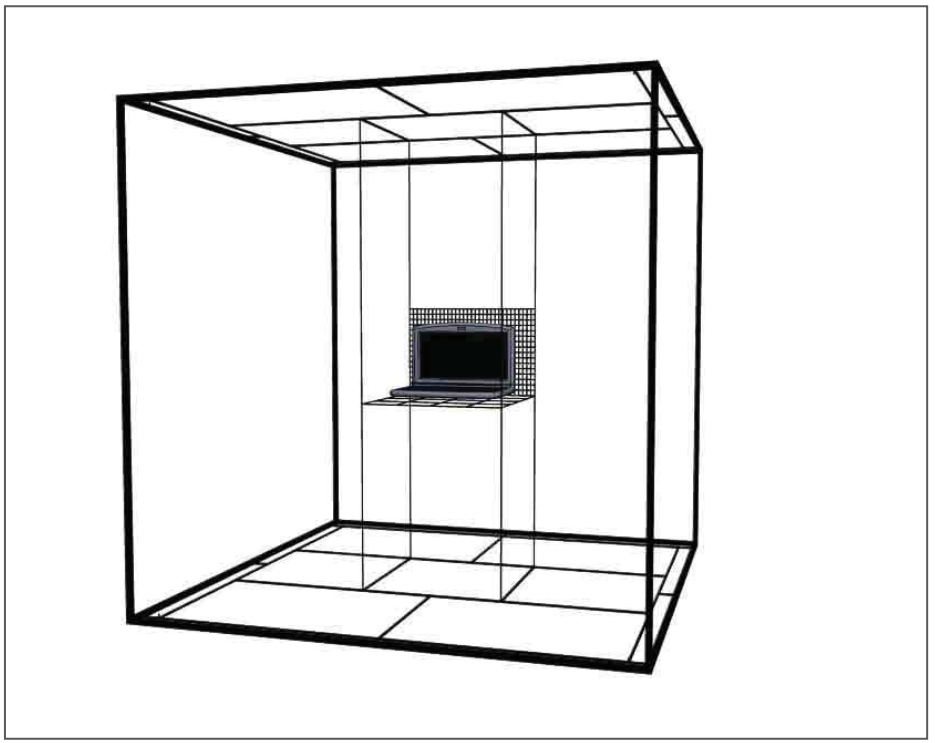
Finalizado el proyecto teórico, se construyeron 9 maquetas representativas de 9 figuras en la que se pudiesen ver las características cualitativas de la forma, un análisis geométrico y topológico de la superficie y la continuidad de ellas en una transformación desde un plano y entre ellas mismas. Definidas en su forma por una serie de polígonos a distintas escalas, se llevan a un escaneo visual y táctil exhaustivo de ellas a través de su elaboración. De esto se trata. Aproximarse a lo continuo a través de lo discreto. Una manera de observar, desarrollar y construir un objeto o una obra de diseño.

Nos encontramos con superficies continuas, fórmulas matemáticas con resultados de valor infinito, un universo extenso de autosimilitudes que a su vez van tomando identidad y forma, relaciones de “geometrías” que conforman un cuerpo o una imagen. Llevar a evidencia este tipo de “sucesos” nos hace notar el comportamiento y el sentido en la composición de elementos tanto a partir de su origen como del total del objeto acabado.

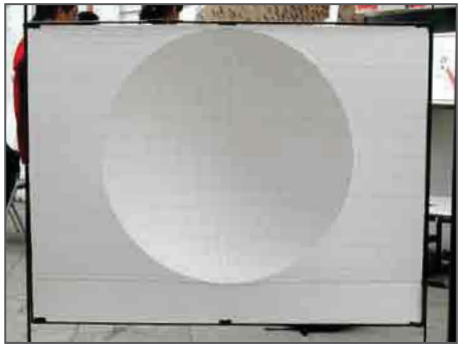
Las figuras fueron inscritas en un cubo de metro y medio en el que se trazaron vinculaciones de acuerdo a los traspasos entre una maqueta y otra. Esto, por medio de alambres ubicados en las distintas caras del cubo. La distribución fue de tal manera que existiera esa relación coherente, pero no solo físicamente, sino visualmente tomando entonces en cuenta que una figura que se ve desde un plano, se relaciona con la del plano posterior.

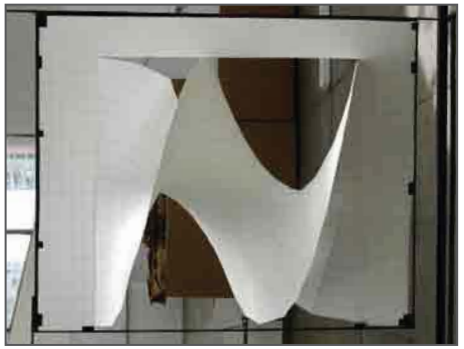
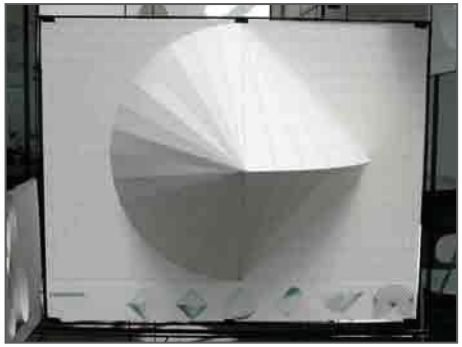
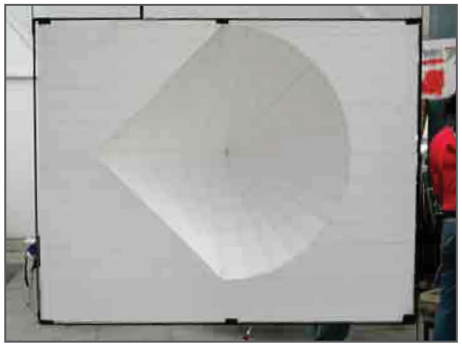
En el centro, se ubicó una pantalla de relaciones. Una animación digital para tener al mismo tiempo otro tipo de representación a través de la tridimensionalidad de un espacio virtual y el movimiento. El video, anexo de esta carpeta, contiene el homeomorfismo tanto de las figuras de la exposición como de otras, animadas y conformadas partiendo desde un solo plano o una figura inicial base, una visión distinta y más cercana no posible en el mundo físico.

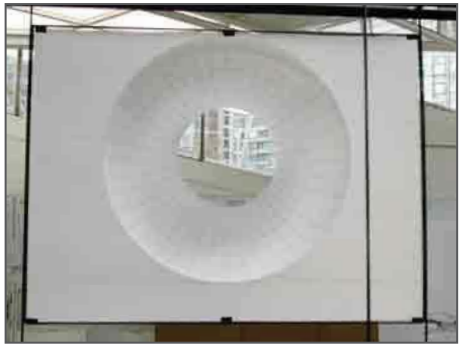
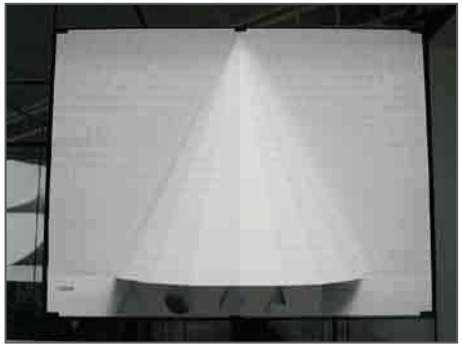
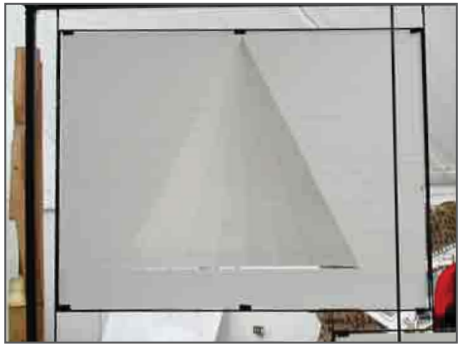


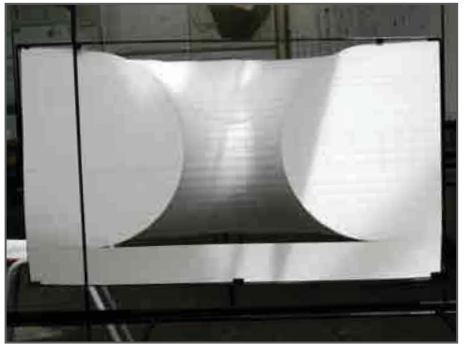


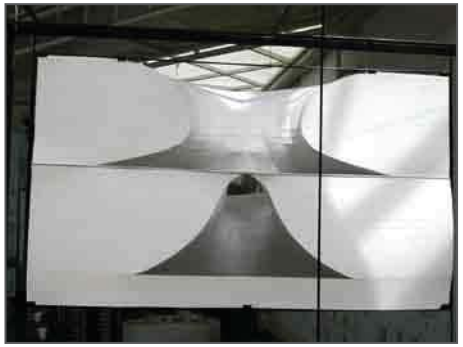
MAQUETAS

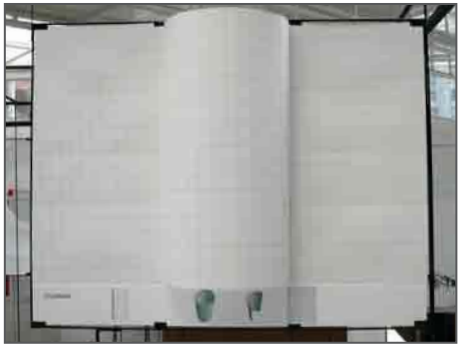
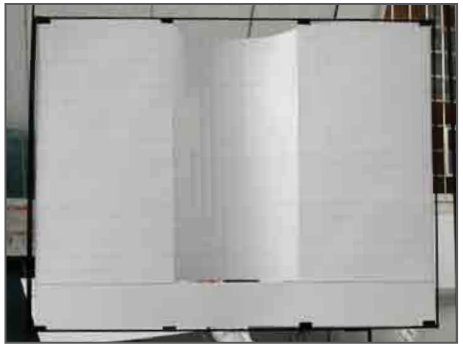


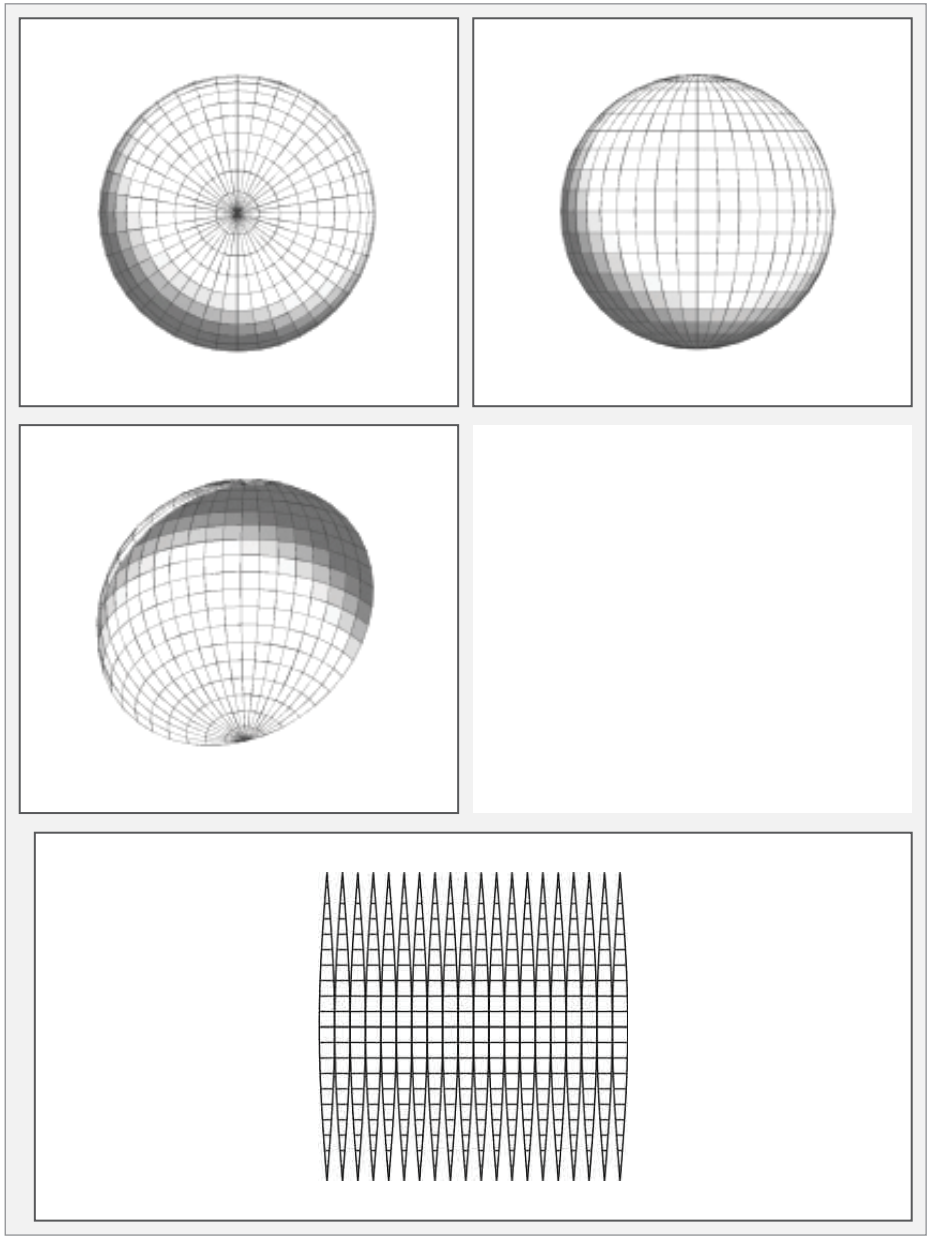




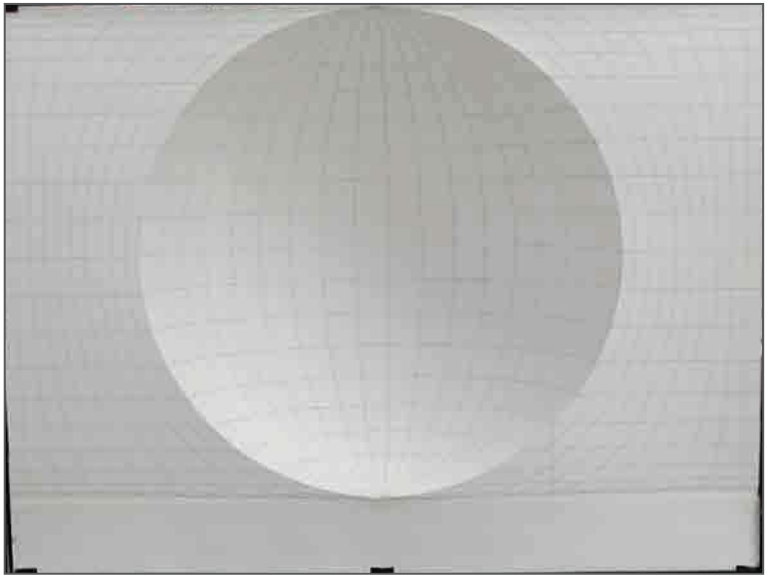




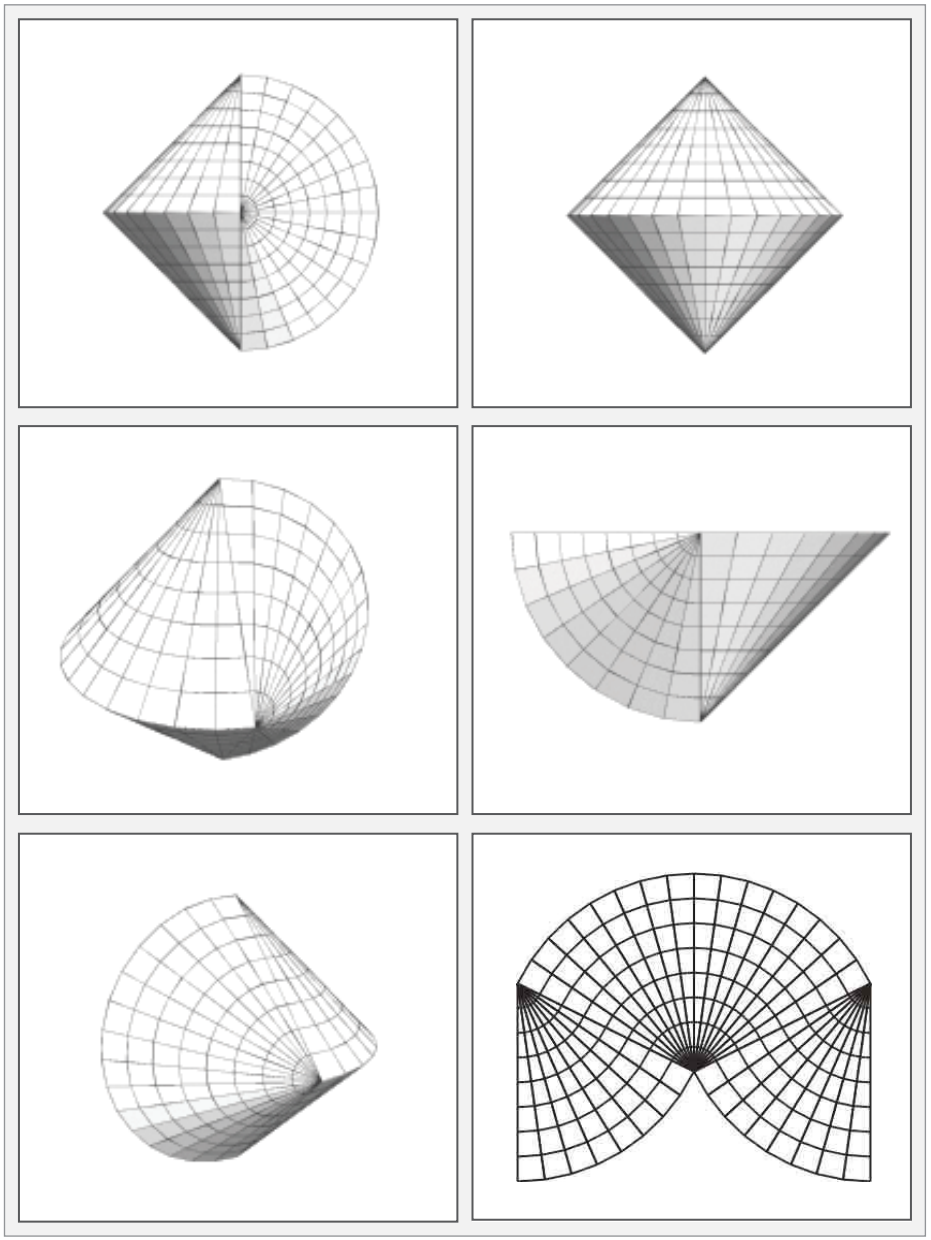



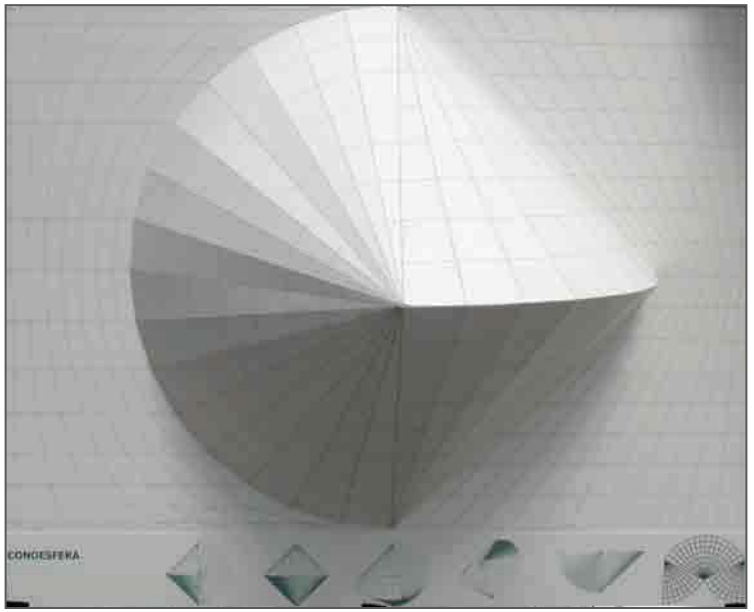
VISTAS Y PLANIMETRÍA: ESFERA

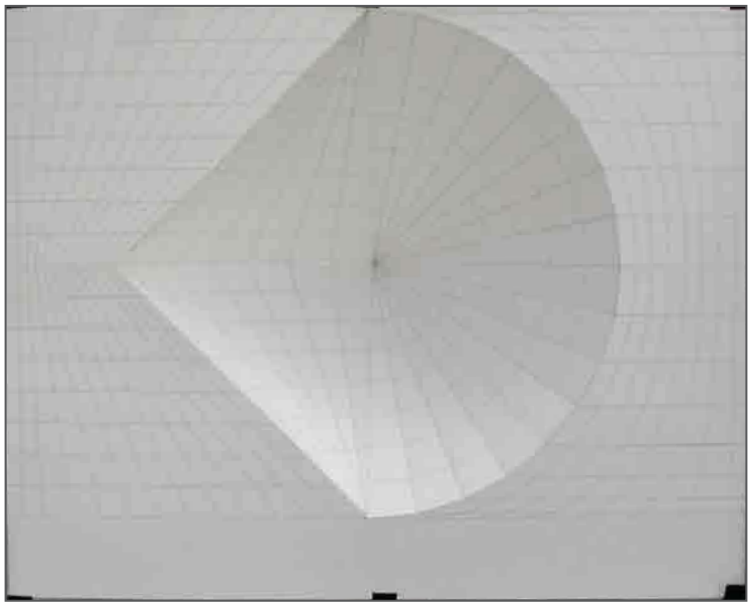




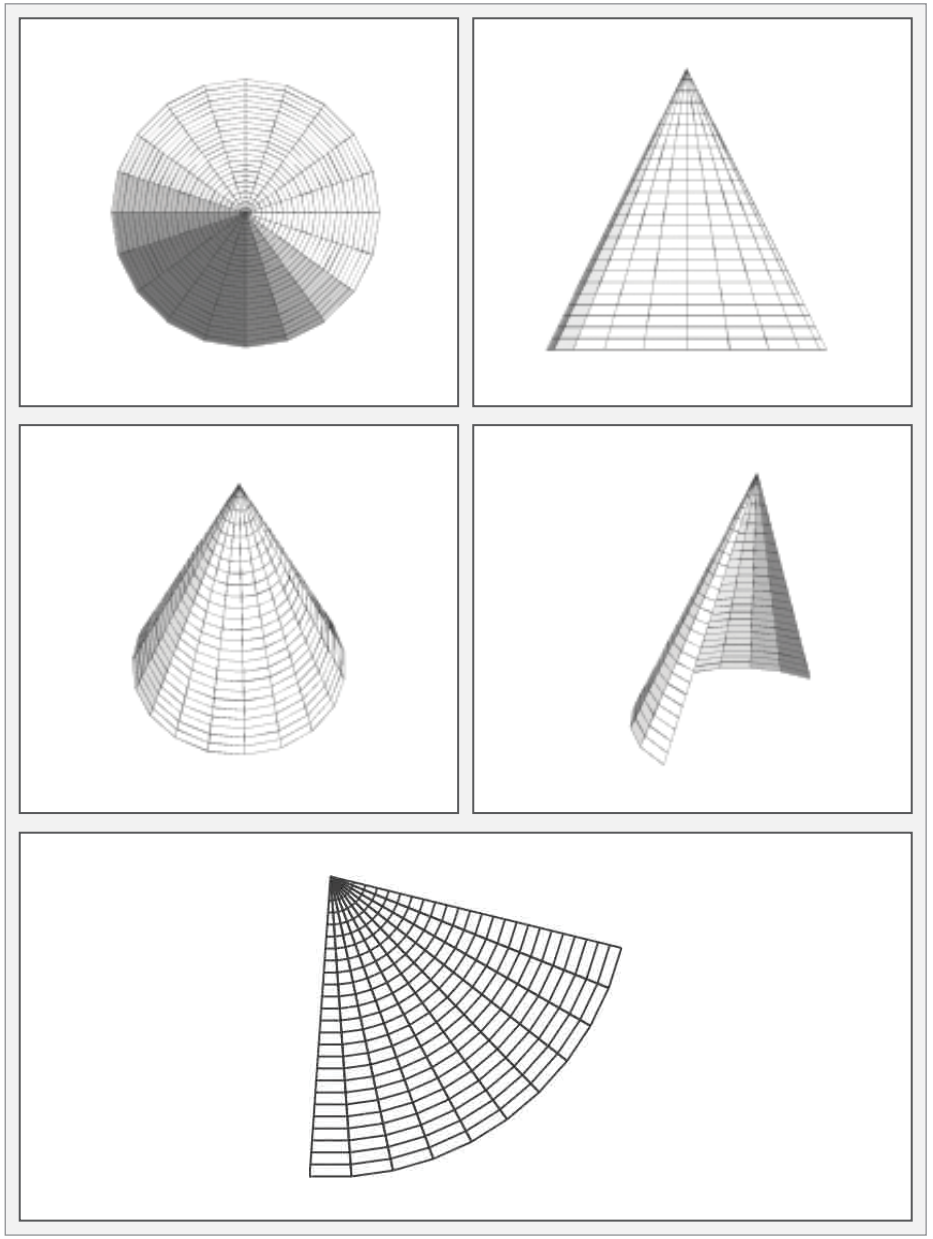
VISTAS Y PLANIMETRÍA: CONOESFERA

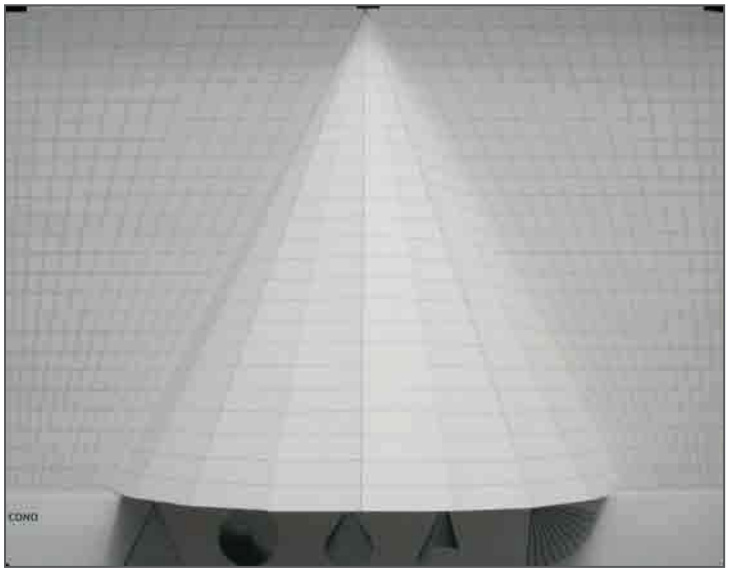


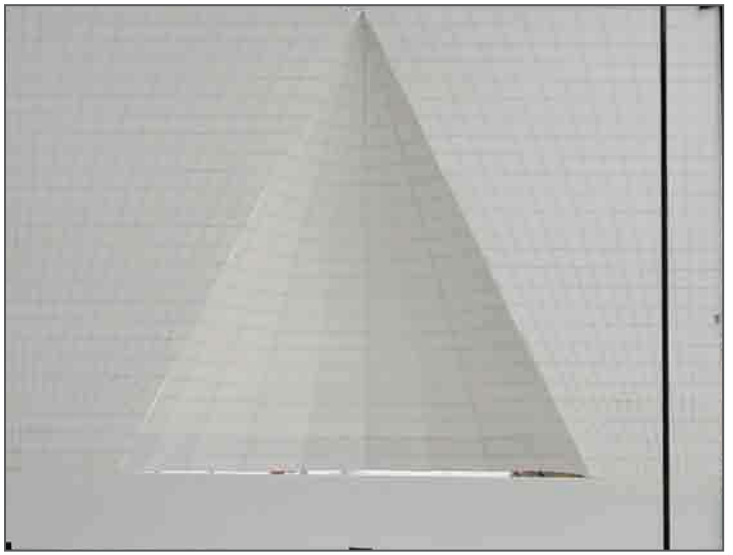




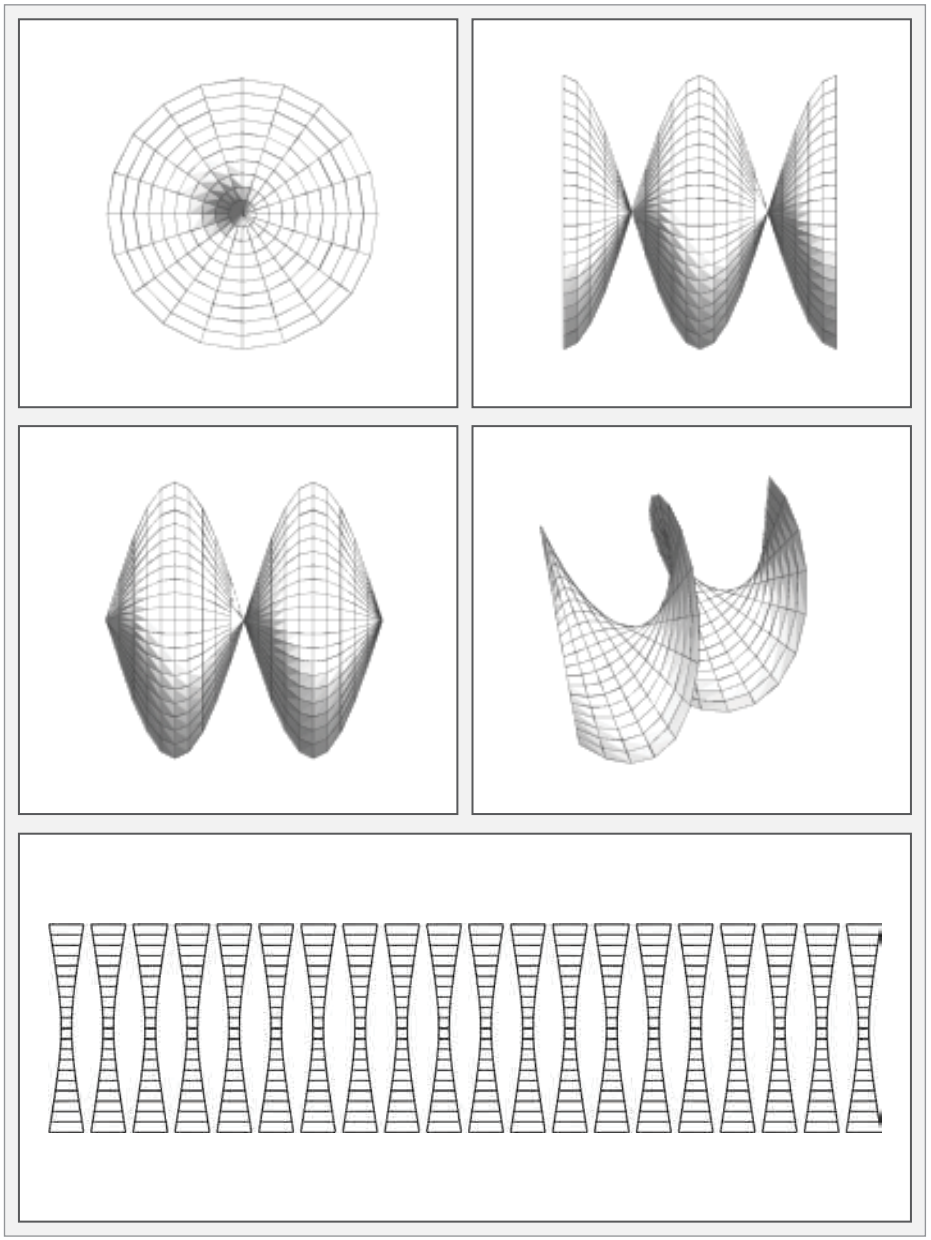
VISTAS Y PLANIMETRÍA: CONO

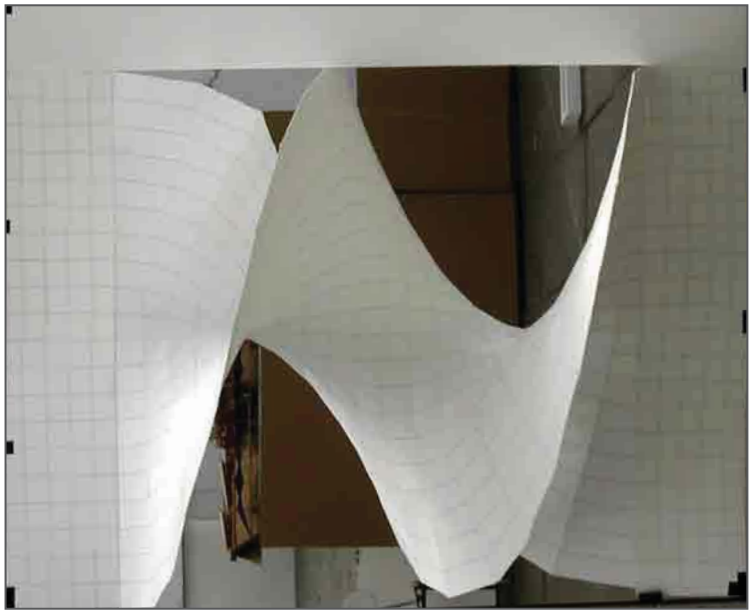




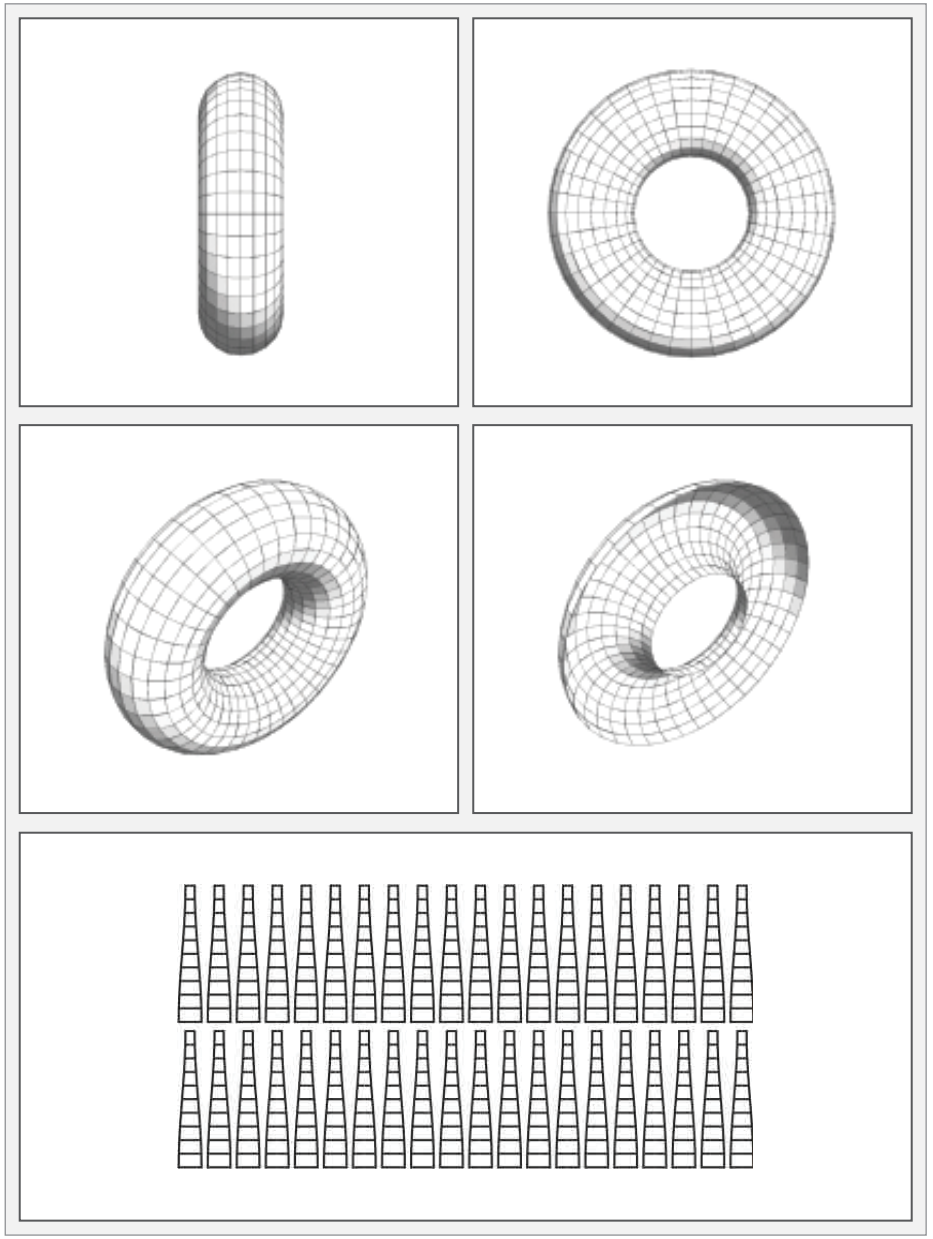


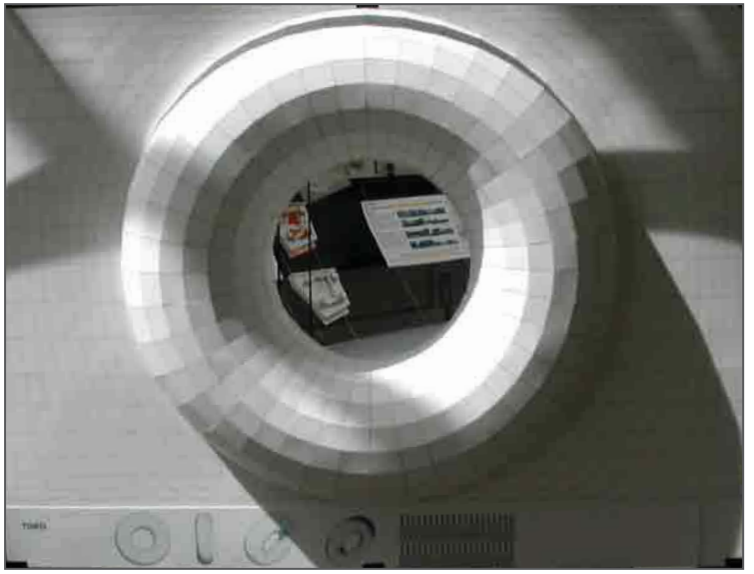
VISTAS Y PLANIMETRÍA: HELICOIDE



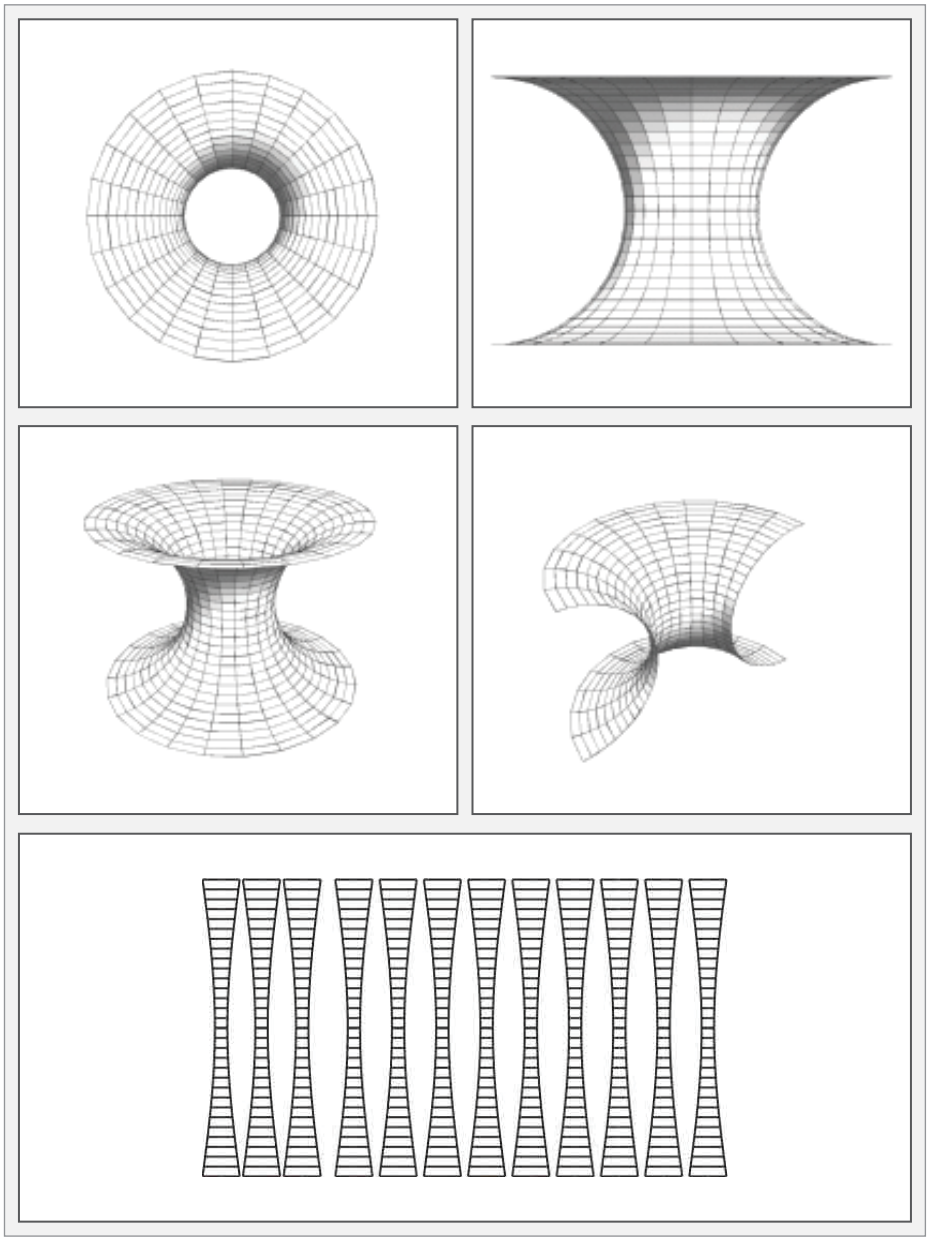


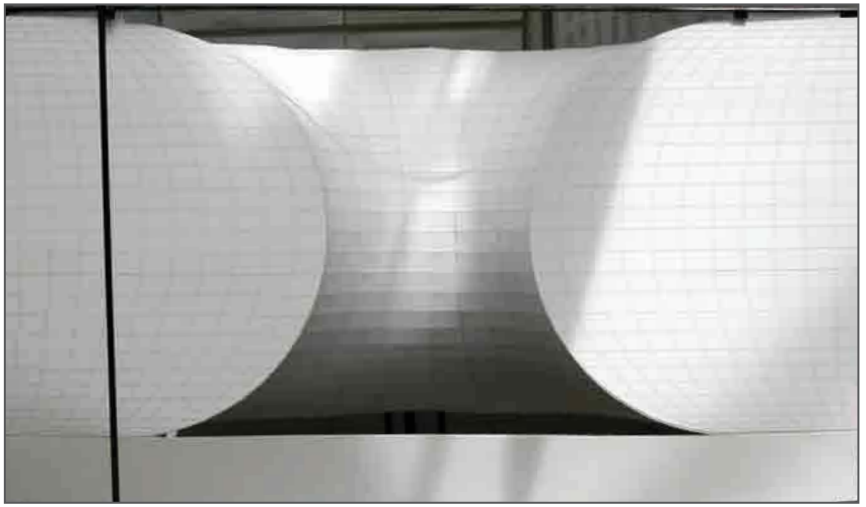
VISTAS Y PLANIMETRÍA: TORO



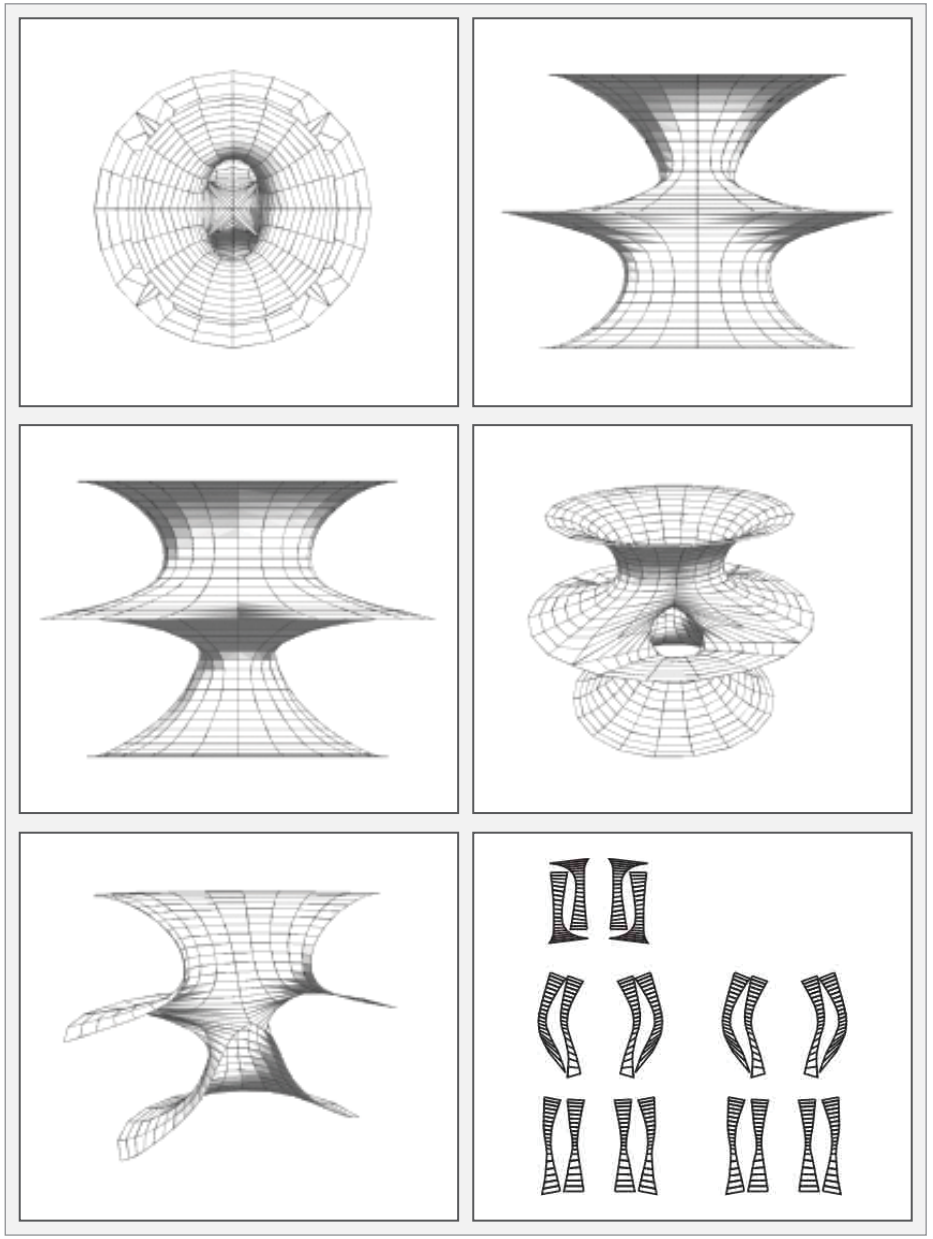


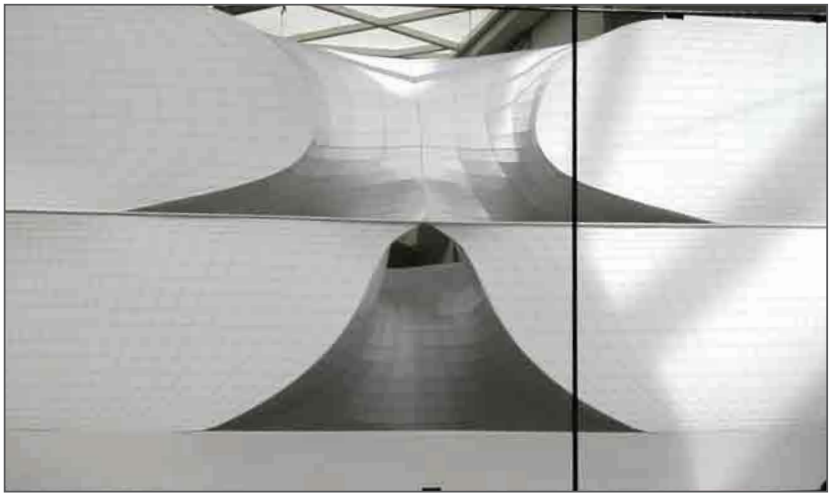
VISTAS Y PLANIMETRÍA: CATENOIDE



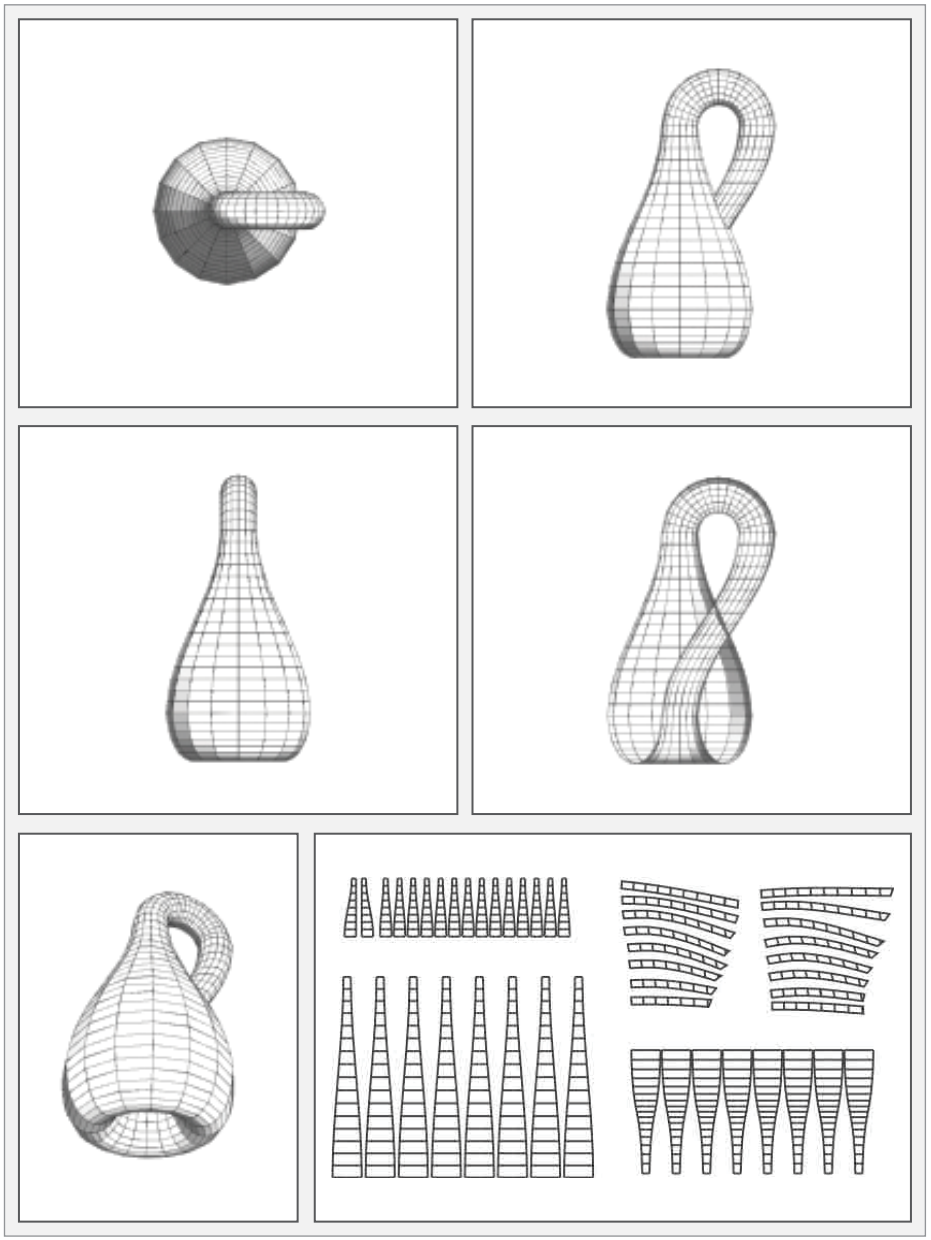


VISTAS Y PLANIMETRÍA: SUPERFICIE DE COSTA

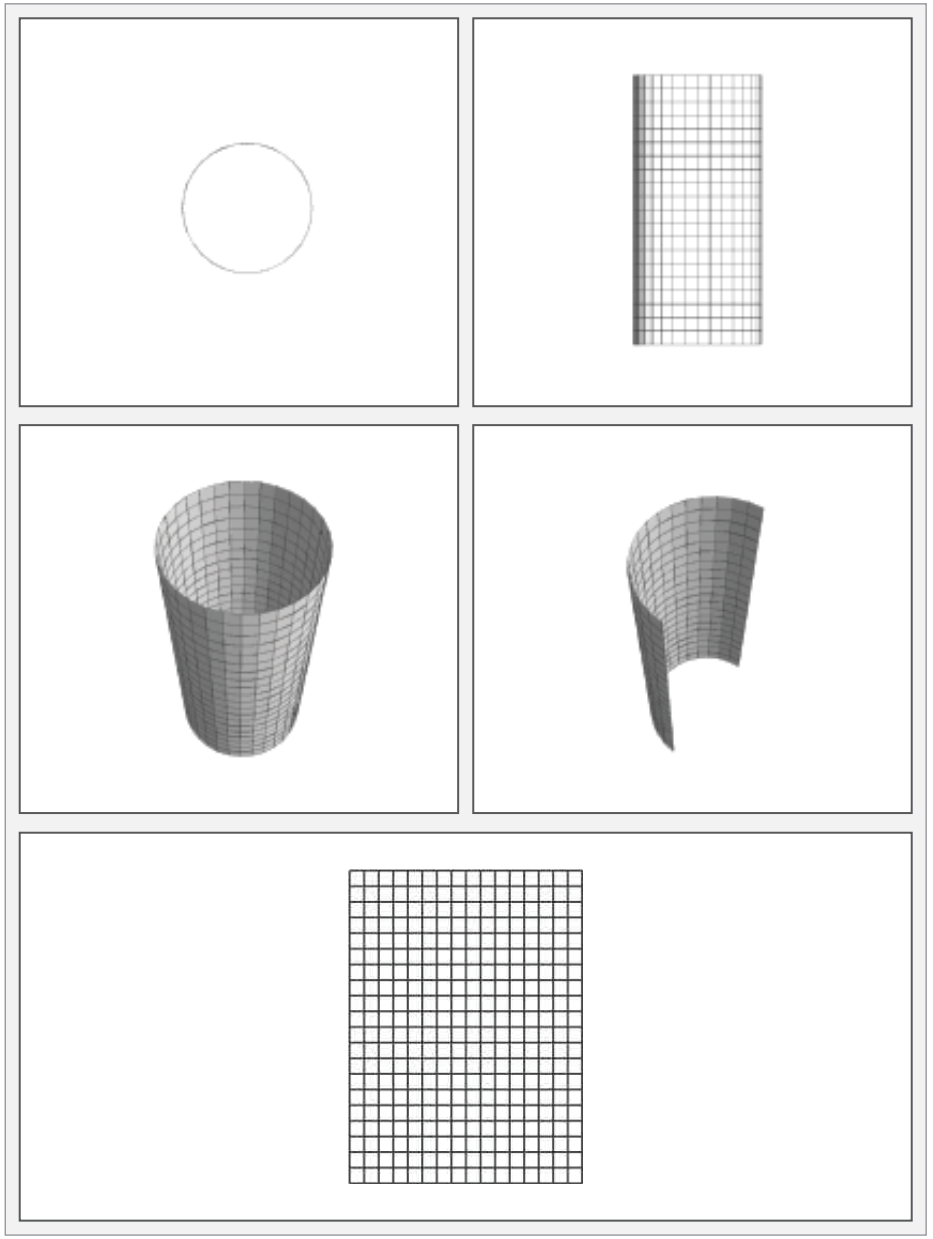


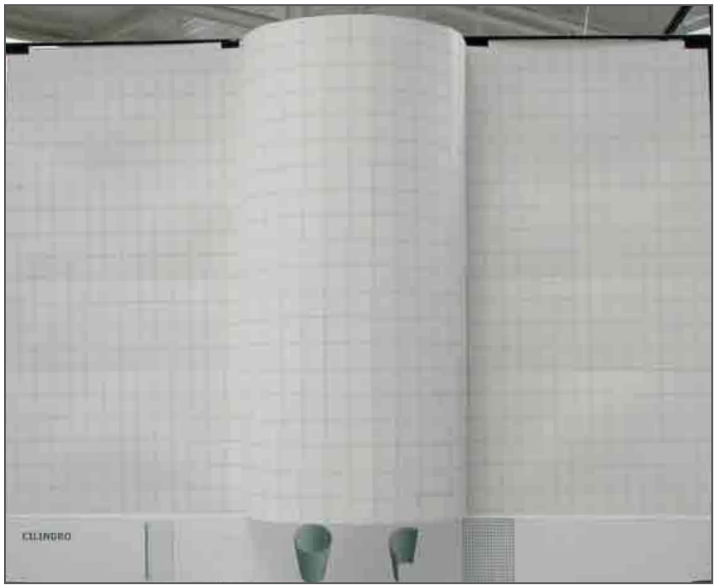


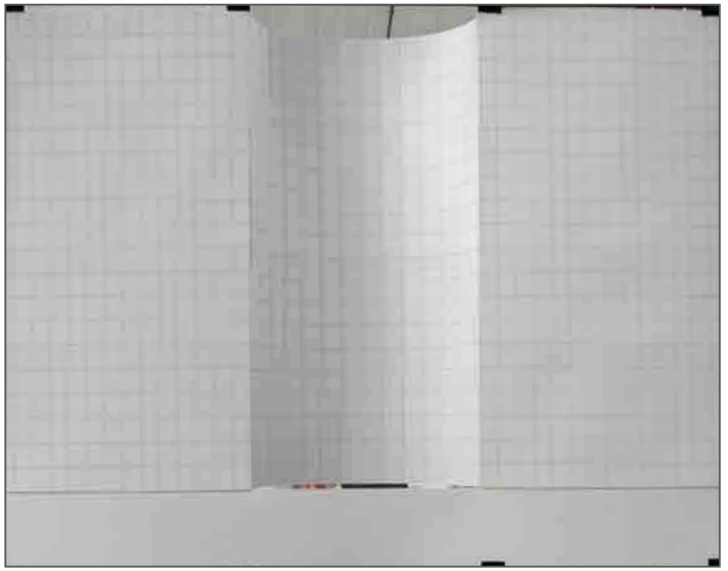
VISTAS Y PLANIMETRÍA: BOTELLA DE KLEIN



VISTAS Y PLANIMETRÍA: CILINDRO







UBICACIÓN Y MONTAJE GENERAL

BIBLIOGRAFÍA

|| Fundamentos del diseño - Wucius Wong || Editorial Gustavo Gili, SA. || 348 páginas.
|| Introducción a la Topología Combinatoria – M. Fréchet / Ky Fan || Editorial Universitaria de Buenos Aires || 61 páginas.
|| Geometry, Relativity and the Fourth Dimension – Rudolf v.B. Rucker || Dover Publications, Inc. New York || 133 páginas.
|| "Arte romano". Antonio García Bellido. Enciclopedia clásica C.S.I.C. Madrid 1979. ISBN
|| "Investigación y Ciencia" (versión española de Scientific American) N° 264 de Septiembre de 1998.
|| Documento de Edith Padrón Fernandez de la Universidad de la Laguna sobre Poliedros.
|| Rizoma - Gilles Deleuze y Félix Guattari || Pre-Textos || 57 páginas.

INTERNET

|| Definición de teselas no periódicas http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/texture/nonperiodic/
|| Tilings Plane and Fancy, Tilings from Historical Sources http://www2.spsu.edu/math/tile/
|| Mosaic Arts http://www.frammentiart.com/
|| Mosaic Tile Design: Mosaics for Architecture & Fun http://www.mosaic-tile-design.com
|| Tesselation History http://www.bookrags.com/sciences/mathematics/tesselation-wom.html
|| Temas matemáticos. (entre ellos fractales, teselas, poliedros y topología) http://mathworld.wolfram.com/
|| Tetrahedral principle in kite structure http://www.fang-den-wind.de/bell_eng.htm.
|| Esculturas, rapid prototyping, historia de poliedros. http://www.georgehart.com
|| Poliedros http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/leonardo.html
|| Historia de poliedros. http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan/Divul/POLIEDROS/cuerpos.html
|| Naturaleza de los fractales. http://www.fractovia.org
|| Teselas, historia, escher. http://library.thinkquest.org/16661/history.html
|| The Geometry Junkyard. http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tiling.html
|| Temas matemáticos. (entre ellos fractales, teselas, poliedros y topología) http://www.miqel.com/pure-math-patterns/visual-math-varieties.html
|| Geometría computacional y grafos. http://www.dma.fi.upm.es/docencia/trabajosfindecarrera/programas/geometriacomputacional/
|| Fractales http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/
|| Fractales en la práctica. http://classes.yale.edu/Fractals/Panorama/ManuFractals/ManuFract/ManuFractals.html
|| Cuarta dimensión, topología, estructuras de cristales. http://www.coolphysics.com/