

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Industrial

Análisis comparativo entre metodologías para el cálculo de los parámetros s y S de una política de inventario (s, S, R) sometida a una demanda periódica, discreta y estacionaria

por

José Luis Olfos Besnier

Memoria para optar al título de
Ingeniero Civil Industrial

Profesor Guía: Sergio Flores

Noviembre, 2015

Índice

Índice	2
Glosario	4
Lista de Abreviaturas o Siglas	5
Lista de Figuras	6
Lista de Tablas.....	8
Resumen	10
1 Introducción	11
2 Marco Teórico	12
2.3 Política de inventario (s, S, R)	12
2.3.1 <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i>	15
2.3.2 <i>The Revised Power Approximation</i>	16
3 Experiencia computacional	18
3.1 Escenarios para el experimento	18
3.2 Calculo de las variables s y S	19
3.3 Simulación.....	19
3.3.1 Índices de desempeño.....	20
3.3.1.1 Diferencia en el costo promedio por periodo	20
3.3.1.2 Diferencia en el nivel de servicio	21
3.3.1.3 Diferencia en el nivel de inventario promedio	21
3.3.2 Diseño del experimento	21
4 Resultados	26
4.1 Sobre los tiempos de cálculo de s y S	27
4.1.1 Sobre los tiempos de cálculo de s y S con el <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i>	28
4.2 Sobre la diferencia en el costo promedio por periodo	31
4.3 Sobre la diferencia en el nivel de servicio	35
4.4 Sobre la diferencia en el nivel de inventario promedio	37
5 Conclusiones	40

Bibliografía	42
Anexos	44
Anexo 1 — Gráficos de percentiles y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i>	45
Anexo 2 — Gráficos de percentiles y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de <i>DCPP</i>	49
Anexo 3 — Gráficos de frecuencia relativa y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de <i>DNS</i>	53
Anexo 4 — Gráficos de frecuencia relativa y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de <i>DNIP</i>	58
Anexo 5 — Cuasi convexidad.....	63

Glosario

Lead time: es el tiempo de espera que se establece para el cumplimiento de un proceso. En el contexto de políticas de inventario se refiere, en específico, al tiempo de espera entre una orden de reabastecimiento y su cumplimiento.

Nivel de inventario: corresponde a la cantidad producto en existencia en el inventario y de disponibilidad inmediata.

Nivel de servicio: es la probabilidad esperada de no llegar a una situación de desabastecimiento durante el un periodo, por lo tanto, también es la probabilidad de no perder ventas.

Política de inventario: corresponde al conjunto de reglas que determinan conjuntamente, el momento en que se hace un pedido de reabastecimiento, y el tamaño de la orden que se emite en dicho pedido.

Posición de inventario: corresponde a la cantidad de producto en inventario con disponibilidad inmediata o futura, por lo que cabría considerar, además del nivel de inventario, ordenes en tránsito de abastecimiento y descontar inventario vendido o reservado.

Lista de Abreviaturas o Siglas

CPP = costo por periodo promedio.

DCPP = diferencia(s) en el(los) costo por periodo promedio.

DNIP = diferencia(s) en el(los) nivel(es) de inventario promedio.

DNS = diferencia(s) en el(los) nivel(es) de servicio.

I.C. = intervalo de confianza.

IDE = ambiente de desarrollo interactivo o entorno de desarrollo integrado (en inglés *integrated development environment*).

NIP = nivel de inventario promedio.

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Gráfico de nivel de inventario con política (s, S, R)	13
Figura 3.1 – Modelo para la implementación de la simulación.....	24
Figura 4.1 – Correlación entre los tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> con y sin considerar los tiempos de cálculo de parámetros.....	26
Figura 4.2 – Gráficos de caja de los conjuntos de tiempo de cálculo usado por cada metodología	27
Figura 4.3 – Grafico de percentiles de los tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> para subconjuntos con distinto valor de K_0	29
Figura 4.4 – Grafico de valor de la constante de proporcionalidad entre el tiempo de cálculo y los parámetros versus el percentil considerado	30
Figura 4.5 – Histograma de las <i>DCPP</i>	32
Figura 4.6 – Grafico de percentiles de las <i>DCPP</i> para subconjuntos con distinto valor de K_0	33
Figura 4.7 – Histograma de las <i>DNS</i>	36
Figura 4.8 – Histograma de las <i>DNIP</i>	38
Figura A1.1 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de μ	45
Figura A1.2 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de τ	45
Figura A1.3 – Gráficos de caja de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de h	46
Figura A1.4 – Gráficos de caja de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de p	46
Figura A2.1 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de <i>DCPP</i> según el valor de μ	49
Figura A2.2 – Gráficos de caja de los conjuntos de <i>DCPP</i> según el valor de τ	50
Figura A2.3 – Gráficos de caja de los conjuntos de <i>DCPP</i> según el valor de h	50
Figura A2.4 – Gráficos de caja de los conjuntos de <i>DCPP</i> según el valor de p	51
Figura A3.1 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de K_0	53
Figura A3.2 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de μ	54
Figura A3.3 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de τ	54
Figura A3.4 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de h	55
Figura A3.5 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de p	55
Figura A4.1 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de K_0	58
Figura A4.2 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de μ	59

Figura A4.3 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de τ	59
Figura A4.4 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de h	60
Figura A4.5 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de p	60

Lista de Tablas

Tabla 3.1 – Parámetros de entrada para la creación de escenarios.....	18
Tabla 3.2 – <i>CPP</i> de los escenarios de control	24
Tabla 4.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempo de cálculo usado por cada metodología	64
Tabla 4.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de K_0	64
Tabla 4.3 – Relación entre los parámetros del escenario y la distribución de los tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> observados	64
Tabla 4.4 – Medidas descriptivas del conjunto de <i>DCPP</i>	64
Tabla 4.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DCPP</i> según el valor de K_0	64
Tabla 4.6 – Incidencia de los parámetros del escenario en la <i>DCPP</i>	64
Tabla 4.7 – Medidas descriptivas del conjunto de <i>DNS</i>	64
Tabla 4.8 – Incidencia de los parámetros del escenario en la <i>DNS</i>	64
Tabla 4.9 – Medidas descriptivas del conjunto de <i>DNIP</i>	64
Tabla 4.10 – Incidencia de los parámetros del escenario en la <i>DNIP</i>	64
Tabla A1.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de μ	64
Tabla A1.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de τ	64
Tabla A1.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de h	64
Tabla A1.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> según el valor de p	64
Tabla A2.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DCPP</i> valor de μ	64
Tabla A2.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DCPP</i> valor de τ	64
Tabla A2.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DCPP</i> valor de h	64
Tabla A2.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DCPP</i> valor de p	64
Tabla A3.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de K_0	64
Tabla A3.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de μ	64
Tabla A3.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de τ	64
Tabla A3.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de h	64
Tabla A3.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNS</i> según el valor de p	64
Tabla A4.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de K_0	64
Tabla A4.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de μ	64
Tabla A4.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de τ	64

Tabla A4.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de h	64
Tabla A4.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de <i>DNIP</i> según el valor de p	64

Resumen

En este trabajo se realiza una comparación indagatoria entre el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* y *The Revised Power Approximation*, ambas metodologías para el cálculo de los parámetros s y S de una política de inventario (s, S, R) , bajo una estructura costos de tres partes (ordenamiento, inventario, pendientes) y donde R se asume predefinido.

La comparación se realiza mediante simulación computacional, emulando un sistema de inventario con operación de largo plazo sometido a una demanda periódica, discreta y estacionaria, con distribución *Poisson*. Se consideran múltiples escenarios para el sistema de inventario, cada uno con un set distinto de parámetros característicos (demanda, lead time y costos). Para la simulación de cada escenario se implementan dos configuraciones distintas, la primera utiliza los parámetros s y S calculados mediante el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, y la segunda utiliza los calculados mediante *The Revised Power Approximation*.

Se estudian tres índices de desempeño: la diferencia en el costo promedio por periodo entre ambas configuraciones, la diferencia en el nivel de servicio entre ambas configuraciones, y la diferencia en el nivel de inventario promedio entre ambas configuraciones. Además se recogen observaciones relativas a los tiempos de cálculo de los parámetros s y S de cada metodología.

Los resultados muestran que es posible estimar el valor de los parámetros S y s con *The Revised Power Approximation* y conseguir índices de desempeño iguales, o muy similares, a los que se consiguen con los parámetros provenientes de usar el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, pero, solo para un rango limitado del valor de los parámetros que caracterizan al escenario, observándose que, a medida que los valores se alejaban de estos rangos, los índices de desempeño presentaban diferencias cada vez mayores.

Palabras Claves: *Política de inventario (s, S, R) – Algoritmo de Zheng y Federgruen – The Revised Power Approximation – Simulación.*

1 Introducción

Entre las diversas políticas de gestión de inventario disponibles en la literatura de los últimos 60 años, la política (s, S, R) destaca por su popularidad y simpleza. En esta política se revisa el inventario cada R unidades de tiempo, siendo un R un valor fijo, y en dicha revisión se establece emitir una orden de tamaño $S-I$, si el inventario total, I , es menor al nivel de reposición s . Por lo tanto, el tamaño de la orden, cuando se emite orden, no es constante

La tarea del gestor de inventario es determinar, dado un R , el valor adecuado para S y s de tal manera de minimizar los costos totales de dicha operación. El cálculo de costos incluye el *trade off* entre la mantención de inventario, el costo de emitir órdenes y el costo de déficit.

que dependerá del nivel en que se encuentre el inventario al momento de hacer la orden, la cual solo se hace cuando el nivel de inventario está por debajo de un valor prefijado, además, el tamaño de esta es tal que se alcance el nivel máximo establecido para el inventario. En la política (s, S, R) , entonces, debe establecerse el valor, s , para el nivel de inventario por debajo del cual se emitirán órdenes de abastecimiento, y el valor, S , para el nivel máximo de inventario. Determinar valores convenientes para estos parámetros no es una labor trivial en la mayoría de los casos, aun así, se han desarrollado, y mejorado en el tiempo, diferentes metodologías que logran aproximar e incluso determinar los valores óptimos de s y S .

En este trabajo se comparan dos métodos que pueden usarse para la determinación de los parámetros s y S : *The Revised Power Approximation* y *El Algoritmo de Zheng y Federgruen*. Para evaluar la diferencia entre estas metodologías se emplea simulación asumiendo diversos escenarios, con el objetivo de indagar entre los factores buscando definir los que favorecen el uso de una metodología por sobre la otra.

Se estudian tres índices de desempeño: la diferencia en el costo promedio por periodo entre ambas configuraciones, la diferencia en el nivel de servicio entre ambas configuraciones, y la diferencia en el nivel de inventario promedio entre ambas configuraciones.

En los resultados se observa que los parámetros determinados por ambas metodologías producen índices de desempeño similares para un rango limitado del valor de los parámetros. A medida que los valores de estos se alejan de este rango los desempeños de las metodologías muestran mayores diferencias. La magnitud de esta diferencia puede relacionarse con la magnitud del valor de los parámetros. Como el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* determina valores de S y s que optimizan el costo, es posible relacionar la magnitud del valor de los parámetros con el nivel de deterioro del nivel de servicio que se obtiene al usar *The Revised Power Approximation*. Esto no es posible con los otros indicadores de desempeño, si bien, la diferencia aumenta cuando el valor de los parámetros se aleja del rango en que los desempeños de los métodos son comparables, a priori es difícil estimar cuál de los dos métodos tendrá mejor desempeño.

Este documento se estructura como sigue: en el capítulo 2, se describe la política de inventario (s, S, R) , el modelo relacionado, y su función de costo. Luego se describen las

metodologías para el cálculo de los parámetros s y S antes mencionadas explicitando sus algoritmos de cálculo. A continuación, en el capítulo 3, se describe el experimento desarrollado: como se confeccionaron los escenarios usados, como se configuro la simulación, las técnicas de reducción de varianza utilizadas y se definen los índices de desempeño utilizados. En el capítulo 4 se presentan los resultados del experimento. Finalmente en el capítulo 5 se exponen las conclusiones de este informe.

2 Marco Teórico

La gestión de inventarios existe para tratar de responder a dos preguntas claves en toda empresa que maneja existencias en forma de inventarios y esté interesada en optimizar sus operaciones: *¿cuándo emitir órdenes de abastecimiento?* y *¿de qué tamaño deben ser las órdenes emitidas?* En efecto, si se considera efectuar ordenes de reabastecimiento con intervalos cortos de tiempo entre ellas, la sumatoria de los costos fijos asociados a la emisión de las ordenes se verá incrementado, si, por el contrario, se opta por aumentar el número de periodos entre las ordenes consecutivas, la cantidad de existencias necesarias para intentar cubrir la demanda en todos los periodos intermedios (el inventario) deberá ser mayor, y, en consecuencia, también lo será el costo total de almacenamiento.

Al buscar las respuestas a estas preguntas debe tenerse en consideración las características del proceso de abastecimiento, del almacenamiento, y del proceso de venta. El conjunto de reglas, condiciones, algoritmos y protocolos que responden conjuntamente ambas preguntas (*¿cuándo?* y *¿cuánto?*) se conoce como política de inventario.

Las políticas que consideran revisiones de inventario periódicas, donde las decisiones de hacer una orden son tomadas entre intervalos regulares de tiempo, son muy populares en la industria. Si bien son, teóricamente, inferiores que sus contrapartes de revisión constante, en relación a su desempeño en cuanto a costos se refiere (*Lee and Nahmias, 1993*), sus beneficios operacionales parecen sobrepasar esta deficiencia. En lo que queda del capítulo se presenta una de estas políticas, de revisión periódica, conocida como política (s, S, R) .

2.1 Política de inventario (s, S, R)

La política de inventario (s, S, R) se define para un contexto donde el nivel de inventario de un único ítem es revisado a intervalos regulares de tiempo de largo R . En cada revisión se examina el nivel de inventario total (inventario físico + inventario en tránsito – pendientes) y, si el valor de este es menor que un punto mínimo establecido s , se emite una orden de reabastecimiento por la cantidad necesaria para alcanzar el nivel máximo establecido S . Por lo tanto, si al momento de revisar el inventario, el nivel de inventario físico es I , la orden de reabastecimiento deberá emitirse por:

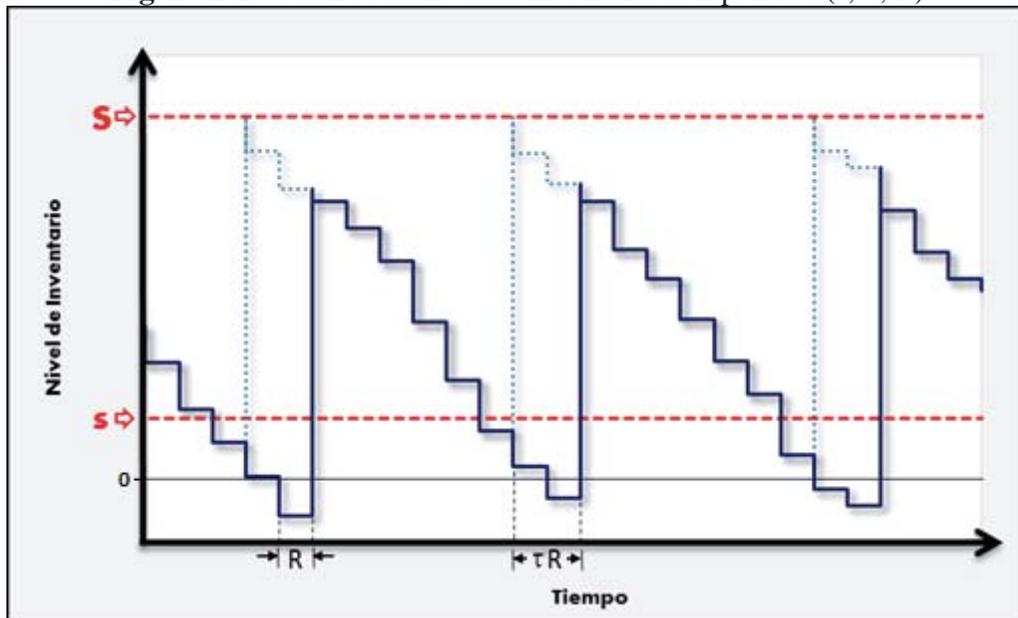
$$\begin{cases} S - I & \text{si } I < s, \\ 0 & \text{si } I \geq s. \end{cases}$$

Para la construcción del modelo, la demanda en un periodo se considera una variable aleatoria discreta, X , la que se considera, además, estacionaria, no negativa, con media μ y varianza σ^2 . Los productos se descuentan de inventario en respuesta a la demanda del periodo. Se considera que esta ocurre después de la recepción del abastecimiento del periodo, si correspondiese recibir abastecimiento para ese periodo (por lo que los productos recibidos en un periodo pueden usarse para satisfacer la demanda del mismo periodo) y antes de aplicar los costos de inventario del periodo (por lo que los productos no implican coste de inventario en el periodo que son demandados). La demanda que no puede ser satisfecha en algún periodo pasa a

ser demanda pendiente y es completamente satisfecha con posterioridad cuando el nivel del inventario físico así lo permita. Al inicio de cada periodo se revisa el nivel de inventario y se hace (o se omite la realización de) un pedido de la forma que se explicó anteriormente. Si se efectúa un pedido, este es recepcionado tras τ periodos, es decir, trascurrido un intervalo de tiempo de largo τR .

El modelo descrito en el párrafo anterior queda representado en la gráfica de la figura 2.1. En ella se observa una línea azul oscura continua que representa el nivel de inventario físico menos los pendientes, y una línea azul claro discontinua que representa el nivel de inventario total. En el caso particular representado en la figura el lead time, τ , tiene una duración equivalente a dos periodos. Se observa que en aquellos periodos en que se recibe/ordena un abastecimiento, el nivel de inventario se incrementa, para luego, inmediatamente, decaer en una cantidad equivalente a la demanda del mismo periodo, consistentemente con el modelo descrito. Se observa, además, que los pedidos de reabastecimiento se realizan al inicio de los periodos en que el nivel de inventario está por debajo del nivel demarcado por s y no al final de un periodo en donde el nivel de inventario cae por debajo de esta marca, en respuesta al descuento de la demanda, lo que es consistente con la idea de que la revisión es hecha al inicio del periodo.

Figura 2.1 - Gráfico de nivel de inventario con política (s, S, R)



Cuando se supone una estructura de costos de 3 elementos que considera un costo lineal, h , por las unidades inventariadas en un periodo, un costo lineal, p , para las unidades pendientes en un periodo, y un costo fijo, K_0 , por cada orden de reabastecimiento emitida, puede escribirse la función de costo promedio de largo plazo del modelo como sigue (Y. Feng, B. Xiao, 2000):

$$C(s, S) = \frac{K_0 + \sum_{j=0}^{S-s-1} m(j)G(S-j)}{M(S-s)}$$

en donde:

$$p_j = \text{Prob}\{X = j\} \quad j = 0, 1, \dots$$

$$M(0) = 0,$$

$$M(j) = M(j-1) + m(j-1), \quad j = 1, 2, \dots$$

$$m(0) = (1 - p_0)^{-1},$$

$$m(j) = \sum_{l=0}^j m(j-l) p_l, \quad j = 1, 2, \dots$$

y

$$G(y) = h * E[\max(0, y - X)] + p * E[\max(0, X - y)]$$

Esta función de costo es desarrollada por *Veinott & Wagner (1965)* para distribuciones discretas mediante teoría de renovación. Para una explicación detallada de esta función puede revisarse el artículo original, o, para una explicación menos detallada pero más concisa, *Zheng & Federgruen (1991)*.

Los estudios sobre el modelo de inventario y su función de costo son extensivos, lo que se refleja en la existencia de tempranos resultados. *Arrow, Harris and Marschak (1951)* introduce en la literatura las políticas del tipo (s, S) . *Scarf (1959)* establece una prueba general de la optimalidad de las políticas del tipo (s, S) no estacionarias para un sistema de un único ítem, como el descrito anteriormente, en un horizonte de tiempo finito y siempre que los costos de inventario y por pendientes fuesen lineales. *Iglhart (1963)* extiende este resultado a un horizonte de tiempo infinito, y relaja las condiciones de la función de costo, estableciendo que solo es necesario que esta sea convexa, además, establece la existencia de una política (s, S) estacionaria que minimiza el costo total y el costo promedio del inventario en un horizonte de tiempo infinito bajo las mismas condiciones de la función de costo y para todas las posiciones iniciales de inventario. Un enfoque computacional para la búsqueda de los valores óptimos de s y S es proporcionado en *Veinott and Wagner (1965)*. Una revisión presentada en *Veinott (1966)* resume el estado de la teoría matemática hasta los años sesenta y establece condiciones aún más relajadas para la optimalidad de la política, asegurándola para cualquier función de costo que sea cuasi convexa. En *Zheng (1991)* presenta pruebas aún más intuitivas de la optimalidad de la política.

Todo el estudio hecho sobre la política ha repercutido en el establecimiento de, cada vez, mejores límites para los valores óptimos de s y S . La estructura de estos límites, y algunas características de la función de costo, se han aprovechado en la elaboración de algoritmos que resuelven el problema de optimización del modelo. Los primeros algoritmos usaban búsqueda de rejilla en las variables s y S , o, alternativamente, en las variables s y Δ , donde $\Delta = S - s$. En *Zheng and Federgruen (1991)* se propone un algoritmo que, considerando un escenario de demanda discreta, usa un esquema de enumeración dirigida, el cual presenta incrementos

importantes en la velocidad computacional de resolución en relación a las alternativas existentes hasta ese momento.

Se han desarrollado métodos heurísticos adicionalmente a los métodos enumerados anteriormente, como son *The Power Approximation*, y *The Revised Power Approximation*.

2.2 Algoritmo de Zheng y Federgruen

Esta metodología es propuesta en *Zheng and Federgruen (1991)* para el cómputo de los valores óptimos de los parámetros s y S de una política de inventario (s, S, R) en donde R ya ha sido determinado, aportando una mejora sustancial en los tiempos de cómputo en relación a los algoritmos existentes hasta ese momento. Costa de un algoritmo que aprovecha las propiedades de la función de costo del problema para encontrar iterativamente mejores cotas para los parámetros s y S , además, lo hace una variable a la vez, logrando reducir el número medio de cálculos que son necesarios.

La principal ventaja de este método es el cómputo de los valores óptimos de los parámetros s y S de la política que minimizan la función de costo para un escenario particular, ventaja que se ve menoscabada por la necesidad de describir detalladamente la función de probabilidad de la demanda para poder usar el algoritmo, además, se necesitan una serie de valores como parámetros de entrada que no resultan sencillos de calcular, por último, la naturaleza del algoritmo obliga a que, para ser usado, deba ser programado computacionalmente.

El algoritmo requiere como entrada los valores de la función de costo esperado para un periodo que parte con y unidades en inventario función $G(y)$, la función de costo promedio por periodo $C(s^*, S^*)$ para todos los pares de valores de (s^*, S^*) que se revisen durante la ejecución del algoritmo; y del valor que minimiza la función $G(y)$, y^* .

Además es un requisito de optimalidad que la función $G(y)$ cumpla con dos condiciones:

1. $-G(y)$ es unimodal,
2. $\lim_{|y| \rightarrow \infty} G(y) > \min_y G(y) + K_0$

Escrito en pseudo lenguaje de programación, el algoritmo tiene la forma siguiente:

Sea y^ un punto que minimice $G(y)$*

Paso 0:

$s := y^*$;

$S_0 := y^*$;

Repetir

$s := s - 1$

hasta $c(s, S_0) \leq G(s)$;

$$\begin{aligned}
s_0 &:= s; \\
c^0 &:= c(s_0, S_0); \\
S^0 &:= S_0; \\
S &:= S^0 + 1;
\end{aligned}$$

Paso 1:

Mientras $G(S) \leq c^0$ hacer

Iniciar:

Si $c(s, S) < c^0$ entonces

Iniciar:

$S^0 := S;$

Mientras $c(s, S^0) \leq G(s + 1)$ hacer

$s := s + 1;$

$c^0 := (s, S^0);$

fin;

$S := S + 1;$

fin.

2.3 The Revised Power Approximation

La versión original de este método heurístico fue sugerida en *Ehrhardt (1979)* y fue revisada en *Ehrhardt and Moisiere (1984)*. La heurística aproxima analíticamente los valores de s y S . Es una regresión con coeficientes calibrados con una grilla de 288 duplas (s, S) optimas de distintos escenarios.

Una de las ventajas que este método ofrece es que solo es necesario conocer los dos primeros momentos de la función de distribución de la demanda, sin necesidad de conocer la distribución misma, pudiendo usarse valores aproximados de estos sin que esto deteriore demasiado la solución entregada, además la naturaleza de los cálculos necesarios para la resolución del método son extremadamente sencillos, lo que posibilita que, una vez programado computacionalmente, la resolución de una instancia del problema pueda realizarse de manera muy rápida. Otro aspecto positivo es que su relativa sencillez la hace adecuada en el entorno real de las industrias, a diferencia de otros métodos más precisos.

La heurística es de la siguiente forma:

Hacer

$$\begin{aligned}
\mu_\tau &= \mu(\tau + 1) \\
\sigma_\tau &= \sigma\sqrt{\tau + 1}
\end{aligned}$$

Calcular:

$$\Delta_p = 1,3\mu^{0,494} \left(\frac{K_o}{h}\right)^{0,506} \left(1 + \frac{\sigma_\tau^2}{\mu^2}\right)^{0,116}$$

$$z = \sqrt{\frac{\Delta_p h}{p \sigma_\tau}}$$

$$s_p = 0.973 \mu_\tau + \sigma_\tau \left(\frac{0,183}{z} + 1,603 - 2,192z \right)$$

$$S_0 = \mu_\tau + \sigma_\tau v$$

donde v es la solución de: $\int_{-\infty}^v e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} dx = \frac{p}{p+h} \sqrt{2\pi}$.

Si $\frac{\Delta_p}{\mu} > 1,5$, entonces:

$$s = s_p$$

$$S = s_p + \Delta_p$$

Si no, entonces:

$$s = \min(s_p, S_0)$$

$$S = \min(s_p + \Delta_p, S_0)$$

Los valores obtenidos se redondean al entero más cercano.

3 Experiencia computacional

Dado un conjunto de valores que caractericen un sistema de inventario (una distribución de demanda, un costo por colocación de órdenes de reabastecimiento, un costo lineal de inventario, un costo lineal por los pendientes, y un determinado *lead time*) estos solo representan un escenario de los infinitos posibles. Como el objetivo de este trabajo es indagar en la influencia que el valor de los parámetros tiene sobre la diferencia en los índices de desempeño, se consideraran múltiples escenarios. Aun así, estos solo representan una muestra sobre una región muy acotada del espacio total del cual pueden seleccionarse valores para los parámetros.

3.1 Escenarios para el experimento

La selección de los valores para los parámetros que caracterizan el inventario: media de la demanda (μ), desviación estándar de la demanda (σ), lead time (τ), costo fijo de reabastecimiento (K_0), costo lineal por pendientes (p) y costo lineal por inventario (h); se ha hecho considerando valores que se encuentran en la literatura (*Scarf, 1959; Zheng and Federgruen, 1991*) e interpolando valores intermedios a estos.

En la tabla 3.1, se muestran los valores que se usan, y el conteo de escenarios que se estudian.

Tabla 3.1 – Parámetros de entrada para la creación de escenarios

Parámetro	Valores	Numero de Valores
Demanda	Poisson	1
Media μ	$6\% * e^{60\%*i} \quad i \in \{1,2, \dots, 15\}$	15
Lead time (τ)	0, 2, 4, 6, 8	5
Costo fijo de reabastecimiento (K_0)	1, 32, 64, 200	4
Costo fijo unitario por pendientes (p)	4, 9, 25, 49, 99	5
Costo fijo unitario por inventario (h)	1, 5, 25, 65, 99	5
Total de instancias		7500

3.2 Calculo de las variables s y S

Para cada uno de los 7.500 escenarios, se calcularon los valores de s y S de dos formas. La primera, usando el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, la segunda usando *The Revised Power Approximation*. Además de los escenarios estudiados, se incluyó, en el cálculo, 11 escenarios adicionales cuyos valores óptimos de S y s eran conocidos y que sirvieron como escenarios de control. Los valores de los parámetros y los respectivos valores de S y s , de estos 11 escenarios, fueron tomados de Veinott y Wagner (*Veinott and Wagner, 1965*) y pueden observarse en la tabla 3.2 (en la página 25).

Los métodos de cálculo se programaron en lenguaje Java, en el IDE Eclipse. Los parámetros de entrada fueron importados desde tablas en Excel Microsoft. En cada uno de los escenarios de control se obtuvieron los valores esperados, confirmando la correcta implementación de los métodos.

3.3 Simulación

Para cada uno de los escenarios, se simuló, mediante un modelo computacional, la evolución en el tiempo de un inventario administrado bajo una política (s_{ZFA}, S_{ZFA}) , es decir, con los valores de s y S , para ese escenario, calculados con el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, la configuración *ZFA*; y se simuló, también, la evolución en el tiempo de un inventario administrado bajo una política (s_{TPA}, S_{TPA}) , es decir, con los valores de s y S , para ese escenario, calculados con *The Revised Power Approximation*, la configuración *TPA*.

3.3.1 Índices de desempeño

Como el objetivo es comparar los resultados que se obtienen de cada configuración, los índices de desempeño se establecieron como la diferencia entre los resultados análogos de cada configuración en cada uno de los escenarios. Para cada escenario, entonces, se establecieron 3 índices de desempeño, que consideran los resultados de la simulación de las dos configuraciones. Estos son:

- la *diferencia en el costo promedio por periodo* entre ambas configuraciones,
- la *diferencia en el nivel de servicio* entre ambas configuraciones, y
- la *diferencia en el nivel de inventario promedio* entre ambas configuraciones.

3.3.1.1 Diferencia en el costo promedio por periodo

El costo promedio por periodo (en adelante *CPP*) considera los cargos asociados a los abastecimientos y los relacionados a los productos inventariados o pendientes al final de cada periodo, por lo que para un espacio de n periodos puede calcularse como:

$$CPP = \frac{\sum_{i=1}^n \{K_0 * \alpha_i + \max(I_i * h, -I_i * p)\}}{n}$$

en donde, α_i es una variable binaria que vale 1 si se hace un pedido de abastecimiento en el periodo i o 0 en otro caso, e I_i es el nivel de inventario al final del periodo i (después de descontada la demanda).

Como la diferencia en el costo promedio por periodo (en adelante *DCPP*) entre ambas configuraciones puede tener magnitudes muy distintas para los diferentes escenarios del estudio en virtud de los parámetros de estos, se optó por estandarizar las *DCPP* dividiéndolas por el *CPP* de la configuración *ZFA* del escenario respectivo. El cálculo es:

$$DCCP = \frac{CPP_{TPA} - CPP_{ZFA}}{CPP_{ZFA}}$$

Sabiendo que la configuración *ZFA* tiene mejor desempeño en cuanto al coste promedio por periodo, este indicador muestra el porcentaje de coste en exceso en que incurre la configuración *TPA*. Y así, expresados como un porcentaje, las *DCPP* pueden ser comparadas entre si y estudiadas agrupadamente.

3.3.1.2 Diferencia en el nivel de servicio

El nivel de servicio corresponde a la capacidad para satisfacer la demanda, y se expresa como el porcentaje de veces en que el periodo se logró tal efecto. Para un espacio de n periodos puede calcularse como:

$$\text{Nivel de servicio} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n}$$

en donde, β_i es una variable binaria que vale 1 si $I_i \geq 0$, y vale 0 en otro caso.

Como el nivel de servicio puede tomar valores entre 0 y 1, y como la diferencia en el nivel de servicio (en adelante *DNS*) se calcula directamente de los niveles de servicio de cada configuración, esta puede tomar valores entre -1 y 1. Su cálculo es:

$$DNS = \text{Nivel de servicio}_{TPA} - \text{Nivel de servicio}_{ZFA}$$

3.3.1.3 Diferencia en el nivel de inventario promedio

El nivel de inventario promedio (en adelante *NIP*) corresponde al promedio de existencias que son almacenadas de un periodo al siguiente, por lo tanto, considera el nivel de inventario físico, el cual nunca es negativo. Para un espacio de n puede calcularse como:

$$NIP = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i * I_i}{n}$$

Al igual que la *DCPP*, la diferencia en el nivel de inventario promedio (en adelante *DNIP*) entre ambas configuraciones puede tener magnitudes muy distintas para los diferentes escenarios del estudio, en virtud de los parámetros de estos. Si bien, se pueden estandarizar las *DNIP* dividiendo por el *NIP* de una de las configuraciones del escenario, el indicador resultante no es tan informativo, resulta más interesante estandarizar las *DNIP* dividiéndolas por el valor medio de la demanda del escenario, con lo que el indicador puede entenderse como la cantidad de periodos de demanda media, que podrían cubrirse, con la diferencia de inventario medio administrado. Así, la *DNIP* se calcula como:

$$DNIP = \frac{NIP_{TPA} - NIP_{ZFA}}{\mu}$$

3.3.2 Diseño del experimento

Como los índices de desempeño que se buscan son diferencias entre los desempeños de cada configuración, en vez de estimar el desempeño de cada una a partir de muestras independientes para luego calcular su diferencia, fue posible tomar muestras pareadas para construir intervalos de confianza pareados, y reducir el problema de dos muestras (una por cada configuración) a un problema de una muestra.

Para estimar los índices de desempeño, se optó por una simulación de múltiples replicas, 500 para cada escenario, cada una con un largo de 500 periodos. En cada replica se realizan 3 observaciones pareadas, una para cada índice de desempeño. Cada observación pareada se compone por la observación realizada para la configuración *TPA* y la realizada para la configuración *ZFA* del mismo índice de desempeño.

Considerando las 500 replicas, se consiguieron 3 conjuntos de observaciones pareadas, uno para cada índice de desempeño. Para cada conjunto, las diferencias entre las parejas de observaciones constituye la muestra con la cual se construyó un intervalo de confianza de 1% de significancia para índice de desempeño respectivo a ese conjunto.

Mas formalmente, para cada escenario, sea $X_{TPA,i}$ un índice de desempeño para la i -ésima replica de un total de 500 en que se usa la configuración *TPA*; y sea $X_{ZFA,i}$ el mismo índice de desempeño pero de la i -ésima replica de un total de 500 en que se usa la configuración *ZFA*. Entonces se hicieron pares $X_{TPA,i}$ con $X_{ZFA,i}$ para definir $D_i = X_{TPA,i} - X_{ZFA,i}$, para $i = 1, 2, 3, \dots, 500$ y construyo un intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$\left[\bar{D} - t_{\left(\frac{1}{2}\%, 499\right)} \sqrt{\frac{S^2}{500}}, \bar{D} + t_{\left(\frac{1}{2}\%, 499\right)} \sqrt{\frac{S^2}{500}} \right]$$

en donde,

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{500} D_i}{500}$$

y

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{500} (D_i - \bar{D})^2}{499}$$

y en que la precisión del intervalo queda determina por:

$$\pm t_{\left(\frac{1}{2}\%, 499\right)} \sqrt{S^2/500}$$

Es importante el hecho de que no se requiere que $X_{LPA,i}$ y $X_{ZFA,i}$ sean independientes entre ellas, y tampoco es requisito que $Var(X_{LPA,i}) = Var(X_{ZFA,i})$. Permitir una correlación

positiva entre $X_{LPA,i}$ y $X_{ZFA,i}$ es de gran utilidad, puesto que esto conduce a una reducción de la varianza de D_i , y por ende, del tamaño del intervalo de confianza. La justificación de esto puede observarse si se considera que:

$$Var(D_i) = Var(X_{TPA,i} - X_{ZFA,i}) = Var(X_{TPA,i}) + Var(X_{ZFA,i}) - 2Cov(X_{TPA,i}, X_{ZFA,i})$$

Para generar correlación positiva entre $X_{TPA,i}$ y $X_{ZFA,i}$, se utilizó un método conocido como *números aleatorios comunes*. El método intenta inducir correlación positiva usando los mismos números aleatorios para simular ambas configuraciones. La idea básica es que se debería hacer la comparación de ambas configuraciones “bajo condiciones experimentales similares”, para que de esta forma se pueda tener mayor seguridad de que cualquier diferencia observada es consecuencia del uso de configuraciones diferentes y no de las fluctuaciones de las “condiciones experimentales”.

Dadas las características de este problema, en particular, que las variables de estado del sistema solo cambian una vez por periodo, y que este cambio se debe a la intervención de un único número aleatorio (el valor de la demanda en dicho periodo), es posible simular paralelamente el sistema en cada una de sus dos configuraciones, y actualizar el valor de las variables de estado de cada una de ellas, con un mismo número aleatorio generado en el periodo correspondiente.

Por último, para asegurar comparar diferencias que sean producto de la elección de la metodología para el cálculo de los valores de s y S , fue necesario aislar el sesgo consecuencia de los valores iniciales de las variables de estado de la simulación, y utilizar observaciones del sistema en su estado estacionario para construir las muestras. El periodo transitorio inicial, o de calentamiento, necesario para alcanzar el estado estacionario, fue determinado mediante el análisis de una centena de escenarios, considerando la media móvil de la posición de inventario como la variable de estado que revelara el estado buscado. Con esto, y considerando un margen de seguridad holgado, con lo que se perdió eficiencia pero se aseguró que los datos recogidos fueran representativos, se estableció el periodo transitorio inicial, para cada instancia del problema, en 100 periodos.

Con todas las consideraciones hechas durante el diseño del experimento fue posible elaborar un modelo para la simulación orientándolo a la implementación computacional, buscando que sea coherente con este diseño. El resultado se muestra en la figura 3.1 en la página siguiente.

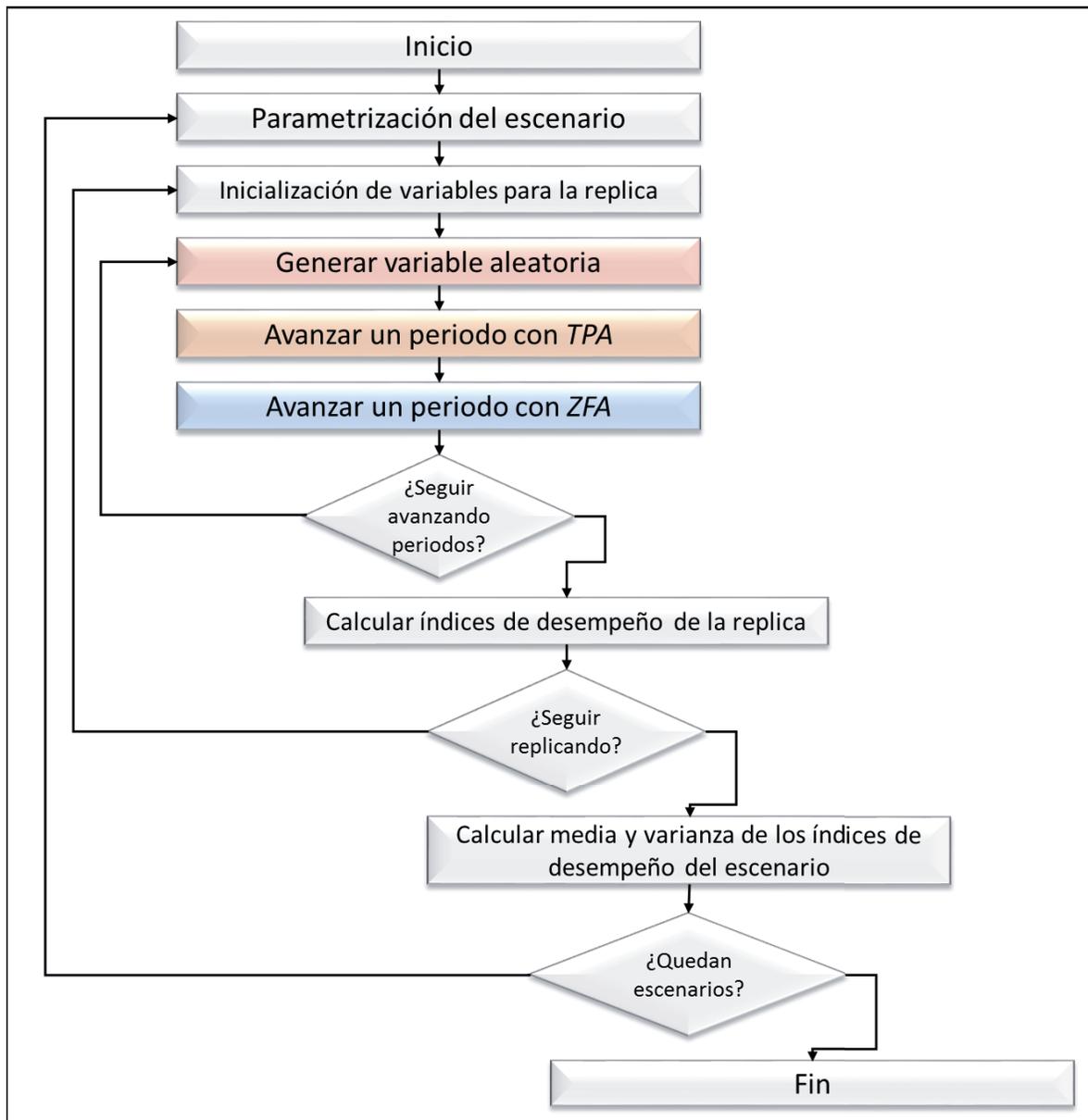


Figura 3.1 – Modelo para la implementación de la simulación

Con este modelo final se construyó un programa computacional, en lenguaje Java, en el IDE Eclipse, mediante el cual se realizó la simulación. Para validar el programa se utilizaron los once escenarios de control tomados del trabajo de *Veinott y Wagner (Veinott and Wagner, 1965)* y los correspondientes valores calculados para el *CPP* de dichos escenarios, los cuáles resultaron ser estadísticamente iguales a los valores obtenidos con el programa construido, con un 1% de significancia y una precisión¹ no mayor al 0,135%. Estos resultados se resumen en la tabla 3.2 en la página siguiente.

¹ Aquí se expresa una cota máxima para la precisión (la mitad del ancho del I.C) de los I.C. observados. La precisión se expresa como un porcentaje del valor central del intervalo.

Tabla 3.2 – CPP de los escenarios de control

K_0	L	p	h	μ	CPP teórico de Veinott and Wagner, 1964	Resultados simulación		
						\bar{X}_{cpp}	S^2_{cpp}	LC.1%
64	0	9	1	21	50,40590	50,39556	0,31732	[50,33042 ; 50,4607]
64	0	9	1	22	51,63222	51,63792	0,30796	[51,57374 ; 51,70209]
64	0	9	1	23	52,75658	52,76787	0,27500	[52,70723 ; 52,82851]
64	0	9	1	24	53,51777	53,52619	0,31050	[53,46175 ; 53,59062]
64	0	9	1	51	71,61085	71,65197	0,65269	[71,55855 ; 71,74539]
64	0	9	1	52	72,24602	72,30622	0,57727	[72,21837 ; 72,39408]
64	0	9	1	55	74,14860	74,13401	0,68054	[74,03862 ; 74,22941]
64	0	9	1	59	76,67902	76,65356	0,72993	[76,55476 ; 76,75235]
64	0	9	1	61	77,92867	77,98908	0,69613	[77,8926 ; 78,08556]
64	0	9	1	63	78,28676	78,28400	0,38923	[78,21186 ; 78,35615]
64	0	9	1	64	78,40221	78,36844	0,43567	[78,29211 ; 78,44477]

4 Resultados

Además de los índices de desempeño propuestos, es oportuno revisar los tiempos que cada metodología necesitó para el cálculo de los parámetros s y S de los escenarios. Aunque, los potentes procesadores actuales pueden hacer los cálculos necesarios en fracciones de segundos, los inventarios de muchas industrias suelen tener cientos, o incluso miles, de productos distintos, por lo que una diferencia pequeña en el tiempo que se necesita para el cálculo de los parámetros de la política de inventario de cada producto puede ser significativo cuando se considera las diferencias agregadamente.

Si bien, los tiempos que cada metodología tarda en obtener los valores de S y s dependen, en gran medida, de las características del computador en que se programaron los algoritmos, como lo que se busca en este trabajo es compararlos, y dado que se usó el mismo computador para cada una de ellas, es posible llevar a cabo dicha comparación sin perder generalidad.

En el caso del *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, cuando en la literatura se hace referencia a su rapidez relativa frente a otras técnicas que consiguen determinar los valores óptimos de s y S , se considera que y^* y $G(y)$ son parámetros de entrada, cuyos valores son conocidos, por lo que no se emplea tiempo en su determinación. De no contar con ellos, que es lo habitual, deben ser calculados, como en el caso de este trabajo. En lo que sigue, cuando se haga referencia a los tiempos usados por el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* se estará haciendo referencia al conjunto de datos de los tiempos totales que consideran, también, el tiempo usado en el cálculo de los parámetros de entrada del algoritmo. En este punto es interesante señalar, que con esta consideración no se provoca un sesgo al estudiar la forma en que estos tiempos se distribuyen ya que, como se muestra en la figura 6.1, la correlación entre los tiempos del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* y los tiempos totales que consideran el cálculo de parámetros, es alta, con un coeficiente de correlación de 99,99%.

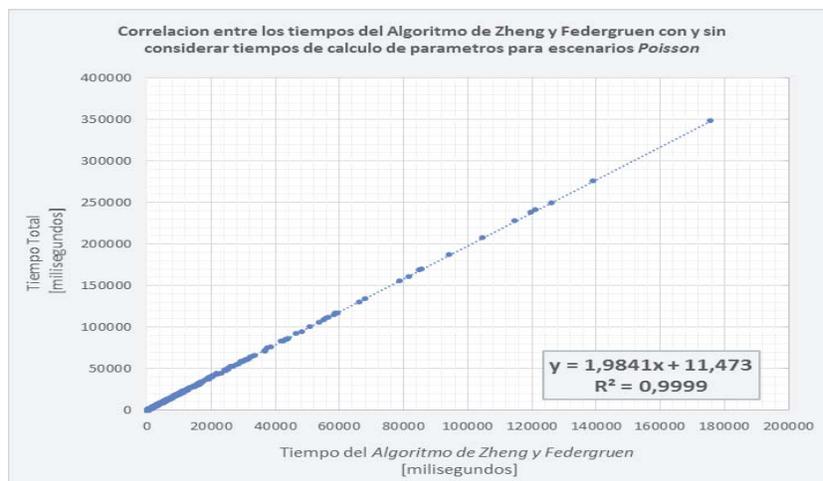


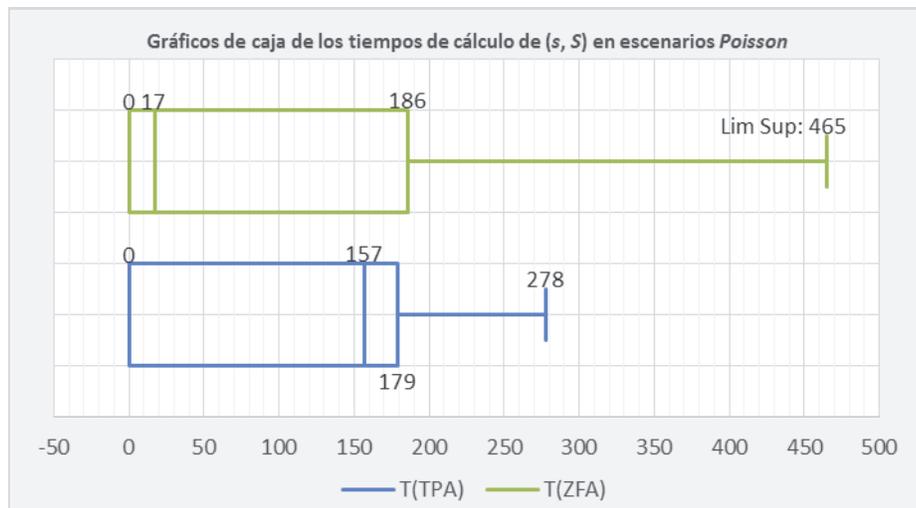
Figura 4.1 – Correlación entre los tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* con y sin considerar los tiempos de cálculo de parámetros

4.1 Sobre los tiempos de cálculo de s y S

Considerando los 7.500 escenarios se construyó el gráfico de la figura 4.2 en donde se representan, mediante gráficos de cajas, el conjunto de datos obtenidos para los tiempos que tardaron los algoritmos en calcular los parámetros S y s .

En la figura, en azul, se aprecian la *caja con bigotes* de los tiempos de *The Revised Power Approximation*. Se observa que el 50% de los tiempos son iguales o inferiores a 157 milisegundos, el 75% son iguales o menores a 179 milisegundos, y el 100% son iguales o menores a 278 milisegundos. Los tiempos de cálculo que tarda *The Revised Power Approximation* tienen una distribución fuertemente cargada hacia a la izquierda, con algo más del 35% de los tiempos de cálculo tan pequeños que se registraron como 0. El método es consistente en resolver el problema de forma rápida, sin tiempos que sean atípicamente largos en el conjunto. La media y la varianza de este conjunto de valores son 113,3 [milisegundos] y 7.489,0 [milisegundos²] respectivamente.

En la figura, en verde, se representa el conjunto de los tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen*. Solo se considera el 82% de los datos, ya que el otro 18% son mayores que el límite superior para la caja², calculado en 465 milisegundos. La distribución también está cargada a la izquierda con algo más del 29% de los tiempos tan pequeños que se registrados como 0, y un 50% de ellos menores o iguales a 17 milisegundos. El tercer cuartil alcanza los 186 milisegundos. El 25% restante de los tiempos registrados para esta configuración se extienden en un rango muy extenso, con lo que la distribución del conjunto presenta una cola derecha se considerablemente larga, registrándose el mayor valor en 348.369 milisegundos. La media y la varianza de este conjunto de valores son 1.651,3 [milisegundos] y 129.200.247,0 [milisegundos²] respectivamente.



² El límite superior se calcula como $1,5 \cdot (Q_3 - Q_1) + Q_3$, y representa la cota superior para los datos típicos de la distribución.

Figura 4.2 – Gráficos de caja de los conjuntos de tiempo de cálculo usado por cada metodología

La tabla 4.1 muestra algunas medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo registrados de las dos metodologías usadas. Se puede apreciar lo ya visto en los gráficos de cajas, que los tiempos de *The Revised Power Approximation* se encuentran en un rango acotado, con una media en el mismo orden de magnitud que la mediana, sin datos atípicos, ni leves ni fuertes. Por su parte los tiempos del *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, aunque en gran parte están acotados a un rango comparable a los de *The Revised Power Aproximation*, una fracción del conjunto se extiende en un rango muy amplio, pudiendo alcanzar valores muy alejados de la media, tanto que, aun siendo relativamente menores en cantidad, estos datos atípicos logran incrementar el valor de la media del conjunto dos órdenes de magnitud sobre la mediana.

Como los tiempos que demora el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* solo son de magnitudes elevadas en algunos escenarios, resulta interesante buscar si existe una relación entre los parámetros iniciales del escenario y la probabilidad de que el tiempo de resolución del algoritmo sea alto en relación a lo que cabría esperar demore *The Revised Power Approximation*.

Tabla 4.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempo de cálculo usado por cada metodología

	Media	Desviación estándar	Mínimo	Limite Inferior	Q ₁	Mediana	Q ₃	Limite Superior	Máximo	% de datos atípicos deviles
T(TPA)	113	87	0	-	0	157	179	-	278	0%
T(ZFA)	1.651	11.367	0	-	0	17	186	465	348.368	18%

4.1.1 Sobre los tiempos de cálculo de s y S con el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*

Aunque, no es posible encontrar una relación funcional entre el tiempo que tomara el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* y el valor de los parámetros del escenario, es posible estudiar cómo afecta la variación de cada uno de ellos a la probabilidad de que este tiempo sea alto en comparación a la media de los tiempos que toma *The Revised Power Approximation*. Con esta finalidad se dividió el conjunto de los tiempos registrados en subconjuntos según el valor de uno de los parámetros del escenario, es decir, en subconjuntos para valores iguales de K_0 , en subconjuntos para valores iguales de τ , etcétera. Luego se estudió la distribución de las observaciones en cada conjunto de datos.

En la figura 4.3 las barras representan los subconjuntos hechos para los distintos valores de K_0 , y los colores representan distintos percentiles, desde el 40% hasta el 98%. Las líneas discontinuas son un ajuste de regresión lineal para los puntos constituidos por los valores de estos percentiles y los valores del parámetro K_0 . Los coeficientes de correlación con valores altos (>99%) de estas líneas de regresión indican que existe una correlación fuerte entre el valor del percentil y el valor del parámetro. Además se observa que la pendiente de las regresiones aumenta a medida que aumenta el valor del percentil considerado. Esto indica que el valor, bajo el cual se encuentra el φ de las observaciones, es decir, el percentil φ , de cada subconjunto, es,

aproximadamente, proporcional al valor de K_0 , siendo la constante de proporcionalidad mayor en cuanto mayor es el valor de φ .

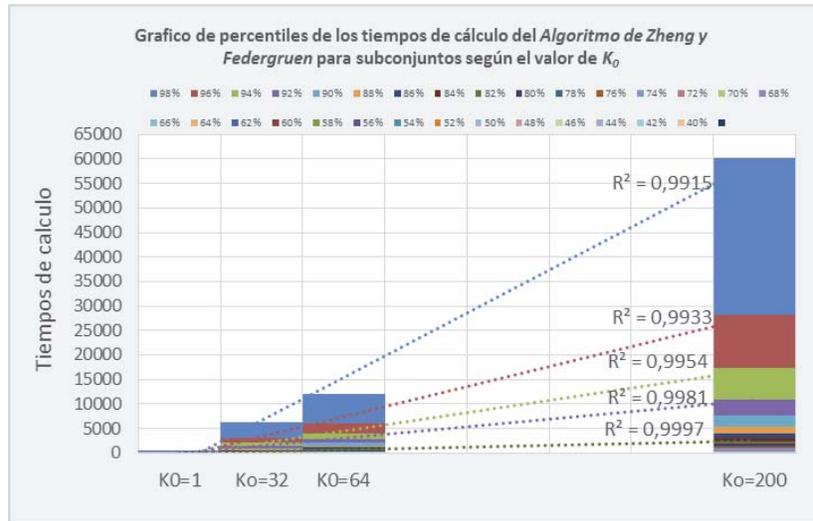


Figura 4.3 – Gráfico de percentiles de los tiempos de cálculo del Algoritmo de Zheng y Federgruen para subconjuntos con distinto valor de K_0

En la tabla 4.2 se cuantifica, entre otras medidas descriptivas, el aumento de la media que se da con el aumento del valor del parámetro K_0 , mucho mayor que el aumento que se da para la mediana, esto debido al aumento del rango en que se extiende la cola derecha, sin, casi, que cambie la distribución del 50% menor de los datos. Con esto también aumentan la desviación estándar y el valor de los percentiles.

Tabla 4.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del Algoritmo de Zheng y Federgruen según el valor de K_0

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$K_0=1$	0	1.635	2	0	40	134	3,34	6,49	54,30
$K_0=32$	0	40.394	17	0	570	2.376	4,17	8,80	99,83
$K_0=64$	0	75.184	32	0	1.085	4.537	4,18	8,70	96,44
$K_0=200$	0	348.368	78	0	4.910	21.819	4,44	8,48	89,18

El mismo ejercicio se hizo considerando subconjuntos armados para los distintos valores de τ , como para los de h, p y μ , con resultados similares a los ya vistos para los subconjuntos de K_0 .

Para τ , el aumento del valor del parámetro tiene un efecto homólogo al del aumento del valor de K_0 , el valor de los percentiles de los tiempos de cálculo del Algoritmo de Zheng y Federgruen es proporcional a τ , además, con una constante de proporcionalidad mayor entre mayor es el percentil. El mismo comportamiento se observó en los subconjuntos hechos para los distintos valores de μ .

Tanto para h , como para p , se encontró que existe una relación inversa de proporcionalidad entre el valor del parámetro y el valor de los percentiles, así, considerando los inversos de p y h , es decir, $1/p$ y $1/h$, se presentó el mismo comportamiento que se observó para K_0 , τ y μ .

La sensibilidad del tamaño de los percentiles a la variación de un parámetro del escenario, puede ordenarse de mayor a menor si se considera la magnitud de las pendientes de las rectas de regresión. Resulta ser la sensibilidad a p y h muy superior a la sensibilidad a los cambios en τ , la cual, a su vez, es muy superior a los cambios en K_0 y μ . La figura 4.4 muestra un gráfico de los coeficientes de proporcionalidad en función del percentil, como se ve los coeficientes de p y h se alejan explosivamente de los otros a medida que él se consideran valores de percentiles más altos. Lo mismo ocurre para los coeficientes de τ que se alejan de lo de K_0 y μ , lo que se observa al considerar escalas más pequeñas del gráfico.

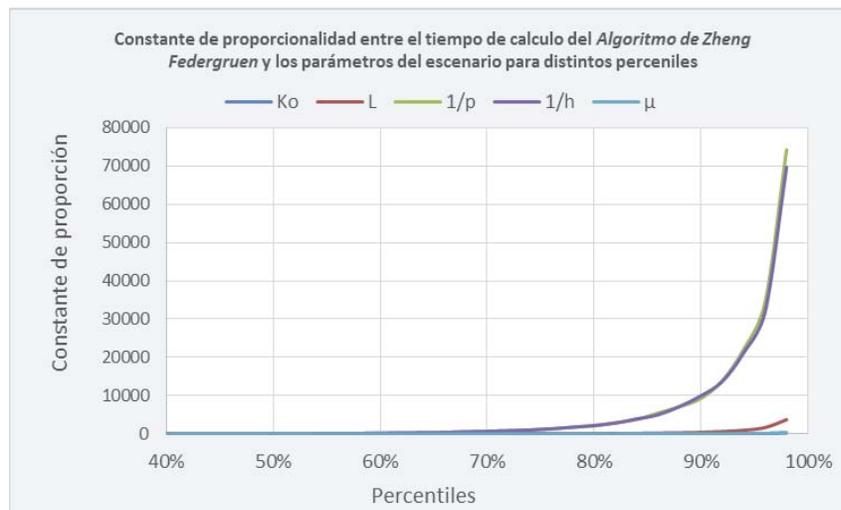


Figura 4.4 – Gráfico de valor de la constante de proporcionalidad entre el tiempo de cálculo y los parámetros versus el percentil considerado

La tabla 4.3, en la página siguiente, presenta un resumen de lo expuesto anteriormente.

Para una proporción importante de combinaciones de parámetros de entrada el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* es varias veces más rápido que *The Revised Power Approximation*, pero en estos escenarios a lo sumo se consigue una mejora de 300 milisegundos. Por otra parte, en aquellos escenarios en que el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* demora más, la diferencia puede alcanzar magnitudes mucho mayores, incluso, de varios minutos. Ponderando la frecuencia de las observaciones por la diferencia de tiempo, *The Revised Power Approximation* resulta ser un método, en general, más eficiente en términos de tiempo empleado para el cálculo de parámetros, aunque, en los escenarios particulares en que K_0 , τ y μ sean bajos, al tiempo que h y p son altos, el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* será más eficiente.

Tabla 4.3 – Relación entre los parámetros del escenario y la distribución de los tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* observados

Parámetro	
Media μ	Proporcional al valor de los percentiles del conjunto de observaciones de los tiempos del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> . La constante de proporcionalidad es mayor cuanto mayor es el percentil considerado.
Lead time (τ)	Proporcional al valor de los percentiles del conjunto de observaciones de los tiempos del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> . La constante de proporcionalidad es mayor cuanto mayor es el percentil considerado.
Costo fijo de reabastecimiento (K_0)	Proporcional al valor de los percentiles del conjunto de observaciones de los tiempos del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> . La constante de proporcionalidad es mayor cuanto mayor es el percentil considerado.
Costo fijo unitario por pendientes (p)	Inversamente proporcional a una potencia (fraccionaria) del valor de los percentiles del conjunto de observaciones de los tiempos del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> . La constante de proporcionalidad es mayor cuanto mayor es el percentil considerado.
Costo fijo unitario por inventario (h)	Inversamente proporcional a una potencia (fraccionaria) del valor de los percentiles del conjunto de observaciones de los tiempos del <i>Algoritmo de Zheng y Federgruen</i> . La constante de proporcionalidad es mayor cuanto mayor es el percentil considerado.

Más información sobre los subconjuntos agrupados según el valor de los parámetros L , h , p y μ , puede encontrarse en el anexo 1.

4.2 Sobre la diferencia en el costo promedio por periodo

Para estudiar las *DCPP* (diferencias en el costo promedio por periodo) que se observaron en el experimento, se estudió el rango y la forma en que se distribuyen, encontrándose que de los 7.500 escenarios el 26,8% de los casos no mostraron diferencia significativa, con un 99% de nivel de confianza y una precisión, a lo sumo³; de $\pm 2,93\%$. En el resto de los casos la diferencia siempre fue significativamente mayor que cero, es decir, con un *CPP* para la configuración *TPA* mayor que para la configuración *ZFA*, lo que cabía esperar dado que el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* determina valores óptimos, en relación al costo, de s y S cuando la demanda se distribuye discretamente.

³ Como el tamaño de la muestra y el nivel de significancia han sido fijados, la precisión del intervalo no puede ser fijada y dependerá de la muestra. Para cada escenario hay una muestra distinta y, por lo tanto, una precisión distinta.

El valor de los cuartiles de la distribución, junto con el límite superior calculado para los datos típicos, puede observarse en la tabla 4.4. Se observa que el 50% de los casos presentan diferencias menores 3,0%. Aun considerando el 75% de los datos la cota de las *DCPP* sigue manteniéndose relativamente baja, con diferencias de a lo más 31,5%.

Tabla 4.4 – Medidas descriptivas del conjunto de *DCPP*

Mínimo	Límite Inferior	Q ₁	Mediana	Q ₃	Límite Superior	Máximo	% de datos atípicos
-0,4%	-	0,0%	3,0%	31,5%	79%	1293,4%	16%

Cuando se estudia el histograma de las *DCPP* registradas, se encuentra una forma asimétrica y leptocúrtica, fuertemente cargada a la izquierda, sin presencia de una cola hacia ese lado, y una cola derecha que cae abruptamente, para continuar con un decrecimiento lento y monótono. En la figura 4.5 se presenta el histograma truncado en el 81% de frecuencia acumulada (para observar mejor el lado izquierdo del histograma). Las barras muestran la frecuencia relativa de las diferencias, la línea morada muestra la frecuencia acumulada suavizada, cuya escala se indica en el eje derecho del gráfico, y, en rojo, se muestra una curva de ajuste potencial (con exponente negativo) hecha a la frecuencia relativa, la cual posee un coeficiente de correlación de 95,7% aproximadamente para los datos en el rango mostrado.

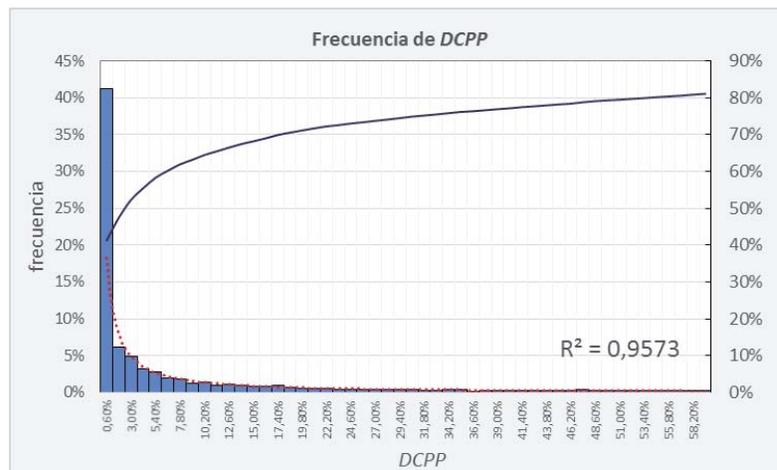


Figura 4.5 – Histograma de las *DCPP*

Es claro que la curva potencial mostrada en el gráfico se desajusta del histograma de frecuencias relativas en cercanía de *DCPP* cercanas a cero, de hecho la curva de ajuste tiende a infinito a medida que el eje de las avisas se acerca a cero, lo que es incongruente con un histograma o con una curva de distribución de probabilidad. Lo importante aquí es el hecho de que la frecuencia con que aparecen *DCPP* de una determinada magnitud disminuye aceleradamente.

Para estudiar cómo afecta la variación del valor de los parámetros del escenario considerado al rango en que puede esperarse se encuentre la *DCPP*, se siguió el mismo procedimiento que en la sección anterior, separando los resultados en subconjuntos que

compartan el valor de un parámetro en particular, y repitiendo el proceso para cada parámetro de entrada.

En la figura número 4.6 se observa que para los subconjuntos de escenarios donde es mayor el valor del parámetro K_0 presentan percentiles de rangos más anchos, por lo que, definido un valor crítico de la *DCPP* (una recta horizontal en el gráfico), a medida que K_0 aumentan, se vuelve más frecuente encontrar casos en que la diferencia sea mayor a dicho valor crítico (más percentiles sobre la recta horizontal). Se observa, además, que el aumento del tamaño de los percentiles conforme K_0 aumenta es menor que logarítmico, y, si bien hay un aumento del tamaño de los percentiles a medida que K_0 aumenta, la tasa de incremento disminuye a medida que el valor de K_0 es mayor.

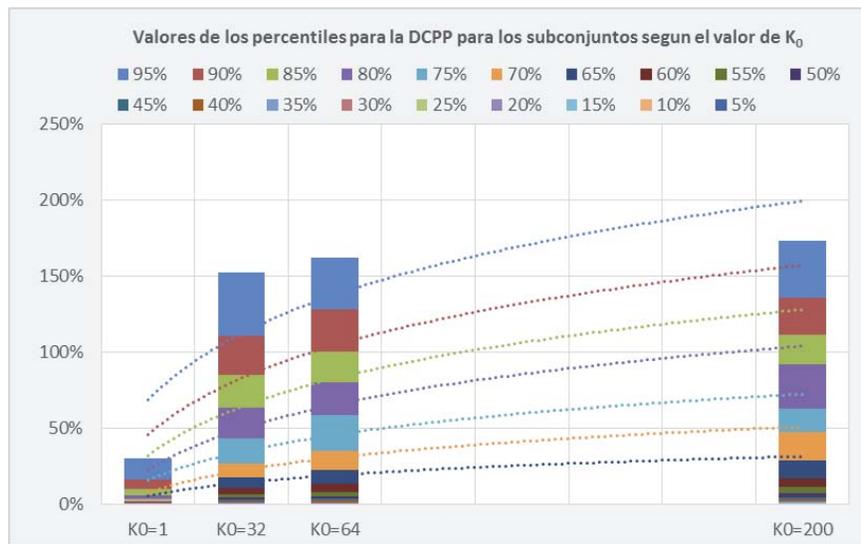


Figura 4.6 – Gráfico de percentiles de las *DCPP* para subconjuntos con distinto valor de K_0

La tabla 4.5 se muestran las medidas descriptivas de los subconjuntos hechos para distintos valores de K_0 . Se observa un valor bajo para las medianas, las cuales son levemente mayores para valores más altos de K_0 . También al aumentar K_0 aumenta la media del subconjunto, producto del ensanchamiento del lado derecho de la distribución de datos del mismo, lo que también aumenta la dispersión.

Tabla 4.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DCPP* según el valor de K_0

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$K_0=1$	0%	900%	0,3%	0,0%	9%	43%	4,77	13,30	230,76
$K_0=32$	0%	1071%	4,3%	0,0%	39%	92%	2,32	5,69	43,96
$K_0=64$	0%	1206%	5,1%	0,0%	43%	94%	2,17	6,04	52,42
$K_0=200$	0%	1293%	6,8%	0,0%	42%	67%	1,61	4,62	64,17

Al estudiar el resto de los parámetros, se encuentra que existe una relación más ajustada entre el valor de estos y el tamaño de los percentiles de los subconjuntos relacionados. Para el

parámetro τ se observa que los percentiles decrecen a tasas logarítmicas al aumentar el valor del parámetro, pero con cambios considerables solo en los percentiles mayores, siendo los percentiles menores a 75% muy similares en la magnitud de sus valores. Para p el decrecimiento es a tasas potenciales, con un decrecimiento muy pronunciado y evidenciando que los percentiles son más pequeños entre mayor es p y entre menor es el percentil considerado. Para h se observa que cuando el parámetro aumenta los percentiles aumentan con un ritmo logarítmico y en mayor proporción cuanto mayor es el percentil considerado. Por último, para μ , se observa que el tamaño de los percentiles aumenta linealmente a medida que μ aumenta desde un valor cercano a 14, pero a medida que se hace más pequeño que 14 el aumento del tamaño de los percentiles es explosivo.

La tabla 4.6, presenta un resumen de lo expuesto anteriormente.

Tabla 4.6 – Incidencia de los parámetros del escenario en la *DCPP*

Parámetro	
Media μ	Cuando el parámetro es bajo (del orden de 5 unidades por periodo o menor) el máximo observado para la DCPP (y el tamaño de los percentiles) es muy grande y aumenta explosivamente a medida que el parámetro tiende a cero , por lo que el parámetro es relevante. Para valores de μ mayores a 14 el valor del parámetro incide moderadamente en el valor máximo observado de las DCPP aumentándola a razón de 0,16% aproximadamente por cada unidad de incremento de μ , y son más relevantes los valores de los otros parámetros.
Lead time (τ)	En el rango estudiado, el valor del parámetro tiene muy poca incidencia en la DCPP . Los errores se distribuyen de forma muy similar indistintamente del valor de τ , y las magnitudes que puedan alcanzar dependerán mayormente de los otros parámetros.
Costo fijo de reabastecimiento (K_0)	Para valores muy bajos del parámetro (cerca de cero) la DCPP tendrá una cota muy baja , del orden del 30%. Para otros valores de K_0 la cota de la <i>DCPP</i> es muy similar indistintamente del valor del parámetro, y la magnitud que pueda alcanzar dependerá mayormente de los otros parámetros.
Costo fijo unitario por pendientes (p)	El valor del parámetro es inversamente proporcional a la magnitud de la cota de la DCPP , siendo menores a 50% para $p > 99$. A medida que el parámetro decrece, aumenta exponencialmente la cota de la <i>DCPP</i> .
Costo fijo unitario por inventario (h)	El valor del parámetro esta en relación logarítmica a la magnitud de la cota de la DCPP , siendo estas últimas menores a 50% para $h < 10$, y con un decrecimiento rápido a medida que el parámetro se hace más pequeño. A medida que el parámetro aumenta, aumenta también, aunque con un ritmo cada vez menor, la cota de la <i>DCPP</i> .

The Revised Power Approximation se revela entonces como una buena aproximación solo para algunas combinaciones de los parámetros del escenario. En particular, no es recomendado (si se está buscando buenos desempeños en términos de *CPP*) usar *The Revised Power Approximation* para valores de h grandes (>25), ni para valores de p bajos (<25), ni para valores de la media muy grandes (>400), siendo la combinación de estas condiciones aún más perjudicial para los desempeños de la metodología.

Más información sobre los subconjuntos agrupados según el valor de los parámetros L , h , p y μ , puede encontrarse en el anexo 2.

4.3 Sobre la diferencia en el nivel de servicio

Además de conocer las diferencias en el costo promedio de largo plazo es importante conocer cómo afecta la elección de la metodología de cálculo el nivel de servicio entregado. Es sabido que, para políticas de inventario que contemplan la posibilidad de satisfacer demanda pendiente, el sistema podrá determinar que, en beneficio de un costo final más bajo, el inventario deba quebrarse ocasionalmente o, incluso, constantemente.

Considerando que las diferencias que se estudian son obtenidas de comparar configuraciones distintas que se implementan en escenarios idénticos, los resultados presentados en esta sección tienen la finalidad de poder conocer el desmedro o mejoramiento en el servicio que podría esperarse de la elección de una configuración sobre la otra más que conocer el nivel de servicio en sí.

Con un 99% de nivel de confianza, de los 7.500 escenarios estudiados el 50,5% de los casos mostro diferencias significativamente menores que cero (precisión de, a lo más, 0,86%), es decir, en que la configuración *ZFA* tuvo un nivel de servicio mejor, con diferencias de hasta un 51,5%. El 31,1% de los casos no mostro diferencias significativas. El resto de casos, el 18,4% de ellos, mostro diferencias positivas, es decir en donde la configuración *TPA* tuvo mejor nivel de servicio y, aunque la mayoría de estas diferencias son pequeñas, estas alcanzan hasta un 94,7% de magnitud en el caso más extremo. Con todo, la media muestral se ubica en -4,59%. La tabla 4.7 muestra las medidas descriptivas de posición del conjunto de observaciones de *DNS*, y la figura 4.7 muestra su histograma.

Tabla 4.7 – Medidas descriptivas del conjunto de *DNS*

Mínimo	Limite Inferior	Q ₁	Mediana	Q ₃	Limite Superior	Máximo	% de datos atípicos
-51,5%	-24,3%	-9,7%	0,0%	0,0%	14,6%	94,7%	10%

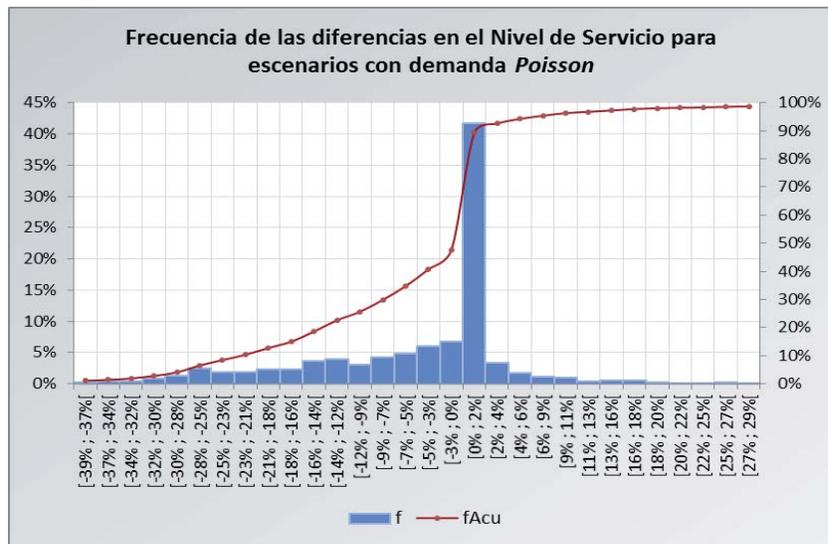


Figura 4.7 – Histograma de las DNS

Utilizando la misma de estrategia de la sección anterior, se analiza la influencia de cada parámetro de entrada, sobre el índice de desempeño, al subdividir el conjunto de resultados en subconjuntos que compartan el valor de un parámetro de interés, y se repite para cada parámetro. En general todos los parámetros influyen, aunque mayoritariamente con muy poca incidencia, de forma que aumenta la frecuencia con que aparecen DNS más significativas en que la metodología ZFA presta un mejor nivel de servicio. La tabla 4.8 resume la información encontrada.

Tabla 4.7 – Incidencia de los parámetros del escenario en la DNS

Parámetro	
Media μ	El aumento del parámetro produce un aumento de la frecuencia con que se observan DNS en que la metodología ZFA resulta tener mejor nivel de servicio , además, al aumentar el parámetro, aumenta la magnitud del rango en que se presentan estas diferencias.
Lead time (τ)	En el rango estudiado, el valor del parámetro tiene muy poca incidencia en la DNS , estas se distribuyen de forma muy similar indistintamente del valor de τ , y las magnitudes que puedan alcanzar dependerán mayormente de los otros parámetros.
Costo fijo de reabastecimiento (K_0)	Para valores muy bajos del parámetro (=1) casi no se observaron DNS significativas . Para valores mayores de K_0 el parámetro casi no presenta relevancia en las magnitudes de las DNS, siendo los otros parámetros más relevantes.
Costo fijo unitario por pendientes (p)	Para valores altos del parámetro (=99) casi no se observaron DNS significativas . Para valores menores de p , la disminución del valor del parámetro incide en una mayor frecuencia de DNS en que la metodología ZFA resulta tener mejor nivel de servicio, y con mayor diferencia.

Parámetro	
Costo fijo unitario por inventario (h)	Para valores muy bajos del parámetro ($=1$) casi no se observaron DNS significativas. Para valores mayores de h , el aumento del valor del parámetro incide en una mayor frecuencia de DNS en que la metodología ZFA resulta tener mejor nivel de servicio, y con mayor diferencia.

Se observó que el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* presenta, en la gran mayoría de los casos, un nivel de servicio igual o mejor que el que se consigue con *The Power Approximation*. Al respecto, los parámetros de entrada no resultan ser buenos predictores de la diferencia que podrá existir entre los desempeños de ambas metodologías, aun así, se pudo constatar que, al igual que con la *DCPP* valores bajos de h , valores altos de p y valores bajos de K_0 , tienden a mostrar mayor frecuencia de casos sin diferencias significativas entre las metodologías, siendo la combinación de estos factores donde más similares son los resultados entre ambas. Por su parte, para τ se observa que tampoco influye significativamente en un cambio de distribución de las DNS que se pueden esperar (por lo menos en el rango estudiado). Por último, μ muestra ser el mejor predictor, encontrándose que al aumentar su valor es más frecuente encontrar diferencias significativas en que el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* presentan mejor nivel de servicio.

Más información sobre los subconjuntos agrupados según el valor de los distintos parámetros puede encontrarse en el anexo 3.

4.4 Sobre la diferencia en el nivel de inventario promedio

El tercer índice de desempeño considerado corresponde a la diferencia entre el nivel de inventario promedio que cada configuración administra. Ya que el *NIP* de cada escenario tiene una magnitud relacionada con la demanda media de este, se optó, con el fin de poder comparar las *DNIP* de distintos escenarios, por relativizar la primera cantidad a la segunda, es decir, dividir el valor del inventario promedio por la media de la demanda, así, el *NIP* se mide en unidades de demanda media.

Nuevamente, como se están comparando los niveles promedio de inventario entre dos configuraciones distintas, no es el fin estudiar el *NIP* de ninguna configuración particular, sino más bien, la diferencia entre ellos.

De los 7.500 escenarios el 29,9% de casos no presentan diferencia significativa (99% de nivel de confianza, y, a lo más 18,8%⁴, de precisión) en el nivel medio de inventario administrado. El 19,4% presentó diferencias positivas, es decir, que la configuración *TPA* administra un mayor *NIP* que la configuración *ZFA*. El 50,7% restante muestra diferencias negativas, en que *ZFA* administra mayor *NIP*. La distribución de las *DNIP* es asimétrica, tiene una mediana de -0,1%, una moda de 0,0% y media de 25,8%.

⁴ Aquí es importante recordar que el *NIP* se está midiendo en unidades de demanda media, luego, lo que se está diciendo es que el intervalo de confianza menos ajustado tiene una precisión de 18,8% del valor de la demanda media de ese escenario.

Como se aprecia en el histograma de la figura 4.8, las *DNIP* se agrupan en un rango estrecho, mientras las diferencias atípicas⁵, el 30% de los casos, se reparten en sendas colas, cada una con el 15% de los resultados.

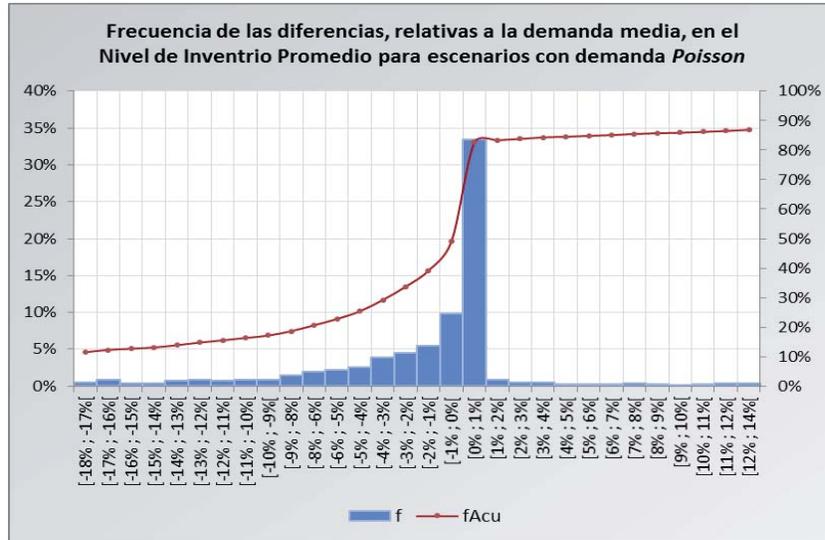


Figura 4.8 – Histograma de las *DNIP*

Tabla 4.8 – Medidas descriptivas del conjunto de *DNIP*

Mínimo	Límite Inferior	Q ₁	Mediana	Q ₃	Límite Superior	Máximo	% de datos atípicos
-368,5%	-11,3%	-4,5%	-0,1%	0,0%	6,8%	1827,5%	30%

Al igual que en las secciones anteriores, se estudiaron subconjuntos para los distintos valores de los parámetros. La tabla 4.9 resume las observaciones hechas.

Tabla 4.9 – Incidencia de los parámetros del escenario en la *DNIP*

Parámetro	
Media μ	Para valores del parámetro muy bajos (<1) se observa diferencias de gran magnitud, en que <i>ZFA</i> tiene mayor <i>NIP</i> , mientras que para valores mayores de μ , el aumento del parámetro disminuye la frecuencia con que aparecen <i>DNIP</i> , aumentando la posibilidad de que la <i>DNIP</i> no sea significativa.
Lead time (τ)	A medida que el parámetro aumenta su valor se vuelve más frecuente encontrar <i>DNIP</i> más significativas, en que <i>ZFA</i> tiene mayor <i>NIP</i> , mientras que para valores bajos aumenta la posibilidad de que la <i>DNIP</i> no sea significativa.

⁵ Se usa el término atípico para referirse a su posición relativa con respecto a los cuartiles centrales del conjunto, y no con la acepción de ser valores aberrantes o inconsistentes dentro de la muestra.

Parámetro	
Costo fijo de reabastecimiento (K_0)	A medida que el parámetro aumenta su valor se vuelve más frecuente encontrar <i>DNIP</i> más significativas en que <i>ZFA</i> tiene mayor <i>NIP</i> , mientras que para valores bajos aumenta la frecuencia de <i>DNIP</i> no significativas.
Costo fijo unitario por pendientes (p)	A medida que el parámetro disminuye su valor se vuelve más frecuente encontrar <i>DNIP</i> más significativas en que <i>ZFA</i> tiene mayor <i>NIP</i> , mientras que para valores altos aumenta la frecuencia de <i>DNIP</i> no significativas.
Costo fijo unitario por inventario (h)	A medida que el parámetro aumenta su valor se vuelve más frecuente encontrar <i>DNIP</i> más significativas en que <i>ZFA</i> tiene mayor <i>NIP</i> , mientras que para valores altos aumenta la frecuencia de <i>DNIP</i> no significativas.

En general, resulta ser que la configuración *ZFA* presenta un inventario promedio más alto que la configuración *TPA*, lo cual resulta intuitivo considerando que, también, es el que mejor niveles de servicio entrega. Igualmente puede resultar intuitivo que los escenarios que hacen más frecuente las diferencias de mayor magnitud en el nivel de servicio sean los que provocan una mayor frecuencia de magnitudes más grandes en la *DNIP*.

Este conjunto de escenarios, los que favorecen las diferencias de mayor magnitud, comparten un espacio común con aquellos que potencian las mayores *DCPP*. Una revisión a un grupo de estos escenarios reveló que la metodología *TPA* tenía un costo más alto principalmente por que el costo adicional proveniente de un mayor número de pendientes y un mayor número de pedidos de abastecimiento era mayor que el ahorro acumulado procedente de administrar un nivel de inventario menor.

Más información sobre los subconjuntos agrupados según el valor de los distintos parámetros puede encontrarse en el anexo 4.

5 Conclusiones

Se han revisado dos metodologías para el cálculo de los parámetros s y S de una política (s, S, R) , el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* y *The Power Approximation*. Para ambas se pudo implementar los algoritmos de cálculo y se consiguió determinar los parámetros correspondientes para un conjunto de escenarios amplio. *The Revised Power Approximation* mostró ser consistente en resolver el problema en tiempos siempre acotados, inferiores a 0.3⁶ segundos, mientras el *Algoritmo de Zheng y Federgruen*, si bien, logra resolver el problema de determinar los parámetros en tiempos similares, e incluso inferiores, a los de *The Revised Power Approximation* en más del 75% de los casos estudiados, este método no garantiza una resolución rápida, y es posible que, en ciertos escenarios, el tiempo de cálculo necesario sea mucho mayor que la media esperada para el otro método. Los resultados muestran que valores altos de μ , τ y K_0 , así como valores bajos de h y p , hacen más probable que los tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* sean mayores.

En lo referente al desempeño en costo de largo plazo (o, equivalentemente, el *CPP*) del inventario administrado bajo una configuración o la otra, los resultados muestran que, si bien puede existir diferencias mayores a 1000%, lo más frecuente es encontrar diferencias relativamente pequeñas, y en donde los parámetros determinados por *The Revised Power Approximation* no producen costos excesivamente mayores. Se observó que se daban diferencias de gran magnitud con mayor frecuencia cuanto más alto es el valor de h y cuanto más bajo es el valor de p , como también cuando los valores de la demanda son muy pequeños, en particular, cuando no hay demanda todos los periodos y por tanto la demanda media es menor a 1.

En relación al nivel de servicio, los resultados muestran que la configuración del inventario que usa los parámetros calculados con *The Revised Power Approximation* presenta mejores desempeños en el nivel de servicio con muy baja frecuencia (con menos del 8% de los casos mostrando 3 o más puntos porcentuales de diferencia cuando la configuración *TPA* se desempeña mejor), por lo que cabe esperar con mucha mayor certeza que el uso de esta configuración de parámetros s y S conlleve un deterioro del nivel de servicio con respecto al que podría esperarse de utilizar la configuración *ZFA*. Este deterioro puede ser significativo y bastante frecuente. El estudio mostró un 40% de los casos con diferencias de más de 3 puntos porcentuales en desmedro al utilizar la configuración *TPA* en vez de la *ZFA*. Además, se identificó que se vuelve más probable que la magnitud de esta diferencia sea mayor cuanto mayor es el valor de h y en menor medida el valor de K_0 , y además, es mayor cuanto menor es el valor de p . También se observó que existirán diferencias significativas cuando el valor de μ es menor a una unidad por periodo.

En relación al nivel de inventario promedio, los resultados muestran que la configuración que usa los parámetros calculados con *The Revised Power Approximation* presenta un nivel de inventario promedio igual o más bajo al que presenta la configuración *ZFA* con una alta frecuencia (en más del 80% de los casos). Esto es concordante con la diferencia de desempeño

⁶ Los cálculos se hicieron en un computador con un procesador i3 de Intel, 4 megabytes de memoria RAM y sistema operativo Windows 7 instalado.

en el nivel de servicio entre ambas configuraciones dado que niveles de inventario más bajos afectan directamente el nivel de servicio, pero, no es trivial, e incluso resulta contra intuitivo, que además se consigan mejores costos de largo plazo, lo que también ocurre. Los mismos resultados muestran que las diferencias típicas esperables se encuentran en un rango más bien acotado, aunque, nuevamente, es posible encontrar diferencias de magnitudes mayores. Estas diferencias de mayor magnitud son más frecuentes en la medida que los valores de K_0 y τ aumentan su valor. Además, tanto los valores muy bajos de h y muy altos de p pueden provocar diferencia de magnitudes mayores, ya que tienen el efecto de aumentar el rango en el cual estas pueden encontrarse. Es interesante que estas variaciones en los parámetros pueden provocar que sea la configuración *TPA* la que presente mejor *NIP*, pero esto es considerablemente menos frecuente. También el aumento de μ provoca un estrechamiento del rango en que las diferencias pueden encontrarse.

Es importante mencionar que optar por utilizar el *Algoritmo de Zheng y Federgruen* requiere contar con información detallada sobre la forma en que se distribuye la demanda, en particular la función de distribución de la misma, y esta información no siempre está disponible o es fácil de estimar, además, la implementación del algoritmo no es trivial. Por su parte, *The Revised Power Approximation* requiere solo los primeros momentos de la distribución de probabilidad de la demanda, fáciles de estimar con una base de observaciones (que típicamente se tienen), además la implementación del algoritmo de resolución es sencilla. Estas características, junto con la calidad de sus aproximaciones, cuando los valores de los parámetros son moderados, hacen que se presente como una buena alternativa.

Por último, habiendo identificado que *The Revised Power Approximation* presenta buenas aproximaciones solo en un rango acotado de los valores para los parámetros de entrada para el método, y considerando que esta metodología es una interpolación de valores en base a una grilla de valores óptimos, resulta de interés la idea de extender *The Revised Power Approximation* a un rango de interpolación más amplio ampliando la grilla usada para el cálculo de los coeficientes del método.

Bibliografía

Arrow, K. J.; Harris, T.; Marschak, J. (1951). **Optimal Inventory Policy**. *Econometrica*, Volumen 29, Número 3, p. 250-272.

Scarf, H. (1960). **The Optimality of (S; s) Policies in the Dynamic Inventory Problem**. Capítulo 13, en *Mathematical Methods in the Social Sciences*, editado por Arrow, K. J.; Karlin, S.; Suppes, P. Stanford University Press, Stanford, CA.

Iglehart, D. (1963). **Optimality of (s, S) Policies in the Infinite Horizon Dynamic Inventory Problem**. *Management Science*, Volumen 9, Número 2, p. 259-267.

Veinott, A.; Wagner H. M. (1965). **Computing Optimal (s, S) Inventory Policies**. *Management Science*, Volumen 11, Número 5, p. 525-552.

Veinott, A. (1966). **On the Optimality of (s, S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof**. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Volumen 14, Número 5, p. 1067-1083.

Ehrhardt, R. (1979). **The Power Approximation for Computing (s, S) Inventory Policies**. *Management Science*, Volumen 25, Número 8, p. 777-786.

Ehrhardt, R.; Mosier, C. (1984). **A Revision of the Power Approximation for Computing (s, S) Policies**. *Management Science*, Volumen 30, p. 618-622.

Federgruen, A.; Zipkin, P. (1984). **An efficient algorithm for computing optimal (s, S) policies**. *Operations Research*, Volumen 32, Número 6, p.1268-1285.

Caplin, A. S. (1985). **The Variability of Aggregate Demand with (S, s) Inventory Policies**. *Econometrica*, Volumen 53, Número. 6, p. 1395-1409.

Vignaux, G. A.; Jain, S. (1988). **An Approximate Inventory Model Based on Dimensional Analysis**. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, Volumen 5, Número 2, p. 117-123.

Zheng, Y. S.; Federgruen, A. (1991). **Finding Optimal (s, S) Policies is About as Simple as Evaluating a Simple Policy**. *Operations Research*, Volumen 39, Número 4, p. 654-665.

Zheng, Y. S. (1991). **A Simple Proof for Optimality of (s, S) Policies in Infinite Horizon Inventory Systems**. *Journal of Applied Probability*, Volumen 28, pp. 802-810.

Zheng, Y. S.; Federgruen, A. (1992). **Corrections to “Finding Optimal (s, S) Policies is About as Simple as Evaluating a Single Policy”**. *Operations Research*, Volumen 40, Número 1, p. 192.

Lee, H. L.; Nahmias, S. (1993). **Single-product, single-location models**. En *Handbooks in OR & MS*, Volumun 4, Ediciones S. C. Graves et al., Elsevier Science Publishing, North Holland.

Nahmias, S. (2005). **Production and Operations Analysis**. Quinta edición, McGraw-Hill/Irwin.

Anexos

Anexo 1 — Gráficos de percentiles y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen*

Las figuras A1.1, A1.2, A1.3 y A1.4 muestran gráficos de percentiles apilados construidos para los subconjuntos hechos a partir de dividir el conjunto de observaciones de los tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de los parámetros τ , μ , h y p , respectivamente. El efecto observado es similar al descrito anteriormente, a medida que el valor de los parámetros τ o μ aumenta, o el de los parámetros h o p disminuye, se observa que la distribución de los tiempos observados es menos homogénea, presentan una mediana y media más alta, y al definir un valor crítico, es más frecuente encontrar casos con tiempos de cálculo superiores a dicho valor.



Figura A1.1 – Gráfico de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de μ

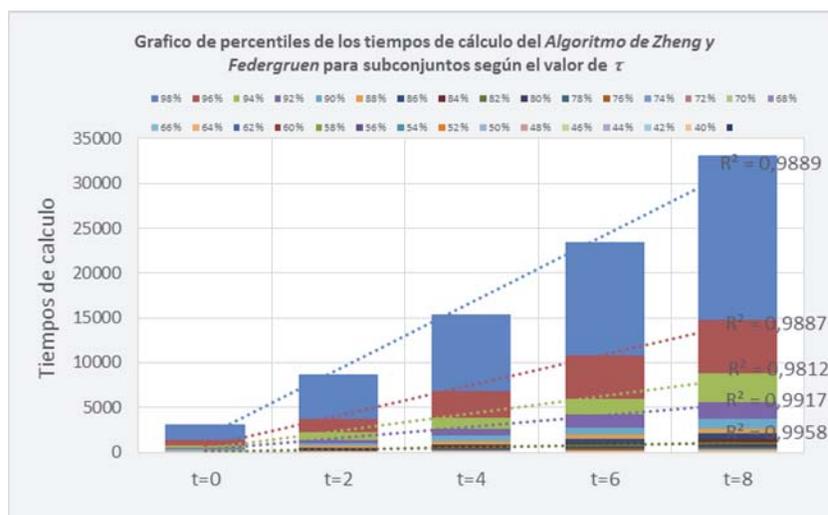


Figura A1.2 – Gráfico de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de τ

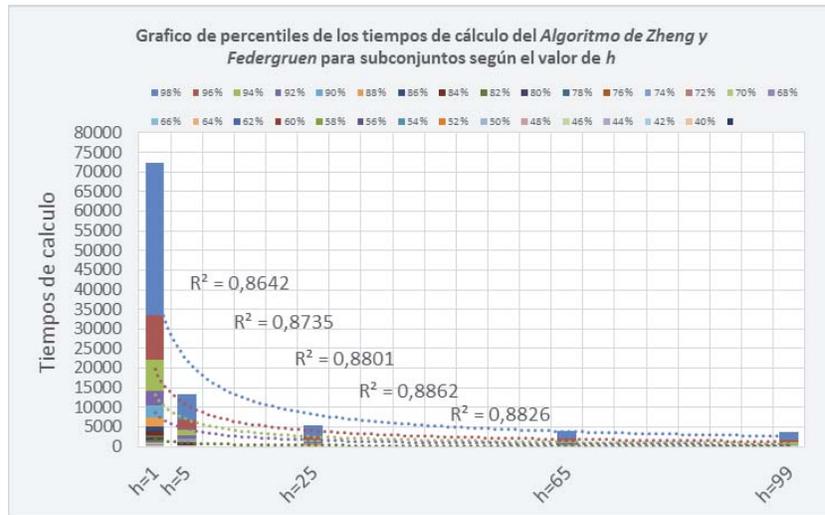


Figura A1.3 – Gráfico de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del Algoritmo de Zheng y Federgruen según el valor de h

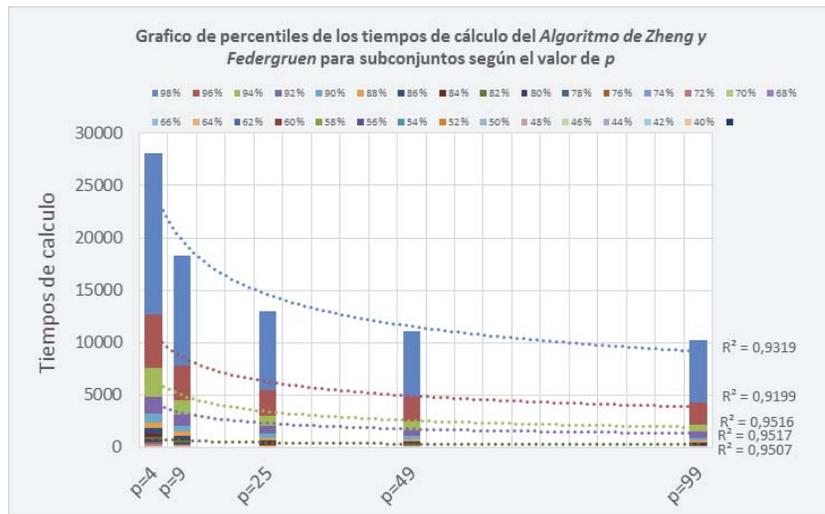


Figura A1.4 – Gráfico de percentiles de los conjuntos de tiempos de cálculo del Algoritmo de Zheng y Federgruen según el valor de p

Las tablas A1.1, A1.2, A1.3 y A1.4, a continuación, muestran las medidas descriptivas de estos subconjuntos, se observa lo ya mencionado, una mediana y media más alta, como también el aumento de la dispersión en el conjunto producto del ensanchamiento de sus percentiles. Se aprecia que el valor mínimo permanece constante, mientras que el valor máximo (y en general cualquier percentil que se seleccione) aumenta.

Tabla A1.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de μ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\mu=496$	0	348.368	1.685	47	12.780	36.721	2,87	5,42	33,64
$\mu=272$	0	155.913	748	0	5.913	17.376	2,94	5,32	31,58
$\mu=149$	0	94.307	344	0	3.129	9.938	3,18	5,55	34,60
$\mu=82$	0	37.656	172	0	1.412	4.089	2,90	5,08	29,30
$\mu=45$	0	15.618	94	0	782	2.064	2,64	4,43	21,64
$\mu=25$	0	7.163	52	0	401	983	2,45	4,12	18,56
$\mu=14$	0	2.974	32	0	190	425	2,24	3,88	16,53
$\mu=7,4$	0	1.192	25	0	86	179	2,09	3,71	15,08
$\mu=4,1$	0	468	10	0	40	77	1,94	3,44	12,86
$\mu=2,2$	0	207	3	0	18	35	1,92	3,18	11,15
$\mu=1,2$	0	105	2	0	10	18	1,92	2,79	8,42
$\mu=0,67$	0	64	0	0	4	10	2,30	2,96	8,84
$\mu=0,37$	0	32	0	0	2	7	2,89	3,64	12,14
$\mu=0,20$	0	32	0	0	1	5	3,49	5,16	27,76
$\mu=0,11$	0	32	0	0	1	4	4,91	7,23	52,77

Tabla A1.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de τ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\tau=0$	0	28.740	4	0	313	1.756	5,61	10,26	121,54
$\tau=2$	0	85.931	13	0	850	4.893	5,76	11,22	148,55
$\tau=4$	0	161.262	20	0	1.530	8.900	5,82	11,53	157,87
$\tau=6$	0	250.001	30	0	2.356	13.729	5,83	11,66	161,84
$\tau=8$	0	348.368	32	0	3.208	18.608	5,80	11,72	165,16

Tabla A1.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de h

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$h=1$	0	348.368	79	0	5.902	24.216	4,10	7,62	71,66
$h=5$	0	92.353	30	0	1.154	4.956	4,30	9,49	122,54
$h=25$	0	50.790	9	0	490	2.379	4,85	11,72	187,72
$h=65$	0	41.148	5	0	370	1.884	5,10	12,37	205,88
$h=99$	0	39.149	4	0	341	1.764	5,17	12,64	214,88

Tabla A1.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de tiempos de cálculo del *Algoritmo de Zheng y Federgruen* según el valor de p

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
p=4	0	348.368	32	0	2.505	14.785	5,90	14,53	273,97
p=9	0	276.037	26	0	1.797	11.756	6,54	15,12	286,13
p=25	0	241.192	14	0	1.424	10.207	7,17	15,70	302,31
p=49	0	228.293	11	0	1.299	9.579	7,37	15,70	302,68
p=99	0	238.872	10	0	1.232	9.617	7,81	16,58	336,76

Anexo 2 — Gráficos de percentiles y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de *DCPP*

Las figuras A2.1, A2.2, A2.3 y A2.4 muestran gráficos de percentiles apilados construidos para los subconjuntos hechos a partir de dividir el conjunto de observaciones de las *DCPP* (diferencias en el costo promedio por periodo) según el valor de los parámetros μ , τ , h y p , respectivamente.

En el gráfico de la figura A2.2 hay que considerar que la separación entre barras representan incrementos exponenciales del valor del parámetro, con esto en cuenta se observa que para los valores pequeños del parámetro los percentiles decrecen rápidamente al aumentar el valor de este, y una vez alcanzado el punto de inflexión de esta variación, alrededor del valor de 25 unidades de demanda por periodo, se aprecia un crecimiento muy lento (aproximadamente lineal) con el aumento de μ .

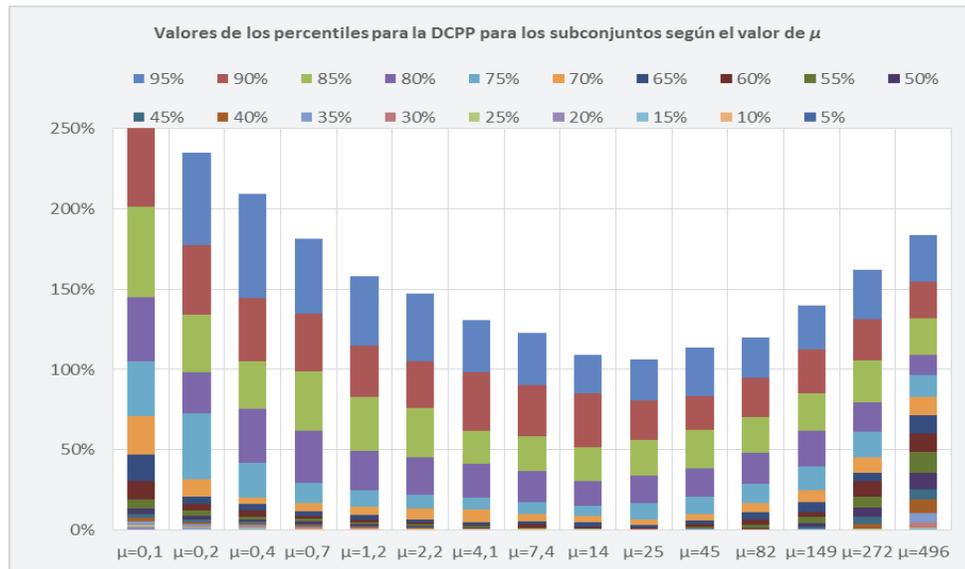


Figura A2.1 – Gráfico de percentiles de los conjuntos de *DCPP* según el valor de μ

Como se aprecia en la figura A2.2, en la página siguiente, la variación del valor del parámetro τ , en el rango propuesto para el estudio, produce pequeños cambios en los tamaños de los percentiles del conjunto de observaciones correspondiente, con los más notorios en percentiles más altos. Con todo, el efecto es pequeño, y en general, el valor de los otros parámetros resulta más influyente en la magnitud de la *DCPP*.

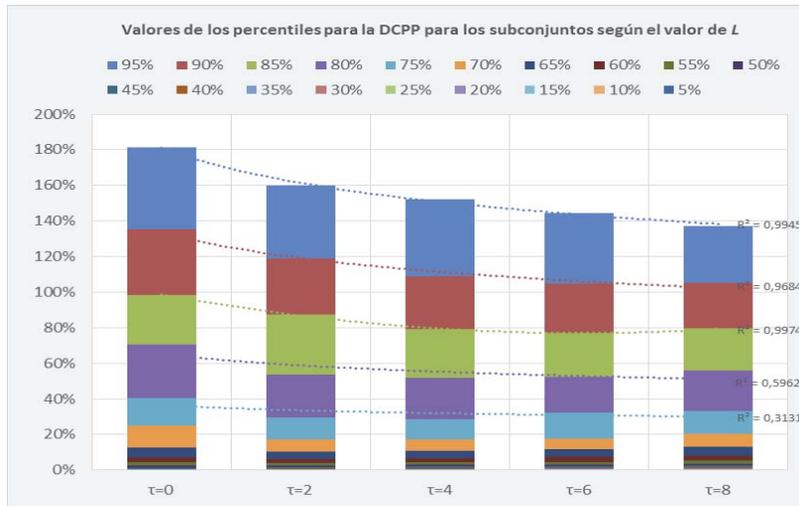


Figura A2.2 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de *DCPD* según el valor de τ

La variación del valor del parámetro h tiene un efecto en la distribución de las *DCPD* del mismo tipo que el visto para la variación del valor de K_0 aunque de mayor magnitud. En la figura número A2.3 puede verse que al aumentar el valor del parámetro h los gráficos de percentiles presentan cuartiles de rangos más anchos, los cuales se incrementan a un ritmo logarítmico con la variación del parámetro.

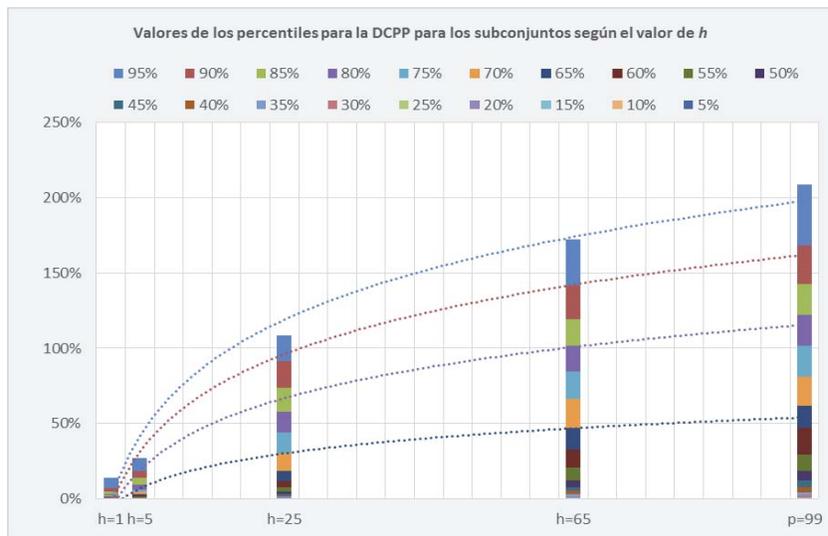


Figura A2.3 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de *DCPD* según el valor de h

La figura A2.4, en la página siguiente, representa los subconjuntos hechos para el parámetro p , se puede apreciar, una fuerte influencia, del valor de este, en la forma en que se distribuyen las *DCPD*. Los conjuntos de escenarios en que es menor el valor del parámetro p tienen una *DCPD* más dispersa, con percentiles notablemente más anchos, se aprecia una relación de proporcionalidad inversa entre el valor de p y el valor de los percentiles de la

distribución del *DCPP*, pudiendo esperarse valores más bajos para esta entre mayor es el valor de p .

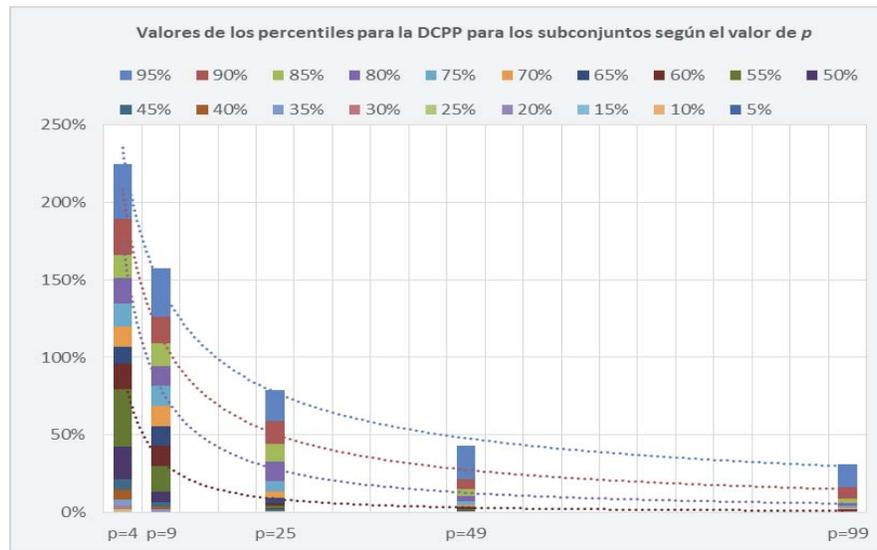


Figura A2.4 – Gráficos de percentiles de los conjuntos de *DCPP* según el valor de p

Las tablas A2.1, A2.2, A2.3 y A2.4 muestran las medidas descriptivas de estos subconjuntos.

Tabla A2.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DCPP* valor de μ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\mu=496$	0%	255%	35,0%	0,0%	57%	61%	1,08	1,00	0,09
$\mu=272$	0%	231%	13,8%	0,0%	39%	53%	1,36	1,46	1,18
$\mu=149$	0%	207%	4,0%	0,0%	29%	46%	1,58	1,71	1,91
$\mu=82$	0%	185%	1,3%	0,0%	24%	40%	1,71	1,84	2,41
$\mu=45$	0%	170%	0,6%	0,0%	20%	37%	1,81	1,95	2,76
$\mu=25$	0%	153%	0,5%	0,0%	19%	36%	1,91	2,05	3,18
$\mu=14$	0%	171%	0,4%	0,0%	19%	37%	1,94	2,20	4,12
$\mu=7,4$	0%	193%	0,7%	0,0%	21%	41%	1,91	2,20	4,18
$\mu=4,1$	0%	203%	1,5%	0,0%	24%	44%	1,88	2,16	3,94
$\mu=2,2$	0%	219%	2,8%	0,0%	26%	48%	1,83	2,09	3,52
$\mu=1,2$	0%	248%	3,7%	0,0%	29%	51%	1,78	2,09	3,59
$\mu=0,7$	0%	335%	5,4%	0,0%	34%	60%	1,76	2,15	4,10
$\mu=0,4$	0%	607%	6,5%	0,0%	42%	78%	1,87	2,98	11,62
$\mu=0,2$	0%	812%	8,8%	0,0%	57%	114%	1,99	3,56	15,40
$\mu=0,1$	0%	1293%	13,0%	0,0%	103%	211%	2,05	3,15	10,28

Tabla A2.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DCPP* valor de τ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\tau=0$	-0,2%	1293%	2,4%	0,0%	43%	109%	2,55	6,19	50,48
$\tau=2$	-0,1%	1112%	2,5%	0,0%	34%	81%	2,36	5,82	51,36
$\tau=4$	-0,2%	795%	3,0%	0,0%	30%	61%	2,03	4,41	35,14
$\tau=6$	-0,2%	918%	3,1%	0,0%	30%	62%	2,07	5,25	49,61
$\tau=8$	-0,4%	875%	3,7%	0,0%	30%	63%	2,06	5,69	56,51

Tabla A2.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DCPP* valor de h

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$h=1$	0%	113%	0,4%	0,0%	3%	8%	2,88	6,84	61,19
$h=5$	0%	122%	0,8%	0,0%	6%	13%	2,14	4,18	22,73
$h=25$	0%	871%	4,9%	0,0%	28%	48%	1,75	6,02	79,45
$h=65$	0%	1112%	12,2%	0,0%	52%	88%	1,71	4,94	40,28
$h=99$	0%	1293%	18,6%	0,0%	65%	110%	1,70	4,63	32,85

Tabla A2.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DCPP* valor de p

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$p=4$	0%	1206%	42,0%	0,0%	83%	116%	1,40	3,96	25,64
$p=9$	0%	1293%	13,4%	0,0%	51%	93%	1,82	6,10	56,01
$p=25$	0%	881%	2,8%	0,0%	20%	53%	2,67	9,02	114,73
$p=49$	0%	326%	1,1%	0,0%	8%	22%	2,57	6,71	70,68
$p=99$	0%	323%	0,5%	0,0%	6%	21%	3,16	8,17	95,34

Anexo 3 — Gráficos de frecuencia relativa y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de *DNS*

Las figuras A3.1, A3.2, A3.3, A3.4 y A3.5 muestran gráficos de frecuencia relativa contruidos para los subconjuntos hechos a partir de dividir el conjunto de observaciones de las *DNS* (diferencias en el nivel de servicio) según el valor de los parámetros K_0 , μ , τ , h y p , respectivamente.

Como se muestra en la figura A3.1, un valor de K_0 cercano a cero muestra una muy alta frecuencia de *DNS* pequeñas (y no significativas al revisarlas caso a caso), frecuencia que disminuye rapidamente, en favor de un mejor nivel de servicio para la configuracion *ZFA*, al aumentar el valor del parametro. Luego, al seguir aumentando K_0 el efecto es muy leve, lo que muestra la sensibilidad de la *DNS* a valores bajos de K_0 más que al valor del parametro.

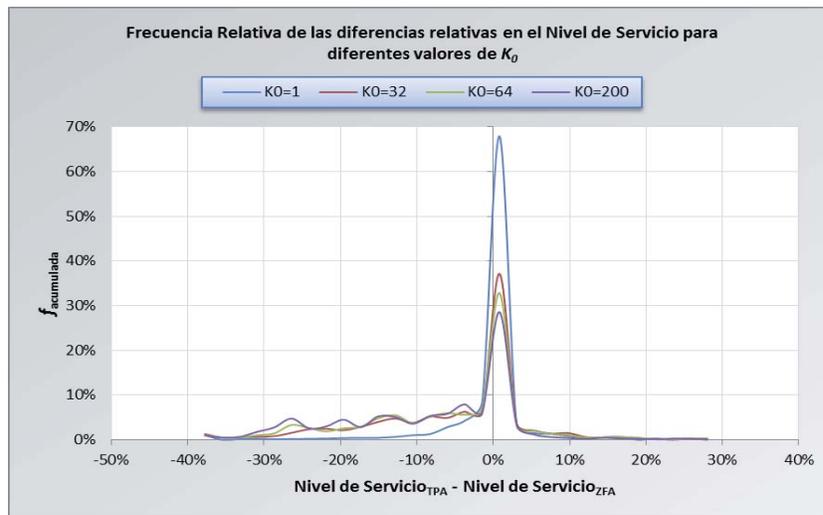


Figura A3.1 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNS* según el valor de K_0

En la figura A3.2, se aprecia que para valores bajos de μ es para los que menores *DNS* se obserbn, además, para valores de μ menores a 1 unidad por periodo, las diferencias que pueden verse son positivas, es decir en donde *TPA* tiene mejor nivel de servicio, lo que revisando los casos pudo asociarse a escenarios con costes de inventario más altos que los costes de pendientes, y por lo que empeorar el nivel de servicio hubiera bajado el costo de largo plazo. Ahora, al aumentar los valores de μ , disminuye la frecuencia de *DNS* no significativas, y aumenta la frecuencia de diferencias negativas, en donde el nivel de servicio de la configuracion *ZFA* resulta mejor, revisando estos casos, el costo de inventaro era relativamente bajo y era, en terminos de costo, preferile inventariar que pagar pendientes.

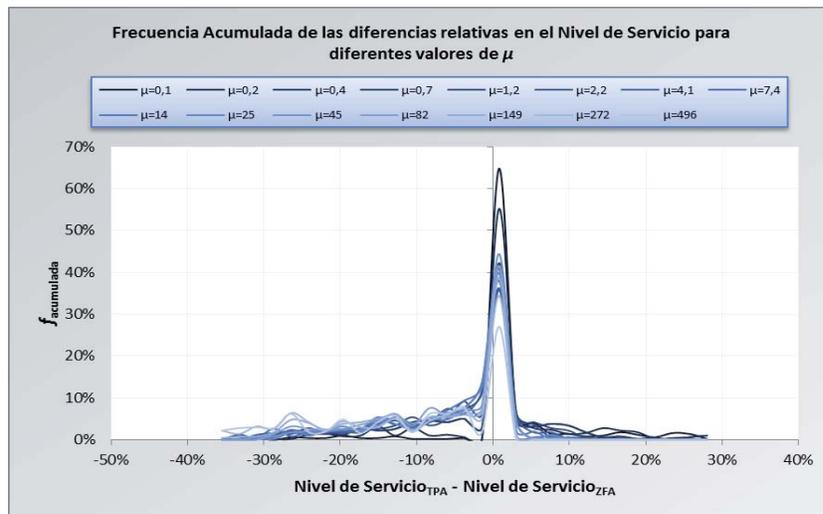


Figura A3.2 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNS* según el valor de μ

En la figura A3.3, se observa que existen diferencias en la frecuencia de las *DNS* de los subconjuntos, y que estas son comparables a las que se ven para los otros parámetros, incluso siendo el rango en que varía τ mucho menor. Un primer impulso sería considerar que este parámetro tendrá una gran repercusión en las diferencias esperadas si toma valores altos, pero es raro que el *lead time* tome estos valores, sobre todo al estar medido en términos de periodos de demanda. Ahora, en el rango estudiado, al aumentar el valor de τ se aprecia una menor frecuencia de *DNS* no significativas asociado a un mayor número de diferencias en que la metodología *ZFA* tiene mejor nivel de servicio, pero este cambio es menor y la diferencia en la distribución de las *DNS* es muy baja en relación a los otros parámetros.

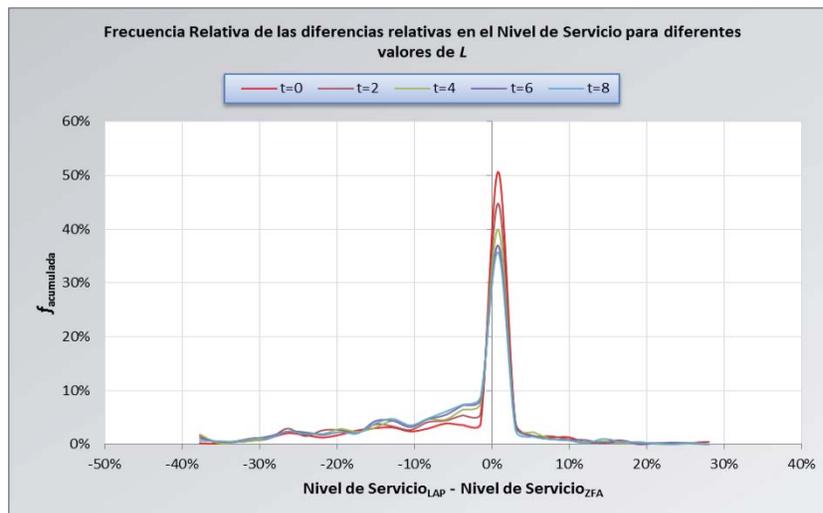


Figura A3.3 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNS* según el valor de τ

Las variaciones del valor de h también influyen en la forma en que se distribuyen las observaciones de los subconjuntos respectivos al valor de este parámetro. En la figura A3.4 se

observa que el efecto más notorio está relacionado con la frecuencia de *DNS* de magnitud cero o en su entorno, la cual disminuye con el aumento del valor de h , además, aumenta la frecuencia de diferencias en que la metodología *ZFA* tiene mejor nivel de servicio.

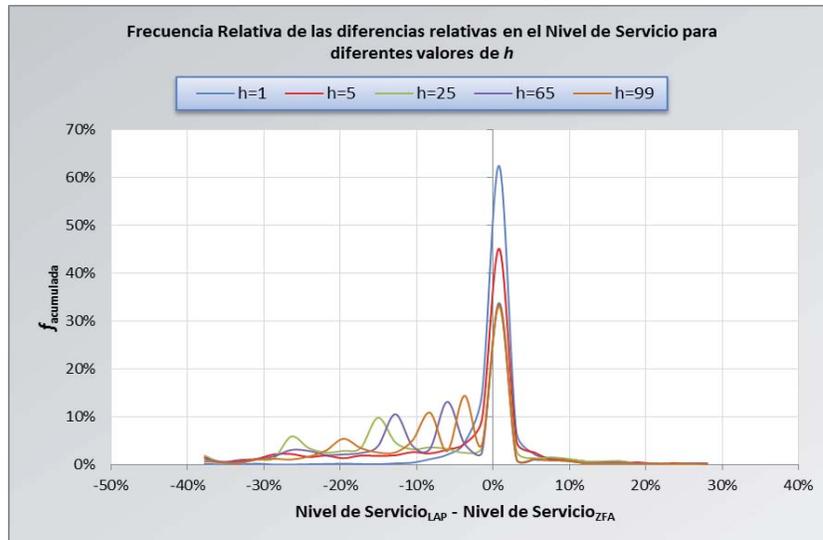


Figura A3.4 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNS* según el valor de h

La figura A3.5 muestra el gráfico de frecuencias relativas de las *DNS* de los subconjuntos hechos para los distintos valores de h . Puede verse que las curvas asociadas a los conjuntos donde el valor de h es mayor presentan mayor frecuencias de diferencias de valor cercano a cero, y para valores altos del parámetro aumenta la frecuencia de diferencias en que la metodología *ZFA* tiene mejor nivel de servicio

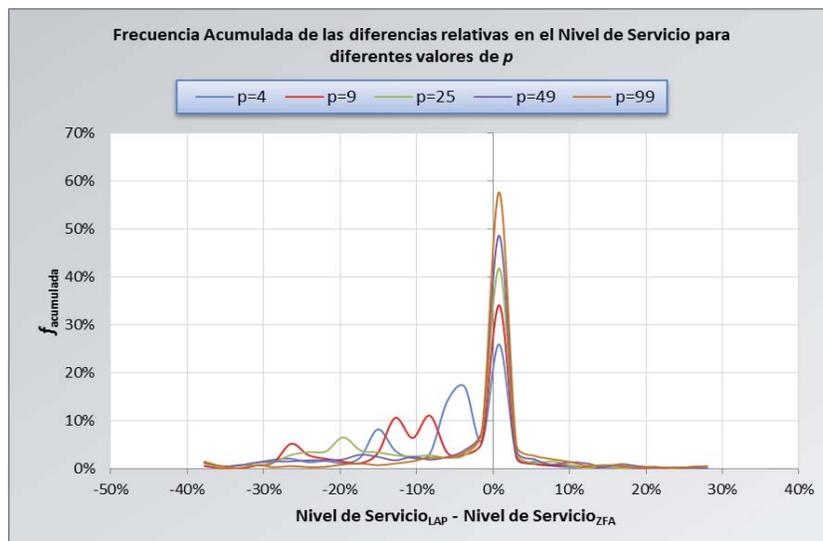


Figura A3.5 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNS* según el valor de p

Las tablas A3.1, A3.2, A3.3, A3.4 y A3.5 muestran las medidas descriptivas de estos subconjuntos.

Tabla A3.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNS* según el valor de K_0

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$K_0=1$	-256,8%	896,8%	0,0%	0,0%	20,2%	102,3%	5,07	5,52	34,50
$K_0=32$	-330,2%	893,6%	-0,4%	0,0%	23,9%	113,2%	4,73	4,77	26,85
$K_0=64$	-340,2%	1341,3%	-0,9%	0,0%	25,7%	131,4%	5,10	4,94	29,79
$K_0=200$	-368,5%	1827,5%	-2,2%	0,0%	33,4%	201,4%	6,02	5,14	31,62

Tabla A3.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNS* según el valor de μ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\mu=496$	-51%	2%	-9,8%	0,0%	-14%	14%	-0,99	-0,71	-0,69
$\mu=272$	-40%	2%	-5,9%	0,0%	-10%	11%	-1,11	-0,77	-0,74
$\mu=149$	-35%	17%	-2,9%	0,0%	-7%	9%	-1,26	-0,87	-0,31
$\mu=82$	-30%	5%	-1,6%	0,0%	-6%	8%	-1,33	-1,18	0,34
$\mu=45$	-30%	9%	0,0%	0,0%	-5%	8%	-1,59	-1,36	1,02
$\mu=25$	-33%	8%	-0,3%	0,0%	-4%	7%	-1,67	-1,42	1,38
$\mu=14$	-32%	11%	-0,6%	0,0%	-5%	8%	-1,64	-1,35	1,24
$\mu=7,4$	-31%	11%	-0,6%	0,0%	-5%	8%	-1,62	-1,38	1,21
$\mu=4,1$	-36%	16%	-0,4%	0,0%	-5%	9%	-1,81	-1,34	1,33
$\mu=2,2$	-43%	30%	-0,2%	0,0%	-4%	9%	-2,03	-1,16	2,08
$\mu=1,2$	-41%	51%	0,0%	0,0%	-4%	10%	-2,83	-0,25	4,38
$\mu=0,7$	-41%	70%	0,0%	0,0%	-1%	12%	-8,86	1,38	10,18
$\mu=0,4$	-45%	83%	0,0%	0,0%	0%	13%	27,20	1,92	12,61
$\mu=0,2$	-35%	90%	0,0%	0,0%	4%	15%	4,30	2,29	10,03
$\mu=0,1$	-39%	95%	0,0%	0,0%	7%	18%	2,58	2,59	8,21

Tabla A3.3 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNS* según el valor de τ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\tau=0$	-45,3%	95%	0,0%	0,0%	-2%	15%	-6,32	2,40	14,12
$\tau=2$	-39,1%	76%	0,0%	0,0%	-4%	12%	-2,82	1,19	10,05
$\tau=4$	-40,8%	62%	-0,2%	0,0%	-5%	11%	-2,36	0,41	5,63
$\tau=6$	-45,7%	50%	-0,8%	0,0%	-6%	11%	-1,97	-0,55	2,60
$\tau=8$	-51,5%	40%	-1,5%	0,0%	-6%	11%	-1,87	-0,89	2,43

Tabla A3.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNS* según el valor de *h*

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
h=1	-47,7%	94,4%	0,0%	0,0%	0,3%	5,5%	18,62	3,37	73,62
h=5	-51,2%	94,5%	0,0%	0,0%	-3,6%	13,3%	-3,69	0,65	8,19
h=25	-51,5%	94,7%	-2,8%	0,0%	-6,8%	15,5%	-2,29	1,57	9,07
h=65	-50,3%	82,8%	-5,7%	0,0%	-6,7%	12,6%	-1,88	1,01	7,97
h=99	-45,4%	70,2%	-4,0%	0,0%	-6,1%	10,9%	-1,78	0,64	7,16

Tabla A3.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNS* según el valor de *p*

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
p=4	-47,7%	94,4%	-4,3%	0,0%	-6,7%	10,7%	-1,60	0,48	10,64
p=9	-51,2%	90,4%	-4,9%	0,0%	-6,7%	11,2%	-1,67	0,91	9,68
p=25	-46,2%	94,5%	-0,1%	0,0%	-6,2%	12,6%	-2,05	0,48	5,65
p=49	-51,5%	94,3%	0,0%	0,0%	-3,3%	13,3%	-4,07	0,93	9,72
p=99	-50,3%	94,7%	0,0%	0,0%	-0,1%	12,5%	-89,28	1,59	15,02

Anexo 4 — Gráficos de frecuencia relativa y tablas de medidas descriptivas de los subconjuntos de *DNIP*

Las figuras A4.1, A4.2, A4.3, A4.4 y A4.5 muestran gráficos de frecuencia relativa construidos para los subconjuntos hechos a partir de dividir el conjunto de observaciones de las *DNIP* (diferencias en el nivel de inventario promedio) según el valor de los parámetros K_0 , μ , τ , h y p , respectivamente.

Como se muestra en la figura A4.1, se observa algo muy similar a lo visto para la *DNS*, un valor de K_0 cercano a cero muestra una muy alta frecuencia de *DNIP* pequeñas (y no significativas al revisarlas caso a caso), frecuencia que disminuye rápidamente, en favor de un mejor nivel de servicio para la configuración *ZFA*, al aumentar el valor del parámetro. Luego, al seguir aumentando K_0 el efecto es muy leve, lo que muestra la sensibilidad de la *DNS* a valores bajos de K_0 más que al valor del parámetro.

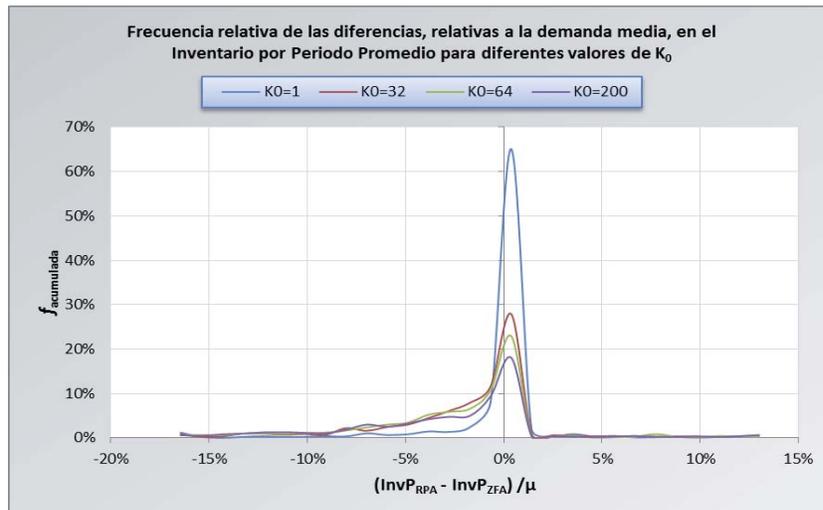


Figura A4.1 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNIP* según el valor de K_0

En la figura A4.2, nuevamente muestra algo muy similar a lo visto para la *DNS* se aprecia que para valores bajos de μ es para los que menores *DNS* se observan. Al aumentar los valores de μ , disminuye la frecuencia de *DNS* no significativas, y aumenta la frecuencia de diferencias negativas, en donde el nivel de servicio de la configuración *ZFA* resulta mejor.

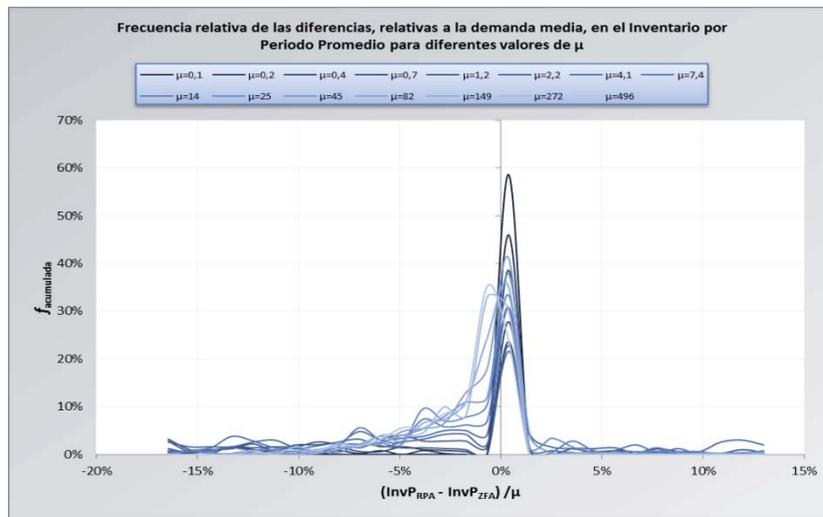


Figura A4.2 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNIP* según el valor de μ

En la figura A4.3, se observa que a medida que el parámetro aumenta su valor se vuelve más frecuente encontrar *DNIP* más significativas, en que *ZFA* tiene mayor *NIP*, mientras que para valores bajos aumenta la frecuencia de *DNIP* no significativas.

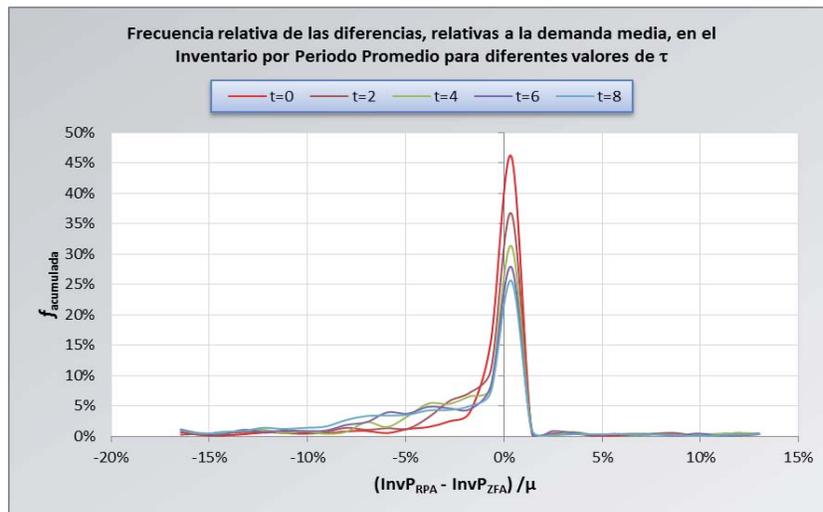


Figura A4.3 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNIP* según el valor de τ

En la figura A4.4, en la página siguiente, se observa que, para h , a medida que el parámetro disminuye su valor, se vuelve más frecuente encontrar *DNIP* más significativas en que *ZFA* tiene mayor *NIP*, mientras que para valores altos aumenta la frecuencia de *DNIP* no significativas. Aun así, la *DNIP* está más afectada sobre todo, por los valores de μ y τ .

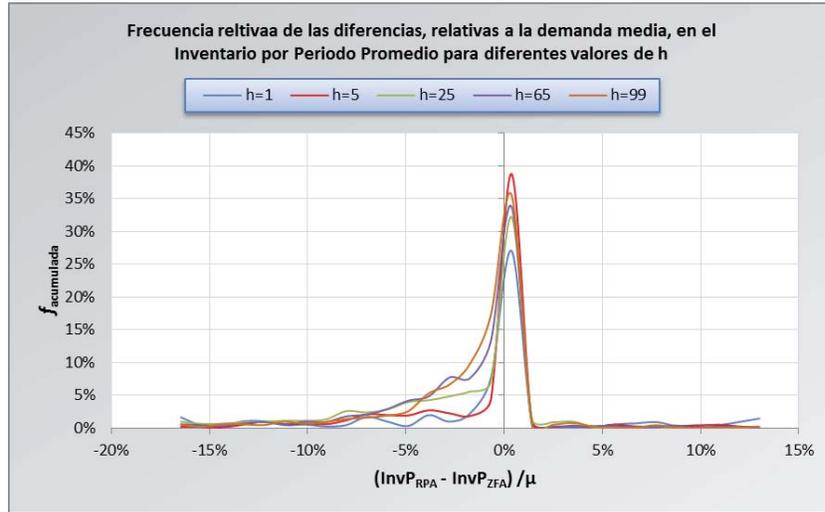


Figura A4.4 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNIP* según el valor de *h*

En la figura A4.5, se observa que, para *p*, a medida que el parámetro disminuye su valor, se vuelve más frecuente encontrar *DNIP* más significativas en que *ZFA* tiene mayor *NIP*, mientras que para valores altos aumenta la frecuencia de *DNIP* no significativas. Aun así, la *DNIP* está más afectada sobre todo, por los valores de μ y τ .

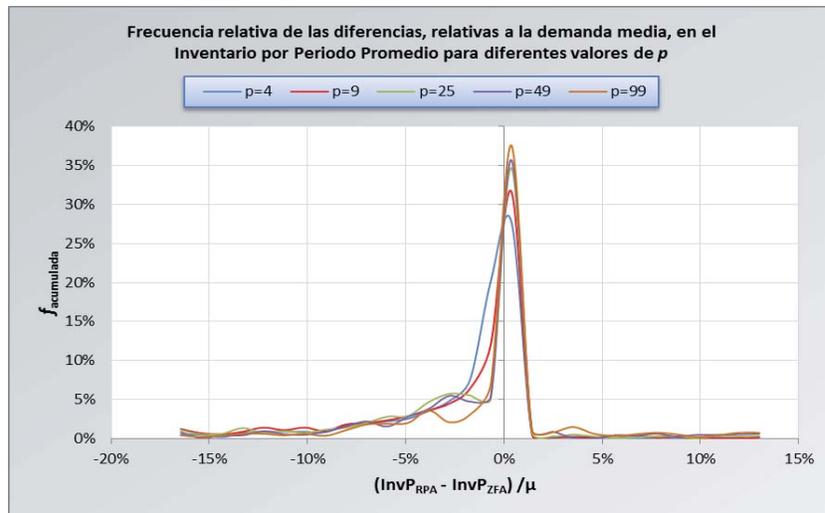


Figura A4.5 – Gráfico de la frecuencia relativa de los conjuntos de *DNIP* según el valor de *p*

Las tablas A4.1, A4.2, A4.3, A4.4 y A4.5 muestran las medidas descriptivas de estos subconjuntos.

Tabla A4.1 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNIP* según el valor de K_0

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$K_0=1$	-256,8%	896,8%	0,0%	0,0%	20,2%	102,3%	5,07	5,52	34,50
$K_0=32$	-330,2%	893,6%	-0,4%	0,0%	23,9%	113,2%	4,73	4,77	26,85
$K_0=64$	-340,2%	1341,3%	-0,9%	0,0%	25,7%	131,4%	5,10	4,94	29,79
$K_0=200$	-368,5%	1827,5%	-2,2%	0,0%	33,4%	201,4%	6,02	5,14	31,62

Tabla A4.2 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNIP* según el valor de μ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\mu=496$	-12,3%	0,2%	-0,7%	0,0%	-1,9%	2,5%	-1,34	-1,77	2,88
$\mu=272$	-11,4%	0,2%	-0,5%	0,0%	-1,7%	2,3%	-1,39	-1,76	2,67
$\mu=149$	-11,9%	29,5%	-0,6%	0,0%	-1,0%	4,1%	-4,09	3,60	22,18
$\mu=82$	-34,6%	44,8%	-0,4%	0,0%	-0,4%	6,8%	-15,95	2,86	20,16
$\mu=45$	-40,1%	29,6%	-0,2%	0,0%	-1,4%	7,9%	-5,79	-1,21	9,83
$\mu=25$	-58,2%	40,1%	-0,5%	0,0%	-2,0%	9,5%	-4,78	-0,91	10,41
$\mu=14$	-41,6%	31,6%	-1,7%	0,0%	-4,6%	10,1%	-2,18	-0,90	2,79
$\mu=7,4$	-56,5%	20,2%	-2,4%	0,0%	-6,5%	11,2%	-1,74	-1,38	2,65
$\mu=4,1$	-72,1%	36,5%	-2,5%	0,0%	-6,8%	14,6%	-2,15	-1,20	2,73
$\mu=2,2$	-94,4%	67,0%	-3,4%	0,0%	-7,0%	21,2%	-3,01	-0,50	2,81
$\mu=1,2$	-130,7%	162,8%	-2,1%	0,0%	-3,9%	36,4%	-9,22	0,42	2,98
$\mu=0,67$	-200,4%	356,7%	0,0%	0,0%	17,3%	72,0%	4,16	1,21	2,93
$\mu=0,37$	-256,8%	540,7%	0,0%	0,0%	46,7%	127,2%	2,72	1,42	2,71
$\mu=0,2$	-308,3%	1003,1%	0,0%	0,0%	121,1%	227,3%	1,88	1,31	1,41
$\mu=0,11$	-368,5%	1827,5%	0,0%	0,0%	239,3%	405,8%	1,70	1,51	1,93

Tabla A4.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNIP* según el valor de τ

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
$\tau=0$	-256,6%	1340,4%	0,0%	0,0%	26,5%	127,5%	4,82	5,97	42,83
$\tau=2$	-330,2%	1798,6%	0,0%	0,0%	26,6%	141,0%	5,30	5,93	44,75
$\tau=4$	-266,8%	1820,5%	-0,2%	0,0%	27,1%	145,0%	5,35	5,55	39,56
$\tau=6$	-301,6%	1734,3%	-0,7%	0,0%	23,4%	142,9%	6,10	5,62	41,36
$\tau=8$	-368,5%	1827,5%	-1,4%	0,0%	25,4%	154,7%	6,08	5,72	45,73

Tabla A4.4 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNIP* según el valor de *h*

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
h=1	-97,1%	1827,5%	0,0%	0,0%	97,5%	247,5%	2,54	3,52	14,69
h=5	-368,5%	897,7%	0,0%	0,0%	24,1%	148,9%	6,18	3,65	16,19
h=25	-278,9%	805,9%	-1,0%	0,0%	6,7%	85,4%	12,71	6,24	48,11
h=65	-266,8%	662,7%	-0,7%	0,0%	1,1%	51,6%	47,72	7,58	82,89
h=99	-211,5%	518,2%	-0,5%	0,0%	-0,3%	36,0%	-118,18	8,34	106,65

Tabla A4.5 – Medidas descriptivas de los conjuntos de *DNIP* según el valor de *p*

	min.	máx.	mediana	moda	\bar{X}	S	coef. de variación	coef. de asimetría	curtosis
p=4	-368,5%	1227,6%	-0,7%	0,0%	1,7%	92,5%	54,92	5,69	53,26
p=9	-207,5%	1768,3%	-0,8%	0,0%	14,7%	126,2%	8,56	6,83	59,82
p=25	-278,9%	1827,5%	-0,1%	0,0%	25,9%	148,4%	5,72	6,18	48,78
p=49	-266,8%	1820,5%	0,0%	0,0%	37,4%	160,4%	4,28	5,21	33,46
p=99	-256,8%	1798,6%	0,0%	0,0%	49,3%	166,9%	3,39	4,68	28,74

Anexo 5 — Cuasi convexidad

Sea S un conjunto no vacío, convexo en \mathbf{R}^n , $f(x)$ es cuasi convexa si, y sólo si:

$$f[\alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}] \leq \max\{f[\mathbf{u}], f[\mathbf{v}]\} \quad \forall \alpha \in (0,1) \wedge \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \wedge f[\mathbf{u}] \neq f[\mathbf{v}]$$

Además, la cuasi convexidad es estricta si, y sólo si:

$$f[\alpha \mathbf{u} + (1 - \alpha)\mathbf{v}] < \max\{f[\mathbf{u}], f[\mathbf{v}]\} \quad \forall \alpha \in (0,1) \wedge \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{v} \wedge f[\mathbf{u}] \neq f[\mathbf{v}]$$