Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

"Descripción de un camino cognitivo para las nociones que subyacen al concepto de relación de equivalencia y partición"

Desde el punto de vista de la teoría APOE.

Trabajo final para optar al grado académico de Magíster en Didáctica de la Matemática.

Dirigido por:

Sr. Arturo Mena Lorca

Presentado por:

Diana Pino Pino.

Valparaíso, julio de 2015

Índice

Agradecimientos

Principalmente agradezco a Dios por darme la motivación, salud, trabajo y entereza que me permitieron seguir adelante con este sueño.

Por permitir disfrutar de mi madre, de su compañía, de su apoyo y amor incondicional, el cual es, sin lugar a dudas, el pilar más grande de mi vida.

Por poner a las personas correctas en mi camino: familia, amigos, colegas y estudiantes; que de forma directa o indirecta fueron gran aporte y por ende partícipes de este proceso.

Por orientar y guiarme en tomar las mejores decisiones, que me llevaron a tener al Profesor Arturo Mena, como maestro y guía de tesis. Agradezco su apoyo, su confianza, su enseñanza y sabios consejos.

Y finalmente, gracias por permitirme valorar y amar la vida, a las personas y cada experiencia vivida.

RESUMEN

La presente investigación muestra cómo estudiantes de enseñanza media –primer y segundo año – manifiestan de manera informal e instintiva, algunas de las propiedades del objeto matemático: “relaciones de equivalencias y particiones”, enfrentados ante situaciones cotidianas, sin tener un conocimiento previo de dichas nociones – al menos de forma explícita–.

Como parte de la verificación de estas nociones; se establece un posible camino de construcción cognitiva y para eso la teoría APOE– (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) desarrollada por E. Dubisnky, basada en las ideas de abstracción reflexiva de J. Piaget – resulta apropiada; en primer lugar por su carácter tanto epistemológico como psicológico y en segundo lugar, porque permite elaborar, a través de una Descomposición Genética Provisoria (DGP), un modelo viable de las nociones reveladas.

Con base en lo anterior, se estableció como diseño metodológico el estudio de caso. Se elaboró una DGP, a partir del análisis teórico propuesto en el ciclo de investigación que este marco proporciona, el cual incluye, dentro de otros: un análisis histórico epistemológico; que da cuenta de la relevancia que han tenido –las relaciones de equivalencia y particiones; y las nociones que la subyacen– en el desarrollo de la matemática y la historia humana en general. Se realizó también un análisis curricular, con un enfoque especial a las bases curriculares de la Educación Parvularia, considerando que es ahí donde comienzan los primeros vínculos formales con las nociones asociadas a los objetos en estudio. Se realizó además la aplicación y análisis de una actividad grupal exploratoria y de una entrevista individual semi-estructurada.

Los resultados del estudio, permiten constatar y modelar la mayoría de las propiedades involucradas en los conceptos de relación de equivalencia y partición. Los estudiantes las manifiestan y utilizan de forma similar a alguien con dominio de los objetos matemáticos.

Palabras clave: Teoría APOE, Relación de equivalencia, partición y clasificación.

ABSTRACT

This research shows how High School Students (first and second level) informally express instinctive, some of the properties of the mathematical object: “Equivalence relations and partitions”, faced everday situations, without a previous knowledge of those functions- at least explicitly-.

As a part of the verification of these notions; it is establishing a possible way of cognitive construction and that the Actions, Processes, Objects and Schemas Theory (APOS) developed by E. Dubinsky, based on the ideas of J. Piaget’s reflective abstraction- It is appropriate; first by both epistemological and psychological and secondly, because it allows elaborate, through a Genetic Descomposition Interim (DPG), a viable model of revealed notions.

Based on the above, it was established as a methodological case study design. A DGP was drafted, from the theoretical analysis proposed in the research cycle that this framework provides, which it includes, within other: epistemological historical analysis; that realizes the relevance they have had- equivalence relations and partitions (ERP); and the underlying notions- in the development of mathematics and history in general. A curriculum analysis was also performed, with a special curricular based of Nursery Education approach, considering that, this is where the first formal links with associations to study objects begin.

The application and analysis of an exploratory group activity was also carried out and semi-structured individual interviews.

The results of the study allow to state and model most of the properties involved in the concepts of ERP. Student demonstrate and use similar to someone with expertise domain of mathematical objects.

Keywords: APOS THEORY- RELATIONSHIP EQUIVALENCE - PARTITION- CLASIFICATION.

INTRODUCCIÓN

Recuerdo que cuando estaba en el colegio estaban de moda ciertos juegos que llamaban la atención, y uno se tentaba a participar pues quien lograba ganarle a niños de cursos superiores marcaría un hito en la historia de la inteligencia humana y por lo tanto una muy buena reputación. Uno de estos juegos se llamaba, “adivina el número”. Un estudiante de un curso superior – gesticulando como un verdadero mago – decía: "Yo puedo adivinar tu edad y tu mes de nacimiento en menos de un minuto; tan sólo necesito que hagas unos simples cálculos: el mes de tu cumpleaños multiplícalo por dos, ahora súmale 5, y a este resultado multiplícalo por 50, súmale tu edad; resta 370 a tu resultado, y ahora dime ¿qué resultado te dio?" ¡Y mágicamente recitaba mi mes de nacimiento y mi edad! Por supuesto que, a la edad de 11 años, todos mis compañeros y yo, con rostros de sorpresa, no podíamos creer lo que sucedía. Simplemente existía el mundo de la magia.

Pues bien, ahora, siendo ya profesora, he sido testigo, utilizando la misma técnica con mis estudiantes en la introducción al contenido de sistemas de ecuaciones, cómo son capaces de utilizar, de forma totalmente inconsciente, propiedades de los sistemas numéricos al desarrollar una ecuación lineal con una incógnita con el objetivo de adivinar números como aquellos de la edad. Y así como con muchos otros contenidos, los estudiantes son capaces de utilizar conceptos matemáticos, en muchos casos avanzados, de forma casi natural e instintiva.

A partir de lo anterior, el presente trabajo está enfocado en la identificación de las propiedades de los conceptos de relación de equivalencia y partición (E-P)[1] que manifiestan estudiantes de enseñanza media enfrentados a situaciones fuera del ámbito escolar, para posteriormente modelar este posible camino cognitivo.

Estos conceptos forman parte del área del álgebra abstracta, cuya enseñanza se encuentra explícitamente dentro del currículo de la Educación Superior de algunas carreras científicas en Chile. De aquí la motivación por los objetos matemáticos de las (E-P): uno podría suponer que ciertos conceptos pueden ser manifestados por estudiantes por el simple hecho de haberlos aprendido en un curso previo, por lo que se mantienen en la consciencia; no obstante, nuestro objeto matemático no es algo que hayan visto de forma explícita en cursos anteriores a la Educación Superior, dado que éstos no se encuentran en los programas de estudio propuestos por el Ministerio de Educación.

La transversalidad de este tópico permite visualizarlo desde dos perspectivas: dentro del ámbito matemático y fuera de él. A esto apunta Mena-Lorca (2011) quien resalta su importancia para el aprendizaje de diversos objetos matemáticos dentro del currículo de educación superior. Declara cómo las (E-P) son desaprovechadas en su enseñanza, pese a que éstas se encuentran de forma copiosa tanto en la propia

[1] Notación que se utilizará, desde ahora, para denotar los conceptos de relación de equivalencia y partición en su representación tanto singular como plural.

matemática como en la vida diaria, y establece que una noción apropiada de este objeto matemático se podría utilizar mejor en diversas áreas, tales como las del trabajo con cocientes en grupos, anillos y otras estructuras, que permiten el estudio de algunos teoremas delicados, como el de isomorfismo de grupos. Además manifiesta que:

> Los objetos del llamado mundo real, no son, en rigor, necesarios para desarrollar una teoría matemática, pero nos interesa declarar al respecto sobre ciertas prácticas sociales que parecen estar en la génesis de estas nociones matemáticas –desde muchos siglos antes de su definición formal en la Matemática, si bien, con las mismas propiedades que ésta abstrajo–. (Mena-Lorca, 2011, p.151).

Precisamente, hacia la génesis de los conceptos matemáticos de las (E-P), es donde apunta nuestra investigación.

Un concepto clave dentro de este origen es la idea de clasificación. Desde el enfoque cognitivo, Castro, Castro y del Olmo (2002) apoyados en las investigaciones de (Piaget e Inhelder, 1976), la señalan como una de las estructuras operatorias básicas del conocimiento, que responden a una serie de características, cuentan con una estructura operatoria y anteceden en su aparición a las clasificaciones matemáticas. La tarea de clasificar elementos de un conjunto cualquiera produce particiones en él y en cada una de éstas se generan relaciones de equivalencia.

A su vez, las relaciones de equivalencia están asociadas a la selección de un criterio o atributo que permita relacionar los elementos. A esto alude Kamii (1994), quien dentro de su investigación define al conocimiento lógico-matemático como uno de los tipos de conocimiento distinguidos por Piaget, que se compone de las relaciones que construye cada individuo al observar dos elementos que podemos diferenciar según un atributo; esta diferencia sería un fundamento de este tipo de conocimiento. Desde esta perspectiva, el aprendizaje de las relaciones lógico-matemáticas las podemos encontrar ya desde los primeros niveles educativos chilenos establecidos en las bases curriculares, desde la Educación Parvularia hasta primero básico, del Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2001). Este aprendizaje contempla la identificación de atributos y propiedades, el desarrollo de distintas relaciones tales como la comparación, el orden y la correspondencia, para luego establecer las relaciones de semejanza y diferencia.

Por otra parte, Mena-Lorca (2011) da cuenta de cómo el tránsito de (E-P) y (P-E)[2] es apoyado, por parte de los individuos, en una noción inconsciente tanto de los conceptos de relación de equivalencia y de partición, cuando se enfrentan ante situaciones cotidianas, e incluso que hacen uso, también de manera inconsciente, del teorema RE/P que liga ambos conceptos. Refiriéndose al teorema del isomorfismo de grupos, señala: “El teorema matemático que denominamos RE/P, tan relevante para nuestro teorema (y tan similar a él) se apoya fuertemente en nociones ingenuas, no

[2] Hace referencia del tránsito de las particiones a las relaciones de equivalencias.

conscientes y espontáneamente aprehendidas del mismo" (Mena-Lorca, 2011, p.170).

Es así como surge el interés de verificar, a través de un estudio de casos, las construcciones y mecanismos mentales que manifiestan estudiantes de primer y segundo año medio en cuanto a estas nociones. Para esto utilizamos la teoría APOE, que constituye un marco *ad-hoc* para explicar cómo los individuos construyen mentalmente la comprensión de los *conceptos matemáticos.*

Precisamente la frase anterior en itálicas obliga a que nuestro trabajo sea una innovación en este marco, debido a que el enfoque de nuestro estudio no se encuentra en los conceptos matemáticos formales de las (E-P), sino en su génesis. Ello manifiesta una carencia de investigaciones que den cuenta de *descomposiciones genéticas* que mostraran un modelo cognitivo acerca de razonamientos que preceden a una noción matemática y que además son manifestadas por los sujetos sin tener consciencia de ello –pero que, sin embargo, las propiedades expresadas corresponden a un objeto matemático–. Esto significó que, en este trabajo, tanto las estructuras como los mecanismos mentales definidas por APOE sufrieran ciertas modificaciones, las que serán fundamentadas en su momento.

La investigación comienza con el Capítulo 1, donde se presentan los antecedentes. Estos incluyen un análisis curricular preescolar, donde se trabaja explícitamente algunos de los conceptos que dan origen a las (E-P); un análisis histórico epistemológico, que nos permiten analizar la evolución y dificultades que han tenido las nociones matemáticas desde sus inicios hasta su estructura formal; además de investigaciones reportadas que incluyen un análisis epistemológico genético e investigaciones relacionadas con el concepto en estudio. Lo que en su conjunto nos llevarán a plantear las preguntas de investigación y a la vez formar parte del análisis teórico del ciclo de investigación de APOE.

En el Capítulo 2 se explicita el marco teórico que sustenta este trabajo, fundamenta la construcción de la DGP y nos proporciona una metodología propia que permite lograr finalmente los objetivos planteados y responder a la pregunta de investigación.

En el Capítulo 3 se exponen la hipótesis y los objetivos de investigación, los que delinearán y proporcionarán un camino viable para la investigación.

El Capítulo 4 se presenta la metodología de investigación: se explicita el ciclo de APOE y la aplicación de sus tres componentes y en función de éstos se desarrollan el diseño y la descripción de la DGP.

En el Capítulo 5, se analizan los resultados de las aplicaciones de los instrumentos, además de la elaboración de la DGP, a partir de éstos se presentan las conclusiones.

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

1.1. Análisis Curricular Chileno

El análisis presentado incluye de forma detallada sólo las bases curriculares de la Educación Parvularia las que incluyen primer año básico. Éstas consideran elementos relevantes para nuestra investigación, que podrían abrir camino y dar algunos argumentos a nuestra hipótesis. Además se muestran de forma explícita algunas de las propiedades que subyacen nuestro objeto de estudio, no así en el currículo de los niveles superiores: Enseñanza Media y Educación Superior.

1.1.1 Componentes estructurales de las bases curriculares en la Educación Parvularia.

Dentro del ámbito *relación con el medio natural y cultural* del currículo está el núcleo de aprendizaje *relaciones lógico-matemáticas y cuantificación,* cuyo objetivo general es:

"Potenciar la capacidad de la niña y el niño de: Interpretar y explicarse la realidad estableciendo relaciones lógico matemáticas y de causalidad; cuantificando y resolviendo diferentes problemas en que éstas se aplican".

Cada núcleo de aprendizaje consta de aprendizajes esperados (AE) que definen lo que se espera que cada niño y niña aprenda.

Nos enfocaremos en los aprendizajes esperados pertinentes a nuestra investigación los cuales se presentan a continuación:

AE 1° CICLO (0-3 años)

- Identificar progresivamente y manifestar sus preferencias por algunos atributos y propiedades de los objetos que explora: textura, peso, volumen, sonidos y movimientos entre otros.
- Identificar en diferentes objetos propiedades tales como: forma, tamaño, peso, volumen, para establecer comparaciones.
- Establecer al explorar objetos de su interés, distintas relaciones de agrupación, comparación, orden y correspondencia.

AE 2° CICLO (3-6 años)

- Establecer relaciones cada vez más complejas de semejanza y diferencias mediante la clasificación y seriación entre objetos, sucesos y situaciones de su vida cotidiana, ampliando así, la comprensión de su entorno.

Así mismo, según el mapa del razonamiento lógico matemático, que se inicia en el tramo I (6 meses de edad) y finaliza en el tramo V (6 años). Desde el tramo III los logros de aprendizaje van ligados a los conceptos de comparación, clasificación y orden, los cuales van variando según la cantidad de atributos junto a la reproducción de patrones combinando distintos elementos.

1.2. Análisis histórico epistemológico

El objetivo de este análisis, está centrado en la indagación de la evolución de los conceptos matemáticos y sus dificultades, así como también de sus aplicaciones. “La epistemología histórica, que se ocupa de la ciencia tal cual funciona, busca coherencia interna a través de los diferentes problemas y conceptos que le dan sentido, de manera que involucra necesariamente un cuestionamiento epistemológico” (Mena- Lorca, 2011, p.5).

1.2.1. Clasificaciones en el desarrollo de la humanidad

Clasificar elementos de un conjunto produce particiones en él y cada partición genera una relación de equivalencia; por lo cual la acción de clasificar presenta ideas implícitas de estos conceptos. Así es como aquella idea, se encuentra estrechamente relacionada con los conceptos de (E-P) que nos convocan; por lo que nos interesa tanto su origen como su aplicación.

Pérez (2013), da cuenta de cómo el clasificar se presenta de forma natural desde tiempos prehistóricos – a partir del descubrimiento de la agricultura hace unos diez mil años–, cuando las pequeñas comunidades de seres humanos se dieron cuenta que la caza no era la única forma de alimentarse.

En las colinas de Oriente Medio, mientras los hombres cazaban, las mujeres recolectaban semillas silvestres; en este sentido, debían clasificar aquellas que eran comestibles y las que no las desechaban. Una de estas mujeres hace un descubrimiento histórico: las semillas que desechaban echaban raíces entre la basura, lo que le dio la idea de plantar sus mejores semillas en terreno fértil, convirtiéndose así en la primera agricultora del mundo. Este descubrimiento cambiaría el ritmo de la historia de la humanidad; dando lugar a la aparición de las ciudades, la ciencia y los imperios.

Por consiguiente, podríamos pensar en la importancia del concepto de clasificación y lo que éste genera; su relevancia es tal, que sin el razonamiento que subyace a una clasificación, las sociedades y las distintas culturas no habrían podido evolucionar.

Por su parte Jiménez (2010), hace mención al trueque en las antiguas civilizaciones, donde por ejemplo: dos ovejas equivalían a cinco sacos de harina y cinco sacos de harina podían ser equivalentes a una vaca; no existen evidencias de que este tipo de trueque sea transitivo, pero así debería haber sido.

Podemos notar que la acción de clasificar diferentes elementos, ha estado presente en la humanidad desde siempre y muchas de estas clasificaciones han evidenciado diferentes tipos de conocimiento, alguno de los cuales contribuyó al desarrollo humano y a la matemática. Veremos algunos ejemplos de esto último.

1.2.2. Clasificaciones y (E-P) en la historia de la Matemática. Algunas aplicaciones.

Un estudio epistemológico anterior sobre las relaciones de equivalencia realizada por Jiménez (2010); muestra cómo el Papiro de Ahmès– la más antigua de las evidencias matemáticas egipcias–, ya mostraba dentro de sus 87 problemas algunos conceptos que cumplen con las propiedades de las (E-P) –entre ellos: áreas y proporciones– o bien aquellos, han sido objetos construidos a partir de la relación entre elementos que satisface las propiedades de una relación de equivalencia, la que induce una partición; un caso de esto son las fracciones, contenidas en el sistema de los números racionales.

Además, apoyados en el libro de (Boyer, 1968) –donde es posible encontrar el origen de variados conceptos que cumplen con ser una relación de equivalencia y analizar la utilidad implícita que ha tenido este objeto matemático–; podemos encontrar en el mismo Papiro, cómo uno de los problemas geométricos da inicio a una teoría de congruencia[3]: el cálculo del área de un triángulo isósceles; el cual muestra que para su cálculo era necesario tomar la mitad de la base y multiplicarla por su altura; en la justificación realizada por Ahmès se sugiere que el triángulo isósceles se podría considerar como formado por dos triángulos rectángulos, donde uno es cambiado de posición de tal manera de formar ese rectángulo. En consecuencia, podemos observar cómo la búsqueda de relaciones entre figuras geométricas llevó a establecer teorías que cumplen con las propiedades de una relación de equivalencia y que sirven de base en la construcción de conocimientos matemáticos nuevos.

Luego, en la antigua Grecia, alrededor del año 300 a.C, en los Elementos de Euclides; se explicitan postulados y axiomas o nociones comunes; entre éstos últimos tenemos: “Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí; cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí”. Las que hacen referencia a una de las propiedades que define a una relación de equivalencia: la propiedad transitiva.

[3] En el conjunto de los triángulos del plano, la congruencia es un ejemplo de relación de equivalencia.

También, en el libro I de los Elementos, podemos encontrar entre otros teoremas sobre congruencia de triángulos y propiedades de las rectas paralelas, y en el libro V se dedica Euclides a establecer la ya bien fundamentada teoría de proporciones, evitando en lo posible en ese momento el uso de proporciones. Se puede verificar, cómo estos conceptos de congruencia, paralelismo y proporciones, cumplen con ser relaciones de equivalencias.

Por último, también podemos ver a Gauss y su libro Disquisitiones arithmeticae, un tratado sobre teoría de números en latín, donde aborda el álgebra de las congruencias, ejemplo primitivo del trabajo con clases de equivalencia. La anotación adoptada por Gauss es la misma que actualmente se utiliza: $b \equiv c\ (mod. a)$ y posteriormente construyó un algebra para ésta relación "$\equiv$" análoga al álgebra usual expresada en el lenguaje de la igualdad "$=$ ". Sin embargo, sólo algunas de las reglas del álgebra usual pueden ser aplicadas a esta nueva situación.

Por otra parte, la relación " $\equiv$ " tiene las mismas propiedades fundamentales de reflexividad, simetría y transitividad que la relación " $=$ ".

i. $a \equiv a\ (mod.\ m)$

ii. $si\ a \equiv b\ (mod. m) \Longrightarrow b \equiv a(mod. m)$

iii. $si\ a \equiv b\ (mod. m) \wedge b \equiv c\ (mod. m) \Longrightarrow a \equiv c\ (mod. m)$

Por lo tanto " $=$ " cómo "$\equiv$ " son consideradas relaciones de equivalencia.

Por otra parte, según Pérez (2013), el hecho de particionar un conjunto permite identificar elementos y propiedades relevantes de los elementos que se escogen, con el objetivo de aprovecharlos de una mejor manera, de modo que lo que se quiera hacer tenga mejores resultados. Es el caso de Arquímedes, quien logró dar una estimación aproximada de la razón de una circunferencia a su diámetro. Utilizando inicialmente el hexágono regular inscrito en la circunferencia, calculando el perímetro de los polígonos obtenidos duplicando de forma sucesiva el número de lados, hasta llegar al polígono regular de 96 lados. Ahora bien, los elementos escogidos para esta demostración, no fueron casual, la clasificación de los polígonos en regulares e irregulares permitió estudiar con una mayor profundidad las propiedades que cada uno de estos conjuntos aporta, tanto para el estudio de sí mismos como en el estudio de elementos relacionados y así escoger los polígonos precisos que permitieran realizar la demostración.

1.2.3. Historia de la lógica.

A partir de la distinción descrita con relevancia en el trabajo de (Mena-Lorca, 2011); de considerar una relación como una función proposicional en dos letras y no como el subconjunto del producto cartesiano – que actualmente se utiliza en los textos, lo cual trae consecuencias cognitivas importantes en su aprendizaje–; es que describiremos a continuación las evoluciones históricas respecto a los conceptos de conjuntos, relaciones y lógica.

Se analiza la evolución de estas nociones a partir de 1847, comenzando por De Morgan (1847), Frege (1879), Peirce (1883), Russell (1903) y los Principia (1910). Es así como en el trabajo de (Bochenski, 1968) se considera a De Morgan como el fundador de la moderna lógica de las relaciones. En un trabajo publicado en 1860, De Morgan publica algunas nociones para comenzar a fijar un lenguaje, entre ellas:

> Supongamos que X..LY signifique que X es uno de los objetos del pensamiento, que respecto de Y guarda la relación L, o que es uno de los L de Y. supongamos que X.LY signifique que X no es ninguno de los L de Y. X e Y son aquí *sujeto* y *predicado*: dichos nombres se refieren al modo de entrar en la relación, no al orden de mención. Por lo tanto Y es predicado en LY.X lo mismo que en X.LY. (Bochenski, 1968, p.392)

Trata además la composición de relaciones: la conversa (inversa) de una relación y la contraria; para finalizar enunciando que: "una relación es transitiva cuando el relativo de un relativo es un relativo de la misma especie. Esto se representa simbólicamente como LL))L, de donde LLL))LL))L, etc". (Bochenski, 1968, p.392).

Sin embargo, no establece una definición formal de las relaciones de equivalencia; excepto una propiedad sobre la transitividad "La recíproca de una relación transitiva es una relación transitiva" utilizando por primera vez símbolos para referirse a la noción de relación de relaciones. (Jiménez, 2010)

Posteriormente, en 1879 el lógico y matemático alemán F.L.G Frege–considerado el más importante de todos los pensadores de la lógica matemática– publicó *Begriffsschrift;* donde sentó las bases de la lógica moderna y propone también un lenguaje formalizado (conectores, cuantificadores, implicancia y barra de negación).

Luego de fijar los principios axiomáticos de la lógica, publica su obra más importante titulada: *leyes básicas de la Aritmética,* la cual contenía dos volúmenes; el primero se publicó en 1893 y el segundo diez años más tarde. En ésta, aborda la tarea de deducir los conceptos de la aritmética desde los de la lógica formal, discrepando por completo de C.S.Peirce de que la matemática y la lógica son claramente distintas. Frege al definir la axiomática para los conjuntos, no reparó en que su postulado: – *que para toda propiedad $\phi(X)$ definible en su teoría, existe un conjunto "Y" cuyos elementos son exactamente los conjuntos "X" que cumplen*

$\phi(X)$ –, contenía una contradicción. Bertrand Russell le envía una carta donde lo advierte acerca de la grave inconsistencia, sobre lo que se obtiene si se toma la propiedad $\phi(X) \coloneqq X \notin X$; la cual es conocida posteriormente como la paradoja de Russell.

Peirce y Peano, al mismo tiempo de Frege; propusieron una nueva meta en la lógica matemática: la fundamentación de las matemáticas, donde se consideran importantes conceptos y métodos lógicos.

Este periodo finaliza con los Whitehead y Russell (1910-1913); que tiene una clara motivación del trabajo de Frege, donde se logra apreciar el poder de la lógica formal y junto a ello algunas definiciones y propiedades como la de equivalencia.

Así también, en (Bochenski, 1968), se hace referencia a que Peirce y Schröder han comprendido la importancia de la lógica de las relaciones, sin embargo sus métodos–basados no en Peano, sino en la Lógica simbólica más antigua que procede con modificaciones de Boole– los considera complicados y difíciles por lo que la mayoría de las aplicaciones son irrealizables. Esto es debido a que aparte de los defectos de la lógica simbólica primitiva, su método carece técnicamente de considerar esencialmente a una relación como una clase de pares, precisando por consiguiente fórmulas elaboradas de adición, para tratar cada relación en particular. Russell estima; que eso es debido a un error filosófico de considerar de forma habitual a las sentencias relativas menos radicales que las sentencias de clases o las sentencias predicado-sujeto y esto ha llevado a querer tratar las relaciones como una especie de clases. A partir de una filosofía opuesta a la anterior, tomada de su amigo G.E. Moore, de donde ha pasado a un tratamiento formal y distinto de las relaciones, considera a este tratamiento mucho más apropiado y eficaz como instrumento de investigación para la matemática actual.

Así, junto a Whithead escribe los Principia Mathematica. Donde algunas de sus definiciones son:

- La relación se la puede considerar como la clase de los pares (x, y) de los cuales es verdad una función dada $\varphi(x, y)$.
- Se considera como clase de relaciones: $Rel = \hat{R}\{(\exists\Phi). R = \hat{x}\hat{y}\Phi!\,(x, y)\}$
- La notación "$x\mathcal{R}y$" significa " x guarda la relación $\mathcal{R}$ respecto de y" se recomienda por su practicidad y reemplaza a la complicada $x\{\hat{x}\hat{y}\Phi(x, y)\}y$.
- Algunos conceptos básicos sobre la lógica de las relaciones descritos en los principia:
    - $R \subset S. =: xRy. \supset x, y, .xSy$
    - $R \,\dot{\cap}\, S = \hat{x}\hat{y}(xRy.xSy)$
    - $R \dot{\cup} S = \hat{x}\hat{y}(xRy.\vee.xSy)$

- $\dot{-}R = \hat{x}\hat{y}\{\sim (xRy)\}$
- $\dot{V} = \hat{x}\hat{y}(x = x. y = y)$

- Si $\mathcal{R}$ es una relación, la relación de y con x en el caso de $x\mathcal{R}y$, se llama la conversa de $\mathcal{R}$. La conversa identidad es identidad y la conversa de diversidad es diversidad. La conversa de $\mathcal{R}$ se escribe $\breve{\mathcal{R}}$. Cuando $\mathcal{R} = \breve{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ se llama relación simétrica, si no se llama relación no-simétrica. Si $\mathcal{R}$ es incompatible con $\breve{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ se llama asimétrica.

Asimismo, Jiménez (2010) se refiere a los Principia Mathemática, donde se formaliza la lógica y junto a ellos algunas definiciones y propiedades como la equivalencia. En principio, la equivalencia la definen entre proposiciones lógicas p y q – no haciendo referencia a relaciones de equivalencia–, sin embargo, pese a no tener una definición formal para una relación de equivalencia; la equivalencia $p \cong q$ es una relación de equivalencia.

Una de las conclusiones que podemos extraer del análisis de la historia de la lógica, es la notación utilizada, ya que es denotada la función proposicional x tiene la relación R respecto de y, como xRy. Además se mencionan ejemplos, donde utilizan la siguiente notación: “el producto relativo de hermano y padre es tío paterno” o “si R es la relación de hijo a padre, $R'y$ significa el hijo de y”, y no como pares ordenados, es decir, una relación se define como una función proposicional y no por su gráfico tal cómo lo mencionaba (Mena-Lorca, 2011)

Jiménez (2010) menciona algunas definiciones que aluden a la relación identidad a través de las siguientes características:

$$\vdash . x = x$$

$$\vdash : x = y . \cong . y = x$$

$$\vdash : x = y . y = z \supset . x = z$$

Luego se define de forma generalizada:

- Una relación es llamada reflexiva cuando la relación se mantiene entre un término y el mismo término.

- Una relación es llamada simétrica si, cuando se mantiene entre x e y, también se mantiene entre y y x. luego añade que una relación es simétrica cuando la relación es igual con su conversa.

- Una relación es llamada transitiva si, cuando se mantiene entre x e y, y entre y y z, también se mantiene entre x y z.

A pesar de describir las propiedades de esta relación no se define formalmente una relación de equivalencia.

Sin embargo, aparece de forma natural el concepto de clase "*una clase son todos los objetos que satisfacen alguna relación proposicional" se* afirma además, que toda función proposicional determina una clase, y que a partir de las clases, se puede obtener, alguna función proposicional que las determinó. Esto hace referencia al teorema RE/P pero como algo natural donde su justificación es evidente.

Finalmente se define de manera formal una relación de equivalencia, como aquella que es reflexiva, simétrica y transitiva, haciendo hincapié que la implicancia es, solamente reflexiva y transitiva, pero para obtener caracteres de igualdad, se necesita tener las tres propiedades.

Para finalizar, podemos apreciar de manera cronológica, el análisis histórico epistemológico, a través de la siguiente figura:

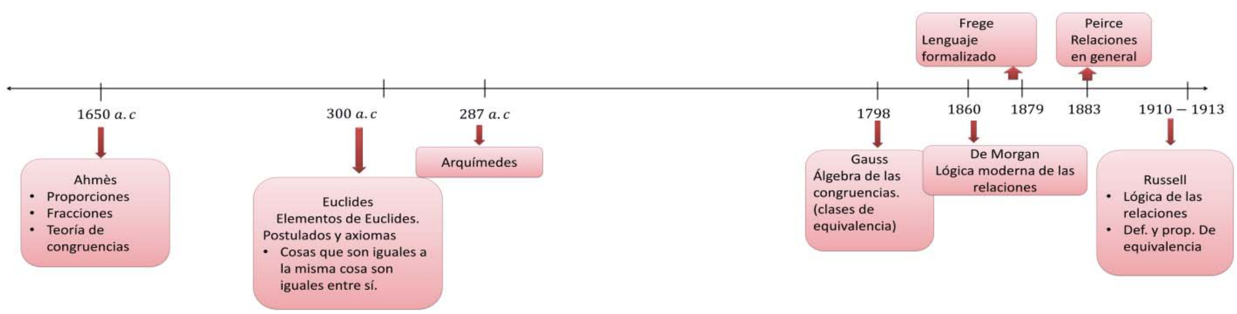


Figura 1: Síntesis del análisis histórico epistemológico
Fuente: Autoría propia

1.3. Análisis Epistemológico Genético.

Se realiza una aproximación de carácter psicológico que contribuirá junto a los aspectos históricos, a la construcción de la DGP. Se considerará para este trabajo las implicaciones de la teoría de Piaget[4].

1.3.1. Conocimiento lógico matemático.

Kamii (1994) en su investigación define el conocimiento lógico-matemático como uno de los tipos de conocimiento distinguidos por Piaget; el cual se compone de las relaciones que construye cada individuo. Si observamos dos elementos de los cuales podemos diferenciarlos según un atributo, esta diferencia sería un fundamento de este tipo de conocimiento. Los elementos son observables pero la diferencia entre

[4] Se utilizan elementos de uno de los distintos enfoques teóricos para la comprensión de la construcción del concepto de número en la primera infancia, incluyendo la lógica de las clases.

ellos no; esa diferencia es una relación entre ambos objetos creada mentalmente por el individuo.

"Piaget aducía que el conocimiento lógico matemático es inventado por cada uno, es decir, es construido por cada niño desde dentro" (Kamii, 1994, p.12). Por lo que no puede ser descubierto o aprendido a través de la transmisión por el entorno, al contrario de los signos matemáticos y el sistema de notación considerados como la parte superficial de la aritmética.

Asimismo, existen otras relaciones[5] que se pueden realizar como la similitud o el conteo. Según Piaget la relación que se puede establecer entre objetos, refiriéndose a un ejemplo en particular, va a depender del sujeto quien la realice, por lo tanto es tan correcto decir que los objetos son similares como decir que son distintos. (Kamii, 1994, p.21).

En el caso del conteo, el asignarle un número para denotar la cantidad de elementos no es observable, pero sí los elementos a contar, por lo tanto el número también es considerado una relación creada mentalmente por cada persona.

Veamos un ejemplo: si tenemos cinco fichas del mismo color, alguien podría realizar una comparación en cuanto al color de las fichas y dirá que son iguales, sin embargo si realiza un conteo, dirá que son cinco. El atributo respecto al color de las fichas es observable, pero el número cinco no lo es. Por lo tanto, el número es considerado un ejemplo de conocimiento lógico-matemático.

Además, se debe considerar que el progreso en la construcción del conocimiento lógico-matemático por parte del niño es realizado mediante la coordinación de relaciones simples, como por ejemplo, "igual", "distinto", y "más" que ha creado anteriormente entre distintos objetos.

1.3.2. Tipos de abstracción

Piaget admite la existencia de dos fuentes internas y externas del conocimiento, donde el conocimiento físico o el conocimiento social son en parte externos al sujeto, al contrario de la fuente del conocimiento lógico-matemático que es considerada interna.

Según Piaget, la abstracción de ciertas cualidades, como por ejemplo, del color de los objetos, es diferente a la abstracción del número, por lo que se designan en términos distintos. Piaget designó como *abstracción empírica o simple* a la

[5] En este caso como parte de la definición del conocimiento lógico-matemático planteado por Piaget, en Kamii (1994) se mencionan algunos ejemplos de relaciones que se pueden establecer entre fichas de colores, las que pueden ser "similar", "del mismo peso" y "dos".

abstracción de las propiedades de los objetos y *abstracción reflexionante*[6] a la abstracción del número.

En la abstracción empírica el niño se centra en la propiedad determinada e ignora las otras; sin embargo, la abstracción reflexionante es considerada como una construcción llevada a cabo por el pensamiento que comporta la construcción de relaciones entre objetos y estas relaciones no tienen existencia en la realidad exterior, solo existen en el pensamiento de los sujetos que establecen esta relación.

Según Piaget estas dos abstracciones no pueden actuar la una sin la otra. Por ejemplo, el niño no podría establecer la relación "igual" si no puede observar las propiedades del objeto.

Para la abstracción empírica es necesario tener un marco de referencia lógico-matemático, el cual es construido mediante la abstracción reflexiva, esto permite al niño relacionar las nuevas observaciones con el conocimiento que ya posee, por ejemplo; para darse cuenta del color azul de un cierto objeto el niño necesita un esquema de clasificación que le permita distinguir entre ese y otros colores, al igual que necesita un esquema de clasificación que permita distinguir entre los objetos de otros que ya conoce.

La abstracción reflexiva, pese a su dependencia inicial de la abstracción empírica, sí puede lograr la independencia en otras etapas, por ejemplo; cuando se pasa a números mayores, estos no se aprenden a partir de conjuntos de objetos, es decir, no se aprenden a través de la abstracción empírica sino mediante la abstracción reflexiva a medida que el niño pueda construir relaciones. (Kamii, 1994)

1.3.3. Clasificaciones y la formación de conceptos.

Siguiendo con esta misma idea, para Skemp (1980) – dentro de la investigación de (Castro, Castro y del Olmo, 2002)– las clasificaciones están en la base de la formación de conceptos.

Esta acción, que muchas veces realizamos constantemente sin mayor análisis, está asociada a variadas situaciones cotidianas, como por ejemplo:

- El hecho de nombrar un objeto subyace a una clasificación. Al nombrar un objeto se hace referencia a varios de ellos con características y funciones similares.
- Definir un objeto es otra forma de clasificación. De esta manera se puede conocer la función del mismo.

[6] Reflexiva o reflexionante.

- Cada vez que se reconoce un objeto como algo que ya hemos visto, también se realiza una clasificación.

El desarrollo de este proceso, consiste en abstraer algunas propiedades invariantes que se mantienen en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular forma de representación del objeto. Cuando ya está formada esta abstracción, las siguientes experiencias son reconocidas a través de comparaciones de semejanza y similitudes.

Para estos autores, las clasificaciones y el concepto de abstracción son esenciales en la formación de los conceptos.

> Una abstracción es un tipo de cambio mental duradero, el resultado de abstraer, que capacita para reconocer nuevas experiencias como poseedoras de similitudes con una clase ya formada. Es algo aprendido que capacita para clasificar; es la propiedad definidora de una clase. Abstraer es una actividad que tiene como resultado una abstracción o concepto. (Castro, Castro y del Olmo, 2002, p.38)

En definitiva, la estructura operatoria de la clasificación es considerada básica y esencial en el desarrollo del pensamiento del niño.

1.3.4. Origen de la operación de clasificación.

Piaget e Inhelder (1976) analizan el problema de las génesis de las clasificaciones y seriaciones de forma simultánea, realizando una descripción de los factores estructurales a partir de los cuales, posiblemente, se originan estos conceptos.

Para esto, su trabajo se moviliza a través de ciertas hipótesis que podrían aportar a una explicación sobre los factores estructurales que darían origen a estas operaciones entre ellos: la acción del lenguaje; los factores perceptivos y sensomotrices.

Si bien, la orientación del trabajo de (Piaget e Inhelder, 1976); se centra en estudiar la formación de las operaciones de la clasificación y seriación y los mecanismos formadores que dan cuenta de su evolución, no obstante, en nuestro estudio nos limitaremos a analizar sólo las conclusiones de dichas hipótesis; y en relacionar estos mecanismos formadores de algunas propiedades que se relacionarían, con los conceptos tanto de la clasificación como de las (E-P).

Por lo tanto, en cuanto ***al lenguaje*** como hipótesis de origen; el estudio de los primeros esquemas verbales y preconceptos del niño –ya estudiados por Piaget – concluyen que: “si bien la adquisición del lenguaje acelera la formación de las categorías y permite tarde o temprano una transmisión de las clasificaciones colectivas nada de esto se da desde un comienzo”. (Piaget, 1975, p.14). Además, declaran cómo la acción del lenguaje favorece una serie de asimilaciones sucesivas que engendran varias otras relaciones de semejanzas y diferencias en función de los obstáculos opuestos a esas asimilaciones.

En cuanto a la estructura cognoscitiva de **la *percepción*,** se establece que antes de aprender a clasificar los objetos, el niño los percibe de acuerdo con ciertas relaciones de semejanza y diferencia. La percepción capta relaciones y no sólo términos aislados, donde sus relaciones puedan establecerse posteriormente a través de mecanismos como las asociaciones o los juicios.

En cuanto a ***los esquemas sensomotrices*** – sistema de percepciones y de movimientos como tales– se establece que antes de la adquisición del lenguaje los niños y niñas entre los 6-8 y 18-24 meses, demuestran conductas que anuncian tipos de organizaciones relacionadas con las clasificaciones. A medida que se va organizando el esquema de la percepción, éste se encuentra supeditado al de la acción; es decir, los esquemas sensomotrices considerados genéticamente tan esenciales como las percepciones. Por ejemplo los niños pueden reconocer en ciertos objetos sus características de utilización, correspondiente a sus esquemas de asimilación como balancear, golpear, sacudir, etc. Si se le presenta un juguete desconocido, es capaz de aplicar estos esquemas tratando de comprender la naturaleza de ese objeto, Piaget llamo a este tipo de clasificación "clasificación práctica". Por lo tanto, ya en el nivel sensomotriz y pre-verbal del desarrollo se pueden observar conductas que anuncian la clasificación.

1.3.5. Clases y relaciones

Se mencionan, además, la existencia de tipos de enlaces como formas de organización que puede considerarse que prefiguran ciertos aspectos de las estructuras operatorias de las clases y las relaciones. Estas estructuras son consideradas como enlaces generales que están en juego en las clasificaciones.

A partir de un sistema de clases A, $A´$ y B tales que $B = A + A´ \ y \ A \times A´ = 0$ donde $A´$ es la complementaria de A sobre B ya que $A´$ son disyuntas.

- Se le llama *comprehensión* de esas clases; al conjunto de las cualidades comunes a los individuos de cada una de esas clases y al conjunto de las diferencias que distinguen a los miembros de una clase de los miembros de la otra.

- Las *relaciones de semejanza* se les llaman a las cualidades comunes a los componentes de una clase.

- Se le llama *alteridad* a las diferencias entre los componentes de la clase $A´$ y los de la clase A cuando éstos se parecen bajo B.

- *Extensión* es el conjunto de los componentes o individuos que pertenecen a una clase definida por su comprehensión.

- *Cuantificación intensiva* es la atribución a los componentes de una clase de los cuantificadores “todos”, “algunos” (incluyendo “algún”) y “ninguno”.

- *Inclusión* de la clase A en la clase B a la relación que verifica las expresiones “todos los A son algunos B”.

- Se le llama *pertenencia inclusiva* a la relación entre un individuo x y una clase A de la que forma parte.

1.3.6. Criterios para una clasificación

Como parte de su investigación, proponen una serie de propiedades para la clasificación:

- No existen elementos aislados o sin clase. Esto quiere decir, que habrá que clasificar todos los elementos y que si existiera un (x) que fuera el único de su especie, dará entonces lugar, a una clase específica (aunque singular).

- No existen clases aisladas, es decir, que toda clase específica A, caracterizada por la propiedad a, se opone a su complementaria A'(caracterizada por no $-a$) bajo el género más próximo B, tal que $A + A' = B$.

- Una clase A comprende a “todos” los individuos de carácter “a”.

- Una clase A no comprende sino los individuos de carácter “a”.

- Las clases del mismo rango son disyuntas. $A \times A' = 0$

- Una Clase complementaria A' comprende sus caracteres propios ax, que no posee su complementaria A.

- Una clase A o A' está incluida en toda clase superior que comprenda todos sus elementos, comenzando por la más próxima B: sea $A = B - A'$ o $A' = B - A \; y \; A \times B = A,$ lo que quiere decir que “todos” los A son “algunos” B.

- Las inclusiones de una clase en otra se producen por el orden del mínimo criterio de clasificación o criterio más fino.

- Simplicidad en comprehensión: iguales criterios (por ejemplo colores) para distinguir clases del mismo rango.

- Simetría en las subdivisiones: si la clase B_1 está subdividida en A_1 y en A'_1 de acuerdo con un criterio que se vuelve a encontrar en B_2, entonces B_2 estará subdividida en A_2 y en A'_2.

Con lo anterior podemos notar que el concepto de clasificación es una de las estructuras básicas de conocimiento y revelan una serie de características. Por lo tanto, tienen una estructura operatoria y preexisten a las clasificaciones matemáticas.

1.4. Investigaciones reportadas

1.4.1. Dificultades en la enseñanza y comprensión del concepto (E-P)

En (Mena-Lorca, 2011) se da evidencia acerca de las dificultades presentes en el estudio de algunas materias dentro del curriculum universitario habitual de matemáticas, las que son ratificadas tanto por enseñantes como investigadores; sobre todo en los conceptos de grupo normal y grupo cociente, las que presentan un obstáculo aún mayor.

Algunas de esas dificultades son las siguientes:

- Estudiantes de pregrado de distintas carreras, que son capaces perfectamente de explicar y descubrir (E-P) desde ejemplos cotidianos incluyendo los conceptos de mayor o menor finitud; muestran problemas en su escritura simbólica, es decir, existe la dificultad para la escritura en términos formales.

- Los estudiantes tienen la claridad de las razones que fundamentan que una determinada colección de subconjuntos de A constituye una partición de A; sin embargo no pueden escribir esa demostración en términos formales.

- El estudiante visualiza de forma frecuente y mejor las particiones que las relaciones de equivalencia; pues, encuentra más sencillo demostrar que una relación definida en A es de equivalencia que probar que una colección de subconjuntos de A es una partición de A.

Otro aspecto relevante en su estudio hace referencia a cómo las relaciones de equivalencia son un tanto desaprovechadas en su enseñanza pese a que éstas se encuentran de forma copiosa por donde se mire, y lo beneficioso que sería tener una noción apropiada de este concepto para el trabajo con cocientes. El principal obstáculo, tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo, se presenta en la comprensión del objeto matemático cociente y de lo que implica trabajar con él.

Él establece que existen ciertas incoherencias que derivan en un obstáculo en el aprendizaje de esa materia; cuando se enseña a los estudiantes, por ejemplo, que una función es una ley, que una relación es un subconjunto del producto cartesiano y que una función es un caso especial de relación.

A partir de esto su interés por atribuir de esquemas ricos y coherentes de relación de equivalencia y partición, el cual dista de los tratamientos habituales en la literatura, los que muchas veces tienen consecuencias cognitivas y problemas en su comprensión. Parte relevante de esto, es el mantener la distinción entre los objetos lógicos y conjuntísticos, lo que no siempre se realiza, pues –los mismos textos de estudio, siguiendo a Russell– suelen definir a una relación como el subconjunto del producto cartesiano y no como una función proposicional en dos letras.

1.4.2. Importancia de las (E-P)

Como se ha explicitado, el concepto de clasificación se encuentra estrechamente ligado a las relaciones de equivalencia y la generación de particiones, de ahí que nuestros objetos matemáticos (E-P) puedan estar situados en un nivel de generalidad, lo que implica que los podamos encontrar en todo lo que hacemos e incluso lo que pensamos, a propósito de la construcción de conceptos visto previamente en este trabajo.

Es así, como ha contribuido a la evolución de nuestra propia humanidad, permitiendo así su desarrollo. La acción de clasificar proporcionó conocimientos relevantes en el desarrollo de la sociedad; por ejemplo, el hecho de poder clasificar entre buenos y malos granos para su cultivo y obtener así el alimento sentó las bases para el descubrimiento de la agricultura.

Así mismo, esta acción ha contribuido al desarrollo de la propia matemática: cuando se establece una partición, generalmente su objetivo es formar relaciones entre elementos, mejorar lo que ya se tiene o descubrir nuevos elementos que contribuyen al conocimiento y desarrollo de la matemática. Así lo afirma (Mena-Lorca, 2011), quien cita entre otros ejemplos a la definición de números enteros de Brahmagupta en el año 628, a partir de la relación de equivalencia con los que se les construye a partir de $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$.

Por lo tanto, confirma que la idea de la construcción y utilización de cocientes, se extiende más allá de la matemática, como una tarea que se realiza frecuentemente, independiente de la actividad que se realice.

1.4.3. Las (E-P) y su aplicación.

Existe diversidad de objetos matemáticos que satisfacen las propiedades correspondientes a las relaciones de equivalencias, así también podemos encontrar una cuantiosa variedad de ejemplos extra-matemáticos que pueden ser denominados con la misma expresión.

Respecto a éstos últimos, son utilizados en variados ámbitos, frecuentemente de forma inconsciente y por lo general en ausencia de definiciones explícitas o conjuntos propiamente definidos. Las nociones de (E-P) son consideradas esenciales e incluso es difícil encontrar tareas donde no estén presentes, sin embargo, se dan de forma implícitas, tomaremos algunos ejemplos: la toma de decisiones del día a día o ir de compras, son actividades donde se debe recurrir a las relaciones de equivalencia, y según las características cognitivas de quienes las utilizan, definirán si éstas son más o menos finas; un ejemplo de esto: un fanático del futbol contiene una mayor cantidad de clases de equivalencia, respecto a reglas, puntajes, etc. a las cuales recurrir al mirar un partido, en comparación con alguien que no entiende de la materia, como yo. El uso del lenguaje sea éste más o menos refinado dependerá de un mayor o menor conocimiento de él.

> Cada substantivo y cada adjetivo determinan particiones en un conjunto referencial ad hoc, lo que manifiesta claramente la dependencia del pensamiento respecto de las relaciones de equivalencia – y, por supuesto, de los correspondientes grados de finura relativa, según los usuarios–. (Mena-Lorca, 2011, p.27)

Asimismo, es posible apreciarlas también en biología, química, psicología, en esta última; sobre las relaciones entre conductas en la adaptación e incluso en la elaboración de programas informáticos que apuntan al procesamiento de imágenes, entre otros.

En definitiva, las (E-P) son utilizadas de forma tan natural e implícita, incluso en ausencia de toda formalidad, tanto en la vida diaria, en otras disciplinas como en la cultura en general.

Por otra parte, en el contexto matemático, se pueden apreciar tanto en estudios universitarios como en contenidos de enseñanza media; respecto a esto último, sólo de forma tácita. En (Mena-Lorca, 2011) se muestran algunos ejemplos:

- La igualdad es una serie de relaciones de equivalencia que llevan ese apelativo: igualdad de conjuntos, de números, de funciones, de matrices etcétera.

- Al determinar soluciones de una inecuación se debe particionar el conjunto de los números reales o algún subconjunto de él.

- El paralelismo de rectas en el conjunto de rectas del plano es una relación de equivalencia.

- En el conjunto de los triángulos del plano, la congruencia y la semejanza–la segunda menos fina que la primera–. Además podemos considerar triángulos de la misma área, mismo perímetro, etc.

- El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos es el cociente del anillo $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios con coeficiente en $\mathbb{R}$ sobre el ideal maximal $\langle x^2+1 \rangle$, esto es, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]\ /\ \langle x^2+1 \rangle$.

- En $\mathbb{Z}$ son relaciones de equivalencias las congruencias R_n (módulo n, donde n es un número natural fijo) definidas por:

- $xR_ny \Leftrightarrow x \equiv y(mod\ n) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(y - x = kn)$

1.4.4. Relaciones de equivalencia como práctica social

En el trabajo de (Mena-Lorca, 2011) se puede observar en primera instancia, el uso de las (E-P) como práctica social – de forma casual– pues deja en claro que tal noción es ajena al marco teórico de su estudio.

Sin embargo, podríamos suponer este hecho – sin entrar en mayor detalle– a partir de que las (E-P) en sí mismas son actividades creadoras de conocimiento, utilizadas por los seres humanos dentro de un determinado contexto y que surge de manera natural e implícita. Según Arrieta (2003) define a una práctica social: como un conjunto de acciones espontáneas que, de forma intencional, desarrollan las personas para construir conocimiento.

1.4.5. RE/P[7] y la teoría de grupos.

Según Mena-Lorca (2011), las relaciones de equivalencia le permiten dar una expresión más precisa a los cocientes dentro de la teoría de grupos y por lo tanto al teorema del isomorfismo para grupos; además le da la facultad para expresar de manera más acabada el conjunto de teoremas de isomorfismo el cual forma parte de la descomposición genética de su estudio.

Él establece la importancia de los grupos cocientes tanto dentro de la teoría de grupos como también en otras, donde los objetos matemáticos cuentan con grupos subyacentes tales como: anillos, espacios vectoriales, grupos topológicos, etc. Además de la construcción de los números reales y complejos que se basan en esa noción.

En su estudio se muestra una propuesta diferente a la enseñanza del teorema del isomorfismo; se reconoce y aprovecha la idea de cociente que presentan los estudiantes previamente en su haber cognitivo en cuanto a partición sin estructura, y le da la formalización apropiada para posteriormente incorporar los elementos de estructura necesarios en la enseñanza de ese teorema. Para ello, se propone lograr una construcción apropiada del objeto matemático cociente de tal manera que esté a disposición para su uso.

Pues bien esa noción presentada por los estudiantes en su haber cognitivo es la que detectaremos y modelaremos en esta investigación, cuando es movilizada frente a situaciones no matemáticas precisamente.

[7] Notación utilizada en (Mena-Lorca, 2011) para denotar el teorema que liga las relaciones de equivalencia con las particiones que ellas determinan en los conjuntos donde se encuentran definidas.

1.4.6. Una descomposición genética de los objetos matemáticos (E-P)

(Jiménez, 2010) a partir del trabajo previo del profesor Mena, propone una aproximación– a partir de una Descomposición genética– de un camino cognitivo de construcción de las (E-P).

Define que un sujeto se encuentra en una concepción acción de la relación de equivalencia, si es capaz de comprobar las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Esta concepción se interioriza en un proceso cuando el estudiante es capaz de identificar una relación de equivalencia sin necesidad de realizar los cálculos respectivos. Ella declara que la encapsulación de este objeto es compleja, debido a que se construye de forma conjunta con la concepción objeto del concepto de partición y por lo tanto, la coordinación de estos objetos dará paso a la concepción esquema de una relación de equivalencia.

De forma paralela, define que un sujeto se encuentra en la concepción acción de partición si: en primer lugar, es capaz de verificar que se cumpla la definición de partición, es decir, que la unión de las partes dé como resultado todo el conjunto y que la intersección de dos subconjuntos cualesquiera de la partición sea vacía; y en segundo lugar, el alumno podría ser capaz de realizar una partición sobre un conjunto dado de manera matemática o extra matemática. Este ha logrado interiorizar aquellas acciones en un proceso cuando reconoce y realiza particiones sobre un conjunto más grande, incluso infinito, de esta manera la concepción objeto se desarrolla de forma paralela con el objeto de relación de equivalencia y la coordinación entre ambos da paso a la construcción del esquema de partición. A continuación la DG propuesta por (Jiménez, 2010).

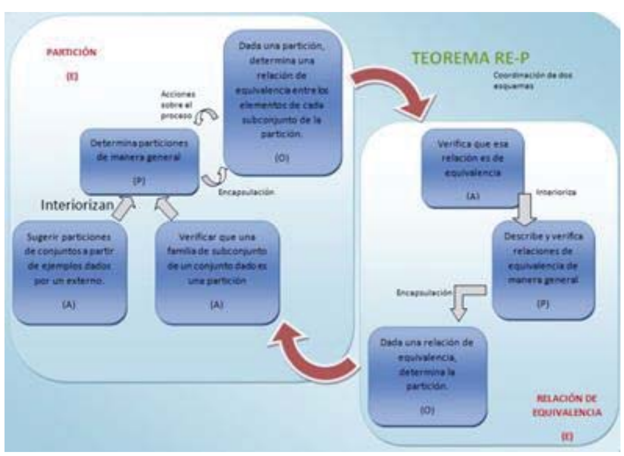


Figura 2: Descomposición genética de los conceptos de relación de equivalencia y partición.
Fuente: Jiménez (2010)

1.5. Relaciones de equivalencia y particiones en la Matemática

En cuanto a los conceptos de relación de equivalencia y partición (Mena-Lorca, 2011) destaca la importancia principalmente de distinguir entre el objeto lógico relación y el conjunto que define en un producto cartesiano, es decir, su gráfico. A partir de eso definimos:

Definición: Una relación binaria es una función proposicional en dos letras.

Notación: $p(x, y), x\mathcal{R}y, \mathcal{R}$

Dados dos conjuntos A y B, denotaremos $A \times B$ al conjunto constituido por los pares ordenados (a, b) tales que a pertence a A y b pertenece B. Esto es:

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}$$

Definición: La función proposicional $p(x, y) \wedge x \in A \ \wedge y \in B$ se llama relación binaria en $A \times B$, o bien de A a B, donde A se llama conjunto de partida de $\mathcal{R}$, B el conjunto de llegada de $\mathcal{R}$.

Si $A = B$, una relación de A a B se llama *una relación en A.*

La función proposicional $x\mathcal{R}y$ determina un subconjunto $G_{\mathcal{R}}$ de $A \times B$ por $(x, y) \in\ G_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

Definición: Sea $\mathcal{R}$ una relación en $A \times B$. Entonces, el gráfico de $\mathcal{R}$ es el conjunto $G(\mathcal{R}, A, B) = G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B: x\mathcal{R}y\}$

Proposición: sea $G \subset A \times B$. Entonces, G induce una relación $\mathcal{R}$ en $A \times B$ por $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in G$, cuyo gráfico es precisamente $G_{\mathcal{R}} = G$.

Según lo anterior, darse una relación en $A \times B$, es equivalente (aparentemente) a darse un gráfico en $A \times B$, de ahí radica el hecho de que ciertos autores utilicen la definición de que una relación es un subconjunto del producto cartesiano.

Podemos encontrar ejemplos donde dos relaciones no son equivalentes (en general) y sin embargo su gráfico, sobre un determinado conjunto, sí lo sea.

Una de las razones principales mencionadas respecto a esta distinción y que son relevantes para nuestro estudio, es que comprender una relación desde un punto de vista lógico es más natural que pensarla como conjunto de pares ordenados.(Mena-Lorca, 2011).

Definición: Sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B. Se definen los conjuntos Dominio de $\mathcal{R}$ (se anota *Dom* $\mathcal{R}$) y recorrido de $\mathcal{R}$ (se anota *Rec* $\mathcal{R}$) por:

$$Dom\ (\mathcal{R}) = \{x \in A: (\exists y \in B) x\mathcal{R}y\}$$

$$Rec\ (\mathcal{R})\colon \{y \in B\colon (\exists x \in A) \in x\mathcal{R}y\}$$

Observación: $Rec\ (\mathcal{R})$ se llama también conjunto de imagen de $\mathcal{R}$ y se anota Im($\mathcal{R}$) o codominio de $\mathcal{R}$ y se anota $Cod(\mathcal{R})$.

Relación inversa

Definición: sea $\mathcal{R}$ un relación en $A \times B$. Se llama relación inversa de $\mathcal{R}$ y se anota $\mathcal{R}^{-1}$ a la relación definida en $B \times A$ por $y\ \mathcal{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$.

Observación: se tiene de inmediato que el conjunto de partida de $\mathcal{R}^{-1}$ es el conjunto de llegada de $\mathcal{R}$ y que el conjunto de llegada de $\mathcal{R}^{-1}$ es el conjunto de partida de $\mathcal{R}$. Más aún, se tiene que $Dom\ (\mathcal{R}^{-1}) = Cod(\mathcal{R})$; $Cod(\mathcal{R}^{-1}) = Dom\ (\mathcal{R})$.

Restricción de una relación

Sea $\mathcal{R}$ una relación de A a B y sea $A_1 \subset A$. Se llama restricción de $\mathcal{R}$ a A_1 y se nota $\mathcal{R}|_{A_1}$ a la relación definida por $\mathcal{R}(x, y) \wedge x \in A_1 \wedge y \in B$.

Funciones

Sea $x\mathcal{R}y$ una relación de A a B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una función de A a B si y sólo si:

i. $Dom\ (\mathcal{R}) = A$

ii. $(\forall x \in A)(\forall y' \in B)(\forall y'' \in B)(x\mathcal{R}y' \wedge x\mathcal{R}y'' \Longrightarrow y' = y'')$

Definición: sean f, g funciones de A a B. Se dice que f y g son iguales y se anota $f = g$ si y sólo si:

i. $Dom\ (f) = Dom\ (g)$

ii. $(\forall x \in Dom(f))(f(x) = g(x))$

Definición: Sean $\mathcal{R}, S$ relaciones definidas en $A \times B$. Se dice que $\mathcal{R}$ es más fina que S y se anota $\mathcal{R} \preccurlyeq S$ si y sólo si $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x\mathcal{R}y \Longrightarrow xSy)$.

En tal caso, se dice también que S es menos fina que $\mathcal{R}$, y se anota $S \succcurlyeq \mathcal{R}$.

Observación: $\preccurlyeq, \succcurlyeq$ son relaciones (definidas sobre conjuntos de relaciones), una inversa de la otra.

Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en A se dice

Reflexiva $(\forall a \in A), (a\mathcal{R}a)$

Simétrica $(\forall a, b \in A)$ $(a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a)$

Transitiva $(\forall a, b, c \in A)$ $(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c)$

Definición: Una relación de equivalencia en un conjunto A es una relación refleja, simétrica y transitiva en A.

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, sí $a\mathcal{R}b$ diremos que a es equivalente a b y usaremos la notación $a \sim b$.

Una relación de equivalencia definida sobre un conjunto A induce una partición en A.

Definición: Una partición en un conjunto A es una colección $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}$ de subconjuntos de A tal que:

i. $U_{E \in \mathcal{P}} E = A$

Es decir, todo elemento de A está en alguno de los elementos de $\mathcal{P}$, es decir, en alguno de los subconjuntos de A que constituyen $\mathcal{P}$.

ii. $(\forall E \in \mathcal{P})(\forall F \in P)(E \cap F \neq \emptyset \implies E = F)$

(Esto es, dos elementos de $\mathcal{P}$ no pueden tener elementos en común).

Una partición es, por tanto y simplemente, una división de A en pedazos, cada trozo es un elemento de P.

Si P es una partición de A, se suele considerar P como una familia de subconjuntos de A y la definición se escribe:

Definición: una partición en un conjunto A es una familia $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A tal que:

i. $U_{i \in I} A_i = A$

ii. $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies A_i = A_j)$

Sea A un conjunto, $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}$ un conjunto de relaciones definidas sobre A.

Se considerarán en $\mathcal{R}$, las siguientes relaciones.

Definición: Sean $\mathcal{R}, S \in \mathfrak{R}$**.** Definimos

i. $\mathcal{R} \approx S \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xSy)$

ii. $\mathcal{R} \preccurlyeq S \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow xSy)$

Observación: Las relaciones en $\mathcal{R}$ se traducen en relaciones en el conjunto $\mathfrak{H}$ de gráficos que $\mathcal{R}$ determina.

i. $\mathcal{R} \approx S \Leftrightarrow G_{\mathcal{R}} = G_S$

ii. $\mathcal{R} \preccurlyeq S \Leftrightarrow G_{\mathcal{R}} \subset G_S$

Es inmediato que, en $\mathfrak{R}$

$\approx$ Es reflexiva, simétrica y transitiva.

$\preccurlyeq$ Es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica.

Tomamos entonces el cociente $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\approx$ de $\mathfrak{R}$ sobre la relación $\approx$ .Esto es, cada elemento de $\bar{\mathfrak{R}}$ es el conjunto de las relaciones de equivalencia que son equivalentes sobre A.

Podemos definir una relación sobre $\bar{\mathfrak{R}}$ que seguimos denotando $\preccurlyeq$,

$\mathbf{R} \preccurlyeq \mathbf{S} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow xSy)$, donde $\mathcal{R}, S$ son representantes de las clases $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ respectivamente.

$\preccurlyeq$ Está bien definida en $\bar{\mathfrak{R}}$ y en realidad $\preccurlyeq$ es un orden en $\bar{\mathfrak{R}}$.

Proposición: con las notaciones anteriores.

i. $\approx$ es una relación de equivalencia en $\mathfrak{R}$

ii. $\preccurlyeq$ es un orden en $\bar{\mathfrak{R}}$.

Se define "más fina que" para el caso de las particiones.

Definición: Sean A un conjunto, y sean $\mathcal{P} = \{A_i\}_{i\in I}$ y $Q = \{B_j\}_{j\in J}$ particiones de A. Se dice que $\mathcal{P}$ es más fina que Q y se anota $P \preccurlyeq Q$ si y sólo si $(\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \subseteq B_j)$

TEOREMA RE/P

Según este teorema una relación de equivalencia definida en un conjunto A induce una partición en A, y viceversa. A continuación se detalla:

Sean A un conjunto $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_A$ el conjunto de las relaciones de equivalencia definidas en A y $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_A$ el conjunto de las particiones definidas en A. Entonces

i. Toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A induce una partición $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ en A.

ii. Toda partición P en A define una relación de equivalencia $\mathcal{R}_P$ en A.

Definición: Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, la partición que $\mathcal{R}$ define en A se llama cociente de A sobre $\mathcal{R}$ y se anota $A/\mathcal{R}$. Si $a \in A$, el elemento de $A/\mathcal{R}$ al que a pertenece se llama clase de equivalencia de a y se anota $\bar{a}_{\mathcal{R}}$, o bien, si no hay peligro de confusión $\bar{a}$. Así $\bar{a} = \bar{a}_{\mathcal{R}} = \{x \in A: aRx\}$

Por consiguiente se tiene que: $A/\mathcal{R} = \{\bar{a}_{\mathcal{R}}: a \in A\}$

Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, la correspondencia $\pi_{\mathcal{R}} = \pi: A \to A/\mathcal{R}$ definida por $\pi_{\mathcal{R}}(a) = \bar{a}_{\mathcal{R}}$ es una epiyección.

Definición: La correspondencia anterior $\pi_{\mathcal{R}}$ se llama proyección canónica o epiyección canónica de A en $A/\mathcal{R}$.

> La proposición anterior permite estudiar las relaciones de equivalencia ya sea en cuanto a funciones proposicionales o bien desde la perspectiva de las particiones que ellas definen. Lo que resulta aún más interesante cuando hay más de una en juego. (Mena-Lorca, 2011, p.30)

La demostración del teorema muestra que las distintas clases de equivalencia definidas por una relación de equivalencia en A no tienen dos a dos elementos comunes y todo elemento de A pertenece a una clase. Recíprocamente, dado un conjunto cualquiera C de subconjuntos de A, no vacíos y sin puntos comunes dos a dos, tales que todo elemento de A pertenezca a alguno de ellos, existe una única relación de equivalencia en A cuyas clases son dichos subconjuntos.

1.6. Pregunta de Investigación:

Investigaciones como (Jiménez, 2010) y (Mena-Lorca, 2011) evidencian la utilización informal y manifestación por parte de estudiantes de Educación Superior que no necesariamente pertenecían a carreras en el área de las matemáticas; y sin embargo, eran capaces de dar ejemplos donde estaban involucrados los conceptos matemáticos; e incluso al no tener nociones de los conceptos, mencionaban propiedades tales como la simetría o las propiedades de una partición, eso sí, con ciertas dificultades para expresar lo que observaban.

Estas dificultades se pueden observar, cuando se estudia dicho concepto de forma explícita en el contexto de la matemática a nivel superior, puesto que, existe cierto inconveniente tanto en su comprensión como en su aplicación posterior, la que es evidenciada por investigadores y profesores universitarios. Esto se incrementa por ciertas inconsistencias en la enseñanza del concepto matemático, las que se pueden ver en algunos textos de estudio y las cuales son explicitadas en el trabajo de (Mena-Lorca, 2011).

Desde otra perspectiva, el concepto de (E-P) está presente en ámbitos más allá de la matemática; la gente común o estudiantes dan cuenta de su empleo frente a situaciones cotidianas y lo utilizan con fines prácticos.

La clasificación es considerada como una acción[8] que precede a nuestro objeto de estudio, a partir de él se establece la noción de partición y en esta última se definen relaciones de equivalencia. Piaget ratifica este hecho, considerándolo como elemento central en el desarrollo del pensamiento lógico matemático, y demuestra cómo desde una edad muy temprana, la utilización de este concepto se vuelve central para desarrollar nuestros primeros conocimientos. Además comprueba, cómo esta estructura operatoria básica de la clasificación rige desde etapas muy tempranas nuestra forma de pensar y actuar. (Piaget e Inhelder, 1976).

A partir de estas evidencias y de su relevancia; surge la necesidad de describir y proponer un posible camino que permita modelar las estructuras y mecanismos mentales que movilizan estudiantes de primer y segundo año medio acerca de las nociones que subyacen a las (E-P) y la relación entre ellas, frente a situaciones fuera del ámbito matemático.

A partir de lo anterior, se expone la siguiente pregunta de investigación en términos de APOE; marco teórico que provee de elementos esenciales como la elaboración de una DGP y sustenta nuestro trabajo desde lo empírico a lo cognitivo.

¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales que evidencian, estudiantes de primer y segundo año medio sobre las nociones de (E-P) frente a situaciones extra-matemáticas?

[8] Acción: ejercicio de la posibilidad de hacer. Según la Real Academia Española y no en términos de APOE.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Ed Dubinsky y su equipo de investigadores llamado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), desde 1980 vienen desarrollando una idea distinta del concepto de enseñanza y su principal objetivo es la contribución al conocimiento básico sobre el pensamiento humano y que éste tenga utilidad principalmente en matemáticas, desarrollando así investigaciones en esta área, las que permiten aportar a su desarrollo curricular.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), APOS en inglés. Es una teoría cognitiva constructivista; basada esencialmente en el concepto de abstracción reflexiva introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico de los niños, las que luego prolonga a nociones matemáticas más avanzadas. Se apoya en la premisa de que un individuo puede aprender cualquier concepto matemático si se les proporcionan las estructuras necesarias para entender estos conceptos que se han construido (Dubinsky, 1991).

Según Trigueros (2005), esta teoría se encuentra en un desarrollo dinámico y continuo; pues se van introduciendo nuevos conceptos los cuales permiten analizar y comprender la forma en la que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de integrar los conceptos de las Matemáticas en un nivel superior.

2.1 Antecedentes de la teoría APOE

Según Dubinsky, para la construcción de esta teoría fueron tomados dos aspectos fundamentales de la teoría de Piaget; la primera tiene relación con la cercanía entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente del individuo; de allí se origina la preocupación de APOE por buscar explicaciones de carácter tanto epistemológico cómo psicológico (Mena-Lorca, 2011); y la segunda hace referencia al concepto de abstracción reflexiva.

En (Arnon, et al., 2014) aluden a Piaget, quien define al concepto de abstracción reflexiva como el mecanismo principal para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento; y el mecanismo mental por el cual todas las estructuras lógicas-matemáticas son desarrolladas en la mente del individuo. De este modo, los sujetos construyen su conocimiento matemático por medio de un proceso de abstracción, Piaget definió tres tipos de abstracción: empírica, reflexiva y pseudoempírica.

i. La abstracción empírica alude a los objetos del mundo externo y la adquiere un niño a partir de la manipulación de los objetos como parte de su interacción con el medio.

ii. La fuente de la abstracción reflexiva se encuentra en los individuos, quien construye relaciones entre fenómenos a través de la coordinación de acciones.

iii. La abstracción pseudo-empírica sucede cuando un individuo interactúa con los objetos y además establece relaciones a partir de ello, utilizándolos como apoyo para establecer coordinaciones.

Las estructuras previas que los estudiantes poseen determinarán la construcción del nuevo concepto; y las conexiones entre estas estructuras definirán el conocimiento matemático de ese individuo. Esta idea de conocimiento matemático que hemos venido usando, se define cómo: “Su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar esas situaciones”. (Dubinsky, 1996, p.32-33).

Es así, como la construcción de un concepto está relacionada con las estructuras previas de un individuo además de las ideas que se pueda hacer del objeto durante su experiencia con él. (Roa y Oktac, 2010)

> A Esto Piaget y García (2004) llaman asimilación, un mecanismo que consiste en apreciar al conocimiento matemático como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto donde el objeto es el contenido al cual el sujeto le impone una forma extraída de sus estructuras anteriores, pero ajustadas al contenido, y modifica el esquema asimilador por medio de acomodaciones o las diferenciaciones en función del objeto que acaba de asimilar. (Roa y Oktac, 2010, p.92)

De esta manera, Dubinsky y su equipo de investigación se plantean el objetivo de ayudar a los estudiantes a construir las estructuras adecuadas para cada nuevo concepto matemático y establecer las conexiones apropiadas para ese concepto con sus estructuras previas.

2.2 Noción de Esquema

Según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y reconstrucción continua cómo determinada por la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas.

La coherencia de un esquema está definida por la capacidad de un individuo para establecer si se puede utilizar para resolver una situación matemática en particular.

Según Trigueros (2005), un esquema se define: como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se relacionan de forma consciente o inconsciente en la mente de un sujeto en una estructura coherente, y que podrían ser utilizados en la solución de un problema matemático. Cuando una persona es enfrentada ante un problema matemático, evoca un esquema para resolverlo. Esto implica poner en juego aquellos conceptos de los que dispone y las relaciones entre ellos.

> Ante una misma situación, diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza así como el tipo de construcción del concepto que muestran, dependen de su conocimiento matemático. Se espera que a mayor conocimiento, se hayan construido más relaciones entre conceptos y que estas relaciones formen estructuras cognitivas coherentes en el sentido de que el individuo distinga claramente aquellas situaciones que puedan tratarse poniendo en juego un esquema específico y aquellas para las que no es adecuado. (Trigueros, 2005, p.11)

El desarrollo de un esquema se realiza pasando por tres fases o periodos: los niveles intra, inter y trans, que se suceden según un orden fijo. (Mena-Lorca, 2011).

- *El nivel Intra* se caracteriza por la focalización de acciones, procesos y objetos individuales, en forma aislada de otros ítems cognitivos de naturaleza similar.

- *El nivel Inter* se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre esas entidades cognitivas. En esta etapa, un individuo puede comenzar a agrupar ítemes y aún llamarlos con el mismo nombre.

- *En el nivel Trans* el individuo construye una estructura subyacente implícita o explícita, a través de la cual las relaciones desarrolladas en la etapa inter son entendidas; y que da al esquema una coherencia mediante el cual el individuo puede decidir qué pertenece a la amplitud del esquema y qué no pertenece.

2.3 Estructuras y mecanismos mentales.

En su teoría Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva, o mecanismos mentales: la interiorización, la coordinación, la inversión, la encapsulación y la generalización y estos mecanismos dan lugar a la construcción de estructuras mentales tales como la acción, proceso, objetos y esquemas.

Según Trigueros (2005) el paso por las etapas que componen las estructuras mentales no necesariamente se realiza de manera secuencial. Un sujeto puede permanecer mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí es seguro, es que la utilización que puede realizar un sujeto frente a una tarea matemática específica es distinta si responde con un nivel de acción, de proceso o a nivel de objeto.

Por consiguiente, en (Arnon, et al., 2014) se presenta una descripción de estas estructuras y mecanismos mentales:

Un concepto es inicialmente comprendido como una **acción**, la cual es externa, es decir, cada paso de la transformación de un objeto previamente concebido, debe ser realizado de forma explícita y encaminado a través de instrucciones externas.

La concepción acción es considerada relevante y necesaria en el desarrollo de otras estructuras. Nuevas acciones podrían derivar en estructuras de orden superior, estas acciones podrían ser tanto básicas como complejas, según el contexto. Una persona que sólo se limita a una *concepción de acción* se basa en señales externas. Ésta estructura es considerada como las más primitiva y fundamental, además de la más recurrente en la enseñanza tradicional.

Los **procesos** son construidos a través de la utilización de uno de los dos mecanismos mentales, la interiorización y la coordinación, cada uno de estos mecanismos conduce a nuevos procesos. Esta estructura se caracteriza por la capacidad del sujeto de poder realizar los pasos de forma imaginativa sin tener que hacer cada uno de ellos de forma explícita, además de poder saltar algunos y realizarlos a la inversa.

El mecanismo de interiorización es lo que permite que este cambio mental sea posible, además de que el sujeto se haga consciente de esa acción, pueda reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones. Dubinsky define a este mecanismo como una actividad específica del mundo externo al mundo interno.

"La encapsulación se produce cuando un individuo, aplica una acción a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica (procesos) como una estructura estática en la que pueden ser aplicadas acciones". (Arnon, et al., 2014, p.21).

Según Gamboa (2013), el mecanismo de encapsulación es considerado el más importante en la construcción del conocimiento matemático, a la vez, es el más complejo de lograr; incluso puede suceder que demore mucho en ocurrir e incluso no ocurra. Podemos notar cuando un sujeto ha logrado encapsular el proceso en un **objeto cognitivo**; cuando las transformaciones realizadas pueden actuar sobre la totalidad y puede construir tales transformaciones de forma explícitas o en la imaginación.

Según Arnon, et al. (2014) a partir de (Dubinsky *et al*., 2005, p.5), "un individuo tiene una concepción objeto de un concepto si él puede desencapsular el concepto de vuelta al proceso subyacente y construir transformaciones que pueden ser aplicadas al objeto".

"El **mecanismo de coordinación** es indispensable en la construcción de algunos objetos. Dos objetos pueden ser desencapsulados, sus procesos coordinados, y el proceso coordinado encapsulado para formar un nuevo objeto". (Arnon, et al., 2014 p.23)

Según Gamboa (2013) el conocimiento tiene dos formas de construcción a partir de APOE: la primera de ellas es a través de las acciones; las que se interiorizan en procesos los cuales se pueden coordinar en otros procesos y/o revertir en otro proceso. Un proceso se encapsula en un objeto. La segunda forma es posible a través de la desencapsulación de objetos; donde un objeto se puede desencapsular en el proceso que lo generó, de esta forma el proceso se puede coordinar con otros procesos–los cuales se pueden haber generado ya sea por interiorización y/o desencapsulación – dando origen a nuevos procesos los cuales se pueden encapsular en un objeto distinto del que se inició por desencapsulación.

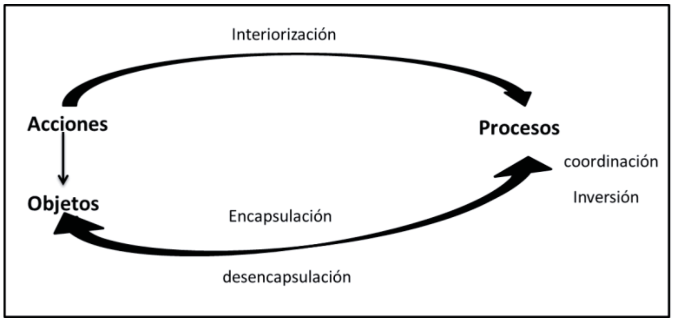


Figura 3: Esquema de la Teoría APOE
Fuente: Asiala et al. 1996

2.4 Descomposición genética

"Una DG es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante pueda necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico" (Arnon, et al., 2014, p.27). Esta DG puede ser utilizada como una herramienta tanto descriptiva como predictiva, pues permite detallar las estructuras que intervienen en el aprendizaje de un concepto, e incluir la descripción de las estructuras previas necesarias con las que debe contar un estudiante como requisito en su aprendizaje.

Por otro lado, puede detectar las fuentes de dificultades de algún concepto matemático particular, surgidas en el proceso de aprendizaje, lo que podría explicar las diferencias en el desarrollo de los estudiantes en cuanto a las variaciones en su rendimiento académico y por último, servir de guía en el diseño de la instrucción.

Sin embargo, se establece que una DG no explica lo que sucede en la mente de una persona, ya que eso es probablemente desconocido, no predice si es que una persona aplicara una cierta estructura al momento de serle necesaria, ni tampoco ofrece análisis teórico exclusivo de cómo se aprenden las matemáticas. La teoría APOE reconoce que una persona puede utilizar diferentes caminos de aprendizaje.

2.4.1 Diseño y refinamiento de una DG

En cuanto a la elaboración del diseño de una DG; ésta surge de la comprensión matemática del propio investigador sobre una porción de conocimiento matemático; su experiencia como docente; investigación previa del pensamiento de los estudiantes sobre el concepto; desarrollo histórico del concepto en cuestión; y/o análisis de texto o materiales didácticos relacionados con el concepto. (Arnon, et al., 2014)

Según Asiala et al. (1996) en (Arnon, et al., 2014), una DG tiene que ser probada experimentalmente con el objetivo de poner a prueba la validez del modelo. Por consiguiente, si las construcciones descritas en la DG son realizadas por los estudiantes, entonces se podría considerar un modelo compatible; en el caso de que construyan el concepto de una manera diferente, entonces ésta requiere de un refinamiento; y si las discrepancias son demasiado grandes, habría que elaborar una nueva. Es así cómo, cada refinamiento conduce a una nueva revisión de la instrucción y ésta a su vez proporciona una oportunidad para el nuevo análisis de los datos. El ciclo de refinamiento-revisión-análisis de los datos proporciona una DG muy cercana a la cognición del concepto por parte de varios sujetos. Y éste puede ser utilizado en el diseño de instrucción.

Según Mena-Lorca (2011) este refinamiento ocurre de dos maneras: por una parte, la descomposición genética guía el análisis, pues hay que verificar si acaso las construcciones mentales propuestas parecen haber sido realizadas por los estudiantes; por otra, los resultados de ese análisis pueden traducirse en modificaciones en la descomposición genética.

2.5 Ciclo de Investigación de APOE

Un proyecto de investigación basado en la teoría APOE integra tres componentes: *análisis teórico*, *el diseño y aplicación de instrumentos* y *análisis y verificación de los datos.*

Las tres componentes del ciclo de investigación se apoyan mutuamente.

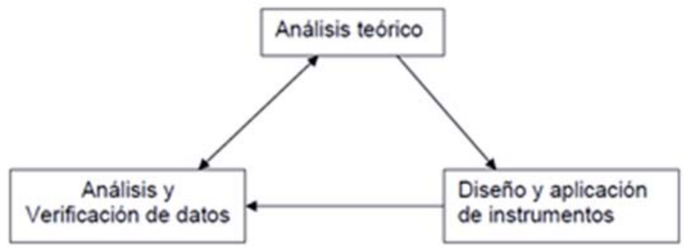


Figura 4: Ciclo de investigación de APOE
Fuente: Asiala et al,. 1996

A continuación, se verá en detalle la forma en cómo se llevan a cabo estas tres componentes:

2.5.1 Análisis teórico.

La investigación comienza con un análisis teórico de la cognición del concepto matemático, el cual da lugar a la elaboración de una descomposición genética inicial.

> El análisis teórico consiste fundamentalmente en describir las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación y asimilación) que un individuo puede realizar para construir un determinado concepto matemático.
>
> De esta manera, es posible considerar las interrelaciones que un estudiante puede establecer entre las construcciones que ya ha hecho y un concepto nuevo que asimila o construye. (Mena-Lorca, 2011, p.83)

Considerando lo descrito anteriormente, en cuanto a la elaboración de la DG, este análisis teórico considera: en primer lugar, la comprensión y la experiencia del investigador en cuanto al objeto de estudio – como señalan (Trigueros, 2005) y (Mena-Lorca, 2011), se comienza desde la reflexión y definición matemática acerca de los conceptos–. En segundo lugar, se utilizan los resultados de investigaciones previas. En tercer y último lugar, el análisis de libros de texto y otros aspectos que se estime que contribuyan a la delineación de un camino viable para la construcción de un concepto determinado.

2.5.2 Diseño y aplicación de instrumentos

Según Parraguez (2009) posteriormente a la elaboración de la descomposición genética provisoria, es necesario documentarla; es decir, que es imperioso determinar la viabilidad del camino señalado en ella. A partir de esto, se elaboran y aplican instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la DG y reflejar las construcciones expuestas en ella; mediante los cuales los estudiantes pueden construir dichos conceptos.

La aplicación de los instrumentos considerados en nuestra investigación– actividad exploratoria y entrevista individual semi-estructurada– fueron aplicadas previamente al diseño de la DGP. De igual manera, formaron parte de la verificación de la viabilidad del camino señalado.

2.5.3 Análisis de los datos

Esta etapa consta del análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento; éstos deben ser analizados desde la descomposición genética elaborada identificando los elementos o construcciones que fueron considerados y los que no. El objetivo es refinar la DGP.

Según Mena-Lorca (2011), este ciclo de investigación se reitera según se estime conveniente para llegar a una comprensión más profunda de cómo el concepto podría desarrollarse en la mente del estudiante.

La aplicación y el análisis de los datos en nuestro trabajo, permitieron refinar y elaborar una actividad exploratoria y una entrevista individual semi-estructurada mucho más detallada y minuciosa, que pudieran arrojar resultados cada vez más precisos, que finalmente contribuyeran con la elaboración y diseño de una DGP mucho más cercana a la cognición de los estudiantes en cuanto a los conceptos subyacentes de las (E-P).

Cada descomposición genética debe ser el resultado de la aplicación completa de las tres componentes del ciclo de investigación, lo que va a permitir documentarla con datos empíricos.

Sin embargo, pese a que nuestro trabajo consta de las tres componentes, éstas no fueron desarrolladas secuencialmente según lo expuesto.

CAPÍTULO 3: HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

3.1 Supuesto o hipótesis

Algunos estudiantes de primer y segundo año medio, pese a no tener una noción matemática de los conceptos involucrados– en nuestro caso sobre (E-P)– frente a situaciones diarias, evidencian la utilización inconsciente de algunas de sus propiedades.

3.2 Objetivos de investigación

3.2.1 Objetivo general

Describir las construcciones y mecanismos mentales que muestran y movilizan estudiantes, acerca de los conceptos que subyacen a las (E-P), frente a situaciones cotidianas, a través de una Descomposición Genética provisoria en base a la teoría APOE.

3.2.2 Objetivos específicos

- Realizar un estudio cognitivo, histórico epistemológico, de investigaciones reportadas y curricular en cuanto al concepto en estudio.

- Diseñar y aplicar una actividad exploratoria y una entrevista individual semi-estructurada a estudiantes de primer y segundo año medio, que permita evidenciar a grandes rasgos la utilización inconsciente de los conceptos involucrados en la noción de (E-P).

- Analizar los datos de la aplicación de la actividad y entrevista.

- Elaborar una Descomposición Genética Provisoria, a partir de los antecedentes de investigación.

- Entregar resultados y conclusiones.

CAPÍTULO 4: METODOLOGÍA

Según lo descrito previamente, el marco teórico que sustenta esta investigación, cuenta con un ciclo de investigación propio, el cual es propuesto por RUMEC y se perfila bajo un paradigma cualitativo con un enfoque hermenéutico, que permite utilizar como método de investigación: el estudio de casos.

Este ciclo se constituye por tres componentes: Análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y análisis y verificación de datos; sin embargo, la segunda etapa ha sido modificada, al igual que en la investigación de (Parraguez, 2009) por el diseño y aplicación de instrumentos.

Este estudio utiliza las tres componentes de investigación del ciclo; ***el análisis teórico*** que incluye: la revisión de distintas investigaciones previas en cuanto al tema de estudio, las que nos proporcionarán aspectos tanto epistemológicos como genéticos; y junto a los antecedentes históricos nos permiten dilucidar sobre la naturaleza de los conceptos y relacionarla con el desarrollo en la mente de los estudiantes. Además se incorpora la revisión del currículum de la Educación Parvularia hasta primero básico, donde se originan algunas de las nociones involucradas en los conceptos matemáticos (E-P).

Este análisis nos faculta para ***diseñar y aplicar dos instrumentos de recogida de información***: una actividad exploratoria y una entrevista semi-estructurada, para finalizar con ***el análisis y verificación de los datos*** que dará pie a la elaboración de la DGP.

Como primer instrumento de recogida de datos, se construye una actividad grupal exploratoria y posterior a esta actividad se realiza una entrevista individual semi-estructurada a dos estudiantes de enseñanza media de diferentes niveles. Tanto la actividad grupal y las entrevistas están basadas en las principales nociones que constituyen los conceptos de (E-P) descrita en el trabajo de (Mena-Lorca, 2011) y el teorema que los liga RE/P. Cada una de las preguntas o actividades presentadas, tiene relación directa con cada uno de éstos conceptos[9].

Para la aplicación de la actividad grupal, fueron escogidos 11 estudiantes de primer año medio, cuyas edades fluctúan entre los 14 y 15 años, de un Liceo Municipal de Valparaíso y posteriormente la aplicación de la entrevista semi-estructurada a dos estudiantes de primer y segundo año medio, de 14 y 15 años de edad, la primera de ellas pertenece al mismo liceo y la segunda a un colegio particular subvencionado.

Los criterios de selección de los 11 estudiantes además de la estudiante de primer año medio, se apoyan sobre la disponibilidad de éstos, al formar parte la investigadora del cuerpo docente del establecimiento al que pertenecen y la segunda, al ser aplicable la entrevista en un ambiente fuera del ámbito académico.

[9] Ver anexo 1.

4.1 Análisis teórico

A partir de lo establecido como parte del ciclo propio de investigación de APOE; se inicia con un análisis teórico que incluye el estudio del currículo, un análisis histórico epistemológico, un estudio epistemológico genético, además de investigaciones reportadas y la experiencia de estudiantes. La que se resume como sigue:

4.1.1 Análisis curricular

Los conceptos de relación de (E-P) no son nociones que podamos encontrar– al menos de forma explícita– dentro del currículo de Educación Básica y Media. Sólo es posible apreciar su enseñanza formal dentro de algunos programas de carreras universitarias como Ingenierías, licenciatura en Matemática, pedagogía en Matemática, entre otras.

No obstante, si consideramos la génesis cognitiva detrás de estos conceptos podemos apreciar la relevancia de este tema y su presencia desde los primeros niveles educativos, con diferentes enfoques.

Es así, como las bases curriculares de la Educación Parvularia, (Mineduc, 2001) se encuentran ligadas a las relaciones del tipo lógico-matemático, vinculado con la estructura operatoria de la clasificación, donde uno de sus objetivos es: la de interpretar y explicarse la realidad estableciendo relaciones lógico-matemáticos, cuyos aprendizajes esperados varían según el ciclo de aprendizaje y dentro de éstos se encuentran la identificación de los atributos y propiedades de los objetos, estableciendo distintas relaciones de agrupación de forma progresiva, de semejanza y diferencias a partir de la clasificación de objetos.

En cambio, desde la Educación Básica–específicamente desde segundo básico– a la Educación Media, podemos encontrar una variedad de objetos matemáticos considerados dentro de los programas de estudio propuestos por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc, 2015), que satisfacen las propiedades correspondientes, como se ha señalado anteriormente, entre ellos: la relación de semejanza establecida en el conjunto de triángulos en el plano (o en el espacio); la relación de paralelismo que se puede establecer en el conjunto de rectas en el plano (o en el espacio). Entre varios otros.

4.1.2 Análisis histórico epistemológico

De acuerdo a lo analizado, la acción de clasificar elementos de un conjunto, subyace propiedades tanto de relaciones de equivalencia como de particiones y como tal esta acción ha estado presente desde el inicio de la humanidad generando y aportando tanto al desarrollo de nuestra sociedad como al matemático.

Por otra parte, sabemos–a partir de lo analizado en el capítulo 2– que una de las relaciones fundamentales consideradas en la construcción de APOE, extraídas de la teoría de Piaget es; la cercanía entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente del individuo; esto nos permite relacionar el estudio epistemológico desde su sentido histórico al genético; es decir, que hay ciertos aspectos en el desarrollo de la historia de la humanidad que se van replicando, de alguna manera, en el individuo cuando aprende.

En consecuencia, podemos concluir, a partir de lo estudiado –análisis histórico-epistemológico y genético – como la humanidad, según el tiempo transcurrido, ha ido mostrando dificultades para formalizar y expresar con propiedad los conceptos de (E-P) y esto también se evidencia en los individuos, los cuales presentan los mismos inconvenientes.

Por último, desde el descubrimiento de la agricultura–con la utilización del concepto de clasificación–; el hallazgo del papiro de Ahmès– donde encontramos conceptos matemáticos que cumplen con ser relaciones de equivalencia–; hasta la formalización de la lógica–Principia Mathemática con Bertrand Russell–; se puede evidenciar cómo sujetos sin tener una noción clara ni explícita del concepto, sin tener consciencia de aquello, utilizan y emplean sus propiedades, al igual que alguien que muestra dominio de los objetos matemáticos.

4.1.3 Análisis epistemológico genético

Podemos extraer de la investigación de Piaget e Inhelder (1976), bajo las hipótesis que delineaban su estudio; en primer lugar, cómo ciertos factores estructurales que se encuentran en la génesis del concepto de la clasificación– el lenguaje, la percepción y los esquemas sensomotrices–, podrían influir en la construcción de las nociones subyacentes de las (E-P). Es así cómo, desde los niveles pre-verbales del desarrollo, se pueden observar conductas de clasificación: reconocen a partir de los esquemas sensomotrices– que incluye la estructura cognoscitiva de la percepción – las características de utilización de ciertos objetos y las comparan con esquemas de asimilación de acuerdo con las relaciones de semejanza y diferencia. Y la utilización posterior del lenguaje, contribuiría a la formación de categorías, la transmisión de las clasificaciones y la creación sucesiva de varias otras relaciones de semejanza y diferencia.

En segundo lugar, se establecen formas de organización para estructuras operatorias que están presentes en las clasificaciones: las clases y relaciones. Por ejemplo: se establecen las similitudes y diferencias que deben poseer elementos de igual y distintas clases, comprensión de la relación parte-todo, la utilización correcta de cuantificadores, además de una serie de propiedades referentes a la formación de clases a partir de una clasificación, las cuales fueron detalladas[10] en el capítulo 1.

[10] 1.3.4 origen de la operación de clasificación.

Por otra parte, Kamii (1994) apoyándose en las investigaciones de Piaget, sostiene que tanto el conocimiento lógico matemático, cómo el conocimiento físico, se construyen a través de dos tipos de abstracciones: la empírica y la reflexiva. El conocimiento lógico matemático está ligado, según este estudio, a las relaciones construidas mentalmente por cada individuo; las relaciones que realiza por ejemplo entre objetos pueden ser relaciones de: igualdad, de diferencia, entre otras.

Correspondientemente, se afirma que la construcción del conocimiento físico, se encuentra supeditada a un marco de referencia lógico-matemático, que permita relacionar las nuevas observaciones con conocimiento que ya posee, por lo que para la abstracción empírica, que se relaciona con la abstracción de las propiedades de los objetos, es necesario un marco de referencia lógico-matemático, el cual se construye mediante la abstracción reflexiva.

Por lo tanto, el marco de referencia lógico matemático que provee la abstracción reflexiva es vital en la construcción de esquemas de clasificación, que permitan distinguir entre las propiedades de los objetos y establecer tipos de relaciones.

Es así, como se intenta comprender y modelar, a partir del siguiente diagrama, un camino cognitivo previo a la manifestación de las propiedades de las (E-P).

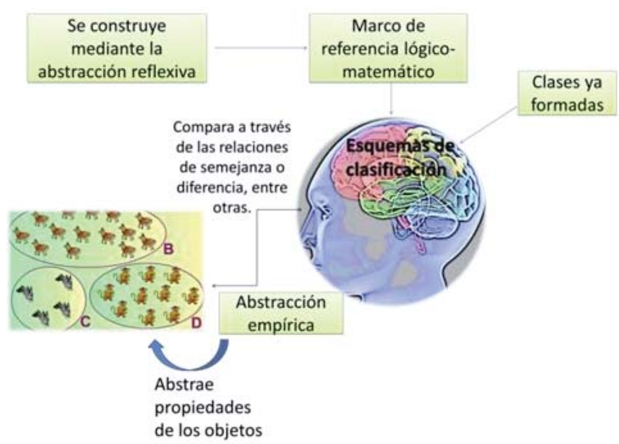


Figura N°5: Construcción de esquemas de clasificación.

4.1.4 Aplicación de actividad exploratoria y entrevista semi-estructurada

El diseño de esta actividad y la entrevista se basan en el teorema RE/P propuesto en el trabajo de (Mena-Lorca, 2011) y el cual es explicitado en el capítulo 1.

La actividad exploratoria se realizó con un grupo de 11 estudiantes dentro de la sala de clases de la Institución Educativa a la cual pertenecen. Ésta consiste en una actividad cinésica donde la investigadora da algunas instrucciones de movimientos que deben efectuar los alumnos y en base a éstos realiza preguntas. Por otro lado, las entrevistas individuales fueron aplicadas, una de la manera formal, es decir, dentro del ámbito educativo y la segunda fuera del ámbito escolar. La razón de ésta última, tiene relación con nuestra hipótesis y objetivos planteados, los cuales se enfocan en evidenciar las nociones fuera del ámbito matemático, e inmerso en una situación cotidiana.

Para la aplicación de la entrevista semi-estructurada, se les presenta a las estudiantes un conjunto de distintos tipos de frutas y en base a esto la entrevistadora realiza preguntas. Ambas actividades constan de un registro audiovisual, que se designa por la letra V1 (vídeo 1), V2 (vídeo 2), etc. y se describe el minuto exacto en que se realiza cierta pregunta o respuesta, por ejemplo: V1. 7:55 (registro en el vídeo 1 en el minuto 7 con 55 segundos).

Los resultados de la aplicación de ambos instrumentos, junto con los antecedentes del análisis teórico dan pie a la elaboración de la descomposición genética provisoria de APOE.

A continuación se detallan tanto los resultados de la actividad grupal cómo los de la entrevista semi-estructurada. Éstos son presentados, en algunos casos, de forma combinada a medida que las preguntas y/o respuestas apunten a la misma propiedad o teorema.

Se presenta al comienzo la propiedad o teorema a la que apuntan, seguido del resultado de la actividad y entrevistas, para finalizar en cada sección con la construcción mental del estudiante en relación a su respuesta y, en algunos casos, registro visual.

Teorema RE/P
Toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A induce una partición $P_{\mathcal{R}}$ en A.

Entrevista

Se les presenta a las estudiantes un conjunto de fotos de distintos tipos de frutas y se les pregunta:

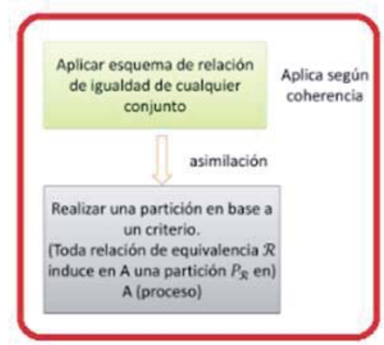
Informante 1.

Entrevistadora:	¿Qué puedes hacer con esos elementos? ¿Que se te ocurre? ¿Podrías explicar lo que hiciste?(*V1. 00:02)*
Estudiante:	Dividirlos, por fruta por lo que son, los iguales en un grupo. *(V1-00:08.)*
	El criterio que utilice es que tienen que ser "*iguales"*. En este grupo solo hay peras por ejemplo *(V1.03:02)*
Entrevistadora:	¿Qué provocó el criterio en el conjunto? *(V1.03:28)*
Estudiante:	Que se separaran.(V*1.03:59)*

Informante 2.

Entrevistadora:	¿Que se te ocurre hacer con esos elementos? *(V1. 00:07)*
Estudiante:	Ordenarlos por tipo de fruta o por tipo de color. *(V1. 00:09)*
Entrevistadora:	Hazlo entonces! ¿Qué es lo que acabas de hacer? [Le pregunta luego de haber realizado la clasificación]
Estudiante:	Ordenarlos por tipo de color, por ejemplo las rojas, las que son solamente rojas van acá, las que tienen una mezcla de rojo y verde ahí, las que son verdes, las que tienen una mezcla de verde con otro color, las amarillas y esos quedaron solitos porque son diferentes [apuntando a dos frutas de su único color].
Entrevistadora:	¿Qué provocó el criterio en el conjunto?
Estudiante:	Separarlos, seleccionarlos, según el orden que yo determiné, que sería: el color. *(V1. 02:45)*





Teorema RE/P

Toda relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en A induce una partición $P_{\mathcal{R}}$ en A y toda partición P en A define una relación de equivalencia $\mathcal{R}_p$ en A.

Actividad exploratoria

"E1G1" hace referencia a un estudiante perteneciente al grupo 1.

"E2G1" se refiere a un estudiante distinto al anterior pero del mismo grupo y así sucesivamente.

La investigadora forma dos grupos con los estudiantes. (G1 y G2), y les solicita que uno de los grupos se divida según algún criterio establecido por ellos sin explicitarlo al grupo contrario, de tal manera que el otro grupo deba reconocer aquel criterio de clasificación. Posteriormente se cambian los roles. *(V2. 00:11)*

El primer grupo (G1) realiza una partición relacionada con el criterio "tipos de ropa".

Entrevistadora:	¿Cuál es el criterio? [Preguntándole al grupo que debe determinar el criterio] *(V2. 01:16)*
E1G2:	Que ella no tiene polerón y las otras sí. (*V2. 01:16*)

Luego es el turno del otro grupo (G2); se agrupan según un criterio, y G1 debe determinarlo.

E2G1:	Que tiene buzo, que tiene zapatillas de color. *(V2. 02:02)*
Entrevistadora**:**	¿Cuál fue el criterio utilizado? *(V2. 02:10)*
EstudiantesG1 y G2:	Según las zapatillas, por el color. *(V2. 02:13)*
Entrevistadora:	O sea que dos personas están en el mismo grupo si es que…
E3G2:	Tienen el mismo color de zapatos. *(V2. 02:23)*

G1 vuelve a realizar otra partición y G2 debe determinar el criterio.

E4G2:	Que tú tienes aros y ellas no. Porque tienen la partidura al medio. [apuntando a uno de los grupos] *(V2. 04:01)*
E4G2:	Ellas tienen corbata y ella no. *(V2. 04:17)*
Entrevistadora:	Entonces ¿Cuál sería el criterio general?
E4G2:	Que ellas tienen polera y las otras tienen camisa y corbata. *(V2. 04:33)*
Entrevistadora:	¿Cuál sería el criterio general en ese caso? *(V2. 04:37)*
E1G2:	Que se separaron porque unas no tenían corbatas y las otras sí. *(V2. 04:41)*
Entrevistadora:	Dos personas pertenecen al mismo grupo si cumplen... *(V2. 04:40)*
E5G2:	Si están formales o no formales. *(V2. 04:45)*

G2 realiza una partición según el criterio “tipos de zapatos, con o sin cordones”.

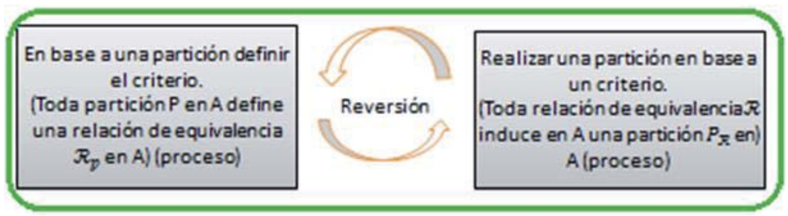
Entrevistadora:	¿Cuál es el criterio?
E6G1:	Que los zapatos de ellos son cerrados y los de ellas son chinitas. *(V2. 06:46)*
Estudiantes:	No, por ahí va. *(V2. 06:51)*
E4G1:	Ellos tienen cordones y los otros no.

Entrevistadora: En ese caso ¿Cuál es el criterio en general? dos personas pertenecen al mismo grupo sí…

E4G2: Si tienen los cordones. *(V2. 07:52)*

E1G2: Porque ellos tienen cordones y nosotros no. *(V2. 07:56)*

E3G2: Si nosotros tenemos cordones pertenecemos al grupo, si ellos no tienen cordones no pertenecen al grupo. *(V2. 8:23)*



Propiedad
Verifican dos de las tres propiedades que demuestran que una relación es una relación de equivalencia:
Simétrica $(\forall a, b \in A)\ (a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a)$
Transitiva $(\forall a, b, c \in A)\ (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c)$

Actividad exploratoria

La investigadora realiza una simulación con grupos de amistad (simula que ciertos estudiantes son amigos sin serlo) y según eso les pide realizar una partición según grupos de amistad. *(V4. 01:22).*

En este caso, de manera intencional, la entrevistadora relaciona a los estudiantes por amistad de tal manera que al momento de agruparse, se darán cuenta que no todos los pertenecientes a una misma clase, serán amigos.

Entrevistadora:	Sepárense por amistad. ¿Entonces dos personas pertenecen al mismo grupo si son…? *(V4. 01:52)*
Estudiantes:	Amigos. *(V4. 02:22)*
Entrevistadora:	¿Cada persona del grupo cumple con el criterio?
E7**:**	No, porque no son amigas. *(V4. 02:28)*
Entrevistadora:	¿Quiénes no son amigas?
E7:	Ellas dos de allá y ellas dos tampoco [apuntando a dos de los tres grupos] *(V4: 02:31)*
Entrevistadora:	¿Qué sucede en este caso? ¿Qué sucedió con ese grupo por ejemplo? [apuntando a un grupo donde no todas las estudiantes son amigas y una de ellas tienen amistad con otra estudiante de otro grupo] *(V4. 03:07)*
E5:	Que ella no puede estar aquí porque no somos amigas de ella. [apuntando a una estudiante de otro grupo, que si era amiga de una estudiante de ese grupo] *(V4. 03:24)*
Entrevistadora:	¿Y tú eres amiga de ella según la simulación? [refiriéndose a una estudiante del mismo grupo] *(V4. 03:27)*
E5:	Sí.
E2:	Yo era amiga tuya, pero tú no eras amiga de ella. *(V4. 03:35)*
E1:	Que ella sea amiga de ella o ella sea amiga de ella da igual [apuntando a sus dos compañeras de grupo de forma bidireccional] aquí yo soy amiga de ella, pero ella no es amiga de ella [apuntando a la otra compañera] y ella si es mi amiga ¡aquí de las tres no todas somos amigas! *(V5. 00:00)*
E6:	Ella es amiga de las dos pero ellas no son amigas [dice otra compañera de otro grupo]. *(V5. 00:26)*
Entrevistadora**:**	¿Qué es lo distinto en ese caso? [Apuntando a otro grupo] *(V5. 00:30)*
E5:	Que ella es mi amiga (apuntando a otro grupo) pero yo no puedo estar ahí porque no soy amiga de la Monserrat. *(V5. 01:05)*
E5	Entonces porque estoy yo acá si yo no soy amiga de ella. *(V5. 01:13)*

E1: Porque eres amiga mía.

E7: Pero ella también es amiga de ella (haciendo una comparación entre una estudiante de su grupo con otra de otro grupo). *(V5. 01:18)*

Entrevistadora**:** ¿Qué es lo distinto en este caso? ¿Qué diferencia pueden notar entre la división generada ahora y las anteriores? *(V5. 01:35)*

E1 Por ejemplo aquí no todos somos amigos. *(V5. 01:58)*

Entrevista

Posteriormente a la clasificación según el criterio “tienen el mismo color”, la investigadora se enfoca en una de las clases, en este caso, la clase del color rojo y en base a eso les pregunta:

Informante 1

Entrevistadora: Acá tenemos todos los elementos que son del color rojo [apuntando a una de las clases de frutas rojas, según el criterio “tienen el mismo color”]¿Cómo sabes que son todos rojos? Si detallamos mejor. Si tomo dos elementos al azar ¿Cómo me aseguro que cumplen con ese criterio de que son rojos? *(V3.02:52)*

Estudiante: Porque los estoy viendo. Porque los dos tienen el mismo color.

Entrevistadora: ¿Cómo sería esa distinción? explica lo que piensas cuando haces esa distinción.

Estudiante: En rojo, los miro a los dos, los comparo, los miro y tengo que ver si son rojos.

Entrevistadora: ¿Cómo podrías saber si estos elementos también son rojos, con estos que ya tienes.

Estudiante: También los comparo.

Entrevistadora: ¿Podrías detallar la comparación, mostrarla paso a paso?

Estudiante: Los comparo por el color, comparo este con este y después miro el otro y los comparo también. Con los demás hago lo mismo.

Entrevistadora: ¿Y en el caso que fuese un solo elemento? ¿Se podría comparar?

Estudiante: No, porque no hay otro con quien comparar. *(V3. 04:25)*

Informante 2

Entrevistadora: ¿Qué puedes decirme respecto a los elementos que tenemos ahí? [Apuntando a la clase de frutas rojas] *(V2. 00:39)*

Estudiante: Tienen el mismo patrón de colores. Todos son derivados del rojo.

Entrevistadora: El hecho de que digas que todos son rojos, ¿podrías detallarlo? ¿Cómo sabes que todos son rojos?

Estudiante: En cada una de las frutas, todos tienen el color rojo, en distintas tonalidades pero es el mismo color.

Entrevistadora: Y si yo tomo dos elementos al azar, ¿me aseguro de que serán rojos?

Estudiantes: Sí.

Entrevistadora: Y ¿cómo?

Estudiante: Comparo ese con ese ambos son rojos, lo mismo sucede con ese, con ese, con ese. Entonces si tú comparas todos los elementos con esa guinda todos tendrían el mismo color. *(V2. 01:35)*

Entrevistadora: ¿Cómo harías esa comparación?

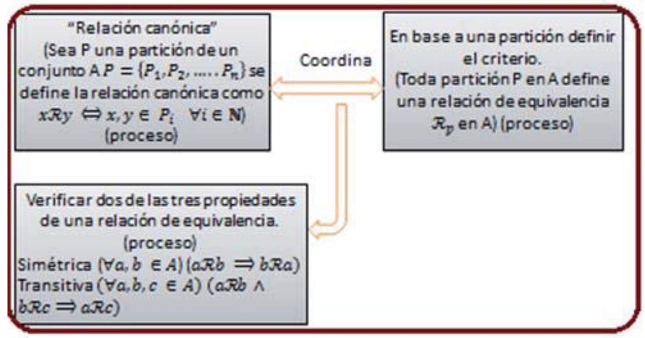
Estudiante: De partida tomo uno, por ejemplo ese, y ahí tomaría otro cualquiera, si yo lo comparo con respecto a ese [y junta dos, después tres, luego cuatro frutas].

Entrevistadora: Ya pero haber primero fuiste comparando así: ese con ese [compara sólo entre dos elementos] ¿Cómo sería esa comparación? ¿Qué es lo que dices para comparar?

Estudiante: Primero debo mirarlo bien y veo que el que los cubre es el color rojo, ambos tienen el color rojo, entonces ambos tienen esos dos colores en común.

Entrevistadora: ¿Algo más de esa comparación?

Estudiante:	No.
Entrevistadora:	¿Entonces tú estás comparando este con este, o ese con ese? [aludiendo a la propiedad simétrica]
Estudiante:	Las dos comparaciones serían iguales*. (V2: 02:45)*
Entrevistadora:	¿Qué más podrías hacer?
Estudiante:	Seguir comparándolos con los otros elementos. Por ejemplo ya sé que esos dos tienen el mismo tono y los demás también cumplen con la misma tonalidad.
Entrevistadora:	Por ejemplo, si yo quisiera saber si este cumple también [apuntando a una tercera fruta] ¿Qué harías? ¿Compararías este con este, o con quién? ¿Podrías detallar esa comparación?
Estudiante:	Si lo comparo con este, son iguales si lo comparo con ese ya son diferentes tonalidades.
Entrevistadora:	¿Y ese con ese?
Estudiante:	Igual son diferentes tonalidades, pero sigue cumpliendo con el color rojo
Entrevistadora:	¿Eso me serviría para todos los demás? ¿Sería una forma de asegurarme de que todos tienen el mismo color?
Estudiante:	Sí.
Entrevistadora:	¿Me podrías detallar algo más? ¿Para que serviría hacer ese tipo de comparación?
Estudiante:	Es más para asegurarse de que están ordenados de manera correcta, simplemente eso.



Propiedad
Verifica que una familia de subconjunto de un conjunto dado es una partición
$(\forall E \in P)(\forall F \in P)(E \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow E = F)$
$U_{e \in P} E = A$

Entrevista

Se realizan las siguientes preguntas, posterior a la clasificación realizada por la estudiante, del conjunto de frutas, según el criterio "tipos de frutas".

Informante 1

Entrevistadora: ¿Existen elementos de un conjunto que no cumplan con las características del criterio utilizado? ¿Todos cumplen? ¿Aquí todos son del mismo tipo de fruta [apuntando a un grupo en particular? *(V1.7:29)*

Estudiante: No aquí hay una mandarina. Ahora sí. [Moviendo ese tipo de fruta donde corresponde]. Si todos cumplen. *(V1. 7:55)*

Entrevistadora: ¿Existe alguna relación de elementos de grupos distintos? ¿Qué los relaciona a este con este otro? ¿Hay alguna relación

	[apuntando a distintas clases] *(V1.07:58)*
Estudiante:	No ninguna.
Entrevistadora:	¿Me podrías decir algo más? ¿Porque dices que no existe ninguna relación?
Estudiante:	Porque estas son frambuesas y estas son naranjas, la única relación que podrían tener es que son frutas, pero nada más*. (V1. 8:18)*
Entrevistadora:	En comparación con el conjunto inicial [La clasificación por tipo de fruta] ¿Qué podrías decir? ¿Podría volver al estado inicial? *(V1. 13:42)*
Estudiante:	Juntándolo todo de nuevo, es posible volverlo al estado inicial. *(V1. 14:04)*
Entrevistadora:	¿Podrías pensar esto de forma general, en otros conjuntos? Que veas en cualquier parte. *(V1. 14:47)*
Estudiante:	Con los libros de clases, los tienen que separar por biología, matemática, lenguaje, química. Que todos tienen que ser de un ramo igual, de la misma asignatura. Cuando estamos en mi casa con la ropa, porque la ropa se separa por la persona que corresponde con su ropa. El criterio seria la ropa que es mía y la de mi hermana. *(V1.15:25)*

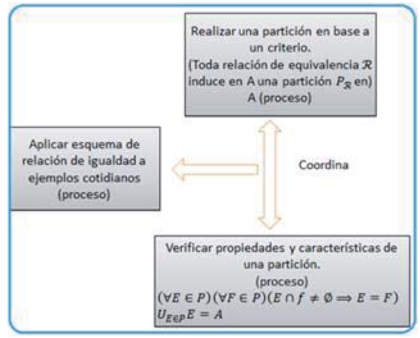
Posteriormente a la clasificación realizada por el criterio “tienen el mismo color” se realizan las siguientes preguntas:

Informante 2

Entrevistadora:	¿Qué relación tienen este con este? ¿Hay alguna relación? [apuntando a clases distintas] *(V1. 03.28)*
Estudiante:	No. O sea son frutas, es como la única relación que tienen.
Entrevistadora:	¿Y entre elementos de un mismo grupo, qué relación hay?
Estudiante:	Tienen el mismo color.

Posteriormente de haber realizado otra clasificación según otro criterio, la entrevistadora le pregunta lo siguiente:

Entrevistadora:	En comparación con el conjunto inicial ¿Qué podrías decir? ¿Podría volver al estado inicial?¿y qué tendrías que hacer? *(V1. 10:55)*
Estudiante:	Si, tendría que volver a ordenarlos por color.
Entrevistadora:	Me refiero al estado inicial, antes de aplicar el primer criterio.
Estudiante:	Sí, pero no habría ningún orden, no estarían agrupados por ninguna similitud.
Entrevistadora:	¿Entonces qué sucede si yo uno los conjuntos?
Estudiante:	Se mezclarían, se desordenaría, simplemente eso, si llegara a unir los conjuntos se unirían solamente porque son frutas, no tendrían el orden por color, o por tipo de fruta, no habría un orden sino simplemente estarían todos mezclados *(V1. 12:17)*
Entrevistadora:	Y eso ¿lo volvería al conjunto inicial?
Estudiante:	Sí.
Entrevistadora:	¿Podrías nombrarme otros criterios, no específicamente de este conjunto, sino en cualquier parte? *(V1.13:00)*
Estudiante:	No se…con cosas de una casa, cosas electrodomésticas, eléctricas, los sillones, las camas, los muebles, eso. *(V1. 13:24)*
Entrevistadora:	¿Y ahí cual sería el criterio?
Estudiante:	Por tipo, depende de las cosas, electrodomésticos juntos, muebles juntos. También podrían ser por personas, unirlos por similitudes, por ejemplo las personas con el mismo tono de cabello, o con tono de piel o según el vestuario, cosas así. *(V1. 13:24)*
Entrevistadora:	Explícame como harías alguna de esas agrupaciones.
Estudiante:	La división va a depender de los factores, por ejemplo si lo hago por tipo de pelo, los dividiría en diferentes zonas, por ejemplo los de pelo negro, castaño, pelirrojo, rubio, o sea esa sería la división que yo haría. *(V1.14:54)*



Sean A un conjunto, y sean $P = \{A_i\}_{i \in I}$ y $Q = \{B_j\}_{j \in J}$ particiones de A. Se dice que P es más fina que Q y se anota $P \preccurlyeq Q$ si y sólo si $(\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \subseteq B_j)$

Entrevista

A partir de la clasificación inicial según el criterio "tienen el mismo color" se realizan las siguientes preguntas:

Informante 1

Entrevistadora: Sobre la clasificación anterior, según el criterio "tienen el mismo color" ¿se te ocurre hacer algo más sobre lo que ya tienes? [Posteriormente se le pide dibujar o encerrar en un círculo lo que tiene ¿hay algún otro circulo que falte?] *(V1.17:13)*

Estudiante: Separarlos. Pero esta vez por frutas*. (V1. 17:40)* Acá también separarlos por fruta. Separar todos los grupos por frutas. Si, el que separa a todo el grupo de esto. [Encierra en un círculo cada grupo incluyendo el grupo inicial]. *(V1. 20:10)*

Informante 2

Entrevistadora: Sobre esa misma clasificación [según el criterio tienen el mismo color] puedes hacer algo más? (*V1. 21:15)*

Estudiante: Mmmm….no.

Entrevistadora: Si nos vamos a este conjunto [apuntando a una de las clases], ¿podrías hacer algo con este conjunto? ¿Qué se te ocurre?

Estudiante: Agruparlos por los que tienen una sola fruta en la imagen y los que tienen varias. *(V1. 21:46)*

Entrevistadora: El criterio entonces fue utilizado solo en esa clase, o sea de la división anterior, realizaste otra y ¿podría suceder para los demás también?

Estudiante: Si, los dividí al igual que el otro grupo.

Entrevista

Posteriormente a encerrar en un círculo todos los sub-grupos formados a partir de la realización de sub-clasificaciones, se realizan las siguientes preguntas.

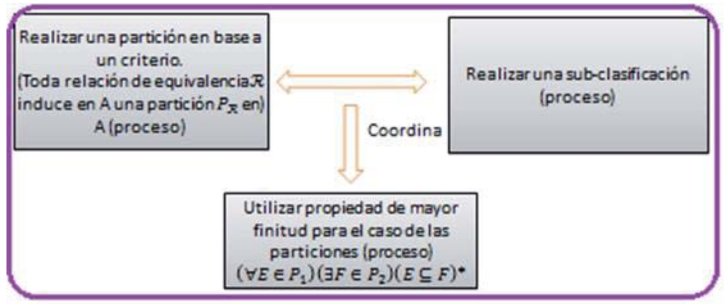
Informante 1

Entrevistadora: ¿Que podrías decir acerca del dibujo que te queda? ¿Me podrías explicar que simboliza? *(V2. 04:05).*

Estudiante: Que los divide más que los otros grupos, que los encierra más subgrupos de los otros. Que este es un grupo pero que ese grupo se subdivide por lo que son, el grupo grande es el color, y el grupo pequeño los relaciona que sean de la misma fruta. *(V2. 04:10)*

Entrevistadora: Entonces la clasificación que tenías inicialmente la volviste a dividir, ¿utilizando el mismo criterio para todos los subgrupos? ¿Cuáles fueron los criterios que utilizaste entonces? *(V2. 00:14)*

Estudiante: Si, la subdivisión que hice todos tienen que ser de la misma fruta y la otra era que todos tienen que ser del mismo color. *(V2. 00:22)*



Propiedad
$\mathcal{R} \preccurlyeq S \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xSy)$, donde $\mathcal{R}, S$ son representantes de las clases R,S, respectivamente.

Entrevista

Posteriormente al haber realizado las estudiantes particiones más finas, la entrevistadora se enfoca en una de ellas y realiza las siguientes preguntas:

Informante 1

Entrevistadora: Enfoquémonos en uno de los subconjuntos ¿Qué podrías decir de los elementos de aquí con los de allá? [Apuntando a clases distintas] *.(V2. 00:35)*

Estudiante: Tiene pepas, es verde, también tiene verde y este tiene tallo y este no.

Entrevistadora: ¿Alguna otra cosa? Algo que puedas decir aparte de las características de los elementos. En función de los criterios que utilizaste. Por ejemplo, ¿existe alguna relación entre este y este [apuntando a clases distintas]

Estudiante: No, que son frutas.

Entrevistadora: ¿Segura que no hay ninguna relación entre grupos distintos? y ¿entre elementos de un mismo grupo ¿Cuál sería la relación?

Estudiante: Que las dos son frutillas.

Entrevistadora:	Ya! Que las dos son frutillas, entonces en este caso, cumplen con el primer criterio. Y hay alguna relación entre este grupo y este otro [apuntando nuevamente a grupos distintos]
Estudiante:	Que las dos son rojitas.
Entrevistadora:	Entonces cumplen con el mismo color.
Estudiante:	Sí.
Entrevistadora:	Entonces hay alguna relación entre ese y ese [apuntando a otras clases distintas]
Estudiante:	Si, que son del mismo color.
Entrevistadora:	Me podrías decir de forma general algo más de eso.
Estudiante:	Eso po! Que todas son rojas, del mismo color.
Entrevistadora:	Entonces ¿hay alguna relación entre los subgrupos?
Estudiante:	Si el color.
Entrevistadora:	¿Y todos se relacionan por lo mismo?
Estudiante:	Sí.
Entrevistadora:	Y hay alguna relación con el otro criterio ¿Cuál era el otro criterio?
Estudiante:	Que son frutas.
Entrevistadora:	Que son frutas, entonces ¿hay alguna relación entre los subgrupos?
Estudiante:	Si, las dos son frutas.
Entrevistadora:	Me refiero al criterio “tipos de frutas” ¿lo recuerdas?
Estudiante:	Ah! Entonces no. *(V2. 02:48)*
Entrevistadora:	Si tomo elementos del mismo conjunto, [apuntando a una de las dos particiones más finas] ¿Qué criterio los relaciona? *(V3. 00:08*)
Estudiante:	Porque son frutillas.
Entrevistadora:	O sea ¿por el segundo criterio, que sería tipos de frutas?
Estudiante:	Sí.

Entrevistadora: Si yo tomo este con este [apuntando a dos frutas del mismo color pero de diferente tipo]

Estudiante: El color.

Entrevistadora: ¿Se relacionan por el otro criterio, “el mismo tipo de fruta”?

Estudiante: No.

Entrevistadora: Que piensas, sobre si tomo elementos al azar ¿Por qué se relacionarían?

Estudiante: Por el color.

Entrevistadora: ¿Eso sería lo seguro?

Estudiante: Sí.

Entrevistadora: Entonces yo tomo elementos al azar, ¿Qué me podrías decir de eso?

Estudiante: Que los saca por el mismo color.

Entrevistadora: ¿Es posible que al momento de sacar dos elementos cualesquiera se relacionen por el mismo tipo de fruta?

Estudiante: Si es que coincide si *(V3. 01:18)*

Entrevistadora: Ah! Pero tiene que coincidir, ¿y por el color? ¿También tendría que coincidir?

Estudiante: Sí.

Entrevistadora: ¿También? Si yo saco dos elementos ¿es posible que no tengan el mismo color? ¿Podrías explicarme eso por favor?

Estudiante: Se relacionarían por fruta. Eh! No sé.

Entrevistadora: Si yo tomo dos elementos de aquí ¿Cuál sería la relación segura que tendría?

Estudiante: El color. *(V3. 02:21)*

Entrevistadora: ¿No es seguro que saque el mismo tipo de fruta?

Estudiante: No, no es seguro porque son al azar.

Informante 2

Entrevistadora:	Ya aquí hay dos criterios ¿cierto? [Apuntando a una de las particiones más fina] ¿Cuáles serían los dos? (*V1. 25:33)*
Estudiante:	Cantidad de frutas, y no creo que ese era el único.
Entrevistadora:	Ya pero inicialmente tú habías utilizado un criterio antes, ¿Cuál era?
Estudiante:	Por el tono de color.
Entrevistadora:	¿Y el segundo sería entonces?
Estudiante:	Por la cantidad de frutas.
Entrevistadora:	Ya tenemos dos entonces, uno es el color y el otro es por la cantidad de frutas en la foto. ¿Entonces si tomo dos de aquí [por cual criterio se relacionan? [Apuntando al conjunto donde tiene solo una fruta]
Estudiante:	Porque solamente hay una fruta y porque tienen el mismo color *(V1.26:18)*
Entrevistadora:	O sea se relacionan por ambos criterios.
Estudiante:	Sí.
Entrevistadora:	Y si yo tomo este de aquí [apuntando a la clase de varias frutas en la foto] ¿sucedería lo mismo? ¿Me podrías explicar?
Estudiante:	Si exacto. En ambos casos serían igual, la cantidad de fruta porque hay más de una y tienen en común los colores.
Entrevistadora:	Si yo los junto y tomara por ejemplo dos elementos ¿Cuál sería la relación entre ellos?
Estudiante:	El color.
Entrevistadora:	¿Y si yo tomara este y este?[apuntando a dos elementos de una misma clase] *(V1. 27:27)*
Estudiante:	El color y la cantidad.
Entrevistadora:	Entonces aquí se relacionarían por ambos criterios.
Estudiante:	Sí.

Entrevistadora: ¿Y eso siempre va a suceder?

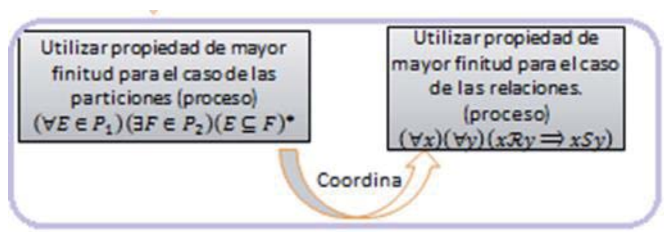
Estudiante: En estos grupos. No, porque igual podría ser solamente por color, dependiendo de la imagen que saque.

Entrevistadora: ¿Y qué es lo que podemos asegurar ahí?

Estudiante: De que tienen en común el color *(V1. 27:50)*

Entrevistadora: Y no es seguro.

Estudiante: Que salga la misma cantidad, no. Si lo hace al azar puede que salga uno con mucho o solamente uno *(V1. 27:55)*



Esta sección de la entrevista, se enfoca en indagar si él o la estudiante es capaz de aplicar las mismas propiedades evidenciadas anteriormente a ejemplos cotidianos, por lo que carece de una propiedad matemática específica como en los casos anteriores.

Entrevista

Informante 1

Entrevistadora: ¿Podrías darme algún ejemplo de otros conjuntos? *(V2.05:12)*

Estudiante: Las sillas con las mesas y la pizarra, que si divide por lo que son pero están juntas por que las tres se usan para estar en clases, los muebles los dividiría por lo que son, por el tipo, sillas con sillas, mesas con mesas, después podría volver a separar las sillas por color de silla o de mesa. *(V2. 05:44)*

Informante 2

Entrevistadora: ¿Podrías darme ejemplos que se te ocurran fuera de éstos, donde pudieras realizar sub-clasificaciones? *(V1. 28:52)*

Estudiante: Mmm…. En dar ejemplos, no sé qué hacer, mmm no, no se me ocurre ninguno ahora.

Entrevistadora: Donde por ejemplo tengas un conjunto y realizas una división según un criterio.

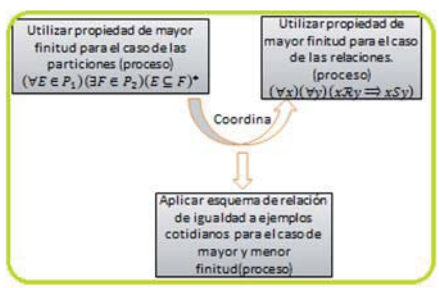
Estudiante: ¿Y después lo vuelvo a dividir?

Entrevistadora: Claro, ¿Dónde podrías ver ese tipo de cosas?

Estudiante: Se podría ver en donde venden cosas para materiales igual se podrían dividir en varios grupos, con los mismos factores, o sea color o por ejemplo con los cuadernos que tengan doble espiral o cuadernos con uno solo o con el espiral plateado, negro y se podrían hacer muchas más divisiones.*(V1. 29:37)*

Entrevistadora: En ese caso ¿Cuántos criterios tendrías?

Estudiante: También podrían dividirse por los que tienen líneas, los que son hojas blancas y hojas a cuadros, ahí habrían tres divisiones, esas mismas divisiones yo las podría seguir dividiendo por el espiral que te había dicho, por el tipo de espiral, por lo colores que tengan en similitudes y seguir dividiéndolos así. *(V1. 30:18)*



La forma de estructurar nuestra DGP está ligada a una noción diferente de cómo se plantea su elaboración y diseño actualmente. El presente trabajo propone un estudio y elaboración de una DGP enfocada hacia nociones de un concepto matemático preliminares a su construcción formal y de la cual no hay evidencia de investigaciones similares enmarcadas dentro de la teoría APOE. La DGP propuesta en esta investigación se plantea en una perspectiva diferente, en función de conceptos matemáticos que no requieren de aprendizaje y se encuentran de forma natural en el haber cognitivo de las personas, pero que sin embargo es posible de modelar.

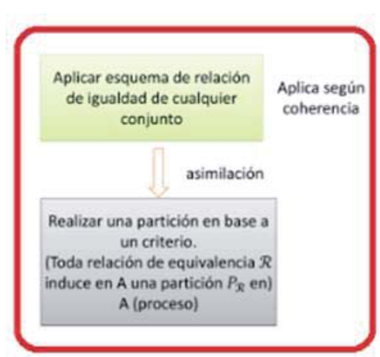
A continuación, se describe y presenta una Descomposición Genética diseñada con base en: el análisis teórico, los resultados de la actividad exploratoria y las entrevistas.

4.2 Descomposición genética de las nociones de (E-P)

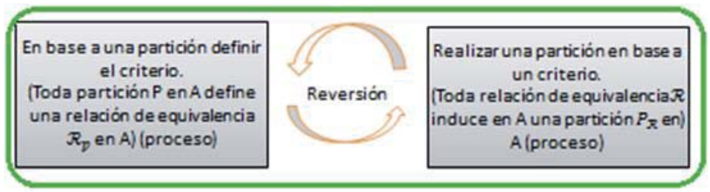
Arnon et al. (2014), apoyados en la investigación de (Dubinsky y McDonald, 2001) señalan que un esquema formado por un individuo sobre un cierto concepto matemático se compone de la acción individual de acciones, procesos, objetos e incluso otros esquemas, unidos por reglas generales que permiten formar un marco en la mente de los sujetos que pueden aplicar a una situación en particular; y la coherencia de este marco radica en determinar, la pertinencia de su aplicación para ciertos fenómenos.

En nuestro caso –apoyados en el análisis epistemológico genético–, consideramos que previo a la acción de clasificar elementos de un conjunto, el sujeto relaciona las nuevas observaciones con conocimiento que ya posee, lo cual es permitido a través de un marco de referencia lógico-matemático. Por lo tanto, los esquemas de clasificación le permitirían distinguir entre las propiedades de los objetos y establecer algún tipo de relación.

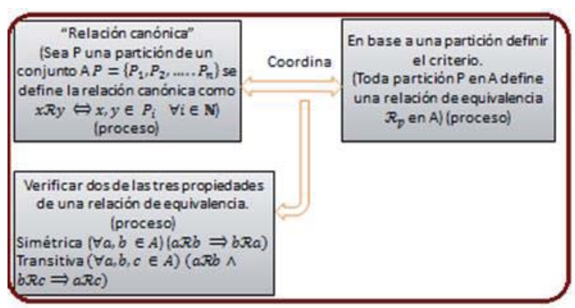
A partir de la evidencia, nos enfocaremos en la relación de igualdad como una relación de equivalencia, la que formará parte de un esquema –en términos de APOE– coherente, evocado y aplicado sobre situaciones reconocidas, a través del mecanismo de la asimilación. Este **esquema**, al ser aplicado, contribuirá a la construcción de las estructuras y mecanismos mentales que describimos a continuación.



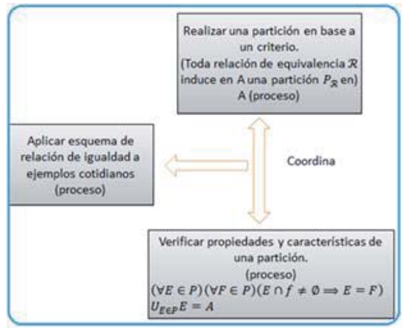
Las entrevistas mostraron que las estudiantes, al presentarles un conjunto de elementos y pedirles que hicieran algo con aquello – sin explicitar una tarea en específica– lo primero que realizan es la clasificación de esos elementos según un criterio. Lo que permite realizar esta tarea **es la activación** del “*esquema de la relación de igualdad”*. La aplicación de este esquema induce al **proceso** “*realizar una partición en base a un criterio”,* y este **proceso** se **revierte** al manifestar de forma implícita e instintiva **el proceso** *“en base a una partición, definir el criterio”*. Se puede evidenciar este tránsito en la actividad grupal exploratoria, donde los estudiantes pasan de un proceso a otro sin ser conscientes de ese tránsito, al ser capaces de particionar un conjunto a partir de un criterio, y de encontrar el criterio correspondiente a una partición.



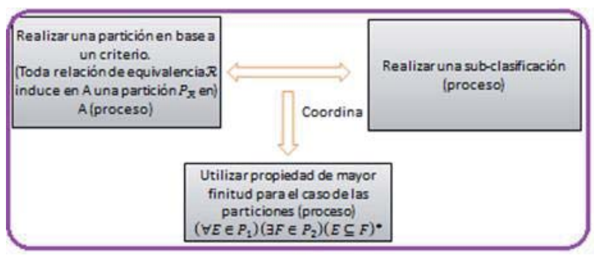
El **proceso** *“en base a una partición definir el criterio”,* al ser **coordinado** con el proceso “relación canónica”, permite describir por parte de las estudiantes el **proceso** “verificar dos de las tres propiedades de una relación de equivalencia”. Ahora bien, este paso sucede de forma implícita: en el momento de realizar una partición están determinando una relación que pasa por el hecho de identificar inicialmente los que pertenecen a la misma clase, para posteriormente determinar la relación de equivalencia y por lo tanto sus propiedades. Esta relación se realiza sin pensar en la propiedad canónica con todo lo que implica, pero sí justifica la relación de equivalencia que allí se encuentra.



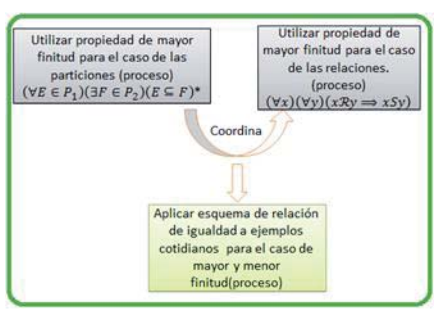
A partir del **proceso** *“realizar una partición en base a un criterio”* y el **proceso** “verificar propiedades y características de una partición” la **coordinación** de ambos permitiría la construcción del **proceso** “*aplicar esquema de relación de igualdad a* ejemplos *cotidianos”* mediante el cual las estudiantes son capaces de explicar y describir ejemplos externos a la actividad.



A partir del **proceso** *"realizar una partición en base a un criterio"* las estudiantes nuevamente realizan el **proceso** "*realizar una sub-clasificación"* sin instrucciones externas. Al preguntarles si podrían realizar algo más –posterior al haber realizado una clasificación, a partir de un criterio– manifiestan este **proceso.** La coordinación de ambos, implica la descripción de los conceptos de mayor o menor finitud, es decir, la construcción del **proceso** "*utilizar la propiedad de mayor finitud para el caso de las particiones" el que* además es representado a través de un dibujo.



Este proceso, coordinado al **proceso** *"utilizar la propiedad de mayor finitud para el caso de las relaciones"*– el cual es manifestado de forma explícita por las estudiantes–, implica la construcción del **proceso** "aplicar esquemas de relación de igualdad a ejemplos cotidianos, con el cual las estudiantes son capaces de identificar y describir modelos similares en el ámbito extra-matemático.



A continuación se presenta la descomposición genética. Cabe señalar que, tal como se muestra en el gráfico, el lado izquierdo de la DGP está enfocado hacia las relaciones entre los elementos, mientras que en el derecho se orienta hacia las particiones; esto es, debido a la forma en cómo se llevaron a cabo las preguntas tanto de la actividad cómo de las entrevistas.

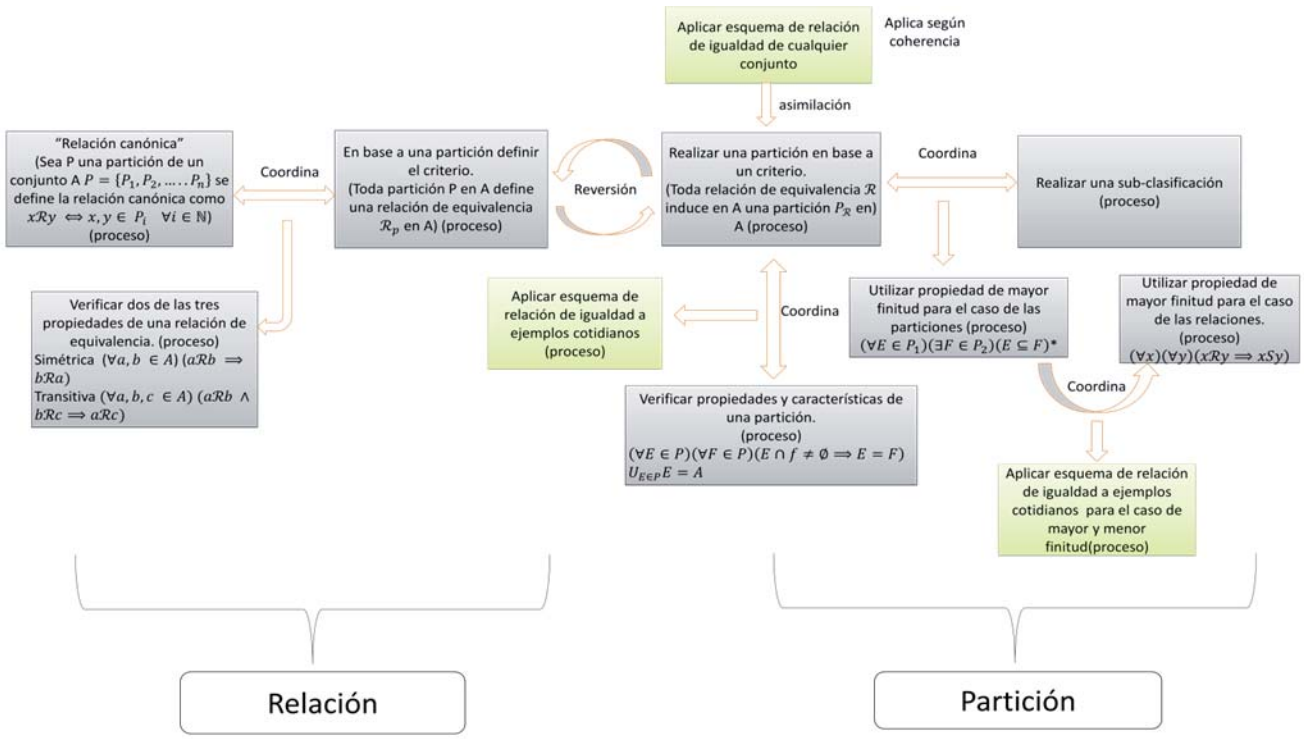


Figura 6. Descomposición genética provisoria de las nociones de relación de equivalencia y partición

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Al analizar los datos, en este caso –de la actividad exploratoria y la aplicación de la entrevista– podemos observar cómo la hipótesis propuesta "Algunos estudiantes de primer y segundo año medio, pese a no tener una noción matemática de los conceptos involucrados– en nuestro caso sobre (E-P)– frente a situaciones diarias, evidencian la utilización inconsciente de algunas de sus propiedades*",* fue ratificada.

Estudiantes de primer y una de segundo año medio evidencian la utilización de las nociones de (E-P) fuera del ámbito matemático, carentes incluso de un lenguaje formal, y las expresan de manera natural e inconsciente.

Ellos demuestran facilidad en la identificación de criterios que inducían las particiones puestas en juego; sin embargo, los describían en términos particulares y enfatizando las características de los grupos. Tuvieron dificultad en expresar las relaciones de equivalencia en términos generales; por ejemplo al preguntar en la actividad exploratoria a uno de los grupos cuál era el criterio utilizado por sus compañeros para establecer la agrupación, respondían: "*Que ellas tienen polera y las otras tienen camisa y corbata*" o que "*ellas tienen polerón y las otras no*". No obstante, al realizar uno de los grupos la partición y el otro grupo lograr encontrar la relación de equivalencia, se infiere que logran identificar los que pertenecen a una misma clase, pero ahora la sitúan en términos de una relación de equivalencia.

Las construcciones mentales expuestas en la DGP son evidenciadas por los estudiantes en ambas actividades. La aplicación del esquema de la relación de igualdad fue utilizada de una manera casi universal, puesto que este esquema es el que permitió la construcción de las demás estructuras y mecanismos mentales. Ellos manifestaron la utilización de la relación de igualdad al escoger los criterios que les permitían particionar tanto los grupos de estudiantes –en la actividad exploratoria– como los elementos de frutas –en la entrevista individual–, así como también para dar ejemplos de particiones en su vida diaria.

Entre las propiedades que permiten verificar si una relación es de equivalencia o no, solo dos pudieron ser observadas: la simetría y la transitividad; ambas propiedades fueron verificadas por las estudiantes, con el objetivo de comprobar que los elementos cumplieran con los criterios con los cuales fueron clasificados, pese a no enunciarlas explícitamente –como era de esperar–*,* la utilizaban de manera natural. Así también ocurrió en uno de los ejercicios de la actividad grupal, específicamente cuando debían clasificarse por grupos de amistad; donde ellos realizan la comparación de manera explícita y natural para dar a conocer que este tipo de partición discrepaba con las otras agrupaciones.

No así la propiedad refleja, que pese a las preguntas diseñadas para ello en la entrevista, no fue expresada por parte de las estudiantes, dando a conocer que si tenía un solo elemento no tendría con quien compararlo.

En cuanto a la forma en cómo se llevan a cabo las estructuras mentales, nuestra descripción dista un tanto de la forma usual dada en APOE. En primer lugar, en el proceso de “la relación canónica”: la identificación realizada por las estudiantes se hace sin pensar en esa relación como tal, es decir; en el momento en que reconocen una partición lo hacen pensando en los elementos que pertenecen a una de las clases, eso es lo que les permite identificar algún atributo en común, es la manera en que manifiestan este proceso. Sin embargo, ello no se explicita como tal, lo cual puede ser debido a la abstracción de la propiedad o a la falta de conocimiento de ella.

En segundo lugar, en relación a algunos de los mecanismos cómo la interiorización o la encapsulación y las estructuras mentales tales como acciones u objetos en términos de APOE– según nuestras evidencias y fundamentada por la investigación de (Mena-Lorca, 2010)– en este caso no se las necesita, pues las nociones con las cuales tratamos se encuentran en la cognición de las personas desde etapas muy tempranas –como lo pudimos ver en la investigación de (Piaget e Inhelder, 1976) – y además ésta transformación no es realizada de forma consciente; las estudiantes de forma natural y sin instrucciones externas desarrollan particiones y particiones más finas; son capaces de relacionarlas con ejemplos cotidianos y manifiestan algunas de sus propiedades.

En tercer y último lugar, el motivo por el cual se consideró la relación de igualdad como un esquema y no como la estructura mental “objeto”; se debe al hecho de que si la relación de igualdad fuera un objeto, la desencapsulación llevaría hacia sus procesos subyacentes, los cuales están constituidos por las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Sin embargo, no es eso lo que se realiza; sino que la relación de igualdad –que permite reconocer las relaciones de equivalencia y particionar los conjuntos – se aplica como un esquema coherente que se pone en juego en una situación en particular.

Por otra parte, el análisis realizado a los antecedentes histórico-epistemológicos, nos demuestran –como bien lo planteó Dubinsky– que realmente la naturaleza de los conceptos matemáticos se repite en el desarrollo de tal concepto en la mente del individuo. Esto se pudo ver al revisar la evolución de los conceptos de (E-P) en la historia, los cuales se fueron desarrollando con cierta dificultad y dilación en su expresión y formalización con propiedad; y luego observar que ello se replicó en los estudiantes. Esto fue comprobado en la investigación de Mena-Lorca (2011) quien manifestó que estudiantes de pregrado de distintas carreras mostraban, en cuanto a la comprensión de estos conceptos, problemas en la escritura en términos formales.

Sin embargo, fuera del ámbito formal y académico, pudimos observar que las personas en estudio manifestaron las propiedades e incluso fueron capaces de dar ejemplos de (E-P), sin tener una noción clara ni explícita de los conceptos, al igual que alguien que muestra dominio de los objetos matemáticos.

Referencias Bibliográficas:

Arrieta J., Buendía G., Ferrari M., Martínez G y Suárez L. (2003). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 17, tomo I.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Nueva York, Estados Unidos: Springer Science+Business Media.

Bochenski, J.M. (1968). *Historia de la lógica formal*. Madrid, España: Gredos.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza.

Dubinsky, E (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95- 126.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. **8**(3), 25 – 41.

Castro, E., Castro, E. y del Olmo, M. (2002). Desarrollo del pensamiento matemático infantil. Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado el 20 octubre del 2014, de http://wdb.ugr.es/~encastro/wp-content/uploads/DesarrolloPensamiento.pdf

Jones, A. (1979). *Notas de álgebra.* Lugar de publicación*:* IME-USP

Kamii, C. (1994). *El niño reinventa la Aritmética*. Madrid, España: Visor.

Jiménez, M. (2011). *Evidencias de una noción intuitiva de relación de equivalencia y partición mediante la teoría APOE*. Tesis de magister. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de Grupos*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Mineduc. (2001). Bases curriculares de la Educación Parvularia. Santiago, Chile: Ministerio de Educación Gobierno de Chile. Recuperado el día 2 de enero 2015 de http://www.mineduc.cl/usuarios/parvularia/doc/201308281105060.bases_curriculares_educacion_parvularia.pdf

Morales, R. (2013). *Pensamiento lógico matemático en alumnos de 6-7 años en tareas de seriaciones.* Trabajo Fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada. España

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial.* Tesis doctoral no publicada. Instituto Politécnico Nacional, México.

Piaget, J., Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones.* Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.

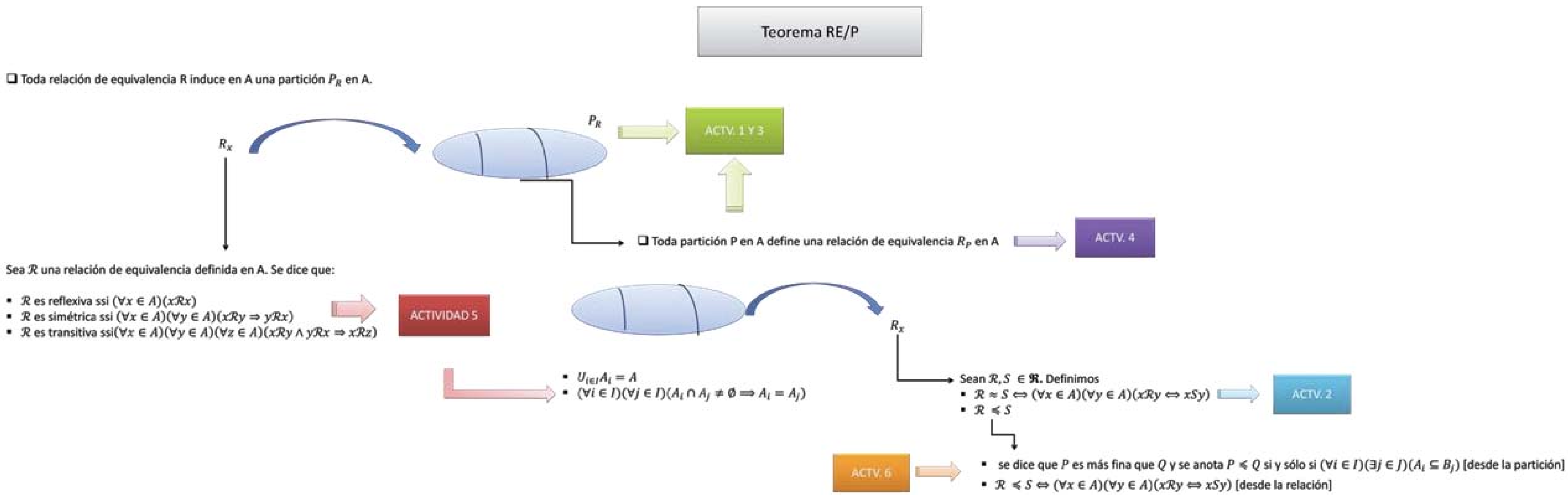
Pérez, M. (2013). *Clasificar: una mirada desde la socioepistemología.* Tesis de magister. Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Roa-Fuentes, S.& Oktaç, A (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol XIII; n°1/ marzo de 2010: 89-112.

Skemp R. (1980). *Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas.* Morata. Madrid.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática,* volumen 17, 5-31.

Anexo 1.:



Teorema RE/P
❑ Toda relación de equivalencia R induce en A una partición P_R en A.
R_x
P_R
ACTV. 1 Y 3
❑ Toda partición P en A define una relación de equivalencia R_P en A
ACTV. 4
Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en A. Se dice que:
▪ $\mathcal{R}$ es reflexiva ssi $(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x)$
▪ $\mathcal{R}$ es simétrica ssi $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
▪ $\mathcal{R}$ es transitiva ssi$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}z)$
ACTIVIDAD 5
▪ $U_{i\in I}A_i = A$
▪ $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(A_i \cap A_j \neq \emptyset \Longrightarrow A_i = A_j)$
R_x
Sean $\mathcal{R}, S \in \mathfrak{R}$. Definimos
▪ $\mathcal{R} \approx S \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xSy)$
▪ $\mathcal{R} \preccurlyeq S$
ACTV. 2
ACTV. 6
▪ se dice que P es más fina que Q y se anota $P \preccurlyeq Q$ si y sólo si $(\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \subseteq B_j)$ [desde la partición]
▪ $\mathcal{R} \preccurlyeq S \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xSy)$ [desde la relación]