Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Transformaciones Lineales:
Un Estudio Desde la Teoría APOE.

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática

Isabel Vicentina Maturana Peña

Tesis dirigida por
Dra. Marcela Parraguez G.
Dra. María Trigueros G.

Parcialmente financiada por Proyecto Fondecyt Regular N°1120688.

Valparaíso – CHILE
Enero, 2015

AGRADECIMIENTOS…

A mi profesora, Dra. Marcela Parraguez, por su dedicación y compromiso personal.

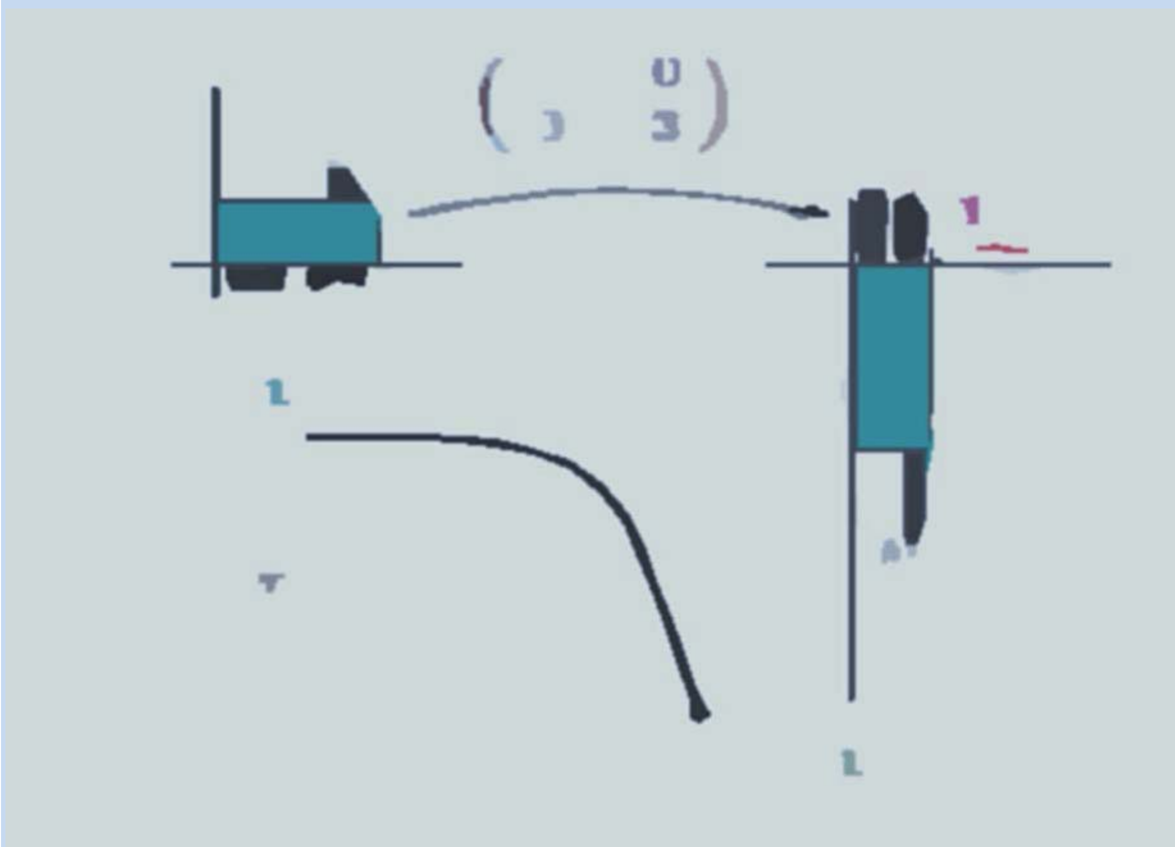
A la Dra. María Trigueros, que en un corto tiempo me enseñó a dar sentido a este trabajo.

Al Dr. Arturo Mena, por su confianza al hacerme partícipe de su proyecto Fondecyt.

A mis Padres, que ya no están, por todo.

A mis perritas Linda y Sissy por acompañarme sin pedir nada a cambio.

RESUMEN/SUMMARY.



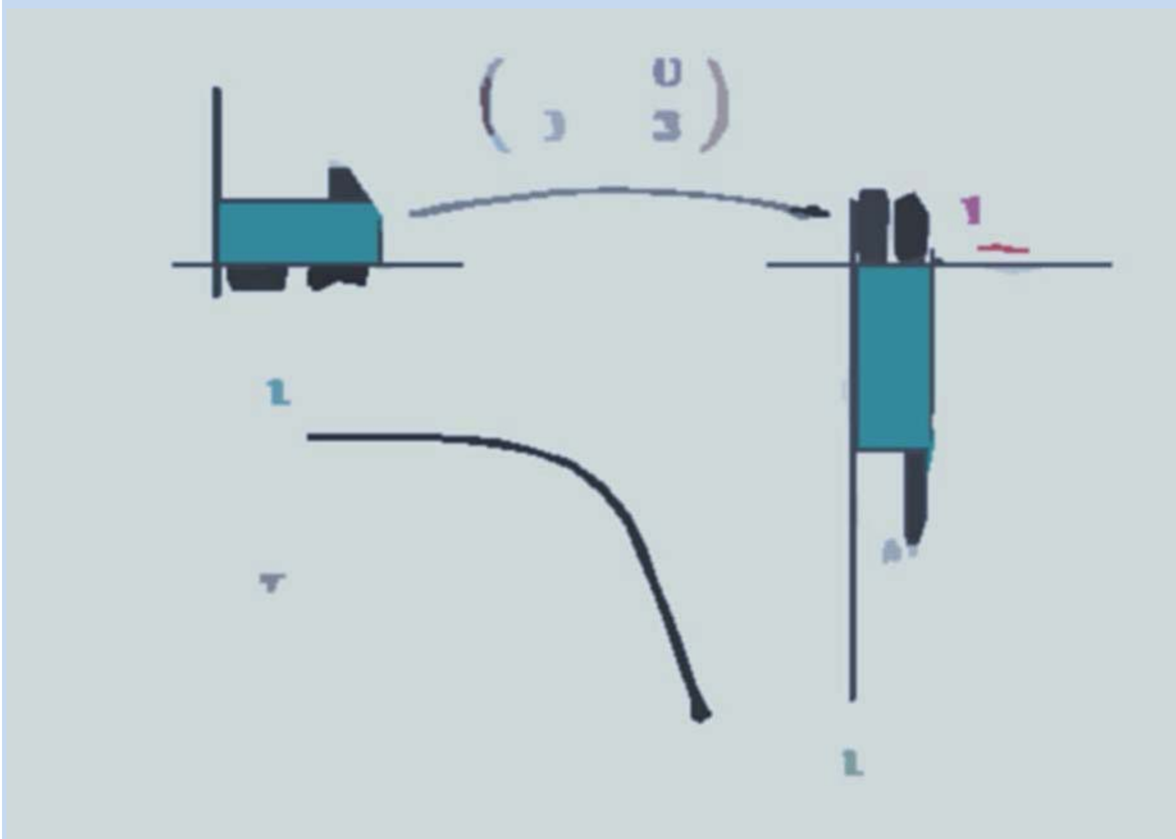
Resumen

Realizamos un estudio cognitivo del concepto Transformación Lineal (TL), desde el cual obtuvimos indicadores de los elementos constituyentes para la evolución de la construcción mental esquema asociada al concepto. En la investigación propusimos un modelo multinterpretativo, que sustentado fundamentalmente por la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), integra interpretaciones del concepto TL, las que permitieron identificar en forma detallada componentes esenciales para la evolución de su esquema.
Como diseño metodológico, incorporamos el estudio de caso (Stake 2010) a la metodología propuesta por APOE y el grupo RUMEC (Asiala et al., 1996). Esto por cuanto consideramos que la complementa, ofreciendo criterios específicos para la selección de los estudiantes, lo que nos permitió tipificar al caso estudiado. Es así que se entrevistó a tres estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática, quienes fueron seleccionados por haber mostrado, en un estudio previo, evidencias de poseer construcciones y mecanismos mentales próximos a la construcción mental objeto para cada una de las interpretaciones del concepto. De las entrevistas, se obtuvo el detalle sobre las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en la construcción del esquema para el concepto TL, y a la vez, se pudo establecer la evolución en los esquemas mentales de los entrevistados.

Summary

We realize a cognitive study of the concept Linear Transformation (TL) from where we obtained indicators of the constituent elements for the evolution of the mental construction scheme associated with the concept. In the investigation we proposed a model multinterpretative that sustained fundamentally for the theory APOE (Actions, Processes, Objects and Schemes) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Gnaws, Corn merchants and Weller, 2014), integrates interpretations of the concept TL, which allowed to identify in detailed form essential components for the evolution of his scheme.
Since methodological design, we incorporate the study of case (Stake 2010) into the methodology proposed by APOE and the group RUMEC (Asiala et to., 1996). We think that it complements her offering specific criteria for the selection of the students, which it allowed us to typify to the studied case. It is so we interviewed three students of the career of Pedagogy in Mathematics, which they were selected for showing, in a previous study, evidence of possessing constructions and mental mechanisms next to the mental object construction for each of the interpretations of the concept. Of the interviews, the detail was obtained on the constructions and mental mechanisms brought into play in the construction of the scheme for the concept TL, and simultaneously, it was possible to establish the evolution in the mental schemes of the interviewed ones.

PRESENTACIÓN.



PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

Nos propusimos investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto transformación lineal (TL). Reconoceremos en el concepto componentes de origen funcional, matricial y geométrico, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición.

La siguiente figura resume algunas de las ideas antes descritas. Esta imagen aparece en el libro digital *"Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico"*, de Isaacs y Sabogal (2005), y dio lugar a una reflexión inicial en esta investigación.

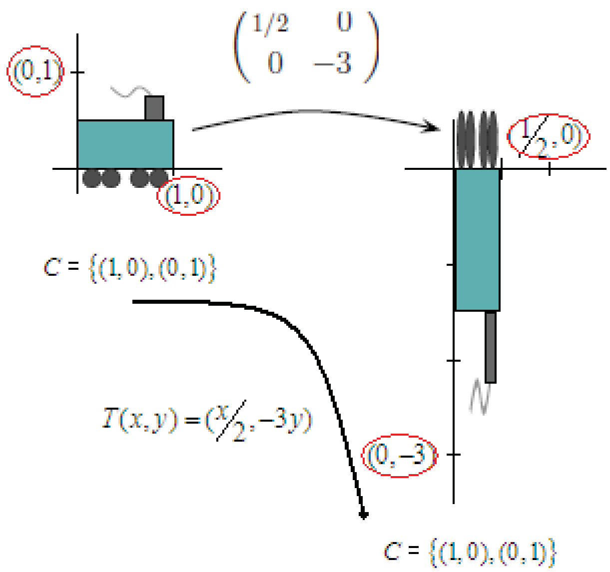


Figura 0. La imagen motivadora.

Los estudiantes de un curso de álgebra lineal, ¿reconocen las diferentes interpretaciones del concepto TL que allí aparecen? ¿Es posible articular dichas interpretaciones del concepto TL?

Analizamos el concepto de TL considerando tres formas en que éste se presenta; cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados básicamente por el concepto combinación lineal. De esta forma, nuestro estudio propuso, basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética (DG) por cada interpretación del concepto TL, que permitió una descripción detallada del esquema para el concepto, que incorporó las tres interpretaciones, desde donde emerge un modelo multinterpretativo para el estudio del concepto TL.

A continuación hemos organizado por capítulos la forma en que narraremos el desarrollo de nuestra investigación.

CAPÍTULO 1:
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES, HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se describen problemáticas de enseñanza y aprendizaje en el álgebra lineal; mostramos estudios específicos sobre las complejidades de aprendizaje para el concepto de TL, tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática a nivel universitario. Es así que en esta investigación nos propusimos comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del concepto TL en estudiantes universitarios.

CAPÍTULO 2:
MARCO TEÓRICO: TEORÍA APOE.

Presentamos la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) como sustento teórico que facilita describir las construcciones y mecanismos mentales que constituyen el esquema del concepto de TL en sus tres interpretaciones. Es un estudio de carácter cognitivo que documenta en forma detallada la forma de dichas construcciones; por su parte, la teoría APOE es un marco teórico cognitivo de la didáctica de la matemática, que posee entre sus características un modelo hipotético de construcción de un concepto matemático en estudio.

CAPÍTULO 3:
LA INVESTIGACIÓN Y SU DISEÑO.

Esta investigación, es un estudio cognitivo que hace uso la teoría APOE y de su ciclo de investigación para examinar procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del concepto TL en estudiantes universitarios. Al diseño metodológico propio de la teoría APOE, se adhiere un estudio de casos, por considerar que es una aproximación adecuada, que lo complementa. En este capítulo presentamos, y como parte del ciclo de investigación dispuesto en la teoría APOE, las DG propuestas en la investigación que constituyen la base del estudio para el modelo multinterpretativo; cada una de ellas da cuenta de lo que denominamos una interpretación del concepto TL, desde donde se levantan los cuestionarios para análisis de las producciones de los estudiantes del caso.

CAPÍTULO 4:
RESULTADOS DEL CUESTIONARIO. EVIDENCIAS PARA LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL, MATRICIAL Y GEOMÉTRICA DE LA TL.

En este capítulo se muestran los resultados de los análisis de las producciones de los estudiantes del caso a las tres interpretaciones del concepto TL. Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes del caso se basan en el modelo multinterpretativo para el concepto TL, el que ayuda a comprender las características de las componentes de los esquemas, al considerar las interpretaciones de concepto TL como esquemas mentales que nos permitirán determinar la coherencia en el esquema global del concepto.

CAPÍTULO 5:
RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS. EVIDENCIAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL COMO UN MODELO MULTINTERPRETATIVO.

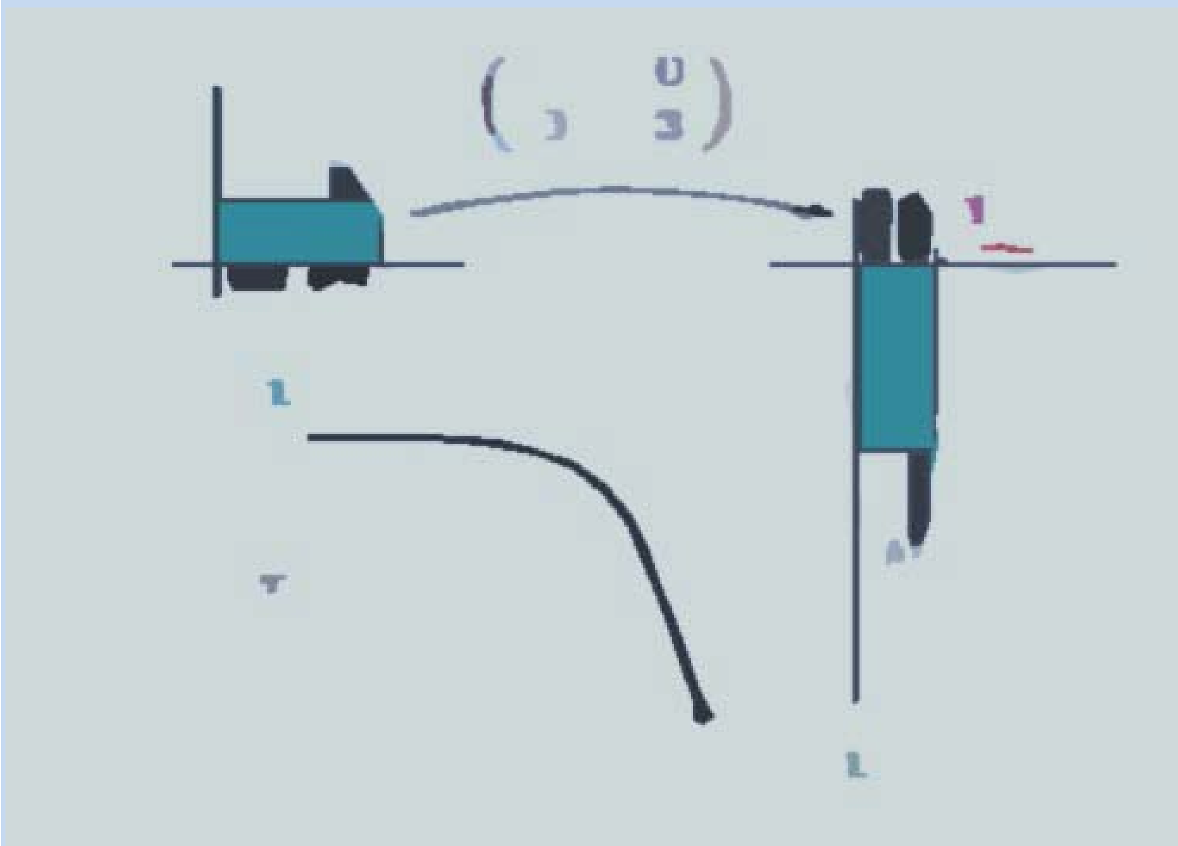
Con el propósito de documentar la investigación en profundidad, son entrevistados tres estudiantes del caso. En este capítulo encontramos evidencias sobre construcciones y mecanismos mentales para la construcción del concepto TL en sus tres interpretaciones; sus entrevistas dieron cuenta de los niveles *Intra*-TL, *Inter*- TL y *Trans*-TL en el esquema del concepto TL, permitiendo determinar sus componentes y evolución.

CAPÍTULO 6:
CONCLUSIONES Y PROYECCIONES.

En este capítulo se recopilan los principales resultados de la investigación, para desde allí levantar algunas de sus proyecciones. La forma en que hemos dispuesto la recopilación de los resultados tiene por propósito mostrar el potencial del modelo multinterpretativo.

CAPÍTULO 1:

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES, HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.



CAPÍTULO 1:
PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES, HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

1.1 PROBLEMÁTICA.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como ingeniería, licenciatura en ciencias o economía; es así que surge el interés por investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus conceptos. Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al álgebra lineal. Por ejemplo, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Harel, 1989a; Harel, 1989b; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999).

En su esfuerzo por formular una propuesta didáctica específica para el álgebra lineal, desde la teoría APOE, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) ha preparado materiales de enseñanza en los que se muestra su filosofía acerca de qué contenidos debiera incluir y cómo debiera organizarse un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky, 2002).

El problema central, según Dubinsky y otros (Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R., 1994), radica en que, en esta materia, el estudiante debe trabajar con conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos indeliberados- mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados.

Esto pone en tela de juicio el conocimiento alcanzado de la enseñanza de estas materias, y hay quienes piensan que en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Ibíd). En la mayoría de las investigaciones se logra poner en evidencia que aun los estudiantes exitosos en los cursos de álgebra lineal, no logran la comprensión de los conceptos involucrados, pues no los aplican de modo adecuado en los cursos siguientes, por ejemplo, los de ecuaciones diferenciales.

El problema que se presenta es si es posible ayudar a un mayor número de estudiantes, futuros profesionales, a aprender de manera significativa, es decir, con comprensión de lo que han construido. Con base en esta preocupación nos interesamos en estudiar cómo los estudiantes comprenden el álgebra (Cf. Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996).

Nos propusimos, en particular, investigar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto TL; reconoceremos en el concepto componentes de origen funcional, matricial y geométrico, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición.

1.2 ANTECEDENTES.

1.2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICOS DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL.

El concepto de transformación lineal, TL, es una conceptualización evolucionada que requirió un gran desarrollo en la matemática, en la que se incorporan, por ejemplo, nociones como función, linealidad, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales, entre otros. Dichos conceptos contribuyen a la construcción de lo que hoy entendemos por TL. Es así que reducir el concepto a una sola descripción, que esperamos abarque todos los aspectos que incluye, es reduccionista.

Pensamos, en cierta medida, que el conocimiento de los antecedentes histórico epistemológicos involucrados en la construcción del concepto de transformación lineal aporta claridad sobre este importante concepto del álgebra lineal. Dado que sus orígenes se remontan a nociones básicas como la proporcionalidad directa y la linealidad, consideramos apropiado analizar algunas ideas sobre su construcción en el tiempo, que permitan profundizar sobre los posibles problemas de comprensión que dicha evolución puede generar en los estudiantes actuales. A continuación presentamos esta breve descripción histórica de la evolución del concepto de transformación lineal.

1.2.1.1. LA NOCIÓN DE LINEALIDAD COMO BASE EPISTEMOLÓGICA PARA EL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL.

La noción de linealidad y la de álgebra lineal, se funden en el concepto de TL. Estudios epistemológicos sobre el tema, por ejemplo Luzardo y Peña (2006), Acosta, Rondero, Tarasenco (2008, 2010), sostienen que los orígenes del concepto TL emergen desde los sistemas de ecuaciones lineales, y éstos a su vez del trabajo realizado con las ecuaciones lineales, las que constituyen un modelo para las nociones de progresión aritmética y de proporcionalidad, ambas usadas en la resolución de problemas cotidianos.

En diferentes culturas, como la egipcia, la china y la babilónica, aflora la idea de linealidad. Algunas de estas evidencias se encuentran en las *Tablillas de Croquetta*, que datan del último período sumerio hacia el año 2100 a.C.; se presenta allí un problema que relaciona proporcionalidades de áreas y producción de granos. Otro ejemplo se encuentra en el *Papiro de Rhind*, escrito hacia el año 1650 a. C., en el que se consideran las ecuaciones de primer grado, y en el cual no sólo se resuelven problemas aritméticos, sino que se propician elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x+ax+bx=c$, con a,b,c números conocidos y x desconocido. Por su parte, los babilonios sabían cómo resolver problemas concretos, que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado; también resolvían ecuaciones cúbicas y cuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales. En los siglos III y IV a.C. los matemáticos chinos continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. En el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la Dinastía Han, aparecen un sistema lineal y su método de resolución, conocido hoy en día como método de eliminación gaussiana.

Durante este período —bajo esta perspectiva—, podemos decir que la formación del concepto se encuentra relacionada con problemas de lo cotidiano y vinculado a la resolución de ecuaciones, es decir, posee características ligadas a lo aritmético. Por otra parte, los aspectos geométricos de la noción de linealidad, emergen en forma explícita con Euclides, en su libro *Los Elementos*, escrito hacia el año 300 a.C. Euclides formaliza en sus postulados los conceptos geométricos, y entre ellos el de recta, haciendo uso implícito de la noción de transformación de figuras geométricas, aunque reducidas a desplazamientos. Podríamos decir que la noción de TL aún se encuentra en una etapa de creación.

Hacia el año 370 a.C. Eudoxio de Cnido profundiza las ideas de la geometría antigua, definiendo indirectamente la igualdad de dos razones $a:b$ y $c:d$. En el siglo III a.C., la referencia al concepto de proporcionalidad se pone en evidencia en una carta que dirige Arquímedes a Eratóstenes, en la que basa sus demostraciones en la teoría de las razones y proporciones de Euclides. Apolonio, quien hacia el 200 a.C. hizo uso implícito del concepto de coordenadas en sus demostraciones sobre propiedades de las cónicas, en lo que llamó *Propiedad Fundamental de las Cónicas*, introdujo el proceso de coordenización del espacio, que aunque pareciera estar lejos de la linealidad, desembocó en el ordenamiento matricial de coordenadas que están claramente relacionadas con una representación del pensamiento lineal. Además podemos vislumbrar cómo se entrelazan dos perspectivas de la linealidad —la geométrica y la proporcional—, para finalizar con una noción más elaborada de coordenización. En la misma dirección, Pappus, en su obra *Colección Matemática*, en el siglo III d.C. establece la relación anarmónica o razón cruzada, la que posteriormente, en el siglo XIX, fue revivida con ayuda de las magnitudes con sentido y se convirtió en el concepto basal para la noción de vector. Según Hofman (2002), es gracias a Descartes, quien transforma la geometría en aritmética, que se agrega a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida; las coordenadas se vuelven oficiales y se establece un vínculo entre lo geométrico y las problemáticas del álgebra modeladas por la proporcionalidad.

A fines del siglo XVII fueron desarrolladas ideas sobre la linealidad provenientes de los babilonios y de los chinos. Un exponente de ello es Cramer, quien formaliza la escritura para los sistemas de ecuaciones lineales; en su libro *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques,* presenta un método para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que poseen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas mediante el uso de determinantes. Es así que hasta el siglo XVIII el álgebra era en esencia el arte de resolver ecuaciones. D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema $Ax = b$ forman una variedad lineal; así mismo, Lagrange y D'Alembert se dan cuenta de que la solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$ es una combinación lineal de algunas soluciones particulares. Es la interpretación matricial la que toma posición explícita durante este siglo, y es Frobenius, en su obra *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales,* quien hace una valiosa contribución a la teoría de matrices y aporta al desarrollo del concepto TL, que venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que gracias a Weil adoptaría su forma actual.

Son Hamilton, Cayley y Grassmann los responsables de la axiomatización de las nociones de *vector* y de *espacio vectorial* propuestas por físicos de fines del siglo XVII. Además, Grassmann introduce, entre otras, las nociones de *producto vectorial* y de *dimensión* de un espacio vectorial, que son algunas de las nociones fundamentales del álgebra lineal como hoy la conocemos. En cuanto a las funciones en la linealidad, es Euler en el siglo XVIII quien propone una notación cercana a la actual —*f(x)*—, pero Haenkel en el siglo XIX establece su definición en forma explícita. En el siglo XX, Klein unifica la geometría, afirmando que ésta es el estudio de un espacio junto con un grupo de transformaciones y de las estructuras que permanecen invariantes en ese grupo. El rol del concepto transformación cambia, constituyéndose en un eje unificador.

En nuestro estudio hemos articulado tres perspectivas del concepto TL, las que representan diferentes epistemologías del concepto: sus orígenes en lo geométrico que se vinculan a lo algebraico configurando un problema que evoluciona a un modelo matricial y que posteriormente se consolida con una perspectiva funcional. Es así que en nuestra propuesta la DG se construye pensando en lo funcional como un pilar unificador que a su vez da cuenta de la propiedad de linealidad.

1.2.2 ANTECEDENTES DIDÁCTICOS SOBRE EL CONCEPTO DE TL.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas. Por esta razón existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que presentan los estudiantes para comprender los conceptos relativos a esta disciplina; por ejemplo, Dorier y su equipo han logrado establecer un tipo de fenómeno propio del álgebra lineal a través de la descripción del obstáculo del formalismo (Dorier, Robert, Robinet. y Rogalski, 1997).

En particular sobre el concepto de TL, la documentación hasta ahora obtenida da cuenta de que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática de aprendizaje, y gran parte de las perspectivas sitúan la problemática alrededor del obstáculo del formalismo.

Algunas de estas investigaciones sobre el tema dan cuenta de lo que hemos llamado interpretaciones del concepto. Molina y Oktaç en 2007, en su estudio *"Concepciones de la Transformación Lineal en Contexto Geométrico"*, recaban evidencias sobre la problemática de aprendizaje del concepto TL; desde la perspectiva intuitiva, considerando la teoría de Fischbein (1979) sobre la intuición y los modelos intuitivos, identifican aquellos modelos intuitivos que pudieran tener algunos estudiantes que sustituyen al concepto de TL en un contexto geométrico. Dentro de la interpretación —geométrica—, encontramos la investigación realizada en el año 2006 por Uicab y Oktaç *"Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica"*. La investigación da cuenta de la presencia o ausencia de razonamiento sistémico en los estudiantes, al resolver el problema de extensión lineal, el que consiste en determinar una TL por medio de las imágenes de los vectores de una base. El problema es planteado geométricamente, el marco teórico utilizado es la aproximación teórica del pensamiento practico versus el pensamiento teórico (Sierpinska, Nnadozie, y Oktac, 2002). Ambas investigaciones recopilan evidencias sobre el aprendizaje del concepto TL desde una perspectiva que incluye lo geométrico como un camino a la visualización del concepto, concluyendo que persisten los problemas de aprendizaje.

Así también, Karrer y Jahn (2008) presentan una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las TL y el uso del Cabri Géomètre como herramienta de apoyo, a fin de explorar las tareas que implican distintos registros de representación. Su estudio mostró que el uso del Cabri Géomètre promueve la identificación de las relaciones entre lo gráfico y la matriz asociada a una TL.

En el año 2009, Roa y Oktaç presentan su trabajo *"Construcción de una Descomposición Genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal"*. La investigación, que se sustenta en la teoría APOE, proporcionó como resultado una descomposición genética del concepto que consideró dos perspectivas de construcción: una considerando el concepto de función asimilando el concepto de espacio vectorial, y la otra donde el concepto TL es un caso particular del concepto de función, ambas basadas en la interpretación funcional del concepto TL.

Otros investigadores, Montiel y Batthi (2010), abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz, el cambio de base y la representación matricial de las TL, bajo el enfoque ontosemiotico (Godino, Batanero y Font, 2007), centrando su atención en el rol de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula. Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales; en su informe determinan que algunos estudiantes concilian ambos conceptos, y que son en este caso capaces de trabajar con matrices sin dificultades; por el contrario, los que no articulan el concepto de función con el de matriz tienen dificultades para trabajar con matrices. Wawro, Larson, Zandieh y Rasmussen (2012) presentan en su trabajo una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre el concepto de transformación lineal y su relación con la multiplicación de matrices. Pascual (2012), en su tesis doctoral, presenta una secuencia didáctica de enseñanza para la carrera de ingeniería sobre el concepto TL basada en los antecedentes reportados por Dorier y su equipo sobre el obstáculo del formalismo, haciendo uso de la ingeniería didáctica como metodología de trabajo.

A pesar del esfuerzo realizado en la investigación sobre el aprendizaje de la transformación lineal, las investigaciones reportadas no han hecho énfasis, propiamente tal, en aspectos cognitivos importantes sobre la interpretación matricial del concepto TL. Nos propusimos entonces y como un resultado de esta investigación, documentar esta interpretación del concepto.

1.3 EL OBJETO MATEMÁTICO DE ESTUDIO, LA TL Y SUS TRES INTERPRETACIONES.

Hemos considerado pertinente explicitar la matemática asociada a lo que entenderemos por interpretación el concepto TL y su relevancia para este estudio.

En el concepto de TL es posible diferenciar, por lo menos, tres interpretaciones que permiten, de manera independiente, hacer uso de él y en algunos casos en forma más o menos eficiente abordar problemáticas en las que se requiere su dominio. Por ejemplo, la interpretación asociada a una función —o interpretación funcional— con características específicas, es un modelo propio de una matemática que asume a la función como eje central de trabajo, permitiendo la discusión sobre la existencia, o no, de solución para una ecuación diferencial. Por otra parte, la interpretación matricial, esto es la matriz asociada a una TL, corresponde a la resultante del proceso de coordenización de las imágenes de los vectores de una base, la que, por ejemplo, permite un trabajo algorítmico eficiente, adaptándose a los procesos de informatización de sistemas.

Para la interpretación geométrica, hemos elegido el teorema fundamental del álgebra lineal, en desmedro de las representaciones geométricas clásicas como giros y reflexiones, las que están inmersas en este teorema, en el que se reúnen conceptos generadores para el álgebra lineal en forma explícita, permitiendo la construcción de funciones lineales despojadas de su carcaza formal.

Estas tres formas de representación de la matemática, asociadas a una TL, permiten resolver problemas vinculados al álgebra lineal, construyendo modelos aplicables a diferentes campos científicos. A continuación precisaremos los referentes usados para el estudio.

En la interpretación funcional del concepto TL asumiremos la siguiente descripción matemática, extraída del libro *"Introducción al Álgebra Lineal"* de Larson y Edwars (2004). Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K. La función $T: V \rightarrow W$ se llama Transformación Lineal de V en W si las dos propiedades siguientes son verdaderas para todo u y v en V y para cualquier escalar c en K.

$$T(u+v) = T(u) + T(v). \quad T(cu) = c\,T(u).$$

Para la interpretación matricial del concepto TL, tomaremos como centro matemático la matriz asociada a una TL que aparece descrita en el texto de Pool (2006) bajo el nombre de Teorema Matriz Asociada a una TL (TMATL), donde se establece lo siguiente: sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de W. Los vectores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ están en W y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base *B':*

$$\begin{gathered} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{gathered}$$

En otras palabras, $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots [T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$; y la matriz asociada a la transformación lineal *T* en las bases *B* y *B'*, que rotulamos como $[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, tal que $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$, para todo *v* en *V*.

Finalmente, hemos considerado para describir la interpretación geométrica del concepto TL, el teorema fundamental del álgebra lineal, restringido a espacios y subespacios vectoriales reales de dimensión a lo más tres. Pensamos que ello permite una caracterización visual del concepto TL y además posibilita articulación con las otras interpretaciones. Esta versión aparece en el libro de Nakos y Joyler (1999).

En este teorema se considera sean *(V,+,IK,.)* y *(W,+,IK,.)* dos espacios vectoriales y $B=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base de *V*. Si $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ son n vectores cualquiera de *W*, entonces existe una única Transformación Lineal $f: V \rightarrow W$ talque $f(v_i) = w_i$, para todo $i=1\dots n$.

El carácter de este teorema construye implícitamente una TL en cualquiera de sus interpretaciones, describiendo lo medular del concepto, la transformación del espacio.

El propósito de incorporar estas tres interpretaciones del concepto TL dentro de nuestro estudio es construir un modelo de análisis que permita describir las problemáticas de aprendizaje del concepto.

1.4 RELEVANCIA DE DISEÑAR UN MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Nos propusimos realizar un estudio didáctico sobre el concepto TL, deseando ampliar y afinar el espectro de resultados hasta ahora obtenidos sobre las problemáticas de aprendizaje para la TL. Nuestro objetivo es abordarla de manera más completa, al considerar tres aspectos o interpretaciones fundamentales para su construcción como concepto matemático, y de esta forma determinar indicadores o detonantes que hagan posible su evolución cognitiva en los aprendices.

El concepto de TL es un concepto unificador para el álgebra lineal, como se describió en la evolución histórica del concepto; esto es, la resultante de diferentes perspectivas matemáticas que a través del tiempo convergieron o evolucionaron, desde un concepto basal como el de linealidad, en la que es posible rescatar componentes de origen funcional, matricial y geométrico. Por esta razón pensamos que es pertinente, para la caracterización de un esquema de TL desde un punto de vista cognitivo, un modelo que incorpore estos aspectos; es así que planteamos las interpretaciones del concepto como objetos matemáticos de estudio, como los elementos de investigación que nos permitirán determinar la relación en el esquema global del concepto TL y así obtener evidencias sobre las relaciones que lo constituyen.

En la figura 1.1 se muestra el modelo multinterpretativo inicial que se usó para entender el concepto TL como un todo. En él es posible apreciar que el concepto TL excede al conjunto de las interpretaciones, por lo que podría ser abordado desde otras perspectivas, o incorporar los elementos de este entorno como una herramienta de análisis para determinar la coherencia o estabilidad en el esquema del concepto.

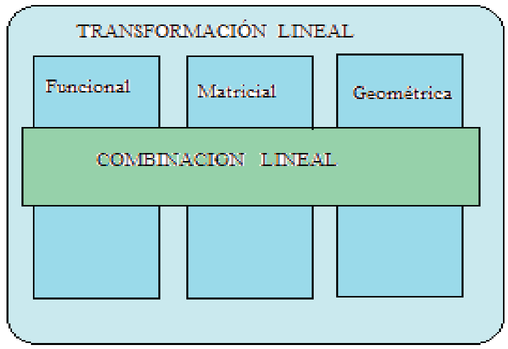


Figura 1.1 Modelo inicial para la investigación

Diseñamos este modelo multinterpretativo como herramienta de investigación para el concepto de TL. Daremos cuenta de su forma de uso por parte de los estudiantes y de los resultados obtenidos al incorporarlo a un marco teórico de la didáctica, en este caso la teoría APOE.

1.5 HIPÓTESIS.

En esta investigación nos propusimos estudiar desde una postura cognitiva las construcciones mentales necesarias para comprender el concepto de TL, entendido éste en su complejidad de interpretaciones. Los datos proporcionados por las diferentes investigaciones en el área señalan que las TL son un tema cuyo aprendizaje decididamente no se logra a profundidad, por lo general, en los cursos de álgebra lineal; acerca del concepto que nos ocupa, la literatura disponible es escasa y creemos que una aproximación adecuada y completa puede provenir de los estudios que ha realizado el grupo RUMEC, utilizando como marco de referencia la teoría APOE.

Como explicamos, pensamos que la dificultad del problema radica en comprender el objeto matemático en su totalidad, lo que involucra un aspecto funcional, uno matricial y otro geométrico. La documentación relacionada con el concepto TL en su interpretación matricial es escasa. No hay suficiente información sobre la forma en que esta versión es aprendida por los estudiantes. Por esta razón, nos proponemos documentar las construcciones necesarias para aprender esta interpretación del concepto.

Nuestra hipótesis de trabajo es que el aprendizaje (la construcción) del concepto TL se alcanza de forma más completa si se transita entre lo práctico y lo teórico, considerando a la componente geométrica como una forma de visualización de la TL, de modo que el estudiante tenga la oportunidad de recurrir primero a su conocimiento ingenuo, no formal, de graficación y luego, en un ambiente más conocido, preocuparse de la buena definición de la interpretación funcional de TL, para poder alcanzar de forma eficaz la interpretación matricial de la TL, la cual constituye su forma más eficiente de presentación.

Por otra parte, esta tesis posee un componente teórico, que propone evidenciar la coherencia del esquema del concepto TL, a través de su modelo multinterpretativo que fusiona las diferentes interpretaciones del concepto.

1.6 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

Nuestra investigación se propuso documentar la evolución cognitiva del concepto TL, entendido éste desde tres interpretaciones —funcional, matricial y geométrica—, en un estudiante de álgebra lineal, cuando van integrándose al conocimiento del estudiante las diferentes interpretaciones, las cuales contienen nociones como función lineal, coordenada, matriz cambio de base, matriz asociada a la TL, por mencionar algunas.

Nuestra principal pregunta de investigación es:

¿Cómo construyen los estudiantes el concepto de TL, entendido éste como un esquema que vincula diferentes perspectivas?

Para dar respuesta a esta pregunta propondremos los objetivos que a continuación enumeramos.

1.6.1 OBJETIVO GENERAL.

Investigar las construcciones mentales que puede utilizar un individuo como estrategia cognitiva para construir el concepto de TL. Bajo la mirada de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del concepto TL, incorporando diferentes interpretaciones del concepto. Establecer un modelo para determinar los niveles de coherencia en el esquema del concepto TL.

1.6.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

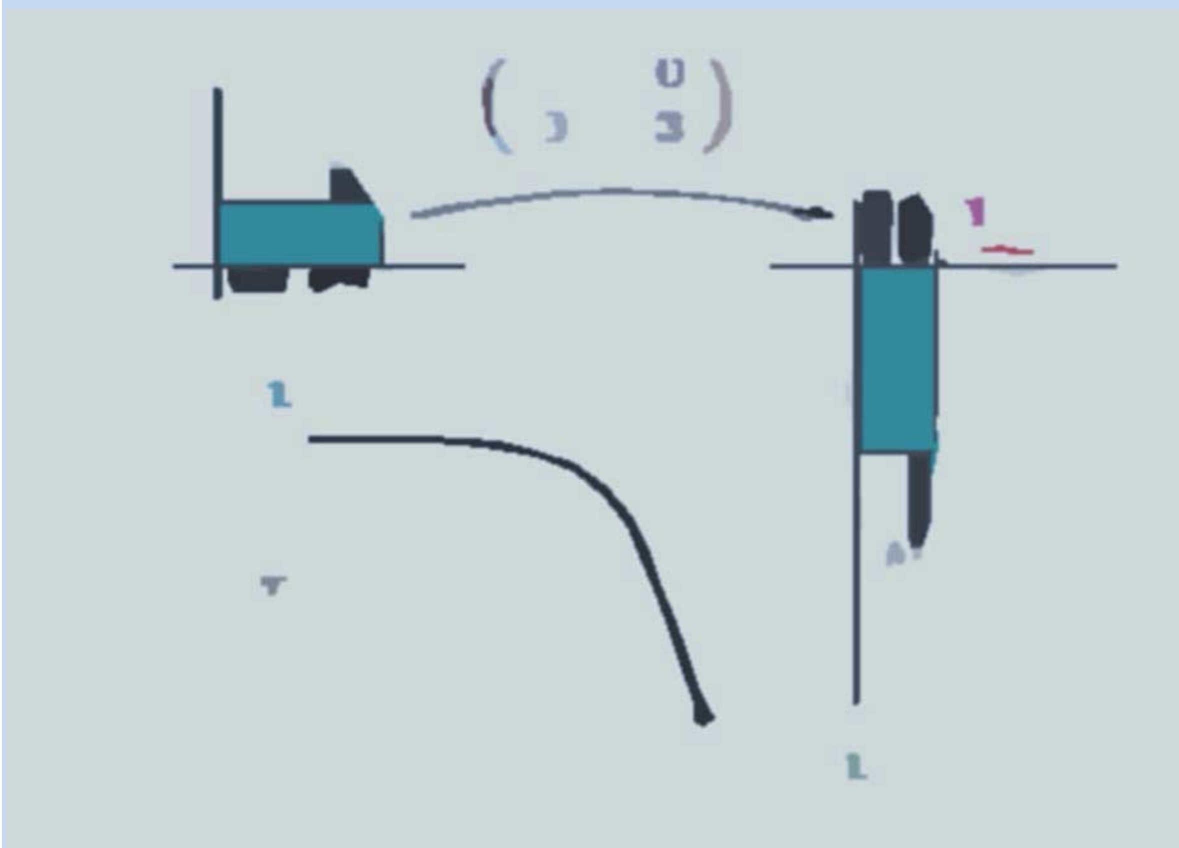
Diseñar y evidenciar sendas descomposiciones genéticas, DG; esto es, las correspondientes construcciones mentales (acciones, procesos, objetos, esquemas) de los conceptos y resultados que un estudiante utiliza para la construcción del concepto de TL:

1. Reconocimiento de la existencia de una interpretación del concepto con carácter funcional.
2. Reconocimiento de la existencia de una interpretación del concepto con carácter matricial.
3. Reconocimiento de la existencia de una interpretación del concepto con carácter geométrico.
4. Integración de las diferentes interpretaciones del concepto TL, mediante una articulación de los esquemas correspondientes a las distintas interpretaciones.

5. Establecer los indicadores desde la perspectiva de las interpretaciones y sus respectivas interrelaciones para caracterizar los niveles de evolución del esquema del concepto TL.

CAPÍTULO 2:

MARCO TEÓRICO. TEORÍA APOE.



CAPÍTULO 2:
MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA APOE.

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC, que actualmente se presenta en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014), es un marco teórico cognitivo de la Didáctica de la Matemática, que plantea como una de sus características fundamentales proponer un modelo hipotético de construcción para el aprendizaje de un concepto matemático en estudio. Es así que APOE, como sustento teórico, facilita describir las construcciones y mecanismos mentales que constituyen el esquema de un concepto matemático, en este caso el de TL, en sus tres interpretaciones. En nuestra investigación se documenta en forma detallada dichas construcciones.

2.1 ANTECEDENTES DE LA TEORÍA APOE.

La teoría APOE fue creada por Dubinsky en 1991, y sus fundamentos se encuentran en la teoría Piagetana sobre la construcción del conocimiento. La teoría APOE toma el concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget, el cual originalmente fue propuesto para describir el desarrollo del pensamiento lógico infantil, pero en la teoría APOE se extiende el alcance de la abstracción reflexiva para comprender el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Dubinsky, Weller, Stenger y Vidakovic (2008) destacan: “Piaget señaló una cercana relación entre la naturaleza matemática de los conceptos y su desarrollo en la mente de un individuo. Por tanto, el análisis basado en la teoría APOE es a la vez epistemológico y psicológico” (p.100).

Dubinsky trae la noción de abstracción reflexiva, propuesta por Piaget, para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, bajo la hipótesis que “el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos, organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas” (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 276).

El propósito central de Dubinsky con esta teoría es entender cómo las matemáticas se aprenden, bajo el supuesto que las estructuras clave para describir la construcción del conocimiento son "Acción, Proceso, Objeto y Esquema" (APOE).

2.2 APOE: CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES.

Para Piaget la pregunta importante no es cómo se construye el conocimiento, sino cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro. Es de esta forma que la teoría APOE tiene por propósito describir la manera en la que se pasa de un estado de conocimiento a otro, en particular en el caso de los conceptos que corresponden a la matemática que se introduce en la educación superior.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema que constituyen las construcciones mentales. La descripción del paso de una construcción mental a otra se logra mediante la explicitación de los mecanismos, entre los que reconocemos la interiorización, la coordinación, la encapsulación y la tematización.

- ✓ **Acción**

"Una acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto, como algo externo" (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996); es decir, cuando se trata de una reacción a estímulos, "los cuales pueden ser físicos o mentales. Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas. En cada caso el efecto es transformar en forma física o mental uno o varios objetos" (Dubinsky, 1997, pág. 96). Por ejemplo, una acción para el concepto de TL corresponde a calcular la imagen de un vector específico dada una TL. Una acción es cualquier transformación física o mental de un objeto para obtener otro objeto. Cuando una persona reflexiona sobre una acción, puede comenzar a establecer un control consciente sobre ella, entonces la acción es interiorizada y se convierte en un proceso.

- ✓ **Proceso**

"Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo... En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas" (Dubinsky, 1996). "Nos referimos a la construcción de un proceso desde una acción como una interiorización. Una vez que un individuo tiene construido un proceso, varias cosas son posibles. Por ejemplo, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener un nuevo proceso" (Dubinsky, 1997, pág. 96). Un ejemplo de una construcción mental proceso para el concepto TL, se encuentra cuando un estudiante es capaz de dar cuenta de los procedimientos para construir la Matriz Asociada a una TL.

- ✓ **Objeto**

"Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él (ya sean acciones o procesos) y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto" (Asiala, et al., 1996). De esta forma, se dice que un proceso ha sido encapsulado por el individuo en un objeto. Por otra parte, un objeto puede ser desencapsulado para obtener el proceso del cual surgió. En Asiala (1996) se menciona que "en general, se considera que la encapsulación de procesos para obtener objetos es extremadamente difícil"; es decir, tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un proceso y reflexionar sobre ellas resulta una dificultad para los estudiantes. Un ejemplo de una construcción objeto para el concepto TL se tiene cuando un estudiante es capaz de determinar si una TL es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Para Trigueros (2005), el paso por estas tres construcciones mentales, Acción, Proceso, Objeto, no es obligatoriamente secuencial. Un estudiante puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias, e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto matemático y en otra para otros.

- ✓ **Esquema**

La noción de esquema se refiere a una colección más o menos coherente de objetos, procesos y otros esquemas. Los esquemas son las construcciones más complejas que podemos determinar de un concepto matemático, y al mismo tiempo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto o proceso y la reacomodación de las estructuras por la construcción de nuevas relaciones entre los componentes del esquema. Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular. Por ejemplo, un estudiante despliega del esquema del concepto TL, en su interpretación geométrica, cuando demuestra coordinar de alguna manera las representaciones figurales asociadas al concepto TL, con el concepto de función y base de un espacio vectorial, pudiendo identificar los elementos fundamentales sobre los cuales realizar acciones o procesos.

Entenderemos desde la perspectiva de Trigueros que los esquemas "permiten dar cuenta de las relaciones que se establecen entre los distintos conceptos, y la forma en la que estas relaciones evolucionan cuando un individuo se enfrenta a conceptos complejos, y a situaciones en las que requiere utilizar conjuntamente conceptos que provienen de distintas ramas de la matemática o distintos conceptos que antes no se consideraban relacionados unos con otros. De esta manera permiten incluir otros objetos matemáticos de la misma rama de las matemáticas, que para un individuo no tenían que ver unos con otros, antes de encontrar dicha relación" (Trigueros, 2005). Entonces, hablar de esquemas dentro de la teoría APOE no corresponde solamente a un conjunto de especificaciones sobre las acciones, los procesos y los objetos que intervienen en la solución de un problema o de un conjunto de problemas, sino que es necesario considerar las relaciones que entrelazan estos elementos.

La evolución de los esquemas ha sido tratada en diversas investigaciones que dan cuenta de la construcción del esquema de distintos conceptos, como por ejemplo la regla de la cadena para la derivación en cálculo (Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, John, St.,Tolias, y Vidakovic, 1997), series y sucesiones (McDonald, Mathews y Strobel, 2000), la evolución cognitiva del concepto espacio vectorial (Parraguez y Oktac¸ 2010). Sin embargo, sobre la tematización de un esquema es escasa la bibliografía; podemos citar a Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2009) en su artículo "*Schema Tematization: A Framework and a Example*". Estas investigaciones evidencian sus resultados al considerar que un estudiante reflexiona sobre su comprensión del esquema de un concepto matemático, visto como "una totalidad", y es en este punto cuando el estudiante es capaz de realizar nuevas acciones sobre el esquema; entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto.

En "*APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*" (Arnon, et al., 2014) encontramos la siguiente definición para esquema tematizado: "*A Schema can be thematized to become a cognitive Object to which Actions and Processes can be applied. By consciously de-thematizing a Schema, it is possible to obtain the original Actions, Processes, Objects, and other Schemas from which the Schema was constructed" (Clark et al. 1997).* Lo interesante en un esquema tematizado es la posibilidad de reconstruir las acciones, procesos y objetos que lo construyeron. En nuestra investigación y reconociendo la complejidad del concepto TL, separamos las diferentes interpretaciones del concepto con el propósito de reconocer las estructuras mentales específicas que lo constituyen, y así propiciar su evolución.

Para Piaget y García (1989) los esquemas evolucionan, y es posible reconocer tres niveles en dicho desarrollo: un nivel *Intra-*, uno *Inter-* y el nivel *Trans-*. Se considera que el nivel de esquema *Intra-* se relaciona con la construcción de acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto de manera aislada; en este nivel no hay conexiones con otros esquemas, y las componentes internas aún se encuentran débilmente relacionadas. El nivel de esquema *Inter-* se asocia con la existencia de relaciones entre diferentes acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un concepto, es decir, en este nivel se identifica algún tipo de transformación que permite relacionar de manera más fuerte los elementos constitutivos del esquema. Para la descripción del nivel de esquema *Trans-*, se procura identificar alguna conservación que permita dar coherencia al esquema, en el sentido que el estudiante sea capaz de determinar en qué situaciones el esquema pueda ser utilizado como un todo y en cuáles no. Una de las diferencias con los otros niveles radica en que aun cuando el individuo puede evocar componentes del esquema e incluso establecer relaciones entre ellas, no lo utiliza de manera coherente, como un todo.

2.2.1 LA TRIADA: NIVELES *INTRA-*, *INTER-* Y *TRANS-* DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO DE TL.

Uno de los objetivos en esta tesis es dar cuenta de la evolución de los esquemas involucrados en la construcción del concepto TL, desde una perspectiva que integra tres interpretaciones de este concepto, basadas en un modelo multinterpretativo. En términos generales, para analizar el esquema del concepto TL y determinar sus componentes, proponemos que un estudiante muestra un nivel de esquema *Intra-* TL, si en alguna de sus interpretaciones muestra evidencia de haber construido una construcción mental objeto que le permita realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha construido relaciones que le permitan interpretar la relación entre las distintas interpretaciones como transformaciones del mismo concepto, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras interpretaciones del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto TL de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, no podría responder en forma adecuada.

Un estudiante que muestra un nivel de esquema *Inter-* TL, es aquél que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este concepto. Es de esta forma que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, lo que le permite establecer las primeras construcciones mentales relacionadas con las correspondencias con los teoremas propios de las TL.

Para finalizar, un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans-* TL si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto y es capaz de verlas como referentes al mismo concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales.

2.3 APOE Y SU CICLO DE INVESTIGACIÓN.

La teoría APOE posee un ciclo de investigación propio que en este caso formará parte de la metodología de investigación, siendo potenciado por un estudio de caso, que provee herramientas para la selección de los estudiantes y permite depurar las técnicas en la toma de datos, y el análisis de éstos provendrá de la teoría APOE.

El ciclo de investigación está constituido por tres componentes esenciales: Análisis Teórico, Diseño - Aplicación de Instrumentos y Análisis - Verificación de Datos (Asiala et al., 1996).

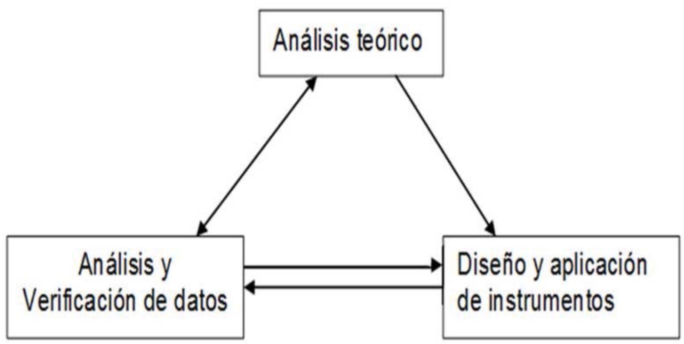


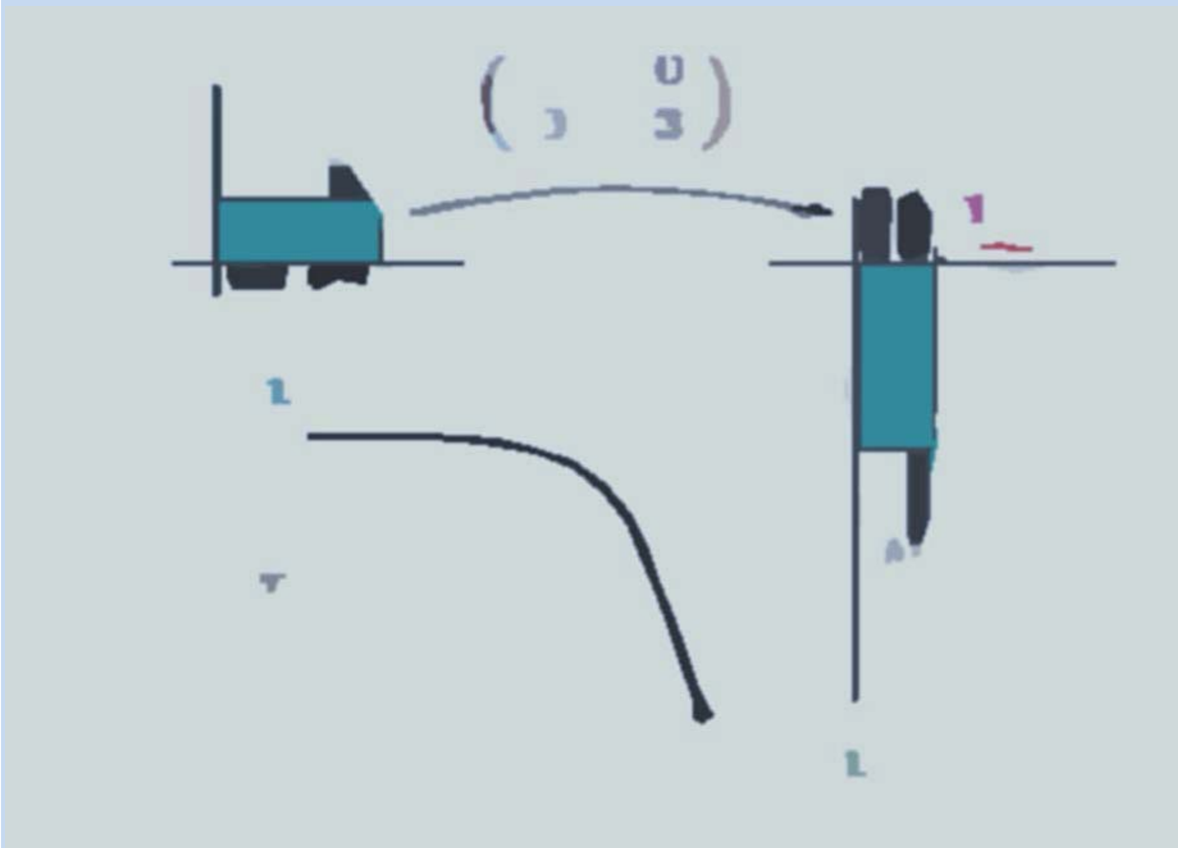
Figura 2.1. Ciclo de investigación de APOE. Asiala et al.1996.

Este ciclo de investigación facilita documentar, mediante una descripción detallada y próxima, la construcción de estructuras mentales que realizan los estudiantes por medio de un análisis teórico. En dicho análisis se utiliza la llamada descomposición genética (DG) del concepto, que sirve como modelo para la investigación, el que puede ser refinado, para posteriormente constituir un referente teórico didáctico para el diseño de material de enseñanza. Paso seguido, por la implementación experimental que viene dada por el uso de los instrumentos diseñados, que podrían ser refinados y mejorados como resultado del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo del ciclo.

Como consecuencia de la aplicación de este ciclo de investigación determinaremos una descomposición genética refinada para la investigación, que sin duda aún podrá ser mejorada mediante la repetición de este ciclo.

CAPÍTULO 3:

LA INVESTIGACIÓN Y SU DISEÑO.



CAPÍTULO 3:
LA INVESTIGACIÓN Y SU DISEÑO.

En esta investigación nos propusimos comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes universitarios. Particularmente, nos interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales que un estudiante realiza para aprehender el concepto de TL; para ello, utilizamos la teoría cognitiva APOE (acción-proceso-objeto-esquema) y su ciclo de investigación. Como es sabido, las estructuras mentales que un individuo ha desarrollado previamente determinan la construcción de nuevos conceptos, en particular los matemáticos. Para examinar estos procesos pensamos que se requiere de registros de observación de discursos, que permitan el análisis de los actos y procedimientos realizados por los estudiantes, por lo que una aproximación adecuada es el estudio de casos. De esta forma, se incorpora dentro del ciclo de APOE un estudio de casos.

3.1 EL CICLO DE INVESTIGACION DE LA TEORIA APOE. UN ESTUDIO DE CASOS.

El ciclo de investigación en la teoría APOE está constituido por tres componentes: Análisis Teórico, Diseño - Aplicación de Instrumentos y Análisis - Verificación de Datos (Asiala et al., 1996). Este ciclo de investigación facilita documentar mediante una descripción detallada y próxima la construcción de los conceptos matemáticos que realizan los estudiantes, por medio de un análisis teórico y con la implementación experimental dada por los instrumentos que se refinan y mejoran como resultado del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo del ciclo. A continuación detallamos cada una de estas componentes y la forma en que se relacionan.

3.1.1 ANÁLISIS TEÓRICO.

El análisis teórico consiste en el estudio profundo de los conceptos matemáticos inmersos en el concepto de TL, para determinar las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje de las diferentes interpretaciones de éste, mediante una descripción hipotética de las construcciones mentales del aprendiz, esto es, lo que llamamos una Descomposición Genética (DG), que consiste en una modelación epistemológica cognitiva del teorema. Hemos de aclarar que tal descomposición no es única, pues depende de los caminos de construcción del concepto y de las construcciones mentales a considerar.

3.1.2 DISEÑO Y APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS.

Una vez definida la descomposición genética teórica es necesario probarla, es decir, tener alguna certeza de su viabilidad como un modelo descriptivo para la construcción de un concepto matemático. En nuestro estudio se construyeron tres descomposiciones genéticas, una por cada interpretación, las que fueron validadas mediante cuestionarios independientes. Se diseñaron y aplicaron instrumentos que permitieron identificar las construcciones mencionadas en la(s) descomposición(es) genética(s) inicial(es), de modo de reflejar de modo explícito las construcciones mediante las cuales los estudiantes pueden aprehender el concepto de TL.

3.1.3 ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS.

En esta componente del ciclo, en la teoría APOE, se realiza el análisis de los datos empíricos obtenidos en el Diseño y Aplicación de Instrumento. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la DG, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben. Esto llevaría a una reformulación de la DG y a la determinación de una versión refinada de ella para este ciclo.

Como resultado de la aplicación de este ciclo de investigación, determinaremos una DG refinada para esta etapa de investigación, que sin duda aún podrá ser mejorada mediante la repetición de este ciclo.

3.1.4. UN ESTUDIO DE CASOS.

Consideramos pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de casos, pues es particularmente apropiado para realizar investigaciones en un determinado período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad (Cf. Del Rincón y Latorre, 1992), permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo (Cf. Goetz y Le Compte, 1988, p. 69). Por otra parte, es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE y de su ciclo de investigación. Los estudios de casos se insertan dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE, para situar las características de los estudiantes participantes en la investigación y aportar procedimientos en la realización de la investigación.

A continuación y como parte del diseño metodológico, presentamos los criterios incorporados desde el estudio de casos.

3.2 PARTICIPANTES.

Las unidades de estudio fueron 20 alumnos chilenos, que se trabajaron como caso (Stake, 2010), específicamente estudiantes de la carrera de licenciatura y pedagogía en matemática de una universidad del país. El procedimiento para la selección de los estudiantes al interior del caso, utilizó las siguientes categorías:

1. Heterogeneidad de los estudiantes que pertenecen al conjunto.
2. Existencia en los programas de estudio de al menos una asignatura de álgebra lineal.
3. Accesibilidad de los investigadores. Los estudiantes no fueron alumnos de los investigadores en los cursos de matemáticas.

Para la selección de los estudiantes, se hizo un muestreo teórico y categorial, a saber:

- ✓ Avance curricular: que no hayan reprobado las asignaturas de álgebra básica y cursen a lo sumo el sexto semestre de su primera carrera, para descartar en lo posible que sus construcciones mentales se limiten acciones y/o procesos.

- ✓ Género: número similar de mujeres y de hombres, para evitar sesgos indebidos en el estudio.

- ✓ Estudiantes voluntarios.

Se trabajó con una unidad de análisis determinada en atención a los criterios antes mencionados, y se diseñaron registros de observación y protocolos de entrevistas semiestructuradas, previstas por la teoría, las cuales se grabaron en video. En tabla 3.1 se resume la información.

Tabla 3.1. Información sobre el caso. Fuente propia (2013)

TIPO DE ESTUDIANTE	LICENCIATURA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA
Universitario con el curso de álgebra lineal aprobado.	- Cuestionario (20)
	- Entrevista semiestructurada (3)

3.3 DESCRIPCION GENERAL DE LA APLICACIÓN DEL CICLO DE INVESIGACIÓN.

La investigación se desarrolló entre los años 2012 y 2014. En ella aplicamos las fases previstas en el ciclo de investigación de la teoría APOE, incorporando un estudio de casos con el propósito de potenciar el diseño metodológico.

Es así que entre 2012 y principios de 2013, se realizaron los análisis teóricos dispuestos en la teoría APOE para cada interpretación del concepto TL. La construcción de instrumentos, recopilación de las primeras evidencias y análisis de éstas, fueron realizadas durante el primer semestre de 2013. Los resultados de dichos análisis se recopilaron y organizaron en tablas —que encuentran en el capítulo 4—. Posteriormente y como parte del diseño metodológico, se realizó una triangulación de estos datos, desde donde se seleccionó para la entrevista a los estudiantes del caso que mostraron construcciones próximas a la de objeto para el concepto TL.

Durante el segundo semestre del año 2013 y el primer semestre del año 2014, se concluyó el análisis de los datos obtenidos de los instrumentos; a partir de estos datos se construyó el guion para entrevistar a algunos de los estudiantes de caso. Se realizaron tres entrevistas en profundidad, las que fueron analizadas, para culminar con el escrito de esta investigación

Por otra parte y paralelamente, se efectuaron presentaciones a nivel nacional e internacional, en diversos eventos científicos de educación matemática, con el propósito de comunicar los primeros avances y retroalimentar la investigación, las que culminaron en publicaciones en las actas de dichos eventos (Relme-Alme, Sochiem-Rechiem).

A continuación presentamos el análisis teórico que comprende la construcción de las descomposiciones genéticas por cada interpretación para el concepto TL.

3.4 ANÁLISIS TEÓRICO. DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS PROPUESTAS (DG).

Como parte del ciclo de investigación dispuesto en la teoría APOE, a continuación presentamos las DG diseñadas en la investigación para cada interpretación del concepto TL. Ellas constituyen la base del estudio del modelo multinterpretativo, desde donde se levantan cuestionarios, análisis y la fundamentación teórica para este estudio.

3.4.1 DG INTERPRETACIÓN FUNCIONAL DEL CONCEPTO TL.

Hemos señalado entre los antecedentes que existe una DG validada para la interpretación funcional del concepto TL (Roa, 2012). A pesar de ello, consideramos pertinente introducir una nueva DG, propia para esta investigación y que se adapte al modelo planteado.

A continuación presentamos dicha DG, propuesta para determinar las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego para construir el concepto TL, en lo que hemos llamado interpretación funcional. Incorporamos algunos tramos de la descomposición genética mediante dos figuras (figura 3.1 y figura 3.2), referidas a lo que consideramos tramos relevantes para dar cuenta de dicha construcción.

Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre el concepto TL, proponemos como modelo la siguiente DG:

La construcción del concepto TL en su interpretación funcional como una construcción mental objeto, se inicia a nuestro juicio desde una construcción mental esquema de los conceptos espacio vectorial y función. Desde estos esquemas se toman algunos de los componentes que lo conforman. Desde la construcción mental esquema de espacio vectorial, tomamos: espacio vectorial, vectores y combinación lineal como construcciones mentales objeto y base como construcción mental proceso. Por su parte, de la concepción esquema del concepto función: función como objeto, dominio y recorrido como proceso, además de la expresión algebraica que define a una función como construcción proceso.

De las construcciones mentales objeto, se desencapsula los conceptos de espacio vectorial como proceso y función como proceso, que coordinamos por medio de la restricción a un espacio vectorial de los conjuntos de partida y de llegada —dominio y recorrido—, es decir, de la construcción mental proceso del concepto función entendido $f : A \rightarrow B$, donde $x \rightarrow f(x)$; mediante la restricción es posible obtener una construcción mental proceso del concepto función sobre espacios vectoriales $f : \mathrm{V} \rightarrow W$, donde $v \rightarrow f(\mathrm{v}) = \mathrm{w}$. Paralelamente, es posible considerar una construcción mental proceso del concepto de vector *v*, el que es reescrito en términos de un conjunto de vectores de *V*, lo que constituye una construcción mental proceso resultante de la coordinación del concepto de vector y de combinación lineal, definido de la forma siguiente, por: $\forall v, v_1, v_2 \in V; \alpha_1, \alpha_2 \in R$ y $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$. Posteriormente se coordina el concepto de función restringida a espacios vectoriales con el de vector reescrito como combinación lineal. En la figura 3.1 realizamos un diagrama que muestra las coordinaciones antes descritas.

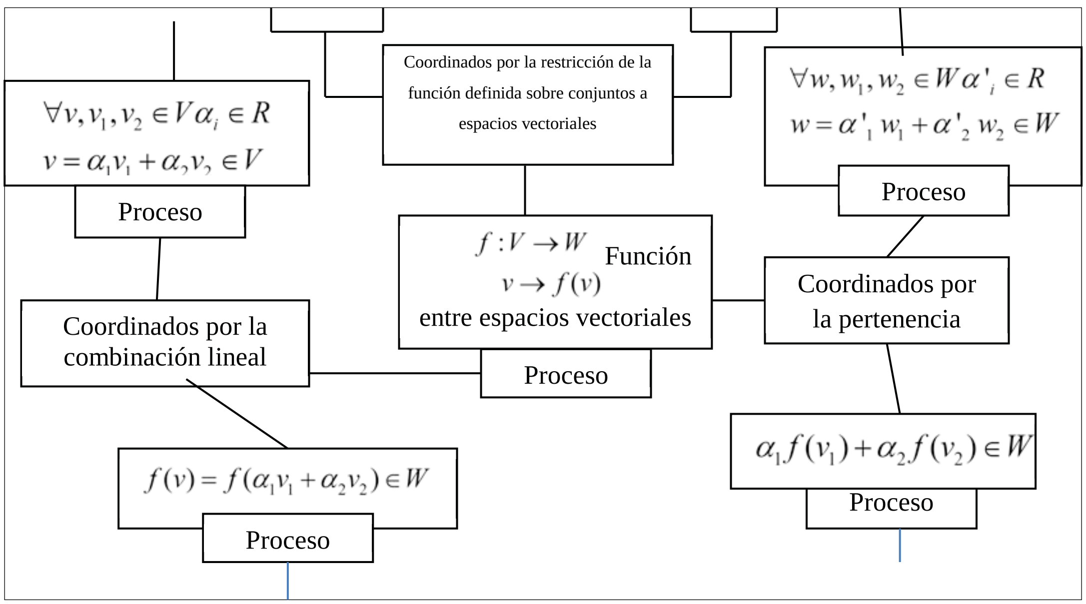


Figura 3.1. Coordinaciones fundamentales.

La construcción continua al coordinar este vector rescrito con la restricción de la función definida sobre conjuntos a espacios vectoriales, y su imagen se entenderá como un elemento del espacio de llegada. De esta forma se tiene una construcción proceso del concepto de función entre espacios vectoriales. Posteriormente tenemos dos coordinaciones del proceso antes mencionado y los vectores en los espacios dados: uno a través de la combinación lineal de vectores en el espacio de partida, y el otro el reconocimiento de que las imágenes de la función son vectores del espacio de llegada.

Los procesos antes descritos están coordinados por la igualdad, para obtener el proceso que define el concepto TL en su interpretación funcional, y encapsular como un objeto que posteriormente se rotula como TL. Figura 3.2.

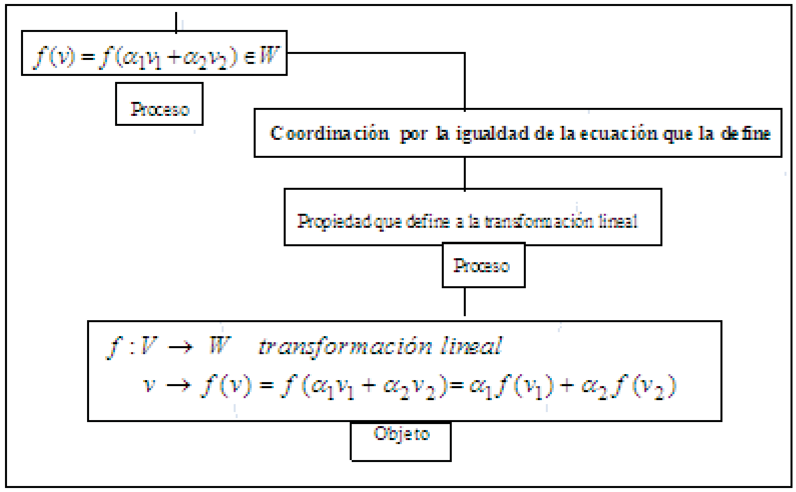


Figura 3.2. Tramo final de la DG para el concepto de TL.

La descripción antes dada en términos de construcciones y mecanismos mentales para la interpretación funcional, sirvió como modelo para formular las preguntas del cuestionario y su posterior análisis.

3.4.2 DG INTERPRETACIÓN MATRICIAL DEL CONCEPTO TL.

Para la interpretación matricial del concepto TL, consideraremos la matriz asociada a una TL, que fue descrita en el capítulo 1 apartado 1.3.

Bajo las hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre el TMATL anteriormente descritas, sostenemos que para que un estudiante construya el TMATL como objeto, es necesario que muestre como conocimientos previos los de espacio vectorial de dimensión finita como esquema, que incluye el objeto espacio vectorial, el objeto base y el objeto dimensión. Así también, consideramos el concepto de TL como proceso, y el de Matriz como proceso.

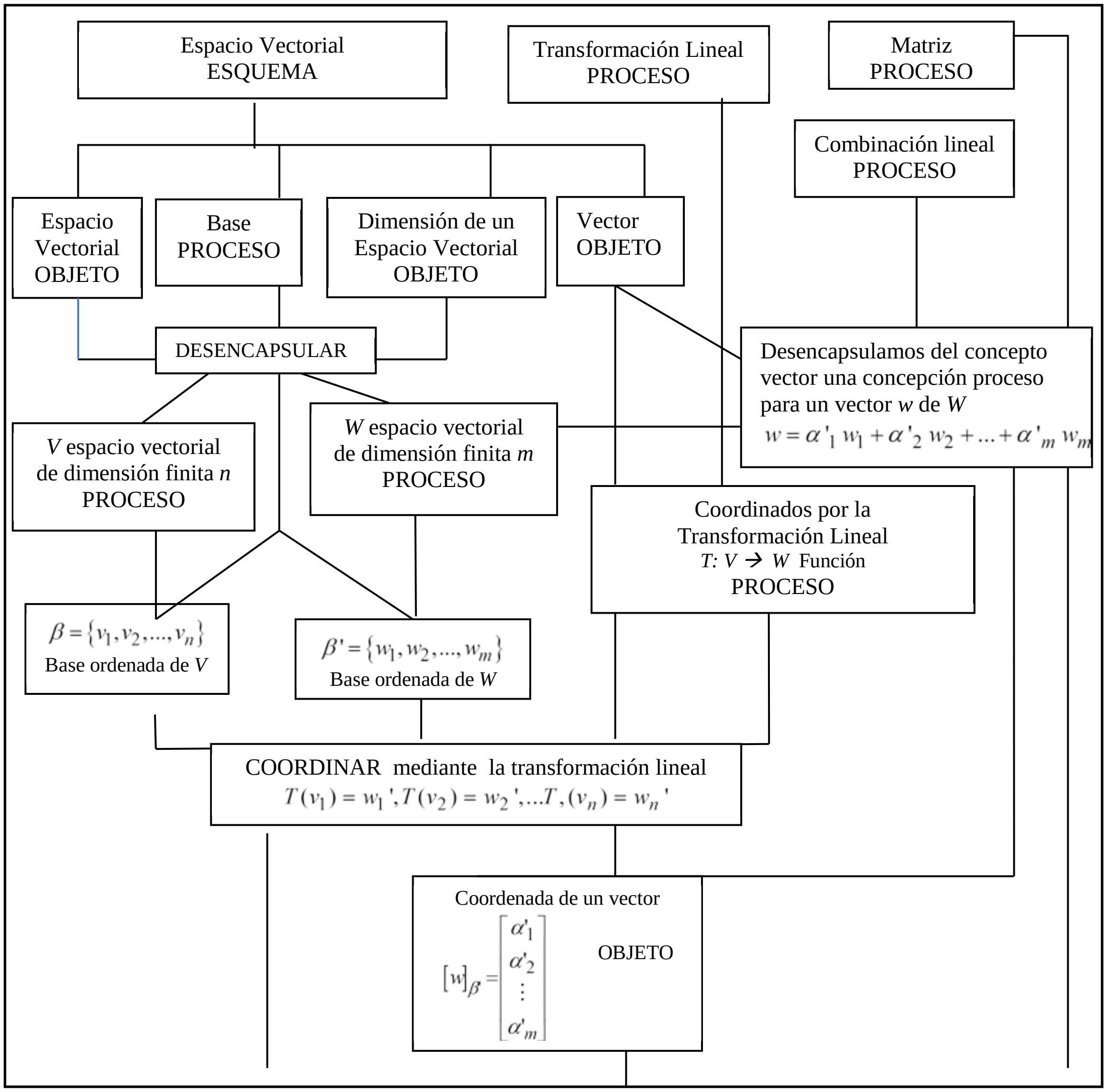


Figura 3.3. Ilustra la primera parte de la DG.

La construcción del TMATL como objeto se inicia a partir del esquema espacio vectorial, desde donde se consideran los siguientes componentes que lo conforman: espacio vectorial como objeto, base como proceso y vectores elementos de dicho espacio vectorial como objetos. Consideramos las construcciones mentales procesos de dos espacios vectoriales *V* y *W*, con dimensiones finitas, no necesariamente iguales, digamos *n* y *m* respectivamente, que se coordinan a través de la TL *T* en un nuevo proceso que permite considerar la transformación lineal como una función, cuyo dominio es uno de los espacios vectoriales y cuyo codominio es el otro espacio vectorial, digamos *T* de *V* en *W*. Este proceso se coordina con el proceso de base, dando origen a un nuevo proceso en el que es posible calcular las imágenes de los vectores de una base *B* de *V* bajo la transformación lineal *T*. Este proceso se coordina con el proceso de espacio vectorial *W* en un nuevo proceso que permite determinar que el conjunto de las imágenes de los vectores de una base *B* de *V* pertenecen al espacio vectorial *W*. El proceso combinación lineal se coordina con el de espacio vectorial *W* en un nuevo proceso que permite identificar un vector *w* en el espacio vectorial *W*, y escribirlo en términos de los vectores de una base *B'* del espacio vectorial *W*. Este proceso se encapsula en un objeto coordenada del vector *w* en la base *B'*, esto es, $[w]_{B'}$.

El proceso de cálculo de las imágenes de los vectores de una base *B* de *V* mediante la transformación lineal *T* se coordina con el proceso de escribir todos (generalización de cálculo de imágenes) los vectores de la base *B*.

El proceso de base *B'* de *W* se coordina con el proceso que identifica a las imágenes de la base *B* de *V* como elementos del espacio vectorial *W*, en un nuevo proceso que permite escribir a estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base *B'* de *W* (interiorización dada por el cuantificador, que determina que el proceso de coordenada de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada *B* de *V*). Este proceso se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas. La interiorización de este proceso se encapsula en el objeto matriz asociada a una transformación lineal, rotulado como $[T]_B^{B'}$.

Una vez construida la MATL como una construcción mental objeto, es posible mirar su evolución, realizando acciones sobre ella. A través del proceso de comparación de los objetos $[T]_B^{B'}$ y $[T(v)]_{B'}$ es posible construir el proceso de determinar la igualdad entre ambos objetos $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$. Este proceso se coordina además con el proceso de función en un nuevo proceso, que permite considerar esta igualdad como el resultado de la aplicación de una función, lo cual viene a ser la construcción mental proceso TMATL. Este proceso se encapsulará en el objeto TMATL $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$. En la figura 3.4, se muestra un diagrama que ilustra la segunda parte de la DG.

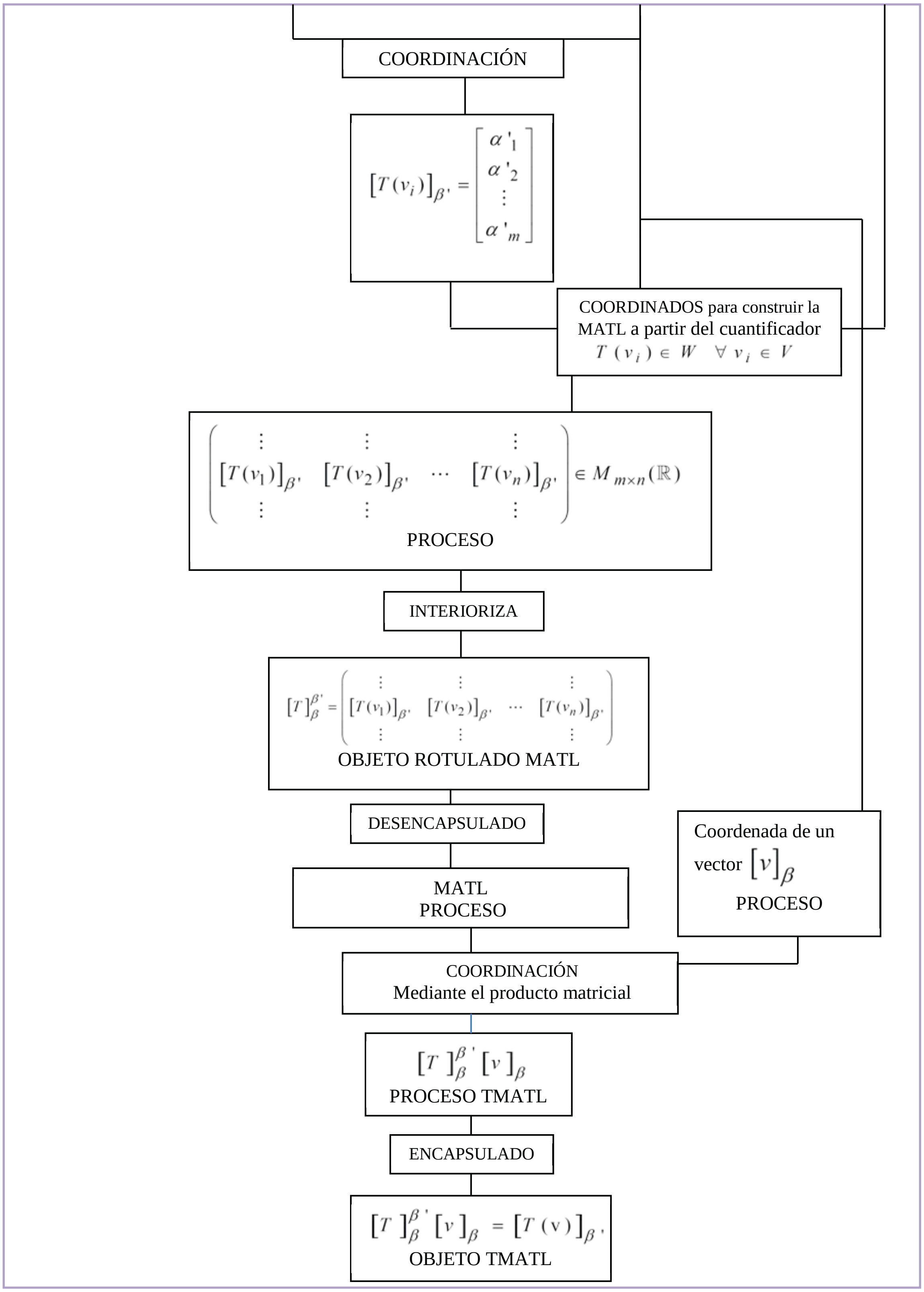


Figura 3.4. Ilustra la segunda parte de la DG.

La descripción antes dada en términos de construcciones y mecanismos mentales para la interpretación matricial sirvió como modelo para formular las preguntas del cuestionario y su posterior análisis.

3.4.3 DG INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO TL.

Para describir la interpretación geométrica del concepto TL, hemos considerado el teorema fundamental del álgebra lineal, restringido a espacios y subespacios vectoriales reales de dimensión a lo más tres; pensamos que ello permite una caracterización visual del concepto TL, a la vez que posibilita articulación con las otras interpretaciones. El carácter de este teorema construye una TL en cualquiera de sus interpretaciones, describiendo lo medular del concepto. Es desde esta perspectiva que nos propusimos describir las construcciones y mecanismos mentales necesarios para la construcción de la interpretación geométrica del concepto TL, asociando visualizaciones de subespacios de R^3. En esta construcción buscamos identificar los elementos del plano figural que aparecen en esta asignación y construyen el concepto de TL; entenderemos el concepto de plano figural como una representación semiótica de $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}$ sobre el sistema de coordenadas cartesiano de dimensión tres.

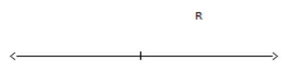
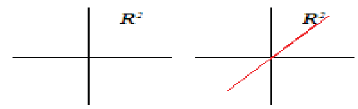
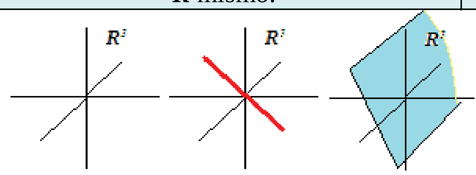
Algunos de los conceptos matemáticos que hemos considerado indispensables en esta construcción son: función, espacio vectorial real, nociones básicas de geometría vectorial euclidiana, base, dimensión, combinación lineal, dependencia lineal [li- ld], relación entre vectores y preservación de la linealidad. Todos estos conceptos los vincularemos mediante una versión simplificada del teorema fundamental del álgebra lineal, a espacios y subespacios vectoriales reales del espacio, el plano y la recta, esto es de $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}$.

3.4.3.1 DESCRIPCIÓN DE LA DG EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO DE TL.

Consideraremos el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^3$ y el concepto de función como construcciones mentales esquema. Desde el esquema de espacio vectorial $\boldsymbol{R}^3$, tomaremos los conceptos de base, dimensión, li, ld combinación lineal y vector como construcciones mentales proceso y los conceptos de subespacios de $\boldsymbol{R}^3$ como construcción mental objeto. Por otra parte, desde la construcción mental esquema del concepto función usaremos los conceptos de conjuntos, dominio, recorrido y formas específicas de funciones lineales en el espacio, como concepciones mentales proceso.

Paralelamente es posible representar los subespacios del espacio, el plano y la recta, como se muestra en Tabla 3.2, en el plano figural, para nuestra DG, Estas construcciones son las representaciones figurales de los subespacios de **$\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}$.**

Tabla 3.2. Descripción de la representación figural de los subespacios de ***R***, $\boldsymbol{R^2}$ *y* $\boldsymbol{R^3}$.

	
Los subespacios de ***R*** son el vector cero y ***R*** mismo.	Los subespacios de $\boldsymbol{R^2}$ son las rectas que pasan por el origen, el vector cero y el plano completo.
	Los subespacios de $\boldsymbol{R^3}$ son planos que contengan al vector cero, las rectas que pasan por el origen, el vector cero y el espacio completo.

Desde la construcción mental esquema para el concepto de espacio vectorial $\boldsymbol{R^3}$, considerando las construcciones mentales objeto asociadas al espacio y sus subespacios, desencapsulando los conceptos de dos espacios vectoriales $\boldsymbol{R^n}$ y $\boldsymbol{R^m}$, con dimensiones finitas, no necesariamente iguales, digamos n y m respectivamente, donde n y m pertenecen a {1,2,3}, en las construcciones mentales procesos que se coordinan a través de la función T en un nuevo proceso cuyo dominio es uno de los espacios vectoriales y codominio es el otro espacio vectorial, digamos de $\boldsymbol{R^n}$ en $\boldsymbol{R^m}$.

Este proceso se coordina con el proceso de base, dando origen a un nuevo proceso en el que es posible calcular las imágenes de los vectores de una base B de $\boldsymbol{R^n}$ bajo la T. Este proceso se coordina con el proceso de espacio vectorial $\boldsymbol{R^m}$ en un nuevo proceso, que permite determinar que el conjunto de las imágenes de los vectores de una base B de $\boldsymbol{R^n}$ pertenecen al espacio vectorial $\boldsymbol{R^m}$. En la figura 3.5 se representan estas primeras coordinaciones.

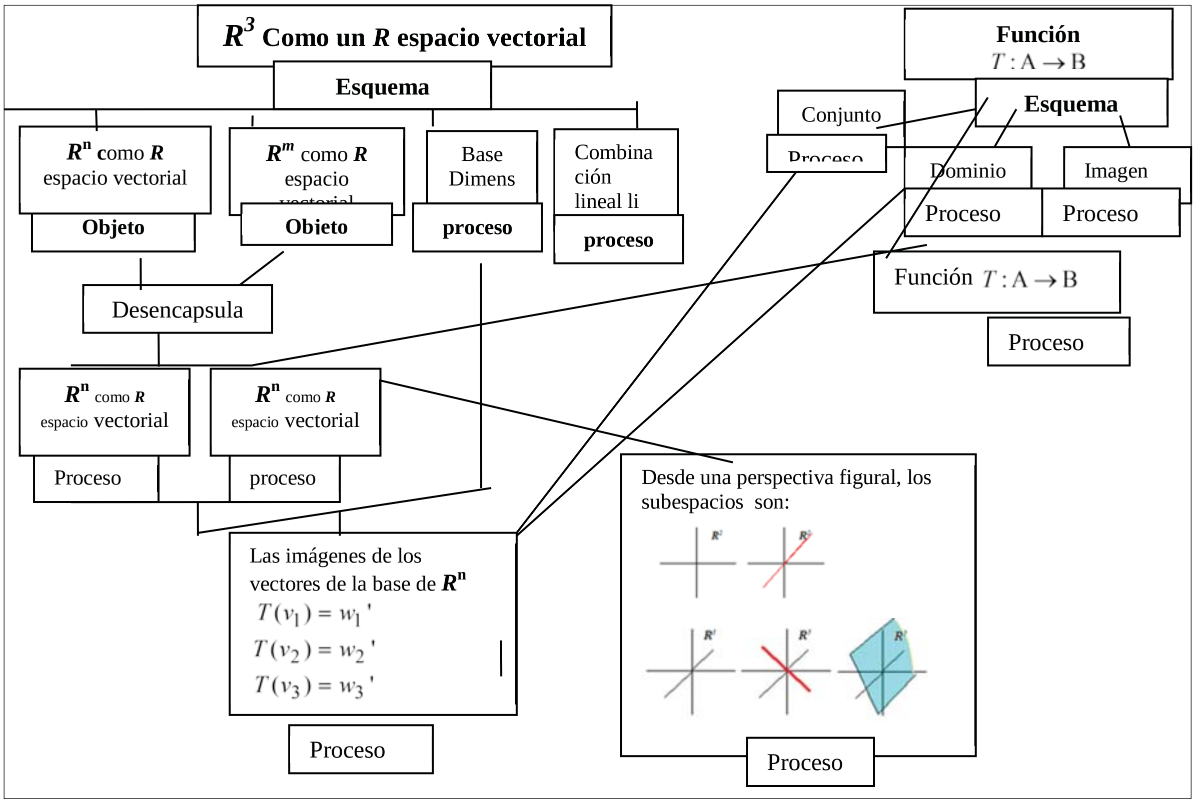
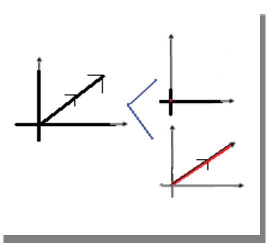


Figura 3.5. Coordinaciones iniciales de algunos elementos de la interpretación geométrica.

El proceso que identifica a las imágenes de la base B de $\boldsymbol{R}^n$ como elementos del espacio vectorial $\boldsymbol{R}^m$ construye una TL, pues todos los vectores del espacio de partida se pueden describir como una combinación lineal de los vectores de la base.

De este proceso finito de asignación de vectores desde bases de los espacios vectoriales de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^2$ y $\boldsymbol{R}^3$, se coordina con la representación figural de Funciones de $\boldsymbol{R}^m$ en $\boldsymbol{R}^n$, con m, n en el conjunto $\{1, 2, 3\}$; como construcción mental proceso dicha coordinación está dada por la combinación lineal. En la figura 3.6 se muestran las relaciones que un estudiante debe establecer con el plano figural dependiendo de su dimensión.

Una interpretación figural para la dimensión dos de la relación entre dependencia y linealidad



Una interpretación figural en dimensión tres de la relación entre dependencia y linealidad

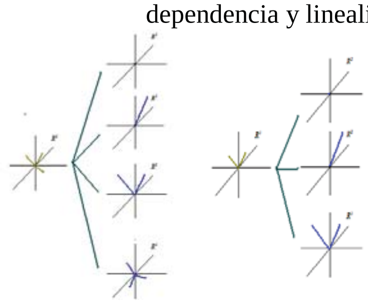


Figura 3.6 Relaciones figúrales relativas a la interpretación geométrica.

La interiorización de este proceso está dada por el cuantificador que se asocia al concepto de función, que determina que el proceso de asignación de un vector se repetirá en todos los vectores de la base B de $\boldsymbol{R}^{\mathbf{n}}$.

Para construir esta interpretación como una construcción mental objeto, debemos describir cómo generar con los vectores imágenes y levantar la generalización a esta forma: $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3)$ con $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$. Esto es, un estudiante debe coordinar el concepto de función con el de colinealidad que establece desde el plano figural, para determinar si el conjunto de llegada preserva estas características respetando la condición de función, lo que lleva a una construcción proceso de un tipo específico de funciones que al mismo tiempo debe coordinar con las imágenes que corresponden a un subespacio del espacio de llegada.

La encapsulación de los procesos anteriormente construidos mediante las propiedades de linealidad y generación desde una perspectiva geométrica, como se muestra en la figura 3.6, es una construcción mental objeto, que llamaremos interpretación geométrica si un estudiante muestra que entiende la relación causal entre el movimiento de vectores que configuran una base para el espacio y el rol de da transformación lineal en su interpretación funcional.

La descripción antes tratada en términos de construcciones y mecanismos mentales para la interpretación geométrica sirvió como modelo para formular las preguntas del cuestionario y su posterior análisis.

3.4.4 EL ESQUEMA Y EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes del caso se basa en un modelo multinterpretativo para el concepto de TL. Es este un concepto unificador para el álgebra lineal, razón por la cual para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las interpretaciones como construcciones mentales objeto o proceso; pensamos que son indispensables para la evolución del esquema del concepto de TL, y que nos permitirán determinar su coherencia, entendida esta última como la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si éste permite solucionar una situación matemática particular, y en tal caso usarlo.

Como proponemos en el capítulo 2 (apartado 2.2.1), para analizar la coherencia en el esquema del concepto TL y determinar sus componentes, pensamos que un estudiante muestra un nivel de esquema Intra- TL, si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras interpretaciones del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto TL de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios, no podría responder en forma adecuada. De igual forma, un estudiante que muestra un nivel de esquema Inter- TL es aquél que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este esquema, y de esta forma responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, lo que le permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las TL. Para finalizar, un estudiante muestra un nivel de esquema Trans-TL si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales.

En la figura 3.7 damos cuenta de esta idea sobre la estructura para el concepto TL, que posee componentes de origen funcional, matricial y geométrico, sin desconocer que es más amplio. Un ejemplo importante de un concepto en este “exterior”, es el de isomorfismo de espacios vectoriales, el que puede servir para examinar los elementos emergentes, pues posee características transversales para el álgebra en general.

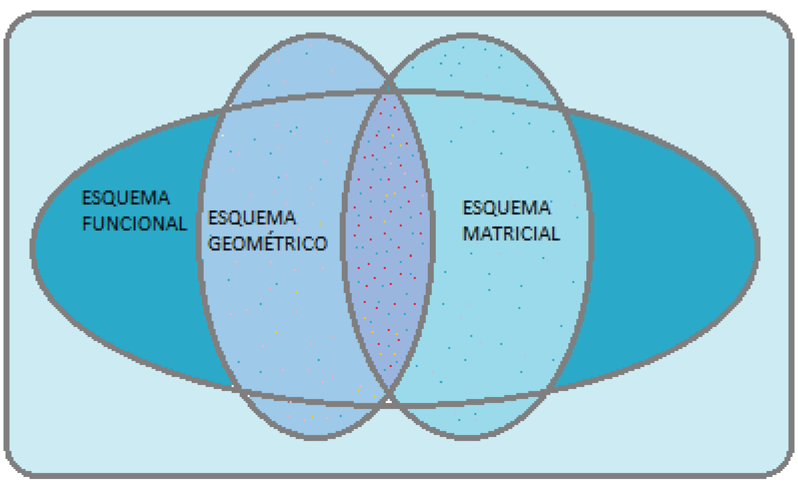


Figura 3.7. Dibujo sobre las componentes del modelo para el concepto de TL.

Es así que incorporamos en algunas de las preguntas de la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto TL. Pensamos originalmente que las nociones desde la perspectiva funcional, como las de inyectividad y epiyectividad, debieran emerger como construcciones proceso junto con la de linealidad como construcción mental objeto, la que debe ser desencapsulada en una construcción proceso que actuará coordinando al concepto kernel y de dimensión, para así construir una función que preserve la estructura de espacio vectorial.

Los conceptos de grupo cociente y clase estarían en el límite del concepto TL, por lo que este tipo de construcción obedecería a un nivel Trans-, siempre que dé muestras de su coherencia. Desde la interpretación matricial, pensamos el kernel como una construcción proceso, un elemento nuevamente importante para determinar el nivel de un esquema para el concepto de TL; a su vez, en la interpretación geométrica éste queda oculto, pues en una asignación entre vectores representados en el espacio correspondería a un simple conteo en la correspondencia entre coordinar el proceso de asignación de vectores con la construcción proceso del concepto de dimensión.

Por otra parte, deberemos tener en cuenta que un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Es posible que en los análisis de las entrevistas encontremos indicadores de algunos esquemas ya tematizados o cercanos a ello.

3.4.4.1 NIVELES DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO DE TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

A continuación presentamos una breve descripción de los niveles del esquema para el concepto TL, basada en las DG de cada interpretación del concepto TL.
Para trabajar con transformaciones lineales desde esta perspectiva global, un estudiante tiene que poner en juego sus construcciones previas alrededor de esquemas de los conceptos de espacio vectorial y función. Las relaciones de coherencia que establezca entre los conceptos de base, dimensión, vectores, combinación lineal, dominio, recorrido, imagen, coordenadas, MATL, determinarán los niveles *Intra*-, *Inter*- y *Trans*- para el concepto TL

3.4.4.1.1 NIVEL *INTRA*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Intra* -TL, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Las funciones que reconoce como TL son entre espacios y subespacios vectoriales de $\boldsymbol{R}^n$.
- Asume que la estructura algebraica se conserva bajo cualquier función, esto es, la combinación lineal se preserva automáticamente.
- Las bases son" transformadas" en bases mediante una TL.
- Los conjuntos LI (LD) son “transformados” en conjuntos LI (LD) mediante una TL.
- La prueba de que una función es una TL se reduce a comprobar que la imagen del cero es el cero.
- Prueba que una función es una TL realizando la verificación de la propiedad de la combinación lineal, sin verificar que el dominio y el recorrido son espacios vectoriales o subespacios vectoriales de un cuerpo específico**.**
- Construye la MATL para TL entre espacios y subespacios de dimensión finita.
- Las bases ordenadas son conjuntos cualesquiera de los espacios dados.

- Dada la MATL calcula las coordenadas de imágenes de vectores multiplicando las coordenadas de éstos por la matriz, en cualquier caso, y aplica la matriz cambio de base de ser necesario.
- La matriz es usada para determinar si la TL es un tipo específico de función (inyectiva o epiyectiva), y a su vez es vista como una TL.
- Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R}^3$, pero no la especifica en su expresión algebraica o matricial.
- Las bases son conjuntos de n-uplas y sólo son las bases canónicas.
- Las imágenes de los vectores se calculan mediante combinaciones lineales de las imágenes de éstos, no se aplica la TL.

En términos cognitivos y más precisos podemos, desde APOE, establecer que en este nivel (*Intra*- TL en el modelo multinterpretativo) las construcciones mentales mostradas para:
- El concepto de espacio vectorial real es objeto, sobre el cuál puede realizar ciertas acciones, las que quedan limitadas a subespacios de $\boldsymbol{R}^n$.
- El concepto de función es proceso, y una TL es un tipo de función.
- El concepto de combinación lineal es proceso, una evidencia es la disociación con la estructura algebraica del cuerpo del espacio vectorial.
- El concepto de kernel es proceso, se relaciona con el concepto de TL desde su perspectiva funcional, esto es determina inyectividad.
- El concepto de dimensión es objeto, sobre el cual realiza ciertas acciones para determinar biyectividad de una TL.
- El concepto de MATL es proceso, no puede realizar acciones sobre ella.
- El concepto de vector es objeto, pero realiza acciones limitadas a espacios vectoriales y subespacios de $\boldsymbol{R}^n$.

En este nivel no existe una clara conexión entre las nociones espacio vectorial, función TL, matriz, coordenadas o bases. En términos del modelo multinterpretativo, muestra un nivel de esquema *Intra*- TL si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, las que por hipótesis sí se lo permitirían.

3.4.4.1.2 NIVEL *INTER*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Inter*- TL en el modelo multinterpretativo, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:
- Las funciones que reconoce como TL son entre espacios vectoriales conocidos, como por ejemplo: $\boldsymbol{R}^n$,M_{mxn}, $P_n\ [x]$; esto es, con estructuras algebraicas sobre $\boldsymbol{R}$ como cuerpo.
- La combinación lineal de vectores se conserva mediante una TL, pero reconoce que los conjuntos LI no necesariamente son “transformados” en conjuntos LI mediante una TL.
- Para probar que una función es una TL se reduce a comprobar que la imagen del neutro es el neutro.

- Prueba que una función es una TL comprobando la propiedad de linealidad, sin verificar que el dominio y el recorrido son espacios vectoriales o subespacios vectoriales de un cuerpo específico**.**
- Construye la MATL sólo para TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R^n}$ en $\boldsymbol{R^n}$.
- Las bases son conjuntos de n-uplas y posiblemente sólo sean las bases canónicas, lo que implica que las coordenadas son matrices transpuestas.
- Las coordenadas de imágenes de vectores se calculan mediante combinaciones lineales de las imágenes de éstos, no se aplica la matriz cambio de base en caso de ser necesario.
- La matriz no es vista como una función, menos como una TL.
- Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R^3}$ y es capaz de especificarla en una de sus otras interpretaciones, funcional o matricial.
- Las bases son conjuntos que logra determinar del plano figural mediante la coordinación de las concepciones proceso de los conceptos de base con el de espacio vectorial. Aquí las bases canónicas son por elección.
- Las imágenes de los vectores se calculan mediante la TL en cualquiera de sus interpretaciones.

En términos cognitivos y más precisos podemos, desde APOE, establecer que en este nivel (*Inter*- TL en el modelo multinterpretativo) las construcciones mentales mostradas para:
- El concepto de espacio vectorial real es objeto, sobre el cuál puede realizar ciertas acciones, las que quedan limitadas a subespacios de $\boldsymbol{R^n}$, $M_{mxn}, P_n\,[x]$.
- El concepto de función es objeto, y una TL es un tipo de función.
- El concepto de combinación lineal es proceso, una evidencia es la disociación con la estructura algebraica del cuerpo.
- El concepto de kernel es objeto, sobre el cual puede realizar ciertas acciones que le permiten determinar la inyectividad de una TL.
- El concepto de dimensión es objeto, sobre el cual realiza acciones para determinar relaciones entre los espacios vectoriales que construyen el conjunto de partida y llegada en una TL.
- El concepto de MATL es objeto, sobre el que realiza acciones, como calcular imágenes de vectores.
- El concepto de vector es objeto, pero realiza acciones limitadas a espacios vectoriales y subespacios de $\boldsymbol{R^n}$, $M_{mxn}, P_n\,[x]$.

En este nivel los estudiantes, dependiendo del contexto del problema, relacionan los objetos espacio vectorial real, función, TL, matriz, coordenadas y base como elementos interconectados, aunque todavía pueden existir algunas dificultades. En términos del modelo multinterpretativo, muestran un nivel de esquema *Inter*- TL, si por lo menos han articulado dos de las interpretaciones de este esquema. Es de esta forma que responden a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, lo que les permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las TL.

3.4.4.1.3 NIVEL *TRANS*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Trans*-TL en el modelo multinterpretativo, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

- Las funciones que reconoce como TL son entre espacios vectoriales, esto es, con estructuras algebraicas sobre ***K*** como cuerpo.
- La combinación lineal de vectores se conserva mediante una TL, y lo aplica a conjuntos LI y base que no necesariamente son "transformados" en conjuntos LI y base mediante una TL.
- Prueba que una función no es una TL al comprobar que la imagen del neutro del espacio vectorial de partida no es el neutro del espacio vectorial de llegada.
- Prueba que una función es una TL comprobando la propiedad de linealidad, teniendo claro cuáles son los espacios o subespacios vectoriales involucrados**.**
- Construye la MATL para TL entre espacios y subespacios de dimensión finita.
- Las bases ordenadas son conjuntos cualesquiera de los espacios dados.
- Dada la MATL calcula las coordenadas de imágenes de vectores multiplicando las coordenadas de éstos por la matriz, en cualquier caso, y aplica la matriz cambio de base de ser necesario.
- La matriz es usada para determinar si la TL es un tipo específico de función (inyectiva o epiyectiva), y a su vez es vista como una TL.
- Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R^3}$ y es capaz de especificarla en cualquiera de sus otras interpretaciones, funcional o matricial.
- Puede determinar el tipo de TL, si es inyectiva, epiyectiva o biyectiva, por lo que las imágenes de conjuntos de vectores están claras.

En términos cognitivos y más precisos podemos, desde APOE, establecer que en este nivel (*Trans*- TL en el modelo multinterpretativo) las construcciones mentales mostradas para:

- El concepto de espacio vectorial real es esquema.
- El concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo es objeto.
- El concepto de función es objeto, y una TL es un tipo de función.
- El concepto de combinación lineal es objeto; sobre el que realiza acciones, las que relaciona con la estructura algebraica del cuerpo.
- El concepto de kernel es objeto, sobre el cual puede realizar ciertas acciones que le permiten determinar la inyectividad de una TL y construir cocientes.
- El concepto de dimensión es objeto, desde donde puede realizar acciones sobre el espacio vectorial de partida para determinar relaciones entre los espacios vectoriales que construyen el conjunto de partida y llegada en una TL.
- El concepto de MATL es objeto, sobre el que realiza acciones, como calcular imágenes de vectores.
- El concepto de vector es objeto, realiza acciones que le permiten construir una TL desde el plano figural, esto es sobre ***R***- espacios vectoriales.

En este nivel los estudiantes, independientemente del contexto del problema, relacionan las nociones de función y espacio vectorial en términos generales, manejan y comprenden todas las técnicas directas e indirectas que se relacionan con estas mismas nociones para la construcción del concepto TL. Desde la perspectiva del modelo multinterpretativo, un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans*- TL para el modelo multinterpretativo, si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales.

En este último componente del análisis teórico, se utilizan las entrevistas a los estudiantes, lo que se perfecciona en el capítulo 5, en el cual se establece una lectura global de los niveles para para el concepto de TL.

3.5 INSTRUMENTOS.

3.5.1 INSTRUMENTOS Y RECOGIDA DE DATOS.

Los instrumentos fueron diseñados para dar cuenta de las construcciones y mecanismos mentales que un estudiante pone en juego para resolver ejercicios referidos al concepto de TL. Siguiendo la metodología propia de APOE, primeramente se plantearon 16 preguntas, con el propósito de encontrar a los estudiantes que construyan el concepto TL en una concepción próxima a la de construcción mental objeto en sus tres interpretaciones, para posteriormente entrevistarlos.

Estas 16 preguntas fueron distribuidas de la siguiente forma:

- ✓ Para la interpretación funcional se consideraron cinco preguntas, desde las cuales fue posible determinar las construcciones y mecanismos que el caso puso en juego, además de entregar información sobre las dificultades para la construcción en esta interpretación.

- ✓ Para la interpretación matricial se consideraron cinco preguntas, desde las cuales fue posible determinar las construcciones y mecanismos que el caso puso en juego, además de entregar información sobre las dificultades para la construcción en esta interpretación.

- ✓ Para la interpretación geométrica se consideraron seis preguntas, desde las cuales fue posible determinar las construcciones y mecanismos que el caso puso en juego, además de entregar información sobre las dificultades para la construcción en esta interpretación.

Es importante señalar que este set de dieciséis preguntas fue entregado a los estudiantes del caso en forma de cuadernillos separados, como se muestra en figura 3.7. Se solicitó dejar registro del orden en que respondieron, así como justificar su elección. El propósito fue obtener información relevante para el diseño de la entrevista.

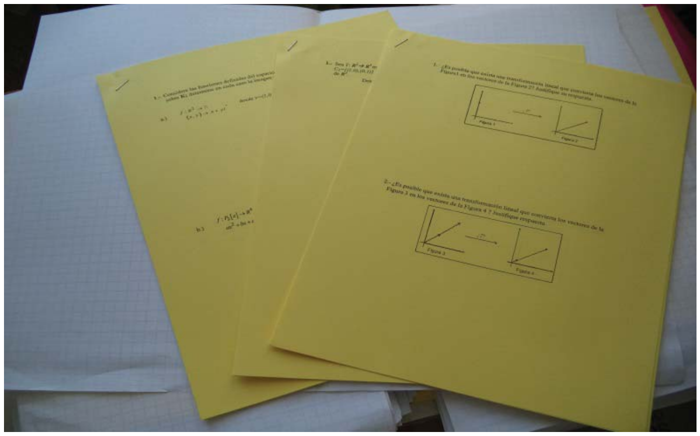


Figura 3.8. Presentación del set de preguntas del cuestionario.

Para la realización de las entrevistas, se diseñó un set de diez preguntas, las que dependiendo el perfil del entrevistado se seleccionaron en orden y número. A continuación presentamos una descripción detallada de los instrumentos usados en la investigación.

3.5.2 CUESTIONARIO DISEÑADO PARA LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL DEL CONCEPTO TL.

3.5.2.1 PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG descrita en este capítulo apartado 3. 4.1, diseñamos un cuestionario de cinco preguntas, las que aparecen en Tabla 3.3, con la intención de documentar en una primera instancia las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Tabla 3.3. Preguntas del cuestionario interpretación funcional del concepto TL.

Pregunta 1	Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre $\boldsymbol{K}$**;** determine en cada caso la imagen del vector v. 1.1- $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to x+yi \end{array}$ con *v=(1,0)* 1.2- $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2+bx+c \to (a,b,c,1) \end{array}$ con $v = x^2+3$ 1.3- $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ x \to (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$ con $v = 2\pi$ 1.4- $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$ con $v = (0,0,1)$
Pregunta 2	Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre K**;** determine en cada caso si f es una transformación lineal.

	2.1- $\begin{array}{l} f:R^2\to\mathbb{C} \\ (x,y)\to x+yi \end{array}$, 2.2- $\begin{array}{l} f:P_2[x]\to R^4 \\ ax^2+bx+c\to(a,b,c,1) \end{array}$ 2.3- $\begin{array}{l} f:R\to R^2 \\ x\to(\sin x,1-\cos x) \end{array}$ 2.4- $\begin{array}{l} f:R^3\to R^2 \\ (x,y,z)\to\left(e^{2x+3y},z\right) \end{array}$
Pregunta 3	Considere la función $f:R^3\to R^2$ definida por $f(x,y,z)=\left(e^{2x+3y},z\right)$ ¿ Es la imagen del vector (1,2,1) igual a la imagen de 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.
Pregunta 4	Encuentre la transformación lineal $f:R^2\to R^2$ talque *f*(1,1)=(-5,3) y *f*(-1,1)=(5,2). Para esta transformación lineal ¿Es posible determinar *f*(1,2)*?*
Pregunta 5	Considere el espacio vectorial R^+ donde la suma y multiplicación por escalares están definidas de la siguiente forma: $a+b$ es el producto de *a* y *b*, $r\cdot a$ es la *r*-ésima potencia de *a*. Verifique que la función logaritmo natural $\ln:R^+\to R$ es una transformación lineal entre estos dos espacios.

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas antes expuestas. A continuación el análisis a priori de las preguntas de la tabla 3.3.

3.5.2.2ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS.

1.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial *V* al espacio vectorial *W* sobre *K*; determine en cada caso la imagen del vector *v*.

1.1 $\begin{array}{l} f:R^2\to\mathbb{C} \\ (x,y)\to x+yi \end{array}$**, donde *v*=(1,0)**

1.2 $\begin{array}{l} f:R\to R^2 \\ x\to(\sin x,1-\cos x) \end{array}$, **donde** $v=2\pi$

1.3 $\begin{array}{l} f:P_2[x]\to R^4 \\ ax^2+bx+c\to(a,b,c,1) \end{array}$**, donde** $v=x^2+3$

1.4- $\begin{array}{l} f:R^3\to R^2 \\ (x,y,z)\to\left(e^{2x+3y},z\right) \end{array}$, **donde** $v=(0,0,1)$

La pregunta 1 contiene cuatro ejercicios diseñados con la intención de establecer si un estudiante muestra una construcción mental acción del concepto función sobre espacios vectoriales, al pedir el cálculo de la imagen de un elemento específico mediante una función. Con dicho propósito, las imágenes solicitadas en la pregunta 1 corresponden a los siguientes valores:

1.1 $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (1,0) \to f(0,1) = 1+0i \end{array}$

1.2 $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ x^2+3 \to f(x^2+3) = (1,0,1,1) \end{array}$,

1.3 $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ 2\pi \to f(2\pi) = (\sin 2\pi, 1-\cos 2\pi) = (0,0) \end{array}$,

1.4 $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (0,0,1) \to f(0,0,1) = (1,1) \end{array}$,

Por otra parte se espera que surjan preguntas sobre si las funciones son o no Tl; en dichos casos se presumirá una construcción mental proceso del concepto función sobre espacios vectoriales.

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial *V* al espacio vectorial *W* sobre *K;* determine en cada caso si *f* es una transformación lineal.

2.1 $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to x+yi \end{array}$,

2.2 $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2+bx+c \to (a,b,c,1) \end{array}$

2.3 $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ x \to (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$

2.4 $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$

La pregunta 2 consta de cuatro ejercicios diseñados para establecer si un estudiante muestra una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional.
Entre las respuestas esperadas se cuenta demostrar mediante el uso de la definición del concepto TL, lo que mostraría una construcción proceso del concepto TL, puesto que debe coordinar las construcciones mentales proceso de los conceptos de función, espacio vectorial y las propiedades de la estructura algebraica aditiva y multiplicación por un escalar, que definen a una TL.

Por otra parte, es posible dar respuesta a algunas de estas preguntas, sobre si son o no TL, verificando que la imagen del elemento neutro para la estructura aditiva –cero vector– del espacio vectorial de partida, es llevada al cero vector del espacio vectorial imagen mediante la función, lo que constituye una condición necesaria pero no suficiente en la definición del concepto de TL; un estudiante, que hace uso de esta propiedad, mostraría una construcción mental proceso del concepto TL en su interpretación funcional, puesto que debería coordinar las construcciones mentales proceso de espacio vectorial y función por medio de la combinación lineal.

Otra respuesta esperada corresponde a quienes muestren preocupación por el rol del cuerpo, lo que fue considerado como una hipótesis en la opción 2.1, pues muestra una construcción más elaborada del tipo objeto para el concepto de transformación lineal. A continuación ejemplos de respuestas esperadas:

2.1 Para determinar si la función $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to x+yi \end{array}$ es una TL primero podemos considerar si es sobre los números reales; en este caso lo es, pues cumple con la propiedad de la siguiente forma: $f((x,y)+\lambda(a,b)) = f(x+\lambda a, y+\lambda b) = x+\lambda a+(y+\lambda b)i = x+yi+\lambda a+b\lambda i = f(x,y)+\lambda f(a,b).$, donde $\lambda \in R.$.

2.2 La función no es una TL, pues $f(0(x)) = (0,0,0,1)$, la implicancia de esta propiedad da cuenta de la buena definición de la función.

2.3 Esta función no es una TL a pesar de que el cero va al cero, pues no cumple por ejemplo con $f(x+y) = (\sin(x+y), 1-\cos(x+y)) \neq (\sin(x), 1-\cos(x)) + (\sin(y), 1-\cos(y))$.

2.4 Con las operaciones usuales en los números reales como el cuerpo se tiene que no es una TL, pues el vector $f(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

3.- Considere la función *f: $R^3 \rightarrow R^2$* **definida por** *f(x,y,z)=* (e^{2x+3y}, z) **¿ Es la imagen del vector (1,2,1) igual a la imagen de 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.**

El propósito de esta pregunta es obtener evidencias sobre las construcciones mentales realizadas en el proceso de construcción de una TL en su interpretación funcional; en particular se ha elegido una función que no es una TL. En términos de la DG, corresponde a verificar la coordinación mediante la combinación lineal de las construcciones proceso de los conceptos de función y espacio vectorial. Por ejemplo, si un estudiante realiza el cálculo $f(1,2,1) = (e^8, 1)$ y no reconoce la necesidad de linealidad para que el mismo vector sea descrito por la descomposición en elementos basales, posee una construcción mental acción del concepto de TL, pero una concepción proceso del concepto función sobre espacios vectoriales. Desde la matemática al considerar la igualdad $(1,2,1) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$, se debe tener en cuenta si la función es o no lineal para preservar la igualdad en la imagen, por lo que no es lo mismo, puesto que $f(1,2,1) = (e^8, 1)$ y $1f(1,0,0) + 2f(0,1,0) + 1f(0,0,1) = 1(e^2, 0) + 2(e^3, 0) + 1(1,1) = (e^2 + 2e^3 + 1, 1)$.
Esto mostraría una construcción proceso del concepto TL, pues debe coordinar mediante la igualdad la propiedad de conservación de la linealidad.

4.- Encuentre la transformación lineal $f: R^2 \to R^2$ talque *f*(1,1)=(-5,3) y *f*(-1,1)=(5,2). Para esta transformación lineal ¿Es posible determinar *f*(1,2)?

La pregunta 4 tiene por propósito dar cuenta de las construcciones mentales necesarias para encontrar la imagen de un vector sin la ecuación que define en forma explícita una TL.

Para responder es posible que un estudiante coordine las construcciones mentales proceso de los conceptos de base y combinación lineal, para posteriormente coordinarlos con el

concepto de función; en nuestro caso, escribir el vector (1,2) como combinación lineal de los vectores (1,1) y (-1,1), mostrando una construcción proceso del concepto combinación lineal, y coordinar con la construcción proceso del concepto TL; así, se tiene: $f(1,2)=\frac{3}{2}f(1,1)+\frac{1}{2}f(-1,1)$, por lo que se obtiene: $f(1,2)=\frac{3}{2}(-5,3)+\frac{1}{2}(5,2)=(-5,\frac{11}{2})$.
Por otra parte, esta pregunta deja abierta la posibilidad de coordinar con la interpretación geométrica, esto es, reconstruir desde el plano figural la respuesta. Es posible que algún estudiante encuentre la TL y después calcule la imagen del concepto; una explicación desde la teoría es que en este caso el procedimiento para encontrar la TL haya sido interiorizado en forma mecánica, como una secuencia inacabada de construcciones proceso, que no le permiten actuar en forma eficiente.

5.- Considere el espacio vectorial R^{+} donde la suma y multiplicación por escalares están definidas de la siguiente forma:

$a + b$ **es el producto de** a **y** b**,**

$r \cdot a$ **es la** ***r*****-ésima potencia de** a**.**

Verifique que la función logaritmo natural $\ln : R^{+} \to R$ **es una Transformación Lineal entre estos dos espacios.**

La intención de la pregunta 5 es determinar si el estudiante muestra una construcción objeto del concepto TL. Para esto, un estudiante debe coordinar los procesos dispuestos en la DG, figura 3.2, de la verificación de las propiedades que definen a una TL.

Un estudiante debe mostrar una construcción objeto del concepto espacio vectorial, lo que le permitirá realizar acciones sobre R^{+}. Por otra parte, desencapsula desde el concepto espacio vectorial las construcciones mentales, proceso que define su estructura. La suma $a+b := ab$ y la multiplicación por escalar por $\lambda a := a^{\lambda}$ serán coordinadas por el concepto de función, mostrando una construcción proceso del concepto TL, en este caso la función $\ln : R^{+} \longrightarrow R$ coordina las estructuras de los espacios vectoriales mediante la siguiente definición: ; $\ln(a+\lambda b)=\ln ab^{\lambda}=\ln a+\lambda \ln b$; posteriormente se encapsula esta construcción en un objeto.

3.5.3 CUESTIONARIO DISEÑADO PARA LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL DEL CONCEPTO TL.

3.5.3.1. PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO.

Diseñamos un cuestionario de cinco preguntas (Tabla 3.4), con la intención de documentar en una primera instancia las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Tabla 3.4. Preguntas del cuestionario correspondientes a la interpretación matricial del concepto TL.

Pregunta 1	Sea T: $\boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ transformación lineal definida por T(x, y)=(x+ y, x-y, x), considere C_2={(1,0),(0,1)} base canónica de $\boldsymbol{R^2}$ y C_3={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} base canónica de $\boldsymbol{R^3}$. Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.
Pregunta 2	Sea T: $\boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z)=(x+y-z, x+z)$, considere B_1={(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)} base de R^3 y B_2={(1,1),(0,1)} base de $\boldsymbol{R^2}$. Determine $[T(2,1,0)]_{B2}$
Pregunta 3	Sea T: $M_2(R) \rightarrow \boldsymbol{R^2}$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a+b-c, d)$. Considere B_3={ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$} base de $\boldsymbol{R^3}$ y B_2={(1,1),(0,1)} base de $\boldsymbol{R^3}$**.** Determine $\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B2}$.
Pregunta 4	Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde *$IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a* $\boldsymbol{R^3}$ **,** por *$T(ax^2+bx+c)=(a+c, a-b, b)$,* en las bases B_4={x^2,x^2+x, x^2+x +1} y B_5={(1,1,0),(0,1,0),(0,01)} *de* $IP_2[x]$ y $\boldsymbol{R^3}$ respectivamente.
Pregunta 5	Considere la transformación lineal $F: \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0) \rangle \rightarrow \langle x^2, x+1 \rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0) \rangle$ y $B' = \langle x^2, x+1 \rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. A continuación el análisis a priori de las preguntas de la tabla 3.4.

3.5.3.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS.

1.- Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y)=(x+y, x-y, x)$, considere C_2={(1,0),(0,1)} base canónica de R^2 y C_3={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} base canónica de R^3.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

La intención de la pregunta es evidenciar los mecanismos mentales de coordinación entre las construcciones mentales proceso del concepto de coordenada de un vector, y el concepto de imagen de un vector mediante la TL definida por la ecuación $T(x, y)=(x+y, x-y, x)$. La coordinación se lleva a cabo mediante la combinación lineal. Una hipótesis subyacente se relaciona con el hecho de que si un estudiante no posee esta coordinación, no podrá construir la MATL.

Un estudiante que calcula la imagen del vector (1,2), es decir $T(2,1)=(3, 1, 2)$, corresponde a mostrar una construcción mental proceso del concepto imagen de un vector. Para dar esta respuesta un estudiante debe coordinar mediante la combinación lineal las construcciones mentales proceso de imagen de un vector y base del espacio de llegada. Las coordenadas corresponden a determinar desde la combinación lineal del vector obtenido (la imagen) en términos de la base de llegada, en este caso C_3, por lo que el cálculo corresponde a escribir el vector *(3, 1, 2)* como combinación lineal de {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}, es decir: $\left(3,1,2\right)=3(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1)$; sus coordenadas son los números 3, 1 y 2.

2.- Sea T: $R^3 \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z)=(x+y-z, x+z)$, considere B_1={(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)} base de R^3 y B_2={(1,1),(0,1)} base de R^2. Determine $[T(2,1,0)]_{B2}$.

La intención de esta pregunta es verificar si un estudiante ha encapsulado la construcción mental proceso de la coordenización de las imágenes, para posteriormente permitir la rotulación en forma matricial.

Un estudiante debe calcular $[T(2,1,0)]_{B2}$, lo que corresponde a encontrar la imagen del vector (2,1,0) y determinar sus coordenadas en la base B_2. En términos de construcciones y mecanismos mentales, son los mismos que en el caso anterior, donde $T(2,1,0)=(3,2)$, y las coordenadas corresponden a escribir el vector como combinación lineal de los elementos de la base ordenada B_2; es decir $(3,2)=\alpha(1,1)+\beta(0,1)$, de donde se tiene que $\alpha=3$ y $\beta=-1$. De esta forma $\left[T\left(2,1,0\right)\right]_{B2}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$. La diferencia que esperamos es la identificación del rótulo de la coordenada de la imagen de un vector; esto es, mostrar tener encapsulado el concepto de coordenada de la imagen de un vector.

3.- Sea T: $M_2(R) \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=(a+b-c, d)$. Considere B_3=$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ base de R^3 y B_2={(1,1),(0,1)} base de R^3. Determine $\left[T\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right]_{B2}$.

La pregunta 3 propone evidenciar la coordinación entre las construcciones mentales antes descritas para la construcción de la MATL mediante la generalización. Supusimos que se procede en forma análoga a los ejercicios anteriores, pero ahora se desprende de la dimensión del cálculo numérico, y por lo tanto es en esencia general. Es un paso a la generalización necesaria para la construcción de la MATL.

Se sabe que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$; para encontrar las coordenadas pedidas, debemos escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2. Es decir:
$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$, de donde $\alpha = a+b-c$ y $\beta = d-a-b+c$.

Por lo que se tiene $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix}$.

4.- Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde IP$_2$[x] (polinomios de grado menor o igual a dos) a $\boldsymbol{R^3}$, por $T(\, ax^2+bx+c\,)$=(a+ c, a-b, b), en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x,\ x^2+x\ +1\}$ y B_5={(1,1,0),(0,1,0),(0,01)} de IP$_2$[x] y $\boldsymbol{R^3}$ respectivamente.

La pregunta propone determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del TMATL. Para ello, como se muestra en la figura 3.3, se considera el tramo en la DG en que coordina la construcción proceso de imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, mediante la transformación lineal *T*, con la construcción proceso de coordenadas de un vector, en un nuevo proceso que permite escribir estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base B_5 de $\boldsymbol{R^3}$. Este proceso se coordina con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas. Este proceso se encapsula en el objeto matriz asociada a una transformación lineal en las bases B_4 y B_5.

Puede esperarse que un estudiante calcule las imágenes de los vectores de la base B_4, es decir, $T\left(\ x^2\ \right) = \left(1,\ 1,\ 0\right)$, $T\left(\ x^2+\mathrm{x}\ \right) = \left(1,\ 1,\ 1\right)$ y $T\left(\ x^2+\mathrm{x}+1\ \right) = \left(2,\ 0,\ 1\right)$. De esta forma calcula las coordenadas de cada vector imagen: $\left(1,\ 1,\ 0\right) = \alpha_1(1,1,0) + \beta_1(0,1,0) + \delta_1(0,0,1)$, $\left(1,\ 1,\ 1\right) = \alpha_2(1,1,0) + \beta_2(0,1,0) + \delta_2(0,0,1)$ y $\left(2,\ 0,\ 1\right) = \alpha_3(1,1,0) + \beta_3(0,1,0) + \delta_3(0,0,1)$, para obtener los valores de las coordenadas de cada vector imagen. El estudiante puede además ordenar los tres sistemas de ecuaciones lineales en una matriz; se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, donde la MATL corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \rightarrow \langle x^2, x+1\rangle$**, definida por** $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$**; donde** $B=\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ **y** $B'=\langle x^2, x+1\rangle$ **determine las coordenadas de la imagen del vector** $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$**.**

La pregunta permite observar si la construcción del TMATL es un objeto encapsulado desde la construcción proceso de la MATL, del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función, esto es, *f(x) = y* para

$$f = [F]_B^{B'},\ x=[v]_B \quad \text{e} \quad y=[F(v)]_{B'}$$

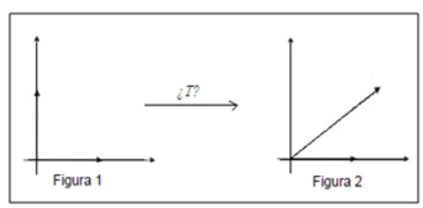
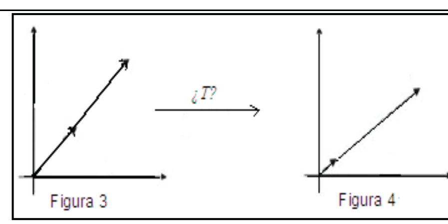
Como respuesta esperada, un estudiante determina las coordenadas del vector, aplicando $[F]_B^{B'}[v]_B = [F(v)]_{B'}$; de esta forma se obtiene que las coordenadas del vector $[F(v)]_{B'}$ serían: $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

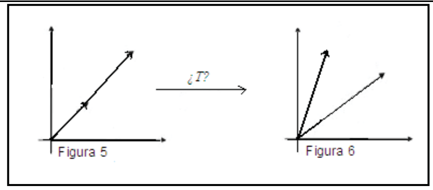
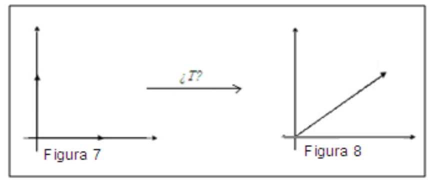
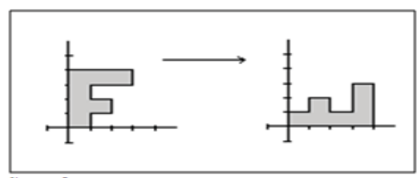
3.5.4 CUESTIONARIO DISEÑADO PARA LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO TL.

3.5.4.1 PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO.

Diseñamos un cuestionario de seis preguntas (Tabla .3.5), con la intención de documentar en una primera instancia las construcciones y mecanismos mentales previstos en la DG.

Tabla 3.5. Preguntas del cuestionario.

Pregunta 1	¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.	
Pregunta 2	¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4? Justifique respuesta.	

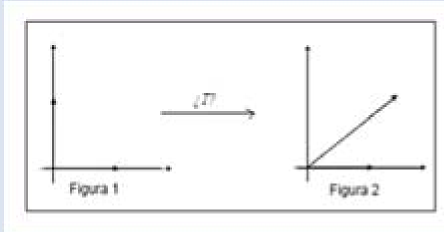
Pregunta 3	¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta. 
Pregunta 4	¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8? Justifique su respuesta. 
Pregunta 5	Sea $F : \boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ transformación lineal definida por $$F(x,y,z)=(-2x-4z,-x-2z,3x+y+6z)$$ Indique en qué forma se transforma la recta $L: \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=z$.
Pregunta 6	Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F, como se muestra en la figura 9.  figura 9

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. A continuación el análisis a priori de las preguntas de la tabla 3.5.

3.5.4.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS.

La preguntas 1, 2, 3 y 4 de este cuestionario fueron extraídas de la tesis doctoral de Molina (2006), cuya intención original fue establecer el rol de modelos intuitivos sobre el concepto de TL. Nos parece interesante el tipo de pregunta, pues es apropiada para describir construcciones y mecanismos mentales asociados a la construcción del concepto TL en su interpretación geométrica. Las preguntas 5 y 6 fueron extraídas del libro digital sobre TL *"Aproximación al Álgebra Lineal; un Enfoque Geométrico"*, de Isaacs, y Sabogal, (2009). Ambas preguntas son incluidas con el propósito de observar la articulación entre interpretaciones.

1.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.

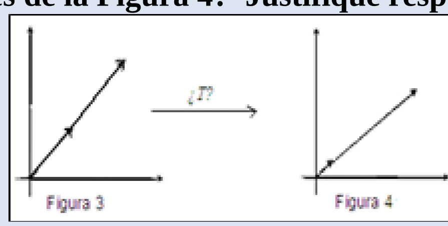


La pregunta 1 da cuenta de la primera parte descrita en nuestra DG para la interpretación geométrica. Para esta pregunta la respuesta es afirmativa; esto es, T es una TL.

Un estudiante en esta pregunta muestra coordinar las construcciones mentales proceso para el concepto de base en un espacio de partida, en este caso $\boldsymbol{R^2}$, coordinando desde el plano figural en la imagen de la figura 1 las construcciones mentales proceso de los vectores señalados con el concepto de base. Puesto que estos vectores son un conjunto de dos vectores no colineales en el plano, el estudiante debe coordinar los conceptos de colinealidad y los de dependencia lineal para asegurarse que constituyen una base para $\boldsymbol{R^2}$.

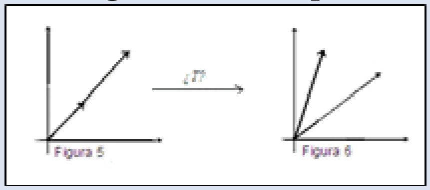
Por otra parte, las imágenes que se muestran en la figura 2, están siendo coordinadas por la asignación T como construcciones mentales proceso entre los vectores de la base del espacio de partida y las imágenes. La asignación T debe coordinar la noción de espacio generado por una base, lo que garantiza que la asignación sea una función, y esto determina que existe tal TL.

2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4? Justifique respuesta.



La pregunta 2 extiende la intención de la pregunta 1, puesto que en nuestra DG para la interpretación geométrica, para esta pregunta un estudiante debe coordinar las construcciones mentales proceso para el concepto de base en un espacio o subespacio como conjunto de partida, donde los vectores en la imagen 3 son un conjunto ld, son colineales en el plano, por lo que el estudiante debe coordinar los conceptos de colinealidad con los de dependencia lineal, concluyendo que no constituyen una base para el plano $\boldsymbol{R^2}$, pero sí para un subespacio de $\boldsymbol{R^2}$; en este caso se debe coordinar desde el plano figural en la imagen de la figura 4 con las imágenes de estos vectores, las que constituyen otro conjunto ld; esto es, son colineales. Se debe de esta forma coordinar los conceptos de función con la asignación antes descrita, para construir una función lineal entre subespacios vectoriales del plano real como una construcción mental proceso.

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.

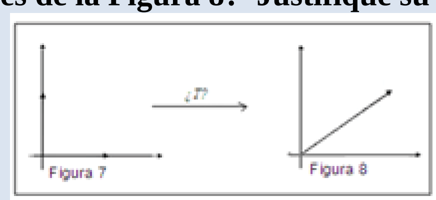


La pregunta 3, al igual que la pregunta 2, da cuenta según nuestra DG para la interpretación geométrica de la coordinación entre el plano figural, los conceptos de colinealidad y función.

En esta pregunta, los vectores en la imagen 5 son un conjunto ld, son colineales en el plano, por lo que el estudiante debe coordinar los conceptos de colinealidad con los de dependencia lineal, concluyendo que no constituyen una base para el plano $\boldsymbol{R}^2$, pero sí para un subespacio de $\boldsymbol{R}^2$. En este caso se debió coordinar desde el plano figural en la imagen de la figura 5 con los conceptos antes descritos. Por otra parte, las imágenes de estos vectores (figura6) constituyen un conjunto li, esto es, son vectores linealmente independientes en el espacio de llegada. Esta conclusión se debe a la coordinación de las construcciones mentales proceso de los conceptos de li desde la perspectiva figural qua relaciona la dependencia lineal con la ecuación que la describe.

Un estudiante debe pensar en la asignación funcional de los vectores antes descritos; es decir, los vectores colineales estarían representados por uno solo, que debiera construir un subespacio del plano de a lo más dimensión uno, por lo que no es posible que exista una TL.

4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8? Justifique su respuesta.



Al igual que en las preguntas 1, 2 y 3, como parte de la interpretación geométrica esperamos que los estudiantes den cuenta de las siguientes coordinaciones entre el plano figural, representado por las figura 7 en el espacio de partida y la figura 8 en el espacio de llegada. Primeramente, en la figura 7 se muestran dos vectores no colineales que constituyen una base del espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$; de esta forma, debe asignar dos vectores de la base en uno solo como imagen. Es posible que exista una transformación del plano en una recta, pues lo que está sucediendo es que los dos vectores que conforman la base del espacio van a la misma imagen.

5.- Sea *F* : $\boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R^3}$ transformación lineal definida por

$$F\left(x,y,z\right)=\left(-2x-4z,-x-2z,3x+y+6z\right)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=z$ **.**

La intención de esta pregunta es establecer la articulación entre la interpretación geométrica y la interpretación funcional, donde en apariencia se excluye el plano figural. Un estudiante muestra una construcción proceso del concepto espacio vectorial y de subespacio vectorial, el que coordina con el concepto de recta vectorial, la que constituye un subespacio vectorial, pues pasa por el origen del sistema de coordenadas, lo que en el fondo proviene de desencapsular del objeto recta vectorial el concepto de vector director como una construcción proceso, que debe coordinar con la TL.

Al analizar el vector director, que en este caso corresponde al vector (2,-3,1), muestra una construcción proceso del concepto de imagen de un vector mediante la TL; de esta forma establece cómo se trasforma la imagen del vector director, es decir: $F\left(2,-3,1\right)=\left(-8,-4,-3\right)$, por lo que resulta una nueva recta en la dirección (-8,-4,-3).

Desde nuestra DG, la asignación de un vector específico que es movido por la TL corresponde a la generalización del concepto combinación lineal.

6.- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F, como se muestra en la figura 9.

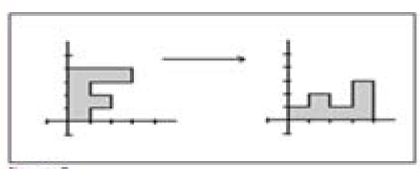


figura 9

La intencion de esta pregunta es establecer la articulacion entre la interpretación geometrica y la matricial para el concepto de TL.

Se espera que un estudiante coordine la representacion en el plano figural, que busque bases del espacio vectorial $\boldsymbol{R^2}$; esto es, que muestre una construccion proceso del concepto de vector que le permita coordinar con el concepto de base en el plano figural del espacio de partida, y al mismo tiempo le permita reconocer en la llegada, para posteriormente coordinar estas construcciones proceso mediante la asignación de los vectores antes descritos.

Una descripcion posible asignaría como bases en el dominio a los vectores que determinan que el ancho corresponde al eje x y el alto corresponde al eje y, lo que replicamos en la imagen del espacio de llegada, permitiendo definir el cambio de la letra F. En la figura 11 se propone, comor ejemplo, el siguiente trabajo: se considera a la base B_1={(1,0), (0,4)} del espacio de partida $\boldsymbol{R^2}$ y a los vectores B_2={(4,0), (0,1)} como una base en la imagen; al vector (1,0) le asignaremos como imagen el vector (0,1), y al vector (0,4) le asignaremos como imagen el vector (4,0). La figura 11 da cuenta de la situación.

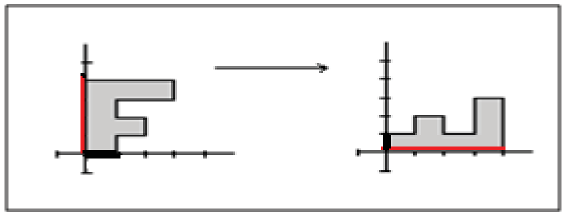


figura 11

Tras construir estas bases mediante la coordinación vectorial antes descrita en el plano figural, que permitió construir una TL, para construir la MATL el estudiante debe coordinar el proceso de coordenizacion de las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida mediante el cuantificador. Se tiene así que el vector (1,0) es transformado en el vector (0,1); en forma análoga podemos asegurar que el vector (0,4) es transformado en el vector (4,0), la matriz asociada a las bases es $[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Otra posibilidad es la construcción de la TL en forma explícita, lo que corresponde a la siguiente expresión funcional: $f(x,y)=(y,x)$.

3.5.6 LAS ENTREVISTAS.

Como parte final del ciclo de investigación, se realizaron a fines del año 2013 tres entrevistas. Fueron invitados los estudiantes del caso que mostraron construcciones próximas a la de objeto en sus tres interpretaciones para el concepto TL; de ellos, tres voluntariamente participaron en esta etapa, en forma individual, con un formato de entrevista semiestructurada, donde en base a la información del cuestionario el entrevistador formuló un set de diez preguntas sobre el concepto TL, y que fue adaptado para cada entrevista en particular, por lo que las preguntas durante el transcurso de la entrevista cambiaron en orden y en número. Cada entrevista fue filmada y se transcribió el registro de audio para su posterior análisis, el que aparece en el capítulo 5.

3.5.6.1 EL GUIÓN DE LA ENTREVISTA.

Se diseñó un guion general para realizar las entrevistas, el que se adaptó en cada caso. Decidimos comenzar con la misma pregunta para las tres entrevistas, esto es, la interpretación geométrica, invitando a la construcción de las otras interpretaciones. Esta decisión se tomó por cuanto en la mayoría de los estudiantes del caso, la interpretación geométrica no alcanzó construcciones próximas a la de objeto; en particular, dos de los tres entrevistados no mostraron una construcción objeto en ella, por lo que incluimos un soporte para construir esta articulación con la interpretación funcional.

De allí en adelante estaba claro que se debía transitar por todas las interpretaciones y poner a prueba la evolución del esquema mediante el uso del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales. Para llegar a ello, se dependió de las respuestas a las otras interpretaciones, todo ello considerando lo mostrado en el cuestionario y al instante de ser entrevistado. A continuación las preguntas y su análisis a priori.

3.5.6.2 EL ANÁLSIS A PRIORI DE LAS PREGUNTAS DE LA ENTREVISTA.

Primera pregunta del cuestionario en la entrevista:

Considere el carrito de un tren que aparece en la figura1, se deforma en la figura 2.

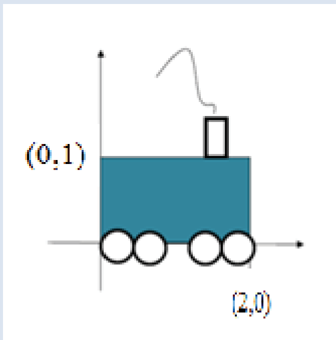
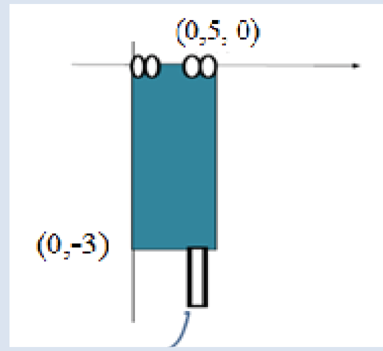
	

Figura1.	Figura 2

¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2?

Esta pregunta se relaciona con la interpretación geométrica en forma explícita, pero su respuesta formal requiere articular por lo menos dos interpretaciones.

A partir de la respuesta del entrevistado y considerando su desempeño en el cuestionario, es posible determinar un camino a seguir; por ejemplo, si el estudiante encuentra la TL en forma algebraica estaría articulando con lo funcional; si construye la matriz asociada, por ejemplo, a la base canónica del plano, su articulación es desde la interpretación matricial; por otra parte, podría realizar una asignación de vectores, a modo del uso explícito del teorema fundamental del álgebra lineal, esto es, quedarse en la interpretación geométrica. En el caso de no responder, presentamos la siguiente alternativa de pregunta:

(2) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(\text{x}, \text{y}) = (\text{x} + \beta\,\text{y}, \text{y})$ con $\beta \in \mathbb{Z}$, bosqueje la región obtenida al aplicar la transformación lineal al rectángulo dado en la figura cuando $\beta = 2$ y $\beta = -3$

Figura	$\beta = 2$

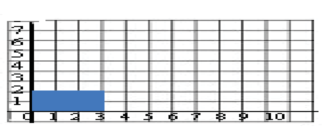
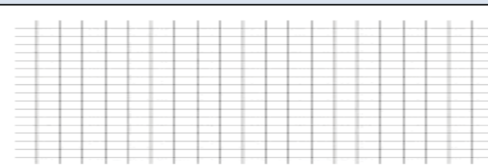
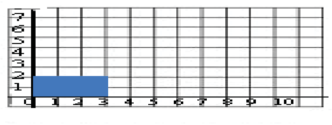
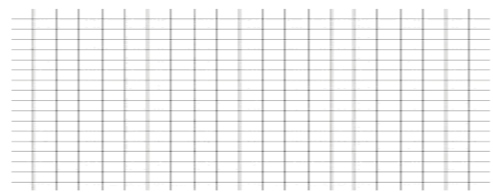

	

Figura	$\beta = -3$

En ella se ha de identificar elementos basales de la interpretación geométrica que ayudarían a construir y lograr las coordinaciones entre el plano figural y el funcional.

Posteriormente, dependiendo de la respuesta, es posible preguntar para esclarecer sus conexiones entre lo matricial y funcional.

En relación a lo funcional se incorporaron las siguientes preguntas:

(3) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea V= R^R **, espacio de las funciones reales de dominio en** R**. Sea la aplicación** $F: R^3 \to V$ **, definida por** $F(a,b,c)(\mathrm{x}) = \mathrm{a} + \mathrm{b}\cos^2 x + c\, sen^2 x$**.**

¿Es una transformación lineal?

Esta pregunta corresponde a la interpretación funcional sin articulación con ninguna otra interpretación; es una alternativa en caso que algún estudiante no recordara o no realizara trabajos en esta interpretación. Por otra parte, se usó para establecer cómo recordaba después de un semestre la interpretación funcional.

La siguiente pregunta fue incluida para esclarecer la relación que hacen los estudiantes del caso con la asignación del vector nulo. Algunas de las respuestas mostraron que basta verificar esta relación para determinar si la función es una TL, lo que indicaría una debilidad en las coordinaciones entre las construcciones mentales proceso de la imagen de una combinación lineal y la combinación lineal y las imágenes. Se crea un conflicto, pues todos los vectores tienen imagen nula; es esperable que duden sobre si es una TL.

(4) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea $\mathrm{T}: \mathrm{V} \to W$ **función definida por** $\mathrm{T}(\mathrm{v}) = 0_W$ **, para todo** $v \in V$

¿Es T **una transformación lineal?**

Es idéntica a la pregunta anterior, pero es un poco más específica, pues se determina la dimensión del endomorfismo, pudiendo ingresar una dimensión calculista.

(5)Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea V un espacio vectorial de dimensión cuatro y $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ base para V. Sabemos que existe una única $T\in L(V,V)$ que cumple con:

$T(v_1)=v_2,\ T(v_2)=v_3, T(v_3)=v_4,\ T(v_4)=\vec{0}$

¿Cuál es la trasformación *T?*

Esta pregunta se usó en la entrevista de E18, que dudó en la pregunta anterior y gracias a ésta pudo construir la respuesta. Al conocer los elementos de la base el estudiante articuló la interpretación funcional con la geométrica.

Bajo el mismo sustento cambiamos las imágenes por vectores no nulos, y nuevamente afloraron dificultades con la coordinación de la igualdad que construye la TL, preservando la combinación lineal.

(6) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea $\mathrm{T}:V\to W$ **transformación lineal y dos conjuntos** $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subset V$ **y** $B=\{w_1,\mathrm{w}_2,...,\mathrm{w}_n\}\subset W$ **, talque** $T(v_1)=w_1, T(v_2)=w_2,...,\ T(v_n)=w_n$

a.- Si el conjunto *B* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *A* linealmente independiente?
b.- Si el conjunto *A* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *B* linealmente independiente?
c.- Si *B* genera a *W*, ¿debe A generar a *V*?
d.- Si *A* genera a *V*, ¿debe *B* generar a *W*?

Se pensó como una alternativa para la pregunta anterior, incorporando una dimensión más calculista que facilita entender los procesos inmersos y ayuda a extender los resultados; no obstante, aquí se incluye la noción de isomorfismo de espacios vectoriales; el propósito no es mirar la articulación, sino la evolución del esquema del concepto TL.

(7) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Consideremos T:R^2→R^2 transformación lineal, y dos conjuntos
A={(2,0),(0,1)}$\subset$ R^2 y *B*={(0,-3),(0.5,0)}$\subset$ R^2**,tal que** $T(2,0)=(0.5,0)$, $T(0,1)=(0,-3)$

- ✓ **Si *A* genera a R^2. En este caso ¿*B* genera a R^2?**
- ✓ **Si el conjunto *A* es linealmente independiente,**
  ¿B es linealmente independiente? ¿Es un isomorfismo?

La siguiente pregunta es un tránsito entre la interpretación funcional y matricial; la forma en que se entrega la TL es mediante una matriz, en que las coordenadas quedan ocultas y se asumen como las canónicas. Esta pregunta sirvió para poner en evidencia la articulación entre las tres interpretaciones del concepto TL.

(8) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea T:$\boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ transformación lineal definida por $T(u) = Au$, donde $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ para $\theta = 30°$, T define una rotación de 30° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

a.- Demuestre que es una transformación lineal.

b.- Determine las coordenadas de la imagen del punto $P = (5, \sqrt{3})$ bajo la Transformación T. ¿Puede graficar?

c.- Si $T_1(u) = A^2u$. Cómo mueve la transformación T_1 al vector u.

d.- Si $T_2(u) = A^{-1}u$. Cómo mueve la transformación T_2 al vector u.

Las siguientes preguntas hacen alusión explicita a la interpretación matricial, pues son formuladas en términos de matrices, profundizan a través del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales el nivel del esquema para el concepto de TL.

(9) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

Dada la transformación lineal F: $\boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$, definida por $[F]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, donde $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ y $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$, determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales.

En caso de ser afirmativa su respuesta, establezca el isomorfismo. Si su respuesta es que no existe un isomorfismo, justifique.

La pregunta anterior propone al estudiante un desafío en términos de lo que podría recordar; por una parte, la matriz asociada es invertible, lo que implica que es biyectiva, por lo tanto la función es un isomorfismo, pero la función está definida desde el plano al espacio, por lo que según el teorema de la dimensión no es un isomorfismo. Esperamos que en la respuesta el estudiante muestre la articulación entre las dos interpretaciones, para dar respuesta y justificar.

(10) Pregunta del cuestionario de la entrevista:

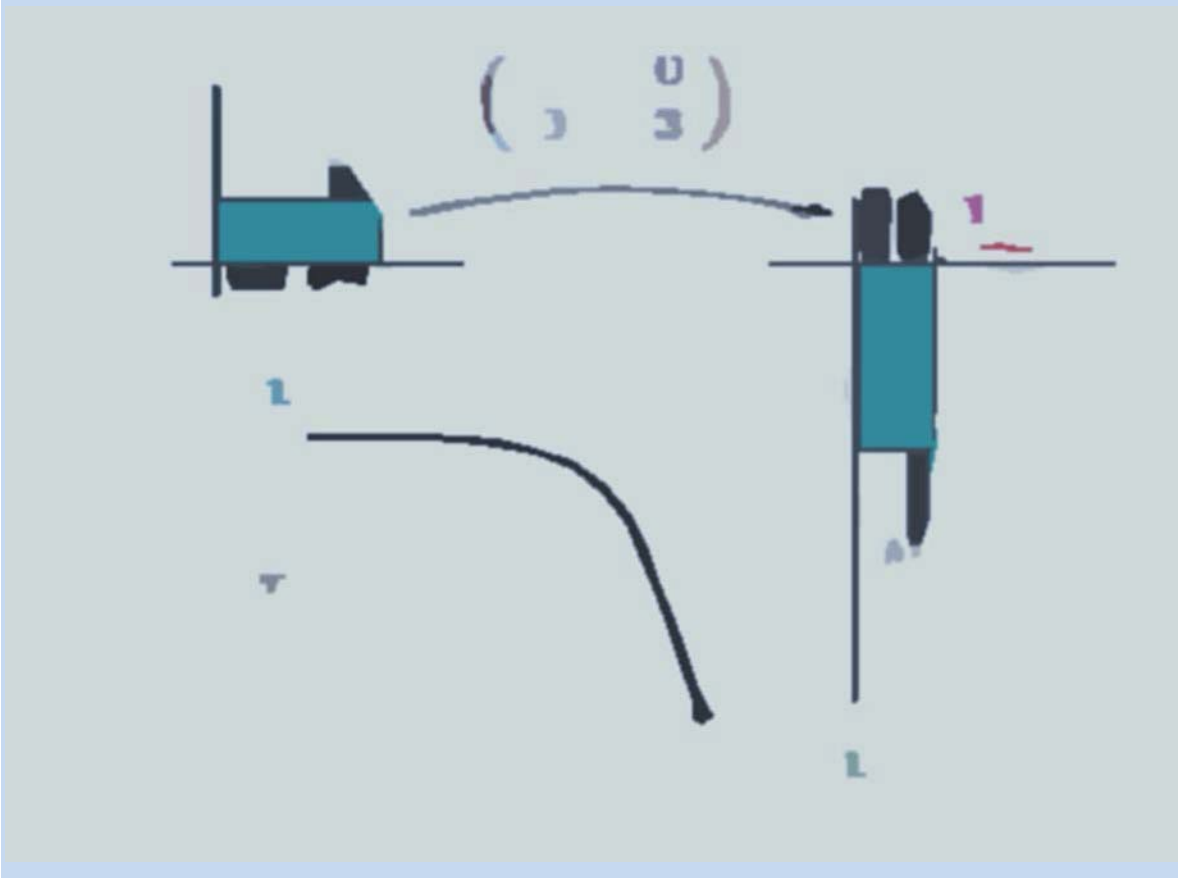
Dada la transformación lineal F: $\boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$, definida por $[F]_D^{D'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$**,**

donde $D = \langle (1,0,1),(1,1,0),(2,1,2) \rangle$ **y** $D' = \langle (1,1),(1,-1) \rangle$**, determine si la transformación lineal** F **es un isomorfismo de espacios vectoriales.**

Es muy parecida a la pregunta anterior, pero invita a redefinir haciendo uso de las herramientas del álgebra general. En caso de echar mano a estos recursos, podríamos estar en presencia de una evolución en el esquema del concepto TL, que lo vincula al teorema de isomorfismo para estructuras algebraicas.

CAPÍTULO 4:

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO. EVIDENCIAS PARA LAS INTERPRETACIONES FUNCIONAL, MATRICIAL Y GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO TL.



CAPÍTULO 4:
RESULTADOS DEL CUESTIONARIO. EVIDENCIAS PARA LAS INTERPRETACIONES FUNCIONAL, MATRICIAL Y GEOMÉTRICADEL CONCEPTO TL.

En este capítulo presentamos análisis, datos y primeras evidencias provenientes de la aplicación del ciclo de investigación dispuesto en la teoría APOE.

4.1 ANÁLISIS A POSTERIORI DE Y LAS EVIDENCIAS EMPÍRICAS POR INTERPRETACIÓN.

Presentaremos a continuación un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes del caso a las preguntas del cuestionario. Dicho análisis se realizó considerando las DG propuestas en el capítulo anterior, apartado 3.4. Se presentan los análisis por interpretación del concepto TL, esto es, funcional, matricial y geométrica. Hemos de decir que esto no representa el orden en que cada estudiante respondió al cuestionario.

4.1.1 INTERPRETACIÓN FUNCIONAL.

A continuación presentamos los resultados obtenidos del análisis de los datos, o análisis a posteriori de los estudiantes del caso en la interpretación funcional del concepto TL.

Estudiante E1

En la pregunta 1 del cuestionario, calcula las imágenes de los vectores, obteniendo el resultado que muestra la figura 4.1.

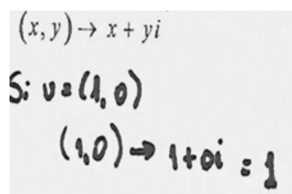


Figura 4.1. Respuestas de E1 a la pregunta 1.1.

A la luz de la DG, E1 muestra una construcción mental acción del concepto imagen del vector, pues realiza los cálculos sin hacer distinción de las funciones entregadas. Dado que no ha construido el concepto de función como un proceso, no lo puede, aparentemente, coordinar con el proceso de combinación lineal.

En la pregunta 2, E1 responde si son TL verificando la propiedad de que la imagen del neutro del espacio vectorial de partida es el neutro del espacio de llegada. En su producción no hace precisión sobre las operaciones o la estructura algebraica de los espacios vectoriales; además, en la figura 4.2 deja de manifiesto su duda referida a lo que es una TL. Desde la teoría APOE muestra una construcción proceso de los conceptos cálculos de imágenes de vectores específicos, el cual coordina con

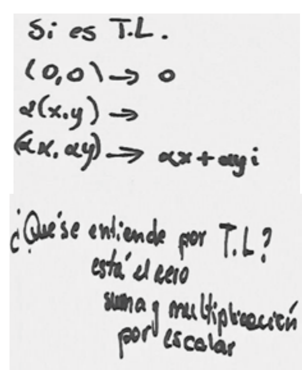


Figura 4.2. Respuesta de E1 a la pregunta 2

la propiedad el proceso relacionado con la invariancia del cero en espacios vectoriales reales.

En la pregunta 3, E1 repite el procedimiento del cálculo de imágenes, mostrando una construcción proceso sobre el concepto de cálculo de imágenes que no coordina con el proceso de combinación lineal que una TL debe preservar.

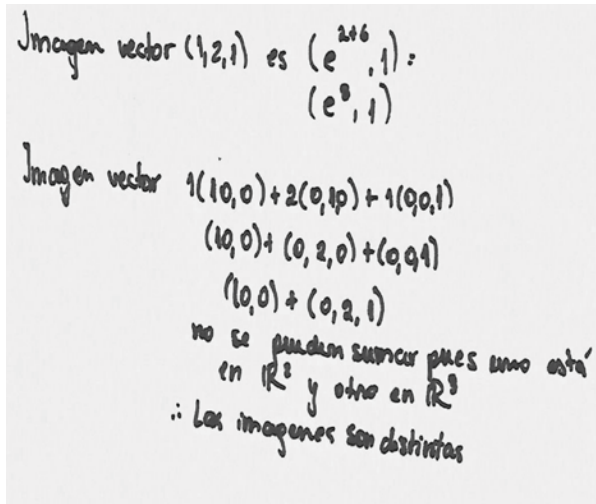


Figura 4.3. Respuesta y comentarios de E1 a la pregunta3.

E1 muestra una construcción acción del concepto TL, pues no logra coordinar los procesos de función y de combinación lineal, para la construcción del proceso de TL requerido en la respuesta. En la figura se muestra el comentario de E1.

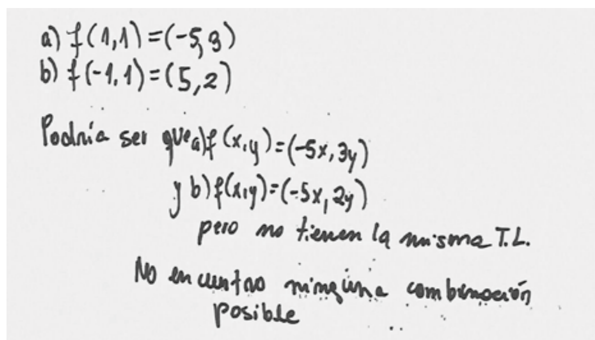


Figura 4.4. Respuesta de E1.

E1 presenta una posible dificulatad con la interpretacion geométrica.

En la pregunta 5, en la figura 4.5, E1 muestra dudas sobre la imagen del cero, por lo que pone en duda que la función entregada sea una TL. Muestra una construcción acción del concepto TL, pues no coordina los procesos de combinación lineal para un espacio vectorial no real y de función

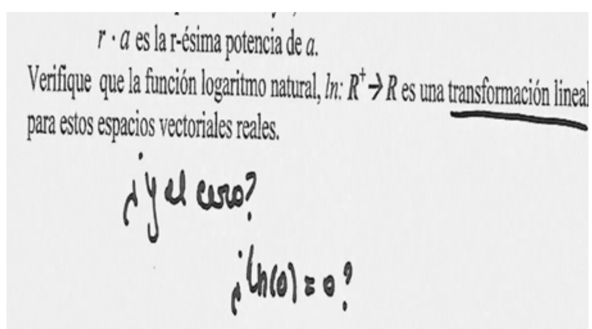


Figura 4.5. E1 muestra sus dudas en el escrito para la pregunta4

En términos generales, E1 ha mostrado en el desarrollo del cuestionario una construcción mental acción del concepto de TL en su interpretación funcional, coordina las construcciones proceso de los conceptos imágenes de vectores y los relativos a alguna propiedad como la del cero vector, pero no le es posible coordinar la combinación lineal como construcción mental proceso con el proceso de función para la construcción de una TL. Por otra parte, mostró que posiblemente posea una dificultad para construir la interpretación geométrica, lo que le impediría articular las distintas interpretaciones.

Estudiante E2

En la pregunta 1, E2 realiza los cálculos de las imágenes pedidas en los ejercicios, como se muestra en la figura 4.6

A la luz de la DG, E2 muestra una construcción mental acción del concepto imagen de vectores.

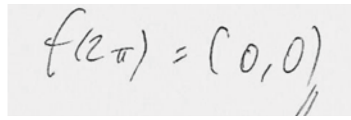


Figura 4.6. Respuesta de E2 a la pregunta 1.3.

E2 escribe que no recuerda las propiedades que definen a una TL, por lo que no responde a la pregunta 2.

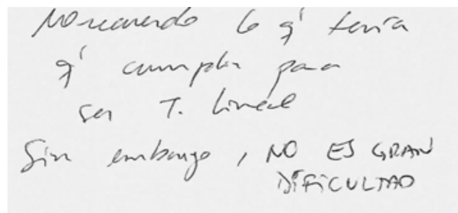


Figura 4.7. Escrito de E2 a la pregunta

E2 en su respuesta a la pregunta 2 presenta una dificultad mayor: no recordar la definicion; podría pensarse que posee una construccion accion del concepto TL en su interpretacion funcional.

E2, en la pregunta 3, realiza acciones sobre el vector calculando la imagen; asume la igualdad pues no coordina los procesos de combinación lineal y de función.

En la figura 4.8 se muestra su escrito.

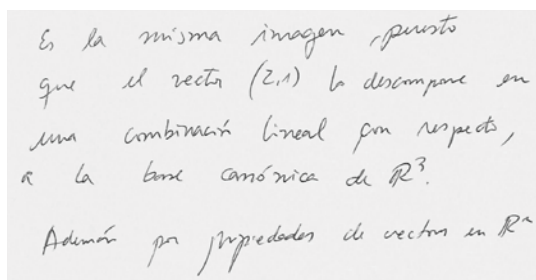


Figura 4.8. Argumentos de E2.

En las preguntas 4 y 5 del cuestionario, E2, como se muestra en la figura 4.9, declara no recordar cómo se realiza el ejercicio.

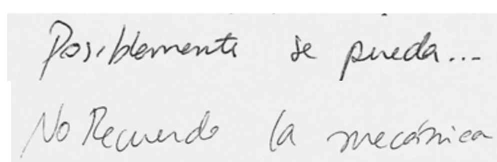


Figura 4.9. Respuesta de E2.

A partir de las respuestas y los argumentos mostrados por E2 en la totalidad del cuestionario, podemos establecer desde la DG que E2 muestra una construcción acción del cálculo de imágenes de vectores por lo que no puede hacer las coordinaciones de procesos necesarias para la construcción de un proceso para la TL. Sobre el concepto TL, en su interpretación funcional ha mostrado poseer una construcción preacción.

Estudiante E3

E3 calcula las imágenes de los vectores solicitadas.

A luz de la DG, E3 muestra una construcción mental acción del concepto imagen de un vector.

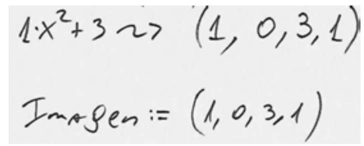
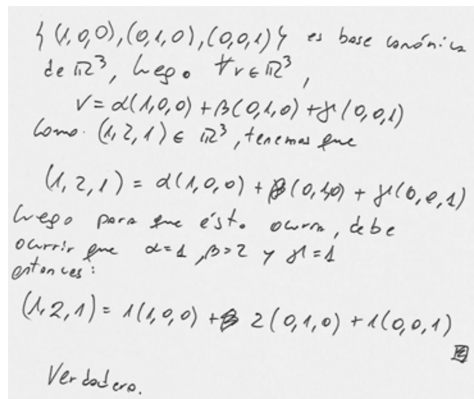

$1 \cdot x^2 + 3 \rightsquigarrow (1, 0, 3, 1)$

Imagen := $(1, 0, 3, 1)$

Figura 4.10. Respuesta de E3 a la pregunta 1.2.

E3 no responde a la pregunta 2.

E3 en esta pregunta asume que es una TL, mostrando una construcción proceso de concepto TL, como se muestra en la figura 4.11; realiza cálculos que según su procedimiento aseguran la respuesta; en estos cálculos se aprecia la coordinación de las construcciones proceso de combinación lineal y función.


$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es base canónica de $\mathbb{R}^3$, luego $\forall v \in \mathbb{R}^3$,

$v = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

Como $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$(1,2,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

Luego para que ésto ocurra, debe ocurrir que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 1$

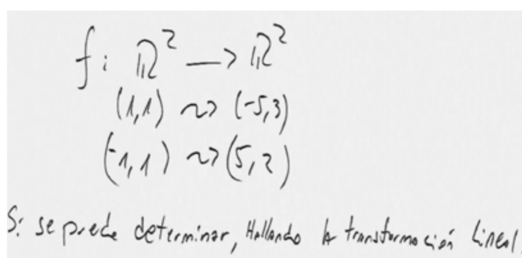
entonces:

$(1,2,1) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$

Verdadero.

Figura 4.11. Respuesta de E3 a la pregunta 3.

La pregunta 4 es la primera aproximación a la articulación con la interpretación geométrica, y E3, como se muestra en la figura 4.12, asigna vectores en vectores; asegura que sí existe, pero no la construye.


$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(1,1) \rightsquigarrow (-5,3)$

$(-1,1) \rightsquigarrow (5,2)$

Si se puede determinar, Hallando la transformación Lineal.

Figura 4.12. Respuesta de E3 a la pregunta 4.

Desde APOE, podemos suponer que no logra coordinar las construcciones mentales proceso del concepto base de un espacio vectorial con el de imagen de los vectores de la base mediante una asignación funcional. Para la DG de la interpretación funcional diremos que no coordina los procesos de función con los de linealidad.

Para finalizar, E3 no responde la pregunta 5. Las evidencias aportadas por E3 no son muchas en esta interpretación. Sus respuestas a este cuestionario dan cuenta de que posee una construcción mental proceso del concepto de TL en su interpretación funcional.

Estudiante E4

En la pregunta 1 calcula las imágenes de los vectores.
A luz de la DG, E4 muestra una construcción mental acción del concepto imagen de un vector.

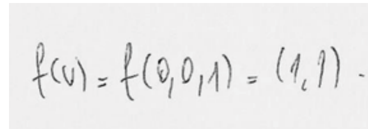

$f(v) = f(0,0,1) = (1,1)$.

Figura 4.12. Respuesta a 1.4 de E4.

En la pregunta 2, E4 presenta diferentes argumentos, como se aprecia en la figura 4.13. En el ejercicio 2.1 coordina el proceso de función con el de linealidad mediante la igualdad,. Por otra parte de las preguntas 2.2 a la 2.4 se observa que coordina el proceso del concepto función con el de combinación lineal, al verificar si una función no cumple con llevar el neutro del dominio en el neutro del recorrido.

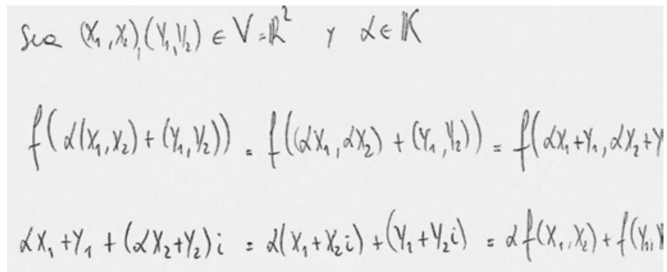


Figura 4.13. Produccion de E4 Respuesta a 2.1.

E4 responde a la pregunta 3 de acuerdo a lo que se muestra en la figura 4.14.
Desde la DG, podemos decir que E4 muestra una construcción mental proceso del concepto TL.

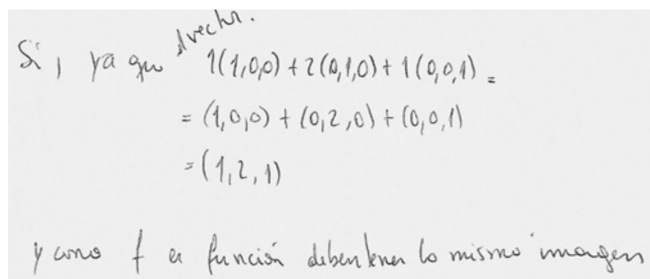


Figura 4.13. Cálculos del estudiante E4.

En la pregunta 4, E4 calcula la imagen del vector (1,2) lo escribe como una combinación lineal de los vectores dados, mostrando que coordina el proceso de combinación lineal con el de función, entendiendo que es la propiedad que define a la TL en cualquiera de sus interpretaciones.

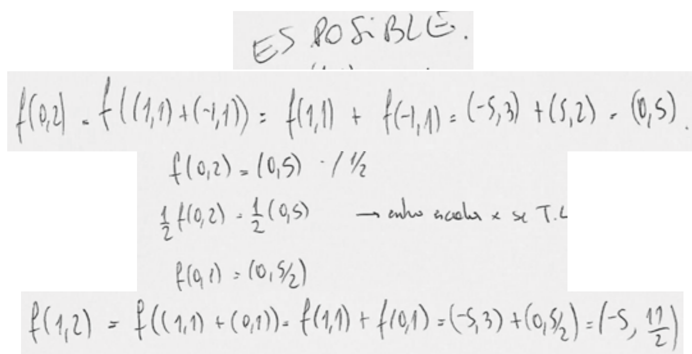
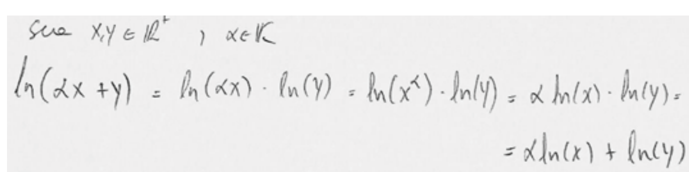


Figura 4.15. Escrito del estudiante E4.

El estudiante E4 aplica la definición correctamente en la pregunta, y podemos sugerir desde APOE que muestra una



construcción del concepto TL en su interpretación funcional como objeto.

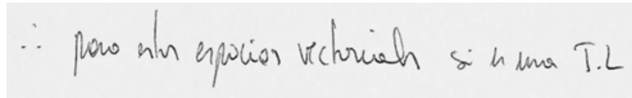
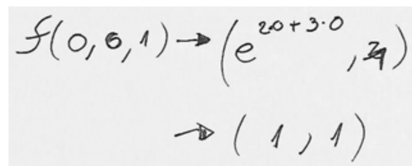

∴ para estos espacios vectoriales si es una T.L.

Figura 4.16. Respuesta de E4.

A partir de los argumentos mostrados por E4 en la totalidad del cuestionario, podemos decir que los elementos dispuestos en la DG dan cuenta de su construcción cercana a la construcción mental objeto del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E5

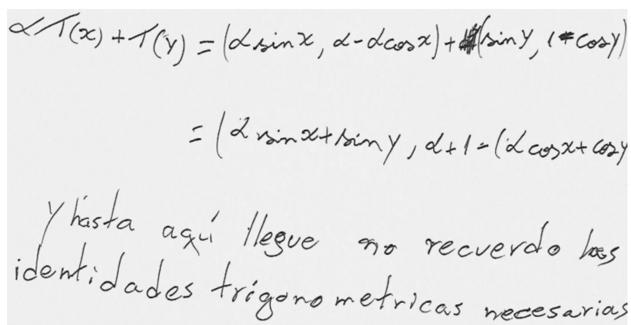
En la pregunta 1, E5 realiza el cálculo de la imagen del vector para cada ejercicio. Una interpretación sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto imagen de un vector.


$f(0,0,1)\to(e^{2\cdot 0+3\cdot 0},1)$

$\to(1,1)$

Figura 4.17. Respuesta a 1.4del estudiante E5.

En la pregunta 2, E5 aplica la propiedad de linealidad como mecánica de resolución, muestra una construcción mental proceso de la propiedad de linealidad, la que no es coordinada con el proceso de función, por lo que no logra dar cuenta de que algunas de estas funciones no son TL. Un ejemplo de ello es su respuesta al ejercicio 2.3

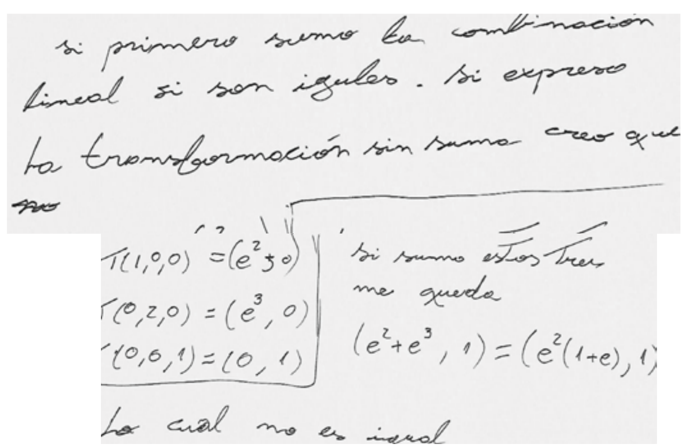

$\alpha T(x)+T(y)=(\alpha\sin x,\alpha-\alpha\cos x)+(\sin y,1-\cos y)$

$=(\alpha\sin x+\sin y,\alpha+1-(\alpha\cos x+\cos y)$

y hasta aquí llegue no recuerdo las identidades trigonometricas necesarias

Figura 4.18. Respuesta a 2.3 del estudiante E5.

E5, en la pregunta 3, a diferencia de lo que pasó en la pregunta anterior, coordina las construcciones mentales proceso de los conceptos de combinación lineal y función, para construir un proceso del TL que le permite establecer que la función dada no es una TL.


si primero sumo la combinación lineal si son iguales. Si expreso la transformación sin suma creo que no

$T(1,0,0)=(e^2,0)$

$T(0,2,0)=(e^3,0)$

$T(0,0,1)=(0,1)$

si sumo estos tres me queda

$(e^2+e^3,1)=(e^2(1+e),1)$

lo cual no es igual

Figura 4.19. Escrito del estudiante E5.

En la pregunta 4, E5 no responde.

En la pregunta 5, E5 da evidencias de que su construcción mental para el concepto de TL es proceso; conoce la propiedad de linealidad y la aplica con claridad con una operación que no es la usual.

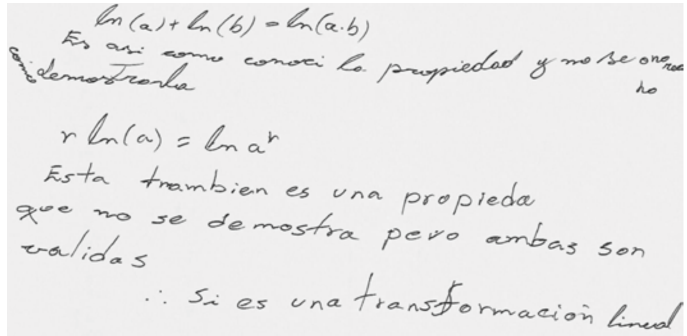
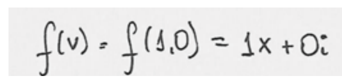

$\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\cdot b)$
Es asi como conocí la propiedad y no se como demostrarla
$r\ln(a)=\ln a^r$
Esta tambien es una propieda que no se demostra pero ambas son validas
$\therefore$ Si es una transformación lineal

Figura 4.20. Escrito del estudiante E5

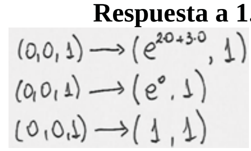
E5 muestra en sus respuestas que posee una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E6

En la pregunta 1, realiza los cálculos de las imágenes de los vectores; una interpretación prematura sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción proceso del concepto imagen de un vector mediante una función.


$f(v)=f(1,0)=1x+0i$

Respuesta a 1.1


$(0,0,1)\longrightarrow(e^{2\cdot0+3\cdot0},1)$
$(0,0,1)\longrightarrow(e^{0},1)$
$(0,0,1)\longrightarrow(1,1)$

Respuesta a 1.4

Figura 4.21. Escrito del estudiante E6

No responde a la pregunta 2.

En la pregunta 3, E6 en su respuesta muestra que no coordina el proceso de combinación lineal con el de función. Pensamos que muestra una construcción acción del concepto TL en su interpretación funcional

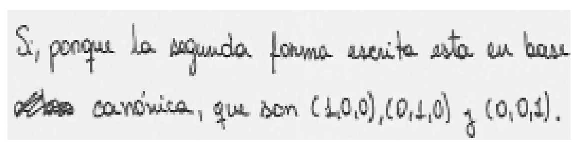
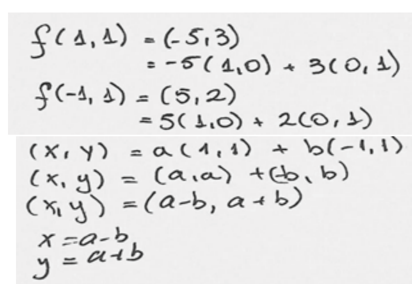

Si, porque la segunda forma escrita esta en base canónica, que son (1,0,0),(0,1,0) y (0,0,1).

Figura 4.22. Escrito del estudiante E6

E6 en su respuesta a la pregunta 4, muestra coordinar el proceso de combinación lineal con el de función definida sobre un espacio vectorial de plano, al que es posible asignar una base, procesos que coordina para encontrar la imagen de un vector mediante la TL; posiblemente posea una construcción mental proceso del concepto de imagen de un vector mediante la TL. Por otra parte, todo este trabajo de construcción explícita de una TL que cumpla la condición y le permita encontrar la imagen del vector (1,2), reafirma que evidencia una construcción mental proceso. Ha


$f(1,1)=(-5,3)$
$=-5(1,0)+3(0,1)$
$f(-1,1)=(5,2)$
$=5(1,0)+2(0,1)$
$(x,y)=a(1,1)+b(-1,1)$
$(x,y)=(a,a)+(-b,b)$
$(x,y)=(a-b,a+b)$
$x=a-b$
$y=a+b$

elegido un camino correcto pero innecesario.

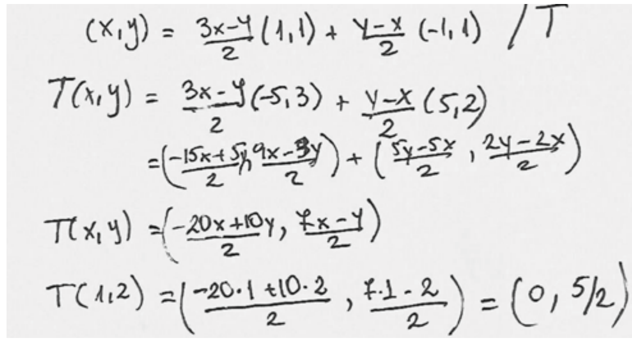


Figura 4.23. Escrito del estudiante E6

En la pregunta 5 E6 no responde.

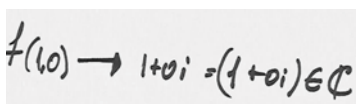
Como se muestra en el desarrollo del cuestionario en su interpretación funcional, E6 da evidencias de tener una construcción mental proceso para el concepto de TL en su interpretación funcional.

Estudiante E7

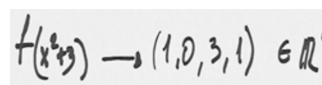
E7 responde a la pregunta 1 realizando los cálculos de las imágenes de los vectores; una interpretación prematura sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto imagen de un vector mediante una función.

En la pregunta 2, E7, como muestra la figura 4.25, realiza algunos cálculos mostrando evidencias de recordar parte de la propiedad de aditividad en la respuesta 1.1. En los otros ejercicios hace alusión a la dimensión para determinar si son TL. No concluye.

Desde la DG E7 muestra una construcción accióndel concepto TL en su interpretación funcional, pues no coordina los conceptos de función con el de combinación lineal.

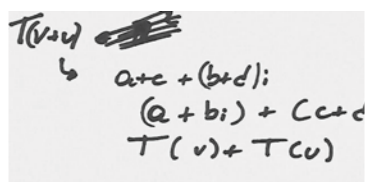


Respuesta a 1.1

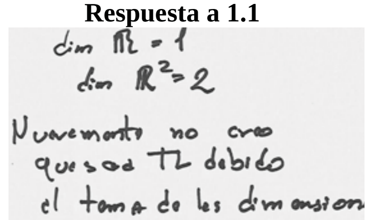


Respuesta a 1.2

Figura 4.24. Escrito del estudiante E7.



Respuesta a 1.1



Respuesta a 1.3

Figura 4.25. Escrito del estudiante E7.

E7 no responde las preguntas 3, 4 y 5 del cuestionario en su interpretación funcional. No hay información sobre construcciones ni mecanismos mentales puestos en juego por el estudiante. Podemos decir que muestra en su trabajo una construcción acción del concepto TL.

Estudiante E8

En la pregunta 1, E8, como muestra la figura 4.26, realiza el cálculo de la imagen del vector, identificando la imagen por medio de la asignación de una flecha. Una interpretación sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto imagen de un vector.

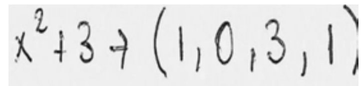


Figura 4.26. Respuesta a 1.2 del estudiante E8

En la pregunta 2, E8, como se muestra en la figura, responde sin justificar. Sus respuestas son correctas, es aventurado conjeturar de aquí el tipo de construcción mental que muestra, pero podría ser proceso para el concepto TL en su interpretación funcional.

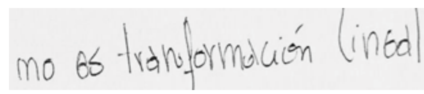


Figura 4.27. Escrito del estudiante E8

E8 en la pregunta 3 escribe que la imagen no es igual. No justifica su respuesta, que es correcta, por lo que no es posible establecer con claridad algún tipo de construcción mental puesta en juego.

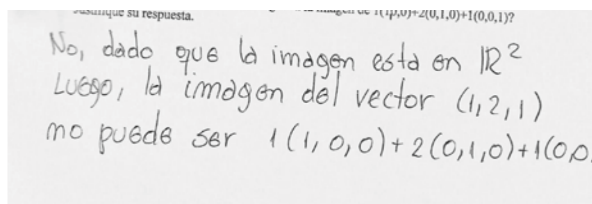


Figura 4.28. Escrito del estudiante E8

En la pregunta 4, E8 muestra que su concepción de TL está asociada a la de una función lineal. No logra dar respuesta a la pregunta. Aquí se requiere mostrar las coordinaciones en forma explícita en la construcción de la respuesta.

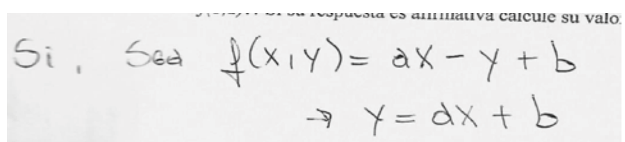


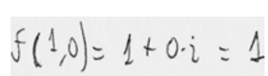
Figura 4.29. Escrito del estudiante E8

E8 no da respuesta a la pregunta 5.

E8, en términos generales podría mostrar una construcción mental proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

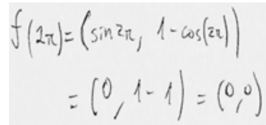
Estudiante E9

En la pregunta 1, E9 entrega una respuesta adecuada, calcula la imagen de los vectores por medio de las funciones.



Respuesta a 1.1

(Figura 4.30).
Desde APOE sustentamos que E9 muestra una construcción acción del concepto imagen de un vector.



Respuesta a 1.3
Figura 4.30. Respuesta que realiza E9.

E9 no responde la pregunta 2.

En la pregunta 3, E9 responde a la pregunta mostrando una construcción acción del concepto TL, pues no ha construido, al pareces los procesos del concepto función y de combinación lineal.

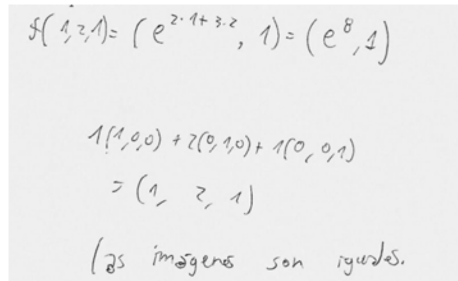


Figura 4.31. Respuesta de E9.

En la pregunta 4, E9 relata que según teorema existe una TL, como consta en figura 4.32, y procede verificando que los vectores del dominio configuran una base para el espacio vectorial de partida.

Desde la DG, podemos decir que E9 muestra una construcción proceso del concepto de TL, pues recuerda que se puede y cuál es el mecanismo, pero no organiza la información.

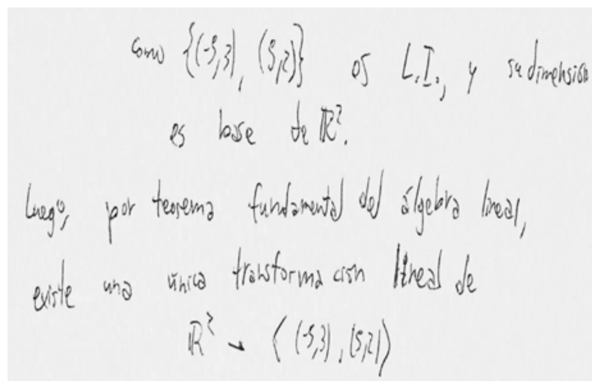


Figura 4.32. Respuesta que realiza E13.

E9 prueba que es una TL, como se muestra en la figura 4.33, por lo que podemos decir que coordina los procesos de combinación lineal y de función, mediante la igualdad de imágenes. Posee Muestra una construcción proceso del concepto TL.

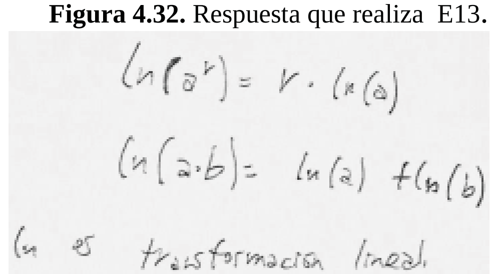
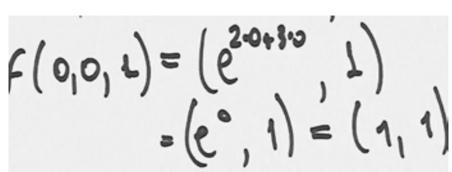


Figura 4.33. Respuesta que realiza E9.

E9 en el desarrollo del cuestionario muestra una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E10

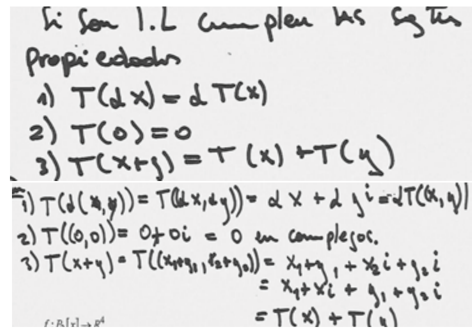
E10, en la pregunta 1, calcula las imágenes de los vectores específicos solicitadas, como se muestra en la figura 4.34. Da evidencias escritas de una construcción mental acción del concepto imagen de un vector



específico, a pesar de escribir la imagen como *f(x).*

Figura 4.34. Repuesta 1.4 que realiza el E10.

En la pregunta 2, E10 escribe las propiedades que debe corroborar para que una función sea una TL, omitiendo la verificación de que la relación sea función. A luz de la DG, podemos decir que E10 muestra una construcción proceso del concepto TL.



Respuesta a 1.1

Figura 4.35. Respuesta a 1.1 realizada porl E10.

E10 responde a la pregunta (figura 4.36), verifica que el vector se escribe como combinación lineal, omite corroborar que la función sea una TL. Un análisis desde la DG permite suponer que E10 muestra una construcción mental acción del concepto TL.

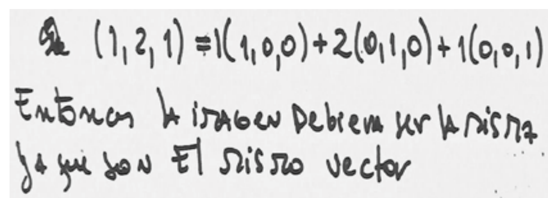


Figura 4.36. Respuesta que realiza el E10.

E10 no responde a la pregunta 4.

En la pregunta 5, E10 escribe que no es una TL; el procedimiento muestra que para este estudiante el concepto función asimila al de TL.

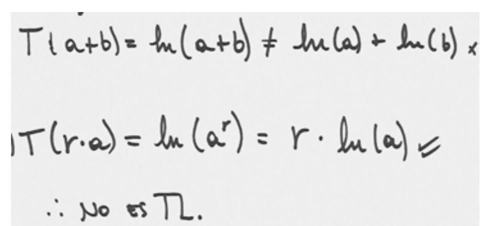


Figura 4.37. Respuesta que realiza E10.

E10 evidencia poseer una concepción acción del concepto TL en el cálculo de imágenes de vectores, como en el concepto de TL en su interpretación funcional.

Estudiante E11

E11 calcula las imágenes de los vectores, como se muestra la figura 4.38.

A la luz de la DG, E11, muestra una construcción mental acción del concepto imagen de un vector.

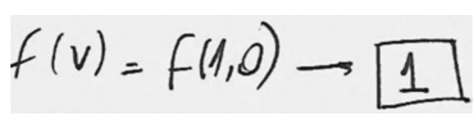
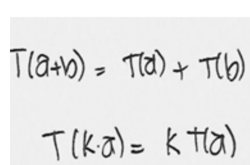
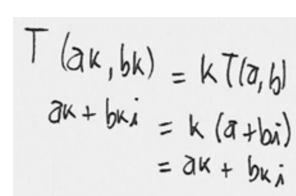


Figura 4.38. Respuesta a 1.1 que realiza E11.

En la pregunta 2, se ha elegido como evidencia de que posee una construcción mental proceso la respuesta a 2.1, pues en ella coordina los procesos de combinación lineal y





de función.
Por otra parte, usa la imagen del cero para probar que no es una TL; esto es, desde APOE, es capaz de coordinar el proceso asociado con la imagen de un vector específico al proceso asociado al elemento neutro, cero para mostrar que su imagen no es el neutro en el espacio de llegada.

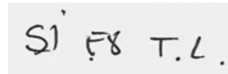


Figura 4.39. Respuesta dada por E11 a 2.1

E11, en la pregunta 3, muestra una construcción acción del concepto TL, pues no muestra haber construido los procesos necesarios para coordinar las construcciones mentales proceso del concepto de función y de combinación lineal.

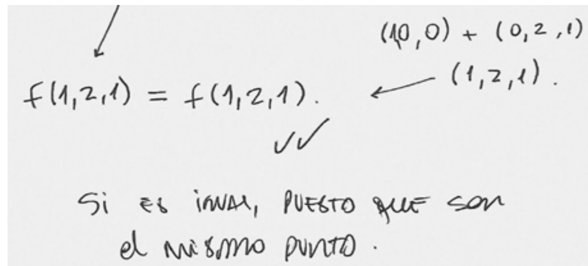


Figura 4.40. Respuesta que realiza E11.

E11 no responde a las preguntas 5 y 6.

Sobre lo que está registrado, podemos decir que posee una construcción mental acción de los conceptos de función y el concepto de combinación lineal, lo que no alcanza para construir el concepto de TL en su interpretación funcional.

Estudiante E12

E12 responde a la pregunta 1 del cuestionario como se muestra en la figura 4.41.
A la luz de la DG E12, muestra una construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector, puesto que no coordina los procesos de función y de combinación lineal.

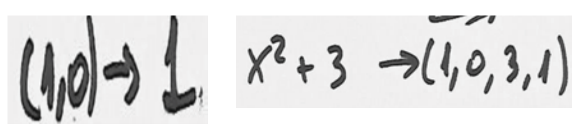


Figura 4.41. Respuesta que realiza E12.

En la pregunta 2 del cuestionario, E12 da cuenta de la construcción de acciones para algunos conceptos necesarios para la construcción de una TL; éstos son base, generado, suma y multiplicación por escalar. Estas concepciones no están interiorizadas, por lo que no pueden coordinarse, son una lista que podría estar dando cuenta de la mecanización del trabajo en algunos conceptos para el álgebra lineal.

A la luz de la DG, E12 muestra una construcción mental acción para el concepto TL en su interpretación funcional.

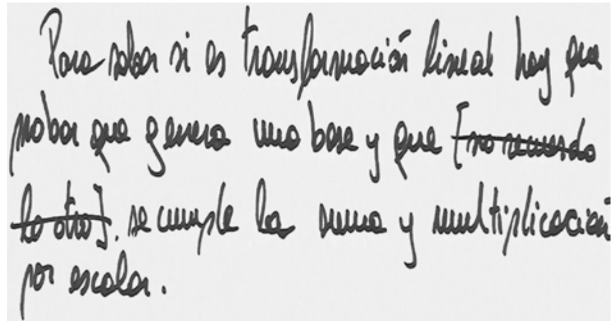


Figura 4.42. Explicación escrita por E12.

E12, como se muestra en la figura 4.4 3, al dar respuesta a la pregunta 3, muestra una construcción acción del concepto de función y el de combinación lineal.

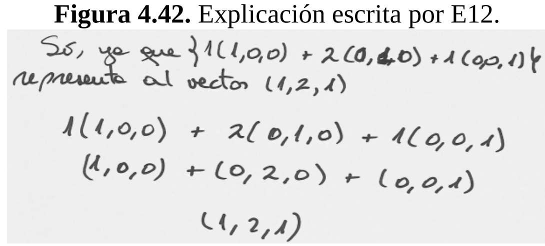


Figura 4.43. Cálculos de E12.

E12 no responde las preguntas 4 y 5.

E12 muestra una construcción preacción del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E13

En la pregunta 1, E13 responde calculando la imagen del vector, como se muestra en la figura.

En su escrito da las primeras evidencias de poseer una construcción proceso del concepto imagen de un vector, pues coordina los procesos de función y combinación lineal.

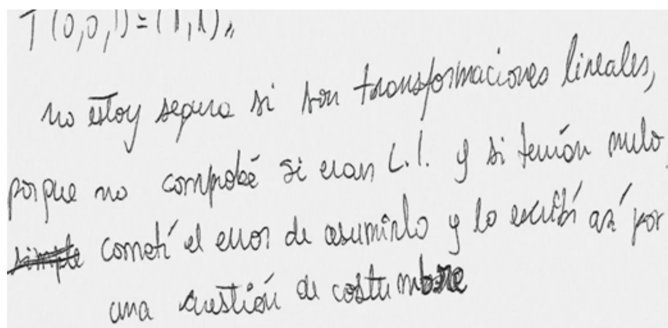


Figura 4.44. Respuesta que realiza el E13.

E13 busca la imagen de vectores específicos como el elemento neutro, para verificar si se cumple que su imagen es el neutro del espacio de llegada. Desde APOE podemos decir que coordina los procesos de imagen de un vector y defunción en el de TL, al considerar que para ser una TL debe llevar neutro en neutro.

Además, coordina los procesos de imagen de un conjunto linealmente independiente y de dominio de una

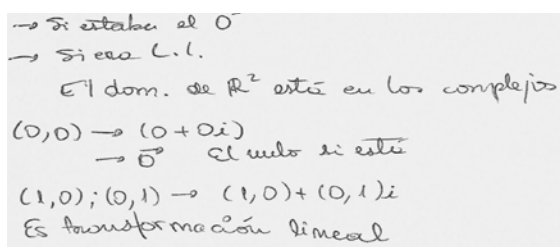


Figura4.45. Respuesta dada por E13.

función. E13 muestra una construcción proceso del concepto de TL.

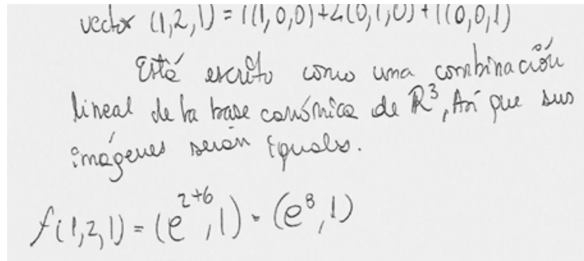


Figura 4.46. Respuesta que realiza el E13.

En la pregunta 3 E13, presenta una serie de cálculos, en los que muestra que no ha coordinado el proceso de de TL con el de combinación lineal, por lo que muestra una construcción mental acción de TL.
No responde a las preguntas 4y 5.

E13 en sus respuestas al cuestionario completo muestra una construcción acción, en la que el concepto de función prevalece por sobre el concepto de combinación lineal.

Estudiante E14

E14, en la pregunta 1, calcula las imágenes de los vectores (figura 4.47).
Interpretando desde la DG, podemos decir que E14 posee una construcción acción del concepto imagen de un vector.

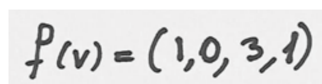


Figura 4.47. Respuesta que realiza E14.

E14 no responde la pregunta 2.

En la pregunta 3, E14 realiza el cálculo de imagen de un vector y después escribe el mismo vector como combinación lineal de la base canónica, (figura 4.48); ha construido el concepto de TL acción.

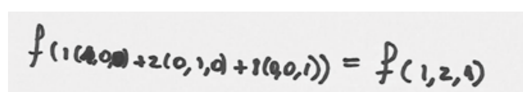


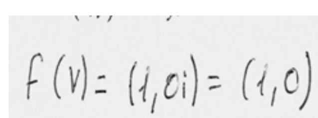
Figura 4.48. Respuesta de E14.

E14 no responde a las preguntas 4 y 5.

El análisis de E14, da cuenta de que el estudiante no puede construir el concepto de TL en su interpretación funcional, puesto que no ha coordinado los procesos de función y espacio vectorial mediante la combinación lineal.

Estudiante E15

E15 responde a la pregunta como se muestra en la figura 4.49.
Muestra una construcción mental



acción del concepto de imagen de un vector específico.

Figura 4.49. Respuesta que realiza E15 a1.1

E15 escribe la propiedad que define a una TL y desarrolla las respuestas a los ejercicios haciendo uso de ella. Figura 4.50.

Muestra una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional, coordina las construcciones mentales proceso de los conceptos combinación lineal con el de función mediante la igualdad.

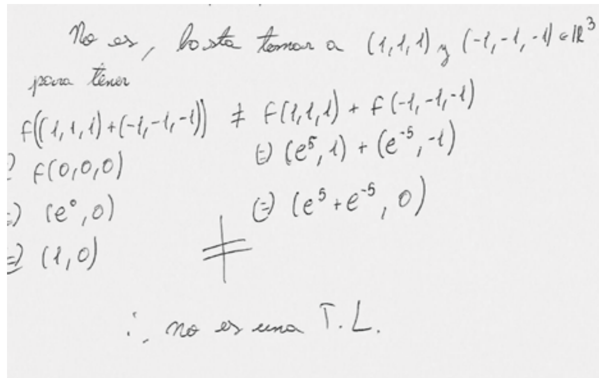


Figura 4.50. Respuesta de E15

E15 responde a la pregunta 3 argumentando que son iguales, sin reconocer que la función no es una TL, por lo que sus imágenes no se preservan. Desde nuestra DG podemos decir que no coordina los procesos involucrados en la construcción del proceso de TL.
E15 no responde a la pregunta 4.

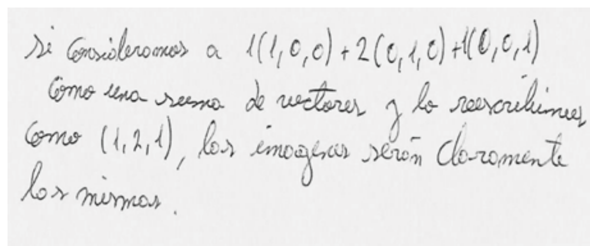


Figura 4.56. Respuesta que realiza el E15

E15 en la pregunta 5 realiza la demostración de que la función con esas operaciones es una TL, como muestra la figura 4.57.
A la luz de la DG, es una prueba de que posee una construcción mental proceso.

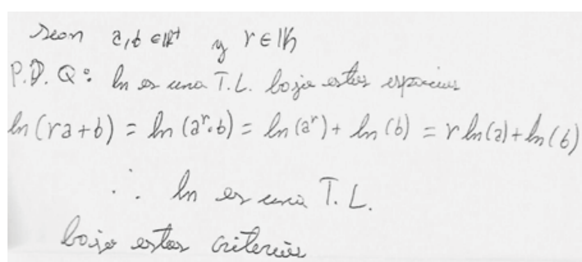
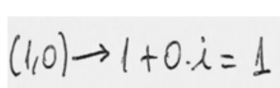


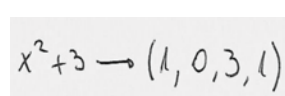
Figura 4.57. Respuesta que realiza el E15

E15 muestra en sus respuestas al cuestionario una construcción mental proceso, pues coordina las construcciones mentales correspondientes a los conceptos de función y espacio vectorial por medio de la combinación lineal que se establece en la igualdad de las imágenes.

Estudiante E16

E16, como se ve en la figura 4.58, muestra una construcción acción del





concepto imagen de un vector.

Figura 4.58. Respuesta de E16 a 1.1 y 1.2

En la pregunta 2, E16 escribe algunas propiedades relacionadas a las TL; desde la DG podemos decir que no está coordinando los procesos necesarios para la construcción proceso de TL.

No obstante, puede determinar si una función no es TL, argumentando que la imagen del cero vector no es el cero vector del espacio de llegada.
Podemos interpretar que el estudiante posee una construcción acción del concepto TL en su interpretación funcional. En la figura 4.59 se muestra parte de la producción del estudiante.

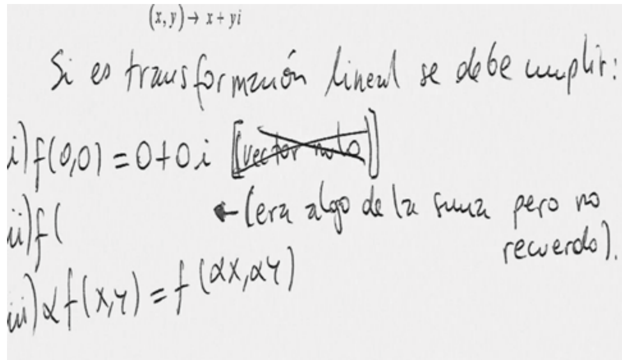


Figura 4.59. Respuesta de E16 a 11

El estudiante E16 al responder la pegunta 3 muestra una construcción mental acción del concepto TL, puesto que no coordina el proceso de combinación lineal con el de función.

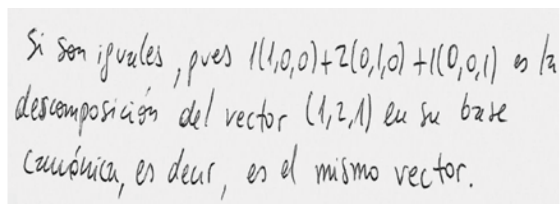


Figura 4.60. Respuesta de E16

E16 escribe que no recuerda el procedimiento, pero asigna a cada vector su imagen y reescribe el vector (1,2) como combinación lineal de la base canónica, aplica la TL, sin conocer las imágenes de los vectores de esta base. Por el trabajo realizado muestra una construcción mental proceso del concepto TL.

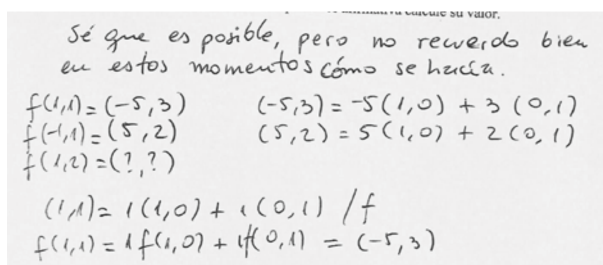


Figura 4.61. Respuesta de E16

No responde a la pregunta 5.

E16 evidencia que posee una construcción mental proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E17

E17 responde la pregunta 1, como muestra la figura 4.62, realizando el cálculo de la imagen del vector. Desde la DG muestra una construcción acción del concepto imagen de un vector.

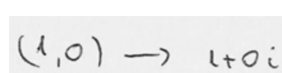


Figura 4.62. Respuesta que realiza E17 en la pregunta1.1

E17 responde a la pregunta 2 escribiendo las propiedades que definen al concepto; para el primer ejercicio se da dos vectores generales y procede a comprobar las propiedades que registra en el inicio del escrito. Para argumentar que una función no es una TL alude en el ejercicio que la función entregada no cumple la propiedad que describe como *T(kv)=kT(v)*, donde *k* es un escalar –número real– y *v* es un vector –polinomio– con la suma. Desde la DG podemos decir que está coordinando, mediante la igualdad los procesos involucrados en la construcción del proceso de TL. Podemos interpretar que el estudiante posee una construcción proceso del concepto TL (Figura 4.63).

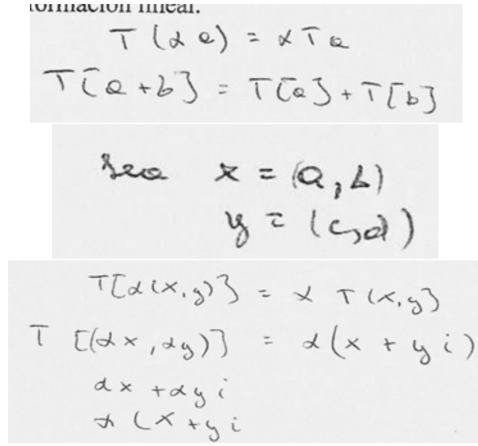


Figura 4.63. Respuesta de E17

E17 escribe al vector (1,2,_1) como combinación lineal de la base canónica, lo que es siempre posible, y desde este argumento sostiene que estas imágenes serán las mismas. Muestra una construcción mental acción del concepto TL, puesto que no ha interiorizado los procesos de combinación lineal y de función.

E17 encuentra la imagen del vector (1,2), realiza los cálculos para encontrar la función que define a la transformación lineal en su interpretación funcional y desde esta construcción da respuesta a la pregunta de la imagen de un vector específico.

Muestra una construcción mental proceso del concepto TL, puesto que coordina el proceso de combinación lineal con el de función.

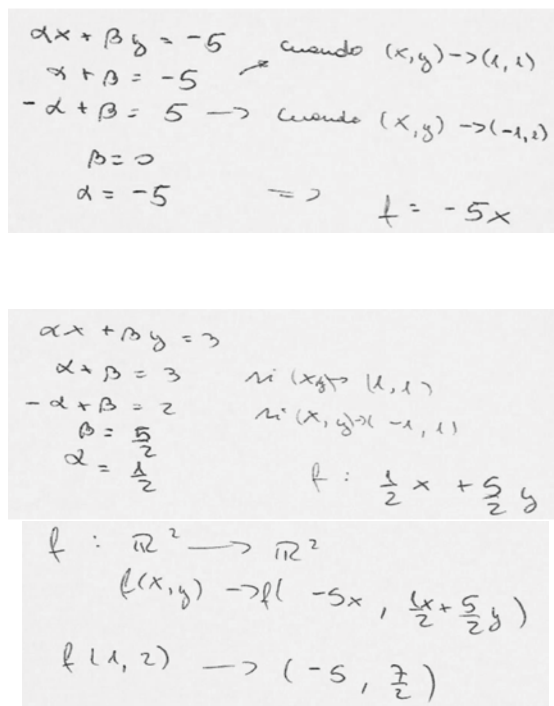
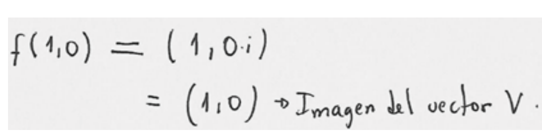


Figura 4.64. Respuesta que realiza el E17

E17 no responde a la pregunta 5, pero en la totalidad del cuestionario ha mostrado una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E18

E18 realiza los cálculos de las imágenes de los vectores, como se muestra en la figura 4.65, respuesta al



ejercicio 1.1.
Muestra una construcción acción del concepto imagen de un vector, pues realiza la igualdad desde el concepto de función.

Figura 4.65. Respuesta que realiza E18

En la pregunta 2, E18 muestra que posee una construcción mental proceso, pues en ella coordina los procesos de combinación lineal y de función.
Por otra parte, usa la imagen del cero para probar que no es una TL; esto es, desde APOE es capaz de coordinar el proceso de la imagen de un vector, el cero, con el de función para mostrar que su imagen no es el neutro en el espacio de llegada.

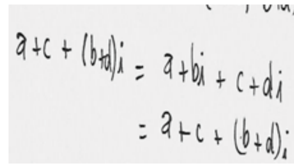


Figura 4.65. Respuesta que realiza E18 a la pregunta 2.

E18, en la pregunta 3, escribe al vector (1,2,1) como combinación lineal de la base, lo que muestra una construcción acción del concepto de función, donde no muestra interiorización los procesos de función y de combinación lineal.

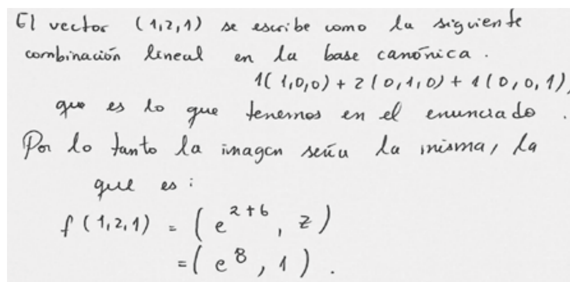


Figura 4.66. Respuesta deE18

E18 responde a la pregunta 4 reconociendo la existencia de un procedimiento, el que no logra recordar claramente, pero asigna funciones que cumplen parcialmente la condición pedida. Muestra en su escrito una construcción proceso el concepto de TL.

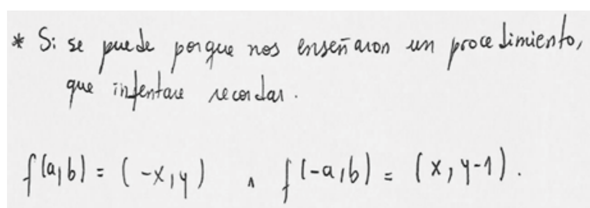


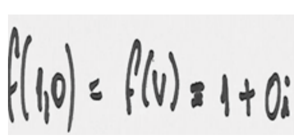
Figura 4.67. Respuesta de E18

E18 No responde la pregunta 5.

E18 muestra una construcción mental proceso del concepto TL en su interpretación funcional.

Estudiante E19

En la pregunta 1, E19, como se muestra en la figura 4.68, realiza el cálculo de la imagen en cada ejercicio para las funciones dadas, Muestra una



construcción acción del concepto imagen de un vector.

Figura 4.68. Respuesta de E19

E19 no responde la pregunta 2. E19, como se muestra en la figura 4.83, responde a la pregunta 3 reescribiendo el vector como combinación lineal de la base canónica del $\boldsymbol{R^3}$. E19 muestra una construcción acción del concepto imagen de un vector, pues no coordina con el concepto de combinación lineal.

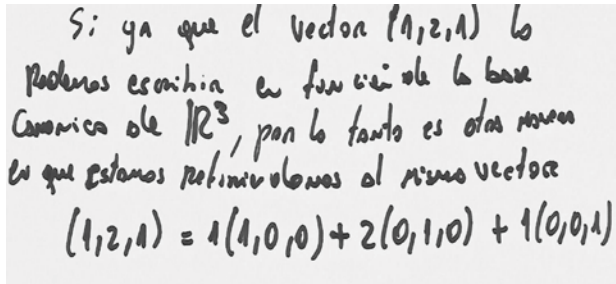


Figura 4.69. Respuesta que realiza el E19

En la pregunta 4, E19 realiza una serie de cálculos en los que rescribe al vector *(1,2)* como combinación lineal de los vectores (*1,1)* y *(-1,1)*, encontrando -en forma poco clara- los escalares que permiten encontrar la imagen del vector *(1,2*) mediante la TL. E19 muestra una construcción proceso del concepto imagen de un vector mediante la TL.

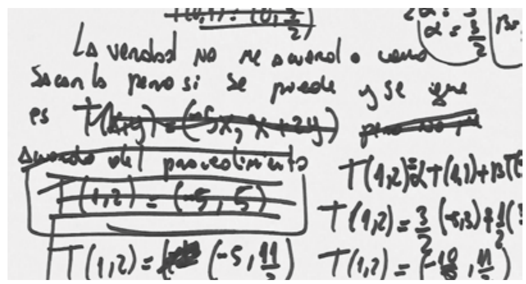


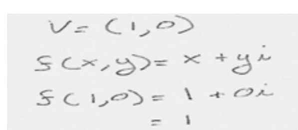
Figura 4.70. Respuesta de E19

El estudiante E19 no responde a la pregunta 5.

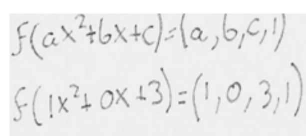
La interpretación de todas las respuestas del estudiante E19, es que posee una construcción mental acción del concepto TL en su interpretación funcional. Es una prueba de que es posible construir el concepto dependiendo de la linealidad y del concepto de función.

Estudiante E20

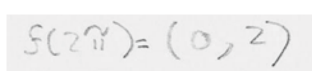
E20 en la pregunta 1 realiza los cálculos de las imágenes de los vectores dados en los ejercicios, como se ve en la figura 4.71; muestra una construcción mental acción del concepto imagen de un vector.



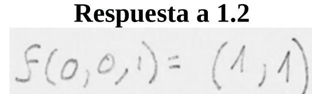
Respuesta a 1.1



Respuesta a 1.2



Respuesta a 1.3



Respuesta a 1.4

Figura 4.71. Respuesta que realiza el E20.

El estudiante E20 escribe en el cuestionario completo que no recuerda bien los conceptos involucrados en cada pregunta. En la imagen 4.72 se aprecia su escrito.

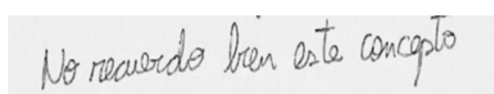


Figura 4.72. Respuesta que realiza el E20.

E20 no aporta información interpretable por teoría en esta interpretación del concepto.

4.1.1.1 RESUMEN DE LOS DATOS.

Para mostrar en forma resumida los resultados obtenidos sobre las respuestas escritas de los estudiantes, con ejemplos de cada caso de estudio, hemos construido la tabla 4.1, en la que se da la información sobre quiénes muestran presencia o ausencia de una determinada construcción mental prevista en la DG.

Tabla 4.1. Resumen de la recogida de datos. Interpretación funcional.

Pregunta / Estudiante	P1 Construcción mental del concepto de la imagen de un vector específico.	P2 Construcción mental del concepto como función TL.	P3 Construcción mental del concepto imagen de un vector mediante la TL.	P4 Construcción mental del concepto imagen de un vector mediante la imagen de una base.	P5 Construcción mental del Concepto TL.
E1	Acción	Proceso	Proceso	Acción	Acción
E2	Acción	No responde	Acción	No responde	No responde
E3	Acción	No responde	Proceso	Proceso	No responde
E4	Acción	Proceso	Proceso	Objeto	Objeto
E5	Acción	Acción	Proceso	No responde	Proceso
E6	Proceso	No responde	Acción	Proceso	No responde
E7	Acción	Proceso	No responde	No responde	No responde
E8	Acción	Proceso	Proceso	Proceso	No responde
E9	Acción	No responde	Acción	Proceso	Proceso
E10	Acción	Proceso	Acción	No responde	Acción
E11	Acción	Proceso	Acción	No responde	No responde
E12	Acción	Acción	Acción	No responde	No responde
E13	Proceso	Acción	Acción	No responde	No responde
E14	Acción	No responde	Acción	No responde	No responde
E15	Acción	Proceso	Acción	No responde	Proceso
E16	Acción	Proceso	Acción	Acción	No responde
E17	Acción	Proceso	Acción	Proceso	No responde

E18	Acción	Proceso	Acción	Proceso	No responde
E19	Acción	No responde	Acción	Acción	No responde
E20	Acción	No responde	No responde	No responde	No responde

4.1.1.2 CONCLUSIONES SOBRE LAS PRIMERAS EVIDENCIAS PARA LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL DEL CONCEPTO TL.

De los estudiantes que constituyeron el caso, diez dijeron no recordar la o las ecuaciones que definen a una TL; algunos ejemplos de ello son E2, E6, E11, E12, en particular E2 declara: “No recuerdo las propiedades, pero no es de gran dificultad”. Por otra parte, otros cuatro no dejan un registro explícito del uso de la o las ecuaciones para dar respuesta a las preguntas del cuestionario en su interpretación funcional del concepto TL; esto es, hacen uso de recursos, como verificar la imagen del elemento neutro; un ejemplo de esto es E17, quien para determinar si T es una TL escribe: “$T(0,0,0)=(e^0, 0)= (1,0)$”.

En resumen, más de la mitad de los estudiantes de este caso no tienen claridad en la definición del concepto TL en su interpretación funcional, puesto que no recuerdan o no usan las propiedades o ecuaciones que definen a una TL. Creemos que esta dificultad proviene de un uso mecánico de las propiedades que constituyen la definición, que son usadas en la etapa inicial de la presentación del concepto TL, las que posteriormente son sustituidas por el teorema fundamental del álgebra lineal, entre otros.

Sobre el resto de los estudiantes del caso, seis de ellos que hacen uso explícito de las ecuaciones que definen a una TL, podemos realizar un análisis desde la teoría APOE y dar evidencias sobre las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego para la construcción de la definición del concepto TL en su interpretación funcional.

Un ejemplo es E4, quien para dar respuesta a algunos de los ejercicios de la pregunta 2 y la pregunta 5, y como un argumento de prueba, usó explícitamente las ecuaciones que definen una TL, mostrando que posee una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional, muy próximo a ser encapsulado como una construcción objeto, pues la única construcción menos fortalecida, pero importante, es la noción de la conservación de la combinación lineal o linealidad mediante una TL; en la pregunta 3 da muestra de ello, pues a pesar de establecer una combinación lineal del vector en el espacio de partida, no verifica el cambio de imagen del espacio vectorial de llegada, pues la función no es una TL. Sobre el resto de las construcciones mentales mostradas por E4, algunas son construcción objeto del concepto espacio vectorial sobre el cual realiza acciones para calcular imágenes mediante una TL, como mostró en la pregunta 5. De igual forma, en la pregunta 4 calcula la imagen de un vector, coordinando las construcciones mentales proceso del concepto de base y combinación lineal mediante una TL implícita. En cambio, E17 muestra en la respuesta a la pregunta 2 conocer las ecuaciones que definen una TL, sin embargo en la pregunta 5 no logra responder correctamente; esto es, E17 muestra una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional, donde las construcciones mentales puestas en juego son la de espacio vectorial y la de función, que están en construcción proceso, y no ha logrado mostrar mecanismos de coordinación para construir el concepto de TL en su interpretación funcional.

En general, sobre las construcciones y mecanismos mostrados por los estudiantes del caso para la construcción del concepto de TL en su interpretación funcional, las evidencias dan cuenta que todos los estudiantes poseen una construcción acción del concepto de imagen de un vector, pero a lo más seis de ellos poseen una construcción proceso del concepto imagen de un vector mediante una TL, y de ellos, dos muestran coordinar los procesos de combinación lineal con el de función mediante la igualdad, esto es, la o las ecuaciones que definen a una Tl en su interpretación funcional.

4.1.2 INTERPRETACIÓN MATRICIAL.

A continuación presentamos los resultados obtenidos del análisis de los datos, o análisis a posteriori, de los estudiantes del caso en la interpretación matricial del concepto TL.

Estudiante E1

En la pregunta 1 del cuestionario, calcula la imagen del vector (2,1) según la definición de la TL *T*, obteniendo el resultado que muestra la figura 4.73.

A la luz de la DG, E1 muestra una construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector (2,1), pues calcula la imagen de dicho vector, coordina el concepto de coordenada de la imagen de un vector con el concepto de combinación lineal, pero no da respuesta a la pregunta.

No responde el resto de las preguntas.

La figura 4.74 es una evidencia de su relato.

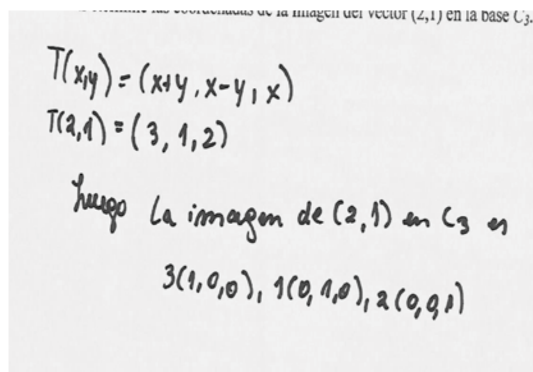


Figura 4.73. Respuesta de E1 a la pregunta 1

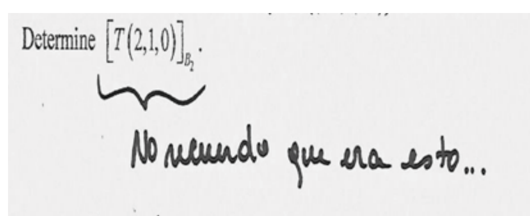


Figura 4.74. Respuesta de E1 a la pregunta 2

Con las pocas evidencias mostradas por E1, pensamos que posee una construcción mental preacción para los conceptos de coordenada de un vector, lo que le impide construir la MATL.

Estudiante E2

Calcula la imagen del vector (2,1) a partir de *T*, obteniendo el resultado que muestra la figura 4.75.

A la luz de la DG, E2 muestra una

construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector (2,1), pues calcula sólo la imagen de dicho vector.

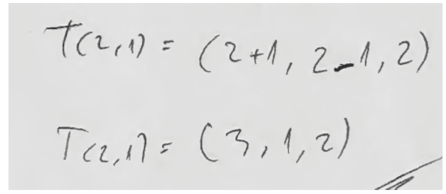


Figura 4.75. Respuesta de E2 a la pregunta 1.

E2 realiza los cálculos de las coordenadas de la imagen del vector (2,1,0), mediante T en la base B_2, como se aprecia en la figura 4.76. Desde la DG, interpretamos esta diferencia de argumentación escrita como una asociación entre el concepto de coordenadas de la imagen de un vector y el rótulo que le es asignado en la pregunta 2; esto nos lleva a inferir que ha alcanzado la construcción mental proceso para el concepto de coordenadas.

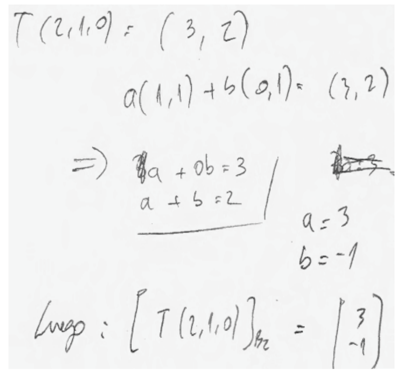


Figura 4.76.. Respuesta de E2 a la pregunta 2.

E2, en la pregunta 3, calcula correctamente mediante la transformación lineal T, la imagen del vector escrito de forma general, esto es la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; se da cuenta y así lo expresa en su escrito, que debe buscar las coordenadas de dicho vector en la base B2; sin embargo se pierde en resolver el sistema de ecuaciones lineales, y al identificar incógnitas representadas por los valores de los parámetros.

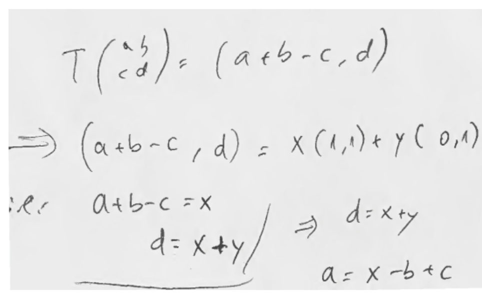
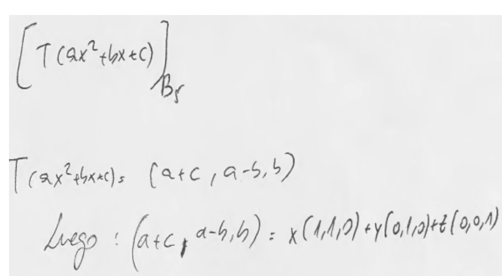


Figura 477. Respuesta de E2 a la pregunta 3.

Hasta el momento, podemos argumentar desde la DG que E2 muestra que ha rotulado un proceso del concepto de coordenadas de la imagen de un vector, y no un objeto.

En la pregunta 4 del cuestionario, E2 replica el procedimiento de la pregunta 3. En su esfuerzo, llega a determinar las coordenadas de la imagen de un vector en general, como se muestra en la figura 4.78, pero no responde a lo que la pregunta solicita, que es determinar la matriz asociada a la transformación lineal en términos de las bases dadas.



Desde APOE, E2 nos muestra que no puede hacer la generalización dada por el cuantificador, que determina que el proceso de coordenada de un vector se repite en todos los vectores de la base B_4.

$$[T(ax^2+bx+c)]_{B_5} = \begin{bmatrix} a+c \\ -c-b \\ b \end{bmatrix}_{B_5}$$

Figura4.78. Respuesta de E2 a la pregunta 4.

E2 no responde la pregunta 5.

A partir de las respuestas y los argumentos mostrados por E2 en la totalidad del cuestionario, podemos establecer desde APOE que E2 muestra una construcción de tipo acción, tal vez en tránsito a proceso, del concepto coordenadas de la imagen de un vector, y además que el proceso de coordenadas que ha construido no cuenta aún con los elementos necesarios para que pueda considerarse como un todo y hacer posible su encapsulación en el objeto coordenadas que la construcción del TMATL requiere.

Estudiante E3

E3, como muestra la figura 4.79, da respuesta a la pregunta 1 calculando la imagen del vector (2,1), mediante *T*; realiza la combinación lineal para describir las coordenadas que dispone en una matriz de coordenadas de orden 3x1.

A luz de la DG, E3 muestra una construcción mental proceso de coordenadas.

$$T(2,1) = (3,1,2)$$
$$3(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$
~~Coordenadas := (3,1,2)~~
$$[T(2,1)]_{C_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Figura 4.79. Respuesta de E3 a la pregunta 1.

En la pregunta 2, E3, como se aprecia en la figura 4.80, muestra haber interiorizado el proceso asociado al concepto de coordenada de la imagen de un vector, una concepción objeto del concepto de coordenadas de la imagen de un vector específico. Según la DG, E3 muestra una coordinación de los conceptos de combinación lineal, matriz y función.

Determine $[T(2,1,0)]_{B_2}$.

$$T(2,1,0) = (3,2)$$
$$[T(2,1,0)]_{B_2} = [(3,2)]_{B_2}$$
$$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$
$$(3,2) = (\alpha, \alpha+\beta)$$
$$3+\beta = 2$$
$$\beta = -1$$
Luego $[(3,2)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Figura 4.80. Respuesta de E3 a la pregunta 2.

E3 responde a la pregunta 3 de acuerdo a lo que se muestra en la figura 4.81, dando evidencia de poseer una construcción mental objeto del concepto coordenadas de la imagen de un vector general, puesto que coordina el procedimiento realizado para un vector específico en uno genérico.

$$\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2} = [(a+b-c, d)]_{B_2}$$

$$T[(a+b-c,d)]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ (c+d)-(a+b) \end{bmatrix}$$

Figura 4.81. Respuesta de E3 a la pregunta 3.

En la pregunta 4, E3 no logra coordinar los procesos que dan origen a la MATL, a pesar de haber mostrado una construcción objeto del concepto de coordenadas de la imagen de un vector.

$$V = 2(1,0,0,1) + 3(0,1,1,0)$$
$$V = (2,3,3,2)$$
$$T: \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \longrightarrow \langle x^2, x+1\rangle$$
$$1,0,0,1 \rightsquigarrow x^2$$
$$0,1,1,0 \rightsquigarrow$$

Figura 4.82. Respuesta de E3 a la pregunta 5.

Para finalizar, en la pregunta 5 E3 muestra en su escrito que no ha logrado construir el concepto de MATL.

Las evidencias aportadas por E3 dan cuenta de que las coordenadas de un vector son un asunto importante en la construcción de la MATL, pues E3 mostró una construcción objeto del concepto de coordenadas de la imagen de un vector cualquiera, pero según nuestro modelo no logra coordinar los conceptos de matriz y coordenada de un vector mediante el cuantificador que permite generalizar y construir el concepto MATL como proceso.

Estudiante E4

E4, como muestra la figura 4.83, responde a la pregunta 1 de la forma esperada, calculando la imagen del vector (2,1) mediante *T*, para luego disponer las coordenadas del vector imagen en una matriz de coordenadas de orden 3x1.

A luz de la DG, E4 muestra una construcción mental proceso de coordenadas.

$$T(2,1) = (3,1,2)$$
$$[T(2,1)]_{C_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Figura4.83. Produccion del estudiante E4.

En la pregunta 2, E4 presenta el argumento que se aprecia en la figura, reafirmando que muestra una concepción proceso del concepto de coordenadas.

$$T(2,1,0) = (3,2) \qquad \alpha(1,1)+\beta(0,1) =$$
$$(3,3)-(0,1) = (3,$$
$$[T(2,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Figura4.84. Produccion de E4.

E4, responde a la pregunta 3 de acuerdo a lo que se muestra en la figura 4.85.

Desde la DG, podemos decir que E4 muestra una construcción mental objeto del concepto coordenadas de la imagen de un vector, pues ha interiorizado los procesos en la construcción mostrada.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d).$$
$$\alpha(1,1)+\beta(0,1) = (a+b-c, d).$$
$$\alpha + \cancel{\beta} = a+b-c \qquad \boxed{\alpha = a+b-c}$$
$$\alpha+\beta = d \qquad \beta = d-\alpha$$
$$\boxed{\beta = d-a-b+c.}$$
$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{pmatrix}$$

Figura4.85. Escrito del estudiante E4.

En la pregunta 4, E4 muestra que ha construido una construcción objeto de la MATL, pues no sólo construye la matriz que la pregunta pide, sino que además deja por escrito la forma en que construye dicha matriz.

Desde la DG, su forma de proceder corresponde a la generalización dada por el cuantificador, que determina que el proceso de coordenada de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B_4. Posteriormente, E4 coordina ese proceso con el de matriz, para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante T, en una matriz que se identifica con el proceso MATL

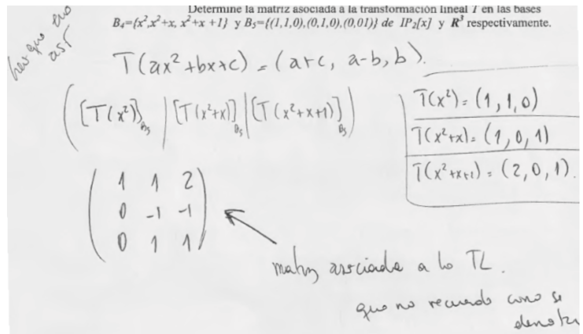


Figura 4.86. Escrito del estudiante E4.

El estudiante E4 aplica el TMATL correctamente en la pregunta 5 (figura 4.87) y reconoce claramente que es una función.

Desde APOE, E4 muestra una construcción del TMATL objeto, dado que claramente puede hacer acciones sobre dicho objeto.

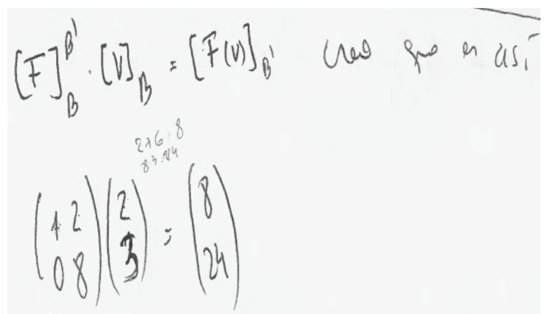


Figura 4.87. Escrito del estudiante E4.

A partir de los argumentos mostrados por E4 en la totalidad del cuestionario, podemos decir que los elementos dispuestos en la DG dan cuenta de su construcción objeto del TMATL.

Estudiante E5

En la pregunta 1, E5, como muestra la figura 4.88, realiza el cálculo de la imagen del vector, pero no da cuenta de sus coordenadas. Una interpretación prematura sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto coordenada de un vector.

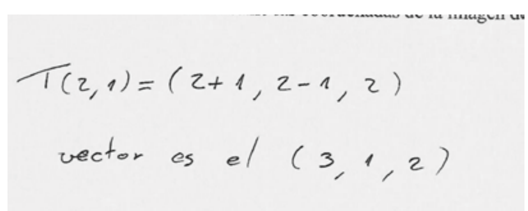
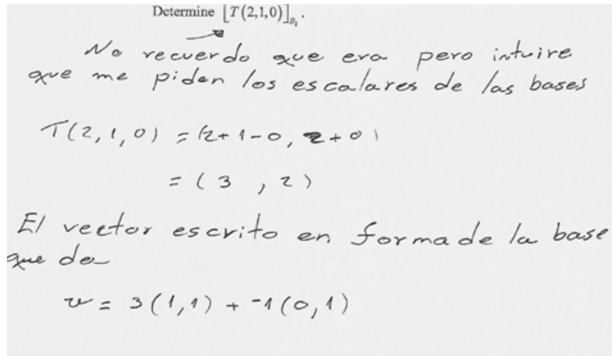


Figura 4.88. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante E5.

En la pregunta 2, E5 escribe, como muestra la figura 4.89, que “no recuerda” la notación o el rotulo del concepto de coordenadas de la imagen de un vector; a pesar de su declaración realiza el cálculo de la imagen del vector pedido y escribe este resultado como combinación lineal de la base B_2. En esta pregunta muestra evidencias más contundentes de que posee una construcción mental acción del concepto coordenadas de un vector.


Determine $\lfloor T(2,1,0) \rfloor_{B_2}$.

No recuerdo que era pero intuire que me piden los escalares de las bases

$T(2,1,0) = (2+1-0, 2+0)$

$= (3, 2)$

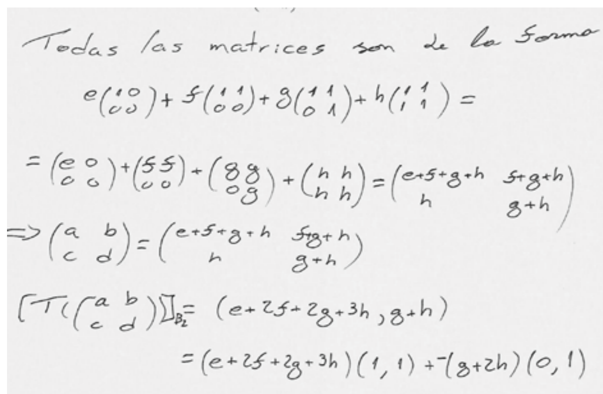
El vector escrito en forma de la base que da

$v = 3(1,1) + {}^{-}1(0,1)$

Figura 4.89. Escrito del estudiante E5.

E5, en la pregunta 3, como se ve en la figura 4.90, dice que el cálculo de coordenadas en un vector general se le dificultó por completo.
A la luz de la DG, posee una construcción mental acción del concepto coordenadas de un vector.

No responde a las preguntas 4 y 5.


Todas las matrices son de la forma

$e\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}e&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f&f\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g&g\\0&g\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}h&h\\h&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e+f+g+h & f+g+h\\ h & g+h\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e+f+g+h & f+g+h\\ h & g+h\end{pmatrix}$

$[T(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})]_{B_2} = (e+2f+2g+3h, g+h)$

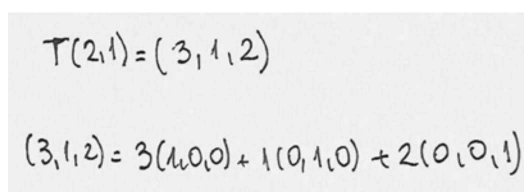
$= (e+2f+2g+3h)(1,1) + {}^{-}(g+2h)(0,1)$

Figura 4.90. Trabajo de E5.

E5 muestra una construcción acción del concepto de coordenadas de un vector, pero una concepción proceso del concepto imagen de un vector mediante la TL no le alcanza para construir la MATL.

Estudiante E6

En la pregunta 1, E6, como muestra la figura 4.110, realiza el cálculo de la imagen del vector; por otra parte, expresa esta imagen como combinación lineal de la base C_3, pero no da cuenta de sus coordenadas. Una interpretación prematura sobre sus construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto coordenada de un vector.


$T(2,1) = (3,1,2)$

$(3,1,2) = 3(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

Figura 4.91. Respuesta de E6.

En la pregunta 2, el estudiante replica los argumentos usados en la pregunta anterior; esta vez debe realizar los cálculos de la combinación lineal, como muestra la figura. Pero no deja en claro su concepto de coordenadas de la imagen del vector pedido. A la luz de la DG, aunque prematuro, muestra una construcción acción del concepto de coordenadas de un vector.

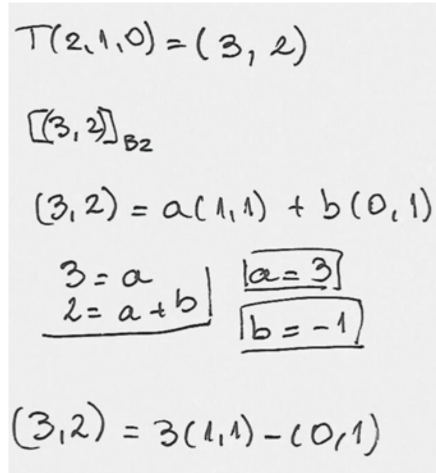


Figura 4.92. Escrito del estudiante E6

En la pregunta 3, E6 replica sus procedimientos, como muestra la figura, pero el concepto de coordenada sigue postergado. Las evidencias escritas dan cuenta de coordinación entre los procesos de cálculo de imágenes de vectores y de combinación lineal, pero no hay evidencias de construcción del concepto de coordenada de un vector.

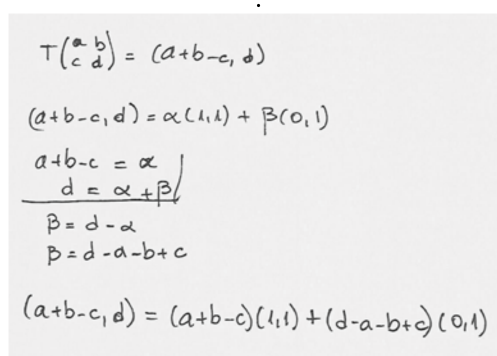


Figura 4.93. Cálculos realizados por E6.

E6 no responde a las preguntas 4 y 5.

Como se muestra en el desarrollo del cuestionario en su interpretación matricial, E6 da evidencias de tener una construcción mental acción para el concepto de coordenadas. Lo interesante es que podemos afirmar que demuestra construcciones mentales proceso para los conceptos de imagen de un vector y combinación lineal. Por otra parte, sus construcciones y mecanismos mentales no alcanzan para construir la MATL, como era de esperarse según lo dispuesto en la DG.

Estudiante E7

E7 no responde el cuestionario en su interpretación matricial.

Estudiante E8

En la pregunta 1, E8 realiza el cálculo de la imagen del vector, identificando la imagen por medio de la asignación de una flecha; por otra parte, expresa esta imagen como combinación lineal de la base C_3, pero no da cuenta de sus coordenadas. Una interpretación prematura sobre sus

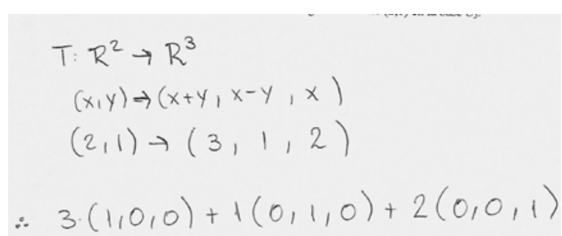


Figura 4.94. Respuesta de E8.

construcciones mentales indicaría una construcción acción del concepto coordenada de un vector

En la pregunta 2, E8 calcula la imagen del vector (2,1,0); la imagen obtenida mediante la TL es interpretada como una coordenada, por lo que reescribe en términos de la base B_2, entregando como respuesta dicha pregunta, como se muestra en la figura 4.95.

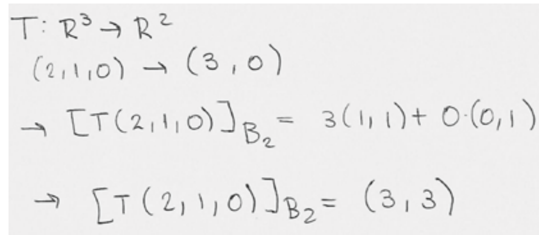


Figura 4.95. Cálculos realizadis por E8.

A la luz de la DG, aunque prematuro, muestra una construcción acción del concepto de coordenadas de un vector.

En la pregunta 3, E8 replica el procedimiento anterior, como se muestra en la figura 4.96, dejando claro que no coordina el proceso de construcción de coordenadas de imágenes de vectores.

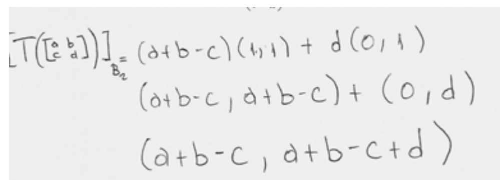


Figura 4.96. Respuesta de E8 a la pregunta.

A la luz de la DG, aunque prematuro, muestra una construcción acción del concepto de coordenadas de un vector.

E8 no da respuesta a las preguntas 4 y 5. No hay evidencia de construcciones ni mecanismos mentales puestos en juego

Estudiante E9

En la pregunta 1, E9 entrega una respuesta adecuada, calcula la imagen del vector *(2,1)* por medio de la transformación lineal *T*; escribe y simboliza la coordenada solicitada en términos de la imagen como matriz (figura 4.978).

Desde APOE sustentamos que E9 muestra una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector.

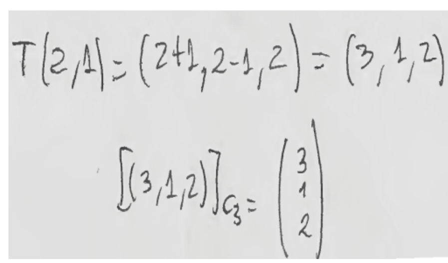


Figura 4.97. Respuesta de E9.

El estudiante E9 realiza los cálculos de la imagen del vector *(2,1,0)* en la pregunta 2, y determina las coordenadas de este vector en la base B_2, con un procedimiento adecuado, a pesar de un error de cálculo en la combinación lineal (figura 4.98).

A luz de la DG, podemos decir que E9 muestra una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector, en vías del proceso de representarla en términos de una matriz de coordenadas.

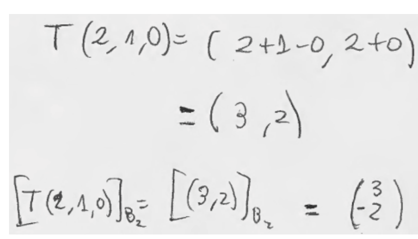


Figura4.98. Respuesta que realiza E9.

En la pregunta 3, E9 responde lo solicitado (figura 4.99) calculando las coordenadas de la imagen de un vector, escrito en forma general.
Desde APOE, E9 muestra una construcción mental objeto del concepto coordenadas de la imagen de un vector.

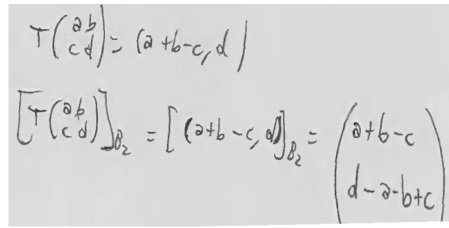


Figura 4.99. Respuesta de E9.

Desde el análisis de estas tres preguntas, podemos decir que E9 tiene una construcción mental objeto del concepto coordenadas de la imagen de un vector, y que ha mostrado en sus argumentos escritos que es capaz de llevar a cabo una desencapsulación de dicho objeto.

En la pregunta 4, E9 muestra (figura 4.100) la generalización dada por el cuantificador, que determina que el proceso de coordenada de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B_4, para así coordinar ese proceso con el de matriz, para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante T, en una matriz que se identifica con el objeto MATL.
Desde APOE, E9 muestra que ha coordinado los siguientes procesos: el proceso de coordenada de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B_4, con el proceso matriz, para obtener como resultado un ordenamiento de las imágenes mediante T.

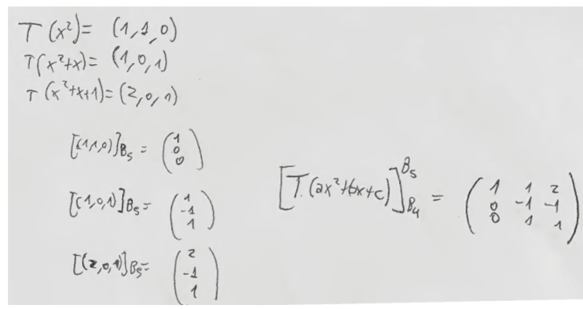


Figura 4.100. Respuesta que realiza E13.

E9 ha conmutado las matrices (figura 4.101) que realmente tiene que multiplicar, esto es, ha escrito $[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}}\,[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{B}'}$. Esto puede interpretarse como que no ha encapsulado el objeto MATL como objeto o que ha encapsulado un objeto que no es correcto.

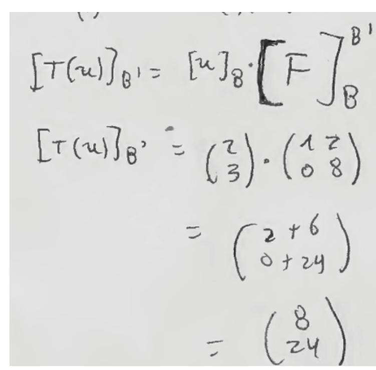
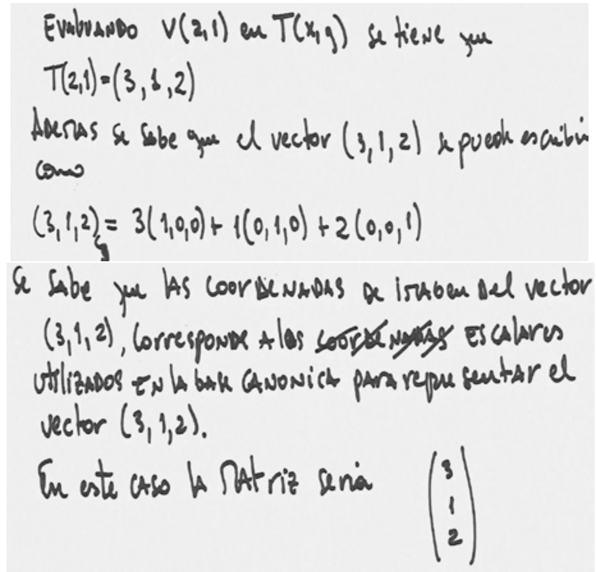


Figura 4.101. Respuesta que realiza E9.

Estudiante E10

E10, en la primera pregunta del cuestionario, hace una descripción detallada para la construcción de las coordenadas de la imagen de un vector específico, como se muestra en la figura 4.102.

Da evidencias escritas de una construcción mental proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector específico.



Evaluando $V(2,1)$ en $T(x,y)$ se tiene que

$T(2,1)=(3,1,2)$

Además se sabe que el vector $(3,1,2)$ se puede escribir como

$(3,1,2)= 3(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1)$

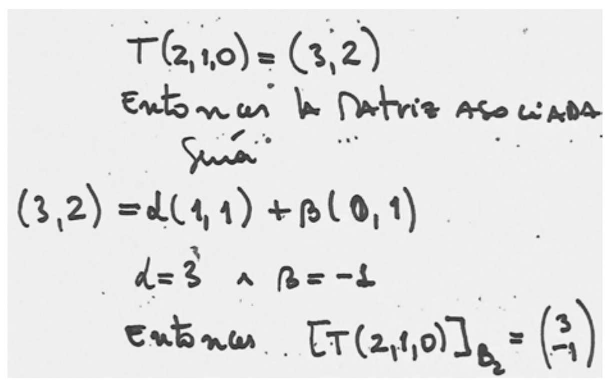
Se sabe que las coordenadas de imagen del vector $(3,1,2)$, corresponde a los ~~coordenadas~~ escalares utilizados en la base canónica para representar el vector $(3,1,2)$.

En este caso la matriz sería $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

Figura 4.102. Respuesta que realiza el E10.

En la pregunta 2, E10 realiza los cálculos de la imagen del vector *(2,1,0)*, determina las coordenadas de este vector en la base B_2, como se muestra en la figura 4.124.

A luz de la DG, podemos decir que E10 muestra una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector.



$T(2,1,0)=(3,2)$

Entonces la matriz asociada sería

$(3,2)=\alpha(1,1)+\beta(0,1)$

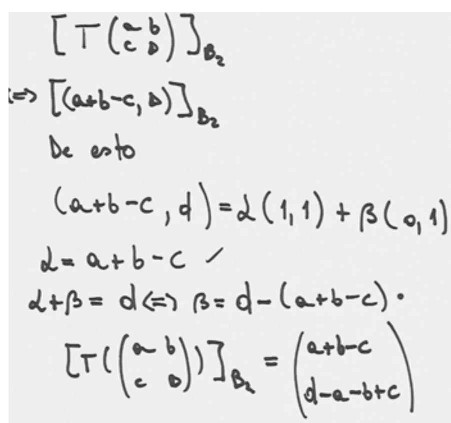
$\alpha=3 \wedge \beta=-1$

Entonces $[T(2,1,0)]_{B_2}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Figura 4.103. Respuesta de E10

En la pregunta 3, E10 responde lo solicitado (figura 4.104), calculando las coordenadas de la imagen de un vector escrito en forma general.

Desde APOE, E10 muestra una construcción mental objeto del concepto coordenadas de la imagen de un vector.



$\left[T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]_{B_2}$

$\Leftrightarrow [(a+b-c,d)]_{B_2}$

De esto

$(a+b-c,d)=\alpha(1,1)+\beta(0,1)$

$\alpha=a+b-c$ ✓

$\alpha+\beta=d \Leftrightarrow \beta=d-(a+b-c)$.

$\left[T\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}a+b-c\\ d-a-b+c\end{pmatrix}$

Figura 4.104. Respuesta de E10

E10 no responde a las preguntas 4 y 5.

E10 es otra evidencia de que para construir la MATL no basta con tener una construcción mental objeto del concepto coordenada de la imagen de un vector. Desde la DG podemos argumentar que E10 no logra construir la matriz porque no ha coordinado mediante el cuantificador que ayuda a generalizar el concepto de coordenada, con las construcciones mentales proceso de los conceptos de matriz y coordenada de un vector.

Estudiante E11

En la pregunta 1 del cuestionario, E11 calcula la imagen del vector *(2,1)*, obteniendo el resultado que muestra la figura 4.105.

A la luz de la DG E11, muestra una construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector *(2,1)*, pues calcula la imagen de dicho vector, coordina el concepto de coordenada de la imagen de un vector con el concepto de combinación lineal, pero no da respuesta a la pregunta.

E11, como muestra la figura 4.106, sólo realiza el cálculo de la imagen del vector (2,1,0), no calcula sus coordenadas.

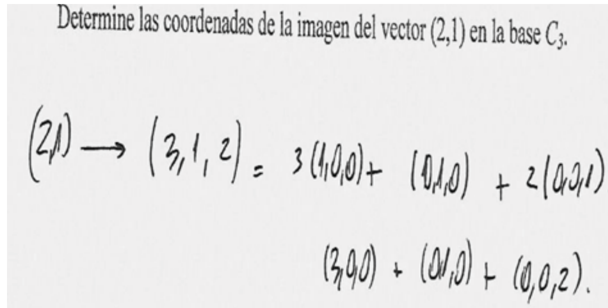


Figura 4.105. Respuesta que realiza E11

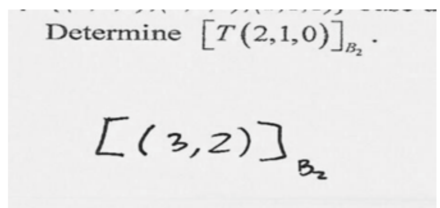


Figura 4.106. Cálculo de la imagen.

E11 no deja registros escritos en el resto del cuestionario, por lo que no tenemos información. Sobre lo que está registrado podemos decir que posee una construcción mental proceso del concepto de función.

Estudiante E12

El estudiante E12 responde a la pregunta 1 reescribiendo las bases C_2 y C_3, calcula la imagen del vector *(2,1)* y escribe en términos de la base C_3; la escritura no es correcta. A la luz de la DG E12, muestra una construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector, puesto que coordina los procesos de función matriz mediante la combinación lineal.

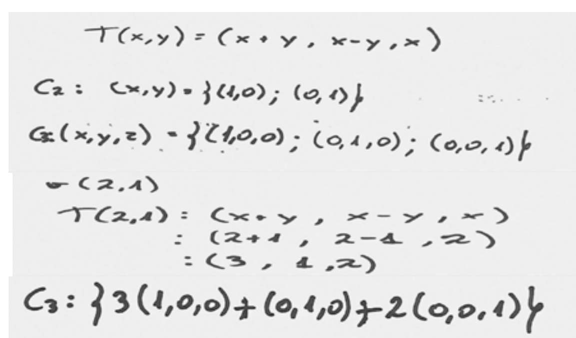
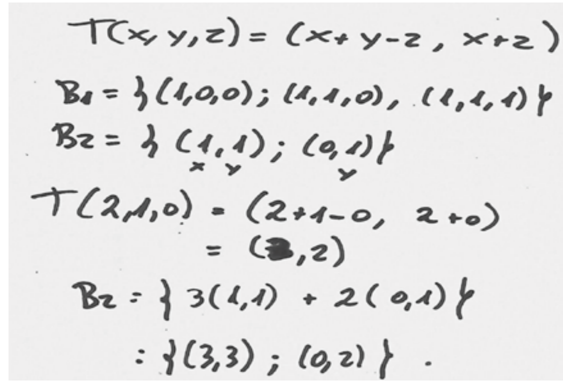


Figura 4.107. Respuesta de E12.

E12 responde a la pregunta 2 según figura 4.108; repite el procedimiento usado en la pregunta 1, esto es, reescribe las bases dadas, calcula la imagen del vector *(2,1,0)*, interpreta la imagen por medio de la TL como coordenada, y así clarifica la respuesta anterior.
A la luz de la DG, E12 muestra una construcción mental acción del concepto coordenada de la imagen del vector, en la cual ha coordinado con el concepto de combinación lineal.



$T(x,y,z) = (x+y-z,\ x+z)$

$B_1 = \{(1,0,0); (1,1,0), (1,1,1)\}$

$B_2 = \{(1,1); (0,1)\}$

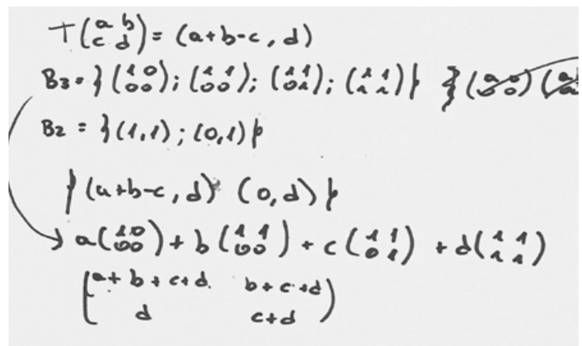
$T(2,1,0) = (2+1-0,\ 2+0) = (3,2)$

$B_2 = \{3(1,1) + 2(0,1)\}$

$= \{(3,3); (0,2)\}$.

Figura 4.108. Respuesta que realiza el E12.

E12, como se muestra en la figura 4.109, al dar respuesta a la pregunta 3, repite su procedimiento, el cual muestra una construcción acción del concepto de coordenada de un vector. Ha coordinado mal con el concepto de combinación lineal.



$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c,\ d)$

$B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$B_2 = \{(1,1); (0,1)\}$

$\{(a+b-c,\ d)\ (0,d)\}$

$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+b+c+d & b+c+d \\ d & c+d \end{pmatrix}$

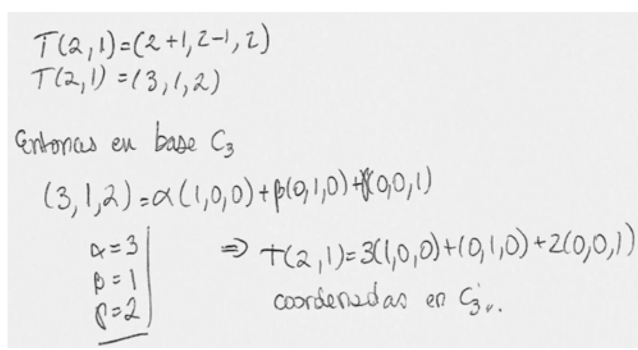
Figura 4.109. Respuesta deE12.

E12 no responde las preguntas 4 y 5.

En el caso de este estudiante, podemos decir que la construcción mental acción no alcanza para dar respuesta a las preguntas MATL; en otras palabras, no construye.

Estudiante E13

En la pregunta 1, E13 responde calculando la imagen del vector, y escribe dicha imagen como combinación lineal de la base C_3, como se muestra en la figura 4.110.
En su escrito da las primeras evidencias de poseer una construcción proceso del concepto de coordenadas de la imagen de un vector, pues coordina los conceptos de función y combinación lineal.



$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2)$

$T(2,1) = (3,1,2)$

Entonces en base C_3

$(3,1,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ $\Rightarrow T(2,1) = 3(1,0,0) + (0,1,0) + 2(0,0,1)$ coordenadas en C_3.

Figura 4.110. Respuesta de E13.

En la pregunta 2, E13 calcula la imagen del vector (2,1,0) mediante la TL, para posteriormente buscar sus coordenadas, como se muestra en la figura 4.111.

E13 muestra una construcción proceso del concepto coordenadas de un vector específico, pues coordina los procesos de función con el de base mediante la combinación lineal.

$T(2,1,0) = (2+1-0, 2) = (3,2)$

$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$\alpha = 3$
$\alpha + \beta = 2$

$\alpha = 3$
$\beta = 2-3$

$\alpha = 3 \wedge \beta = -1$

$[T(2,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{(1,1)(0,1)}$

creo que esto no se escribía así, pero recuerdo que los coeficientes se escribían en una matriz.

$T(2,1,0) = 3(1,1) - 1\cdot(0,1)$

Figura 4.111. Respuesta que realiza E13.

En la pregunta 3, E13 presenta una serie de cálculos, como se muestra en la figura 4.112; realiza el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior, pero no logra organizar la información para dar respuesta, y comenta que "no recuerda cómo se hacía".

Desde la DG propuesta podemos decir que su construcción mental para el concepto de coordenadas en un vector general es proceso, que no ha sido encapsulado.

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$

$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$\alpha = a+b-c$
$\alpha + \beta = d$

$\alpha = a+b-c$
$\beta = d-a-b+c$ $\iff \left(\begin{array}{cccc|c} a & +b & -c & +0 & \alpha \\ -a & -b & +c & +d & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{F(1)_{21}}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & 0 & \alpha \\ -a & -b & c & d & \beta \end{array}\right)$ (no se escribía así, arriba me equivoqué)

$\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & d & \alpha+\beta \end{array}\right) \xrightarrow{F(-1)_{12}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & -d & \beta \\ 0 & 0 & 0 & d & \alpha+\beta \end{array}\right)$

Al tener más incógnitas que ecuaciones no tiene una única solución o sino no me acuerdo cómo se hacía.

Figura 4.112. Respuesta que realiza el E13.

E13 realiza cálculos de combinaciones lineales desde la imagen dada por la definición de la TL, pero no logra construir la MATL, pues está dando las coordenadas de un vector general. En la figura 4.113 se da cuenta de la situación.

A la luz de la teoría, E13 posee una construcción proceso del concepto de coordenada de un vector, que no alcanza para construir la MATL.

$T(ax^2+bx+c) = (a+c, a-b, b)$

$(a+c, a-b, b) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$\alpha = a+c$
$\beta = a-b$
$\gamma = b$

$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & c & \alpha \\ a & -b & 0 & \beta \\ 0 & b & 0 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow{F(1)_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & c & \alpha \\ a & 0 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & b & 0 & \gamma \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F(-1)_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & c & \alpha-\beta-\gamma \\ a & 0 & 0 & \beta+\gamma \\ 0 & b & 0 & \gamma \end{array}\right)$.

Matriz asociada: era la matriz con los coeficientes ~~[illegible]~~ reales con el que se multiplicaba la base para buscar las coordenadas.

Entonces $\begin{pmatrix} a+c \\ a-b \\ b \end{pmatrix}_{B_S}$

Figura 4.113. cálculos realizados por E13.

En la pregunta 4, E13, como muestra la figura 4.114, realza cálculos de combinaciones lineales tratando de descifrar la coordenadas del vector dado $[v]_B = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$. Y escribe finalmente que no recuerda cómo se hace.

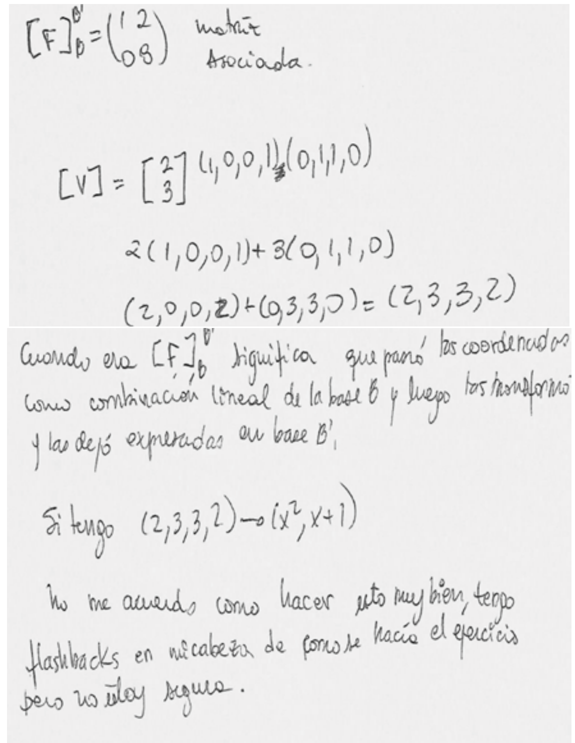


Figura 4.114. Respuesta de E13 a la pregunta.

No responde a pregunta 5.

Podemos pensar que la construcción de coordenadas de vectores o imágenes de vectores no alcanzan para construir la MATL.

Estudiante E14

E14, en la pregunta 1, calcula la imagen del vector (2,1) mediante la transformación lineal dada, y reconoce la necesidad de escribir el vector resultante como combinación lineal de la base del espacio de llegada (figura 4.115).

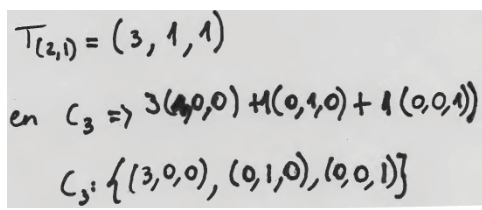


Figura 4.115. Trabajo realizado por E14.

Interpretando desde la DG, podemos decir que E14 es capaz de hacer las acciones y posiblemente el proceso correspondientes a escribir una combinación lineal, pero no es capaz de encontrar las coordenadas de un vector descrito en una base dada.

En la pregunta 2, el trabajo de E14 pone en evidencia que la coordenada de la imagen de un vector en una base dada es una combinación lineal (figura 4.116).

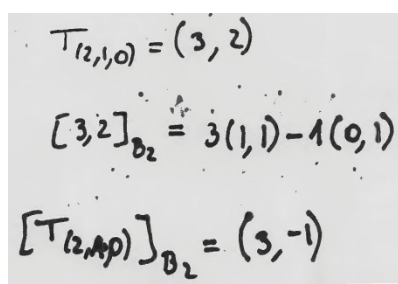


Figura 4.116. Respuesta que realiza el E14.

Desde la DG, E14 muestra que no ha construido el concepto de coordenada de un vector.

E14 escribe como primera respuesta a la pregunta 3 un cálculo de imagen de un vector escrito en su forma general; posteriormente anota un comentario (figura 4.117) que da cuenta de que no ha construido el concepto de coordenada de la imagen de un vector, escrito en su forma general; por ende, no puede construir la matriz de coordenadas.
A la luz de la DG, esto muestra una vez más que E14 no ha construido el concepto de coordenada de un vector.

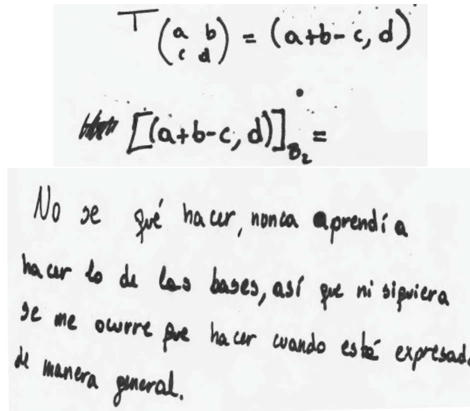


Figura 4.117. Respuesta de E14.

E14 no responde las preguntas 4y5.
El análisis de E14 da cuenta de que el estudiante no puede construir la MATL porque no ha construido el concepto de coordenadas de vectores como un proceso.

Estudiante E15

E15 responde a la pregunta como se muestra en la figura 4.118
Muestra una construcción mental proceso del concepto coordenada de un vector específico.

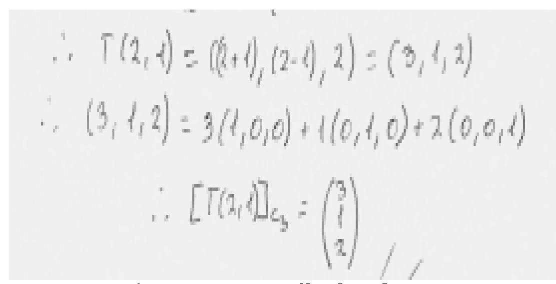


Figura 4.118. Cálculos de E15.

E15 muestra una construcción proceso del concepto coordenada de un vector específico, como muestra la figura 4.119.

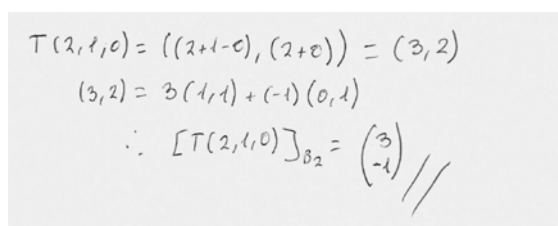


Figura 4.119. Respuesta de E15.

E15 responde a la pregunta calculando la imagen del vector general entregado, calcula sus coordenadas, como se muestra en la figura 4.115.
Podemos interpretar desde la DG que el estudiante pareciera mostrar una construcción objeto del concepto de coordenada de la imagen de un vector, pues ha encapsulado los procesos que la construyen.

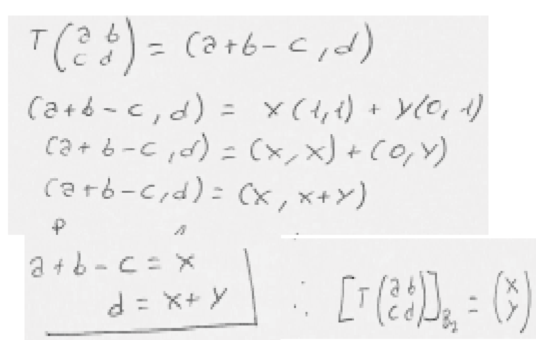


Figura 4.120. Respuesta a pregunta 3 de E15.

E15 en la pregunta 4 dice no recordar cómo construir la MATL. En la figura 4.121 se muestra su explicación. Y no responde a la pregunta 5.

No recuerdo como encontrar la matriz asociada a una T.L.

Figura 4.121. Escrito de E14.

E15 es otro ejemplo de un estudiante que a pesar de tener una construcción mental objeto del concepto de coordenada de la imagen de un vector, no puede construir la MATL, y menos recordar su aplicación en el TMATL.

Estudiante E16

E16, como se muestra en la figura 4.122, responde a la pregunta 1 mostrando una construcción proceso del concepto coordenada de la imagen de un vector.

$$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2)$$
$$= (3, 1, 2)$$
$$[T(2,1)]_{C_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Figura 4.122. Respuesta que realiza el E16.

En la pregunta 2, E16 responde a la pregunta calculando la imagen del vector (2,1,0) para posteriormente encontrar las coordenadas en la base B_2.

Podemos interpretar desde la DG que el estudiante posee una construcción proceso del concepto coordenada de la imagen de un vector específico.

$$T(2,1,0) = (2+1-0, 2+0)$$
$$= (3,2)$$
$$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$
$$\alpha = 3$$
$$\alpha + \beta = 2 \quad \therefore \beta = -1$$
luego $[T(2,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Figura 4.123. Cálculos realizados por E16.

El estudiante E16 responde a la pegunta 3 como se muestra en la figura 4.124

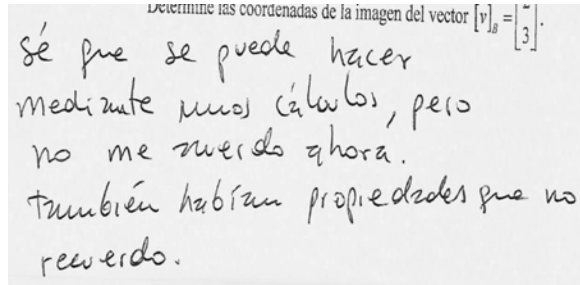
Podemos interpretar que muestra una construcción mental objeto del concepto coordenada de la imagen de un vector general.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$$
$$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$
$$\alpha = a+b-c$$
$$\alpha + \beta = d \quad \therefore \beta = d-a-b+c.$$
$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{pmatrix}$$

no recuerdo para que servia B_3.

Figura 4.124. Respuesta de E16.

E16 no responde a las preguntas 4 y 5. Dice que no recuerda. En figura 4.125 aparece parte su escrito.


Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} \cdot \\ 3 \end{bmatrix}$.

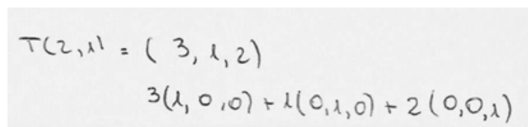
Sé que se puede hacer mediante unos cálculos, pero no me acuerdo ahora.
También habían propiedades que no recuerdo.

Figura 4.124. Justificación de E16.

E16 es evidencia de que poseer una construcción objeto del concepto coordenada de un vector o de la imagen de un vector no alcanza para construir la MATL.

Estudiante E17

E17 responde la pregunta 1, como muestra la figura 4.125, realiza el cálculo de la imagen y describe el vector resultante como combinación lineal de la base C_2. Desde la DG, muestra una construcción acción del concepto de coordenada.


$T(2,1) = (3,1,2)$

$3(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

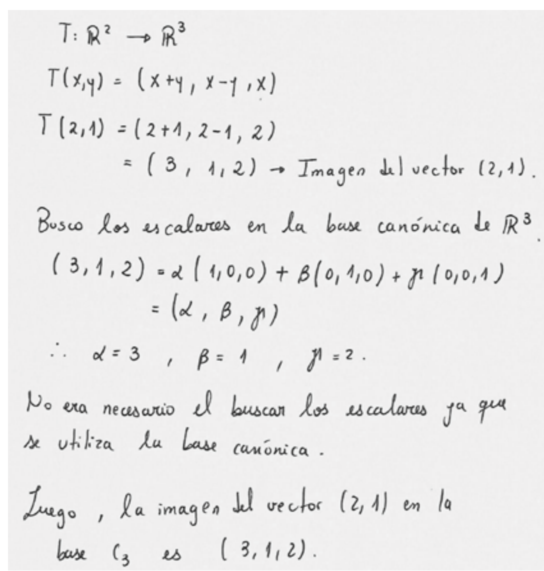
Figura 4.125. Respuesta de E14.

E17 no responde el resto de cuestionario, en la interpretación matricial.

Estudiante E18

En la pregunta 1, E18 hace un relato detallado de sus cálculos, como se muestra en la figura 4.126.

Muestra una construcción proceso del concepto coordenada de la imagen de un vector, puesto que coordina los procesos de matriz y función mediante la combinación lineal.


$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (x+y, x-y, x)$

$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2)$

$= (3, 1, 2) \to$ Imagen del vector $(2,1)$.

Busco los escalares en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$(3,1,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$= (\alpha, \beta, \gamma)$

$\therefore \alpha = 3, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2.$

No era necesario el buscar los escalares ya que se utiliza la base canónica.

Luego, la imagen del vector $(2,1)$ en la base C_3 es $(3,1,2)$.

Figura 4.126. Respuesta y explicación que realiza E18.

En la pregunta 2, E18 nuevamente realiza un relato detallado, como consigna la figura, mostrando una construcción objeto del concepto coordenada de un vector específico. En este caso no sólo coordina los procesos citados anteriormente: además etiqueta bajo el rótulo adecuado el concepto de coordenada. Ver figura 4.127.

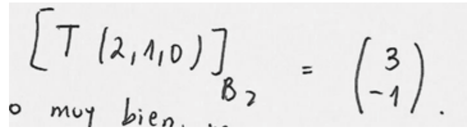


Figura 4.127. Respuesta de E18.

E18, en la pregunta 3, realiza los cálculos para obtener las coordenadas del vector general, como se muestra en la figura 4.128.

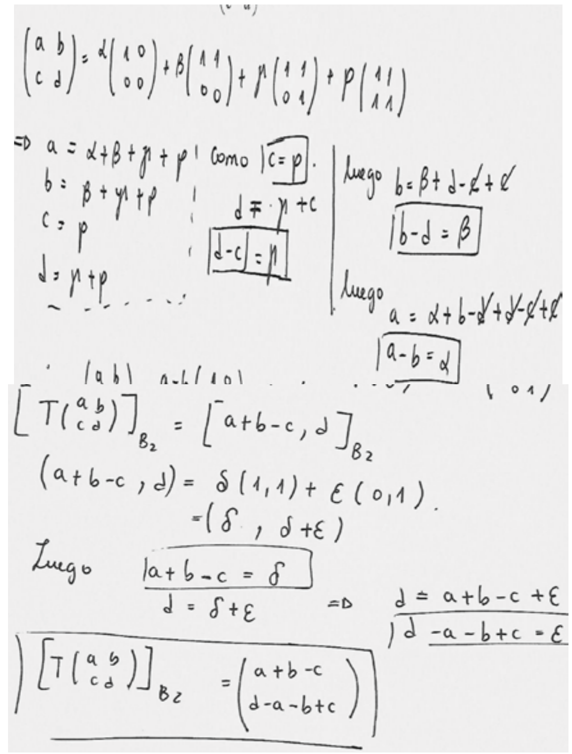


Figura 4.128. Respuesta y detalle de sus cálculos.

E18 muestra una construcción objeto del concepto coordenada de la imagen de un vector general, puesto que coordina los procesos de los conceptos de matriz función, mediante la combinación lineal.

E18 no responde la pregunta 4.

E18 responde la pregunta 5 haciendo alusión al TMTL, realiza los cálculos coordinados por el producto matricial. Figura 4.129. Muestra una construcción proceso del concepto TMATL.

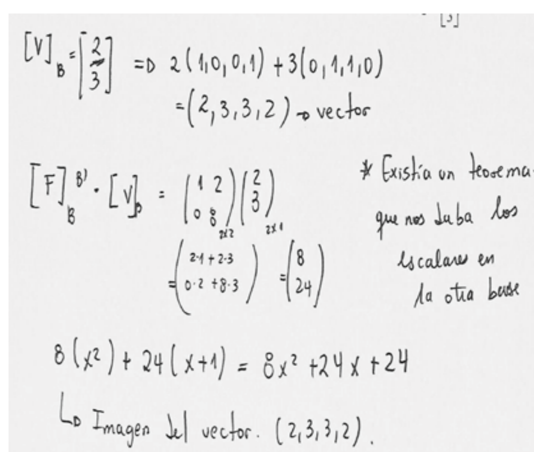
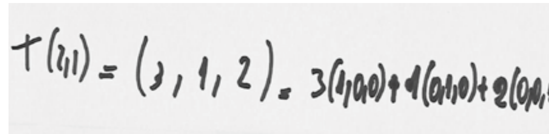


Figura 4.129. Cálculos realizados por E18.

Estudiante E19

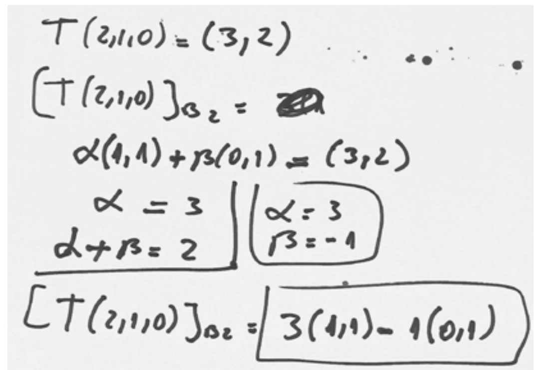
En la pregunta 1, E19, como se muestra en la figura 4.130, realiza el cálculo de la imagen, y esta imagen la escribe en combinación lineal de la base C_3. Muestra una construcción acción del concepto de coordenada de un vector.



$T(2,1) = (3,1,2) = 3(1,0,0)+1(0,1,0)+2(0,0,1)$

Figura 4.130. Respuesta E19 a la pregunta 1 de la interpretación matricial.

E19, para dar respuesta a la pregunta 2, calcula la imagen del vector (2,1,0), y a la imagen de éste la escribe en términos de sus coordenadas, como se muestra en la figura 4.131.



$T(2,1,0) = (3,2)$

$[T(2,1,0)]_{B_2} =$

$\alpha(1,1)+\beta(0,1) = (3,2)$

$\alpha = 3$, $\alpha+\beta = 2$; $\alpha = 3$, $\beta = -1$

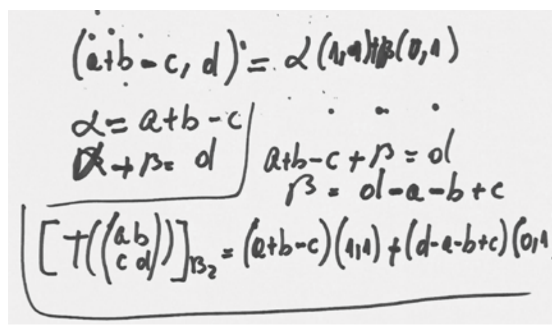
$[T(2,1,0)]_{B_2} = \boxed{3(1,1) - 1(0,1)}$

Figura 4.131. Respuesta que realiza E19.

A la luz de la DG, E19 podría estar mostrando una construcción proceso del concepto de coordenadas de la imagen de un vector, pues coordina en forma adecuada mediante la combinación lineal los conceptos de base e imagen de un vector específico.

E19, como se muestra en la figura 4.132, no logra responder a la pregunta en forma correcta, pues la pregunta pide las coordenadas de un vector general y entregar de una cierta forma sus coordenadas.

E19 muestra una construcción proceso del concepto coordenada de la imagen de un vector.



$(a+b-c, d) = \alpha(1,1)+\beta(0,1)$

$\alpha = a+b-c$, $\alpha+\beta = d$; $a+b-c+\beta = d$, $\beta = d-a-b+c$

$\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2} = (a+b-c)(1,1)+(d-a-b+c)(0,1)$

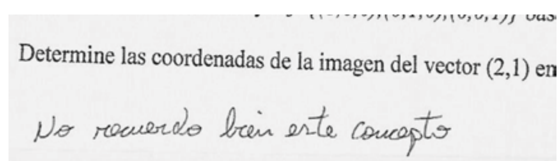
Figura 4.132. Cálculos hechos por E19.

El estudiante E19 no responde a las preguntas 4 y 5.

La interpretación de todas las respuestas del estudiante E19, es que posee una construcción mental acción del concepto de coordenada, lo que según la DG no le permite construir la MATL.

Estudiante E20

El estudiante E20 escribe en el cuestionario completo que no recuerda bien los conceptos involucrados, como se muestra en la figura 4.133.



Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en

No recuerdo bien este concepto

Figura 4.133. Escrito que da como respuesta E20.

E20 no aporta información interpretable por teoría, en esta interpretación del concepto.

4.1.2.1 RESUMEN DE LOS DATOS.

Para mostrar en forma resumida los resultados obtenidos de las producciones escritas de los estudiantes, con ejemplos de cada caso de estudio, hemos construido la tabla 4.2, que provee la información sobre quiénes muestran presencia o ausencia de una determinada construcción o mecanismo mental previsto en la DG.

Tabla 4.2. Resumen de la recogida de datos.

Pregunta / Estudiante	P1 Construcción mental del concepto coordenada de la imagen de un vector específico	P2 Construcción mental del concepto coordenadas mediante la Transformación Lineal, en un vector específico	P3 Construcción mental del concepto coordenadas mediante la Transformación Lineal, en un vector cualquiera	P4 Construcción mental del concepto MATL	P5 Construcción mental del Concepto MATL como función
E1	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E2	Acción	Proceso	Proceso	Acción	No Responde
E3	Proceso	Objeto	Objeto	Acción	Acción
E4	Proceso	Proceso	Objeto	Proceso	Objeto
E5	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E6	Acción	Acción	Proceso	No Responde	No Responde
E7	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E8	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E9	Proceso	Proceso	Objeto	Objeto	Proceso
E10	Proceso	Proceso	Objeto	No Responde	No Responde
E11	Acción	Acción	No Responde	No Responde	No Responde
E12	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E13	Proceso	Proceso	Proceso	Acción	No Responde
E14	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E15	Proceso	Proceso	Objeto	No Responde	No Responde
E16	Proceso	Proceso	Objeto	No Responde	No Responde
E17	Proceso	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E18	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	Objeto
E19	Acción	Proceso	Proceso	No Responde	No Responde

E20	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde

4.1.2.2 CONCLUSONES SOBRE LA PRIMERAS EVIDENCIAS PARA LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL DEL CONCEPTO TL.

Los datos obtenidos dan evidencias sobre las construcciones y mecanismos mentales para modelar el aprendizaje del TMATL, esto es, la interpretación matricial del concepto TL. Destacan la construcción mental objeto del concepto coordenadas del vector y la coordinación entre los procesos: el proceso de coordenada de un vector que se repite en todos los vectores de la base ordenada del espacio dominio de la transformación, con el proceso matriz, para obtener como resultado un ordenamiento de las imágenes mediante la transformación. Acerca del teorema, las evidencias obtenidas dan cuenta desde el carácter del modelo DG, levantando desde allí las siguientes conclusiones.

No construir el concepto de coordenadas de un vector, imposibilita la construcción de la matriz; un ejemplo de ello es E14. Más aún, el trabajo del estudiante E14 pone de manifiesto que el hecho de haber construido la combinación lineal como una concepción proceso no garantiza construir el concepto de coordenadas de un vector.

Asimismo, la determinación de las coordenadas de un vector no alcanza para construir la MATL, como muestra el trabajo del estudiante E2.

Según lo dispuesto en la DG, la dificultad que muestran los informantes dispuestos en el caso de estudio está en que no han construido la coordinación entre el proceso que permite escribir estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base del espacio dominio de *T*, con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas.

Por otra parte, la construcción de la MATL como objeto no es garantía de haber construido la relación $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$ que establece el TMATL como un objeto. Un ejemplo de ello es el trabajo que nos ha mostrado E9.

En general, podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son fundamentalmente las siguientes: la construcción objeto del concepto de coordenadas de un vector, la construcción objeto de la MATL y el reconocimiento de MATL como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada dio cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TMATL.

4.1.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

A continuación presentamos los resultados obtenidos del análisis de los datos, o análisis a posteriori de los estudiantes del caso en la interpretación geométrica del concepto TL.

Estudiante E1

En la pregunta 1 del cuestionario, E1 muestra que podría estar coordinando la noción de vector y de coordenada en el plano (figura 4.134) mediante la combinación lineal.

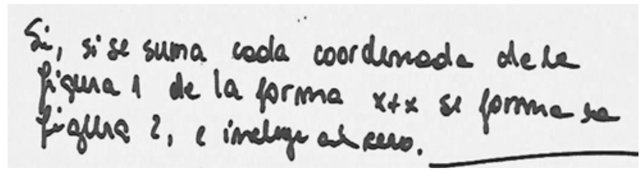

Sí, si se suma cada coordenada de la figura 1 de la forma x+x se forma la figura 2, e involucra al cero.

Figura 4.134. Respuesta de E1.

E1, para dar respuesta a la pregunta 2, recure al argumento de la combinación lineal, por lo que muestra una construcción mental proceso de los conceptos de colinealidad, combinación lineal y función.

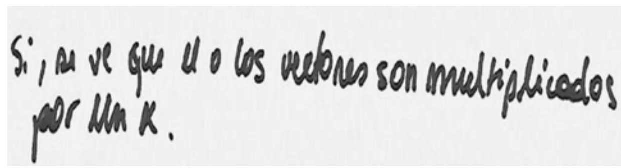

Sí, se ve que u o los vectores son multiplicados por un k.

Figura 4.135. Respuesta de E1 a la pregunta 2.

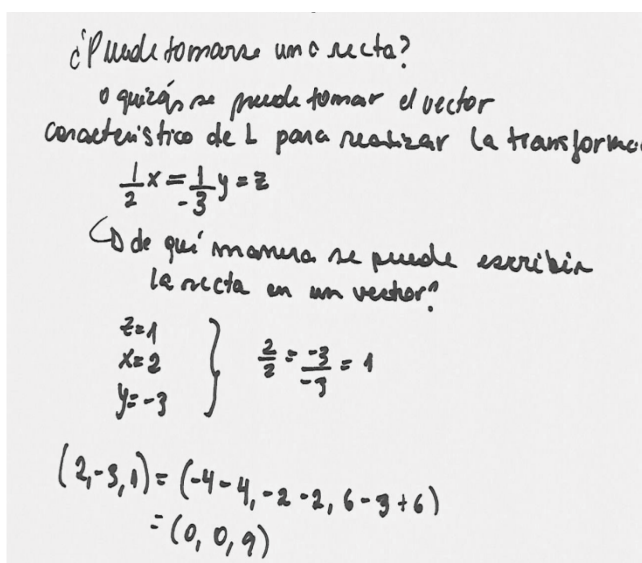
En la pregunta 3 no responde, y en la 4 corrige un dato de la pregunta 1, por lo que no aporta más evidencias.

El estudiante E1 hasta ahora ha mostrado sólo construcciones proceso para el concepto de combinación lineal y colinealidad, lo que no le permite responder parte de estas preguntas, y no alcanza para dar una respuesta adecuada.

En resumen, E1 da evidencias de una construcción acción de la noción de TL en su interpretación geométrica.

En la pregunta 5, E1 recurre a algunas nociones de geometría vectorial, de donde desencapsula la noción de vector director de una recta como una construcción mental proceso, que coordina con el concepto de TL en su interpretación funcional. Esto se muestra en la figura 4.136. No logra articular con la TL en su interpretación funcional.

No responde a las preguntas 5 y 6.


¿Puede tomarse una recta?

o quizás se puede tomar el vector característico de L para realizar la transforma

$\frac{1}{2}x = \frac{1}{-3}y = z$

¿De qué manera se puede escribir la recta en un vector?

$z=1$, $x=2$, $y=-3$ $\}$ $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = 1$

$(2,-3,1) = (-4-4, -2-2, 6-3+6)$

$= (0, 0, 9)$

Figura 4.136. Respuesta de E1 a la pregunta5.

Podemos decir que E1 posee una construcción proceso de los conceptos de vector y base, lo que coordinado con el concepto de combinación lineal construye algunas de sus respuestas para la interpretación geométrica del concepto Tl, pero no alcanza, por lo que la interpretación geométrica del concepto TL sería acción, lo que le impide coordinar en forma adecuada con las otras interpretaciones del concepto TL. En la pregunta 4 se logra parte de la articulación, como parte de un trabajo interiorizado en forma mecanicista de los cursos de geometría vectorial, puesto que no logra responder a la pregunta 5, que es de características similares.

Estudiante E2

E2 responde a la pregunta 1, como muestra la figura 4.137. Declara que posiblemente exista una TL, muestra una construcción de tipo preacción del concepto de base en una representación en el plano figural, la que no le alcanza para justificar la respuesta a la pregunta.

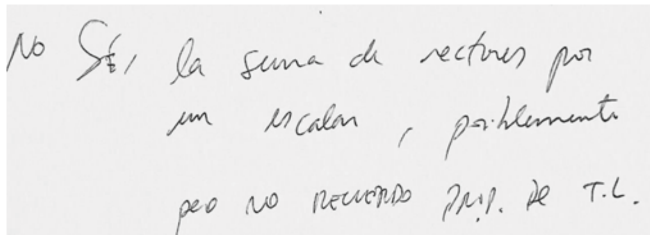


Figura 4.137 . Respuesta de E2 a la pregunta 1.

En la pregunta 2, E2 afirma la existencia de una TL, pero su justificación da cuenta de sólo una posible coordinación entre el concepto de colinealidad y combinación lineal.

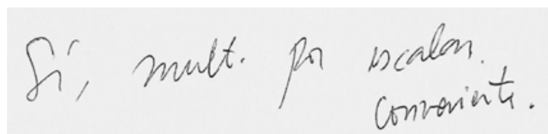


Figura 4. 138. Escrito de E2 como respuesta a la pregunta 2.

No responde la pregunta 3.

Hasta el momento, podemos argumentar desde la DG que E2 muestra una construcción del tipo preacción de la interpretación geométrica del concepto TL en su interpretación geométrica.

En la pregunta 4, E2 replica el procedimiento de la pregunta 1, lo que muestra sólo coordinar los conceptos de combinación lineal y de TL.

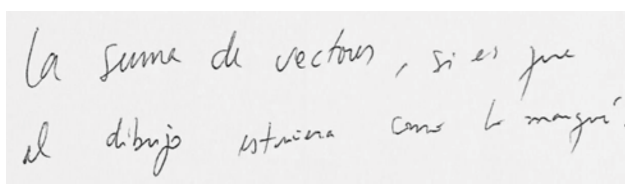


Figura 4.139. Respuesta de E2 a la pregunta 4.

No responde a las preguntas 5 y 6.

A partir de las respuestas y los argumentos mostrados por E2 en la totalidad del cuestionario para esta interpretación, podemos establecer desde APOE que E2 muestra una construcción de tipo acción, tal vez en tránsito a proceso, del concepto combinación lineal, y de dependencia lineal, lo que no alcanza para dar respuesta a las preguntas que requieren articular este concepto.

Estudiante E3

E3, como muestra la figura 4.140, da respuesta a la pregunta 1 realizando la asignación de vectores generales en el espacio de partida y en el espacio de llegada.

No logra dar respuesta correcta a la pregunta.

Desde nuestra DG podemos decir que coordina los procesos asociados al plano figural de los conceptos de base e imagen de vectores.

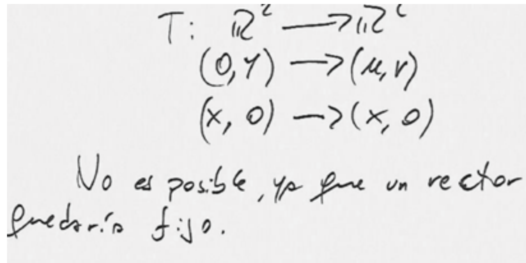


Figura 4.140. Respuesta de E3 a la pregunta 1.

En la pregunta 2, E3 coordina los procesos en el plano figural relacionados al concepto de combinación lineal, asocia la variación de longitud de los vectores y el ángulo entre ellos. Se escapa un poco de la descripción de la DG, pues incorpora elementos propios de la geometría, como son los conceptos de ángulo y medida.

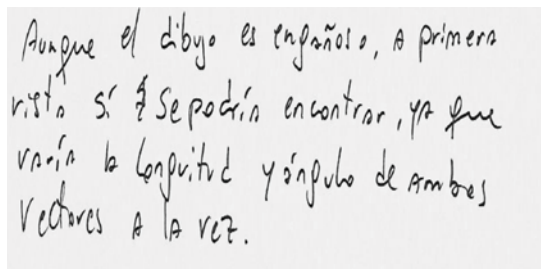


Figura 4.141. Respuesta de E3.

En las preguntas 3 y 4 nuevamente va a una concepción proceso en el plano figural para el concepto de combinación lineal, asocia la variación de longitud de los vectores y el ángulo entre ellos, determinando en este caso que sí es posible que exista una TL.

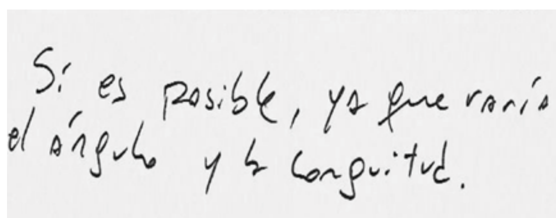


Figura 4.142. Respuesta de E3 a la pregunta 3.

Hasta ahora E3 ha mostrado una concepción proceso de la interpretación geométrica del concepto TL, pues logra coordinar algunos conceptos como el de base y combinación lineal con la colinealidad en el plano figural.

E3 muestra en sus cálculos un trabajo mecanicista en búsqueda del vector generador de la recta, el que es sustituido en la TL.

No logra coordinar la articulación entre la interpretación funcional y la geométrica.

No responde la pregunta 6.

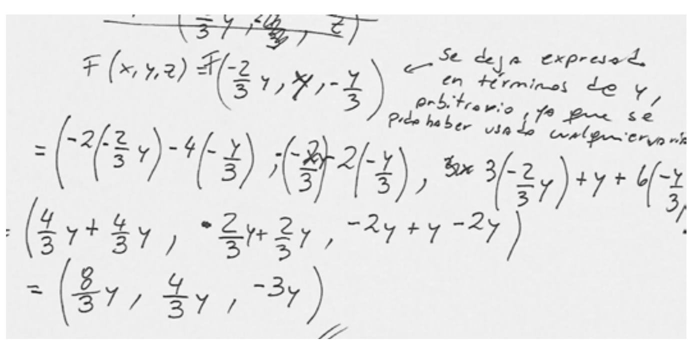


Figura 4.143. Cálculos realizados por E3.

Las evidencias aportadas por E3 dan cuenta de que no logra todas coordinaciones necesarias entre el plano figural del concepto TL y las otras interpretaciones.

Estudiante E4

E4, como muestra la figura 4.144, responde a la pregunta 1 mostrando algunas de las coordinaciones entre los vectores representados en el plano figural, pero sin coordinar con el concepto de función ni de combinación lineal.

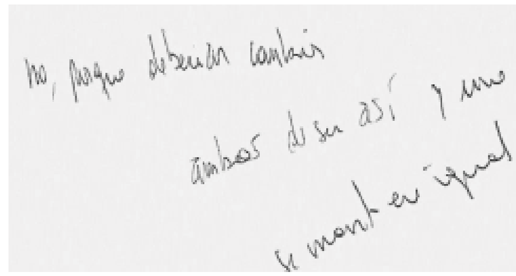


Figura4.144. Respuesta de E4.

En la pregunta 2, E4 presenta el argumento que se aprecia en la figura 4.145, reafirmando que muestra una concepción proceso de los conceptos de vectores, asociando al igual que E3 la relación en el plano figural con ángulos, desplazamientos y proporcionalidad.

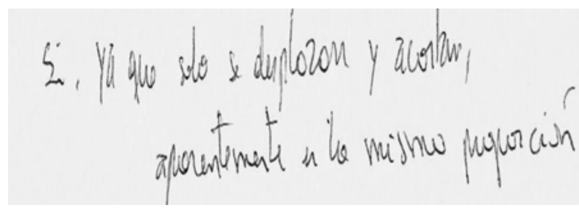


Figura 4.145. Produccion de E4.

E4 responde a la pregunta 3 con argumentos similares a los dados en la pregunta 2, mostrando una construcción proceso de los conceptos de base, combinación línea y función.

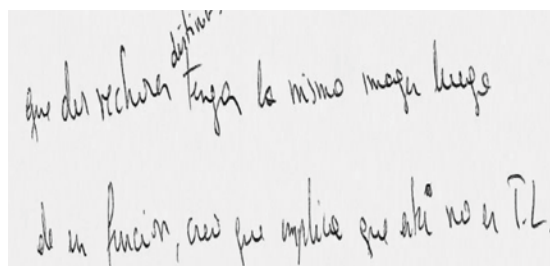


Figura 4.146. Escrito del estudiante E4.

En la figura 4.146, E4 muestra que su construcción para esta interpretación del concepto TL aún está en proceso y falta coordinar los conceptos de colinealidad.

El estudiante E4 busca el vector director de la recta; para ello reescribe la ecuación de la recta y calcula su imagen mediante la TL, para posteriormente escribir cómo la TL actúa sobre la recta.

Logró coordinar la articulación entre la interpretación funcional y la geométrica.

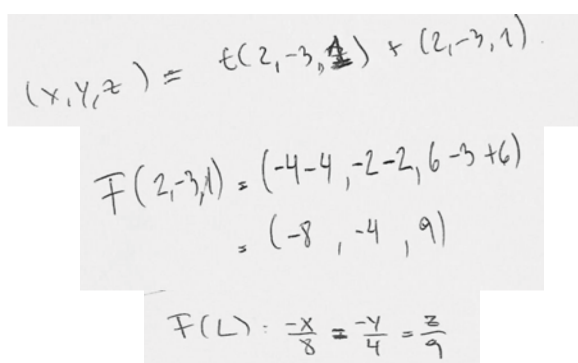


Figura 4.147. Cálculos realizados por E4.

En la pregunta 6, E4 hace alusión a matrices con ángulos y funciones trigonométricas, lo que es evidencia de una construcción acción de la articulación entre la interpretación matricial y la geométrica.

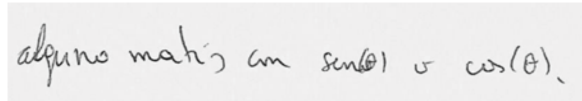


Figura 4.148. Escrito del estudiante E4

A partir de los argumentos mostrados por E4 en la totalidad del cuestionario, podemos decir que los elementos dispuestos en la DG dan cuenta de su construcción proceso de la interpretación geométrica para el concepto de TL.

Estudiante E5

En la pregunta 1, E5, como muestra la figura 4.149, coordina el plano figural con el concepto de base y función, con lo que construye una aplicación que explica la transformación de los vectores.

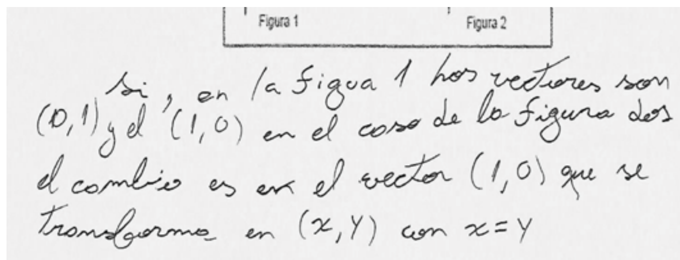


Figura 4.149. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante E5.

En la pregunta 2, E5 muestra que la coordinación antes realizada no la aplica a subespacios del plano. No declara coordinación con el concepto de colinealidad.

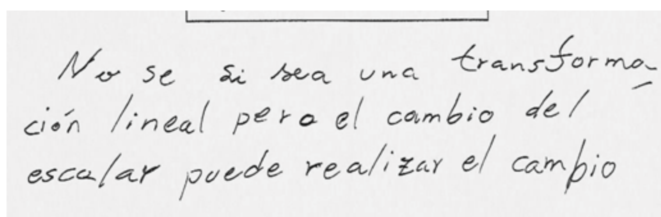


Figura 4.150. Respuesta de E5.

No responde la pregunta 3.

En la pregunta 4, la relaciona con la pregunta 1, declarando que es la misma respuesta. Desde APOE podemos decir que la dificultad para este estudiante radica en la construcción mental para la base del espacio de partida; si ésta no es de dimensión dos se dificulta su análisis

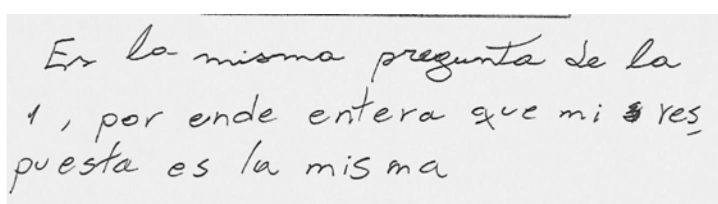


Figura 4.151. Respuesta a la pregunta siguiente dada por E5.

E5 no responde la pregunta 5.

E5 reconoce la existencia de una TL, pero no es capaz de describir desde la interpretación matricial, por lo que hace un relato desde la interpretación geométrica, mostrando coordinar algunos de los conceptos clásicos como rotación y reflexión.

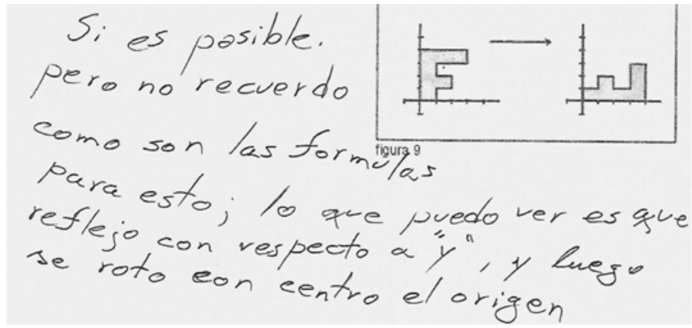


Figura 4.152. Escrito del estudiante E5.

E5 muestra una construcción proceso del concepto de base para el espacio vectorial R^2, el que no coordina con los conceptos de colinealidad del plano figural. Su interpretación geométrica no alcanza para construir el concepto de TL.

Estudiante E6

E6, como muestra la figura 4.153, no responde a las preguntas del cuestionario

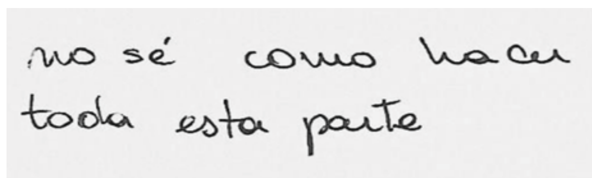


Figura 4.153. Escrito del estudiante E6.

El estudiante E6 no aporta información sobre construcciones y mecanismos mentales que pone en juego para construir la interpretación matricial del concepto TL.

Estudiante E7

En la pregunta 1, E7, como muestra la figura 4.154, realiza la asignación entre los vectores, mostrando coordinar el concepto de base con el función desde el plano figural. No da respuesta explícita a la pregunta.

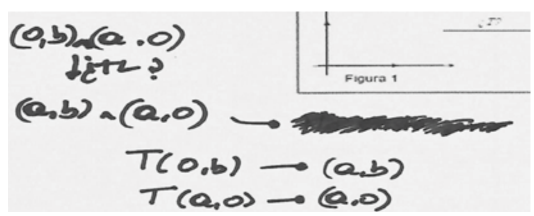


Figura 4.154. Cálculos realizados por E7.

E7 entrega una respuesta explícita, la que es correcta; ha coordinado los conceptos de colinealidad del plano figural con el de función.

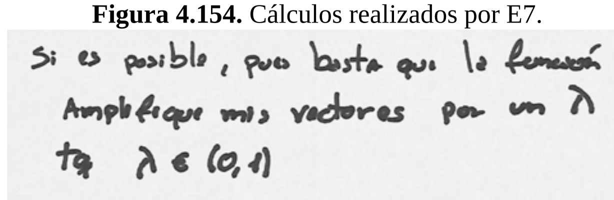


Figura 4.155. Escrito del estudiante E7.

En la pregunta 3, E7, en argumentación, muestra no coordinar procesos específicos asociados a conceptos desde el plano figural, por ejemplo: la colinealidad en el espacio de partida determina un subespacio de partida de dimensión dos.

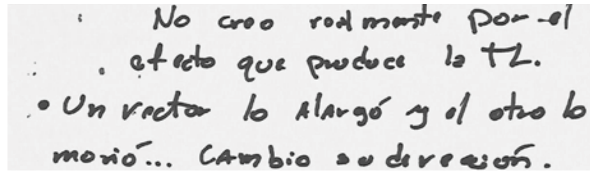


Figura 4.156. Escrito del estudiante E7.

En la pregunta 4 E7, repite la asignación de vectores como en la pregunta 1, mostrando que coordina desde el plano figural el concepto de base y de vectores, los que coordina con una asignación mediante flechas.

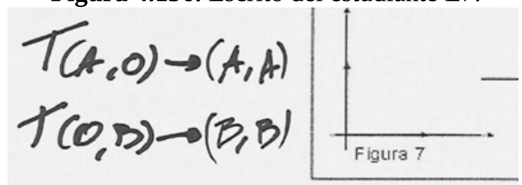


Figura 4.157. Escrito del estudiante E7.

E7, en la pregunta 5 realiza algunos cálculos, pero no logra dar algún sentido; en apariencia busca el vector director de la recta, reescribiéndola en su forma vectorial, lo que no resultó exitoso. Desde nuestra DG, el concepto de vector director se debe coordinar con el de base para un subespacio del dominio.

E7 no responde a la pregunta 6.

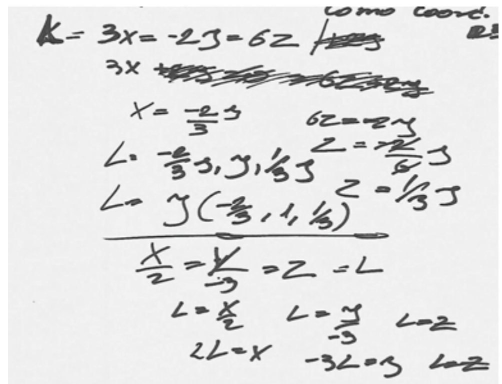


Figura 4.158. Escrito del estudiante E7.

.

El estudiante E7 responde el cuestionario en su interpretación geométrica mostrando una construcción proceso para esta construcción del concepto TL, pero no logra articular con el resto de las interpretaciones del concepto.

Estudiante E8

El estudiante E8 no aporta información sobre construcciones y mecanismos mentales que pone en juego para construir la interpretación matricial del concepto TL.

Estudiante E9

En la pregunta 1, destaca el escrito de E9 “no comprendo la pregunta”. Pero al revisar en detalle lo tarjado, es posible establecer que muestra una construcción proceso del concepto de vector y de combinación lineal, el que coordina mediante una función que como se aprecia en la figura, preserva la linealidad.

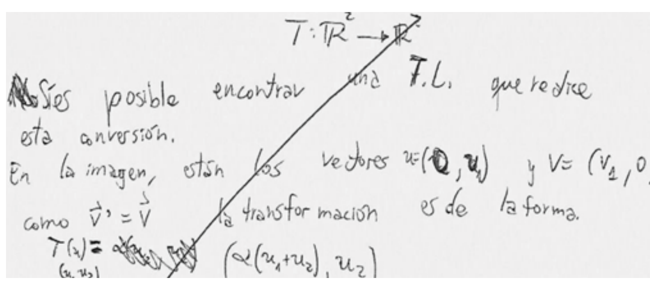


Figura 4.159. Respuesta que realiza el E9.

El estudiante E9 responde que si se

encuentran los escalares apropiados, esto coordina el concepto de colinealidad.

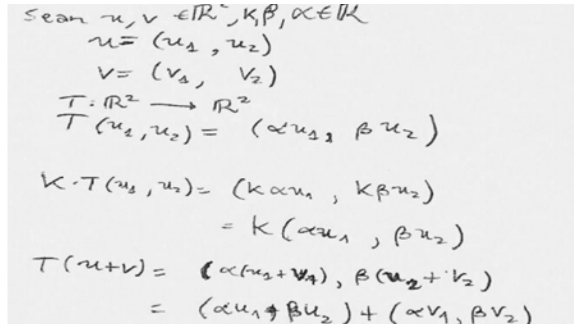


Figura 4.160. Respuesta que realiza el E9.

E9 repite el argumento de la pregunta anterior.

En la pregunta 4, E9 hace explícita una TL *T*, por lo que ha mostrado coordinar los conceptos de base desde el plano figural y construir la interpretación funcional del concepto TL para este caso. Es una construcción objeto, pues muestra interiorizar los procesos que construyen la interpretación.

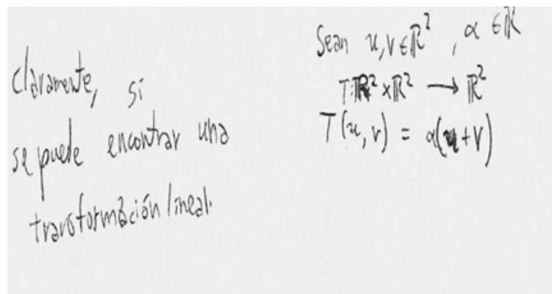


Figura 4.161. Respuesta que realiza el E9.

En la pregunta 5, muestra articular la interpretación funcional con la geométrica. Coordina la construcción mental proceso del concepto de vector director de la recta con el de base de un subespacio vectorial, por lo que su construcción es objeto, pues realizó acciones sobre la ecuación de la recta para dar respuesta a la pregunta.

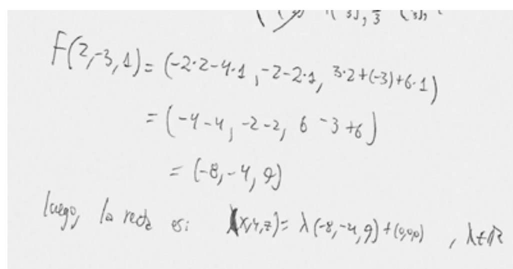


Figura4.162 E3 Coordina procesos a los conceptos de CL.

E9 muestra una construcción mental objeto para la interpretación geométrica; como muestra la figura, construye la MATL.

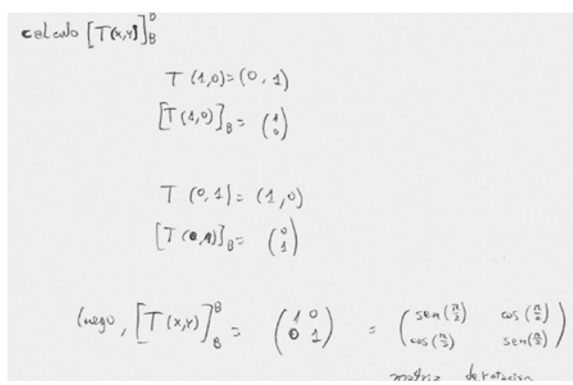


Figura 4.163. Respuesta que realiza el E9.

E9 ha mostrado construcciones mentales próximas a la de objeto en la interpretación geométrica; esto es, construye una versión del teorema fundamental del álgebra para subespacios de $\boldsymbol{R}^3$; además, muestra articular la interpretación matricial y funcional.

Estudiante E10

E10 en las cuatro preguntas iniciales declara, como muestra la figura 4.164, no comprender por falta de "dominio en los gráficos". Podemos inferir que la falta es de articulación con el plano figural, ya que no logra extraer la información.

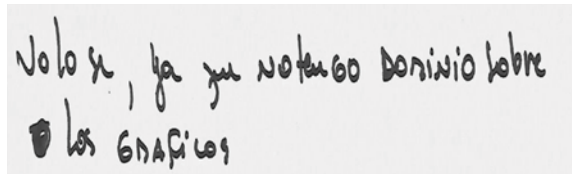


Figura 4.164. Respuesta que realiza el E10.

En la pregunta 5, E10, desde la perspectiva matemática, determina el vector director de la recta y le aplica la TL dada, por lo que podemos argumentar que coordina los conceptos de vector y recta, permitiéndole calcular la imagen del vector director *(-8,-4,9)*, y determina una variación en la recta.
A luz de la DG, podemos decir que E10 muestra una construcción proceso en la interpretación geométrica carente del plano figural.

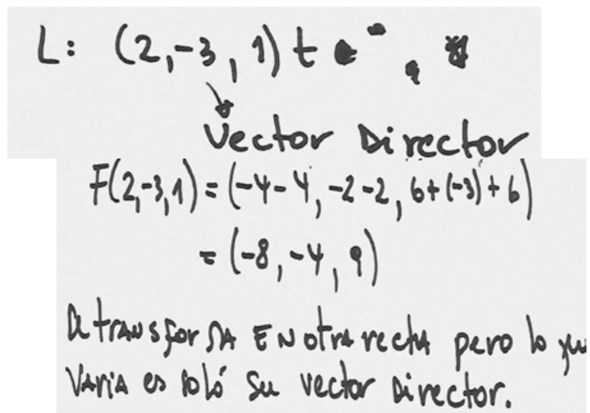


Figura 4.165. Respuesta que realiza el E10

E10 no responde la pregunta 6.

E10 muestra algunas conexiones en la interpretación geométrica, que se relacionan a un trabajo algorítmico en los cursos de geometría vectorial, lo que le permitió articular parcialmente algunos conceptos entre las interpretaciones funcional y geométrica. Pero su interpretación geométrica para el concepto TL es de acción.

Estudiante E11

En la pregunta 1 del cuestionario, E11 coordina el concepto de vector desde el plano figural y el de función. No da evidencias de coordinar las imágenes.

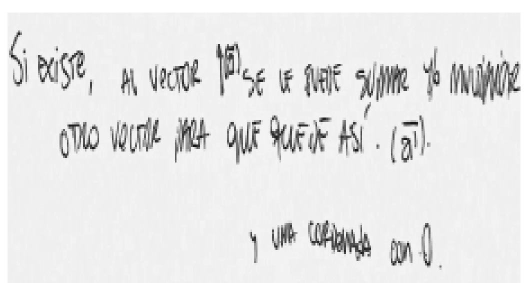


Figura 4.166. Respuesta que realiza el E11.

E11 no responde a las preguntas 2 y 3.
En la pregunta 4, E11 entrega los mismos argumentos que en la pregunta 1.

En la pregunta 5, E11 sustituye la recta en la transformación lineal, obteniendo un vector que no logra interpretar, por lo que muestra una construcción acción de los conceptos de vector director de una recta y de función lineal.

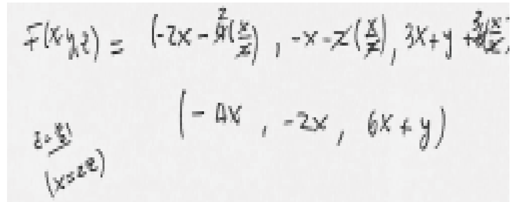


Figura 4.167. Respuesta que realiza el E11.

En la pregunta 6, dice que hay una rotación y una traslación involucradas; muestra una construcción acción de la interpretación matricial que no articula con la interpretación funcional.

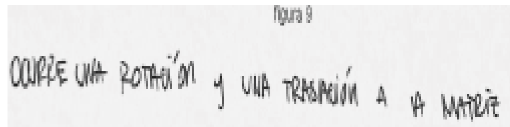


Figura 4.168. Respuesta que realiza el E11

El estudiante E11 muestra una construcción acción para la interpretación geométrica, sin lograr articular con otras interpretaciones.

Estudiante E12

No responde a esta interpretación del concepto TL, por lo que no podemos obtener información sobre el tipo de construcción mental y mecanismo mental a poner en juego.

Estudiante E13

En la pregunta 1, E13 muestra asociar la variación del ángulo entre los vectores con el concepto de función; es poco claro y se escapa un poco de la descripción en la DG, pero incorpora elementos propios de la geometría, como es el concepto de ángulo.

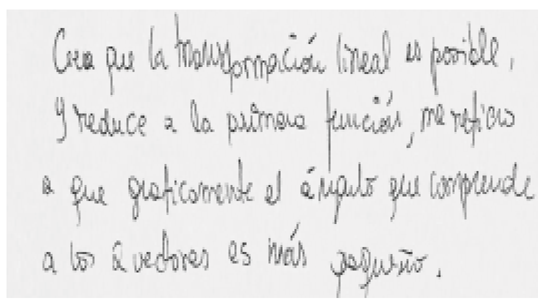


Figura4.168. Respuesta que realiza el E13

E13 en la pregunta 2 nuevamente da cuenta desde el plano figural de los cambios entre vectores, pero no coordina procesos claros de construcción.

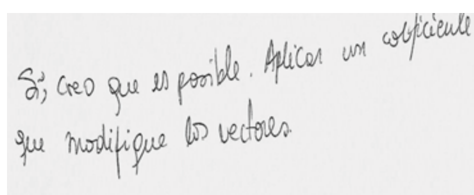


Figura4.169. Respuesta que realiza el E13

En las preguntas 3, 4 y 5, el estudiante E13 no responde.

E13 muestra una construcción proceso del concepto de vectores que ha construido en el plano figural, coordinando con el concepto de función.

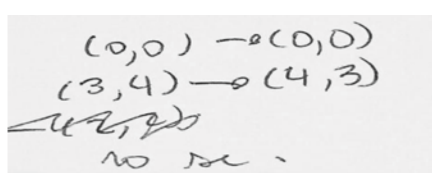


Figura 4.170. Respuesta que realiza el E13

E13 posee una construcción tipo acción de la interpretación geométrica del concepto TL; no logra articular con la interpretación funcional, pero trata de articular con la matricial. Tampoco alcanza, pues su interpretación geométrica no tienee las construcciones mentales necesarias para articular.

Estudiante E14

E14 no responde las preguntas 1, 3 y 4, sin embargo trata de responder la pregunta 2.

En la pregunta 2 entrega una propuesta de TL; al parecer es una función que conoce, pero no justifica.

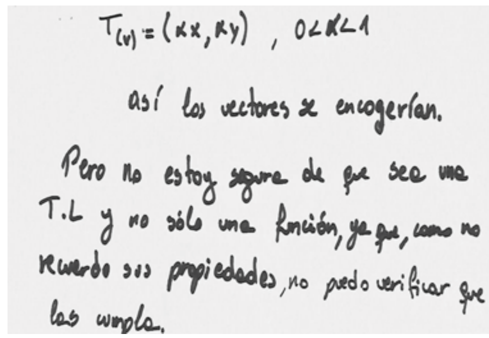


Figura 4.172. Respuesta que realiza el E14.

En la pregunta 5 da argumentos que no se relacionan con la pregunta.

E14 no responde la pregunta 6.

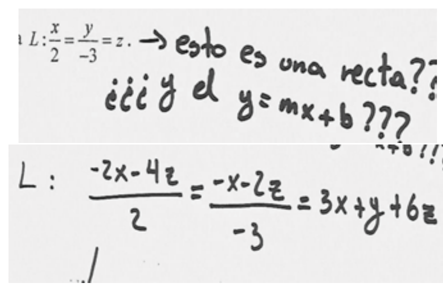


Figura 4.173. Respuesta que realiza el E14.

El análisis de las respuestas de E14 al cuestionario indica que muestra muy pocas construcciones mentales relacionadas con el concepto TL en su interpretación geométrica.

Estudiante E15

El estudiante E15 no aporta información sobre construcciones y mecanismos mentales que pone en juego para construir la interpretación matricial del concepto TL.

Estudiante E16

E16 responde a la pregunta 1 en forma afirmativa; muestra una construcción proceso del concepto de vector con el de función, que coordina mediante la combinación lineal.

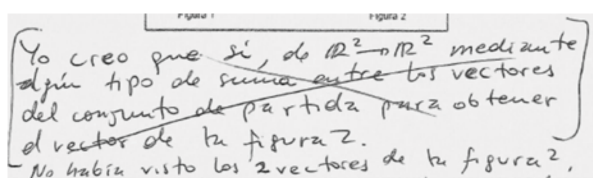


Figura 4.174. Respuesta que realiza el E16.

En la pregunta 2, E16 determina que sí hay una TL, argumentando en forma análoga a la pregunta 1.

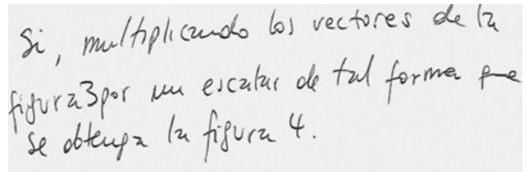

Si, multiplicando los vectores de la figura 3 por un escalar de tal forma que se obtenga la figura 4.

Figura 4.175. Respuesta de E16.

E16 no responde a la peginta 3.
E16 en la pregunta 4 determina que sí hay una TL, argumentando en forma análoga a la pregunta 1.

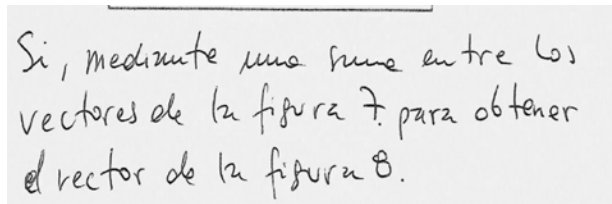

Si, mediante una suma entre los vectores de la figura 7 para obtener el vector de la figura 8.

Figura 4.176. Explicación dada por E16.

No responde a las preguntas 5 y 6.

E16 en la totalidad de este cuestionario muestra una construcción acción para la interpretación geométrica que no articula con el resto de las interpretaciones.

Estudiante E17

E17 sólo responde la pregunta 5 de este cuestionario, como muestra la figura 4.177.

E17 realiza algunos cálculos en la ecuación que define la recta, pero no concluye, por lo que podemos decir que muestra una construcción de tipo acción para el concepto de vector director.

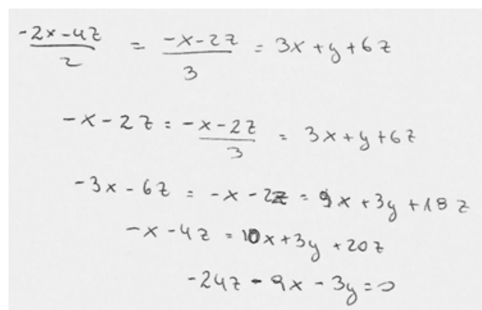
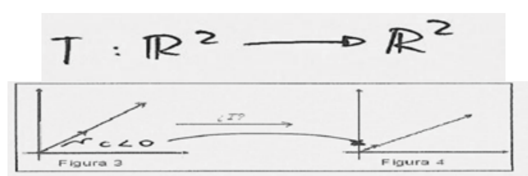

$$\frac{-2x-4z}{2} = \frac{-x-2z}{3} = 3x+y+6z$$
$$-x-2z = \frac{-x-2z}{3} = 3x+y+6z$$
$$-3x-6z = -x-2z = 9x+3y+18z$$
$$-x-4z = 10x+3y+20z$$
$$-24z - 9x - 3y = 0$$

Figura 4.177. Respuesta que realiza el E17.

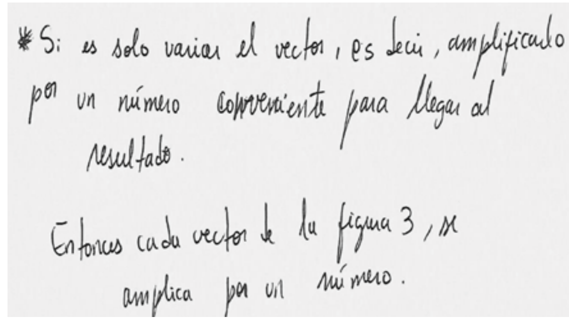
E17 no aporta información sobre construcciones o mecanismos mentales en esta interpretación del concepto de TL.

Estudiante E18

En la pregunta 1 muestra una construcción proceso del concepto vector y de la imagen de un vector coordinando el plano figural con la aplicación lineal.



E18 nuevamente realiza el relato de la figura 4.178, mostrando una construcción proceso del concepto de vector de una base para un subespacio del plano, de donde coordina desde el plano figural la colinealidad con la TL.


* Si es solo variar el vector, es decir, amplificando por un número conveniente para llegar al resultado.

Entonces cada vector de la figura 3, se amplica por un número.

Figura 4.178. Respuesta dada por E18.

E18 no responde a la pregunta 3.

Responde a la pregunta 5, reconociendo mediante las coordinaciones anteriores que hay una TL; pero la omisión de la pregunta anterior establece una duda razonable sobre la coordinación entre el concepto de función lineal y colinealidad.

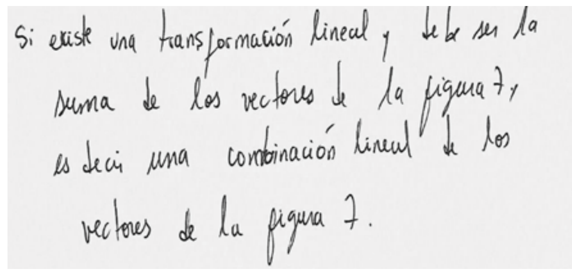
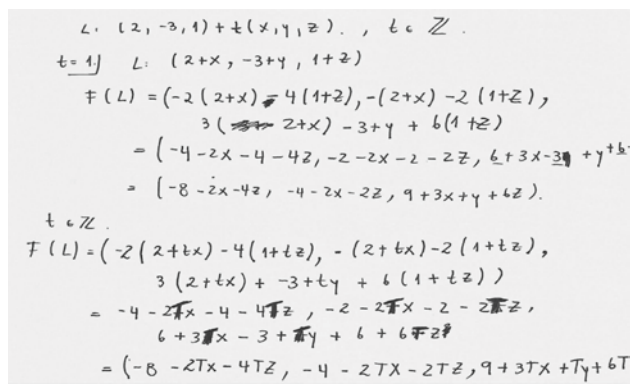

Si existe una transformación lineal y debe ser la suma de los vectores de la figura 7, es decir una combinación lineal de los vectores de la figura 7.

Figura 4.178. Respuesta escrita por E18.

E18 responde la pregunta 5, realiza cálculos que se aprecian en la figura; primeramente reescribe la ecuación de la recta en forma vectorial, lo que hace evidente al vector director, pero este cálculo es una acción mecanizada, pues no lo utiliza; posteriormente aplica la función sobre la recta *F(L)*, muestra coordinar los conceptos de función con el de vector con una generalización mal aplicada.


$L: (2,-3,1)+t(x,y,z)$, $t \in \mathbb{Z}$.

$t=1$ $L: (2+x, -3+y, 1+z)$

$F(L) = (-2(2+x) - 4(1+z), -(2+x) - 2(1+z), 3(2+x) - 3+y + 6(1+z))$

$= (-4-2x-4-4z, -2-2x-2-2z, 6+3x-3+y+6+6z)$

$= (-8-2x-4z, -4-2x-2z, 9+3x+y+6z)$.

$t \in \mathbb{Z}$.

$F(L) = (-2(2+tx)-4(1+tz), -(2+tx)-2(1+tz), 3(2+tx) + -3+ty + 6(1+tz))$

$= -4-2Tx-4-4Tz, -2-2Tx-2-2Tz, 6+3Tx-3+Ty+6+6Tz$

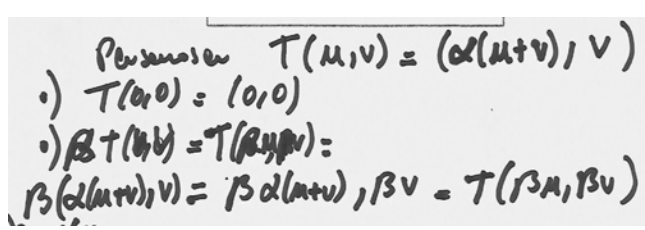
$= (-8-2Tx-4Tz, -4-2Tx-2Tz, 9+3Tx+Ty+6T$

Figura 4.179. Cálculos realizados por E18.

E18 no responde a la pregunta 6, por lo que no podemos obtener información de cómo articula estas interpretaciones del concepto TL. En general, E18 muestra una construcción proceso del concepto TL en su interpretación geométrica.

Estudiante E19

En la pregunta 1, E19 construye una transformación lineal que se adapta a lo propuesto en la figura; muestra así coordinar los conceptos de vector en el plano figural con los de base del espacio y el concepto de función.


Pensemos en $T(u,v) = (\alpha(u+v), v)$

•) $T(0,0) = (0,0)$

•) $\beta T(u,v) = T(\beta u, \beta v)$:

$\beta(\alpha(u+v), v) = \beta\alpha(u+v), \beta v = T(\beta u, \beta v)$

Figura 4.180. Respuesta de E19.

E19 presenta algunas dificultades para dar respuesta a la pregunta 2; muestra que fue capaz de realizar la coordinación anterior en una base de dimensión dos, esto es, no coordina el concepto de subespacio y el de colinealidad mediante una TL.

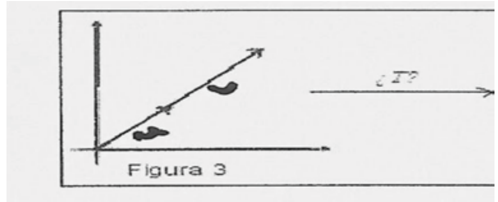


Figura 4.181. asignación que realiza E19.

E19, a pesar de las dificultades anteriores, propone que no es posible que exista una TL; su argumento se basa en los conceptos de dependencia lineal y de función, por lo que muestra una construcción proceso de la interpretación geométrica.

No se puede ya que 1 vector es LD del otro y para generar un par de vectores en el espacio de la figura 6 se necesita 2 vectores LI

Figura 4.182. Respuesta que realiza el E19.

En la pregunta 4, E19 muestra en su escrito una construcción proceso de la función que describe la transformación de los vectores.

$$T(u,v) = \alpha(u+v)$$
$$T(0,0) = 0$$
$$\beta T(u,v) = \beta(\alpha(u+v)) = \beta\alpha(u+v)$$
$$= T(\beta u, \beta v)$$

Figura 4.183. Respuesta que realiza el E19.

E19 en la pregunta 5 reescribe la ecuación de la recta, identifica el vector director y calcula su imagen. Muestra coordinar la interpretación funcional con la geométrica.

Igualando a un parametro t

$x = 2t$
$y = -3t$
$z = t$

$$F(2t,-3t,t) = (-8t,-4t,9t)$$

Figura 4.184. Cálculos de E19.

El estudiante E19 no responde a la pregunta 6.

La interpretación de todas las respuestas del estudiante E19, es que posee una construcción mental proceso para la interpretación geométrica del concepto TL, mostrando una articulación con la interpretación funcional.

Estudiante E20

E20 responde a las preguntas 1, 2, 3 y 4 con los mismos argumentos, relacionados con el concepto de cambio de la palabra transformación, pero no muestra construcciones mentales relacionadas a los conceptos dispuestos en la DG.

No, ya que una transformación lineal cambia el sentido de un vector, y tamaño

Figura 4.185. Respuesta dada por E20.

E20 no logra coordinar los conceptos que construyen la respuesta.

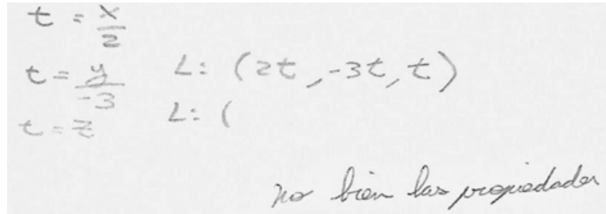


Figura 4.187. Cálculos de E20.

E20 no responde a esta pregunta.

E20 muestra una construcción pre acción para la interpretación geométrica del concepto TL.

4.1.3.1 RESUMEN DE LOS DATOS.

Para mostrar en forma resumida los resultados obtenidos sobre las producciones escritas de los estudiantes, con ejemplos de cada caso de estudio, hemos construido la tabla 4.3, en que se da la información sobre quiénes muestran presencia o ausencia de una determinada construcción o mecanismo mental previsto en la DG.

Tabla 4.3. Resumen de los datos.

Pregunta / Estudiante	P1 Coordinación de los conceptos de base función combinación lineal con la colinealidad en el plano figural	P2 Coordinación de los conceptos de colinealidad en el plano figural mediante la TL	P3 Coordinación de los conceptos de colinealidad en el plano figural mediante la TL mirada a las imágenes	P4 Coordinación de los conceptos de colinealidad en el plano figural mediante la TL perspectiva global	P5 Articulación entre interpretación geométrica y funcional	P6 Articulación entre interpretación geométrica y matricial
E1	Proceso	Proceso	No Responde	No Responde	Proceso	No Responde
E2	Acción	Acción	No Responde	Acción	No Responde	No Responde
E3	Proceso	Proceso	Proceso	Proceso	Acción	No Responde
E4	Acción	Proceso	Proceso	Proceso	objeto	Acción
E5	Proceso	Acción	No Responde	Acción	No Responde	Acción
E6	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E7	Proceso	Acción	Acción	Proceso	Acción	No Responde
E8	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E9	Acción	Proceso	Proceso	Objeto	Objeto	Objeto
E10	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	Proceso	No Responde
E11	Acción	No Responde	No Responde	Acción	Acción	Acción
E12	No	No	No	No	No	No

	Responde	Responde	Responde	Responde	Responde	Responde
E13	Acción	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	Acción
E14	No Responde	Acción	No Responde	No Responde	Acción	No Responde
E15	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E16	Acción	Acción	No Responde	Acción	No Responde	No Responde
E17	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	Preacción	No Responde
E18	Acción	Proceso	No Responde	Proceso	Proceso	No Responde
E19	Acción	Acción	Proceso	Proceso	Proceso	No Responde
E20	Preacción	Preacción	Pr-acción	Preacción	Preacción	No Responde

4.1.3.2 CONCLUSONES SOBRE LAS PRIMERAS EVIDENCIAS PARA LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO TL.

Una observación inicial sobre el desempeño de los estudiantes participantes en este estudio se relaciona a la resistencia a contestar la interpretación geométrica del concepto TL. Por una parte, sostuvieron que el álgebra lineal y la geometría son cursos diferentes, y por otra, que en su curso de álgebra lineal no se trató el tema de esta forma. Para ejemplificar esta situación, reproducimos algunos de los comentarios dentro de sus relatos. E15: "*No sé realizar nada de este ítem, debido a que no recuerdo mucha geometría vectorial, lo que parece ser necesario para desarrollarlo*". E14 escribe que "*al ojo*" no puede determinar una TL. E9 se resiste en la pregunta 1 y su escrito comienza con *"no sé"* y lo tacha para anular, mientras responde bien el resto del cuestionario. Lo que es común a gran parte del caso es la noción de cambio asociada a una TL.

Lo observado en términos de construcciones y mecanismos mentales da cuenta de que los estudiantes que no muestran esta resistencia o se sobreponen a ella, pueden responder las primeras cuatro preguntas dando cuenta de la identificación de los vectores en las figuras, reconociendo que constituyen una base para el espacio de partida. Esto es, desde APOE coordinan las construcciones mentales proceso para los conceptos de vector que se identifica en el plano figural, con el concepto de función, asignando a estos vectores imágenes en la figura de llegada. Ejemplo de ello es E5, que formula el siguiente argumento: "*Si en la figura 1 los vectores son* (0,1) *y el* (1,0) *en el caso de la figura dos el cambio es en el vector* (1,0) *que se transforma en (x,y) con x=y*", lo que muestra la realización de las coordinaciones antes descritas.

En relación a las articulaciones con la interpretación funcional, la mitad de los estudiantes del caso en estudio elabora algún tipo de respuesta y la otra mitad no responde. Sobre las respuestas, podemos citar a E4, que realiza la articulación entre estas interpretaciones; busca el vector director de la recta, esto es, desde lo geométrico encuentra una base para este subespacio, y para ello reescribe la ecuación de la recta, mostrando una construcción objeto del concepto recta vectorial, ya que realiza acciones al buscar el vector director;

posteriormente calcula su imagen mediante la TL. Lo que realiza es una coordinación entre la función y el vector director, para luego escribir cómo la TL actúa sobre la recta; esto es, encapsula el objeto imagen de una recta vectorial. Logró coordinar la articulación entre la interpretación funcional y la geométrica. En otros estudiantes se pudo observar un trabajo mecanicista sobre la ecuación de la recta, reescribiéndola sin coordinar estos procesos con la TL; un ejemplo de ello es E17. Por otra parte, diremos que en una casi preacción algunos aplicaron la TL sobre la ecuación de la recta completa; prueba de ello es E18.

Sobre la articulación con la interpretación matricial, sólo cinco estudiantes del caso dan algún tipo de respuesta. E9 construye la función, esto es, articula con la interpretación funcional, mostrando coordinar los conceptos de base para el plano con el concepto de función, y construye un tipo específico de TL; posteriormente construye la MATL. Los estudiantes que no alcanzan a construir la articulación, pero esbozan alguna respuesta, son aquéllos que no han logrado construir la interpretación geométrica, pues no coordinan el plano figural desde donde pueden extraer información sobre los vectores que constituyen una base para el plano; prueba de ello es E13, que no logra coordinar los vectores para una base para el plano.

Al igual que en la investigación de Molina y Oktaç (2007), aparecen los fantasmas de los modelos intuitivos, que fueron así interpretados por estos investigadores. Podemos dar cuenta de ello en la concepción ingenua de cambio para el concepto TL. Bajo el alero de APOE, pensamos que se trata en la mayoría de los casos de procesos que no han sido interiorizados; en otras palabras, la construcción del teorema fundamental del álgebra lineal en esta versión no ha sido construida como objeto. Pensamos que hace falta propiciar coordinaciones con el plano figural para construir dicho teorema, que aunque limitado por la visualización, pensamos que propicia una base para una construcción más general del concepto TL. Por otra parte, los estudiantes que poseen construcciones inacabadas del concepto, ya sea en su interpretación matricial y/o funcional, muestran construcción de conocimiento en esta interpretación. Prueba de ello es E20, quien sólo responde a las preguntas de la interpretación geométrica.

4.2 CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES MOSTRADOS POR LOS ESTUDIANTES DEL CASO PARA EL CONCEPTO DE TL EN SUS TRES INTERPRETACIONES.

Para el caso en estudio, podemos decir que en cada interpretación existen elementos fundamentales que determinan algunas de las dificultades específicas en la construcción del concepto TL; por ejemplo, en la interpretación funcional, la ecuación que define a una TL, esto es: $T(\alpha v+\beta w)=\alpha T(v)+\beta T(w)$, donde $\alpha,\beta \in K; v,w \in V$ es asumida por algunos de los estudiantes del caso como algo automático. Nuestra explicación desde APOE es que no han coordinado los procesos propios de la construcción, donde la combinación lineal a la izquierda de la igualdad está en el espacio de partida, y la de la derecha de la igualdad, en el espacio de llegada, y esto sólo sucede si la función es una TL. Esta dificultad se ve posteriormente reflejada en la interpretación geométrica —el teorema fundamental del álgebra lineal—, pues no logran coordinar los procesos que construyen una TL desde la asignación de los vectores en el espacio de partida a un conjunto en el espacio de llegada.

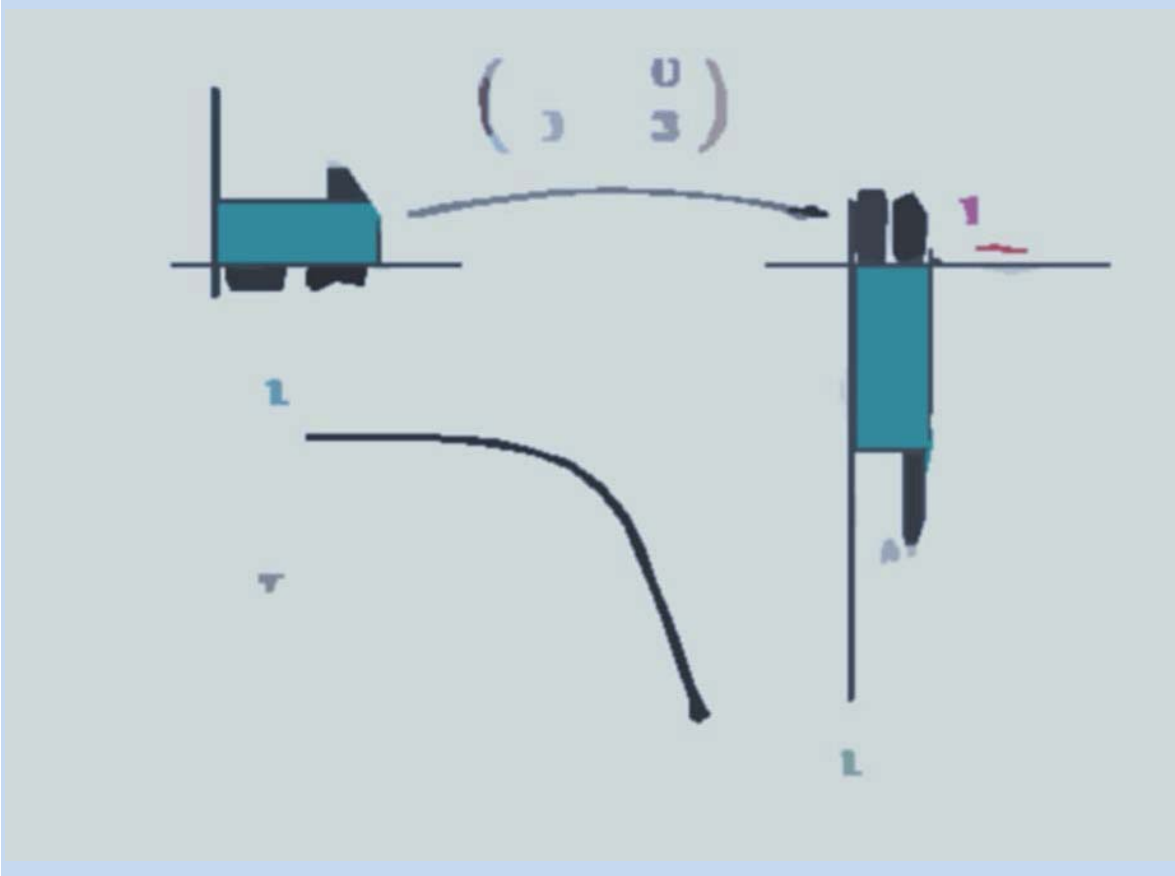
Las evidencias dan cuenta de que no reconocen esta asignación como una TL. Por otra parte, para la interpretación matricial detectamos que no es suficiente con construir las coordenadas de las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida; es la generalización y sistematización de este proceso que construye la MATL, nuevamente la misma igualdad pero descrita de otra forma.

Desde APOE, las construcciones y mecanismos mentales que detectamos con la lectura transversal de los datos, son la coordinación entre los conceptos de combinación lineal y de función. Aunque no es suficiente con ello, es un buen inicio; posteriormente, un trabajo dedicado a la identificación de las estructuras subyacentes en el concepto de función y de espacio vectorial, más todas las descripciones relatadas en nuestras DG, suponemos que ayudarán a comprender la construcción del esquema para el concepto de TL.

A continuación, en el capítulo 5 explicaremos los criterios desarrollados para interpretar los datos y construir un modelo para el esquema del concepto TL, lo que validaremos vía entrevistas.

CAPÍTULO 5:

RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS. EVIDENCIAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL COMO UN MODELO MULTIINTERPRETATIVO.



CAPÍTULO 5:

RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS. EVIDENCIAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL COMO UN MODELO MULTIINTERPRETATIVO.

5.1 EL ESQUEMA Y EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes del caso se basa en un modelo multinterpretativo para el concepto de TL. Consideramos que este, como un concepto unificador para el álgebra lineal, incorpora diferentes interpretaciones, razón por la cual para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las como construcciones mentales objeto o próximas a la de objeto; pensamos que son indispensables para la evolución del esquema del concepto, y que nos permitirán, a su vez, determinar su coherencia, entendida esta última como la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si éste permite solucionar una situación matemática particular, y en tal caso usarlo.

Como proponemos en el capítulo 2 (apartado 2.2.1), para analizar la coherencia en el esquema del concepto TL y determinar sus componentes, pensamos que un estudiante muestra un nivel de esquema *Intra-* para el concepto TL, si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras interpretaciones del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto TL de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios, no podría responder en forma adecuada. De igual forma, un estudiante que muestra un nivel de esquema *Inter-* del concepto TL es aquél que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este esquema, y de esta forma responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, lo que le permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las TL. Para finalizar, un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans-* del concepto TL si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales.

En la figura 5.1 damos cuenta de esta idea sobre la estructura para el concepto TL, que posee componentes de origen funcional, matricial y geométrico, sin desconocer que es más amplio. Un ejemplo importante de un concepto en este “exterior”, es el de isomorfismo de espacios vectoriales, el que puede servir para examinar los elementos emergentes, pues posee características transversales para el álgebra en general.

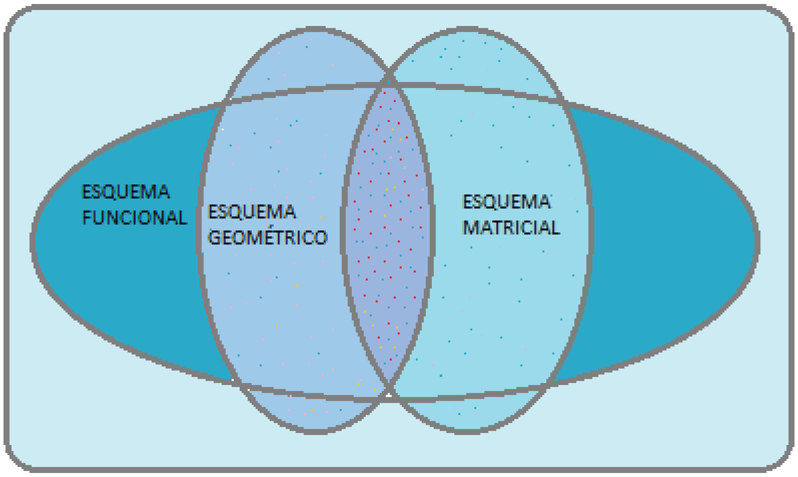


Figura 5.1. Dibujo sobre las componentes del modelo para el concepto de TL

Es así que incorporamos en algunas de las preguntas de la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto TL. Pensamos originalmente que las nociones desde la perspectiva funcional, como las de inyectividad y epiyectividad, debieran emerger como construcciones proceso junto con la de linealidad como construcción mental objeto, la que debe ser desencapsulada en una construcción proceso que actuará coordinando al concepto kernel y de dimensión, para así construir una función que preserve la estructura de espacio vectorial. Los conceptos de grupo cociente y clase estarían en el límite del concepto TL, por lo que este tipo de construcción obedecería a un nivel *Trans*-TL, siempre que dé muestras de su coherencia. Desde la interpretación matricial, pensamos el kernel como una construcción proceso, un elemento nuevamente importante para determinar el nivel de un esquema para el concepto de TL; a su vez, en la interpretación geométrica éste queda oculto, pues en una asignación entre vectores representados en el espacio correspondería a un simple conteo en la correspondencia entre coordinar el proceso de asignación de vectores con la construcción proceso del concepto de dimensión.

Por otra parte, deberemos tener en cuenta que un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado. Es posible que en los análisis de las entrevistas encontremos indicadores de algunos esquemas ya tematizados o cercanos a ello.

5.1.1. NIVELES DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO DE TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

A continuación presentamos una breve descripción de los niveles del esquema para el concepto TL, basada en las descripciones dadas en el capítulo 3 para los niveles en el esquema de cada interpretación del concepto. Para trabajar con TL desde esta perspectiva global, un estudiante tiene que poner en juego sus construcciones previas alrededor de esquemas de los conceptos de espacio vectorial y de función. Las relaciones de coherencia que establezca entre los conceptos de base, dimensión, vectores, combinación lineal, dominio, recorrido, imagen, coordenadas, MATL, determinarán los niveles *Intra-*, *Inter-* y *Trans-* TL

5.1.1.1 NIVEL *INTRA*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Intra*-TL, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:

Las funciones que reconoce como TL son entre espacios y subespacios vectoriales de $\boldsymbol{R^n}$.
Asume que la estructura algebraica se conserva bajo cualquier función, esto es, la combinación lineal se preserva automáticamente.
Las bases son" transformadas" en bases mediante una TL.
Los conjuntos LI (LD) son "transformados" en conjuntos LI (LD) mediante una TL.
La prueba de que una función es una TL se reduce a comprobar que la imagen del cero es el cero.
Prueba que una función es una TL realizando la verificación de la propiedad de la combinación lineal, sin verificar que el dominio y el recorrido son espacios vectoriales o subespacios vectoriales de un cuerpo específico**.**
Construye la MATL para TL entre espacios y subespacios de dimensión finita.
Las bases ordenadas son conjuntos cualesquiera de los espacios dados.
Dada la MATL calcula las coordenadas de imágenes de vectores multiplicando las coordenadas de éstos por la matriz, en cualquier caso, y aplica la matriz cambio de base de ser necesario.
La matriz es usada para determinar si la TL es un tipo específico de función (inyectiva o epiyectiva), y a su vez es vista como una TL.
Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R}^3$, pero no la especifica en su expresión algebraica o matricial.
Las bases son conjuntos de n-uplas y sólo son las bases canónicas.
Las imágenes de los vectores se calculan mediante combinaciones lineales de las imágenes de éstos, no se aplica la TL.

En este nivel no existe una clara conexión entre las nociones espacio vectorial, función TL, matriz, coordenadas o bases. En términos del modelo multinterpretativo, muestra un nivel de esquema *Intra*- TL si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, las que por hipótesis sí se lo permitirían.

5.1.1.2 NIVEL *INTER*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Inter*- TL, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:
Las funciones que reconoce como TL son entre espacios vectoriales conocidos, como por ejemplo: $\boldsymbol{R^n}$,$M_{mxn,}$ P_n *[x]* ; esto es, con estructuras algebraicas sobre $\boldsymbol{R}$ como cuerpo.
La combinación lineal de vectores se conserva mediante una TL, pero reconoce que los conjuntos LI no necesariamente son "transformados" en conjuntos LI mediante una TL.

Para probar que una función es una TL se reduce a comprobar que la imagen del neutro es el neutro.
Prueba que una función es una TL comprobando la propiedad de linealidad, sin verificar que el dominio y el recorrido son espacios vectoriales o subespacios vectoriales de un cuerpo específico**.**
Construye la MATL sólo para TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^n$.
Las bases son conjuntos de n-uplas y posiblemente sólo sean las bases canónicas, lo que implica que las coordenadas son matrices transpuestas.
Las coordenadas de imágenes de vectores se calculan mediante combinaciones lineales de las imágenes de éstos, no se aplica la matriz cambio de base en caso de ser necesario.
La matriz no es vista como una función, menos como una TL.
Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R}^3$ y es capaz de especificarla en una de sus otras interpretaciones, funcional o matricial.
Las bases son conjuntos que logra determinar del plano figural mediante la coordinación de las concepciones proceso de los conceptos de base con el de espacio vectorial. Aquí las bases canónicas son por elección.
Las imágenes de los vectores se calculan mediante la TL en cualquiera de sus interpretaciones.
En este nivel los estudiantes, dependiendo del contexto del problema, relacionan los objetos espacio vectorial real, función, TL, matriz, coordenadas y base como elementos interconectados, aunque todavía pueden existir algunas dificultades. En términos del modelo multinterpretativo, muestran un nivel de esquema *Inter*- TL, si por lo menos han articulado dos de las interpretaciones de este esquema. Es de esta forma que responden a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL, lo que les permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las TL.

5.1.1.3 NIVEL *TRANS*- TL EN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Pensamos que un estudiante muestra un nivel *Trans*-TL, cuando en sus argumentaciones muestra algunos de los siguientes razonamientos ante una situación específica:
Las funciones que reconoce como TL son entre espacios vectoriales, esto es, con estructuras algebraicas sobre $\boldsymbol{K}$ como cuerpo.
La combinación lineal de vectores se conserva mediante una TL, y lo aplica a conjuntos LI y base que no necesariamente son “transformados” en conjuntos LI y base mediante una TL.
Prueba que una función no es una TL al comprobar que la imagen del neutro del espacio vectorial de partida no es el neutro del espacio vectorial de llegada.
Prueba que una función es una TL comprobando la propiedad de linealidad, teniendo claro cuáles son los espacios o subespacios vectoriales involucrados**.**
Construye la MATL para TL entre espacios y subespacios de dimensión finita.
Las bases ordenadas son conjuntos cualesquiera de los espacios dados.
Dada la MATL calcula las coordenadas de imágenes de vectores multiplicando las coordenadas de éstos por la matriz, en cualquier caso, y aplica la matriz cambio de base de ser necesario.

La matriz es usada para determinar si la TL es un tipo específico de función (inyectiva o epiyectiva), y a su vez es vista como una TL. Construye la asignación de vectores desde el plano figural, esto es, reconoce la existencia de una TL entre espacios y subespacios de $\boldsymbol{R^3}$ y es capaz de especificarla en cualquiera de sus otras interpretaciones, funcional o matricial. Puede determinar el tipo de TL, si es inyectiva, epiyectiva o biyectiva, por lo que las imágenes de conjuntos de vectores están claras.

En este nivel los estudiantes, independientemente del contexto del problema, relacionan las nociones de función y espacio vectorial en términos generales, manejan y comprenden todas las técnicas directas e indirectas que se relacionan con estas mismas nociones para la construcción del concepto TL. Desde la perspectiva del modelo multinterpretativo, un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans*- TL si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto TL y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales.

5.1.2 EN BÚSQUEDA DE EVIDENCIAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL: SELECCIÓN DE LOS INFORMANTES.

A continuación estableceremos la articulación entre interpretaciones como criterio de selección, en búsqueda de establecer los niveles para el esquema del concepto TL en los estudiantes del caso. En el capítulo 4 (apartados 4.1.1.1, 4.1.2.1 y 4.1.3.1) realizamos un resumen tabular de los análisis por construcción de las respuestas de los estudiantes al cuestionario; estos datos los utilizamos como modelo selectivo de aquellos estudiantes que poseen una construcción más completa o próxima al esquema del concepto TL. Recopilamos la información desde la perspectiva de cada interpretación y analizamos a la luz de APOE, mediante contrastación con la descomposición genética.

En las siguientes tablas se entrega un resumen de los estudiantes que mostraron construcciones próximas a la de objeto por interpretación para el concepto de TL; asimismo, se incluye el orden en que respondieron al cuestionario, suponiendo que este orden entrega información sobre su aproximación al concepto. Las siglas F, M y G corresponden a la interpretación funcional, matricial y geométrica del concepto TL.

Tabla 5.1. Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación funcional.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL
E3	MFG	PROCESO
E4	FGM	OBJETO
E5	FMG	PROCESO
E6	FMG	PROCESO
E8	MFG	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E15	FMG	PROCESO
E17	FGM	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 5.2. Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación matricial.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL
E3	MFG	PROCESO
E4	FGM	OBJETO
E9	GMF	PROCESO
E13	MFG	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 5.3. Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación geométrica.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO
E4	FGM	OBJETO
E7	GFM	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E18	MFG	PROCESO
E19	FGM	PROCESO

Se realizó un cruce de los datos con la información de las tablas anteriores (tablas 5.1, 5.2 y 5.3), con el propósito de obtener a los estudiantes del caso que mostraran las construcciones mentales próximas a la de objeto para el concepto de TL. Se obtuvo que los estudiantes E3, E4, E9 y E18 fueran los candidatos para ser entrevistados y así establecer algunas características del esquema del concepto TL. En la tabla 5.4 se muestra el resumen de este cruce de datos.

Tabla 5.4. Resumen del cruce de datos.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO	PROCESO	PROCESO
E4	FGM	OBJETO	OBJETO	OBJETO
E9	GMF	OBJETO	PROCESO	OBJETO
E18	MFG	PROCESO	OBJETO	PROCESO

Un dato de la investigación es que siendo voluntarios, sólo tres de los estudiantes del caso seleccionados para las entrevistas participaron en ellas. No se pudo contar con la participación de E4. Por esto, excluiremos del resto de los análisis a E4, ya que no posemos información sobre su forma de construir el esquema del concepto TL.

A continuación, un breve análisis de los datos particulares de los entrevistados.

5.1.2.1 EL PERFIL DE LOS ENTREVISTADOS SEGÚN EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

Sobre los candidatos seleccionados y que participaron en la entrevista —E3, E9 y E18—, se revisaron nuevamente sus respuestas al cuestionario, en particular aquéllas en las que podían mostrar la incorporación de elementos de otras interpretaciones (pregunta 4 de la interpretación funcional y pregunta 6 de la interpretación geométrica), esto es, hacer uso del esquema mediante la articulación de interpretaciones. De allí se obtuvo las siguientes respuestas, que permitieron una planificación para cada entrevista.

Comenzaremos con E3, quien responde a la pregunta 4 de la interpretación funcional en una aproximación a la articulación; se basa en el teorema fundamental del álgebra lineal, pues realiza la asignación de vectores del espacio de partida en el de llegada, no muestra coordinación con el plano figural. Por otra parte, no responde a la pregunta 6 de la interpretación geométrica, diciendo que no recuerda la matriz asociada a la TL, lo que es contradictorio, primeramente, con el orden en que seleccionó responder al cuestionario, que fue MFG, y con que mostró una construcción mental proceso en las respuestas a las preguntas de la interpretación matricial del concepto TL.

Para la entrevista de E3, se debió considerar que no mostró algún tipo de preferencia por interpretación, por lo que el orden en que se realizaron las preguntas dependió exclusivamente de sus respuestas. Desde la caracterización del esquema para el concepto TL, diremos que ha mostrado en sus respuestas al cuestionario un esquema *Intra*- TL.

Por otra parte, E9 responde a la pregunta 4 de la interpretación funcional al igual que E3, esto es, evocando el teorema fundamental del álgebra lineal, sin mostrar coordinación con el plano figural. En su respuesta a la pregunta 6 de la interpretación geométrica, E9 responde construyendo la matriz en términos de senos y cosenos, mostrando así articular dos de las interpretaciones del concepto, incluyendo las nociones de rotación y reflexión propias de los movimientos basales en el plano.

Consideramos que su entrevista ha mostrado una articulación y que su tratamiento al concepto emerge desde lo geométrico, lo que queda confirmado en su selección del orden para responder el cuestionario (GMF). Desde la caracterización del esquema para el concepto TL, diremos que ha mostrado en sus respuestas al cuestionario un esquema *Inter*- TL.

Finalmente, el estudiante E18 responde a la pregunta 4 tratando de reconstruir una función que cumpla con la asignación de los vectores dados en la pregunta, no muestra articulaciones con otras interpretaciones. El orden en que E18 responde al cuestionario es MFG, por lo que en su entrevista profundizaremos en sus articulaciones desde lo matricial. Desde la caracterización del esquema para el concepto TL, diremos que ha mostrado en sus respuestas al cuestionario un esquema *Inter*- TL.

Hemos dado cuenta de la forma en que fueron seleccionados los estudiantes del caso para las entrevistas, y mostramos el criterio para analizar los esquemas, lo que constituye la directriz de análisis de nuestros datos. A continuación, las entrevistas.

5.2 LAS ENTREVISTAS Y LAS EVIDENCIAS OBTENIDAS.

Con el propósito de documentar la investigación en profundidad, y a partir de los datos obtenidos en el cuestionario sobre construcciones y mecanismos mentales del concepto TL en sus tres interpretaciones, son invitados durante el mes de noviembre del año 2013 los estudiantes E3, E9 y E18. Se consignó mediante un registro escrito y un video las respuestas de los estudiantes a un cuestionario elaborado a partir de su producción individual en la primera etapa de la investigación; se ha transcrito el audio para su análisis y se incluyen las imágenes de sus respuestas escritas.

A continuación mostraremos los análisis de las entrevistas realizadas a los tres estudiantes, los que se realizaron a la luz de las DG propuestas y de nuestra hipótesis para determinar la coherencia en el esquema del concepto TL.

5.2.1 ENTREVISTA A E3.

Se invitó al estudiante E3 a una entrevista el 22 de noviembre del año 2013. A continuación presentamos algunos extractos de la transcripción del audio correspondiente a sus respuestas, incluyendo las preguntas y las imágenes de sus respuestas escritas. La transcripción completa de esta entrevista se encuentra en anexo. A continuación el desarrollo del análisis de la entrevista.

5.2.1.1. ANÁLISIS DEL RELATO DE E3.

El cuestionario y las respuestas de E3.

Primera pregunta del cuestionario de la entrevista:

Considere el carrito de un tren que aparece en la figura1, se deforma en la figura 2.

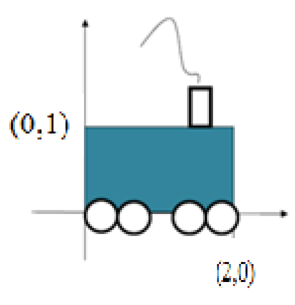


Figura1.

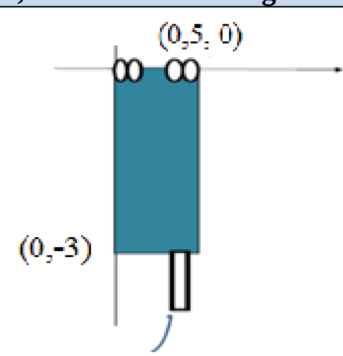


Figura 2

¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2?

E3 se toma un tiempo y responde:

[E3--13] Creo que no.

[Ent-14] ¿Crees que no?

[E3--14] Creo. Pero estoy viendo si es que sí.

[Ent-15] ¿Y cómo tratas de ver si es que sí lo es?

[E3--15] Como que sólo estoy viendo la izquierda, en eso estoy pensando. Estoy tratando de buscar. Si mando, por ejemplo (0,2), a alguno de estos tres vectores, a través de esa misma transformación debería mandar este en los otros dos restantes y este último que queda aquí.

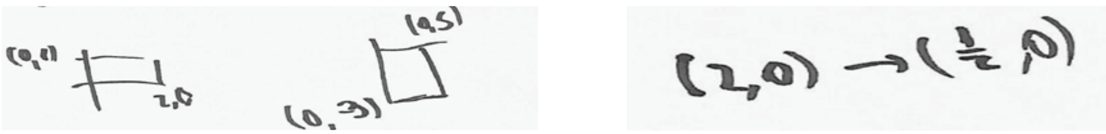


Figura 5.1. Las primeras aproximaciones de E3 a la respuesta de pregunta 1.

E3 declara algunas dudas sobre las figuras que representan un cambio modelado por una TL. Para esclarecer esta situación echa mano al teorema fundamental del álgebra lineal, y establece una correspondencia entre las figuras. Muestra explícitamente cómo hacer una correspondencia entre vectores y con ello concluye que sí es una TL, o mejor dicho, que existe una TL que describe ese cambio. A continuación se preocupa de la estructura algebraica; al establecer la suma de vectores se preserva bajo la función encontrada. Según uno de los descriptores del esquema, es un nivel *Intra*-TL.

[E3--23] Porque, cómo se llama, si mando este de acá, o sea, si mando uno en uno después voy a preservar la suma y va a ser una transformación lineal.

Como se muestra en la figura 5.2, E3 establece la correspondencia entre vectores y su operatividad mediante la comprobación de la estabilidad de la combinación lineal para este caso, por lo que podemos decir que el concepto de combinación lineal ha sido desencapsulado para realizar acciones sobre vectores específicos.

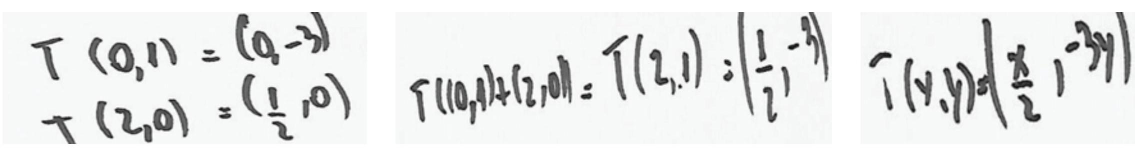


Figura 5.2. Trabajo de E9 para encontrar la transformación lineal en su interpretación funcional

[Ent-25] ¿Y podrías encontrar la transformación lineal? Porque ahora me estás respondiendo que sí.

[E3--25] Sí, ahora creo que sí hay.

[Ent-29] ¿Y cómo podrías verificar que cumple, ahí, rápidamente?

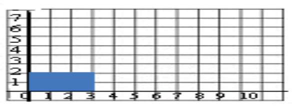
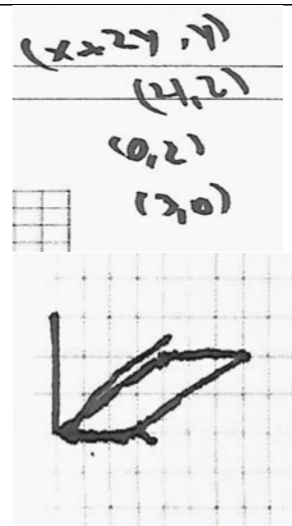
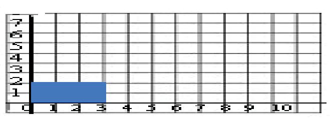
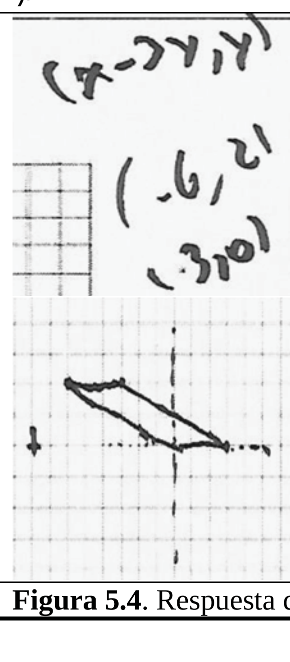
[E3--29] Que la suma de estas dos me da la suma de estas.
Estoy preservando la operación.

Este diálogo y las imágenes son evidencias de cómo E3 desarrolla la construcción de la TL, preservando la estructura algebraica.

A pesar de un comienzo en que duda si las imágenes mostradas en la primera pregunta constituyen una TL, E3 mostro construir los fundamentos del concepto desde lo que llamamos la interpretación geométrica. Se le propuso construir la interpretación funcional, sin embargo E3 no lo realizó en forma inmediata y hubo que incluir la siguiente pregunta:

Segunda pregunta del cuestionario en la entrevista:

Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + \beta y, y)$ con $\beta \in \mathbb{Z}$, bosqueje la región obtenida al aplicar la transformación lineal al rectángulo dado en la figura cuando $\beta = 2$ y $\beta = -3$

Figura	$\beta = 2$
	
	Figura 5.3. Respuesta de E3
Figura	$\beta = -3$
	
	Figura 5.4. Respuesta de E3

En las imágenes de la figura 5.3 y 5.4 revelan la producción de E3 para dar respuesta a la pregunta, mostrando construir el cambio de la figura mediante la aplicación del teorema fundamental del álgebra coordinando el plano figural $\boldsymbol{R^2}$ con dicho teorema. Construye la interpretación geométrica de la TL, posibilitándolo a articular con la funcional, por lo que podría construir la interpretación funcional para la primera pregunta y posteriormente realizar la demostración.

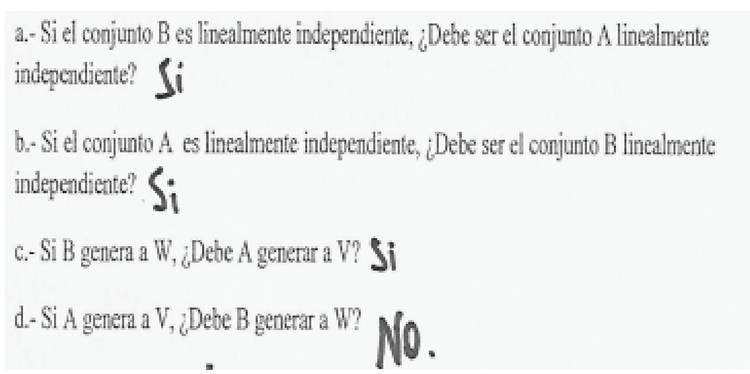
Entonces proponemos en la tercera pregunta, verificar si su esquema se puede desprender de la interpretación geométrica para construir el concepto TL.

Tercera pregunta del cuestionario de la entrevista:

Sea $\mathrm{T}: V \rightarrow W$ **transformación lineal y dos conjuntos** $A=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ **y** $B=\{w_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_n\} \subset W$ **, talque** $T(v_1)=w_1, T(v_2)=w_2, \ldots, T(v_n)=w_n$

a.- Si el conjunto *B* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *A* linealmente independiente?
b.- Si el conjunto *A* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *B* linealmente independiente?
c.- Si *B* genera a *W*, ¿debe A generar a *V*?
d.- Si *A* genera a *V*, ¿debe *B* generar a *W*?

En el transcurso de la entrevista para la pregunta 3, E3 responde como se muestra en la figura 5.


a.- Si el conjunto B es linealmente independiente, ¿Debe ser el conjunto A linealmente independiente? Si

b.- Si el conjunto A es linealmente independiente, ¿Debe ser el conjunto B linealmente independiente? Si

c.- Si B genera a W, ¿Debe A generar a V? Si

d.- Si A genera a V, ¿Debe B generar a W? No.

Figura 5.4. Respuesta final del estudiante E3 a pregunta 3.

Estas respuestas corresponden a los siguientes discursos, que hemos simplificado dejando la evidencia de algunas de las dificultades que se presentaron.

E3 reescribe los datos de la pregunta para aclarar la información y desde allí proponer sus respuestas. En la figura 5.5 se muestra cómo reinterpreta la pregunta y establece algunas respuestas que corrige.

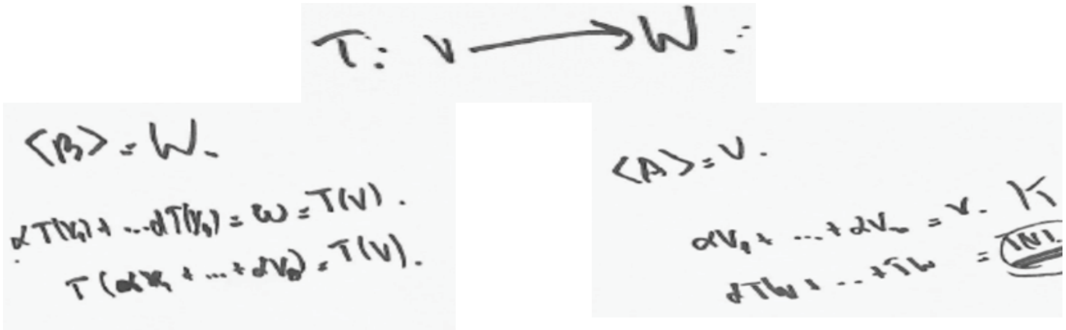


Figura 5.5. Análisis inicial hecho por E3 para dar respuesta a la pregunta 3.

[E3--57] Ya, entonces si W… Si esto es cero, todos estos alfas son cero.

[E3--59] Ahora voy a ver si… Estos de acá, como ya tienen una configuración lineal, hacerlo sin que actúe el cero.

E3 mostró coordinar los conceptos de combinación lineal y de TL en esta pregunta; en cambio, presentó algunas dificultades en la misma pregunta, parte c) y d), en las que aparecían conjuntos generados. Su primera respuesta para la pregunta c) es:

[E3--78] Yo tengo entendido que sí.

[E3--79] Sí. Supongo que porque se aplica una transformación al revés, llegaría a lo mismo.

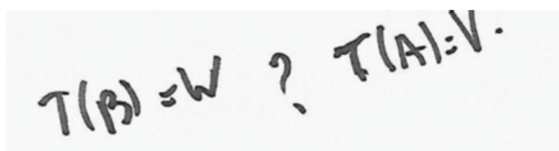


Figura 5.6. Duda de E3 para dar respuesta a la pregunta 3c).

[E3--81] B genera a W.

[E3--86] …B genera a W… Estoy sacando las… [Piensa.] Ya, entonces a partir de W, entonces lo voy a escribir como combinación lineal. Da lo mismo cómo hacerlo.

[E3--89] Ah, yo tengo esto, entonces ahora quiero ver si a partir de esto se puede escribir como… Me da la impresión, yo creo que sí.

En el transcurso del diálogo anterior se evidencian algunas dificultades para dar respuesta a la pregunta, finalizando con la siguiente expresión:

[E3--118] Se me arranca. Quiero ver si A debe generar a V. O sea me voy a preocupar de esto.

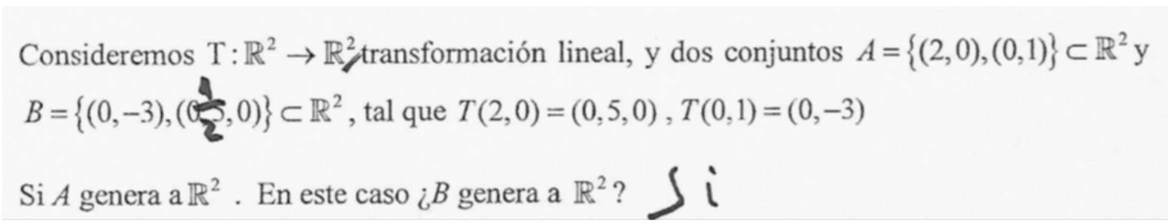
A pesar de que sus respuestas finales, como se mostró en la figura 5.4, son correctas, dice que “se me arranca”. Las dudas mostradas por E3 parecen provenir del concepto de función, esto es, la TL en su interpretación funcional no está totalmente construida. Parte de los conceptos que constituyen su esquema se encuentra en construcciones proceso, las que le permiten operar pero no realizar acciones sobre esta estructura. Se reformula la pregunta anterior por la siguiente, el propósito es ver qué emerge de la construcción:

Cuarta pregunta del cuestionario para la entrevista de E3:

Consideremos T **:*R*^{2}→*R*^{2}transformación lineal, y dos conjuntos** $A=\{(2,0),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ **y** $B=\{(0,-3),(0.5,0)\}\subset\mathbb{R}^2$ **,talque** $T(2,0)=(0.5,0)$, $T(0,1)=(0,-3)$

- ✓ **Si *A* genera a *R*^{2}. En este caso ¿*B* genera a *R*^{2}?**
- ✓ **Si el conjunto *A* es linealmente independiente,**
  ¿B es linealmente independiente? ¿Es un isomorfismo?

E3 responde como se muestra en la figura 5.6 en forma afirmativa, esto significa que si *A* genera a R^2, *B* también.


Consideremos $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ transformación lineal, y dos conjuntos $A=\{(2,0),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ y $B=\{(0,-3),(0,5,0)\}\subset\mathbb{R}^2$, tal que $T(2,0)=(0,5,0)$, $T(0,1)=(0,-3)$

Si A genera a $\mathbb{R}^2$. En este caso ¿B genera a $\mathbb{R}^2$? Si

Figura 5.6. Respuesta de E3.

Es un caso particular de su problemática anterior; desde allí sostiene:

[E3--145] Ya. Entonces, tengo una transformación lineal.

[E3--146] De ***R*^{2}** en ***R*^{2}**.

[E3--147] Y me dan un elemento que es base de ***R***^{2}, o sea, un conjunto.

[E3--148] Y otro que también es base de ***R***^{2}. Y me definen la imagen de la base de ***R***^{2} y me la muestran a otra base de ***R***^{2}.

[E3--149] Así que si A genera ***R***^{2} en este caso sí.

E3 dio respuesta a la pregunta recurriendo a la noción de base. Se omitió una parte del diálogo en la pregunta anterior, en la que se le invita a reflexionar sobre el concepto de función, tras lo que aclara algunas de sus dudas.

A continuación, parte del dialogo que da cuenta de la respuesta de E3 a la segunda parte de esta pregunta.

[Ent-151] ¿Por qué es un isomorfismo?

[E3--151] Porque es biyectiva. Sí. Porque llego a todo ***R***^{2}.

[Ent-156] ¿Y lo podrías probar?

[E3--156] Ya. Tengo que la imagen es igual al recorrido, entonces…

[E3--158] Sí. Porque estoy generando ***R*^{2}**.

Finalmente, E3 mostró evidencias de construir una primera noción de isomorfismo de espacios vectoriales. Hasta ahora ha coordinado la interpretación geométrica con la funcional, pero presenta algunas dificultades en la coordinación del concepto de función con el de TL.

Quinta pregunta del cuestionario de la entrevista:

Dada la transformación lineal F:R^2→R^3, definida por $[F]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, **donde** $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ **y** $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$, **determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales.**
En caso de ser afirmativa su respuesta establezca el isomorfismo. Si su respuesta es que no existe un isomorfismo, justifique.

Comienza su trabajo con la lectura del problema:

[E3--164] Ya. Me dan una transformación lineal, $\boldsymbol{R^2}$ a $\boldsymbol{R^3}$, y me dan la matriz asociada. Y tengo que ver si esa transformación es un isomorfismo.

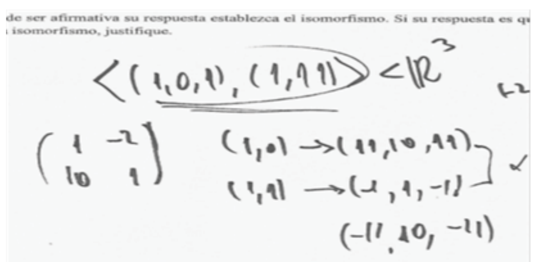


Figura 5.7. Respuesta de E3 a la pregunta 5.

En la figura 5.7 se ve cómo E3 construye la TL; mediante la asignación de los vectores da la base de espacio de partida en imágenes calculadas según la información de las coordenadas dadas en la matriz asociada a la TL, con lo que muestra coordinar la interpretación matricial con la geométrica para dar respuesta. En el diálogo siguiente se profundizan estas ideas.

[Ent-171] ¿Cómo sabes que es un isomorfismo?

[E3--171] Porque si lo restrinjo aquí la imagen. O sea, No. Sí. Entonces, como, el Kernel tendría que ser cero.

A continuación explica que sabe extraer información de la matriz.

[Ent-182] ¿Qué es esa matriz?

[E3--182] La asociada a la transformación. Y ahora la tengo que multiplicar por las coordenadas…

[E3--185] Claro, pero no sé sacar la información sólo con verla. Sí. Eso es.

Finalmente E3 respondió a la pregunta sobre el isomorfismo, mostrando su esquema del concepto TL en su interpretación matricial, desplegando como una la construcción mental objeto para la matriz asociada, sobre la que puede realizar acciones, pero aún no da evidencias de que este esquema (el correspondiente a la interpretación matricial) haya evolucionado a un nivel *Trans*-TL, pues no determina desde la matriz si la función es un isomorfismo.
La entrevista continúa profundizando sobre su interpretación matricial.

Sexta pregunta del cuestionario de la entrevista:

Dada la transformación lineal F:$\boldsymbol{R^3}\rightarrow\boldsymbol{R^2}$, definida por $[F]_D^{D'}=\begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$**, donde** $D=\langle(1,0,1),(1,1,0),(2,1,2)\rangle$ **y** $D'=\langle(1,1),(1,-1)\rangle$**, determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales.**

[E3--206] Ahora tengo una transformación lineal de $\boldsymbol{R^3}$ a $\boldsymbol{R^2}$, y para no perder el tiempo. Y me dan dos conjuntos, o sea el de llegada y partida. Ya, averiguar de nuevo si es que es un isomorfismo. [Piensa.] Me huele que sí. Creo. Pero no estoy seguro.

En la figura 5.8 aparecen los cálculos realizados por E3 para dar respuesta.

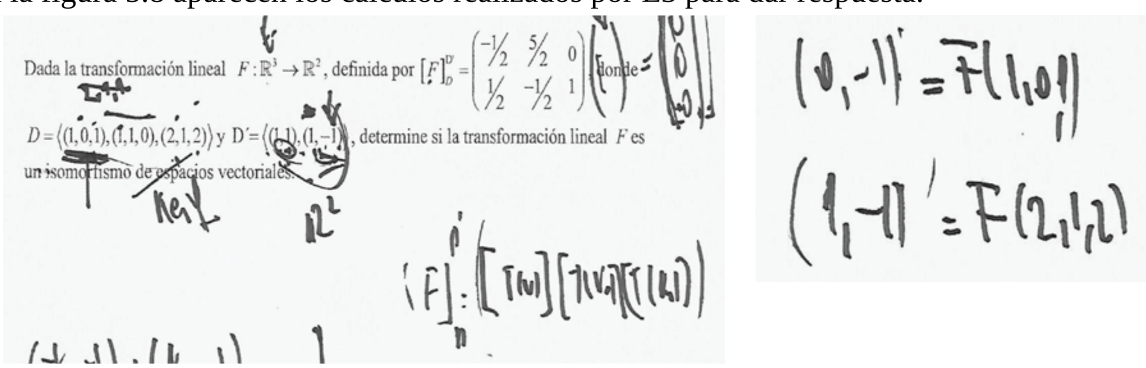


Figura 5.8 Primeras aproximaciones de E3 a la pregunta 6.

[E3--209] Sí, pero a través de la imagen estoy viendo la transformación. Pero no… Es que no…A ver. [Trabaja.] Esa es la matriz. No sé cómo resolver finalmente.

En la figura 5.9 se especifican los cálculos correspondientes al relato de E3.

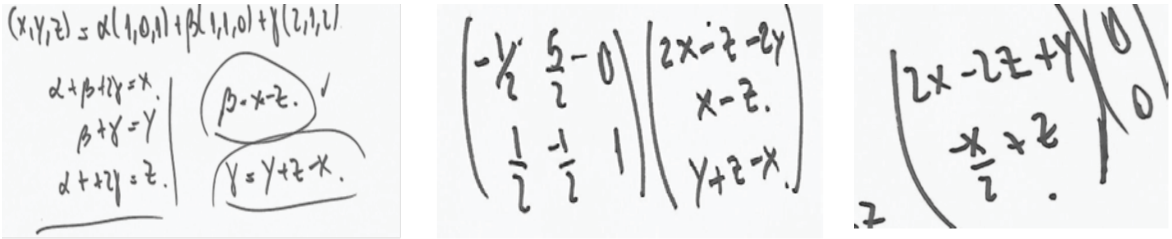


Figura 5.9. Trabajo de E3 para dar respuesta al problema del isomorfismo en la pregunta 6.

[Ent-267] ¿Es un isomorfismo de $\boldsymbol{R^3}$ en $\boldsymbol{R^2}$?
[E3--267] No. No, no, no. Porque quizás no es inyectivo. Sí, quizá no es inyectivo.
[E3--273] No estoy seguro.

Presenta dudas, después de un diálogo trabaja con la noción de Kernel de una TL, un elemento que no fue incluido en ninguna de las interpretaciones ni en la descripción de los esquemas, pero pensamos en incluirlo en la caracterización del esquema del concepto TL.

[E3--281] Claro, pero por el Kernel no era 0.
[Ent-282] Pero ¿cómo calculaste el Kernel? Yo no lo veo.
[E3--282] Las tres imágenes dan cero.
[E3--284] …Es que me huele que si uno de estos me da 0… No me va a dar 0. [Piensa.]
[Ent-286] ¿Estamos en el Kernel?
[E3--287] Sí, es un conjunto de preimágenes del 0.
[E3--288] También es un subespacio. Además.
[E3--289] Los puntos de $\boldsymbol{R^3}$ que van a dar al 0 de la transformación.

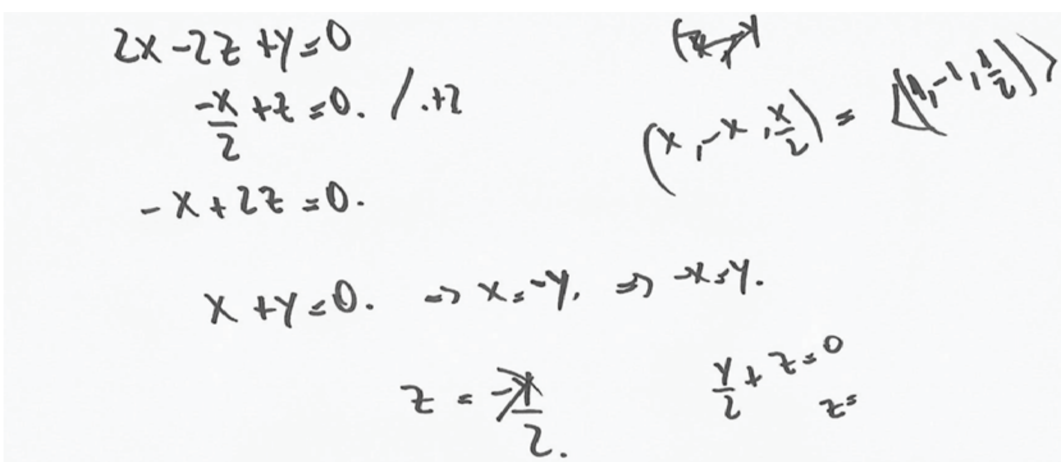


Figura 5.10. E3 calcula el kernel de la transformación lineal.

[Ent-291] El problema es que no tienes la transformación.
[E3--291] Claro. Tendría que… Me demoraría un kilo a través de eso.
[Ent-293] Pero podrías hacerlo.

[E3--293] Yo creo que sí. Igual es medio engorroso.

[Ent-294] ¿Y cómo es más o menos el proceso?

[E3--295] De las bases.

[E3--296] Eso es LI, pero estoy seguro que es LI.

[E3--297] Ah, no sé… Sí, sí es LI. [Musita cálculos.] Sí, sí es.

[E3--298] Claro, traté de ver si esas dos me podían dar esa. Entonces, LI, y ¿en qué estaba? Ah, tratando de especificar la transformación.

[E3--299] Y debería encontrar la combinación de esto a cualquier elemento de esto. Tendría que hacerlo.

[Ent-300] ¿Entonces tú qué me estás diciendo? ¿Qué es lo que tienes que hacer? Debieras encontrar que cualquier vector de $\boldsymbol{R}^3$, un (x, y, z) es igual a combinación lineal de esta base.

[E3--300] Sí. Pero no sé cómo me va a ir. Voy a tratar. Quizá me quede súper feo.

[Ent-321] Ahora vas a buscar el Kernel con la matriz.

[E3--321] Claro.

En este extenso diálogo, E3 muestra elementos fundamentales del esquema de la interpretación matricial, como por ejemplo base y combinación lineal, pero no queda claro su trabajo con coordenadas. A pesar de esto puede construir la transformación en su interpretación funcional y responder a la pregunta sobre el isomorfismo; está echando mano a los conceptos de dependencia lineal, combinación lineal y función, desde donde emerge el concepto de kernel ligado a la inyectividad de la función, el que usa para construir el grupo cociente que sí establece el isomorfismo. En la figura 5.11 da muestra de ello.

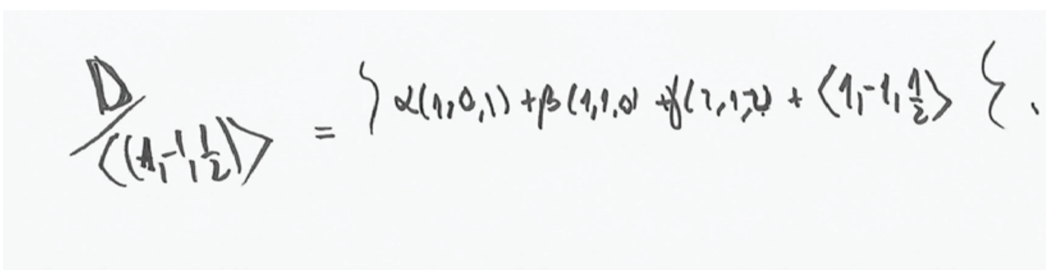


Figura 5.11 E3 encuentra en forma explícita el isomorfismo que surge de la pregunta 6.

E3 muestra cómo son las clases de equivalencia que configuran el isomorfismo con el espacio dado. Podemos dar cuenta de que a pesar de todas las dificultades que presentó E3 durante la entrevista, se fueron aclarando sus construcciones, y podemos decir que está mostrando un esquema inter- del concepto TL, puesto que articula parcialmente las tres interpretaciones. Creemos que faltan algunas de las coordinaciones necesarias para que su esquema sea *Trans*-TL. Pero logra construir el espacio vectorial que sí es isomorfo al espacio dado y cumple con las condiciones: para ello echó mano de los esquemas referidos a las interpretaciones geométrica y funcional, quedando poco claro el uso de la interpretación matricial. Al finalizar la entrevista se vuelve a las matrices y la articulación con la interpretación geométrica, por lo que se le formula la siguiente pregunta:

Séptima pregunta del cuestionario para la entrevista de E3:

Sea T**:**$R^2 \rightarrow R^2$ **transformación lineal definida por** $T(u) = Au$**, donde** $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ **para** $\theta = 30°$ **, T define una rotación de 30° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.**

a.- Demuestre que es una transformación lineal.

b.- Determine las coordenadas de la imagen del punto $P = (5, \sqrt{3})$ **bajo la Transformación** ***T*****. Puedes graficar?**

c.- Si $T_1(u) = A^2 u$ **. Cómo mueve la transformación** T_1 **al vector u.**

d.- Si $T_2(u) = A^{-1} u$ **. Cómo mueve la transformación** T_2 **al vector u.**

Un antecedente sobre este tramo de la entrevista a E3, es que fue extensa y hubo dificultades técnicas: la última parte de la entrevista se dañó, y aproximadamente 20 minutos no están en óptimas condiciones. De todas formas se incluyó este material en el disco compacto con la información, pero usaremos sólo el registro escrito para su análisis.

E3 responde como se muestra en la figura 5.12, esto es, prueba que la interpretación funcional está en construcción mental objeto, pues a pesar de que en el transcurso de la entrevista no hizo la demostración en ningún ejercicio y ahora la hace, realizó acciones sobre este concepto, pues determinó isomorfismos, esto es, características específicas de una TL.

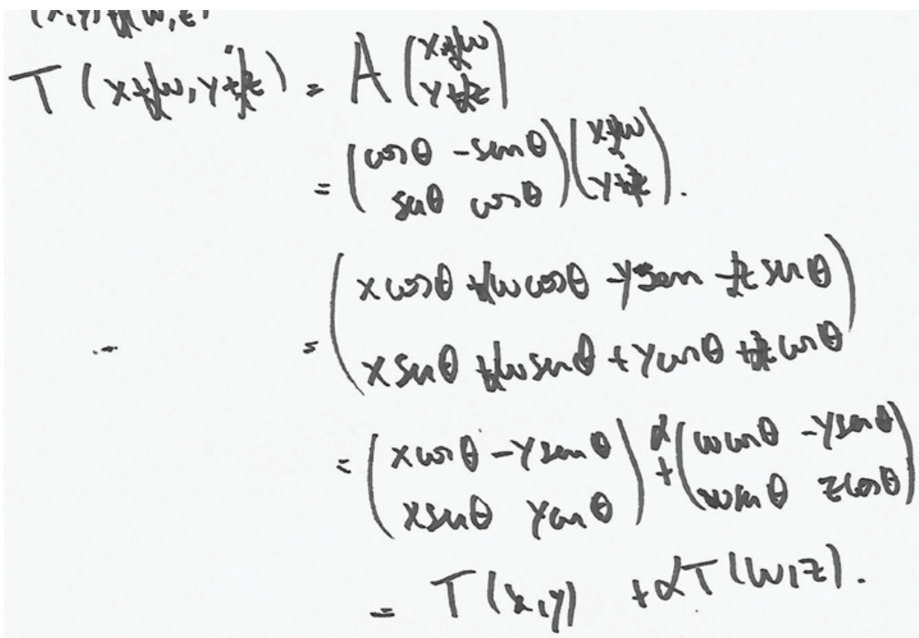


Figura 5.12. E3 muestra que articula la interpretación geométrica.

Al observar las respuestas a la misma pregunta, apartados c) y d), se ve que demuestra articular la interpretación matricial con la geométrica (figura 5.13).

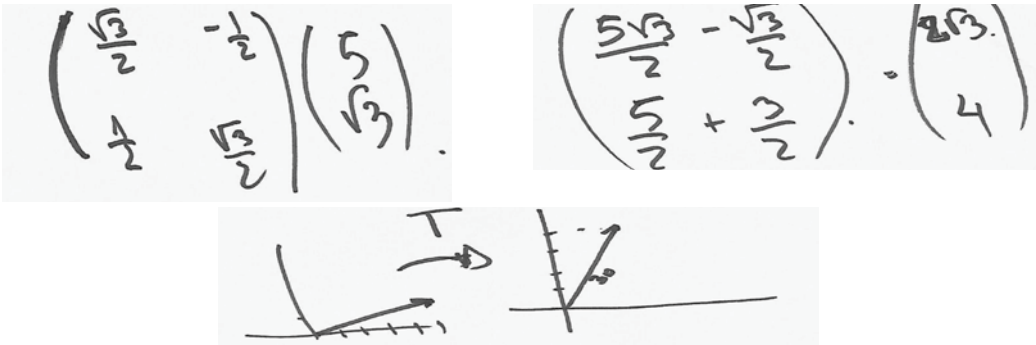


Figura 5.13. E3 realiza el dibujo del giro para responder la pregunta 7.

En la figura se aprecia el trabajo de E3, explicando cómo la matriz actúa sobre los vectores, relatando la relación entre los grados y el movimiento de los vectores, con un relato de estas características: 60°, primero 30 y después 30, en el sentido contrario a las manecillas del reloj. En el otro lo baja 30°. Por otra parte, es claro que desde la interpretación geométrica construye la respuesta a los apartados c) y d), pero la figura muestra que sus cálculos se adhieren a la interpretación matricial, mostrando una construcción objeto sobre esta interpretación.

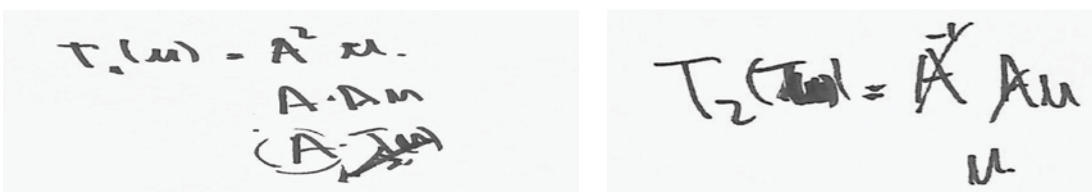


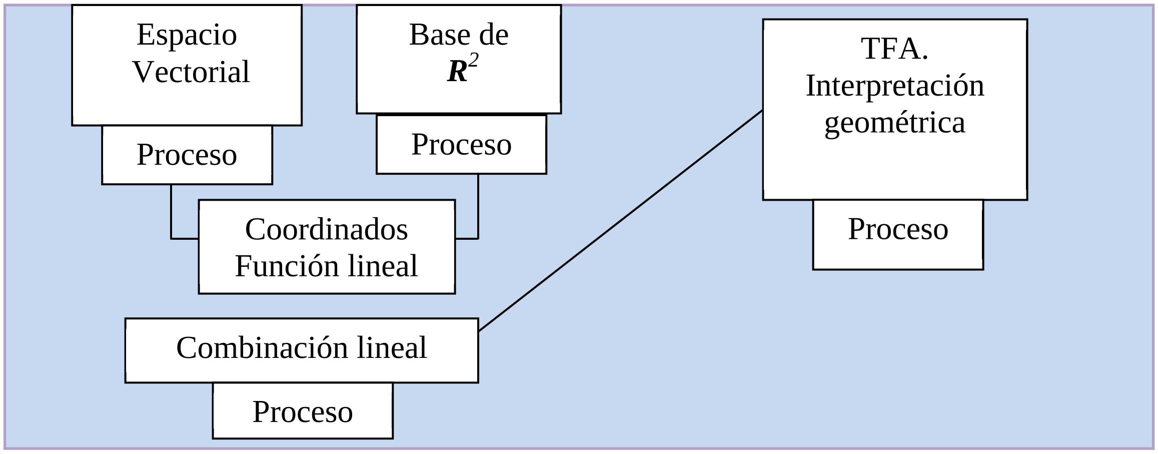
Figura 5.14. Respuesta de E3.

Durante la entrevista completa, E3 muestra que a pesar de dudar en la mayoría de las preguntas, con algo de paciencia emerge su trabajo, y es posible que su nivel de esquema para el concepto TL haya evolucionado desde el instante en que se tomó el cuestionario, de un intra- a un inter-. La entrevista a E3 fue la más prolongada de las tres realizadas en la investigación, y en ella el estudiante mostró cuales son las construcciones mentales que puso en juego para dar respuesta a las preguntas de la entrevista. A continuación resumiremos las construcciones mentales mostradas por E3.

5.2.1.2 CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MOSTRADOS POR E3.

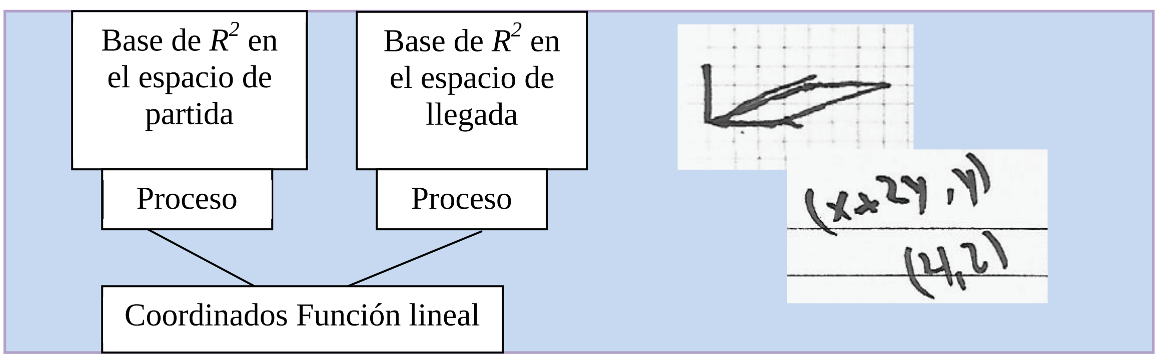
Los siguientes bosquejos corresponden a una síntesis en la que se muestran las construcciones mentales evidenciadas en las respuestas de E3 a cada una de las preguntas durante la entrevista. Las líneas trazadas entre las diferentes construcciones mentales corresponden a los mecanismos mentales. En este tipo de síntesis es posible evidenciar el nivel del esquema puesto en juego, a través de la evolución en sus respuestas.

Pregunta 1



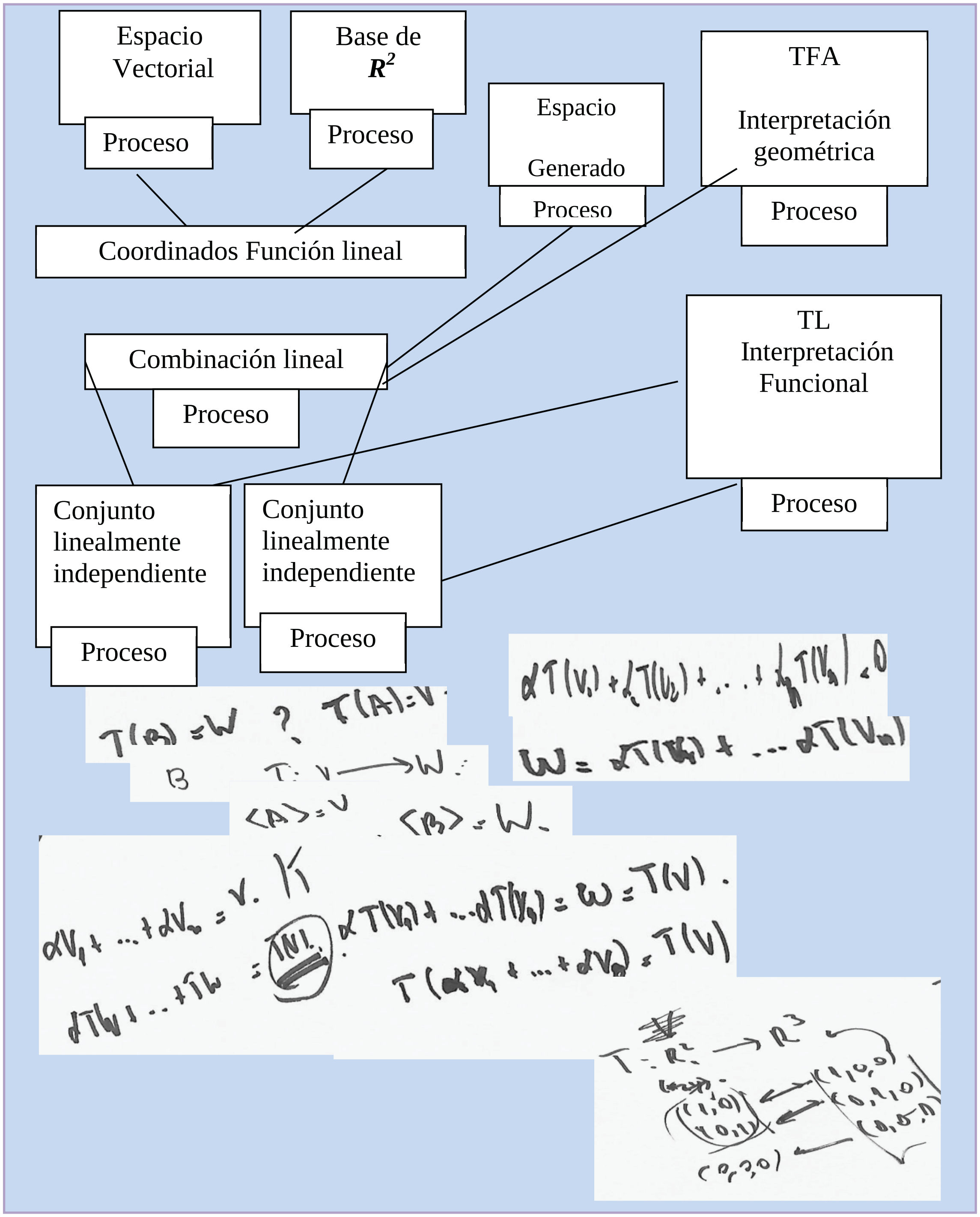
Pregunta 2

Esta pregunta tuvo por objetivo ayudar a E3 a dar respuesta a la primera pregunta, y en ella en particular se logra que E3 muestre la coordinación desde el plano figural para la construcción de la interpretación funcional.



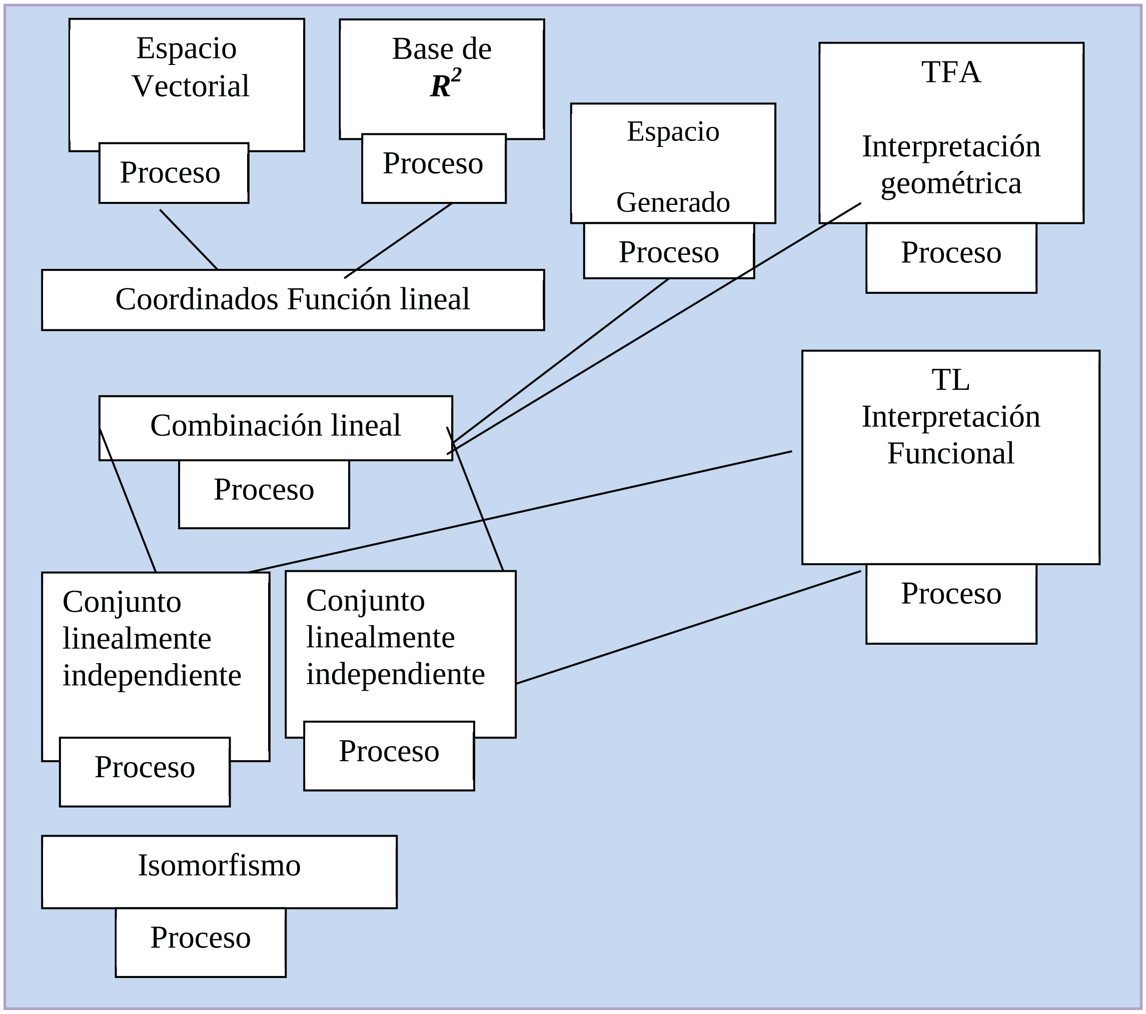
En las preguntas 1 y 2, E3 muestra cuatro estructuras mentales centrales, todas ellas en construcción mental proceso, pues no tenemos evidencia de que pueda realizar acciones sobre estas construcciones. Existe evidencia de dos coordinaciones fundamentales, una entre los conceptos de base y espacio vectorial, los que fueron coordinados por la función lineal, y la otra corresponde a coordinar el TFAL con el concepto de combinación lineal, construyendo así una articulación entre dos interpretaciones, la funcional y la geométrica.

Pregunta 3



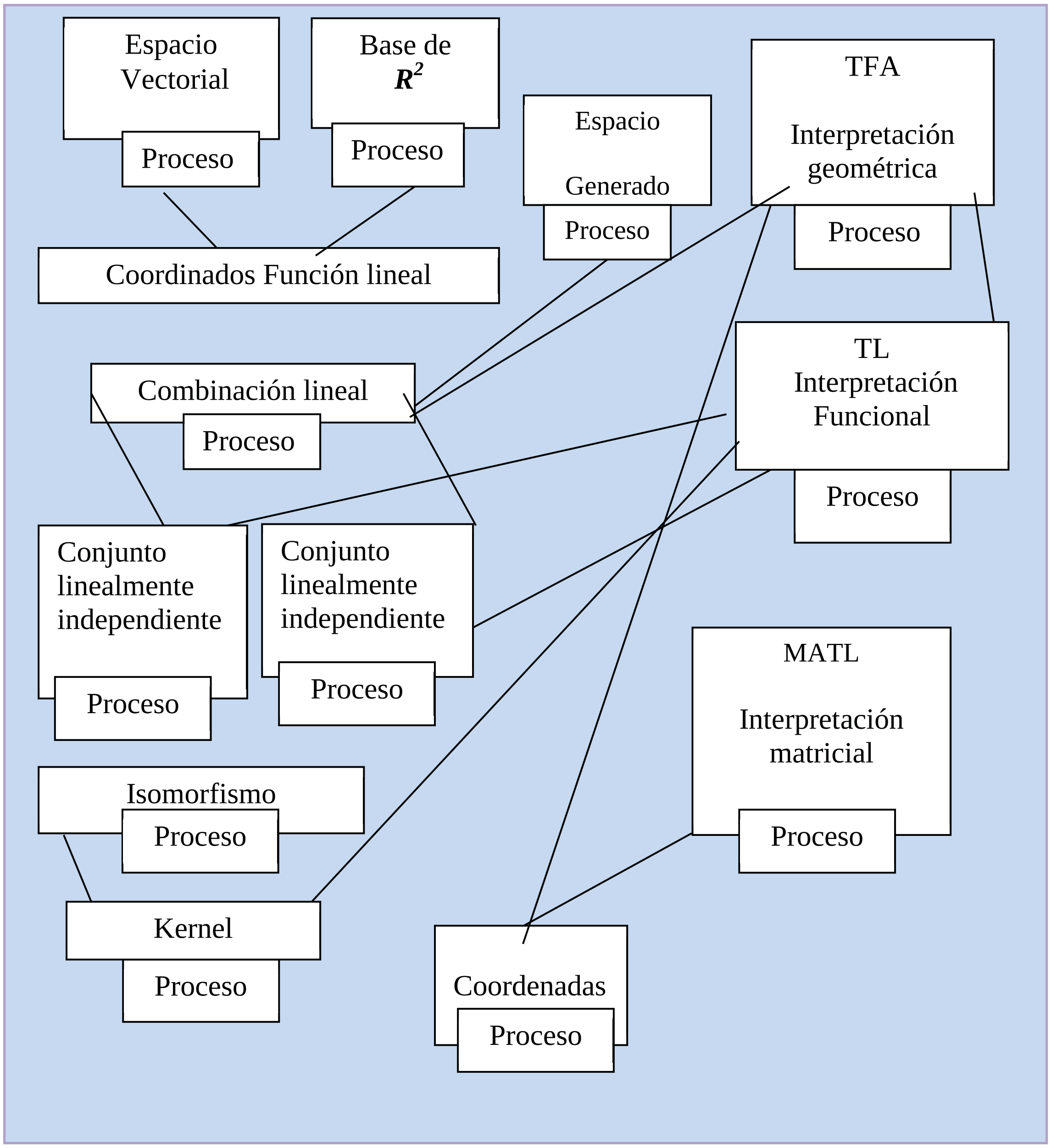
E3, en su respuesta a la tercera pregunta de la entrevista, hace uso de las construcciones mentales de los conceptos anteriores y adiciona nuevas, como las de espacio generado conjunto LI y LD; además, muestra coordinaciones entre ellos y claramente evidencia las construcciones de dos de las interpretaciones del concepto TL, la geométrica y la funcional.

Pregunta 4



E3 en esta pregunta muestra una nueva construcción mental asociada al concepto de isomorfismo de espacios vectoriales. Por otra parte, mantiene las construcciones mentales mostradas para dar respuesta a las preguntas anteriores. Podemos decir que muestra desenvolver del esquema del concepto TL con construcciones mentales proceso no todas coordinadas entre sí.

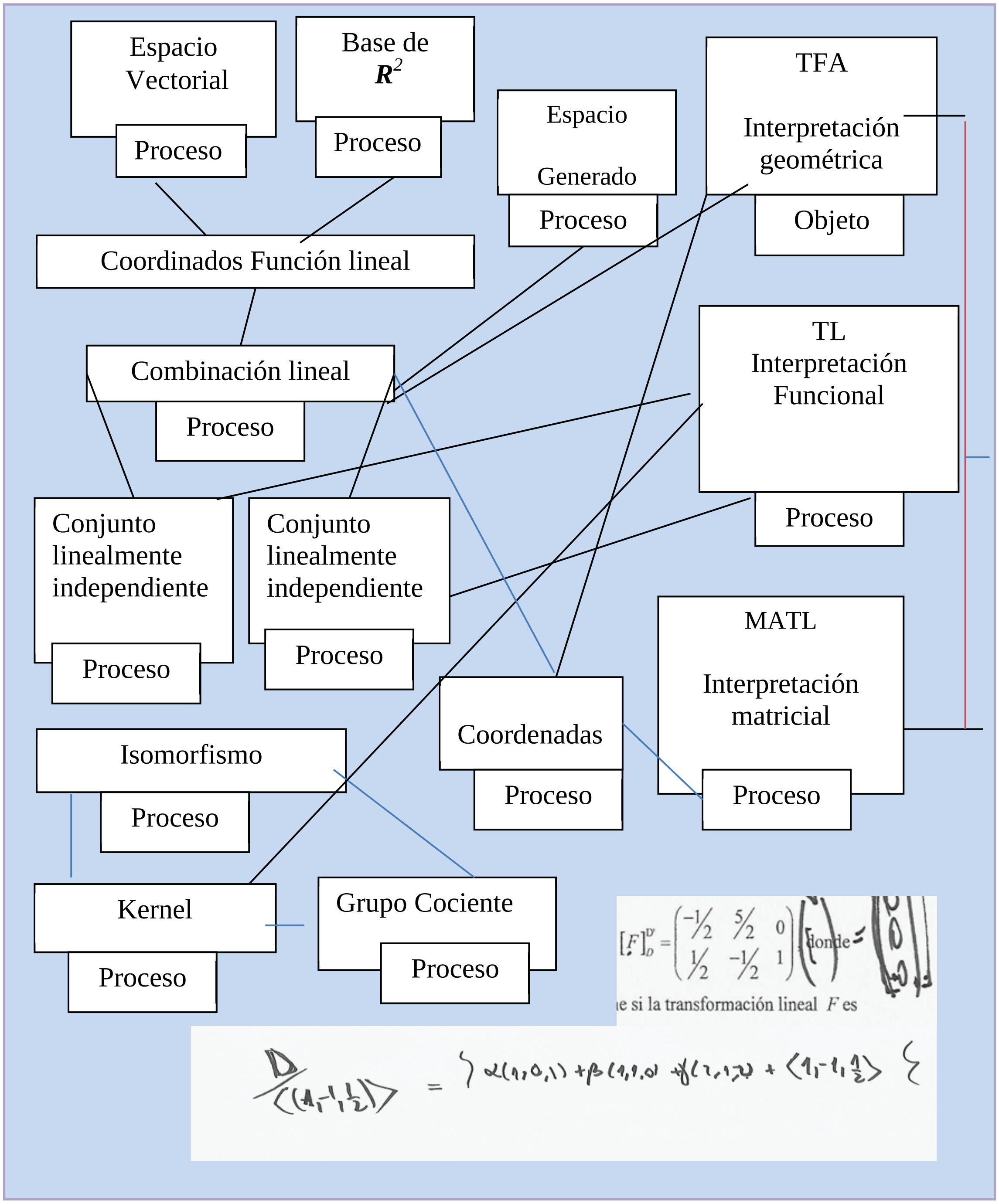
Pregunta 5



Al igual que en la pregunta anterior, E3 muestra nuevas construcciones mentales para dar respuesta a la pregunta 5 de la entrevista; éstas están asociadas a los conceptos de kernel, coordenada de un vector y la matriz asociada a una TL, las que son incorporadas a todas las construcciones mentales mostradas para dar respuesta a las preguntas anteriores.

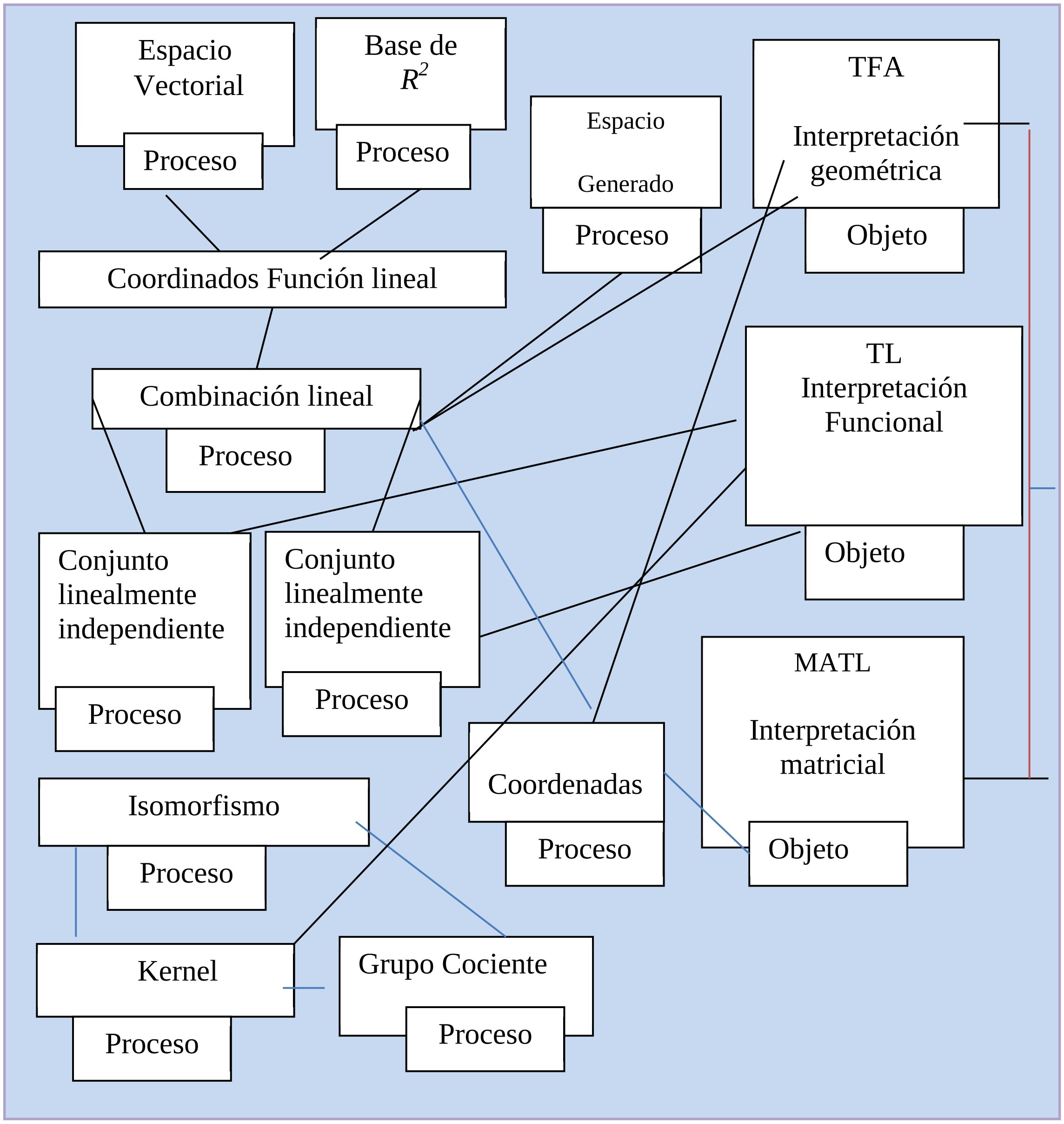
En general, hasta ahora ha mostrado mayoritariamente para el concepto de TL, un despliegue de construcciones mentales proceso, las que coordina entre sí a medida que avanza la entrevista.

Pregunta 6



En la sexta pregunta de la entrevista, E3 muestra mayor coordinación de procesos en su esquema y acciones sobre algunas construcciones mentales; por ejemplo, sobre el concepto TL en su interpretación geométrica, desde donde reconstruye la función de la pregunta y coordina con la interpretación matricial del concepto TL.

Pregunta 7



En la última pregunta de la entrevista a E3, es posible apreciar todas las construcciones y mecanismos mentales que puso en juego para dar respuesta a las preguntas formuladas. En esta pregunta cambió el estatus de las construcciones mentales asociadas a cada interpretación del concepto TL, permitiendo obtener evidencias de un esquema muy cercano al nivel *Trans-* del concepto TL para algunas interpretaciones, pero que en su discurso hace dudar, y al cotejar con nuestra DG para los niveles del esquema vemos que su esquema del concepto TL es *Inter-*.

5.2.1.3 ANÁLISIS DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO TL DE E3.

A continuación resumiremos la información obtenida a partir de la entrevista y el cuestionario realizado en la primera etapa de la investigación sobre construcciones y mecanismos mentales puestos en juego por E3 sobre el concepto de TL. Esta información será contrastada con las DG propuestas. De esta forma, proponemos determinar la coherencia en el esquema del concepto TL obteniendo información para refinar el modelo multinterpretativo.

En el cuestionario inicial, E3 mostró construcción mental proceso para en cada una de las interpretaciones. Las principales construcciones mentales puestas en juego para dar respuesta a las preguntas por interpretación fueron:

- ✓ En la interpretación funcional, los conceptos de función, dominio y recorrido de una TL, espacio vectorial, vector, imagen de un vector, imagen de un vector mediante una TL y base. No se logró determinar si en algunos su construcción mental era proceso, pero para la mayoría de ellos logro coordinaciones exitosas. No contesto a la pregunta 5 en esta interpretación, la que hace referencia a una TL entre espacios vectoriales con operaciones binarias no usuales, lo que es un indicador del nivel de su esquema para esta interpretación. Tampoco respondió a la pregunta 2, por lo que su nivel de esquema para esta interpretación es *Intra*-TL.

- ✓ En la interpretación matricial emergen nuevos conceptos además de los anteriores, como son los de coordenada, matriz y en forma explícita el de combinación lineal, que juega roles de mecanismo y construcción mental. En esta interpretación, E3 logra mostrar construcciones mentales próximas a la de objeto, para los elementos que construyen la MATL, lo que concuerda con el orden de selección de sus cuestionarios (MFG). Según los indicadores del nivel en el esquema para esta interpretación del concepto TL corresponde a un nivel *Intra*-, pues la pregunta 5, que determina si ha construido la MATL, la responde realizando acciones. La construcción de una MATL para espacios vectoriales isomorfos a $\boldsymbol{R}^n$ tampoco está lograda.

- ✓ En la interpretación geométrica surgen conceptos como los de linealidad y función y su relación con conjuntos LI y LD, además de los conceptos de base e implícitamente el de dimensión. E3 mostró una construcción proceso, omitiendo sólo una pregunta, lo que resulta contradictorio con las omisiones realizadas en el cuestionario de la interpretación funcional, del cual no responde dos. Muestra un nivel *Inter*- para esta interpretación.

Todas las construcciones mentales antes descritas se encontraban dispuestas en las DG, por lo que han servido de buen modelo para interpretar sus respuestas. Durante la entrevista surge el concepto de kernel, que no fue incluido en las DG de ninguna interpretación, ni en la descripción de los niveles de esquema.

Durante la entrevista, E3 mostró la complejidad del esquema que usa para dar respuesta a problemáticas relacionadas con el concepto TL; aquí las preguntas obligaban a poner en juego un esquema evolucionado, pues determinar si dos espacios son isomorfos requiere desenvolver el esquema del concepto TL y agregar construcciones de conceptos como cociente. Para ello el kernel juega un rol fundamental, y debe mostrar una construcción mental objeto que le permita realizar las acciones para construir el isomorfismo de espacios vectoriales.

E3 logró construir el isomorfismo no sin dificultades, como se muestra en el análisis del discurso de la entrevista, no obstante los conceptos y sus construcciones mentales mostradas para el esquema del concepto de TL fueron: espacio vectorial, base función lineal, combinación lineal, espacio generado, conjuntos LI y LD, matriz de coordenadas, isomorfismo como función, cociente entre espacios vectoriales, kernel, entre otras, todas ellas en construcciones mentales proceso, y posiblemente algunas de ellas sean construcciones objeto que hayan sido desencapsuladas, pero no hay evidencia de ello.

Por otra parte, mostró en las tres interpretaciones una construcción mental objeto, pues realizó acciones sobre cada uno de estos esquemas, lo que según nuestra hipótesis sobre el nivel del esquema para el concepto sería *Inter*-TL. E3 mostró una evolución clara en su esquema para el concepto TL, pues en sus respuestas al cuestionario inicial su nivel de esquema para el concepto fue *Intra*-TL; aun en la entrevista dio evidencias de que su esquema para el concepto TL está en construcción, por lo que no constituirá una prueba de un esquema tematizado para el concepto de TL.

5.3 ENTREVISTA A E9.

Se invitó al estudiante E9 a una entrevista el 11 de noviembre del año 2013; a continuación presentaremos extractos de la transcripción del audio, incluyendo preguntas e imágenes de sus respuestas escritas. La transcripción completa de esta entrevista se encuentra en anexo. A continuación el desarrollo del análisis de la entrevista.

5.3.1 ANÁLISIS DEL RELATO DE E9.

Primera pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Considere el carrito de un tren que aparece en la figura1, se deforma en la figura 2.

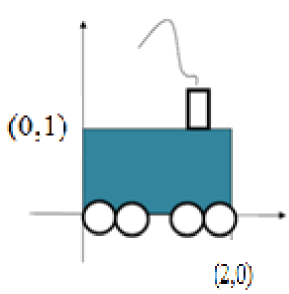


Figura1.

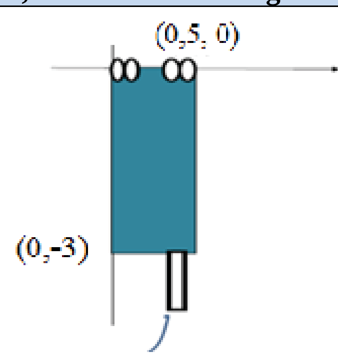


Figura 2

¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2?

E9 responde según transcripción:

[E9--2] Aparentemente sí hay una transformación.

Se invita a encontrar la TL, de modo que:

[E9--3] Si es que existe debería poder. Voy a tratar.

[Ent-5] ¿Eso que escribiste es la forma general de las transformaciones o es una forma que piensas que tiene? En Figura 5.15 aparece el escrito.

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow \left(\tfrac{5}{2}x, -3y\right)$$

Figura 5.15. Transformación propuesta por E9.

[E9--5] Es una reflexión general con respecto al eje de las coordenadas...

Muestra una aproximación a la interpretación geométrica del concepto TL, pues reconoce que es una reflexión. Rectifica su primera impresión y dice:

[E9--6] Pero no es suficiente, porque también hay un cambio en las coordenadas, entonces debería además aplicarle una multiplicación a esta transformación.
En respuesta construye una TL como se muestra en la figura 5.16:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow \left(\tfrac{5}{2}x, -3y\right)$$

Sean (a,b), $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

1) $T((a,b)+(c,d)) = T((a+c, b+d))$
$$= \left(\tfrac{5}{2}(a+c), -3(b+d)\right)$$
$$= \left(\tfrac{5}{2}a, -3b\right) + \left(\tfrac{5}{2}c, -3d\right)$$

2) sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$T(\alpha\cdot(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha\cdot\tfrac{5}{2}x, -3\alpha y) = \alpha(\tfrac{5}{2}x, -3$

Figura 5.16. Respuesta a la primera pregunta de la entrevista dada por E9.

E3 prueba que la función propuesta es una TL, lo que muestra en su respuesta que trabaja la interpretación funcional como modelo explicativo, pero su respuesta inicial es una aproximación desde la interpretación geométrica, pues construye una TL desde la noción de reflexión, como se muestra en la figura 5.17, la que ajusta a la pregunta del cuestionario.

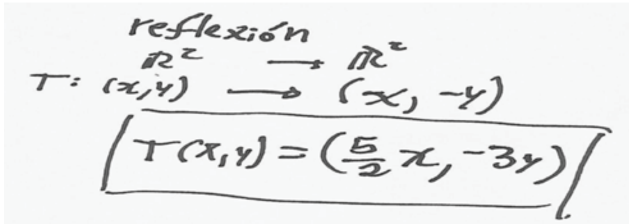


Figura 5.17. Trabajo de E9 en hoja anexa

Para determinar el esquema que el E9 ha puesto en juego, podemos decir que recurre a la interpretación geométrica; desde allí extrae elementos como la reflexión, como una construcción mental objeto, desde la que desencapsula una forma general y la adapta para dar respuesta; esta adaptación consiste en coordinar la concepción proceso del concepto de función reflexión y el de vectores de una base de $\boldsymbol{R}^2$, desde el plano figural. Se muestra en la descomposición genética propuesta para la interpretación geométrica.

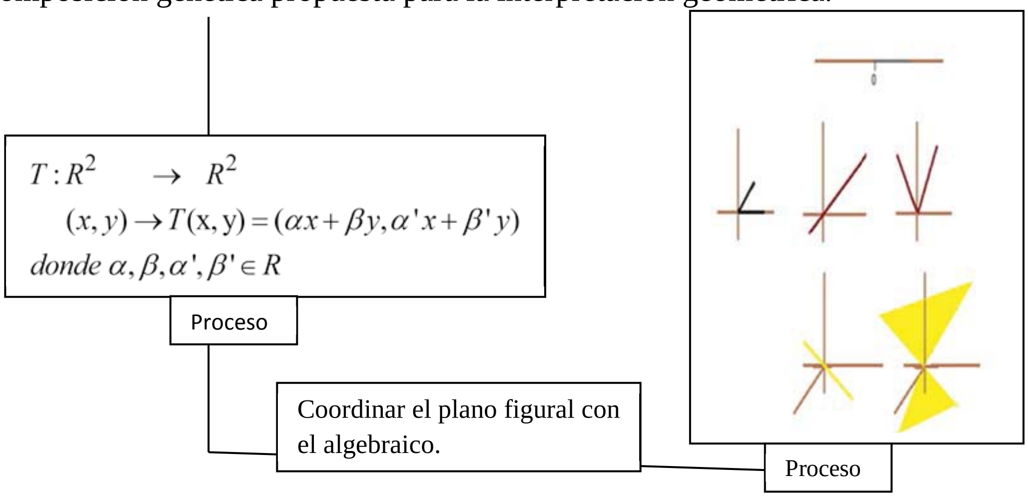


Figura 5.18. Tramo de la Descomposición Genética puesta en juego por E9.

Posteriormente, para construir la función que entrega como respuesta, muestra una construcción objeto del concepto TL en su interpretación geométrica y una articulación con la interpretación funcional. Por ahora podemos decir que es una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional, pues la función que construye desde lo geométrico la justifica en lo funcional.

En el transcurso de la entrevista, en la misma pregunta se profundiza sobre el concepto de isomorfismo, a lo que responde:

[E9--11] Sí, es un isomorfismo claramente, porque se puede ver que el término de esta transformación lineal es cero, y que la imagen, como tiene dimensión 2, es igual a la imagen…, así que por lo tanto es inyectiva y biyectiva, así que es un isomorfismo.

Su argumentación está dando cuenta nuevamente de que ha articulado las interpretaciones geométrica y funcional. En relación a la epiyectividad, argumenta la dimensión de la imagen, y en cuanto a la inyectividad, utiliza el teorema que relaciona las dimensiones de los espacios de partida con el de llegada y el núcleo de la TL; con claridad es la interpretación funcional la que le permite argumentar.

Desde el modelo propuesto, E9 está mostrando una construcción mental objeto del concepto TL en su interpretación funcional, pues es desde este concepto que desencapsula los conceptos de inyectividad y epiyectividad como concepciones proceso, los que coordina mediante el teorema de las dimensiones. Toda su construcción se levantó desde la visualización propuesta desde el plano figural que le permitió construir la función TL que dio como respuesta.

Según el análisis de los datos del cuestionario de la primera etapa en la investigación, E9 mostró problemas en la construcción mental objeto del concepto matriz asociada a la TL, pues a pesar dar evidencias de una construcción mental objeto para el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, esto no le alcanzó para lograr una construcción objeto del teorema asociado a la matriz asociada a la TL. Por lo que proponemos:

Segunda pregunta del cuestionario para la entrevista de E9

Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **transformación lineal definida por** $T(u) = Au$ **, donde** $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ **para** $\theta = 30°$ **, T define una rotación de 30° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.**

a.- Demuestre que es una transformación lineal.

b.- Determine las coordenadas de la imagen del punto $P = (5, \sqrt{3})$ **bajo la Transformación T. Puedes graficar?**

c.- Sí $T_1(u) = A^2 u$ **. Cómo mueve la transformación** T_1 **al vector u.**

d.- Sí $T_2(u) = A^{-1} u$ **. Cómo mueve la transformación** T_2 **al vector u.**

E9 responde según transcripción de audio:

[E9--13] Me había complicado un poco con la anotación.

Muestra la primera evidencia sobre las dificultades que posee en la construcción de la MATL.

[Ent-14] ¿Qué pasó con la anotación?

[E9--14] Es que de hecho me había confundido, porque pensé en un momento que la transformación lineal era tomada de algún ángulo y le aplicaba, entonces esto como la variable…

En figura 5.19 se tiene su respuesta a la duda sobre las variables de la función propuesta, lo que le ayuda a entender la matriz.

$$\alpha \in \mathbb{R},\quad u, v \in \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) = (x \quad y)$$

Figura 5.19. E9 aclara el concepto vector.

En figura 5.20 construye la matriz para la pregunta.

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Figura 5.20. E9 Construye la matriz para dar respuesta a la pregunta 2.

.

En este tramo de la entrevista, E9 trabaja dando respuesta escrita, como se muestra en la figura 5.21, sobre la prueba de que la función es una TL.

$$T(\alpha u + v) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\quad u, v \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{p.d.} = \alpha T(u) + T(v) \qquad (x, y) = (x \quad y)$$
$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) = A(\alpha u + v) &= A \cdot \alpha u + A v \\ &= \alpha A u + A v \\ &= \alpha T(u) + T(v) \quad // \end{aligned}$$

Figura 5.21. Trabajo de E9 para probar que la función es una TL.

Se le pregunta sobre cómo construye la demostración:

[E9--19] Los vectores cuando son de R^2, puedo escribirlos como una matriz de 1x2. Entonces por propiedades de las matrices conforman una línea, entonces puedo aplicar distribución. El producto distribuye.

[Ent-20] Entonces es por distributividad, es por propiedad de las matrices.

[E9--20] Sí.

[E9--21] Y nuevamente por distributividad de las matrices se puede distribuir este producto y puedo bajar esto.

[Ent-22] ¿Y eso depende de la matriz que te dieron?

[E9--22] No. [Trabaja.]

E9 mostró resistencia a la pregunta y declaró tener problemas con la anotación. Una vez construida la matriz específica para la pregunta, procede a demostrar que la función es una TL, echando mano a la interpretación funcional y al álgebra de matrices.

En esta parte muestra las primeras evidencias de que el esquema asociado a la interpretación matricial no está tematizado; no obstante, puede dar respuesta, pues logra desde el concepto de función construir la matriz que define la TL; para ello debió coordinar los procesos provenientes de dos de las interpretaciones, la matricial y la funcional, esto es, la construcción mental proceso del concepto función y la construcción mental proceso de la matriz asociada a la TL.

Todo ello le permitió demostrar que la función así definida era una TL. En otras palabras, dio cuenta de la articulación entre la interpretación funcional y matricial.

Continúa respondiendo a la pregunta 2 b). Ahora debe determinar las coordenadas de la imagen del vector. En la figura 5. 22 encontramos su respuesta.

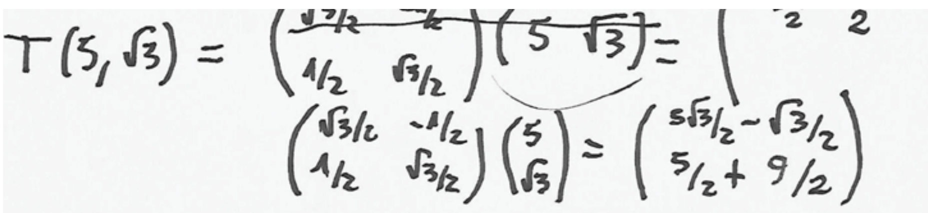


Figura 5.22. E9 calcula la imagen del vector pedido.

En la respuesta a esta parte de la pregunta, E9 permite ratificar las primeras conclusiones obtenidas en el cuestionario, de poseer una construcción mental objeto del concepto coordenada de un vector, o de la imagen de éste. A su vez, mostró hacer uso del TMATL como una construcción mental objeto, pues calcula la imagen del vector pedida mediante la matriz, esto es, realiza acciones sobre la matriz. En un análisis del esquema para el concepto TL, se logra esta construcción pues está en coordinación con la interpretación funcional del concepto, es decir, logra esta construcción desde el concepto de función.

Por otra parte, es claro que en relación a la interpretación geométrica no tiene dudas, y su dibujo da cuenta de que coordina las construcciones mentales proceso del concepto de vector en un plano figural con el de TL o función. Además, podemos observar en la figura 5.23 que dibuja puntos y no vectores.

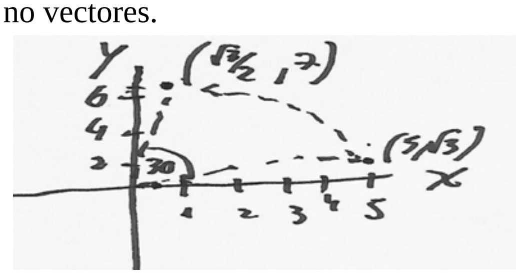


Figura 5.23. Respuesta de E9 que representa cómo se mueve el punto mediante la TL.

Se invita a E9 a reflexionar sobre lo que ocurrió en la pregunta 2b, esto es, su concepción de vector en relación a la de punto y matriz. Para ello, E9 trabaja como se muestra en la figura 5.24 y construye la matriz A^2 para dar respuesta a la pregunta 2.

$$\begin{pmatrix} \cos & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Figura 5.24. Multiplica la matriz por sí misma para obtener A^2 .

Entonces podemos decir que el estudiante construye la matriz asociada a la TL para un ángulo cualquiera, mostrando que posee una construcción mental objeto del concepto de matriz, el que desencapsula, y opera coordinando con los conceptos de trigonometría relacionados con identidades básicas de la suma de ángulos. Creemos que estos argumentos constituyen evidencia de una construcción objeto de la interpretación funcional, esto es, una tematización de este concepto. Por ejemplo, en la figura 5.25 escribe que la TL mueve al vector *u* en 60°.

$$T_1(u) = A^2 u = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Luego, T_1 mueve a u en 60°

Figura 5.25. Multiplica la matriz por sí misma para obtener A^2 .

En un análisis más detallado, para responder a la pregunta muestra coordinar los conceptos de matriz con los de TL en su interpretación geométrica, pues logra establecer el ángulo del movimiento; esta conclusión se aclara en el diálogo que continúa.

[Ent-30] Ahora la transformación inversa. (Acá hay otra hojita.)

[E9--30] Esta propiedad viene a ser por la paridad del coseno y la disparidad del seno. Entonces el ángulo es el vector del ángulo negativo. Entonces es como aplicar la transformación con coseno de -30… Se da un giro.

En la figura 5.26 se muestra cómo E9 ordena su respuesta.

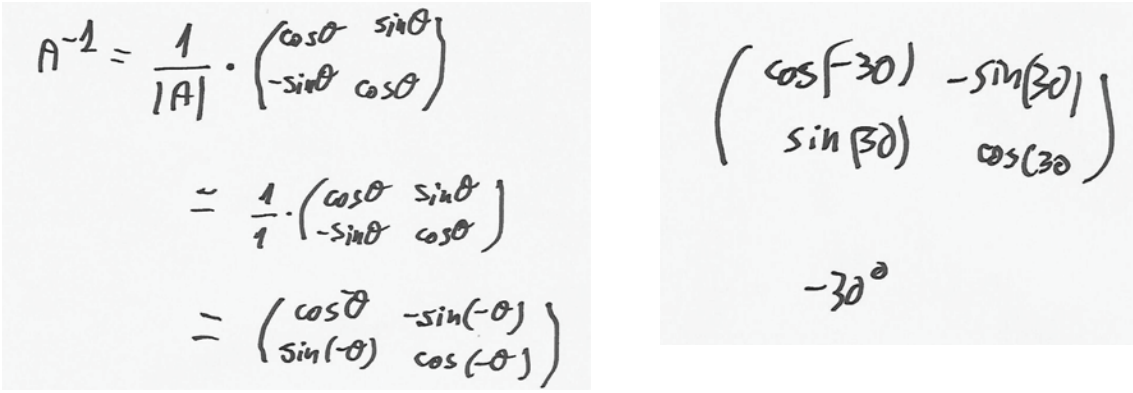


Figura 5.26.Produccion de E9 para dar respuesta a la pregunta 2.

En la pregunta 2, E9 mostró dificultades para dar respuesta; primeramente, se confunde con la presentación de la pregunta, que aludía a la interpretación matricial, la que logra abordar desde su esquema, que corresponde a la interpretación funcional y que fortalece mediante la interpretación geométrica, en este caso su asociación a una rotación dada en términos trigonométricos; posteriormente sortea la dificultad coordinando las construcciones mentales proceso del concepto matriz, que podría ser una construcción mental objeto o un esquema que ha tematizado, lo que le permite operar sobre la matriz dada.

Tercera pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Sea V un espacio vectorial de dimensión cuatro y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ **base para V. Sabemos que existe una única** $T \in L(V,V)$ **que cumple con:**

$$T(v_1) = v_2,\ T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_4,\ T(v_4) = \vec{0}$$

¿Cuál es la trasformación *T?*

E9 responde según transcripción de audio a la pregunta 3:

[E9--32] Esta sería la transformación lineal. (Figura 5.27)

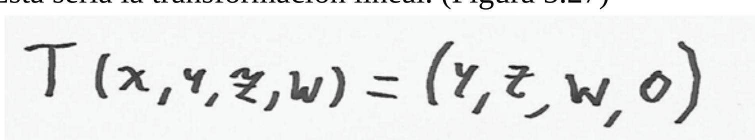


Figura 5.27. Respuesta de E9

Muestra una construcción mental objeto del concepto TL, del cual ha revertido como un proceso que le permite reconstruir la TL. Se le invita a explicar su trabajo, a lo que responde:

[E9--32] La escribí como vectores de R^4 puesto que una base de R^4 se puede hacer isomorfa a cualquier espacio en el dimensión 4, así que en particular lo podemos escribir como vector de R^4 por la dimensión, y esta es la única transformación con esas características.

E9 muestra una construcción mental proceso del concepto de dimensión de un espacio vectorial. A continuación veremos cómo desarrolla este argumento.

Cuarta pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$**, definida por** $[F]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$**, donde** $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ **y** $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$**, determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales.**
En caso de ser afirmativa su respuesta establezca el isomorfismo. Si su respuesta es que no existe un isomorfismo, justifique.

La respuesta de E9 a la pregunta, como se muestra en la figura 5.27, es clara.

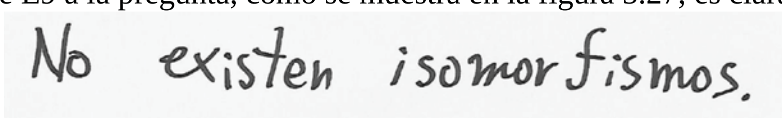


Figura 5.27. Respuesta de E9.

Lo que según el audio se transcribe en los siguientes argumentos:

[E9--33] Claramente no es isomorfismo. Puesto que dimensión de R^3 es mayor que la dimensión de R^2. Tienen que ser iguales para que los espacios sean isomorfos.

[Ent-34] Ya. ¿Es posible redefinir esta función para que sea un isomorfismo?

[E9--34] … No, no es posible, porque no se puede de un espacio de dimensión mayor a una dimensión menor definir una transformación inyectiva.

[Ent-35] ¿No es posible?

[E9-35-] No es posible.

En esta respuesta, E9 muestra una concepción proceso del concepto de dimensión, el que no está siendo coordinado con el concepto TL en su interpretación funcional, lo que no le está permitiendo evolucionar su esquema del concepto TL.

Quinta pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**, definida por** $[F]_D^{D'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$**, donde** $D = \langle (1,0,1),(1,1,0),(2,1,2) \rangle$ **y** $D' = \langle (1,1),(1,-1) \rangle$**, determine si la transformación lineal *F* es un isomorfismo de espacios vectoriales.**

[E9--36] Nuevamente la dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

[Ent-37] ¿Estás seguro? Entonces tú dices que no hay un isomorfismo.

[E9--37] Sí.

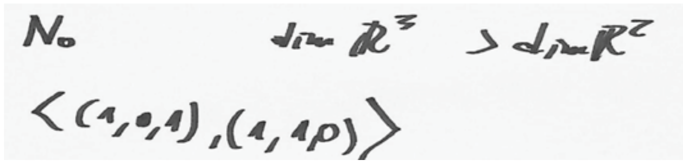


Figura 5.28. Muestra los argumentos de E9.

[Ent-39] ¿Y no es posible redefinir nada? Achicar algo, agrandar algo…

[E9--39] No, no es posible, porque si… Porque el espacio en el conjunto es de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo… Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--41] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar... que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo aunque sean iguales.

[Ent-42] Está bien.

Para dar respuesta a la pregunta 5, E9 coordina las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal. Esto no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de núcleo de la TL que le permitiría construir el grupo cociente, lo que permitiría a su vez construir un isomorfismo.

Sexta pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Sea V= R^R **, espacio de las funciones reales de dominio en** $\mathbb{R}$ **. Sea la aplicación** $F: R^3 \to V$ **, definida por** $F(a,b,c)(\mathrm{x}) = \mathrm{a} + \mathrm{b}\cos^2 x + c\, sen^2 x$ **.**
¿Es una transformación lineal?

E9 responde a la pregunta como se muestra en la figura 5.29 y establece los argumentos que corresponden al esquema de concepto TL en su interpretación funcional.

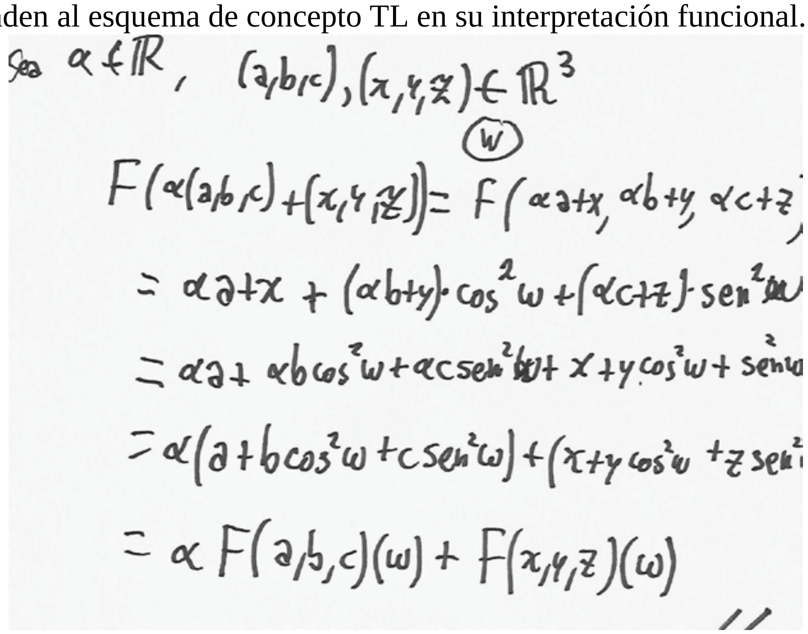


Figura 5.29. Respuesta de E9 a la pregunta 6.

[Ent-42] A ver, esa pregunta es demostrar que algo es transformación lineal, ¿cierto?

[E9--42] Ajá.

[Ent-43] Ya, ¿y? ¿Cómo? *V* es un espacio vectorial, ¿cierto? Eso es espacio de las funciones reales con dominios reales. Vamos a considerar una aplicación que va de R^3 en ese espacio, definida por lo que aparece ahí. ¿Es una transformación lineal?

[E9--43] Verificamos si cumple las características.

[E9--44] Voy a tener algunos problemas con la anotación. A la variable de la función la voy a llamar *w* para no confundir con la componente.

[Ent-45] ¿Qué observas en esta demostración de transformación lineal?, ¿qué le encuentras?

[E9--45] Nada, ninguna particularidad.

[Ent-46] O sea que si cambiamos la función coseno y seno por otra, por exponencial, por x^2, por un polinomio…

[E9--46] Sería independiente en realidad…

E9 responde a la pregunta mostrando que coordina los conceptos de función, espacio vectorial y combinación lineal mediante la igualdad. Por esto, podemos decir que posee una construcción objeto del concepto TL en su interpretación funcional.

Continúa la entrevista invitándolo a reflexionar sobre el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales.

[Ent-47] Una pregunta: ¿es isomorfismo esa transformación lineal?

[E9--47] No, no es un isomorfismo. No puede ser una función inyectiva.

[Ent-48] No es inyectiva, ¿por qué?

[E9--48] Porque pensemos… Por ejemplo, tomemos el vector (1,0,0)…

[E9--49] No, lo estaba pensando mal. [Lo borra.] No, de hecho sí es inyectiva porque a la izquierda va a ser cero.

[Ent-50] Sí es inyectiva, ya tiene una patita. ¿Qué es lo que le falta para no…? ¿Qué es lo que le falla para no ser…un isomorfismo?

[E9--50] Debería fallar la inyectividad si es que no hay isomorfismo.

E9 da cuenta, como respuesta para la pregunta sobre el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, que las construcciones mentales puestas en juego se relacionan con el esquema del concepto de función, de donde echa mano a las construcciones mentales proceso de los conceptos de inyectividad y epiyectividad.

[Ent-51] Claro. Debería fallar la inyectividad. ¿Cómo vemos eso?
[E9--51] Podemos ver si el conjunto imagen es igual al espacio de llegada.

Aquí muestra una concepción proceso del concepto función. Desde esta respuesta y basándonos en su esquema del concepto TL en su interpretación funcional, invitamos a E9 a reflexionar:

[Ent-52] El espacio de llegada. Mira bien, el conjunto de toda la función es continuo. ¿Podríamos construir todas las funciones continuas con senos y cosenos?
[E9--52] Eh, no.
[E9--53] Entonces… Déme un segundo.
[Ent-54] Pero ahora mira la pregunta que te voy a plantear. ¿Es posible redefinir el espacio de llegada de modo que sí lo sea?
[E9--54] ¿Cambiar el espacio de llegada? O sea…
[Ent-55] Redefinirlo.
[E9--55] ¿Dentro del conjunto de todas las funciones? O sea…
[Ent-56] Elegir un subespacio
[E9--56] Por ejemplo, las funciones trigonométricas podrían considerarse un subespacio.
[Ent-57] No sé…La pregunta de fondo es que tú para determinar si algo es o no es isomorfismo has mirado las dimensiones. Este no te permite mirar las dimensiones.
[E9--57] Así es.
[Ent-58] Y por eso tienes la duda. Ahora, la pregunta es: ¿yo puedo mover y elegir un subespacio en el conjunto de llegada y así establecer un isomorfismo como subespacio del conjunto de llegada, en caso de que falle la epiyectividad? ¿Podría hacer eso?, ¿para establecer un isomorfismo?
[E9--59] Sí, sí puede hacerse. O sea, definiéndola sobre la imagen.

En este punto, desde su concepción sobre el concepto de función, comienza a construir el concepto de isomorfismo.

[Ent-60] ¿Es un isomorfismo?
[E9--60] Sí, podría ser un isomorfismo si se definiera sobre este conjunto.
[Ent-61] Entonces no es que no exista.
[E9--61] No existe sobre R^3.

E9 construye desde el concepto de función la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, para la versión en que lo que falla es le epiyectividad.

Podemos decir que el esquema del concepto TL en su interpretación funcional se encuentra fundamentado por una construcción objeto del concepto función.

[Ent-62] Y ahora te voy a volver a hacer la pregunta que te hice antes. ¿En este qué pasa?

[E9--62] Este es distinto, porque en este como la dimensión del espacio de partida es mayor que el de llegada, falla la epiyectividad.

[Ent-63] ¿Y no hay posibilidad de redefinir?

[E9--63] Podría redefinirse el espacio de partida.

[Ent-64] Ya. Muy bien. ¿Y cómo lo redefinirías tú, qué se te ocurriría hacer?

[E9--64] Podríamos tomar un subespacio de R^3, fuera de la dimensión 2. Por ejemplo, tomando esta misma base. [Trabaja.]

[Ent-65] Ya, y estarías diciendo que… ¿qué le pasa a este vector?, porque ese vector no es combinación lineal de eso.

[E9--65] No, claramente. Son linealmente independientes.

[Ent-66] ¿Y qué tendrías que hacer con ese, a dónde lo podrías mandar para que las cosas funcionaran?

[E9--66] Al…

[Ent-67] Porque esa es la función, ¿cierto?

[E9--67] Sí.

E9 respondió a las preguntas relacionadas al concepto del isomorfismo basándose en el teorema fundamental del álgebra lineal para espacios vectoriales finitos dimensionales. Por esta razón, se cambió el tipo de pregunta a una en que la dimensión de uno de los espacios fuera infinita. Esto ayudó a formular desde otra perspectiva el concepto de isomorfismo. Pero desde APOE podemos decir que esta estrategia mostró que su esquema del concepto TL está basado en el concepto de función, por lo que la construcción del isomorfismo se le dificulta ya que el homomorfismo queda transparente.

Séptima pregunta del cuestionario para la entrevista de E9:

Sea $T: V \to W$ **función definida por** $T(v) = 0_W$ **, para todo** $v \in V$

¿Es T una transformación lineal?

E9 responde a la última pregunta del cuestionario, la que en realidad tiene por propósito aproximar al concepto de núcleo de una TL. Su respuesta aparece como se muestra en la figura 5.30.

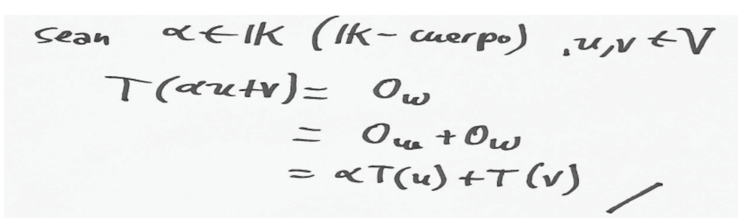


Figura 5.30. Respuesta de E9.

[E9--70] Sí, claramente es una transformación.

[E9--71] Voy a definir como K el conjunto que está acá, porque no se especifica que sean espacios vectoriales reales.

E9 Trabaja y escribe el núcleo de esta TL, como se muestra en la figura 5.31.

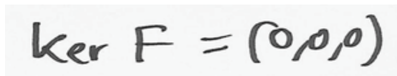


Figura 5.31. Trabajo de E9.

E9 demuestra que la aplicación de la pregunta es una TL, como se aprecia en la figura 6.37; esto es, muestra una construcción objeto del concepto TL en su interpretación funcional.

Finalizando, en un diálogo menos estructurado:

[Ent-73] Perfecto. Gracias. ¿Qué te pareció el cuestionario?

[E9--73] Eh, interesante. Lo bueno que ese problema de la dimensión está muy…, uno lo tiene muy adherido cuando quiere construir un isomorfismo.

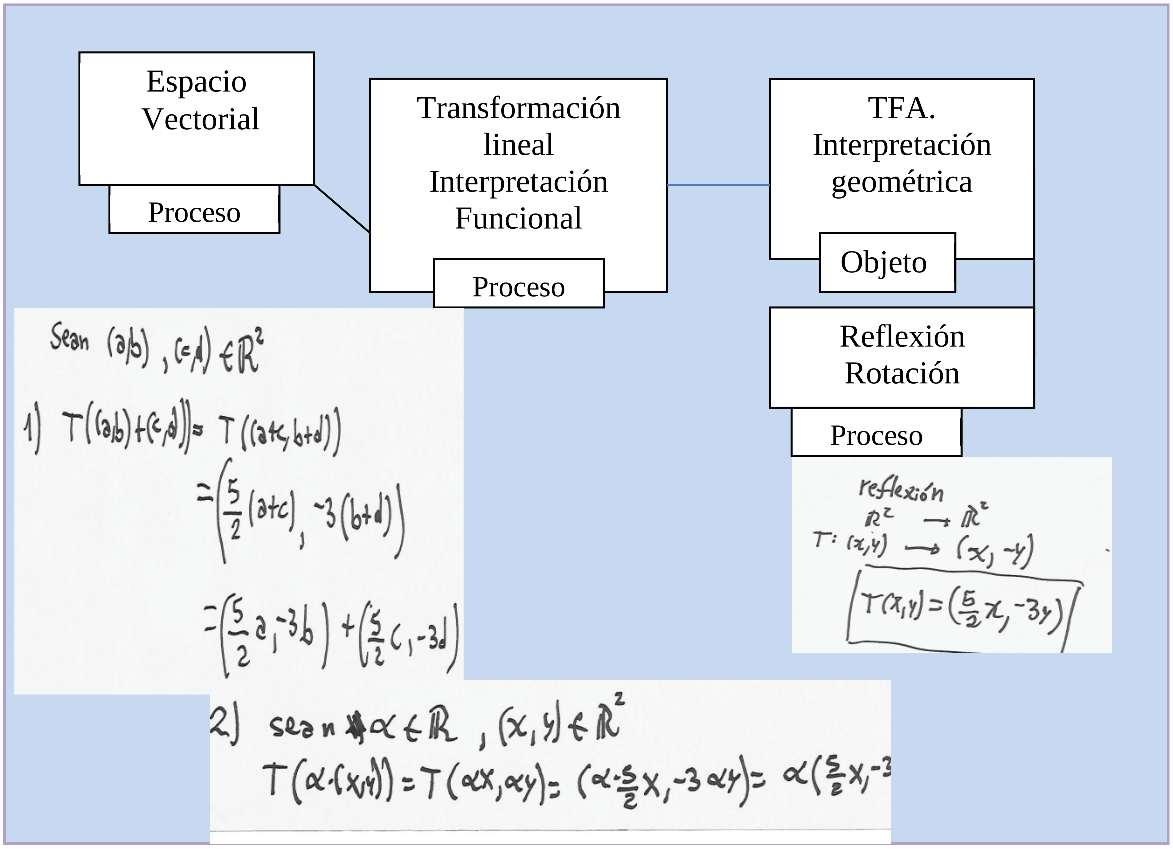
E9 reconoce una dificultad con el concepto de dimensión para construir el concepto de isomorfismo de espacios vectoriales**.**

En resumen, E3 durante la entrevista mostró que su esquema para el concepto TL no evolucionó a un nivel trans-, sino que quedó estancado; en el cuestionario inicial, en dos de las tres interpretaciones para el concepto TL mostró una construcción mental objeto, lo que hacía pensar que su esquema, pasado un tiempo e incorporando componentes del álgebra abstracta, se habría fortalecido, evolucionado a un nivel trans-. Pensamos que las dificultades mostradas con el concepto de isomorfismo están centradas en los conceptos de kernel y dimensión.

5.3.2 CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MOSTRADOS POR E9.

Los siguientes bosquejos corresponden a una síntesis en la que se muestran las construcciones mentales evidenciadas en las respuestas de E9 a cada una de las preguntas de la entrevista. Las líneas trazadas entre las diferentes construcciones mentales corresponden a los mecanismos mentales. Por otra parte, se evidenciar el nivel del esquema puesto en juego a través de la evolución en sus respuestas.

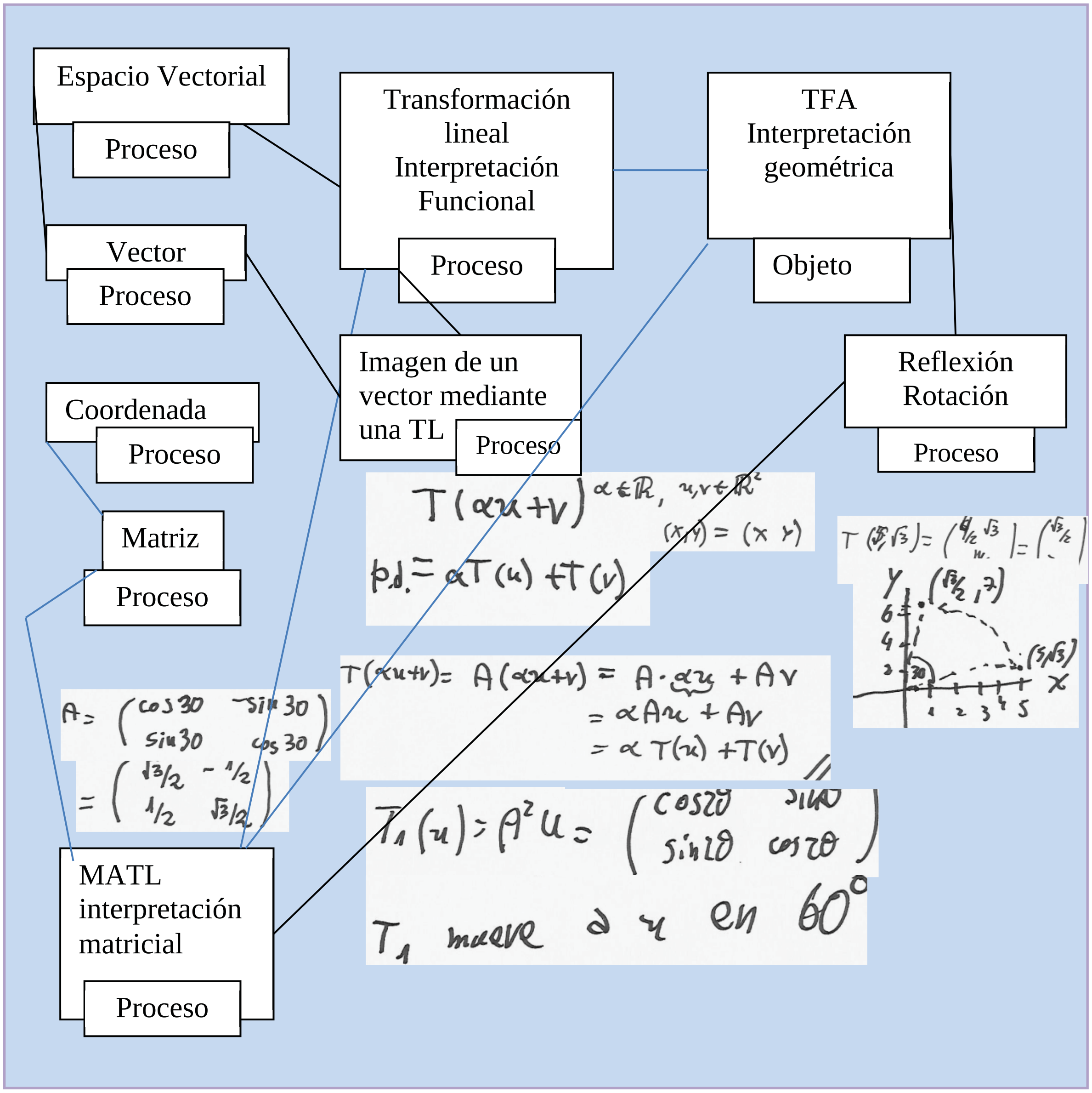
Pregunta 1



E3 muestra en esta pregunta tres construcciones mentales específicas que esperábamos, una de ellas relacionada a la interpretación geométrica como una construcción mental objeto, pues realiza acciones sobre ella para construir su respuesta. Sobre la otras construcciones mostradas, suponemos que están en construcción mental proceso, pues es la primera pregunta de la entrevista.

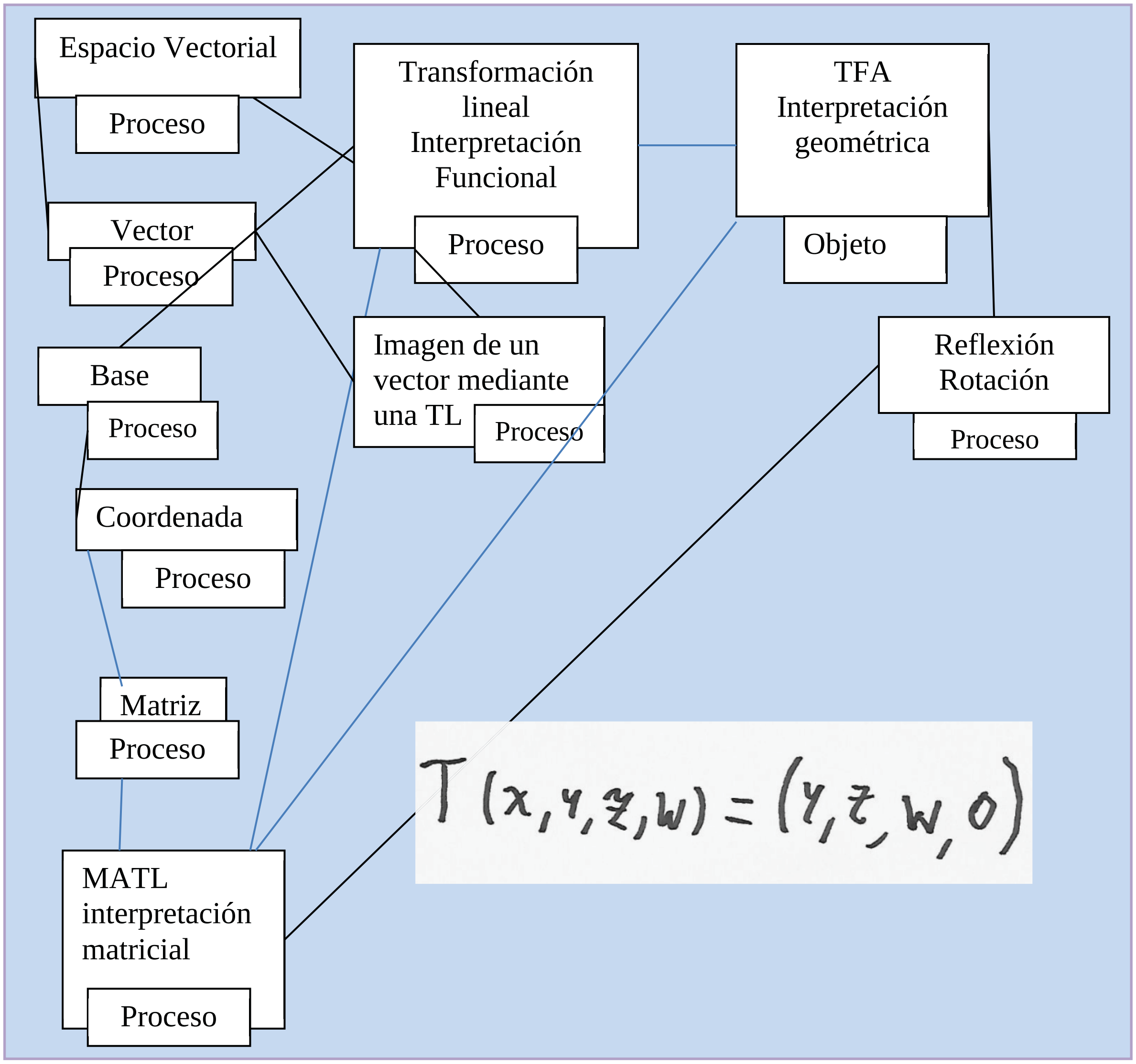
Por otra parte, E3 da evidencias de otras construcciones mentales asociadas a un cierto tipo específico de TL, como son los movimientos en el plano, citando a la reflexión, lo que hace suponer que su esquema para la interpretación geométrica está constituido por estos conceptos, con características específicas relacionadas a ciertos movimientos en el plano. Este tipo de conceptos no se consideraron en la DG de la interpretación geométrica, pues pensamos que son demasiado específicos e innecesarios frente a la construcción que propone el TFAL.

Pregunta 2



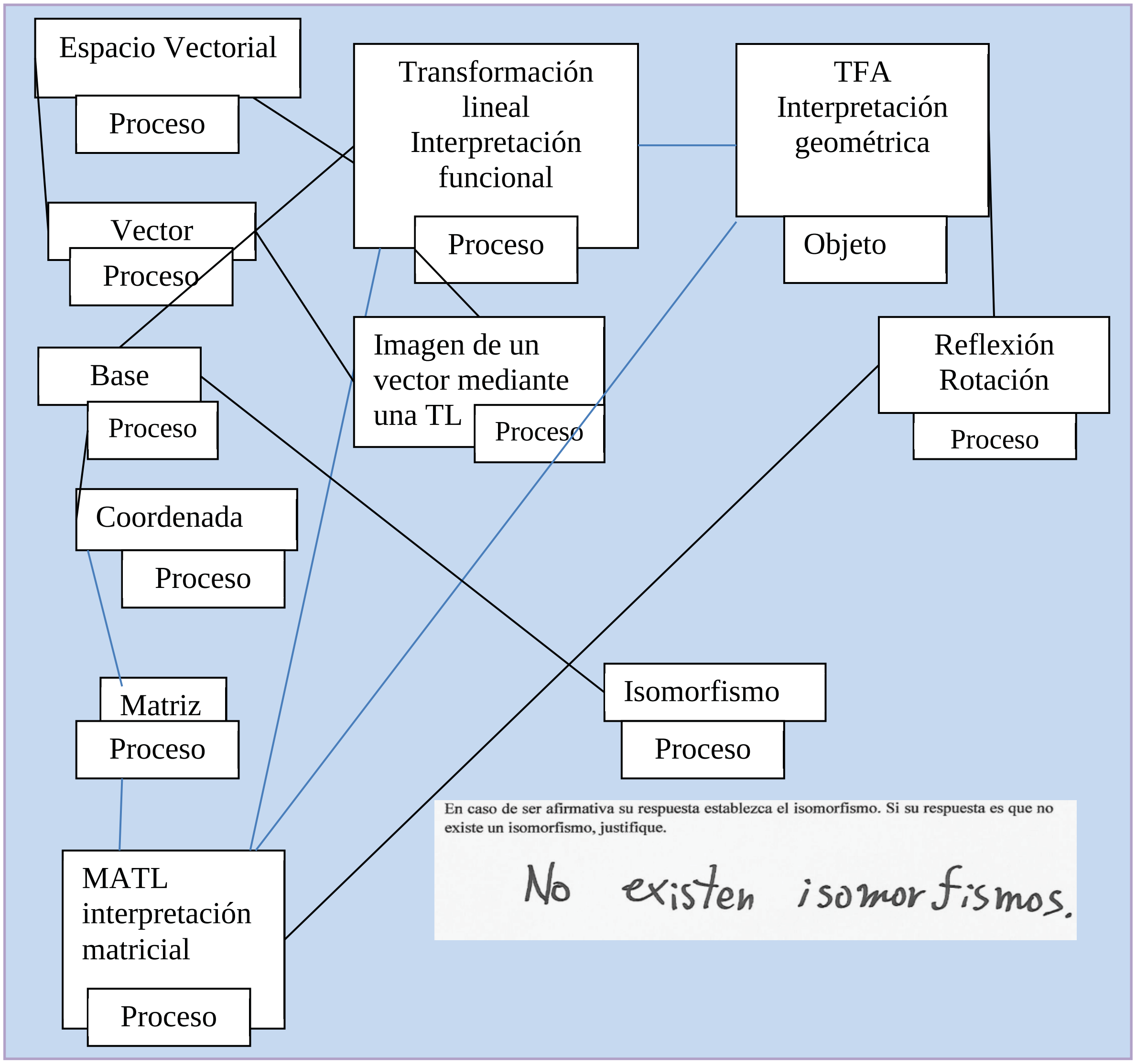
En la segunda pregunta del cuestionario es posible tener las primeras evidencias del despliegue del esquema para el concepto TL en sus tres interpretaciones; estas son las construcciones mentales proceso asociadas a los conceptos de vector coordenada imagen de un vector y matriz, lo que permite construir la MATL como proceso, el que coordina con las interpretaciones funcional y geométrica, esta última en su visión particular.

Pregunta 3



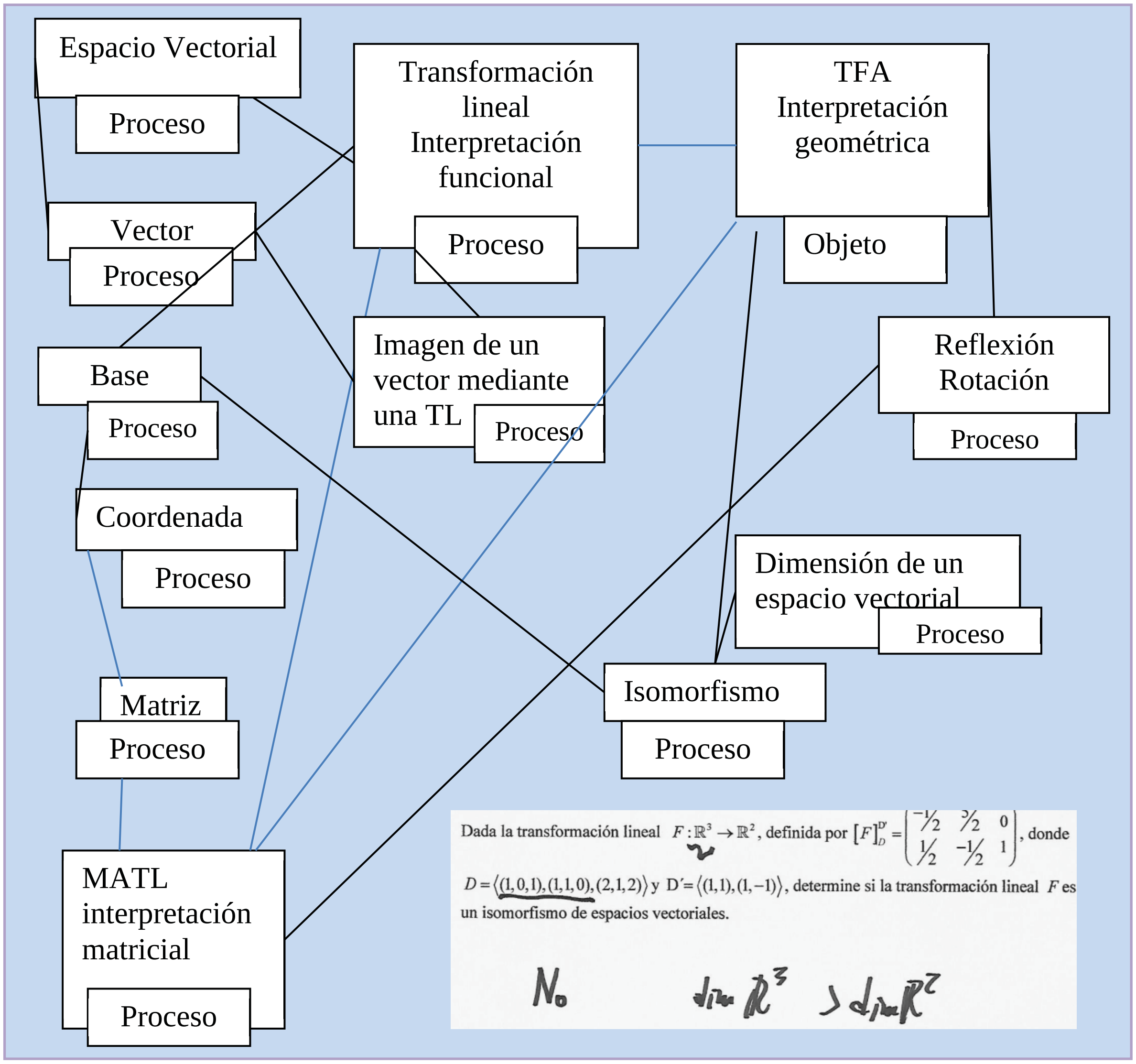
En la pregunta 3 vuelven aparecer evidencias de la articulación entre la interpretación funcional y la geométrica, la que le permite escribir la ecuación que da respuesta a la pregunta. Por otra parte, la evidencia del concepto de base aún no está tan clara, pero suponemos que por el despliegue anterior debe ser parte de los argumentos que usa pero no declara en forma explícita, pues para encontrar las coordenadas de la imagen de un vector mediante la TL, debe escribir las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, como una combinación lineal de la base de llegada.

Pregunta 4



En esta pregunta del cuestionario se puso a prueba el esquema para el concepto de TL de E3; ya había mostrado las construcciones asociadas a todas las interpretaciones del concepto TL, por lo que se plantea empujarlo a los bordes del modelo multinterpretativo. Y es mediante el concepto de isomorfismos entre espacios vectoriales que mostrará las limitaciones de su esquema; E3 responde que no existe un isomorfismo en este caso, mostrando una construcción mental proceso para el concepto de función asociado al de TL.

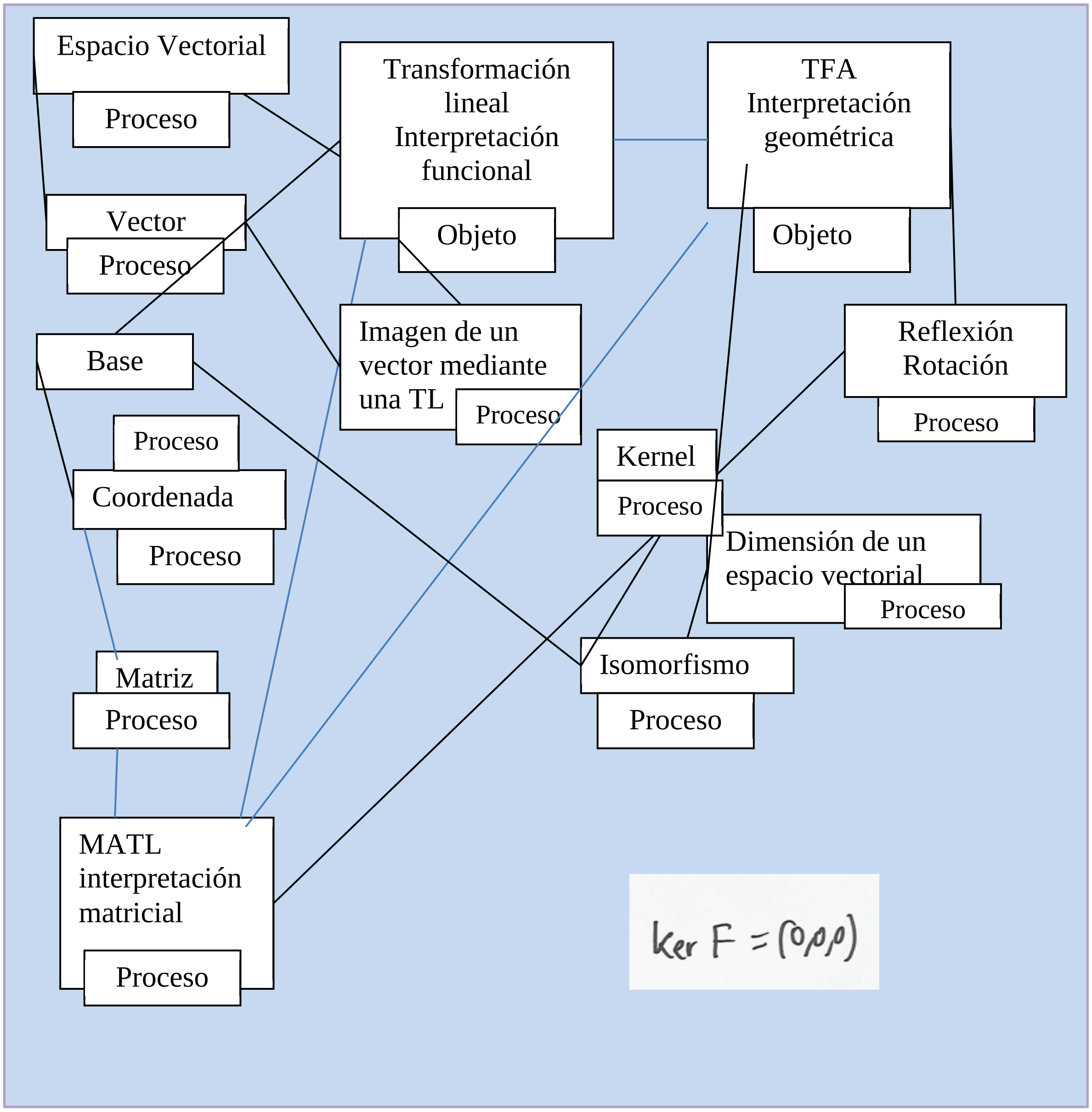
Pregunta 5



Nuevamente y con otra pregunta se pone a prueba el esquema del concepto TL, y para dar respuesta muestra coordinar los conceptos de base, dimensión y el TFAL. Nuevamente no alcanza, pues la concepción dada para el concepto de dimensión lo limita, sin asociar a los conceptos de inyectividad mediante el kernel.

La pregunta 6 sólo tiene por objeto liberar al estudiante de la presión, por lo que se le pide probar que una función es una TL. Aquí no muestra más construcciones mentales que las anteriores, por lo que no se incluye su esquema.

Pregunta 7



Se propone a E3 en esta pregunta calcular el Kernel de una TL, con el propósito de reformular sus respuestas anteriores. L calcula en forma adecuada, mostrando una construcción proceso del concepto, pero no logra coordinar con el concepto de función para reconstruir la inyectividad de la TL.

5.3.3 ANÁLISIS DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO TL DE E9.

A continuación resumiremos la información obtenida sobre las construcciones y mecanismos mentales para la construcción del concepto TL en sus tres interpretaciones, que E9 mostró durante la entrevista y el cuestionario realizado en la investigación. Las evidencias obtenidas serán contrastadas con las DG propuestas; de esta forma podremos determinar el nivel en su esquema del concepto de TL, y al mismo tiempo obtener información para refinar el modelo multinterpretativo.

En el cuestionario inicial de la investigación, E9 mostró construcción mental proceso para la interpretación matricial, y en cambio mostró una construcción objeto en las otras dos interpretaciones, lo que durante la entrevista se confirmó, pues sus respuestas fundamentalmente provenían de una articulación entre la interpretación funcional y la geométrica.
Por otra parte, las principales construcciones mentales observadas, puestas en juego para dar respuesta a las preguntas por interpretación, fueron:

- ✓ En la interpretación funcional, los conceptos de función, dominio y recorrido de una TL, espacio vectorial, vector, imagen de un vector, imagen de un vector mediante una TL, base, no se logró determinar si la construcción mental de algunas de estas construcciones era proceso u objeto, pues el cuestionario limitaba este análisis, pero dado lo preciso de sus respuestas, que mostraban coordinaciones exitosas, pensamos que su construcción es la de objeto. Según los indicadores para el esquema del concepto TL en su interpretación funcional, éste será *Trans*-TL, pues según las evidencias preliminares en el cuestionario no hubo indicadores de lo contrario.

- ✓ En la interpretación matricial emergen nuevos conceptos, además de los anteriores, como son los de coordenada, matriz y en forma explícita el de combinación lineal, que juega roles de mecanismo y construcción mental. En esta interpretación E9 logra mostrar construcciones mentales próximas a la de objeto, pero en la última pregunta del cuestionario responde con un error que pensamos muestra un aprendizaje mecanizado. Según los indicadores para el esquema del concepto TL en su interpretación matricial, éste será inter-; el fallo en la pregunta 5 del cuestionario hace pensar esto.

- ✓ En la interpretación geométrica surgen conceptos como los de linealidad y función y su relación con conjuntos LI y LD, además de los conceptos de base e implícitamente el de dimensión. E3 mostro una construcción objeto, pues logra hacer acciones sobre el concepto para responder a la pregunta 6. Según los indicadores para el esquema del concepto TL en su interpretación geométrica, éste será *Trans*-TL, pues según las evidencias preliminares en el cuestionario no hubo indicadores de lo contrario.

Al igual que lo que pasó con E3, para E9 todas las construcciones mentales antes descritas se encontraban dispuestas en las DG, por lo que han servido de buen modelo para

interpretar sus respuestas. Salvo el concepto de kernel, que no fue incluido en las DG de ninguna interpretación, ni en la descripción de los niveles de esquema, el resto de los conceptos sí aparecen en las DG.
En el desarrollo de la entrevista, E9 mostró coherencia de esquema para dar respuesta a problemáticas relacionadas con el concepto TL, sobre las preguntas que obligaban a poner en juego un esquema evolucionado; éstas son las relacionadas al concepto de isomorfismo de espacios vectoriales: hubo evidencias de las limitaciones, no evolucionó en términos de estructuras algebraicas, quedó limitado. Uno de los elementos pesquisados que pensamos es fundamental para esta evolución fue el kernel; debe mostrar una construcción mental objeto que le permita realizar las acciones para construir el isomorfismo de espacios vectoriales. Otro concepto es el de dimensión de un espacio vectorial, que en este caso fue un argumento teórico puesto en juego para fundamentar sus respuestas sobre el isomorfismo entre espacios vectoriales. La construcción mental mostrada por E9 para este concepto fue proceso, que sólo era coordinado con un teorema del álgebra lineal, lo que limito sus respuestas.

Suponemos que E9 no pudo construir el isomorfismo a pesar de haber mostrado construcciones mentales objeto en dos de las interpretaciones y una tercera en construcción mental proceso, todas ellas articuladas. Se podría pensar que es un ejemplo de una debilidad en el modelo multinterpretativo, pero lo que se muestra es la evolución en el esquema del concepto TL, para los otros entrevistados y en cierta medida la no evolución en el esquema ara este concepto de E9. Por otra parte, los conceptos y sus construcciones mentales mostradas para el esquema del concepto de TL fueron espacio vectorial, base, función lineal, combinación lineal, espacio generado, conjuntos LI y LD, matriz de coordenadas, isomorfismo como función, kernel, entre otras, todas ellas en construcciones mentales proceso. Según nuestra hipótesis, sobre el nivel del esquema sería inter-, pues no le permite relacionar con todos los conceptos relativos a las TL.

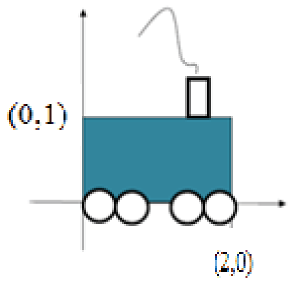
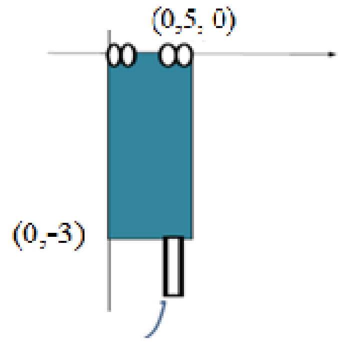
5.4 ENTREVISTA A E18.

Se invitó al estudiante E18 a una entrevista el día 28 de noviembre del año 2013; a continuación presentaremos algunos extractos de la transcripción del audio correspondiente a sus respuestas, incluyendo las preguntas y las imágenes de sus contestaciones escritas. La transcripción completa de esta entrevista se encuentra en anexo. A continuación el desarrollo del análisis de la entrevista.

5.4.1 ANÁLISIS DEL RELATO DE E18.

Primera pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Considere el carrito de un tren que aparece en la figura1, se deforma en la figura 2.

 Figura1.	 Figura 2
¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2?	

E18 lee la pregunta y responde según transcripción de audio:

[E18--3] Yo creo que sí.
[Ent--6] ¿La podrías encontrar?
[E18--6] No sé, a ver.
[Ent-12] Estás enviando vector en vector.
[E18-12] Sí.
[E18-14] Como en una transformación manda siempre el 0 en el 0…
[Ent-15] ¿Esa es una condición necesaria?
[E18-15] Sí.
[Ent-16] ¿Pero, no es suficiente o es suficiente, que mande el 0 en el 0?
[E18-16] No basta, también tiene que separar la suma, el producto. Eso como que se descarta, me parece.

E18 reconoce la existencia de una TL, muestra los indicadores del nivel *Intra*- de la interpretación funcional del concepto TL; por otra parte, presenta en el transcurso de la entrevista dificultades para encontrar dicha transformación, esto es, articular la interpretación geométrica con la funcional. En nuestra propuesta para la construcción de la interpretación geométrica del concepto TL, un estudiante debe coordinar los conceptos de vector, imagen de un vector, base, mediante la combinación lineal, además de integrarlos al plano figural. Por otra parte, en relación a la interpretación funcional, E18 está mostrando no coordinar los procesos que construyen el concepto de TL en su interpretación funcional; éstos son el de espacio vectorial, combinación lineal con el de función mediante la igualdad.
En el siguiente diálogo se muestra cómo trata de construir la TL en su interpretación funcional.

[E18-19] Decir que el *x* se está moviendo entre 0 y 2 y, no sé, tomar estos dos puntos de aquí y decir que el x se va a mover, o sea, la función lo va a enviar a moverse entre el 0 y el -5 después del -3 fijo.

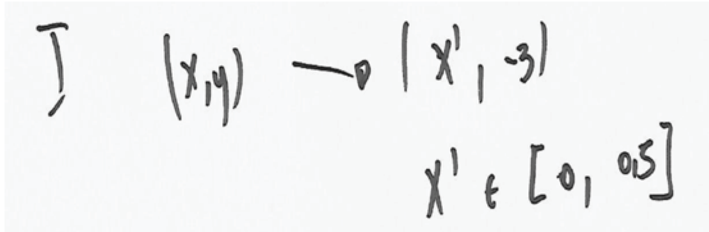


Figura 5.32. Trabajo realizado por E18 para dar respuesta a la pregunta 1.

El estudiante está construyendo una función, pues se preocupa del dominio, y su concepción es de puntos, no de vectores. En figura 5.32 se aprecia su respuesta a la pregunta 1. E18 muestra una construcción proceso del concepto de función, el que coordina con el concepto de imagen, para construir el dominio y el recorrido de ella como una construcción proceso, pero no está en concordancia con el concepto de TL.

Es así que es invitado a reflexionar sobre su escrito

[Ent-22] ¿Y eso es transformación lineal? ¿Puede estar un número fijo?

[E18-22] Buena pregunta. No.

[Ent-23] ¿Por qué no?

[E18-23] O sí. Quizás sí se puede. …Estoy pensando. Tiene que haber una razón, tiene que haber algo.

Nuevamente E18 muestra tener dudas de lo que significa el concepto de TL, tal es así que no recuerda la razón por la cual no puede haber imágenes fijas diferentes del vector nulo. En figura 5.33 se aprecia como señala la imagen del -3.

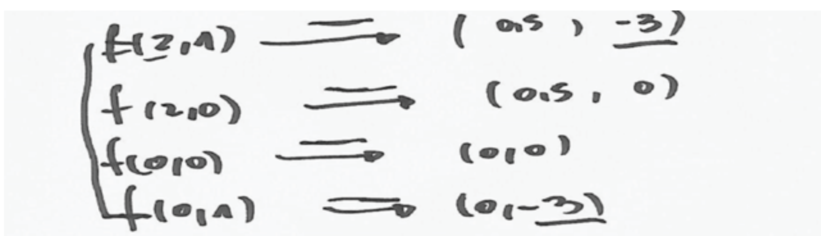


Figura 5.33. Muestra como E18 realiza la asignación y se detiene en la coordenada -3.

[Ent-24] ¿Cuál es la transformación lineal?

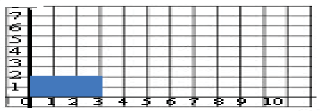
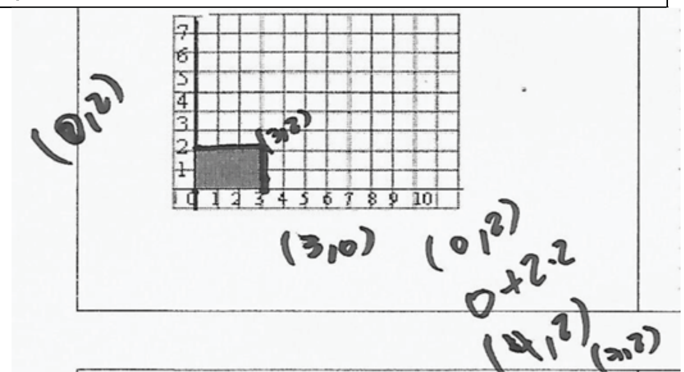
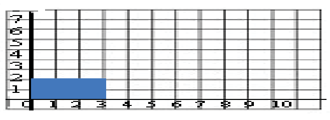
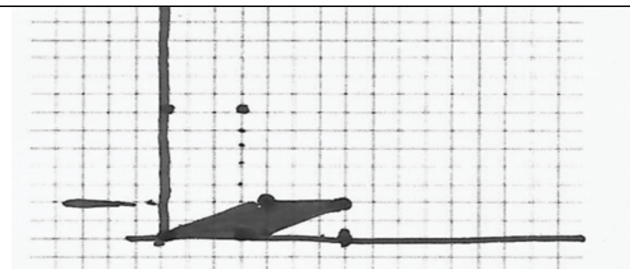
[E18-25] Siento que está aquí, pero no lo veo.

E18 declara no "ver" cómo encontrar la TL, que sí reconoce que hay. Se decide continuar la entrevista, cambiando la pregunta a una que desde la interpretación funcional requiera transitar a la interpretación geométrica. Se propone un camino reverso al anterior, que se supone causó dificultad. De esta forma establecemos direccionalidad en la construcción de los conceptos por parte de E18.

Segunda pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por: $T(x,y)=(x+\beta y, y)$ con $\beta \in \mathbb{Z}$, bosqueje la región

obtenida al aplicar la transformación lineal al rectángulo dado en la figura cuando $\beta = 2$ y $\beta = -3$

Figura	$\beta = 2$
	
	Figura 5.34. Trabajo de E18 en la pregunta 2
Figura	$\beta = -3$
	
	Figura 5.35. E18 dibuja la respuesta a la pregunta2.

En esta pregunta, se confirma la dificultad que posee E18 para establecer la relación con los vectores del plano, lo que sugiere que podría ser una dificultad para construir la TL en su interpretación geométrica. Trabaja en la construcción de la respuesta como se muestra en la figura 5.34.

Continúa su relato describiendo cómo afecta el escalar a la figura y reflexiona sobre sus consecuencias.

[E18-30] Entonces, si el *x* es 0… Entonces tenemos 3 y luego son 4, son 7. Ese sería un punto. ...Sería 0 y después lo sumo. 4.

[Ent-31] ¿Qué pasó?

[E18-31] Hay algo raro aquí, algo que no estoy haciendo… ¡Ahí está!

[E18-32] Sí. Ya, entonces es el 4 y ahí es el 2. Ese es el par. Sí, este era el (3, 2), entonces el *y* es fijo, es 2, y de ahí me da 2. Y el 3 sería 7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. *Y* ese sería el 1.

[Ent-34] A ver, dibújalo. ¿Es necesario que hagas el otro, para que puedas responder?

[E18-34] Voy a hacer el otro.

Al finalizar esta pregunta, E18 logra construir la articulación entre la interpretación funcional con la geométrica desde lo funcional. Para ello tuvo que dibujar los vectores que definen una base del espacio de partida. Se invita a E18 a terminar la pregunta 1 y responde lo que se muestra en la figura 5.36.

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{4} \quad -3y \right)$$

Figura 5.36. Es la función propuesta como respuesta a la pregunta 1 por E18.

E18 ha logrado coordinar los procesos necesarios para dar respuesta a la pregunta 1, esto es, coordinar los conceptos de base de un espacio en el conjunto de partida, base en el espacio de llegada, mediante una función lineal.

Por otra parte, ha mostrado tener dificultades relacionadas con los conceptos de vector, base y combinación lineal. Estas dificultades se pusieron en evidencia al tener que construir la transformación lineal, esto es, articular la interpretación geométrica con la funcional; una vez construida la función puede demostrar que es una TL. En la figura5.37 se muestra la prueba que realiza de la función propuesta para ser la TL que satisface las condiciones de la pregunta 1.

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{4}, -3y \right)$$

$$f\left(\alpha(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\right) = f(\alpha x_1, \alpha y_1) + f(x_2,y_2)$$

$$= f\left((\alpha x_1, \alpha y_1) + (x_2,y_2)\right) = f\left((\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2)\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x_1 + x_2}{4}, -3(\alpha y_1 + y_2) \right)$$

$$= \left(\frac{\alpha x_1}{4}, -3\alpha y_1 \right) + \left(\frac{x_2}{4}, -3y_2 \right)$$

$$= \alpha f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$$

Figura5.37. Demostración de la linealidad de la función propuesta por E18.

Se continúa la entrevista y se propone la tercera pregunta, en que se abordan los conceptos de base, vector y TL.

Tercera pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Sea V un espacio vectorial de dimensión cuatro y $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ base para V. Sabemos que existe una única $T\in L(V,V)$ que cumple con:

$$T(v_1)=v_2,\ T(v_2)=v_3, T(v_3)=v_4,\ T(v_4)=\vec{0}$$

¿Cuál es la trasformación *T?*

E18 responde según transcripción de audio a la pregunta 3:

[E18-47] No sé, la primera vez que lo leí, dije "ah, v_1 va en v_2"y como que me imaginé un ciclo. Que estamos construyendo una estructura de ciclos y me imaginé como un ciclo.

[E18-48] Me siento atascada.

[Ent-49] ¿Por qué?

[E18-49] No sé. Como que lo veo y pienso que como que se me olvidó qué podía hacer. Eso es lo que me pasa.

E18 muestra asociar los conceptos de grupo cíclico y base de un espacio vectorial (como generador); esta asociación posiblemente corresponda a que el concepto de espacio vectorial es asimilado por el esquema del concepto de grupo. Pero de las evidencias hasta ahora obtenidas, su construcción mental del concepto de espacio vectorial podría ser proceso; esto se desprende de sus discursos anteriores.

[Ent-50] Regresa a tu respuesta anterior.

[Ent-51] Mira, tú misma escribiste algo. ¿Cuál es la diferencia?

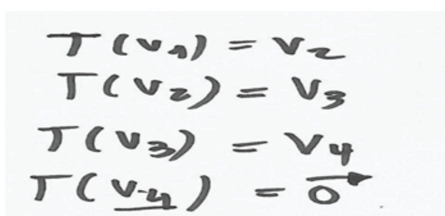


Figura 5.38. Asignación de los vectores realizada por E18.

[E18-53] Toman los elementos de la base. Y eso la define una…

[Ent-54] ¿Por qué tú consideras las imágenes de los elementos de la base?

[E18-54] Es que con la base se puede generar todo el espacio.

E18 comienza a mostrar con sus argumentos que posee una construcción mental proceso del concepto de base, pues declara que "se puede generar todo el espacio"; por otra parte, también muestra una construcción mental proceso del concepto imagen de un vector, como se muestra en su discurso:

[Ent-55] ¿Eso quiere decir que aquí tenías más imágenes que las que necesitabas para determinar la transformación?
[E18-55] ¿En esta de aquí que yo puse cuatro?
[E18-56] Quizá sí. Yo con dos lo hubiera hecho. Porque estamos en R^2.

Cierra su argumento de imágenes de vectores y se le vuelve a preguntar sobre su concepción de la imagen del vector nulo que estaba pendiente en la pregunta 1.

[Ent-61] ¿Pero qué significa que sea base?
[E18-61] Eh, o sea… Si el elemento es como… Si tengo la base, yo con los escalares puedo generar todo el conjunto.
[Ent-62] Ya. O sea, la base te ayuda a generar todo el conjunto. ¿Tiene otra condición?
[E18-62] Además que es LI. O sea, que los vectores que están ahí son linealmente independientes.
[Ent-63] Claro, esa es la condición para… Pero tiene otra condición que está ahí, que es el mínimo de vectores que se necesita.
[E18-63] Sí, por ejemplo en R^2 necesito 2.

E18 muestra una concepción proceso del concepto de base, pero hay que invitar a que realice las coordinaciones con los conceptos de dependencia lineal y generador para que construya. El diálogo continúa, se intenta que aclare su discurso inicial. Hace uso de bases canónicas.

[E18-64] Tengo las canónicas, esa es una de las canónicas.
[E18-66] A ver, es que el 0… La idea es que sea LI. La única forma…
[Ent-67] ¿El (0, 0) y el (0, 1) son LI?
[E18-67] No: están en la misma recta. Son colineales

E18 establece un argumento desde la interpretación geométrica para justificar conceptos basales de la transformación lineal, los que profundiza, pero no le alcanzan para responder. Nuevamente, E18 prefiere dejar sin terminar la pregunta 3, es así que:

[E18-75] Ya, a ver, pasemos a otro.
Se le ofrece otra pregunta, la que aborda directamente su problemática con el vector nulo.

Cuarta pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Sea $\mathrm{T}:\mathrm{V}\to W$ función definida por $\mathrm{T}(\mathrm{v})=0_W$, para todo $v\in V$
¿Es T una transformación lineal?

E18 lee la pregunta y comenta:

[E18-77] O sea, lo primero que pienso es que *V* pertenece al kernel de la *T*, porque si su imagen es 0, ese *V* tiene que estar en el kernel, que son las imágenes del 0.

[Ent-80] Pero la pregunta es si es que hay una transformación lineal. Ahí estás calculando el kernel, algo que ya es transformación lineal.

[E18-80] Sí, sí es. Todo el rato.

E18 responde, después de varias tentativas, afirmativamente a la pregunta. Sus argumentos mostraron el uso de la noción de kernel de una transformación lineal. Evoca el concepto de kernel de una TL para determinar el tipo de TL. Según nuestra tipología del nivel de un esquema, a pesar de no tener considerado el kernel, podría presentar indicadores de un nivel inter- para la interpretación funcional. Se profundiza sobre su noción sobre el concepto de kernel.

[Ent-81] Ahora ¿y cuál es el kernel de esa transformación lineal?

[E18-81] Son todos, ¡son todos! Porque todos los manda al 0.

[E18-82] El Kernel sería…todo *V*.

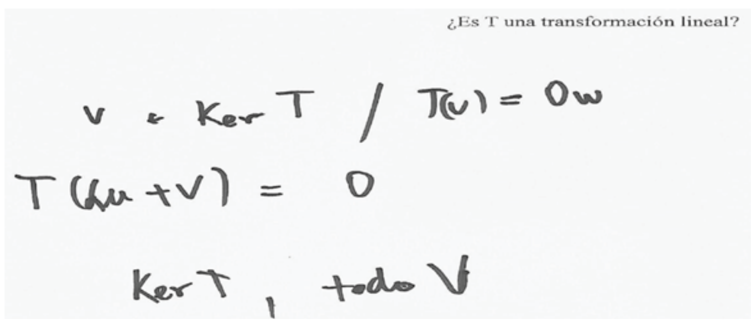


Figura 5.39. E18 responde a la pregunta 4.

Ha mostrado una construcción proceso del concepto de kernel de una TL, pues lo coordina con el concepto de función para determinar si una función es o no una TL inyectiva.

Aquí se invita a retomar la pregunta 3, que estaba pendiente:

[E18-84] Ese al tiro pertenece al kernel.

En la figura 5.40 se aprecia su respuesta.

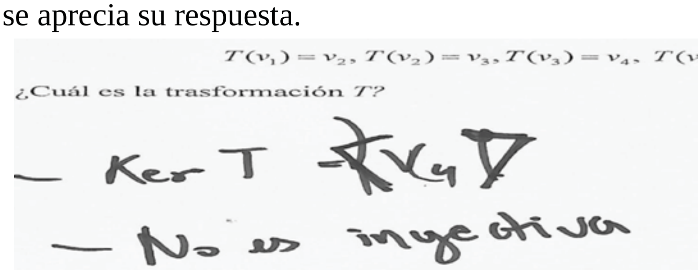


Figura 5.40.Respuesta de E18 a la pregunta 3 que está aún pendiente.

[E18-85] Es que esos están en la base, entonces no pueden ser los nulos. Entonces sólo ese.

[Ent-88] ¿El espacio generado por el v_4? O sea, sería una base para el kernel.

[Ent-90] ¿Es inyectiva esa transformación lineal?

[E18-90] Pero aquí es el generado por v_4, entonces muchos vectores… Voy a tratar de hacerlo, pero entonces no es epiyectiva. [Trabaja.]

[Ent-91] Entonces esa transformación que no hemos podido encontrar, sabemos que no es inyectiva, y ahora…

[E18-91] Es que lo hubiéramos visto al tiro, porque el kernel no es sólo el 0. Ahí vemos que no es inyectiva por ningún lado.

[Ent-92] ¿Y un isomorfismo?

[E18-92] No.

Responde a la pregunta 3 mostrando una construcción proceso del concepto TL en su interpretación funcional, pues a pesar de coordinar conceptos como el de kernel con el de inyectividad, aún no puede construir TL que respondan a determinadas condiciones, esto es, no coordina el concepto de base con el de combinación lineal con el de función lineal que preserva la estructura algebraica.

En búsqueda de información sobre la interpretación matricial del concepto transformación lineal:

Quinta pregunta del cuestionario en la entrevista de E18:

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$**, definida por** $\left[F\right]_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$**, donde** $A = \left\langle (1,0),(1,1) \right\rangle$ **y** $A' = \left\langle (1,0,1),(1,1,1) \right\rangle$**, determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales.**

En caso de ser afirmativa su respuesta establezca el isomorfismo. Si su respuesta es que no existe un isomorfismo, justifique.

E18 lee la pregunta y comienza a tratar de organizar sus recuerdos:

[E18-96] …Entonces me acordé que había un teorema de las dimensiones, que decía que el espacio de partida tenía que ser igual a la dimensión de kernel más la dimensión del espacio… más la imagen, la dimensión de la imagen. Pero algo que sí él dijo es que en la estructura debe estar el cociente, y eso sí es bastante importante, referente a ese teorema en realidad. Y estas son las coordenadas.

[Ent-98] ¿Eso es la matriz asociada a la transformación lineal?

[E18-98] Sí. Se supone… Ya, a ver… [Piensa.] Me acuerdo que eran hacia abajo. Y eran coordenadas. Entonces yo tengo esta base…

E18 tuvo dificultades para recordar cómo se construye la matriz asociada a una TL, por lo que se decide ayudarle. En la figura 5.41 se muestra parte del trabajo realizado por E18 para el concepto de MATL.

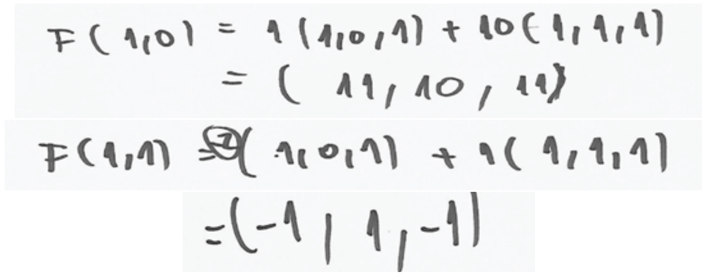


Figura 5.41. Muestra cómo E18 reconstruye el concepto de coordenada de la imagen de un vector mediante una TL.

E18 logra construir el concepto de matriz asociada a una TL, pues de su discurso se desprende que coordina los procesos de coordenadas de la imagen de un vector con el de base del espacio de partida mediante el cuantificador que define a la función.

Por otra parte, se invita al estudiante E18 a reflexionar sobre la pregunta 3 que quedó pendiente.

[Ent-109] ¿Podríamos decir cuál es la transformación lineal?

[E18-109] Sí, sí. Porque estamos tomando el vector v_1, v_2, v_3 y v_4, y necesitamos sus coordenadas en esa base.

[Ent-110] Y la dan, porque es la misma del espacio de partida que de llegada.

[E18-110] Entonces el v_1 lo estaría mandando al v_2, entonces es [0, v_2, 0, 0], ¡ahí está!

Con esta pregunta sobre la MATL construye la respuesta a la pregunta pendiente, lo que prueba que a pesar de las dificultades para construir la respuesta en la interpretación funcional, en la matricial lo logra. En figura 5.42 se aprecia su trabajo.

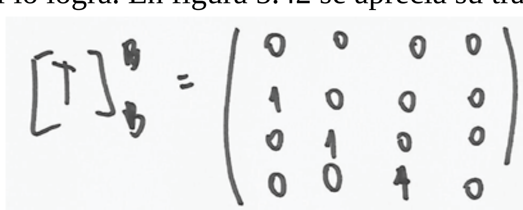


Figura 5.42. Respuesta de E18 a la pregunta 2.

Retomamos el trabajo para la quinta pregunta, donde se pregunta si la TL dada es un isomorfismo, a lo que E18 responde:

[E18-114] Sí es un isomorfismo.

[E18-115] Ya. Cuando hablamos de isomorfismo, en álgebra II, siempre decían que las cosas tenían que tener igual dimensión.

[E18-116] Si tenían igual dimensión iba a existir un isomorfismo; quizá a veces nunca lo encontráramos, pero aseguraba la existencia de uno. Estos tienen distinta dimensión, pero puede que no llegue a estos extractos, puede llegar solo… Y tiene más, entonces está llegando a…

E18 en este tramo de la entrevista hace alusión al teorema fundamental del álgebra y nos habla sobre la condición de existencia de una TL, asumiendo que no necesariamente es posible encontrar la transformación lineal en forma explícita. Es una clara explicación a la dificultad que ha mostrado hasta ahora para encontrar la interpretación funcional de la TL. E18 no coordina los procesos asociados a los conceptos de base en el espacio de partida con los de combinación lineal y de función mediante la igualdad.

[Ent-117] A un subespacio.
[E18-117] Que tiene dimensión 2, entonces sí podría haber.
[E18-118] La pregunta ahora es si éste es un isomorfismo.
[E18-119] Es isomorfismo.
[E18-120] Es que como es un subespacio de R^3 donde está llegando, tiene dimensión 2, entonces a de dimensión 2 a dimensión 2.
[Ent-121] O sea…
[E18-121] Sí se puede.
[E18-122] Sí. Yo puedo saber si este es isomorfismo.
[E18-123] Pero si esta matriz es inyectiva… invertible…
[E18-124] Entonces si mi determinante es distinto a cero, puede existir la que es… para el otro lado, entonces sí va a ser isomorfismo, porque va a existir una *F’* que vaya de aquí para allá. Entonces veamos si el determinante es distinto a cero. Pero eso es fácil. Es más 20.
[Ent-125] O sea, existe un isomorfismo aquí…
[E18-125] Sí, sí existe.

Después de ayudar a construir la matriz asociada a una TL, esto es construir la interpretación matricial, E18 puede dar respuesta a la pregunta 3 y a la 5, mostrando una construcción proceso de los conceptos de combinación lineal y coordenadas de la imagen de un vector. Hasta ahora pareciera que posee una construcción mental objeto del concepto matriz asociada a la transformación lineal, pero no del teorema, pues no ha realizado acciones sobre éste.
Para determinar con claridad las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en la interpretación matricial, se plantea a E18 la siguiente pregunta:

Sexta pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**, definida por** $\left[F\right]_D^{D'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$**, donde**

$D=\langle(1,0,1),(1,1,0),(2,1,2)\rangle$ **y** $D'=\langle(1,1),(1,-1)\rangle$**, determine si la transformación lineal *F* es un isomorfismo de espacios vectoriales.**

E18 lee la pregunta y reflexiona sobre las dimensiones de los espacios de partida y de llegada:

[E18-126] Pero si vamos al teorema, este tiene tres, y si se confirma que tiene que ser cero, más dos… No nos daría la igualdad.
[Ent-127] A ver, cómo. Explícame. Qué es ese juego de números.
[E18-127] Ya. Es que la dimensión de los espacios de partida… La dimensión…
[E18-128] Es 3. Si fuera un isomorfismo, el kernel, o sea la dimensión del kernel, tendría que ser cero. Sí, porque para que nos podamos devolver y esa sea invertida. Y la dimensión del espacio de llegada tendría que llegar a todo el espacio, pero ese es dos. Entonces no nos va a dar dos.
[Ent-129] Ya. Entonces, ¿cuál es tu respuesta?

En figura 5.43 se aprecia el trabajo de E18, mostrándose que coordina los conceptos de función, dimensión, kernel e imagen mediante el teorema de las dimensiones. Este corresponde a establecer que una TL entre espacios vectoriales finito dimensionales cumple con la siguiente relación: $\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Img} T)=\dim(V)$ donde V es el espacio vectorial de partida.

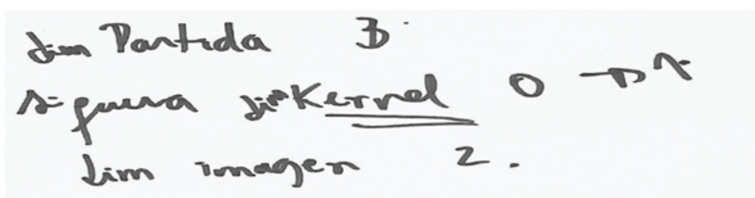


Figura 5.43. Trabajo de E18.

Comienza su explicación a su conclusión de que la transformación lineal de la pregunta es un isomorfismo.

[E18-129] Que no. …Y esos de ahí son LI. Quiero ver eso. (1, 0, 1), (1, 1, 0) y (2, 1, 2). [Piensa en voz alta, trabaja.] (…) Entonces…
[E18-130] Estoy viendo si es LD. Y si es una contradicción, entonces es LI.
[E18-134] Sí es isomorfismo.

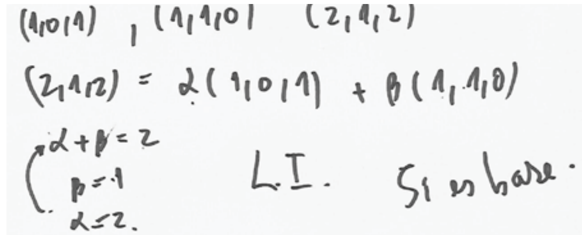


Figura 5.44. Cálculos realizados por E18.

Su argumentación, según transcripción de audio y escrito, consiste primeramente en verificar que el espacio de partida dado como un generado sea un conjunto linealmente independiente, esto es, verificación de que es una base, por lo que está mostrando una construcción proceso del concepto base de un espacio vectorial; posteriormente, al concluir que son linealmente independientes asegura que la transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales. Esto muestra que no ha coordinado el concepto de función con el de espacio vectorial mediante la combinación lineal.

Por esta razón, se invita a comparar esta respuesta con la dada anteriormente.

[Ent-135] ¿Es un isomorfismo? Te recuerdo que antes tú dijiste algo, en esta pregunta anterior. [le muestra otra hoja]
[E18-136] Por el determinante. El teorema es el que determina…
[Ent-137] ¿Y se puede calcular ese determinante?
[E18-137] Entonces no podemos.
[Ent-143] ¿Por qué?
[E18-143] Porque… Es que… No quiero, no sé, no quiero como usar… Ya, porque no cumple eso. Y no puedo calcular el determinante.

Se da cuenta de que no puede calcular el determinante y comienza a trabajar con el concepto del kernel de la TL. Esto muestra que la construcción mental asociada al concepto de kernel es proceso, pues recurre a ella desde el concepto de determinante de la matriz asociada a la TL.

[Ent-151] Ya. Y qué significaba que el Kernel de una transformación lineal fuese el cero, por ejemplo.
[E18-151] Que sólo manda el cero en el cero.
[Ent-152] Ya. Y si tú mandas otro número en el cero, qué problemas hay.
[E18-152] Que no es inyectiva.

Esto le ayuda a concluir que no es inyectiva y por lo tanto no es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es decir, tuvo que coordinar con la interpretación matricial el concepto de determinante para concluir que no es inyectiva. En lo que sigue comienza su argumentación referida a si es posible, bajo alguna condición por determinar, que sea un isomorfismo.

[E18-153] No puede ser un isomorfismo. …Pero podría sacar ese número.
[Ent-154] Ah, ¿se puede sacar?
[E18-154] No sé si se puede. A ver, voy a seguir haciendo esto.
[Trabaja. Piensa en voz alta.]
[E18-156] Ah, en álgebra, en estructuras, vimos que el espacio con el kernel es isomorfo a la imagen.
[E18-157] Entonces si esta función es biyectiva, su imagen sería ése. O sea…
[Ent-159] O sea, es posible.
[E18-167] Es que, o sea, calculé el kernel y era uno.
[E18-168] Y para que fuera isomorfismo tendría que ser cero el kernel.
[E18-169] Entonces no es un isomorfismo.

Figura 5.45. Respuesta después de considerar sus respuestas anteriores.

Ha concluido y explicado por qué la TL no es un isomorfismo. E18 construye sus argumentos desde el kernel, y determina que la función no es inyectiva. Retoma los argumentos para ver la posibilidad de modificar la función y que se transforme en un isomorfismo. Retoma la argumentación desde el concepto de coordenada de la imagen de un vector, lo que está dado en la matriz asociada a la transformación lineal. En la figura 5.46 se aprecia este trabajo.

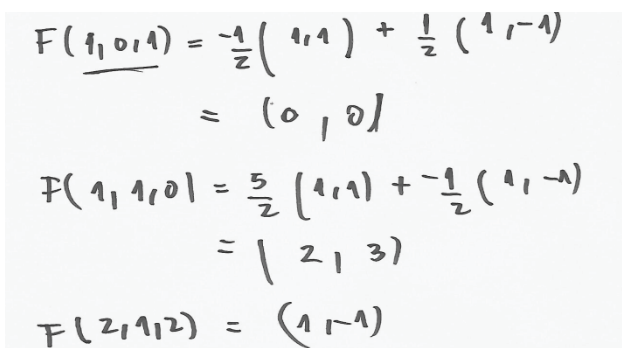


Figura 5.46. E18 encuentra las imágenes de los vectores de la base.

[E18-174] Esa es una base.
[Ent-175] Tú demostraste que era base.
[E18-175] Sí. Entonces no, no hay más, sólo el generado por ése. No hay más.
[Ent-176] ¿Y ahora me podrías explicar esto?
[E18-176] Ya.
[Ent-177] No entiendo eso.

[E18-177] Ya, Veíamos que era… el cociente…

[Ent-178] ¿Qué es eso del cociente?

Comienza el relato de E18 sobre lo que entiende por cociente. En figura 5.47 se aprecia el dibujo que lo acompaña.

[E18-179] (El profesor) dice que uno desde pequeño hace relaciones de equivalencia. [Dibuja tres óvalos.] Que la mamá te manda a comprar café al supermercado. Uno va al supermercado y ve la relación de los precios que hay.

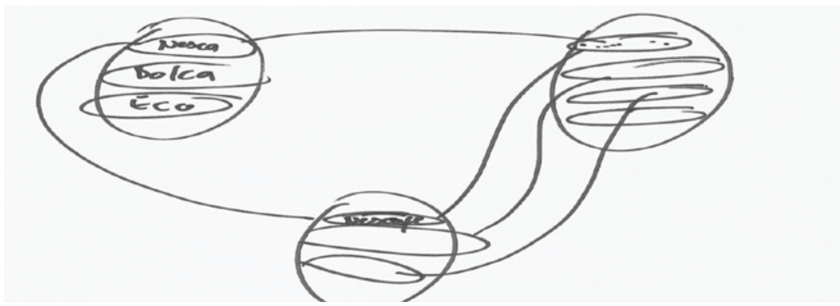


Figura 5.47. Explicación de E18 sobre las clases de equivalencia.

E18 en relata sobre el concepto de cociente, muestra relacionar con el concepto de relación de equivalencia y de clases de equivalencia. Para ello coordina las construcciones mentales proceso de los conceptos de conjunto y de clase de equivalencia, mediante la relación de equivalencia. Una vez construido el cociente de conjuntos, como una construcción proceso, lo coordina con el concepto de kernel de una transformación lineal, para obtener una construcción proceso del teorema de isomorfismo de espacios vectoriales.

[Ent-180] ¿Y es inyectiva?

[E18-180] Y es inyectiva por esto. Porque yo estoy pasando al cero, estoy pasando a la clase. Sí. ¿Entendió el ejemplo?

En esta última línea asume por completo su construcción, esto es, que para dar respuesta a la pregunta 6 debió reconstruir el concepto de grupo cociente.

[E18-183] Sea T en una… que va de *V* a *W*, una transformación lineal, y dos conjuntos: *A*, que está contenido en *V*, y *B*, que está conteniendo a *W*. Entonces vamos a hacer esto así… [Dibuja.]

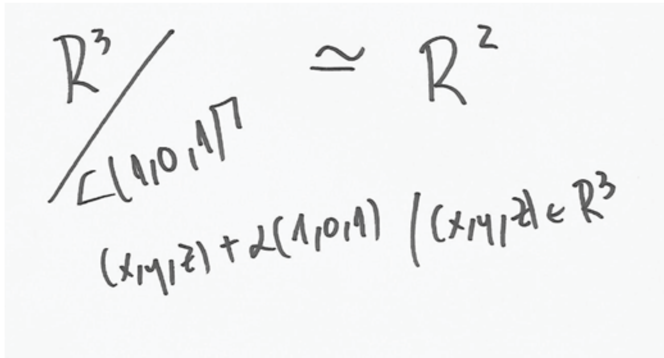


Figura 5.48. Diagrama sobre el teorema de isomorfismo de grupos.

Para dar respuesta tuvo que articular la interpretación matricial para entender la transformación lineal con la interpretación funcional.

Las dos últimas preguntas están dirigidas a establecer por qué su esquema del concepto trasformación lineal no es trans-, a pesar de lo mostrado en este punto.

Séptima pregunta del cuestionario para la entrevista de E18:

Sea $\mathrm{T}: V \rightarrow W$ **transformación lineal y dos conjuntos** $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ **y** $B = \{w_1, \mathrm{w}_2, ..., \mathrm{w}_n\} \subset W$ **, talque** $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, ..., T(v_n) = w_n$

a.- Si el conjunto *B* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *A* linealmente independiente?

b.- Si el conjunto *A* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *B* linealmente independiente?

c.- Si *B* genera a *W*, ¿debe A generar a *V*?

d.- Si *A* genera a *V*, ¿debe *B* generar a *W*?

E18 responde a la última pregunta, la que tiene por objetivo evidenciar sus conceptos de combinación lineal ligados al de transformación lineal. Sus argumentos son expresados mediante diagramas, los que incorporaremos en su discurso.

[E18-188] [Piensa en voz alta] Si el conjunto *B* es linealmente independiente, ¿debe ser el conjunto *A* linealmente independiente? Yo llegué y dije que era base. Ya, entonces *A* tiene sus elementos y *B* tiene… Entonces, para aplicar voy a este, y este con este… [Piensa en voz alta. Trabaja].

[E18-189] Eso no pasa. Entonces, si este es LI y tienen la misma cantidad de elementos, entonces esté de acá también tiene que ser LI. Porque si este va acá puede haber LD, o sea, uno de esos elementos de acá…

Figura 5.49. Se aprecian los dibujos explicativos para la pregunta 7a.

[E18-190] …Lo puedo seguir como combinación de estos dos. Qué pasaría, a ver, si este lo escribo como combinación de esos dos. Ya. Algo me dice así que es LI.

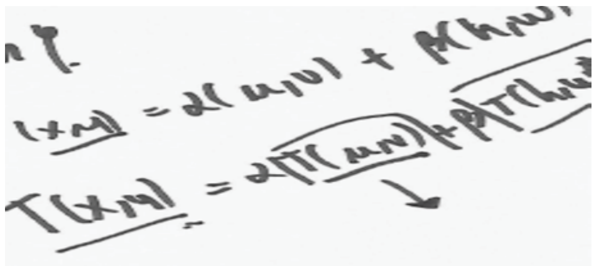


Figura 5.50. La combinación lineal anunciada en para la pregunta 7a.

[E18-191] Para que vayan así como uno por uno.

[E18-193] Pero en el caso de que estos de acá fueran LD, estoy viendo cómo quedaría lo de las flechitas, al aplicar…

[Ent-194] ¿Y es transformación lineal?

[E18-195] Sí.

[E18-197] Entonces estaría mandando dos flechas al mismo punto.

Hasta este momento se muestran argumentos confusos que logra canalizar, lo que significa que ha coordinado los procesos entre los conceptos de LI, LD y TL, construyendo un nuevo proceso, en vías de encapsulación. Es un largo diálogo en el que quedó claro que los conceptos de dependencia lineal y TL aún no están completamente construidos como un todo, por lo que se decide cambiar la pregunta por otra alternativa que permita construir al estudiante. La nueva pregunta pensamos que posibilita la articulación con la interpretación geométrica, facilitando los cálculos numéricos mediante la visualización.

Octava pregunta del cuestionario en la entrevista de E18:

Consideremos $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **transformación lineal, y dos conjuntos** $A=\{(2,0),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ **y** $B=\{(0,-3),(0.5,0)\}\subset\mathbb{R}^2$ **,talque** $T(2,0)=(0.5,0)$, $T(0,1)=(0,-3)$

- ✓ **Si *A* genera a** $\mathbb{R}^2$ **. En este caso ¿*B* genera a** $\mathbb{R}^2$ **?**
- ✓ **Si el conjunto *A* es linealmente independiente, ¿B es linealmente independiente? ¿Es un isomorfismo?**

[E18-246] Voy a hacer mis dibujos. Esta es *A*, que tiene (*2, 0*) y (*0, 1*) y es LI. Ah, esa es LI. Y esta de acá es (*0, 5, 0*) y (*0, 1*) a R^2. [Piensa en voz alta, escribe] El T de… es (0, 5, 0) y el T…. Con esto puedo armar la transformación.

Figura 5.51. Trabajo de E18.

En la figura 5.51 se aprecia el trabajo de E18, cuya construcción es independiente de la interpretación geométrica del concepto TL: es un dibujo o gráfico desde una perspectiva funcional.

[E18-250] Si A genera a $\boldsymbol{R}^2$. Esto lo genera todo, todo. En este caso, ¿B genera a $\boldsymbol{R}^2$?
Lo puedo escribir como combinación de los elementos de la otra. Yo creo que sí.

[E18-252] Linealmente independiente. Sí, sí es linealmente independiente. ¿B es linealmente independiente? O sea, este B sí es linealmente independiente. Eeh, ¿es un isomorfismo? Sí, porque este es una base y este también Entonces puede generar todo el conjunto. Acá tengo esta *T*. Puedo calcular la asociada y si el determinante es distinto a cero estoy lista.

[E18-256] Entonces, ya. Si este es LI, ese tiene que ser LI. Si ese es LI, ese no necesariamente tiene que ser LI. Lo mandamos al cero. Es transformación lineal todo el rato.

[Ent-257] Perfecto.

[E18-257] Y no genera nada tampoco.

[E18-258] Entonces ahí, si ese genera, este no necesariamente tiene que generar, porque lo mandamos al cero y el cero no genera.

[E18-259] Entonces, si ese genera *W* y es LI, entonces este también va a ser LI y va a generar… O sea, ese también va a generar.

[E18-260] Preguntan si ese es LD, que genere esto. Que va a generar allá. Pero es que no va a ser base aquí. Si es LD genera, no es base. Entonces… Hay algo raro.

Hasta aquí parece exitoso el cambio de pregunta, pues E18 comienza a aclarar sus dudas y responde, pero al regresar al contexto original se pierde nuevamente. Parte de esta situación se da cuenta en los diálogos siguientes:

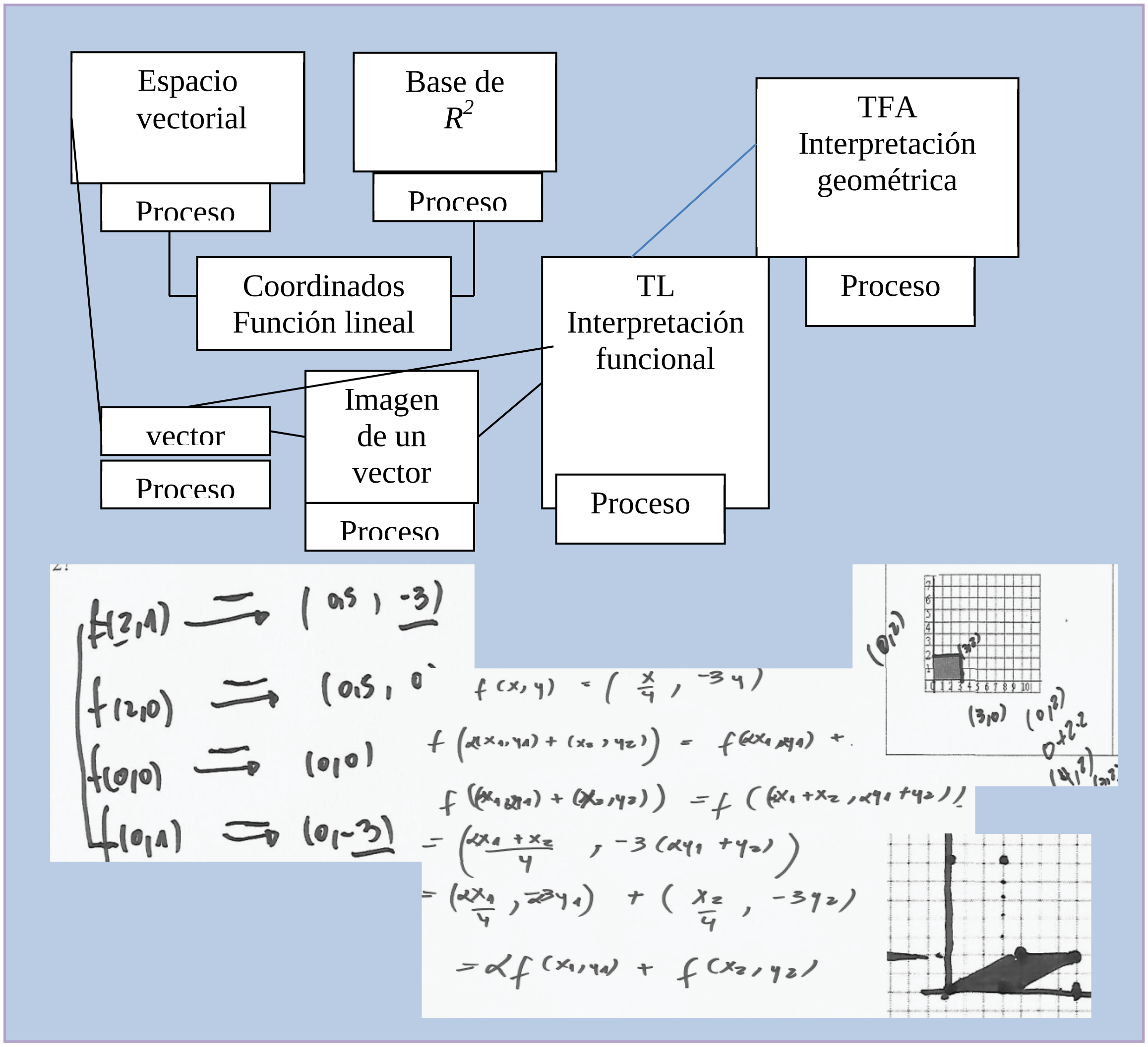
[E18-271] Y este conjunto de acá que es LD.
[Ent272] Pero genera.
[E18-272] Pero genera. O sea, puede tener… Tiene que…
¿Qué dimensión tiene que tener?
[Ent-273] O sea, si tú quieres que lo cubra todo, puede tener lo mínimo cuatro…
[Ent-283] Entonces, ¿se puede o no se puede?, ¿si B genera a W, A genera a B?
[E18-283] Pero este son cuatro y para generar a B necesito cinco.
[E18-284] No se puede.
[E18-285] Cómo, ahí está. ¡No se puede!

Para finalizar, E18 pudo dar respuesta a la pregunta después de que se realizan los cambios e invitarlo a una reflexión desde ejemplos numéricos; no se realizaron coordinaciones con la interpretación geométrica ni matricial, y sus construcciones mentales para el esquema del concepto TL dan cuenta de un esquema que está evolucionado y le permite incorporar a otros contextos en forma adecuada. Pensamos que en un inter- para el concepto de TL por esta razón.

5.4.2 CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MOSTRADOS POR E18.

Los siguientes bosquejos corresponden a una síntesis en la que se muestran las construcciones mentales evidenciadas en las respuestas de E18 a cada una de las preguntas de la entrevista. Las líneas trazadas entre las diferentes construcciones mentales corresponden a los mecanismos mentales; por otra parte, se evidencia el nivel del esquema puesto en juego a través de la evolución en sus respuestas. En esta entrevista se repitió la mayoría de las preguntas que se formularon, las fueron intercambiadas por otras para facilitar las acciones al entrevistado, dejando a medio hacer algunas de ellas, para posteriormente ser retomadas.

Pregunta 1

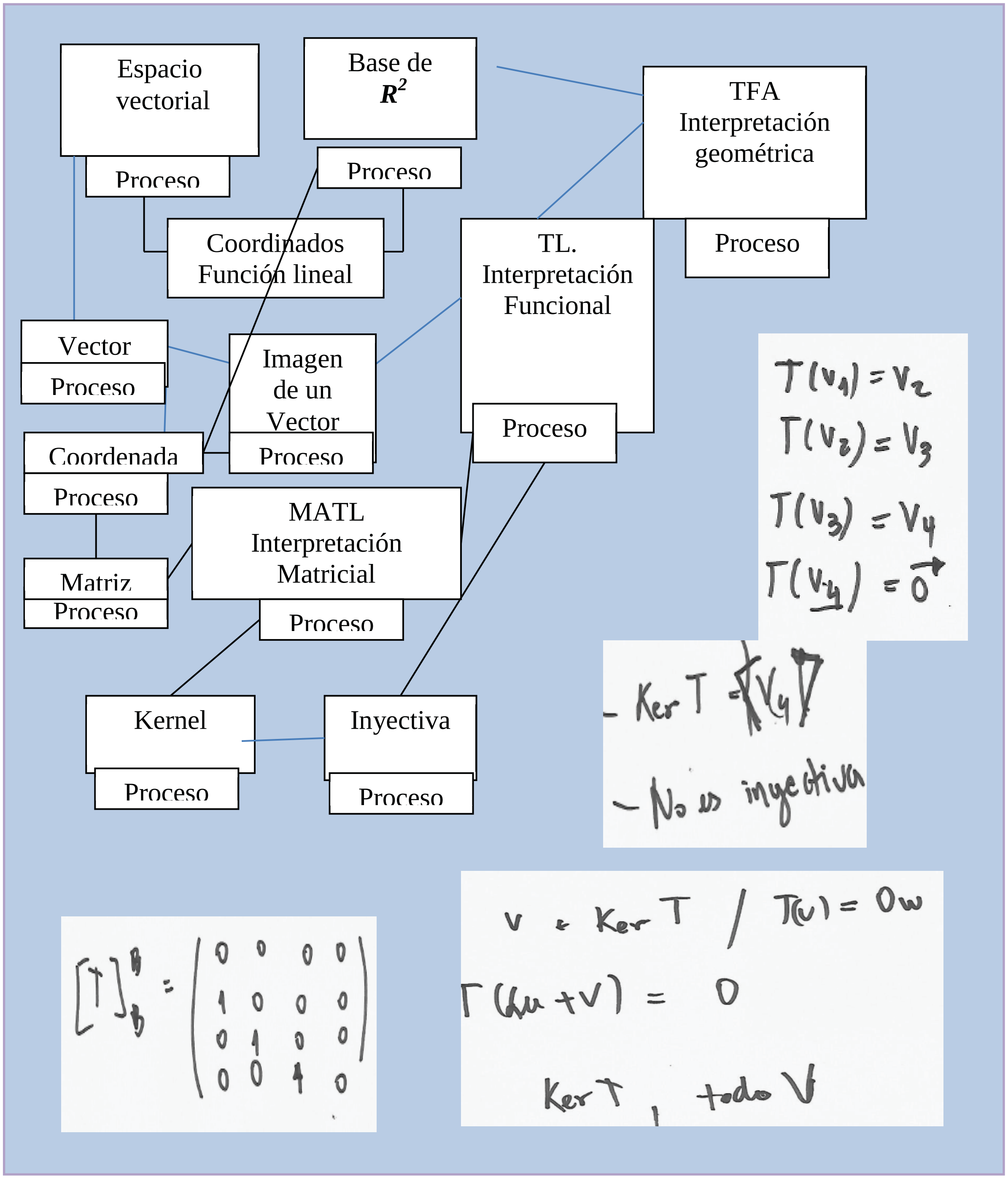


E18 mostró las construcciones mentales de espacio vectorial, base, vector e imagen de un vector, además del concepto TL en su interpretación funcional y matricial.

Pregunta 2

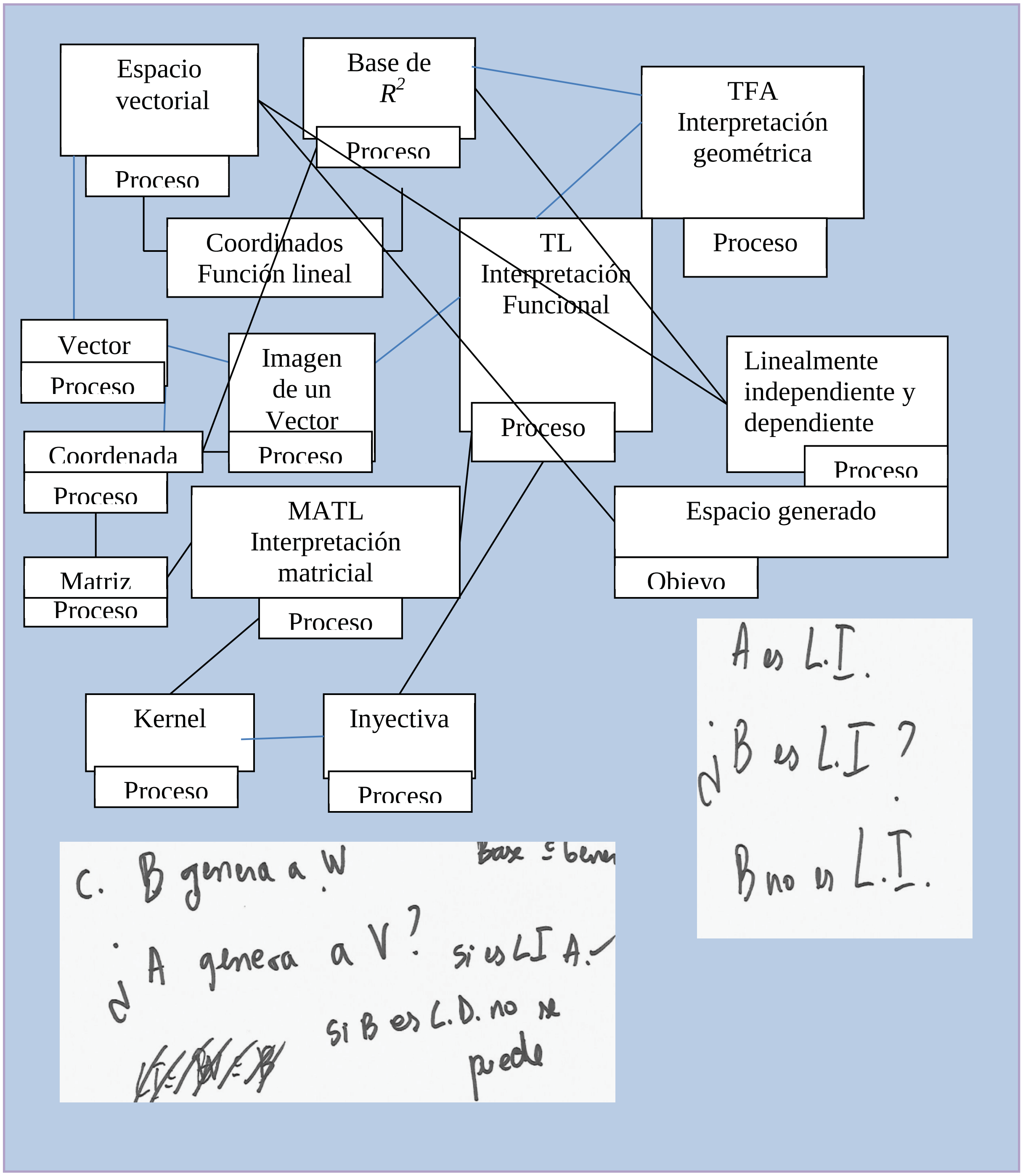
Esta pregunta tuvo que ser intercalada para ayudar a E18 a evocar las estructuras mentales para dar respuesta a la primera pregunta, por lo que las construcciones mentales fueron incorporadas al diagrama anterior.

Pregunta 3 y 4



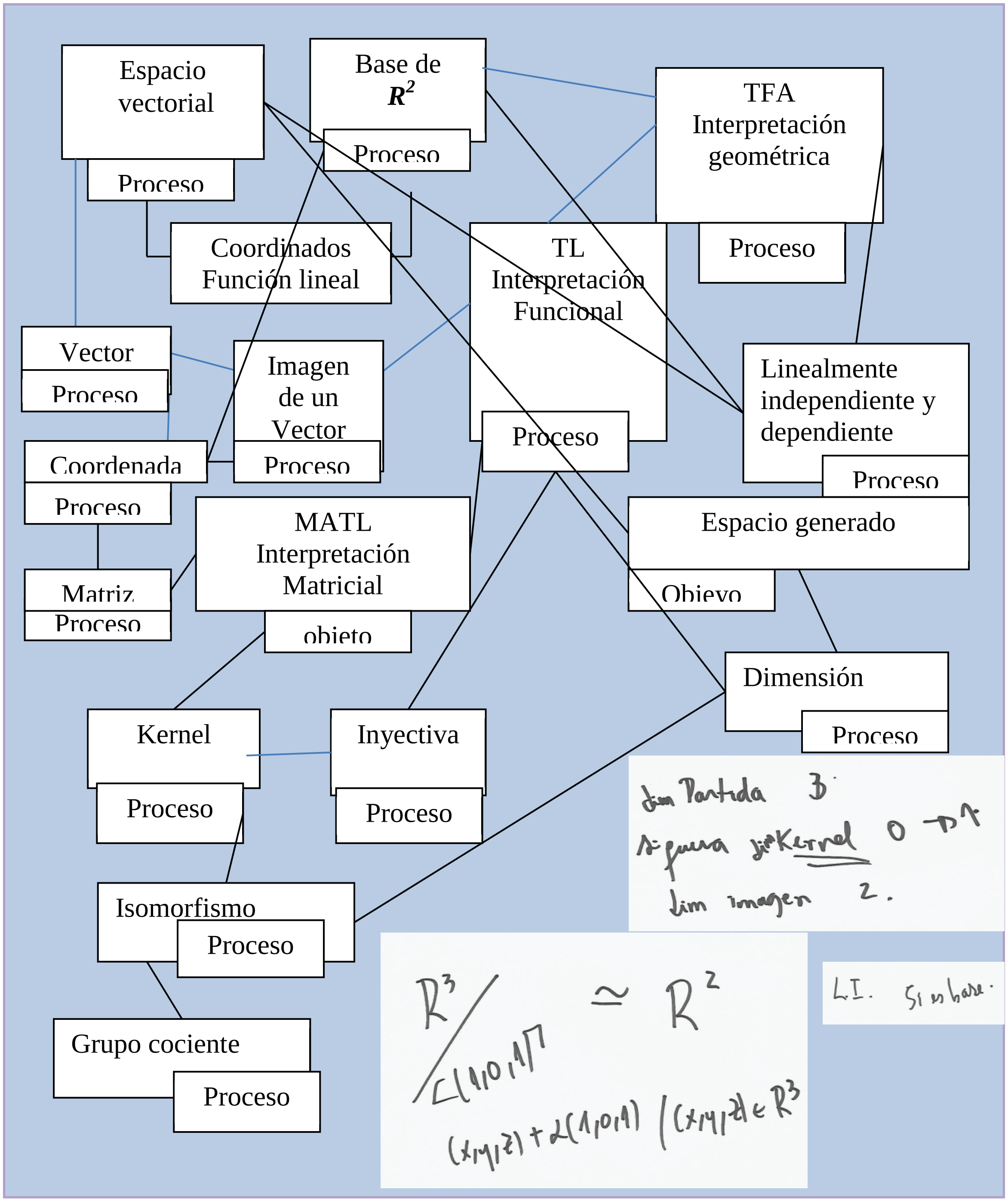
E18 muestra nuevas construcciones mentales y mecanismos para dar respuesta a las preguntas 3 y 4; éstas son: coordenada, matriz, interpretación matricial, kernel, inyectividad, todas ellas en construcción mental proceso. Posiblemente el concepto de kernel esté en construcción objeto, pues realiza acciones sobre éste para determinar la inyectividad en una TL. En la pregunta 3, E18 declaró estar confundido, se cambia la pregunta y desde allí construye y responde ambas, mostrando las construcciones antes descritas.

Pregunta 5



En la pregunta 5 se invita a E18 a reflexionar sobre la relación entre la linealidad y las TL, incluyendo de esta forma las construcciones mentales y mecanismos asociados a los conceptos de dependencia lineal y explicitando el concepto de espacio generado; este último en construcción mental objeto, pues en las preguntas anteriores realizó acciones sobre éste para calcular mediante el kernel de una TL su injectividad y determinar si era un isomorfismo de espacios vectoriales.

Pregunta 6 y 7



En la pregunta 6, E18 muestra y pone en juego la totalidad de construcciones mentales para la entrevista, las que le permiten reconstruir el teorema de isomorfismo de espacios vectoriales, añadiendo el grupo cociente a su esquema. Por otra parte, pensamos que ha mostrado una construcción objeto para TMATL, pues desde allí logra construir la función en su interpretación funcional y construir el isomorfismo entre estos espacios vectoriales.

5.4.3 ANÁLISIS DEL ESQUEMA PARA EL CONCEPTO TL DE E18.

A continuación resumiremos la información obtenida sobre las construcciones y mecanismos mentales para la reconstrucción del concepto TL en sus tres interpretaciones, que E18 mostró durante la entrevista y el cuestionario realizado en la primera etapa de la investigación; las evidencias obtenidas serán contrastadas con las DG propuestas, y de esta forma podremos determinar el nivel del esquema para el concepto de TL, y al mismo tiempo obtener información para refinar el modelo multinterpretativo.

En la primera etapa de la investigación, E18 mostró construcción mental proceso para dos de las interpretaciones del concepto TL (funcional y geométrica). Las principales construcciones mentales mostradas en las respuestas al cuestionario fueron:

- ✓ En la interpretación funcional, los conceptos de función, dominio y recorrido de una TL, espacio vectorial, vector, imagen de un vector, imagen de un vector mediante una TL, combinación lineal, se mostraron como construcciones proceso. E18 omitió la pregunta 5 en este cuestionario; esta pregunta daba cuenta de una TL con operaciones no usuales. Según nuestro modelo, mostraría un esquema de nivel *Intra-* para la interpretación funcional.

- ✓ En la interpretación matricial emergen nuevos los conceptos, además de los anteriores, como son los de coordenada, matriz y en forma explícita el de combinación lineal, que juega roles de mecanismo y construcción mental en esta interpretación. E18 logra mostrar construcciones mentales próximas a la de objeto en cada concepto que construye, pero omite la pregunta 4 del cuestionario; se le pide encontrar la MATL para espacios vectoriales isomorfos a $\boldsymbol{R^n}$. Según nuestro modelo, mostraría un esquema de nivel *Inter-* para la interpretación matricial.

- ✓ En la interpretación geométrica surgen conceptos como los de linealidad y función en su relación con conjuntos LI y LD, además de los conceptos de base e implícitamente el de dimensión. E18 mostró una construcción proceso, pues nuevamente omite dos preguntas, una relacionada con la articulación. Según nuestro modelo, mostraría un esquema de nivel *Intra-* para la interpretación geométrica; las preguntas omitidas establecen indicadores en su evolución.

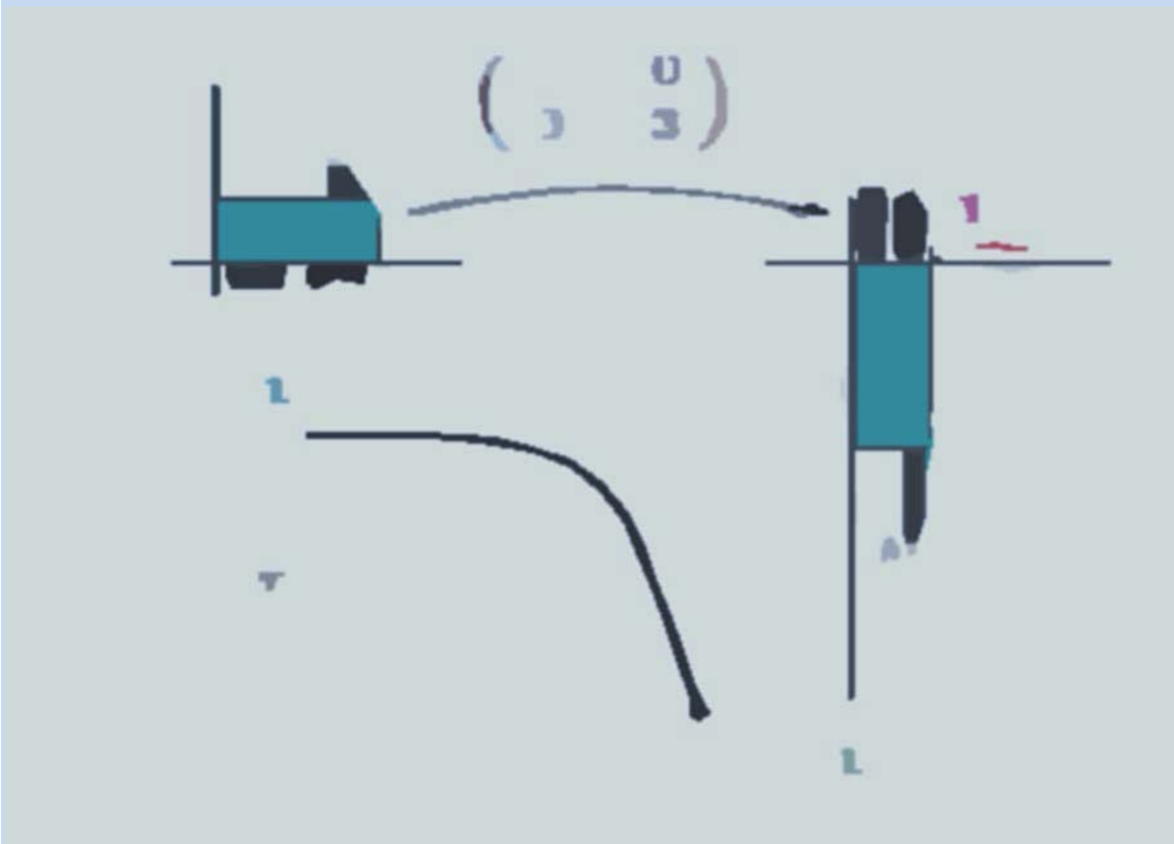
Para el cuestionario, las DG dieron cuenta en forma apropiada de las construcciones y mecanismos mentales mostrados por E18 para la construcción del concepto.

En el desarrollo de la entrevista, E18 mostró tener dudas en tres ocasiones; estas dificultades se relacionaron con la interpretación funcional y la geométrica del concepto

TL. Por ejemplo, para construir la función que define la TL, se propuso una pregunta que va desde lo funcional a lo geométrico, que promueve la articulación entre las interpretaciones funcional y geométrica; en un segundo cambio de pregunta, en que nuevamente se pedía construir la función en términos de la interpretación funcional mediante el uso del TFAL, esto es la articulación geométrico funcional, se cambió la pregunta por otra, en la que todas las imágenes van a parar al vector nulo. Aquí E18 mostró coordinar el concepto de kernel con el de TL en su interpretación funcional, y suponemos que el concepto de kernel está en una construcción objeto, ya que realiza acciones sobre éste con el propósito de determinar la inyectividad de una función lineal. El tercer cambio pone en evidencia las dificultades de E18 para coordinar los conceptos de dependencia lineal y TL en su interpretación funcional. Su esquema, a pesar de tener las dificultades antes descritas, le permitió dar respuesta adecuada a las problemáticas del teorema de isomorfismo entre espacios vectoriales. Las evidencias nos permiten decir que posee un nivel *Inter*-TL.

CAPÍTULO 6:

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES.



CAPÍTULO 6:
CONCLUSIONES Y PROYECCIONES.

Nos propusimos investigar las construcciones y mecanismos mentales para la construcción del concepto TL, reconocimos en el concepto componentes de origen funcional, matricial y geométrico, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones del concepto TL, lo que dio origen a un modelo multinterpretativo que permitió llevar adelante la investigación, estableciendo tres perspectivas para el análisis cognitivo del concepto TL.

En este capítulo recopilaremos los principales resultados de la investigación, para desde allí levantar algunas de sus proyecciones. La forma en que hemos dispuesto la recopilación de los resultados tiene por propósito mostrar el potencial del modelo, siendo por una parte posible, y como una investigación independiente, reportar las evidencias por interpretación, las que por sí solas constituyen un dato importante sobre las construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje de un concepto matemático, en este caso el de TL. Un ejemplo de ello es la interpretación matricial asociada al objeto matemático TMATL, en que proponemos una DG del concepto, la que se sustenta en una investigación realizada el año 2012 por Parraguez y Maturana sobre el teorema del cambio de base para vectores, desde donde levantamos algunas de las hipótesis que ahora constituyen un artículo sobre la TMATL, el que está en evaluación.

Por otra parte, las entrevistas otorgan evidencias sobre el esquema del concepto TL en sus tres interpretaciones, por lo que el modelo multinterpretativo constituye una herramienta de selección que permitió caracterizar el esquema del concepto TL.

6.1 CONCLUSIONES SOBRE CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES POR INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO TL.

A continuación mostraremos una síntesis sobre las construcciones y mecanismos mentales que se detectaron para el caso en estudio sobre el concepto TL.

El detalle de las evidencias específicas sobre cuáles son las construcciones y mecanismos mostrados por los estudiantes para concepto de TL, en sus diferentes interpretaciones provenientes de los datos, se encuentran en el capítulo 4, apartados 4.1.1.2, 4.1.2.2 y 4.1.3.2.

6.1.1 CONCLUSIONES SOBRE LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL DEL CONCEPTO TL.

En general, sobre las construcciones y mecanismos mostrados por los estudiantes del caso para la construcción del concepto de TL en su interpretación funcional, las evidencias dan cuenta de que todos los estudiantes poseen una construcción acción del concepto de imagen de un vector, pero sólo seis de ellos poseen una construcción proceso del concepto imagen de un vector mediante una TL, y de éstos, dos muestran coordinar los procesos de combinación lineal con el de función mediante la igualdad, esto es, relacionar la ecuación que define a una TL en su interpretación funcional. Esto prueba que existe una dificultad entre la coordinación del proceso de función y el de combinación lineal necesaria para la construcción del proceso de TL. Nuestro modelo DG dio cuenta en forma específica de ello, proporcionando una contribución del estudio a la investigación en didáctica de la matemática y a la enseñanza del álgebra lineal.

Por otra parte, más de la mitad de los estudiantes de este caso no poseen claridad en la definición del concepto TL en su interpretación funcional, puesto que no recuerdan o no usan las propiedades o ecuaciones que lo definen. Creemos que esta dificultad proviene de un uso mecánico de las propiedades que constituyen la definición, que son empleadas en la etapa inicial de la presentación del concepto TL, las que posteriormente son sustituidas por el teorema fundamental del álgebra lineal, entre otros.

6.1.2 CONCLUSIONES SOBRE LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL DEL CONCEPTO TL.

Las construcciones y mecanismos mentales para modelar el aprendizaje del TMATL, esto es, la interpretación matricial del concepto TL, se detectaron en la construcción mental objeto del concepto coordenadas del vector y la coordinación entre los procesos: de coordenada de la imagen de un vector que se repite en todos los vectores de la base ordenada del espacio dominio de la transformación, con el proceso matriz, para obtener como resultado un proceso que permite el ordenamiento de las imágenes mediante la transformación.

En forma específica, se pudo determinar que la no construcción del proceso de coordenadas de un vector imposibilita la construcción del proceso asociado a la MATL. Así como haber construido la combinación lineal como una concepción proceso y la determinación de las coordenadas de un vector como construcción proceso, no son suficientes para construir el concepto MATL. Según lo dispuesto en la DG, la dificultad que muestran los informantes radica en que no han construido la coordinación entre el proceso que permite escribir estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base del espacio dominio de *T*, con el de matriz para obtener un proceso que permite el ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas. Por otra parte, la construcción de la MATL como un objeto no es garantía de haber construido la relación $[T]_B^{B'}[v]_B=[T(v)]_{B'}$ como un proceso, cuya encapsulación establece el TMATL.

En general, podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes, son fundamentalmente la construcción objeto del concepto de coordenadas de un vector, la construcción objeto de la MATL y del proceso asociado a la MATL como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada dio cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TMATL.

6.1.3 CONCLUSIONES SOBRE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONCEPTO TL.

Una observación inicial sobre el desempeño de los estudiantes del caso, al abordar el cuestionario de la interpretación geométrica del concepto TL, es que hubo una resistencia a responder sus preguntas, justificada por argumentos como que el álgebra lineal y la geometría son cursos diferentes.

En términos de construcciones y mecanismos mentales, los estudiantes que no muestran resistencia o se sobreponen a ella, dan cuenta de la identificación de los vectores en las figuras, reconociendo que constituyen una base para el espacio de partida. Esto es, desde APOE, coordinan las construcciones mentales proceso para los conceptos de vector que se identifica en el plano figural, y de función, para construir el proceso de asignación de vectores imágenes en la figura de llegada.

En el resto de las preguntas, la mitad de los estudiantes del caso elabora algún tipo de respuesta, en las que se observó la coordinación de las construcciones proceso correspondiente a la interpretación geométrica con la funcional de la TL. Sobre estas respuestas podemos decir que esta coordinación emerge desde lo geométrico, constituyendo el sustento para la construcción del proceso correspondiente al subespacio de llegada, que puede encapsularse en un objeto.

Sobre la articulación entre las interpretaciones geométrica y matricial, sólo cinco estudiantes del caso dan algún tipo de respuesta, y son los que mostraron coordinar los procesos de base para el plano y de función que construye el proceso correspondiente a un tipo específico de TL.

En términos generales, pensamos que los estudiantes que no construyen las coordinaciones antes mencionadas, pero realizan acciones o procesos, son aquéllos que no han logrado construir la interpretación geométrica de la TL.

Al igual que en la investigación de Molina y Oktaç (2007), aparecen los fantasmas de los modelos intuitivos. Bajo el alero de la teoría APOE, pensamos que se trata de acciones que no han sido interiorizadas; en otras palabras, la construcción del teorema fundamental del álgebra lineal en esta versión no ha sido construida como proceso. Ante ello, pensamos que hace falta propiciar coordinaciones con el plano figural, para una posible interiorización de los procesos asociados a dicho teorema, que aunque limitada por la visualización, propiciaría una base para una construcción más general del concepto TL.

6.2 CONCLUSIONES SOBRE LA ARTICULACIÓN DE LAS TRES INTERPRETACIONES.

La articulación entre las interpretaciones de un concepto, en este caso para el concepto de TL, surge de la consideración de la construcción de un esquema de TL. Ello permite comprender y modelar en forma detallada y sistémica las construcciones y mecanismos mentales asociados a un concepto matemático especifico, con características fundamentales dentro de una teoría; esto es, describir el objeto matemático, pero al mismo tiempo contenerlo, de tal forma que nos permita investigar y modelar su forma de evolución. Es así que se convierte en un modelo selectivo y predictivo, pues permite categorizar apriorísticamente niveles en el esquema, y de esta forma seleccionar en forma precisa individuos para las entrevistas con el propósito de caracterizar las construcciones y mecanismos mentales para la reconstrucción de un concepto matemático.

Las evidencias obtenidas nos permiten decir que la articulación entre la interpretación geométrica y la funcional, como se mencionó anteriormente emerge desde lo geométrico. Sobre la articulación entre la interpretación matricial y geométrica del concepto TL, se tiene evidencia de la importancia de la coordinación entre las concepciones proceso de base para el subespacio de $\boldsymbol{R^3}$ y de función que construye un proceso asociado a un tipo específico de TL, para posteriormente construir la MATL también como proceso.

Hemos de destacar que originalmente se introdujo el proceso asociado a la interpretación funcional de la TL como elemento articulador entre los conceptos que constituyen los procesos que constituyen el esquema de TL; sin embargo los datos obtenidos ponen en relieve que son los procesos asociados a la combinación lineal en sus diferentes representaciones los que juegan un papel relevante como en la coordinación de las distintas interpretaciones de la TL y permiten la evolución del esquema. Se podría pensar en un refinamiento del modelo y llegar a la combinación lineal como elemento articulador.

En las entrevistas se diluye la diferenciación entre las interpretaciones, por lo menos para el entrevistado, y es posible evidenciar en los diagramas que contienen las construcciones mentales y las conexiones mostradas en el capítulo 5, cuáles son las conexiones o articulaciones entre estas estructuras mentales. Como nota al margen, resulta casi anecdótico el hecho de que para este caso de estudio, no se pudo establecer relación de interés didáctico entre el orden de selección de las interpretaciones del concepto TL y el éxito en sus respuestas.

6.3 CONCLUSIONES OBTENIDAS EN LAS ENTREVISTAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL.

De las entrevistas, como parte de la metodología dispuesta en la teoría APOE, se obtuvo el detalle sobre las construcciones y mecanismos mentales puestos en juego en la construcción del esquema para el concepto TL y a la vez, se pudo establecer la evolución en los esquemas mentales de los entrevistados. Para ello levantamos indicadores (tabla6.1) en términos de las construcciones mentales que evidencian cada uno de los niveles de evolución del esquema del concepto TL.

Tabla 6.1. Construcciones mentales para determinar el nivel del esquema para el concepto TL.

Intra-TL	*Inter*-TL	*Trans*-TL
Concepto de espacio	Concepto de espacio	Concepto de espacio vectorial real como esquema.

vectorial real como objeto.	vectorial real como objeto.	Concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo como objeto.
Concepto de función como proceso.	Concepto de función como objeto.	Concepto de función como objeto.
Concepto de combinación lineal como proceso	Concepto de combinación lineal como proceso.	Concepto de combinación lineal como objeto
Concepto de kernel como proceso.	Concepto de kernel como objeto.	Concepto de kernel como objeto.
Concepto de dimensión como objeto.	Concepto de dimensión como objeto.	Concepto de dimensión como objeto.
Concepto de MATL como proceso.	Concepto de MATL como objeto.	Concepto de MATL como objeto.
Concepto de vector como objeto.	Concepto de vector como objeto.	Concepto de vector como objeto.

El mecanismo que permite el tránsito entre el nivel *Intra*-TL e *Inter*-TL puede definirse como un mecanismo doble en el que se construye, por una parte, una relación entre el proceso combinación lineal y el proceso asociado al espacio vectorial que estructura al último y, por otra parte, se construye una relación entre el proceso de kernel y el proceso MATL como forma de determinar la inyectividad de la función TL. Por su parte, el mecanismo que permite el tránsito entre el nivel Inter-TL y el *Trans*-Tl radica en la posibilidad de determinar, mediante el uso de la combinación lineal, la existencia de una función TL que relacione los espacios vectoriales incluidos en ella. La coherencia del esquema queda determinada por el reconocimiento del papel del objeto combinación lineal en esta relación.

Bajo los indicadores anteriores nos fue posible determinar que dos de los tres entrevistados mostraron una evolución de su esquema para el concepto TL. Y por otra parte, el tercer entrevistado no dio evidencias de evolución su esquema, permaneciendo en un nivel *Intra*-TL.

Desde su estudio, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto TL se pone a prueba su esquema. Es así que los tres entrevistados mostraron, en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos LI y LD, combinación lineal, función lineal, inyectiva, matriz, coordenada, MATL, dimensión, kernel, isomorfismo, TFA, cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones; todas dispuestas en nuestras DG, pero la diferencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran elementos que marcaban diferencia. De estos, ambos lo relacionaron a la interpretación funcional del concepto TL, donde la estructura algebraica de espacio vectorial era fundamental. A su vez emerge el concepto de grupo cociente, vinculado a la estructura de espacio vectorial.

Pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal, mostrando uno de ellos un esquema para el concepto de TL de nivel *Inter*-TL, que en una primera mirada se pensó podría ser *Trans*-TL, pues logró articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo entre espacios vectoriales, los indicadores antes dispuestos permitieron lograr las evidencias en las dificultades relacionadas con las construcciones mentales asociadas al concepto CL, cuya construcción para lograr una coherencia en el esquema debiera ser objeto. Esta construcción permite la realización de acciones sobre conjuntos LI o LD a los que se les aplica una TL. Es importante resaltar el papel que juega el objeto combinación lineal, tanto en la evolución del esquema TL como en su coherencia. La dinámica de evolución del esquema y el hallazgo del papel que juega en ella constituyen una aportación de este trabajo.

6.4 LIMITACIONES DEL ESTUDIO.

Pensamos que la propuesta de investigación tiene sus limitaciones. La cantidad de datos en este modelo requiere mejorar las técnicas de compilación de la información; quizás la implementación de un software estadístico sea un camino alternativo, lo que podría ampliar sus resultados, al incorporar nuevos casos de estudio. Por otra parte, el procedimiento en la toma de datos requiere ser refinado, debido a la extensión de los cuestionarios.

6.5 PROYECCIONES.

6.5.1. PRIMERA PROYECCIÓN DIDÁCTICA: LA INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE TL.

Contribuir al núcleo de investigaciones en problemáticas sobre álgebra lineal, posicionando la Didáctica del Álgebra Lineal como una línea de investigación a nivel de educación superior, necesaria en nuestro país.

En lo específico, difundir los resultados de investigación, con la intención de aportar a mejorar las propuestas de enseñanza sobre el concepto de TL, a partir de las evidencias obtenidas sobre las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción cognitiva del concepto de TL. Y propiciar propuestas de perfeccionamiento docente que ayuden a la comprensión de los fenómenos de aprendizaje en los estudiantes, insertas en un programa que reconozca la importancia de la didáctica de la matemática como herramienta científica para el desarrollo docente.

Otro tipo de proyección —de carácter teórico— emergente en esta investigación, se relaciona a la interpretación geométrica del concepto TL. Proponemos una DG con características inusuales dentro de la teoría APOE; las variantes en las DG que incluyan la visualización en forma explícita no existen, pero pueden basarse en un trabajo de Zazkis y

Dubinsky del año 1996, sobre el *Grupo Diédrico y sus Interpretaciones,* donde se propone una caracterización visual sobre la construcción de D_4 y se describe su forma de construcción. Por esto, pensamos que queda abierto este camino, y que se requiere profundizar en detalles teóricos sobre construcciones y mecanismos mentales apropiados para describir los procesos cognitivos ligados a la visualización.

6.5.2 SEGUNDA PROYECCIÓN DIDÁCTICA: SOBRE EL MODELO MULTINTERPRETATIVO.

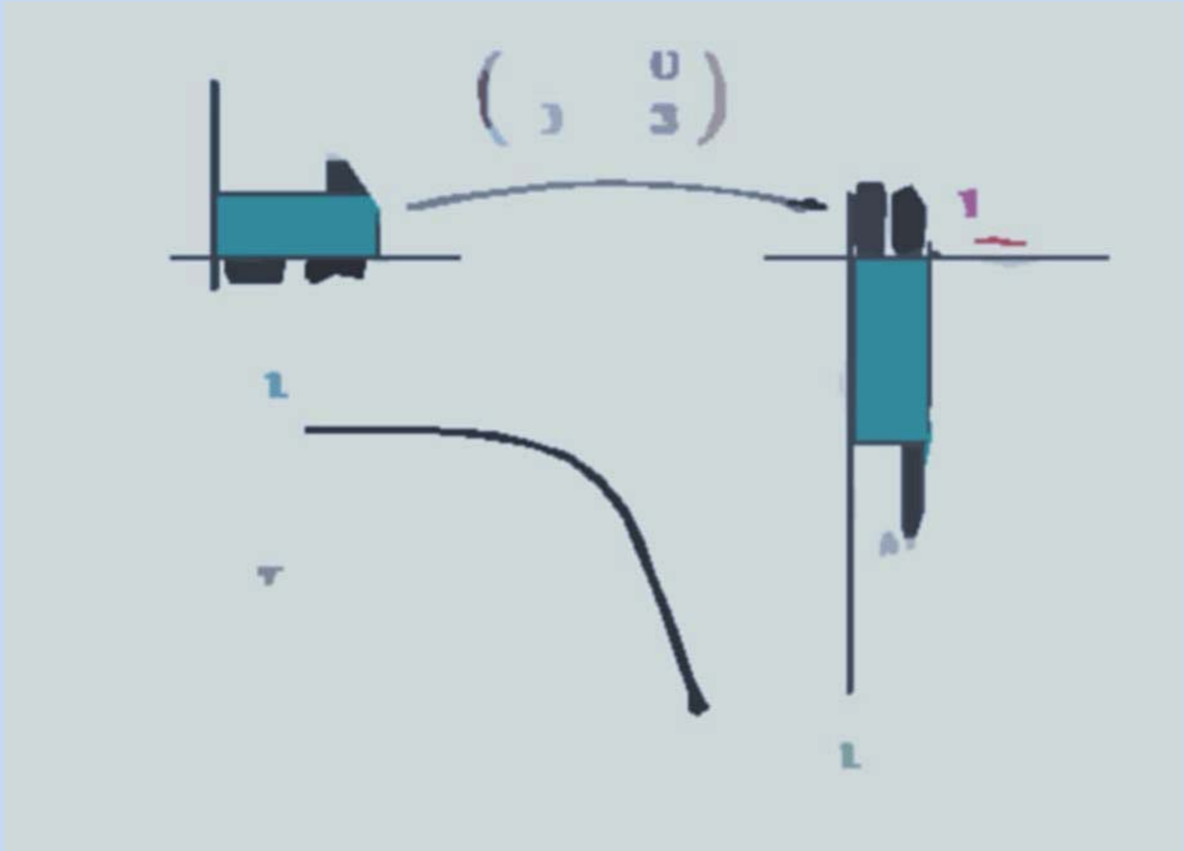
El modelo multinterpretativo propuesto para la investigación, pensamos que es posible aplicarlo en investigaciones bajo el alero de la teoría APOE, y como una extensión de ésta a otros conceptos del álgebra lineal, por ejemplo, valores y vectores propios. Y para conceptos del cálculo, como derivada e integral, y del álgebra como la inducción. El propósito es determinar coherencia en el esquema para conceptos matemáticos; pensamos que son mínimas las limitaciones técnicas antes descritas, y fueron producto de su construcción, por lo que esta forma de búsqueda de construcciones y mecanismos mentales para analizar el aprendizaje de un concepto matemático es viable, y constituye un modelo de investigación parcialmente validado, que permite reportar desde las partes a la totalidad, y desde allí levantar modelos explicativos para el aula sobre problemáticas específicas de aprendizaje en conceptos fundamentales para la matemática en educación superior. Por otra parte, no menos importante -aunque en esta investigación no se hizo caso explícito- el modelo permitiría utilizar DG validadas en otras investigaciones relacionadas a conceptos matemáticos, insertándolas dentro de este como parte de un nuevo proceso de investigación, permitiendo usar los resultados de otras investigaciones.

6.5.3 TERCERA PROYECCIÓN DIDÁCTICA: UN CAMINO A SEGUIR.

Es posible profundizar este estudio estableciendo los esquemas para el concepto TL por interpretación – funcional, matricial y geométrica - , esta tarea correspondería a una etapa de validación de los resultados individuales. Por otra parte, una tarea pendiente es la búsqueda de un estudiante con un esquema *Trans* para el concepto TL, con el propósito de validar indicadores y/o establecer nuevos.

En búsqueda de antecedentes que vinculen problemáticas de aprendizaje de la TL, con otras áreas del conocimiento matemático, donde se aplicaría tal concepto, como por ejemplo en ecuaciones diferenciales; no se encontraron investigaciones en didáctica de la matemática, que relacionen estas dificultades; para el ejemplo de ecuaciones diferenciales, las investigaciones encontradas dan cuenta de problemáticas relacionadas con los aspectos analíticos, en Guerrero, Camacho y Mejía (2010) investigan las dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema bajo la teoría de representaciones semióticas. Es así que una proyección este estudio es determinar si existe un impacto que vincule las dificultades en el aprendizaje de las TL, con las dificultades de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, caracterizar sus esquemas vinculantes y su evolución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2008). Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. Memoria HPM, 301-308. México: CINVESTAV-IPN.

Acosta, J., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2010). La resignificación de la noción de linealidad. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 65-73. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1994). “Investigación educativa: fundamentos y Metodologías” (capítulo 2). Editorial Labor: Barcelona, España.

Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1992). “La investigación colaborativa. En Investigación Educativa: Fundamentos y Metodología”. Editorial Labor: Barcelona, España.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.

Clark, J; Cordero, F; Cottrill, J; Czarnocha, B; DeVries; D. J; John, D. St.,Tolias, G y Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule, *Journal of Mathematical Behavior*, **16**(4), 345-364.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet , R. y Rogalski, M. (1997). L’Algèbre Linéaire: L’obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), L’Enseignement de l’Algèbre Linéaire en Question (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. Educational studies in Mathematics, 27, 267-305.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, et al. (eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. y Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics 1* (1), 99 – 121.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Melamed, U. (1979) Intution of infinity, Ed.St.Math.10, 3-40.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los Estudiantes en la Interpretación de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que Modelan un Problema. Enseñanza De Las Ciencias, 28(3), 341–352.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). “Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa”. Editorial Morata: España.

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11**(1-2), 139-148.

Hofmann, J. (2002). *Historia de la Matemática.* México: Editorial Limusa.

Karrer, M. y Jahn, A-P. (2008). Studying plane linear transformations on a dynamic geometry environment: analysis of tasks emphasizing the graphic register. ICME 11- TSG 22, Theme number 1.

Larson, R. y Edwards, B. (2004) Introducción al Álgebra Lineal.

Luzardo, D., Peña, A. (2006). Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 Nº2 pp.153-170. Departamento de matemáticas Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

McDonald, M.A., Mathews D.M. y Strobel K.H. (2000), "Understanding Sequences: *A Tale of Two Objects", Research in Collegiate Mathematics Education IV,* pp. 77-102.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico*. (Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN), México

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), pp. 241-273.

Montiel, M., Bhatti, U. (2010) Advanced Mathematics Online: Assessing Particularities in the Online Delivery of a Second Linear Algebra Course. Online Journal of Distance Learning Administration. Volume XIII, Number II, University of West Georgia, Distance Education Center.

Nakos, G.,Joyler,D. (1999) Álgebra Lineal con Aplicaciones. International Thomson Editores, S.A., México.

Parraguez, M. (2009). Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial. Tesis de doctorado, CICATA-IPN, D.F., México.

Pascual, S. (2012). Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería. Tesis de Doctorado no publicacada. Département de didactique .Faculté de sciences de l´éducation. Université de Montréal. Canada.

Piaget, J., Ackermann, E., Blanchet, A., Bronckart, J., Cambon, J., Cox, N., Cuaz, J., Dayan, S., Deckers, E., Druce, J., Fluckinger I., Lannoy, J., Lavallée, M., Monnier, Cl., Rape du cher, M., Solé-sugranes, M., Spycher, M., Vergoupoulo, Th., Voelin, Cl. (1997). Recherches sur L'abstraction Réfléchisante. 2 L'a abstraction de l'ordre et des relations spatiales. Presses Universitaires de France, Paris. Francia.

Poole, D. (2006). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.

Roa, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.

Roa, S., y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2012) 15 (2): 199-232.

Sabogal, S., y Isaacs, R. (2005). Aproximación al Álgebra Lineal: Un Enfoque Geométrico. ISBN: 958-8187-41-9, vol1, pp 180 Ediciones Uis. Colombia.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 7-40.

Sierpinska, A.(2000).On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., y Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Unpublished research report. Available at URL: http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html.

Stake, R.E. (2010). *Investigación com estudio de casos*. Barcelona: Labor.
Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17 (1), 5-31.

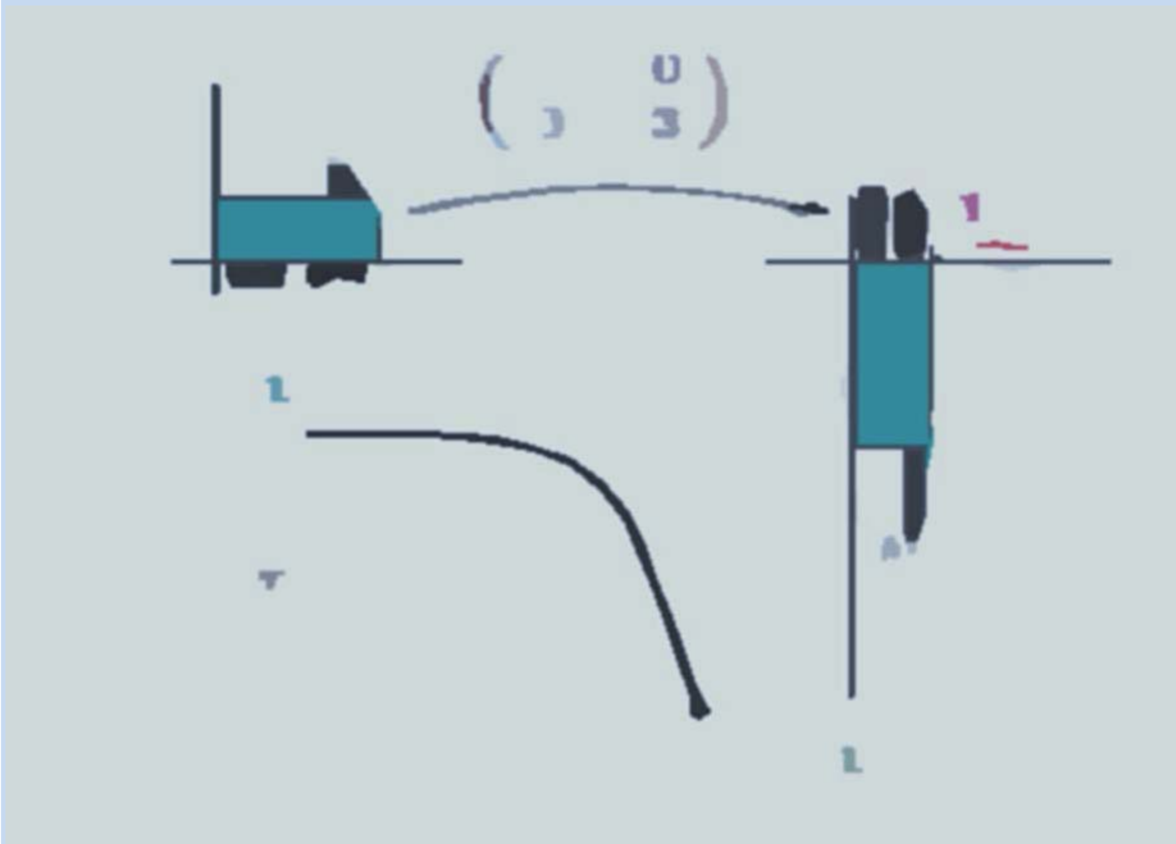
Uicab, R., Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica. Tesis de doctorado, CICATA-IPN, D.F., México.

Wawro, M., Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2012). A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. Paper presented at the Fifteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Portland, OR.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Trigueros, M. y Dubinsky E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Recuperado de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Zazkis, R., Dubinsky. E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group *D*4. *Journal for Research in Mathematics Education 27* (4), 435 – 457.

ANEXOS.



ANEXO 1: TRASCRIPCIONES DE AUDIOS DE ENTREVISTAS CON ESTUDIANTES E9, E3 y E18.

<u>Transcripción 1.</u>
E9: estudiante
Ent: Entrevistador

[Ent-1] **Hola, buenas tardes. Vamos a comenzar la entrevista. Quiero que leas la pregunta que ahí aparece en la hoja.**

[E9-1] ¿En voz alta?

[Ent-2] **No, como tú desees. La idea es que consideres las dos figuras, ¿cierto? Entonces dice ¿hay una transformación lineal que relaciona la figura 1 con la 2? Tienes que decir si es sí, si es no, lo que pienses.**

[Pausa. Piensa.]

[E9-2] Aparentemente sí hay una transformación.

[Ent-3] **Aparentemente sí la hay. Estas hojas son por si quieres escribir en otro lado o hacer cálculos. Tú dices que aparentemente la hay. ¿Y podrías encontrarla o no? Si es que la hay.**

[E9-3] Ee, si es que existe debería poder. Voy a tratar.

[Ent-4] **Tiene dos puntas el lápiz, tiene una finita y otra más gruesa, por si te incomoda una u otra. Puedes probar la punta. Esa es más finita.**

[E9-4] [Pausa. Trabaja.]

[Ent-5] **¿Eso que escribiste ahí es la forma general de las transformaciones o es una forma que piensas que tiene?**

[E9-5] Es una reflexión general con respecto al eje de las coordenadas...

[Ent-6] **Ya.**

[E9-6] Pero no es suficiente, porque también hay un cambio en las coordenadas, entonces debería además aplicarle una multiplicación a esta transformación.

[Pausa. Trabaja.]

[Ent-7] **¿Esa es la transformación?**

[E9-7] Esa es la transformación.

[Ent-8] **Escríbelo acá. Ahí lo dejamos en borrador.**

[E9-8] [Escribe.]

[Ent-9] **¿Podrías probar que eso es una transformación lineal?**

[E9-9] Sí, de la definición.

[Ent-10] **Ya. ¿Cómo quedaría?**

[E9-10] [Trabaja.]

[Ent-11] **Perfecto. ¿Es un isomorfismo esa transformación lineal?**

[E9-11] Sí, es un isomorfismo claramente, porque se puede ver que el término de esta transformación lineal es cero, y de que la imagen, como tiene dimensión 2, es igual a la imagen…, es igual a mmm, así que por lo tanto es inyectiva y biyectiva, así que es un isomorfirsmo.

[Ent-12] **Muy bien. Vamos a la siguiente pregunta.**

[E9-12] [Piensa.]

[Ent-13] **¿Qué pasa?**

[E9-13] Me había complicado un poco con la anotación.

[Ent-14] **Ya. ¿Qué pasó con la anotación?**

[E9-14] Es que de hecho me había confundido, porque pensé en un momento que la transformación lineal era tomada de algún ángulo y le aplicaba esto, entonces esto como la variable.

[Ent-15] **Ya.**

[E9-15] [Trabaja.]

[Ent-16] **Bien.**

[E9-16] [Sigue trabajando.]

[Ent-17] **Ya. Entonces, ¿eso debería ser igual a qué?**

[E9-17] (describe lo que hace).

[Ent-18] **Perfecto.**

[E9-18] [Trabaja.]

[Ent-19] **¿Y eso por qué puedes a hacerlo?**

[E9-19] Porque los vectores cuando son de R^2 puedo escribir como una matriz de 1x2. Entonces por propiedades de las matrices conforman una línea y entonces puedo aplicar distribución. El producto distribuye.

[Ent-20] **Entonces es por distributividad, es por propiedad de las matrices.**

[E9-20] Sí.

[Ent-21] **Claro.**

[E9-21] Y nuevamente por distributividad de las matrices se puede distribuir este producto y puedo bajar esto.

[Ent-22] **¿Y eso depende de la matriz que te dieron?**

[E9-22] No. [Trabaja.]

[Ent-23] **Listo. Bien. Entonces ahora determina las coordenadas de la imagen del vector (5, $\sqrt{3}$) bajo la transformación con 30 grados. ¿Cómo se determinaría?**

[E9-23] [Piensa.]

[Ent-24] **Parece que hay que trasponer algo, ¿no?**

[E9-24] Sí, debería…

[Ent-25] **Sí, es más adecuado, porque si no, no se puede ejecutar la…**

[E9-25] [Trabaja.]

[Ent-26] **14/2 dividido…, o sea te da 7/4, o sea te da 7… ¿Cómo es?**

[E9-26] Me da siete.

[Ent-27] **sí es como se movieron los puntos, esa es la idea. Ya. Ahora veamos lo que dice la pregunta 2. Dice: si $T_1(u) = A^2u$, cómo mueves la transformación T_1 al vector u. Ahora es la misma pero al cuadrado.**

[E9-27] Podría ver lo que sucede con la matriz al llevarla…

[Ent-28] **Pero es la matriz en 30 grados, no te preocupes en general. Ahora, si lo quieres hacer en general, puedes.**

[E9-28] Posiblemente pueda verse alguna relación si lo hacemos en general.

[Ent-29] **Bien, muy bien.**

[E9-29] [Trabaja.]

[Ent-30] **Bien, eso es, porque aquí como había 30... Perfecto. Entonces cómo puedes ahora la transformación inversa. (Acá hay otra hojita.)**

[E9-30] [Trabaja.] Esta propiedad vienen a ser por la paridad del coseno y la disparidad del seno.

[Ent-31] **¿Y entonces?**

[E9-31] Entonces el ángulo 1 en U es el vector del ángulo negativo. Entonces es como aplicar la transformación con coseno de -30 menos 0.30… Se da un giro.

[Ent-32] **Muy bien. Muy bien. Perfecto. Pon la hoja ahí. Para que no nos quede desordenado. No te preocupes. Esta es la pregunta siguiente: se define espacio vectorial de dimensión cuatro y base para V. Sabemos que existe una única transformación lineal de v en v que cumple con las condiciones que dice acá. ¿Cuál es la transformación lineal?**

[Piensa, trabaja.]

[E9-32] Esta sería la transformación lineal. La escribí como vectores de R^4 puesto que una base de R^4 se puede ver isomorfa a cualquier espacio en el…, así que en particular lo podemos escribir como vector de R^4 y esta es la única transformación con esas características.

[Ent-33] **Ya. Muy bien.**

[Recibe otra hoja.]

Dada la transformación lineal de R3 en R2, definida por esa matriz, donde las bases están dadas en forma explícita, perdón, no son bases: son espacios generados, determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

[E9-33] Claramente no es isomorfismo. Puesto que dimensión de R^3 es mayor… Tienen que ser iguales para que los espacios sean isomórficos.

[Ent-34] **Ya. ¿Es posible redefinir esta función para que sea un isomorfismo?**

[E9-34] No, no es posible, porque no se puede de un espacio de dimensión mayor a una dimensión menor definir una transformación inyectiva.

[Ent-35] **¿No es posible?**

[E9-35] No es posible.

[Ent-36] **Ya. Vamos a esta.**[Recibe otra pregunta.]

Dice "Haz una transformación lineal de R2 y R3 definida por la matriz que ahí aparece donde los espacios generados son los que están ahí abajo. Determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales".

[E9-36] Nuevamente la dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

[Ent-37] **¿Estás seguro? Entonces tú dices que no hay un isomorfismo.**

[E9-37] Eeh, sí.

[Ent-38] **No hay isomorfismo. Entonces hay que escribir ahí "no existe isomorfismo".**

[E9-38] [Escribe.]

[Ent-39] **¿Y no es posible redefinir nada? Achicar algo, agrandar algo…-¿O no no más?**

[E9-39] No, no es posible, porque si… Porque el espacio en el conjunto mm de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo… Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[Ent-40] **Claro.**

[E9-41] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar esto que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo-

[Ent-42] **Está bien.**[Recibe otra pregunta.]
A ver, esa pregunta es demostrar que algo es transformación lineal, ¿cierto?

[E9-42] Ajá.

[Ent-43] **Ya, ¿y? ¿Cómo? B es un espacio vectorial, ¿cierto? Eso es espacio de las funciones reales con dominios reales. Vamos a considerar una aplicación que va de R3 en ese espacio, definida por lo que aparece ahí. ¿Es una transformación lineal?**

[E9-43] Verificamos si cumple las características.

[Trabaja.]

[E9-44] Voy a tener algunos problemas con la anotación. A la variable de la función la voy a llamar W para no confundir con la componente…

[Ent-44] **Claro.**

[Trabaja.]

[Ent-45] **¿Qué le observas a esta demostración de transformación lineal?, ¿qué le encuentras?**

[E9-45] Nada, ninguna particularidad.

[Ent-46] **O sea que si cambiamos la función coseno y seno por otra, por exponencial, por x^2, por un polinomio…**

[E9-46] Sería independiente en realidad…

[Ent-47] **Sí., Perfecto. Una pregunta: ¿es isomorfismo esa transformación lineal? (Si quieres toma bebida, si tienes sed; si para eso es, si es tuya. Mientras no reviente…)**

[E9-47] No, no es un isomrfismo. No puede ser una función inyectiva.

[Ent-48] **No es inyectiva, ¿por qué?**

[E9-48] Porque pensemos… Por ejemplo, tomemos el vector 1,0,0…

[Ent-49] **Ya.**

[E9-49] No, lo estaba pensando mal. [Lo borra.] No, de hecho sí es inyectiva porque a la izquierda va a ser cero.

[Ent-50] **Sí es inyectiva, ya tiene una patita. ¿Qué es lo que le falta para no…?, ¿qué es lo que le falla para no ser… isomorfismo?**

[E9-50] Debería fallar la inyectividad si es que no hay isomorfismo.

[Ent-51] **Claro. Debería fallar la inyectividad. ¿Cómo vemos eso?**

[E9-51] Podemos ver si el conjunto imagen es igual al espacio de llegada.

[Ent-52] **El espacio de llegada. Mira bien el conjunto de toda la función es continuo. ¿Podríamos construir todas las funciones continuas con senos y cosenos?**

[E9-52] Eh, no.

[Ent-53] **Ah, entonces…**

[E9-53] Entonces… Déme un segundo.

[Ent-54] **Pero ahora mira la pregunta que te voy a plantear. ¿Es posible redefinir el espacio de llegada de modo que sí lo sea?**

[E9-54] ¿Cambiar el espacio de llegada? O sea…

[Ent-55] **Redefinirlo.**

[E9-55] ¿Dentro del conjunto de todas las funciones? O sea…

[Ent-56] **Elegir un subespacio de.**

[E9-56]- Por ejemplo, las funciones trigonométricas podrían considerarse un subespacio.

[Ent-57] **La pregunta de fondo es: que tú para determinar si algo es o no es isomorfismo has mirado las dimensiones. Este no te permite mirar las dimensiones.**

[E9-57] Así es.

[Ent-58] **Y por eso tienes la duda. Ahora, la pregunta es: ¿yo puedo mover y elegir un subespacio en el conjunto de llegada y así establecer un isomorfismo como subespacio del conjunto de llegada, en caso de que falle la eyectividad? ¿Podría hacer eso?, ¿para establecer un isomorfismo?**

[E9-58] Sí, sí puede hacerse. O sea, definiéndola sobre la imagen.

[Ent-59] **Ya.**

[E9-59] La imagen es un subespacio del conjunto de …

[Ent-60] **[Le da otra hoja.] ¿Es un isomorfismo?**

[E9-60] Sí, podría ser un isomorfismo si se definiera sobre este conjunto.

[Ent-61] **Entonces no es que no exista.**

[E9-61] No existe sobre R^3.

[Ent-62] **Exacto. Es una sutileza. Bien. [Cambia la hoja.] Y ahora te voy a volver a hacer la pregunta que te hice antes. ¿Este qué pasa?**

[E9-62] Este es distinto, porque en este como la dimensión del espacio de partida es mayor que el de llegada, falla la eyectividad.

[Ent-63] **¿Y no hay posibilidad de redefinir?**
[E9-63] Podría redefinirse el espacio de partida.

[Ent-64] **Ya. Muy bien. ¿Y cómo lo redefinirías tú, qué se te ocurriría hacer?**

[E9-64] Podríamos tomar un subespacio de R^3, fuera de la dimensión 2. Por ejemplo, tomando esta misma base.

[Trabaja.]

[Ent-65] **Ya, y estarías diciendo que qué le pasa a este vector, porque ese vector no es combinación lineal de eso.**

[E9-65] No, claramente. Son linealmente independientes.

[Ent-66] **¿Y qué tendrías que hacer con ese, a dónde lo podrías mandar ese para que las cosas funcionaran?**

[E9-66] Al C.

[Ent-67] **Porque esa es la función, ¿cierto?**

[E9-67] Sí.

[Ent-68] **Y es arbitraria, porque uno podría mandar este al C o ese al C. O sea que sí es posible, a pesar de que no sea inyectiva.**

[E9-68] Claro, pero no existirían…

[Ent-69] **Estamos bien. O sea, este ejercicio de acá nos sirvió para liberarnos del problema de la dimensionalidad de más abajo, ¿no?**

[E9-69] Sí.

[Ent-70] **Ese era el objetivo. Y este ya va a ser el último. Ya estamos finalizando, así que ánimo, estamos muy bien. Y tiene el mismo objetivo que el anterior. Este es muy rápido, ¿cierto?**

[E9-70] Sí, claramente es una transformación.

[Ent-71] **Claro, y el objetivo es justamente hacer creer que uno puede… Entonces escribe ahí lo que tengas que decir.**

[E9-71] Voy a definir como K el conjunto que está acá, porque no se especifica que sean espacios vectoriales reales.

[Ent-72] **Sí, esa es un poquito más general, abierta.**

[Trabaja.]

[Ent-73] **Perfecto. Gracias. ¡Terminamos! Porque aquí hay más, pero no tienen nada que ver con lo que hemos hecho. ¿Qué te pareció el cuestionario?**

[E9-73] Eh, interesante. Lo bueno que ese problema de la dimensión está muy…, uno lo tiene muy adherido cuando quiere construir un isomorfismo.

[Ent-74] **Está bien. O sea, tú podrías decirme, usando la dimensión, cómo podrías explicar desde el punto de vista geométrico el cómo estaría pasando, qué sería en el fondo, por ejemplo, una transformación lineal de R^2 en R^3, ¿podría mirarse que a lo mejor ella sí es un isomorfismo, geométricamente? A un subespacio de LI, estamos entendiendo que vamos a tener que mirar un subespacio, pero ¿qué significaría más o menos? ¿Lo logras ver?**

[Trabaja.]

Esto es para que nos ubiquemos en dónde estamos, ¿no? Por ejemplo, este trencito, este que está ahí.

[E9-74] Bueno, que sea capaz de recorrer en dos espacios en la misma dirección. Tal vez si definiéramos, por ejemplo, como lo hemos hecho antes, las funciones de… O también podríamos hacer una función que fuera de R^2 en R^2, y luego a partir de esta hacer el mismo tipo de funciones. Mirar esto… Yo lo pienso así, como R^2 mmm es el seno y a partir de aquí hacer transformaciones, como esto ya un subespacio de R.

[Ent-75] **Exacto.**

[E9-75] Y a partir de aquí construir rotaciones y traslaciones que nos pudieran hacer el mismo tipo de funciones que hicimos acá, rotaciones y traslaciones en un plan, ahora hacerlas con un subespacio de R^3 que sería un plan.

[Ent-76] **Perfecto. Y te das cuenta de que con eso rompes el mito urbano de que tienen que tener las mismas dimensiones. De que puedes encontrar subespacios que redefinan y sellen isomorfismo. Ahora al revés: pensemos que la dimensión de este es más grande que ese, ¿es posible que encontremos subespacios acá o algún tipo de trabajo acá que hay que hacer algebraico para definir un isomorfismo, o eso es técnicamente ya imposible? ¿O funciona como el cero?**

[E9-76] También debería poderse, porque si pudimos hacer un isomorfismo aquí, y el isomorfismo la idea es una función biyectiva, o sea que si voy puedo volver.

[Ent-77] **Muy bien, muchas gracias. Vamos a cerrar esto.**

Transcripción 2.
E3: estudiante
Ent: Entrevistador

[Ent-1] **Buenas tardes, gracias por colaborar. Entonces vamos a comenzar la entrevista con respecto a este tema de la matemática. Tu primera pregunta es exactamente esa, y aparece… Si quieres me lees en voz alta, o si no vamos trabajando juntos.**

[E3—1] Ya. Dice "considere el carrito de un tren que aparece en la figura 1. Se deforma en la figura 2. ¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2? Eh, ¿puedo dar números, cierto?

[Ent-2] **Sí, tú puedes responder. Esa hoja es borrador, ahí tú respondes, puedes hacer tus ensayos, como tú estimes.**

[E3—2] ¿El humito también importa?

[Ent-3] **No, el humito era para ponerle algo…**

[E3—3] La chimenea tampoco.

[Ent-4] **Eso sí, eso importa.**

[E3—4] Ya, ya.

[Ent-5] **Pero para que parezca un trencito. Pero en realidad es el cuerpo…**

[E3—5] Ya, ya, ya.

[Ent-6] **Pero son buenas tus preguntas.**

[Trabaja.]

[Ent-7] **¿Podrías explicar qué estás tratando, qué estás buscando?**

[E3--7] Estoy como tratando de buscar una transformación que me lleve a este punto de acá.

[Ent-8] **Ya.**

[E3--8] Pero no… No puedo.

[Ent-9] **Por qué.**

[E3--9] Porque siento que no es necesario…

[Ent-10] **No, porque es 0,5. ½ si quieres a lo mejor escribir.**

[E3--10] ¿Cómo?

[Ent-11] **Eso es 0,5.**

[E3--11] Ahhh. Yo pensé que como era 0, dije 0. Ya, así. Ahora sí.

[Ent-12] **Eso es ubicación pues. Es importante.**

[Trabaja.]

[Ent-13] **¿Pero tú qué piensas, que hay una transformación lineal o no? ¿Qué te dice tu intuición?**

[E3--13] Creo que no.

[Ent-14] **Tú crees que no.**

[E3--14] Creo. Pero estoy viendo si es que sí.

[Ent-15] **¿Y cómo tratas de ver si es que sí?**

[E3--15] Como que sólo estoy viendo la izquierda, como que en eso estoy pensando. Entonces estoy tratando de buscar, si mando este, por ejemplo *(0,2)*, lo mando a alguno de estos tres, a través de esa misma transformación debería mandar este en los otros dos restantes y este último que queda aquí.

[Ent-16] **Ya. Pero, por ejemplo… Ah, ya. Pero tú vas a mandar punto en punto.**

[E3--16] Sí.

[Ent-17] **O vector en vector.**

[E3--17] Claro.

[Ent-18] **¿Y este punto de acá no tiene alguna relación con los otros dos, o este punto de acá no tiene relación con los otros dos?**

[E3--18] Eh… ¿Este con respecto a estos dos?

[Ent-19] **Sí. ¿Tienen relación?**

[E3--19] Sí.

[Ent-20] **¿Qué relación tienen?**

[E3--20] La suma.

[Ent-21] **Ya. ¿Y esto? ¿También?**

[E3--21] Sí.

[Ent-22] **Ya.**

[E3--22] Ah, claro. Entonces… Entonces ahora creo que sí existe.

[Ent-23] **Por qué, cuéntame por qué.**

[E3--23] Porque, cómo se llama, si mando este de acá, o sea, si mando uno en uno después voy a preservar la suma y va a ser una transformación lineal.

[Ent-24] **Es una condición.**

[E3--24] Claro.

[Ent-25] **¿Y podrías encontrar la transformación lineal? Porque ahora me estás respondiendo que sí hay.**

[E3--25] Sí, ahora creo que sí hay.

[Ent-26] **Ya, y ahora podrías encontrar la transformación lineal, así en forma explícita.**

[E3--26] Ya. Voy a tratar.

[Ent-27] **Ya.**

[Trabaja.]

[Ent-28] **¿Esa sería tu transformación lineal?**

[E3--28] Eh, por ahora sí.

[Ent-29] **¿Y cómo podrías verificar que cumple, ahí, rápidamente?**

[E3--29] Que, eem, la suma de estas dos me da la suma de estas.

[Ent-30] **Ya. ¿Sí?**

[Trabaja.]

[E3--30] A ver, no estoy seguro sólo de estos números. No sé explicar…

[Ent-31] **¿Pero lo podrías hacer más general? La pregunta es si lo podrías hacer en general. Porque tú ahora qué probaste.**

[E3--31] Que… estoy preservando la operación. Ahí, o sea…

[Ent-32] **Que la imagen del (2,1) es (1/2,3). O sea, se cumplió por lo menos lo que querías, que esta parte fuera para eso, que es lo que querías originalmente. Ahora, por otra parte, ¿tú puedes probar que esa es una función, que esa función es una transformación lineal?**

[E3--32] O sea, tendría que hacerlo…

[Ent-33] **Probar.**

[E3--33] Sí.

[Ent-34] **Ya. Está bien. [Recibe otra hoja.] Vamos a ver. Esta es más fácil, este es para subir el ánimo.**

[E3--34] Ja ja. Y si no lo hago no me va a incluir, ja ja ja.

[Ent-35] **Nooo. Es que mira, te vas a dar cuenta que… Míralo, míralo. Por algo te**

lo digo. ¿Qué dice? Cuéntame.

[E3--35] Ya. Dice "sea *T* una función de R^2 definida por $T\ (x,y) = (x+\beta y,y)$ y β es un entero". Ya, y tengo que dibujar una región que se genera al aplicar la transformación…

[Ent-36] **A la figura.**

[E3--36] Al rectángulo sombreado.

[Ent-37] **Ajá.**

[E3--37] Ya. Entonces, ahora lo hago.

[E3—38] ¿Tengo que…?, ¿también lo escribo así, en coordenadas?

[Ent-39] **Pero están los numeritos ahí, puedes usar la misma cuadrícula.**

[E3--39] ¿Aquí mismo?

[Ent-40] **O sea, no pues, acá. Pero usa la misma cuadrícula para que te sirva.**

[E3--40] Ya.

[Ent-41] **O sea, para que eso sea la unidad.**

[E3--41] Sí.

[Trabaja.]

[Ent-42] **Ya.**

[E3--42] Eso.

[Ent-43] **Y el otro, cómo quedaría. Bueno, el mismo, pero…**

[E3--43] Este quedaría así.

[Ent-44] **Ajá.**

[E3--44] Estaba contando mal…

[Ent-45] **Los cuadritos.**

[E3--45] Sí. Eso. Eso.

[Ent-46] **¿Dónde está el sistema de referencia?**

[E3--46] Bah, ahí va.

[Ent-47] **Ya. O sea, aquí estamos claros que hay una transformación lineal, así como lo dijiste en el ejercicio anterior. ¿Te das cuenta que era el mismo?**

[Ent-48] **O similar, muy análogo. [Recibe otra hoja.] Tu tercera pregunta, también tiene que ver con la relación con lo geométrico. ¿Qué dice?**

[E3--48] Ya. Da una transformación lineal de *V* a *W*, dos conjuntos. Dice dar un conjunto de vectores en V y otro en W, tal que la transformación manda de un conjunto al otro. Si B es linealmente independiente, pregunta si el conjunto A es linealmente independiente.

[Ent-49] **Porque ahí salimos de R^1 y de R^3**

[E3--49] Claro, ahora estamos a un paso de por qué.

[Ent-50] **O regresamos a R^2. Como tú quieras.**

[E3--50] O sea, si seguirnos con esta.

[Ent-51] **Como tú quieras.**

[E3--51] Sí, quiero.

[Ent-52] **Ah ya, ok.**

[E3--52] La quiero hacer.

[Ent-53] **Bien.**

[Trabaja.]

[Ent-54] **No, w_1 están en las imágenes, ¿no?**

[E3--54] Sí, por eso borro acá.

[Ent-55] **Ah, eso era ese sonido.**

[E3--55] Sí, sí me había equivocado.

[Ent-56] **No lo borres.**

[E3--56] Ya. Entonces…Ya, voy a ver si es que pudiera acercarse.

[Trabaja. Piensa.]

[E3--57] Ya, entonces si W… Si esto es cero, todos estos alfas son cero.

[Ent-58] **Ya, eso es dato. Todos los escalares son cero.**

[E3--58] Claro.

[Ent-59] **Entonces ahora la pregunta es si…**

[E3--59] Ahora voy a ver si… Estos de acá, como ya tienen una configuración lineal, hacerlo sin que actúe el cero.

[Ent-60] **Entonces ahora la pregunta es si lo ves.**

[Piensa. Trabaja.]

[E3--60] Tienen la misma cantidad.

[Ent-61] **Sí, buen dato. Tienen la misma cantidad. Le pusieron el mismo subíndice.**

[E3--61] Claro.

[Ent-62] **O sea que el V y el W están diciendo que por lo menos te dieron subespacios de la misma dimensión para hacerte le pregunta.**

[E3--62] Ajá.

[Ent-63] **Bien.**

[E3--63] Entonces, ya. Ahora sí.

[Ent-64] **¿Ahora sí? ¿Cómo vamos? Cuéntame.**

[E3--64] Yo creo que no se puede.

[Ent-65] **O sea, tú crees que el conjunto A no necesariamente es…**

[E3--65] O sea, no, perdón. Sí es, que si V es, el otro también.

[Ent-66] **Ah ya. O sea que si el conjunto V es e LI, A también es e LI.**

[E3--66] Sí.

[Ent-67] **Responde por ahí para que quede escrito, no solamente oral. ¿Y lo podrías probar o no?**

[E3--67] Sí.

[Ent-68] **¿Y lo podrías probar?**

[E3--68] Podría tratar.

[Ent-69] **Ya, ¿podrías hacer la prueba, el "tratamiento"?**

[E3--69] Ya. Supongamos que A es linealmente dependiente.

[Ent-70] **Ya. A es LD.**

[E3--70] Claro.

[Ent-71] **D es LI.**

[E3--71] Y sigue siendo LI.

[Ent-72] **Ya, ok. Es una reducción al absurdo parece.**

[E3--72] Claro.

[Ent-73] **Ya, veamos qué pasa.**

[E3--73] Ya. Entonces, sé que A es LD. Entonces, existen los escalares, cierto, que en combinación lineal me dan uno de ellos.

[Ent-74] **Claro.**

[E3--74] V, Y, cualquiera.

[Ent-75] **Claro.**

[E3--75] Y eso es... No sé si me sirve así. Porque existe un ascenso…Ya, y entonces ahora… Ah, y este alfa es distinto de este alfa. Entonces ahora quiero la transformación.

[Ent-75] **O sea, buscaste la transformación y te da…**

[E3-75] Claro. Ahora las funciones de cero me van a dar cero igual. Y este alfa distinto de cero, tiene que subir.

[Ent-76] **O sea, una contradicción con el supuesto.**

[E3--76] Sí.

[Ent-77] **Según tu argumentación.**

[E3--77] Sí.

[Ent-78] **Vamos al b. Veamos lo que dice: si el conjunto A es linealmente independiente —ahora el A es LI—, ¿debe ser el conjunto B linealmente independiente?**

[E3--78] Yo tengo entendido que sí.

[Ent-79] **¿También?**

[E3--79] Sí. Supongo que porque se aplica una transformación al revés, llegaría a lo mismo.

[Ent-80] **Ya. Escríbelo. Sí no más, porque se aplica una transformación lineal.**

[E3--80] Ya: sí.

[Ent-81] **Bien. Vamos ahora al c, avanzamos rápido. Si B genera a W…**

[E3--81] B genera a W.

[Ent-82] **Ahora no te están diciendo que es base ni nada, sino que lo genera.**

[E3--82] O sea, ya no sé si es LI o LD.

[Ent-83] **No, no tienes esa información.**

[E3--83] Ya, ok.

[Ent-84] **Entonces ¿A debe generar a V? Lo que sí tienes son las imágenes.**

[E3--84] Esta relación.

[Ent-85] **La relación de arriba, sí.**

[E3--85] Ya.

[Ent-86] **Entonces, si B genera a W, ¿A genera a V?**

[E3--86] … B genera a W… Estoy sacando las… [Piensa.] Ya, entonces si a partir de W, entonces lo voy a escribir como combinación lineal. Da lo mismo cómo hacerlo.

[Ent-87] **Ya. O sea, cualquier W se escribe como combinación lineal de esos objetos que están ahí.**

[E3--87] Claro.

[Ent-88] **Ok, entonces en la A.**

[E3--88] Eso quiere decir que cualquier acto de B se va a poder escribir…

[Ent-89] **No pues, si estás en la C.**

[E3--89] Sí, pero… Ah, yo tengo esto, entonces ahora quiero ver si a partir de esto se puede escribir como… Me da la impresión, yo creo que sí.

[Ent-90] **O sea, tú dices que si B genera a W, entonces A debe generar a B. Si a partir de la definición que te dan arriba.**

[E3--90] Sí, por esto.

[Ent-91] **Por esa definición, no para cualquier cosa.**

[E3--91] Claro. ¿Quiere que se lo pruebe?

[Ent-92] **¡Tratar!**

[E3--92] Tratar de probarlo. Ya.

[Ent-93] **Mira, ahí hay más hojitas. ¡Tiene un montón de hojitas!**

[E3--93] Sí. Estoy muy escueto.

[Ent-94] **Sí.**

[E3--94] Ya.

[Ent-95] **Está bien…**

[E3--95] Es que… pánico escénico.

[Ent-96] **Pánico escénico, sí, es que yo te encuentro toda la razón, que a uno lo filmen. Pero te están filmando las manitas.**

[E3--96] Sí, no importa. Ya, yo tengo que B genera a W. Si es… Ah, pero no… Lo podría ver por caso, si es que es LI.

[Ent-97] **Ya. O sea tú dices que genera y es LI, si es que tiene una base. Ya. Uno puede suponer lo que quiera, después se lo quita.**

[E3--97] Pero no me da, porque no sé qué relación tiene la dimensión de B con respecto a la… Porque, o sea… Y sé que B… Y me pregunta si A debe generar B. Si este genera W… Yo creo que sí, pero no se lo puedo demostrar.

[Ent-98] **Tú crees que sí, o sea, te la juegas. Ya, ponlo: yo creo que sí.**

[E3--98] Yo creo que sí. Pucha qué estoy fome.

[Ent-99] **No, no, está bien. ¿Y la d? ¿Si A genera a V, ¿debe B generar a W?**

[E3--99] Voy a tratar lo mismo pero al revés. Quiero escribirlo pero no se me ocurre. Ya. Tengo esto. Siento que estoy asumiendo que esto es todo W. Así que N.

[Ent-100] **¿No qué?**

[E3--100] No necesariamente, al menos en este caso, yo diría que aquí no, no generaría, no necesariamente.

[Ent-101] **Ya. Y podrías mostrar algún contraejemplo, con algún par de subespecies específicos, así…**

[E3--101] Este tendría que ser más grande.

[Ent-102] **Pero recuerda que tienen la misma cantidad de objetos.**

[E3--102] Sí. Pero la… No en… Cómo se llama… No sé si son ld.

[Ent-103] **No, porque no te dan la información.**

[E3--103] No puedo saber si tienen la misma dimensión.

[Ent-104] **Exacto.**

[E3--104] Entonces, usted quiere un ejemplo.

[Ent-105] **Claro, pero uno fácil, uno que se te ocurra, que tú pienses que va a fracasar. Sí.**

[E3--105] Que piense que quiero fracasar. Así. Me huele.

[Ent-106] **Me huele que ahí eso fracasa. Esto es un contraejemplo para d, ¿cierto?**

[E3--106] Sí. Y voy a aprovechar de ver si está bien el b.

[E3--107] Ya. Entonces, tomamos por aquí. Ya. Entonces este va a generar este, pero este no va a generar este. ¿Cierto?

[Ent-107] **Sí pues. Dice que si A genera V, entonces ¿B debe generar a W?**

[E3--107] No.

[Ent-108] Tu respuesta: no.

[E3--108] Entonces me basta con tirar eso allá, eso para allá.

[Ent-109] Y el otro, ¿qué haces con el otro?

[E3--109] Lo mato, lo llevo a cero.

[Ent-110] Bien.

[E3--110] Sí, si lo voy a generar. Eeh… Como ya no lo veo muy general entonces Ahora podría…

[Ent-111] Por qué no lo ves general. Entonces está bien con ejemplo como para probar si es sí no, con ejemplo uno como que queda conforme.

[E3--111] Claro, pero se lleva mal los puntos.

[Ent-112] Con un ejemplo uno queda conforme y puede encontrar cómo demostrar.

[E3--112] Sí.

[Ent-113] Porque uno puede decir que no lo veía.

[E3--113] Me costó. Bastante. Entonces, de ahí sale mi problema, y aquí yo tengo un generador de W.

[Ent-114] Claro. Y ahora qué subespacios te vas a dar para ver… Te diste dos Específicos.

[E3--114] Sí.

[Ent-115] ¿Y por qué?

[E3--115] Porque aquí caché que si este era más grande, este se iba a generar… No, mentira. Tenía que ser, que cubrir todo el espacio.

[Ent-116] Pero fue bien documentado. Ahora veamos ahora la otra posibilidad que

tenías antes, que quedó ahí como stand by: si B genera a W, entonces ¿quién te vas a dar de W?

[E3--116] Porque…, genero acá primero. Tengo la base… y…

[Ent-117] **Tienes un conjunto que genera…**

[E3--117] Sí. No…

[Ent-118] **¿Se te fue la idea?**

[E3--118] Se me arranca. Quiero ver si A debe generar a V. O sea me voy a preocupar de esto.

[Ent-119] **Exacto.**

[E3--119] Ya. Ah, pero…

[Ent-120] **¿Pero qué? ¿Qué se está preguntando matemáticamente en el fondo?**

[E3--120] Me equivoqué, me equivoqué. Porque aquí mmmm. Y eran lo mismo.

[Ent-121] **Pero no, pero arreglaste ese.**

[E3--121] Ya, me estoy preguntando cómo. Estoy tratando…

[Ent-122] **¿Sigamos con otro? Pero ¿te puedo decir algo? ¿Te das cuenta la matemática que está involucrada acá o ves pura transformación lineal?**

[E3--122] Así profunda profunda, no creo.

[Ent-123] **Pero no. Pero qué matemáticas me piensas tú que está involucrada acá, así, cuéntame qué concepto.**

[E3--123] Nnn, el concepto de…

[Ent-124] **No trates de resolver el problema, sino qué conceptos están metidos acá.**

[E3--124] Las… Como las… Los isomorfismos.

[Ent-125] **Tú piensas que están los isomorfismos. ¿Y qué es un isomorfismo?**

[Ent-126] **¿Y qué es biyectivo?**

[E3--126] Que, me imagino, es lo mismo.

[Ent-127] **¿Igual?**

[E3--127] Sí. Sípo. ¿O no?

[Ent-128] **No sé, yo pregunto. ¿Pero qué significa que una función sea biyectiva?**

[E3--128] Que tiene los mmm.

[Ent-129] **Me estás respondiendo… Ja ja ja ja… Pero mira, voy a preguntarte de otra manera.**

[E3--129] Ya, pregunte.

[Ent-130] **¿Es una función biyectiva?**

[E3--130] Eeh, no, en realidad es inyectiva, porque no es mm, pero da lo mismo.

[Ent-131] **Ya, entonces ¿cuál es el rol que entra a jugar para una función que es una transformación lineal?, ¿que cumpla qué?, ¿qué debe cumplir? Porque la pregunta fue cuáles son los elementos matemáticos que hay para esta pregunta. Cuáles son los conceptos que tú ves en esta pregunta. ¿O estás confundido en este momento como para ver los elementos matemáticos? Lo que pasa es que… O estás muy cerrado tratando de resolver cómo funciona eso y por eso no has podido. A lo mejor hay que cambiar de tema.**

[E3--131] Es que siento que empezaría a tirar elementos al azar no más.

[Ent-132] **Pero tíralos al azar.**

[E3--132] Como que de verdad no sé qué…

[Ent-133] **No, pero, a ver. No trates de encontrar los elementos específicos de acá, sino que en una pregunta general de álgebra lineal relativa a transformaciones lineales, ¿cuál es la matemática que uno así debiera ir recordando o ir citando?**

[E3--133] Eh, las funciones entre dos…

[Ent-134] **Ya, el concepto de función.**

[E3--134] Sí.

[Ent-135] **Pero el concepto de función con una particularidad aquí, con las bases, ¿cierto?**

[E3--135] En los elementos generales.

[Ent-136] **Exacto. Pero las funciones involucran ese concepto que tú citaste de biyectividad. ¿Y una función cuándo es biyectiva?**

[E3--136] Cuando es inyectiva.

[Ent-137] **Y cuando es…**

[E3--137] Sobreyectiva.

[Ent-138] **Ya, muy bien. Eso qué significaba. En términos generales, la inyectividad y la epiyectividad.**

[E3--138] La inyectividad es…

[Ent-139] **No, pero en el cotidiano, lo que no es función lineal. Está bien eso que tú estás diciendo.**

[E3--139] Ah, pero si igual se puede…

[Ent-140] **Sí pues, si estoy diciendo que está correcto, está correctísimo. Pero qué otra definición tienes de inyectividad.**

[E3--140] Uno a uno.

[Ent-141] **Uno a uno. ¿Qué crees que has estado haciendo cuando asignas así los vectores? Cuando tenías los puntos que coincidieran todos con todos, ¿qué has estado haciendo?**

[E3--141] Lo mismo.

[Ent-142] **Entonces aquí hay escondida la inyectividad parece,¿o no? Ya, pero tú hiciste un argumento con respecto… Entonces estas funciones, las preguntas que están acá, están haciendo alusión a esa clase, parece, de cosas matemáticas. ¿No lo ves aún?**

[E3--142] Sí, pero no podría decir ¡ah!

[Ent-143] **Está bien.**

[E3--143] Me cuesta.

[Ent-144] **Sigamos entonces. Veamos. Esto tiene muchas caras, ¿o no? Sigamos, esto guardémoslo. Esto fue una mala idea, estoy llena de malas ideas.**

[E3--144] Quizá fue malo el entrevistado.

[Ent-145] **No, no, eso no. [Le da una nueva pregunta.]**

[E3--145] Ya. Entonces, tengo una transformación lineal.

[Ent-146] **Pero específica, de R^2 en R^2.**

[E3--146] De R^2 en R^2.

[Ent-147] **Bien.**

[E3--147] Y me dan un elemento que es base de R2, o sea, un conjunto.

[Ent-148] **Ya.**

[E3--148] Y otro que también es base de R2. Y me definen la imagen de la base de R2 y me la muestran a otra base de R^2.

[Ent-149] **Bien. O sea, aquí el mundo perfecto, el que tú querías antes que pasara.**

[E3--149] Así que si A genera R^2, en este caso sí.

[Ent-150] **En este caso la respuesta es sí. Bien. Porque manda base en base. Bien.**

[E3--150] Ya. En este caso también es base. Sí.

[Ent-151] **¿Por qué es un isomorfismo?**

[E3--151] Porque es bi…

[Ent-152] **Porque es biyectivo.**

[E3--152] Sí. Porque llego a todo R2.

[Ent-153] **Ya. ¿No tienes nada más que decir, con eso es suficiente?, ¿Porque llego a todo R2? O sea, eso es un isomorfismo.**

[E3--153] Sí, de R^2 a R^2 sí.

[Ent-154] **Ah, ¿pero es por esto o por cómo se definió acá abajo?**

[E3--154] Eeh, sí, porque si… Ah, pero… Si no hubiese mandado eso que pase no sé si hubiese sido un isomorfismo.

[Ent-155] **Ya. O sea, ahí hay una sutileza. Entonces tú estás diciendo que esta es un isomorfismo.**

[E3--155] Sí. Me la juego porque es isomorfismo.

[Ent-156] **¿Y lo podrías probar?**

[E3--156] Chuta, ya.

[Ent-157] **¿Qué habría que probar para probar que es un isomorfismo?**

[E3--157] Tengo que la imagen es igual al recorrido, entonces…

[Ent-158] **Que la imagen es igual al recorrido.**

[E3--158] Sí. Porque estoy generando R^2.

[Ent-159] **Ya.**

[E3--159] Y.

[Ent-160] **Eso no lo veo yo, ¿habría que verlo o no?**

[E3--160] Pero si tiene base en base…

[Ent-161] **Es evidente, ¿cierto? Ya. Sí, está listo. Esta saliste bien, ¿viste? ¿Podrías retroceder a lo otro ahora o no?**

[E3--161] Eh, quizás.

[Ent-162] **Quizás en el futuro. Veamos. Vamos a continuar.**

[E3--162] Disculpe, ¿la molesto con un pañuelito?

[Ent-163] **Sí, todos los que tú quieras. Prometiste tomar agüita y aún no te veo tomar agüita.**

[E3--163] No, si tomé. Tranquila. Hay que cuidarse.

[E3--164] Ya. Me dan una transformación lineal, R^2 a R^3, y me dan la matriz asociada. Me dan… Ah. Y tengo que ver si esa transformación es un isomorfismo.

[Ent-165] **Ajá.**

[E3--165] Ya, eh…

[Ent-166] **¿Qué puedes comentar de lo que hay ahí escrito, a ver?**

[E3--166] O sea, lo primero que veo es que donde llevo lo genero todo a 3.

[Ent-167] **Claro. Entonces eso es un subespacio, ¿no?**

[E3--167] Sí.

[Ent-168] **Ya, márcalo ahí, ráyalo y pon que ahí tienes un subespacio. Ponle un comentario ahí, entonces esa F va …**

[Escribe.]

[Ent-169] **Bien. Y ahora, hecho ese comentario, que te diste cuenta muy bien, ¿es un isomorfismo?**

[E3--169] Ehm… A ver… O sea… O sea, sí, pero hacia eso…

[Ent-170] **Sí, pero con esa corrección. ¿Es un isomorfismo?**

[E3--170] Ah, sí. ¿O no? Sí. A ver.

[Ent-171] **¿Cómo sabrías que es un isomorfismo?**

[E3--171] Porque si lo restrinjo aquí la imagen. O sea, mm. No. Sí. Entonces, como, el Kernel tendría que ser cero.

[Ent-172] **¿Y cómo va el Kernel?**

[E3--172] Por eso, tengo que decirle que la dirección de …más… No, ¿cómo es?...

[Ent-173] **Sí, pero ¿y cómo calculo la imagen?**

[E3--173] Aquí está po.

[Ent-174] **Pero miraste la transformación lineal ? o No la estás considerando?**

[E3--174] Tiene razón, no me he fijado si…

[Ent-175] **O sea, estás diciendo que la transformación va de un lado al otro?**

[E3--175] Tiene toda la razón…

[Ent-176] **No, no, si no, pero hay que mirarla un poco.**

[E3--176] Ya.

[Ent-177] **Pero ahora cómo vas a hacer que la transformación no tenga nada que ver.**

[E3--177] Entonces ahora voy a mm y mm.

[Ent-178] **¿Pero y la manera en que lo definieron? ¿O eso no importa?**

[E3--178] ¿La transformación?

[Ent-179] **Sí pues, la transformación está ahí.**

[E3--179] Sí, por eso. Ahora.

[Ent-180] **¿Qué son esos objetos, cómo se arma esa matriz?**

[E3--181] ¿Esa es?… Chuta, ni me acuerdo…

[Ent-182] **Ya, bien, pero ¿qué es esa matriz?**

[E3--182] La asociada a la transformación. Y ahora la tengo que multiplicar por las coordenadas…

[Ent-183] **Si no te estoy preguntando el mecanismo, sino que te digo ¿de qué da cuenta esta matriz? ¿Dijiste la matriz asociada?**

[E3--183] Sí.

[Ent-184] **Ya. ¿Y qué es esto? ¿Lo leo así o lo leo así? [Le muestra horizontal y verticalmente.] ¿O así? [Le muestra en diagonal.] ¿Cómo lo leo? ¿Qué tengo que leer ahí, o no hay nada que leer?**

[E3--184] No tengo idea. No me… A ver…

[Ent-185] **O sea, sabes que esa es la matriz asociada a la transformación lineal.**

[E3--185] Claro, pero no sé sacar la información sólo con verla. Sí. Eso es.

[Ent-186] **¿Te acuerdas cómo se escribían los vectores coordenadas?**

[E3--186] Hacia abajo.

[Ent-187] **Ya, hacia abajo. ¿Este es un vector coordenada de quién?**

[E3--187] Eeeeh…

[Ent-188] **Es la imagen de éste. [Le muestra.]**

[E3--188] Eeh.

[Ent-189] **La imagen de éste. [Le muestra otra vez.]**

[E3--189] De éste.

[Ent-190] **La imagen de ése.**

[E3--190] Eso me da eso.

[Ent-191] **Me da esas coordenadas. ¿Y qué significa que sea la imagen…?**

[E3--191] Aaaaah, la imagen…

[Ent-192] **Aah.**

[E3--192] La imagen… O sea, son las coordenadas de la imagen de ése en esa base.

[Ent-193] **Exacto. ¿Entonces qué sería? A ver, veamos. Viste, si había que refrescar esa memoria. Entonces, ¿te das cuenta que tiene una lectura, tiene una forma de lectura?**

[E3--193] Sí. Ya. Entonces, si esas son las coordenadas en esa imagen, sería una vez esa más diez veces esa. Entonces me quedaría… [Trabaja.] Tomando esto como cero… Ahí. Entonces esto… 11, 10, …

[E3--194] Eso. Ya, ahora empiezo con el otro.

[Ent-195] **Recuerda que esto era para refrescarte la memoria, nada más. La pregunta sigue siendo la misma.**

[E3--195] Ah, chuta, ya. Eeeh…

[Ent-196] **¿Y ahora cuáles son las coordenadas?**

[E3--196] Ah, -2 que es ésa más ésa. Ya. Y eso me da 2, 1, 1, Pero eso no…

[Ent-197] **Ya. Ya, y la pregunta cuál es. Recuerda.**

[E3--197] Si es un isomorfismo. Ya.

[Ent-198] **Ya me contestaste que de R^2 en R^3 no lo es, pero la pregunta es si de R^2 en este subespacio de R^3. ¿Entonces qué me puedes decir?**

[E3--198] Que si estos son LI, entonces sería sí, y que si no, no.

[Ent-199] **Ya. ¿Y son LI?**

[E3--199] Emm… Quedaría siempre así.

[Ent-200] **Cuando tienes dos vectores, ¿cómo puedes saber si son LI o LD, dos vectores?**

[E3--200] Que… Ah, con dos. Sería por escalar.

[Ent-201] **Uno es múltiplo del otro, ¿cierto? Entonces la pregunta es ¿hay un escalar que multiplique por ejemplo al menos 1, 1, -1, uno para que me dé 11?**

[E3--201] Lo multiplicaría por 10, pero me daría 10 y me quedaría 11.

[Ent-202] **No, ¿cierto?**

[E3--202] O sea que me generan lo mismo que me genera eso. O sea que sí.

[Ent-203] **Es un isomorfismo.**

[E3--203] Sí, es un isomorfismo.

[Ent-204] **¡Bien!**

[E3--204] Lo voy a dejar ahí.

[Ent-205] **Bien. ¿Se te ocurre como probarlo de otra manera? ¿O simplemente tendrías que siempre recurrir a encontrar los vectores y decodificar la matriz?**

[E3--205] Eem, ¿así sólo trabajando con la matriz?

[Ent-206] **Ahá.**

[E3--206] No, no creo. No. Lo dudo.

[Le da otra hoja.]

[E3--206] Ahora tengo una transformación lineal de R^3 a R^2, y para no perder el tiempo. Y me dan dos conjuntos, o sea el de llegada y partida. Ya, averiguar de nuevo si es que es un isomorfismo.

[Ent-207] **Ya. Pero ahora cómo lo podrías decir así, es o no es, ¿qué te tinca?**

[E3--207] Chuta. Eeemm. [Piensa.] Me huele que sí. Creo. Pero no estoy seguro. También estoy fijándome en las …

[Ent-208] **A ver, ¿cómo sería este…?**

[E3--208] O sea, porque como la imagen del tercero va a ser este.

[Ent-209] **Pero nuevamente estás mirando eso sin mirar la transformación.**

[E3--209] Sí, pero a través de la imagen estoy viendo la transformación. Pero no… Es que no…A ver. [Trabaja.] Esa es la matriz. No sé cómo resolver finalmente.

[Ent-210] **Bueno, y si no puedes, al tiro, ¿cómo lo harías para verlo?**

[E3--210] Mi cabeza regula al tiro que es la MG.

[Ent-211] **¿Cuántas transformaciones lineales tú puedes definir?**

[E3--211] ¿Cuántas transformaciones lineales?

[Ent-212] **¿O una sola?**

[E3--212] No creo que se pueda.

[Ent-213] **¿Me entiendes el porqué hago esa pregunta?**

[E3--213] Emm, no.

[Ent-214] **Pero a ver, ¿cuántas transformaciones…? No quiero que me las cuentes, sino que digas… Muéstrame dos por lo menos. Transformaciones que se te ocurra que tú puedes construir de D a D'.**

[E3--214] Sería… Las definiría…

[Ent-215] **Como dices tú. Por ejemplo.**

[E3--215] Pasaría esta acá y esta acá, y después no sé, ese acá y ese ahí. Con eso cambio las imágenes.

[Ent-216] **Y podrías hacer varios cambios, porque ahí hay tres…**

[E3--216] Sí.

[Ent-217] **¿Y serían la misma transformación?**

[E3--217] Ehm, no sé.

[Ent-218] **Si lo piensas en términos de los puntos de los vectores de un rectángulo, ¿el rectángulo seguiría sometido a los mismos cambios con esa manera de asignación?**

[E3--218] Ahí creo que sí. Sí, yo creo que sí.

[Ent-219] **Ya.**

[E3--219] Sí, porque al final lo que me va a importar va a ser que estoy llegando al mismo lado. Porque por ejemplo …

[Ent-220] **Si quieres, son tus hojas. [Le muestra las hojas en que trabajó.]**

[E3--220] No, no, si me acuerdo. Que veía, solamente veía dónde me mandaban los dos vectores que tenía, y después los sumaba y ahí tenía al tiro hecho el cuadradito. Entonces lo único que me importaban era estas dos, y si voy a mandar esta acá y esta acá, y después esta acá y esta acá, al final igual voy a quedar con los mismos vectores acá y estos dos van a quedar en lo mismo no más. Entonces sería como viajar al otro conjunto de distintas formas, pero…

[Ent-221] **¿Y en el segundo dibujito qué era eso? ¿Te acuerdas, éste? ¿Qué hacías? Porque acá el rol era…, te daban la transformación y te pedían el cambio.**

[E3--221] Sí po, pero la… Llegaba distinto…

[Ent-222] **Y tú dices que se va a mantener el monito, vía la asignación. ¿Cuál sería la asignación aquí en el juego?**

[E3--222] Aquí, en el 0,3.

[Ent-223] **Ya.**

[E3--223] Entonces planifiqué sólo el… O sea, aquí hice este y este. Entonces ahora me fijo en lo que esto genera no más, porque como va preservando…

[Ent-224] **Ya. Y si esto lo quieres mirar en términos de bases de R2, ¿cómo quedaría? Ahí tienes hojas.**

[E3--224] Eeh…

[Ent-225] **Para ese caso, para B=2, ¿cómo lo describirías? Aquí la tienes explícita la transformación.**

[E3--225] Ya. ¿Tomo todos los elementos?

[Ent-226] **O sea, una base de R2 te vas a dar.**

[E3--226] Ya, una cualquiera.

[Ent-227] **Claro. Estoy de acuerdo.**

[E3--227] Ya, esa.

[Ent-228] **Y asignaciones... ¿Y la asignación?**

[E3--228] Y voy a llevar esto a… Sí. Esa. Y…

[Ent-229] **Mi pregunta ahora es si yo me doy una base cualquiera del conjunto de llegada.**

[E3--229] Ya.

[Ent-230] **Por ejemplo, la misma, ¿tendría esa transformación, desfiguraría el rectangulito como quieres?**

[E3--230] ¿Cómo? No entiendo la pregunta.

[Ent-231] **Estamos claros que construiste, cierto, mandaste estos vectores por la transformación.**

[E3--231] Sí.

[Ent-232] **Si ahora, por el contrario, saco esto.**

[E3--232] Ya.

[Ent-233] **Y te muestro eso.**

[E3--233] Ya.

[Ent-234] **Es claro que la figura se va a mantener, ¿o no?**

[E3--234] Sí.

[Ent-235] **¿Estamos de acuerdo?**

[E3--235] Sí.

[Ent-236] **Pero ahora qué pasa si yo cambio… O, a ver cómo lo puedo… Voy a sostener con tu idea: tu idea acá entonces ¿cuál fue?: que no importa la asignación que hicieras, es decir, yo aquí puedo mandar el (1, 0) al (2, 0) y puedo mandar el (0, 1) al (1, 0) y la figura va a seguir siendo la misma.**

[E3--236] Sí.

[Ent-237] **Eso es, ese es tu argumento.**

[E3—237] Sí. Eso me huele.

[Ent-238] **¿Te huele?**

[E3--238] Sí. Creo.

[Ent-239] **¿Entonces aquí tú lo puedes mandar cambiado y va a dar lo mismo?**

[E3--239] Ehm…

[Ent-240] **Eso es lo que tú me estás diciendo.**

[E3--240] Sí po. Sí, sí. Tendría que probarlo.

[Ent-241] **Ya. Dalos vuelta y ve si el rectángulo se sostiene.**

[E3--241] Voy a partir de eso mismo. Voy a tomar el (0, 2) y el (3, 0) Ah, y al revés.

[Ent-242] **No, si no te estoy diciendo que hagas la inversa.**

[E3--242] Sí po, pero voy a mandar este para allá y este para allá.

[Ent-243] **Ah ya, los vas a cruzar. ¿Entonces cómo van a quedar los dibujitos? Nos estábamos entendiendo, yo pensé que estabas…**

[E3--243] El otro igual va a quedar así, esos son los dos vectores a que llegué. Y…

[Ent-244] **¿Ah?**

[E3--244] Va a dar lo mismo.

[Ent-245] **Ya, entonces no cambia.**

[E3--245] No, no cambia.

[Ent-246] **Ya, ok. Entonces aquí da lo mismo. Entonces, en otras palabras, podemos ignorar esta matriz.**

[E3--246] Ehm, sí. Sí…

[Ent-247] **Tu argumentación dice que sí.**

[E3--247] Pero es que…

[Ent-248] **Pero hay algo que te hace ruido.**

[E3--248] Sí, porque no estoy necesariamente llegando a esto mismo.

[Ent-249] **¿Entonces qué hacemos? Pregunta ahora de nuevo: ¿es un isomorfismo de espacios vectoriales?**

[E3--249] No lo sé.

[Ent-250] **O sea, No tienes cómo decirlo, no tienes cómo determinarlo.**

[E3--250] No, porque vería a dónde van a llegar estos…

[Ent-251] **Pero y cómo lo puedes ver, si está determinado o está dicho. Si está dicho dónde van a dar.**

[E3--251] Sí po, con esto.

[Ent-252] **Sí.**

[E3--252] Pero tendría que hacer un calculirijillo.

[Ent-253] **Ya, ¿cuál es el calculirijillo?**

[E3—253] Ver cuánto es esto con esta base.

[Ent-254] **Ya pues, ¿y? ¿Y eso sería la imagen de quién?**

[E3--254] De este.

[Ent-255] **De ese. Y ahí estaría la asignación, ¿o no?**

[E3--255] Sí.

[Ent-256] **Y con eso ¿podrías determinar si es un isomorfismo?**

[E3--256] Viendo qué me da, sí.

[Ent-257] **Ya**.

[E3--257] Mirándolo, no. Entonces, me quedaría (-½ + ½) +… No [raya]. Entonces, (-½ + ½) + (½) (raya), 1 y entones - ½. A ver. Sí, está bien. Entonces, me queda (0, ¼).

[Ent-258] **Ya, entonces quién va a parar…**

[E3--258] ¡Ah, qué soy mentiroso! Es (0, -1). Qué vergüenza. Mucha vergüenza me dio eso.

[Ent-259] **Ya, pero ¿quién va a parar al (0, -1)? El primero.**

[E3--259] Este.

[Ent-260] **Ya, o sea que F del (1, 0, 1)…**

[E3--260] Es esto.

[Ent-261] **Es eso. Bien.**

[E3--261] Y el tercero va a parar a este mismo, porque una es esa.

[Ent-262] **Bien.**

[E3--262] Y esas son LI.

[Ent-263] **Y el otro. Es en tres columnas.**

[E3--263] Ah, pero me va a dar lo mismo.

[Ent-264] **¿Y cómo?**

[E3--264] Porque teniendo este ya voy a generar todo esto.

[Ent-265] **Ah, entonces ya es un isomorfismo.**

[E3--265] Ya, lo voy a hacer. Yo diría que sí, pero…

[Ent-266] **No, pero tú me dices que sí, que es un isomorfismo de R3 en R2.**

[E3--266] Sí, pero es que quizá eso me va a dar 0 y…

[Ent-267] **No, pero ¿es un isomorfismo de R3 en R2?**

[E3--267] No. No, no, no. Porque quizás no es inyectivo. Sí po, quizá no es inyectivo, porque eso me va a dar 0, y eso tengo… Hay que hacerlo.

[Ent-268] **Y a lo mejor no. A ver a dónde va a dar, veamos dónde puede a ir a parar.**

[E3--268] Ahora me voy a demorar media hora…

[Ent-269] **Entonces todo va a depender de eso. Depende del orden en que lo calcularas no más.**

[E3--269] Claro. [Calcula] Ya, pero eso no era 0. Ya, eso es 3,0… No, ¡son 4! Je je. Ya, es (2, 3). ¡Ahí llegué!

[Ent-270] **Ya llegaste. Entonces, F de esa cosa es (2, 3).**

[E3--270] Sí.

[Ent-271] **Según tus cálculos.**

[E3--271] Sí. Según mis cálculos.

[Ent-272] **¿Y?**

[E3--272] Estimo que es distinto de 0. Y entonces las tres me dan igual 0. Entonces sí es un isomorfismo.

[Ent-273] **Es un isomorfismo.**

[E3--273] Sí.

[Ent-274] **¿Seguro?**

[E3--274] No. No estoy seguro.

[Ent-275] **Ya. Pero no estás seguro por qué, porque no...**

[E3--275] Porque no me acuerdo bien qué tenía que hacer para ser un isomorfismo.

[Ent-276] **A ver, pero qué… Recuerda, porque no solamente hiciste este curso. Estamos en otro. Entonces, la idea es… Isomorfismo significa que preserva la estructura algebraica.**

[E3--276] Sí.

[Ent-277] **O sea es un morfismo biyectivo.**

[E3--277] Biyectivo.

[Ent-278] **Ya, biyectivo que era inyectivo y epiyectivo.**

[E3--278] Sí.

[Ent-279] **Bien.**

[E3--279] Ya. Aquí estoy generando, como estos son LI, estoy generando R2.

[Ent-280] **Bien. O sea, ¿eso quiere decir que eso es…?**

[E3--280] Sobreyectivo.

[Ent-281] **Bien. La inyectividad es la que está en tela de juicio.**

[E3--281] Claro, pero por el Kernel no era 0.

[Ent-282] **Pero ¿cómo calculaste el Kernel? Yo no lo veo. ¿Cómo es el Kernel, qué es eso del Kernel? Ya a mí no me está quedando claro.**

[E3--282] Las tres imágenes dan cero.

[Ent-283] **Las tres imágenes. ¿Y dónde lo calculaste ahí, que no lo veo?**

[E3--283] Ahh, en realidad.

[Ent-284] **Sí, porque usted me habla del Kernel y el Kernel y yo no lo veo.**

[E3--284] …Es que me huele que si uno de estos me da 0… No me va a dar 0. Quizá era mentira eso.

[Ent-285] **Pero era que tres van a parar ahí.**

[Piensa.]

[Ent-286] **¿Estamos en el Kernel?**

[E3--286] Sí.

[Ent-287] **Entonces el Kernel es un conjunto…**

[E3--287] Sí, es un conjunto de preimágenes del 0.

[Ent-288] **¿Conjunto o subespacio?**

[E3--288] También es un subespacio. Además.

[Ent-289] **¿Y cómo se escribe en este caso? Serían todos los que… El Kernel de esta F sería…**

[E3--289] Los puntos de R3 que van a dar al 0 de la transformación.

[Ent-290] **Ya.**

[E3--290] Y…

[Ent-291] **El problema es que no tienes la transformación.**

[E3--291] Claro. Tendría que… Me demoraría un kilo en trasponerla a través de eso.

[Ent-292] **A través de esto.**

[E3--292] Claro.

[Ent-293] **Ah, ya. Pero podrías hacerlo.**

[E3--293] Yo creo que sí. Igual es medio engorroso.

[Ent-294] **¿Y cómo es más o menos el proceso? ¿Cómo era el proceso para reconstruir la transformación lineal?**

[E3--294] Eem, ¿cómo era? Primero…

[Ent-295] **Porque aquí tienes las asignación de los elementos…**

[E3--295] De las bases.

[Ent-296] **De las bases, a mí ya se me perdieron algunos. Me falta… Uno, cierto, ahí tengo otro.**

[E3--296] Eso es LI, pero estoy seguro que es LI.

[Ent-297] **¿Y será LI eso?**

[E3--297] Ah, no sé… Eehm… Sí, sí es LI. [Musita cálculos.] Sí, sí es.

[Ent-298] **¿Sí? Yo supongo que eso fue el cálculo de las combinaciones lineales.**

[E3--298] Claro, traté de ver si esas dos me podían dar esa. Entonces, LI, y ¿en qué estaba? Ah, tratando de especificar la transformación.

[Ent-299] **Ajá.**

[E3--299] Y debería encontrar la combinación de esto a cualquier elemento de esto. Tendría que hacerlo.

[Ent-300] **¿Entonces tú qué me estás diciendo? ¿Qué es lo que tienes que hacer? Debieras encontrar que cualquier vector de R^3, un (x, y, z) es igual a combinación lineal de esta base.**

[E3--300] Sí.

[Ent-301] **Y de ahí aplicar la transformación, y como tienes las imágenes, podrías llegar a reconstruirla.**

[E3--301] Sí.

[Ent-302] **Pero estás muy cansado para hacerlo.**

[E3--302] No, sí, sí puedo.

[Ent-303] **¿Le darías la pelea?**

[E3--303] Sí, sí, todo lo que sea necesario.

[Ent-304] **Ya, vamos a dar la pelea. Si no hay cantidad de preguntas que tengas que hacer, así que no sientas que es una carrera contra cantidad.**

[E3--304] Ya. Tendría que escribir esto. Ya.

[Ent-305] **Ya. ¿Ahora cómo se encuentra eso?**

[E3--305] Con un sistema.

[Ent-306] **Ya.**

[E3--306] α + β + 2 gamma = x. Y qué más tengo. 0 β + gamma es igual a 1. Y α + 2 gamma = 0.

[Ent-307] **Ya, ¿y ahora cómo resuelves esto?**

[E3--307] A manito… o con matrices.

[Ent-308] **Ya, y ¿cuál camino vas a elegir? ¿Manito o matriz?**

[E3--308] Voy a tratar de hacerlo con matrices. Aunque no me acuerdo, estoy fuera de práctica.

[Ent-309] **Ya. ¿Las matrices te convencen?**

[E3--309] ¿Para hacer el sistema?

[Ent-310] **Sí.**

[E3--310] Sí po, y creo.

[Ent-311] **Pero…**

[E3--311] Pero soy malito para... Soy pésimo para los cálculos.

[Ent-312] **No te sientas obligado a usar matrices, tú hazlo como estimes conveniente.**

[E3--312] [Musita. Trabaja.] Ya, entonces me quedaría… No me dice mucho. Ah, sí, me quedo con esta. [Trabaja, relata lo que hace en forma interrumpida] Ya, pero ahora tengo esto y tengo esto… α + x –z, + 2y + 2z + 2x… Eso de ahí se fue. Me quedaría que α= 2x -2z -2y. Y ahí tengo los escalares.

[Ent-313] **Ahí tienes los escalares. Está bien.**

[E3--313] Sí. Ya. Entonces ahora vamos a hacer un sistema para esto. Tendría que ser.

[Ent-314] **No, pero primero encuentra la conformación lineal.**

[E3--314] No, pero si… O sea, ya tengo las coordenadas de la imagen de este… No me equivoco: estas son las coordenadas de cualquier punto de acá, entonces si yo las pongo aquí con un sistema… voy a encontrar el Kernel.

[Ent-315] **Ya.**

[E3--315] Y…

[Ent-316] **Creo que te estás complicando, porque aquí lo que estabas tratando de hacer era encontrar en forma explícita la transformación lineal para ver quiénes iban a parar al 0.**

[E3--316] Sí po, sí, sí.

[Ent-317] **Recuerda que estabas haciendo eso para encontrar la transformación en forma explícita, no por la matriz.**

[E3--317] Iba a tratar de hacerlo también para…

[Ent-318] **Para ver si podías hacer algo, así forzar el sistema.**

[E3--318] Claro, pero…

[Ent-319] **Ahí como que te vino un chispazo de algo que era…**

[E3--319] Es que yo sé que si pongo las coordenadas de esta gamma va a estar la imagen acá, y como sé que la imagen que ando buscando es el 0, tendría que buscar cuáles son los elementos de acá para…

[Ent-320] **Ya, entonces hazlo así. Entonces deja eso, porque no quieres hacerlo ahí.**

[E3--320] Pero no sé cómo me va a ir. Voy a tratar. Quizá me quede súper feo.

[Ent-321] **Ahora vas a buscar el Kernel con la matriz.**

[E3--321] Claro.

[E3--323] Ahora me cambié…

[Ent-324] **Te cambiaste. Pero vas a usar esos otros datos ahí…**

[E3--324] Ahí volví a encontrarlos. Y eso va a dar las coordenadas, esas… [Trabaja] [Musita] Tiene que haber una forma. Ya.

[Ent-325] **Ya, y después la otra.**

[E3--325] Sí.

[Ent-326] **Menos mal que tiene dos no más.**

[E3--326] Sí. [Trabaja, musita] Ya. Ya, creo que la encontré.

[Ent-327] **Ya, ¿y qué encontraste ahí?**

[E3--327] Las coordenadas de la imagen.

[Ent-328] **Ya.**

[E3--328] Ya, y entonces…

[Ent-329] **Recuerda que todo esto era para determinar si era o no un isomorfismo.**

[E3--329] Sí, pero para demostrar… Que no me acuerdo cómo era en fácil.

[Ent-330] **Ya, y ahora eso…**

[E3--330] Y… Tendría que hacer esto.

[Ent-331] **O sea, igualar. Compáralo con 0.**

[E3--331] Intuyo que me voy a quedar parado…

[Ent-332] **¿Así que qué pasa ahora?**

[La grabación se corta, y continúa la construcción del isomorfismo.]

<u>Transcripción 3.</u>
E18: estudiante
Ent: Entrevistador

[Ent-1] **Buenas tardes. Estamos iniciando la grabación del tercer estudiante. ¿Cómo estás?**

[E18-1] Bien. Un poco nerviosa pero bien.

[Ent-2] **Se agradece tu colaboración. Tú no te tienes que sentir para nada nerviosa ni estresada; es más, yo tengo que darte las gracias. Y por otra parte hay que decir que los vienen acá es por algo. Encontraron algo en sus escritos que nos interesa investigar. Así que agradecidos siempre. La primera pregunta, ¿la podrías leer, para ir conociendo?**

[E18-2] Considere el carrito de un tren que aparece en la figura 1. Se deforma en la figura 2. ¿Hay una transformación lineal que relacione la imagen del carrito de la figura 1 con la imagen de la figura 2?

[Ent-3] **Entonces cuál es tu respuesta: ¿que la hay o no la hay?**

[E18-3] Eh, yo creo que sí.

[Ent-4] **Tú dices que sí.**

[E18-4] Sí.

[Ent-5] **Ya, tu respuesta es afirmativa.**

[E18-5] Sí, pero, o sea, la buscaría.

[Ent-6] **¿Pero la podrías encontrar?**

[E18-6] No sé, a ver.

[Ent-7] **Tratemos.**

[E18-7] Tratemos, ya. [Trabaja, susurra lo que va haciendo] Ahh, está está en R·…

[Ent-8] **No.**

[E18-8] Es que dice (0, 5, 0)

[Ent-9] **Pero es 0,5.**

[E18-10] Aah, 0,5 de número.

[Ent-11] **Medio.**

[E18-11] Medio. Ya. [Trabaja, susurra]

[Ent-12] **Estás enviando vector por vector.**

[E18-12] Sí.

[Ent-13] **Ya.**

[E18-13] Más la… Eso es lo interesante.

[Ent-14] **O sea, eso es lo que… Ya, ok.**

[E18-14] Como en una transformación manda siempre el 0 en el 0…

[Ent-15] **¿Esa es una condición necesaria?**

[E18-15] Eh, sí.

[Ent-16] **¿Pero no es suficiente o es suficiente, basta que mande el 0 en el 0?**

[E18-16] No basta, también tiene que separar la suma, el producto. Eso como que se descarta, me parece.

[Ent-17] **Ah, ya. Está bien, está bien.**

[E18-18] Tomo el 2 y lo muevo ahí, y después lo muevo ahí. [Trabaja, explica en voz baja lo que hace.] Lo primero que hicimos sería hacerlo como por partes.

[Ent-19] **A ver, ¿cuáles serían las partes?**

[E18-19] Decir, que el x se está moviendo entre 0 y 2 y, no sé, tomar estos dos puntos de aquí y decir que el x se va a mover, o sea, la función lo va a enviar a moverse entre el 0 y el -5 después del -3 fijo.

[Ent-20] **Ya.**

[E18-21] [Escribe y describe la anotación] Como que sigue de la primera parte.

[Ent-22] **¿Y eso es transformación lineal? ¿Puede estar un número fijo?**

[E18-22] Buena pregunta. No.

[Ent-23] **¿Por qué no?**

[E18-23] O sí. Quizás sí se puede. …Estoy pensando.[Piensa

] Tiene que haber una razón, tiene que haber algo.

[Ent-24] **¿En cuál es la transformación lineal? Esa fue tu primera… Porque tú me dices que sí hay una transformación lineal, tu misión en este minuto era encontrarla.**

[E18-24] [Trabaja. Susurra.]-Tendría que dar eso ahí.

[Ent-25] **Exacto. ¿Y?**

[E18-25] Ehmmmm. Siento que está aquí, pero no lo veo.

[Ent-26] **¿No lo ves?**

[E18-26] No.

[Ent-27] **Si tú quieres seguimos con otra pregunta y la retomas después.**

[E18-27] Bueno. Ah, se puede.

[Ent-28] **Sí pues. Estamos en confianza, si esto no es una carrera por una nota, nada de eso. A lo mejor esta pregunta te puede ayudar. Si por eso que es una entrevista, porque no es una prueba.**

[E18-28] Sea T de R2 en R2 definida por… Ah, es un fijo, y al x le está sumando un escalar por ahí. Bosqueje la región obtenida al aplicar la transformación lineal al rectángulo dado en la figura cuando β=2 y β= -3.

[Ent-29] **Los números que aparecen ahí son los puntos?**

[E18-29] Sí.

[Ent-30] **Está dada la cuadrícula.**

[E18-301] Entonces, si el x es 0… Entonces tenemos… Entonces 3 y luego son 4, son 7. Ese sería un punto. Acá sería 0 y después lo sumo. 4.

[Ent-31] **¿Qué pasó?**

[E18-31] Me… Hay algo raro aquí, algo que no estoy haciendo… ¡Ahí está po!

[Ent-32] **¿Y repercute allá, o no?**

[E18-32] Sí. Ya, entonces es el 4 y ahí es el 2. Ese es el par. Sí. Este era el (3, 2), entonces es fijo, es 2, y de ahí me da 2. Y el 3 sería 7. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Y ese sería el 1.

[Ent-33] **Pero es (7, 2), no puede ser.**

[E18-33] ¡Ah, no!, este sí. Ya. Y este de acá es (0, 2) entonces me iba a dar (4, 2), y ese es el punto que está ahí. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3. Ese y ese. Me faltan 2. Ah, y ese es (2, 0), que ese también sería… Entonces… Ppara abajo. Y es 3 más…

[Ent-34] **A ver, dibújalo. ¿Es necesario que hagas el otro, para que puedas responder, o no?**

[E18-34] Voy a hacer el otro.

[Ent-35] **¿Vas a hacer el otro o el de allá?**

[E18-35] Sí, es que aquí estaba dejando fijo…

[Ent-36] **¿Por qué?**

[E18-36] Sería igual a (x/4, y)

[Ent-37] **Y según tú debería cumplir eso.**

[E18-37] Según yo debería cumplir. Entonces, si tomamos el 2 y lo divido en 4, y nos da ½, y el y es 1. Ah no, po, ahí mmm. A ver, ahí lo está dejando fijo, acá no. Pero acá…

[Ent-38] **¿Estás segura? ¿Y esa es transformación lineal?**

[E18-38] Eh, sí. Habría que ver. Si tomamos estos y los separo, pero yo creo que sí. Y lo multiplica.

[Ent-39] **¿Debiera ser?**

[E18-39] Debiera ser.

[Ent-40] **¿Seguro?**

(Voltea la hoja para trabajar.)

[Ent-41] **No, acá, si aquí tienes hojas, hojas sin rayar inclusive esa tiene puntitos, o esa sin puntitos si quieres. Como tú quieras.**

[E18-41] Ya. [Describe lo que escribe] Esto es igual a x cuarto coma menos esto. Entonces, si yo le aplico… Eso tendría que ser igual a… [Escribe y describe en voz baja] Y ahí quedaría colgando la función. Y estos puntitos son números reales, entonces yo puedo escribir así…

[Ent-42] **¿Y después la multiplicación por escalar la probarías aparte o la puedes**

poner ahí mismo?

[E18-42] Ah, la hago ahí mismo.

[Ent-43] **Ya, pónlo.**

[E18-43] [Trabaja, va señalando y describiendo.] Ahí, y este ahí, y ahí. Y ahí lo Proyectamos.

[Ent-44] **O sea, es transformación lineal.**

[E18-44] Sí.

[Ent-45]- **Bien. Vamos a la próxima, guardemos esta. Otra pregunta, veamos qué dice.**

[E18-45] Sea V un espacio vectorial de dimensión cuatro y tenemos una base que es la que tiene cuatro elementos que es una base para V. Sabemos que existe una única transformación lineal que va en el mismo espacio, que cumple con esto: $T(v_1)=v_2, T(v_2)=v_3, T(v_3)=v_4,\ T(v_4)=\vec{0}$ ¿Cuál es la trasformación*?* [Trabaja] Entonces estos elementos de aquí están en V. Ah, sí. V es un espacio abierto, tiene que tener cero. Cuál es la transformación. [Piensa]

[E18-46] Ya.

[Ent-47] **¿Ya? A ver, ¿qué estás pensando ahora?**

[E18-47] No sé, la primera vez que lo leí, dije 'ah, lo 1 va en v2' y como que me imaginé un ciclo. Que estamos construyendo una estructura de ciclos y me imaginé como un ciclo.

[Ent-48] **Y.**

[E18-48] Que el v_1 lo mandaba al v_2, el v_2 al v_3, el v_3 al v_4 y el v_4 volví. Entonces al volver dije 'ah, y si fuera un ciclo justo el v_1 tendría que ser 0 para que volviera'. Como que eso fue lo primero que pensé cuando lo leí.

[Piensa.]

[E18-48] Me siento atascada.

[Ent-49] **¿Por qué?**

[E18-49] No sé. Como que lo veo y pienso que como que se me olvidó qué podía hacer. Eso es lo que me pasa.

[Ent-50] **Mira, regreso a tu respuesta anterior.**

[E18-50] Ah, ja ja.

[Ent-51] **Mira, tú misma escribiste algo. Ahora, lo que pasa es que hay una diferencia entre lo que tú asignaste acá y lo que ellos asignan allá. ¿Cuál es la diferencia?**

[E18-51] Eeh…

[Ent-52] **Tú asignaste vectores que para ti fueron significativos dentro del plano figural.**

[E18-52] Sí.

[Ent-53] **Pero… ahora no es el plano…**

[E18-53] Toman los elementos de la base. Y eso la define una…

[Ent-54] **¿Por qué tú consideras las imágenes de los elementos de la base?**

[E18-54] ¿Qué considere los elementos de la base?
Es que con la base se puede generar todo el espacio.

[Ent-55] **O sea… ¿Eso quiere decir que aquí tenías más imágenes que las que necesitabas para determinar la transformación?**

[E18-55] ¿En esta de aquí que yo puse cuatro?

[Ent-56] **Sí.**

[E18-56] Quizá sí po. Yo con dos lo hubiera hecho. Porque estamos en R2.

[Ent-57] **Estamos en R2.**

[E18-57] Podía haber tomado ese y ese no más.

[Ent-58] **O sea, el (0, 0).**

[E18-58] Sí. Hay que buscar uno que se…

[Ent-59] **Pero el (0, 0) ¿está en la base del espacio de partida?**

[E18-59] ¿Sólo el (0, 0)?

[Ent-60] **Bueno, y el (0, 0) acompañado por otro ¿es base del espacio de partida?**

[E18-60] No, nunca he tomado el (0, 0)… No.

[Ent-61] **¿Pero qué significa que sea base?**

[E18-61] Eh, o sea… Si el elemento es como… Si tengo la base, yo con los escalares puedo generar todo el conjunto.

[Ent-62] **Ya. O sea, la base te ayuda a generar todo el conjunto. ¿Tiene otra condición?**

[E18-62] Además que es LI. O sea, que los vectores que están ahí son linealmente independientes.

[Ent-63] **Claro, esa es la condición para… Pero tiene otra condición que está ahí, que es el mínimo de vectores que se necesita.**

[E18-63] Sí, por ejemplo en R2 necesito 2.

[Ent-64] **Exacto.**

[E18-64] Tengo las canónicas, esa es una de las canónicas.

[Ent-65] **El (0, 1) pero no el (0, 0).**

[E18-65] El (0, 0) no po.

[Ent-66] **¿Por qué?**

[E18-66] A ver, es que el 0… La idea es que sea LI. La única forma…

[Ent-67] **¿El (0, 0) y el (0, 1) son LI?**

[E18-67] No: están en la misma recta.

[Ent-68] **Argumento. Muy geométrico.**

[E18-68] Son colineales.

[Ent-69] **Argumento geométrico. Ya, entonces en el fondo esta imagen…**

[E18-69] No sirve. Esa con esa sí.

[Ent-70] **Esa podrías haber construido.**

[E18-70] O la última con esa.

[Ent-71] **Con esas dos podrías haber construido una transformación lineal. Muy**

bien. Pero con esa no. Por eso que es una condición necesaria, pero no suficiente, para determinar. Ok, vamos bien. Y ahora cómo lo hacemos ahí, ahora que viste y repasaste.

[E18-71] Ya. Estos entonces son los elementos de la base.

[Ent-1] **Ya, y tú misma me dijiste que la base es un conjunto que genera espacios en la menor cantidad de elementos, y eso quiere decir que cualquier elemento del espacio de partida tú lo escribes como combinación lineal.**

[E18-71] Como combinación de los vectores.

[Ent-1] **Entonces, bueno, ¿cuál es la transformación lineal?**

[E18-71] Ya.

[Ent-72] **¿Se puede encontrar o queda en el abismo? ¿O ya ahí está determinada y no necesitamos nada más?**

[Piensa.]

[Ent-73] **Si te sientes atascada me avisas no más, tú sabes que se puede hacer algo**

[E18-73] Siempre se puede.

[Ent-74] **Antes pudiste, ¿o no?**

[E18-74] Sí.

[Ent-75] **Tú dime.**

[E18-75] Ya, a ver, pasemos a otro.

[Ent-76] **Prefieres dejar esto en stand by…**

[E18-76] En stand by, sí.

[Ent-77] **Y a ver qué podemos hacer. Vamos a alivianar la carga, en realidad relativamente. Veamos qué te parece.**

[E18-77] Sea $\mathrm{T}:\mathrm{V}\rightarrow W$ función definida por $\mathrm{T}(\mathrm{v})=0_W$, para todo $v\in V$ ¿Es T una transformación lineal? [Piensa] O sea, lo primero que pienso es que V pertenece al Kernel de la T, porque si su imagen es 0, ese V tiene que estar en el Kernel, que son las imágenes del 0.

[Ent-78] **¿Y quién es ese V?**

[E18-78] ¿Ese V? O sea, esas son V que vienen de aquí. ¿O no?

[Ent-79] **O sea, tú me dices que son V que vienen de ahí. ¿Cuáles?, ¿todas?, ¿algunas?**

[E18-79] O sea, son… A ver… Son V que pertenecen a… [Escribe y señala la anotación].

[Ent-80] **Sí. Pero la pregunta es si es que hay una transformación lineal. Ahí estás calculando el Kernel, algo que ya es transformación lineal.**

[Trabaja. Escribe.]

[E18-80] Sí, sí es. Todo el rato.

[Ent-81] **Todo el rato, ok. Y ahora pregunta: ¿y cuál es el Kernel de esa transformación lineal?**

[E18-81] Son todos, ¡son todos! Ja ja ja. Porque todos los manda el 0.

[Ent-82] **Todos lo van a mandar al 0. Sí.**

[E18-82] El Kernel sería…

[E18-83] Todo V.

[Ent-84] **V completo es el Kernel, todos van a bajar al 0. Y ahora devolviéndonos allá, ¿quién sería el Kernel de esa transformación lineal?**

[E18-84] Ese al tiro pertenece al Kernel.

[Ent-85] **¿Y los otros?**

[E18-85] Es que esos están en la base, entonces no pueden ser los nulos. Entonces sólo ese.

[Ent-86] **O sea el Kernel es… O sea puedes decir muchas cosas de…, menos encontrar la transformación lineal.**

[E18-86] ¡Sí! Ja ja.

[Ent-87] **O sea, perdón, pero de V4 como conjunto.**

[E18-87] Ah, sí.

[Ent-88] **¿O el espacio generado por el V4? O sea, sería una base para el Kernel.**

[E18-88] Ay, a ver. Sí po, es el generado yo creo…

[Ent-89] **O sea, tú puedes decir hartas cosas, ¿o no?**

[E18-89] Sí.

[Ent-90] **¿Es inyectiva esa transformación lineal?**

[E18-90] Emm… Pero aquí es el generado por V4, entonces muchos vectores… Voy a tratar de hacerlo, pero entonces no es eyectiva, porque no es una onda.

[Trabaja.]

[Ent-91] **Y entonces esa transformación que no hemos podido encontrarla, sabemos que no es inyectiva, y ahora…**

[E18-91] Es que lo hubiéramos visto al tiro, porque el Kernel no es sólo el 0. Ahí vemos que no es inyectiva por ningún lado.

[Ent-92] **Por ningún lado. Muy bien. Y un isomorfismo?**

[E18-92] No.

[Ent-93] **No. No tiene cómo. No la podemos encontrar. Esta de acá abajo, ¿no es inyectiva?**

[E18-93] ¿Esta de aquí?

[Ent-94] **Ajá.**

[E18-94] Ah, no, porque todos van a dar al 0. No.

[Ent-95] **O sea el Kernel es todo V.**

[E18-95] Es todo V. Sí.

[Ent-96] **Entonces ahora vamos a cambiar un poco el discurso.**

[E18-96] Ya. Dada la transformación lineal F que va de R1 a R2 definida por

$[F]_{A}^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, donde $A = \langle (1,0),(1,1) \rangle$ y $A' = \langle (1,0,1),(1,1,1) \rangle$ determine si esta transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales. En caso de ser afirmativa su respuesta, establezca el isomorfismo. Si su respuesta es que no existe un isomorfismo, justifique. Ya. Le dimos a esta de aquí, por un momento dijo algo de R2 a R3, sobre las dimensiones, como que lo nombró, y de ahí no quise escuchar lo que más decía, que no quería saber que iba a ver aquí. Entonces me acorde que había un teorema de las dimensiones, que decía que el espacio de partida tenía que ser igual a la dimensión de Kernel más la dimensión del espa… más la imagen, la dimensión de la imagen. Pero algo que sí él dijo es que en la estructura debe estar el cuociente, y eso sí es bastante importante, referente a ese teorema en realidad. Y estas son las coordenadas…

[Ent-97] **Ajá.**

[E18-97] Va de aquí hasta allá. [Trabaja, piensa en voz alta]

[Ent-98] **¿Qué es eso? ¿Eso es la matriz asociada a la transformación lineal, cierto?**

[E18-98] O sea, sí.

[Ent-99] **¿Y qué significa eso?**

[E18-99] Ya… Se supone… Ya, a ver… [Piensa] Me acuerdo que eran hacia abajo.

[Ent-100] **Ya, ajá.**

[E18-100] Y eran coordenadas. Entonces yo tengo esta base… Eehm.

[Ent-101] **¿Si te ayudo te acordarías?**

[E18-101] Yo creo que sí.

[Ent-102] **Estás bien hasta aquí. Esto de acá son coordenadas. Y está de acá también.**

[E18-102] Sí.

[Ent-103] **¿Y de quién son estas coordenadas? De la imagen de este vector, como combinación lineal de eso.**

[E18-103] Ah, entonces sí, porque cuando yo le aplico algo a ese punto, va a estar una vez ese más veces el otro, ¿verdad?

[Ent-104] **Muy bien, eso es lo que significa.**

[Escribe.]

[Ent-105] **¿Viste? Si no estabas mal. Sólo había que ayudarte ahí.**

[Trabaja, piensa en voz alta.]

[Ent-106] **Perfecto.**

[Trabaja.]

[Ent-107] **Ya. ¿Y? Ahora ya sabes decodificar eso.**

[E18-107] Sí.

[Ent-108] **Cuando a uno le dan la matriz asociada a la transformación lineal, le están dando otra interpretación de la transformación lineal, ¿cierto? ¿Me facilitas la hoja anterior? Mira.**

[E18-108] Mh.

[Ent-109] **Mmh. Perfectamente podríamos armar algo aquí, ¿o no? ¿Podríamos decir cuál es la transformación lineal? Por lo menos podríamos mostrar la matriz asociada, si seguimos esa línea, ¿o no?**

[E18-109] Sí, sí. Porque estamos tomando el vector v1, v2, v3 y v4 y necesitamos sus coordenadas en esa base.

[Ent-110] **Y te la dan, porque es la misma del espacio de partida que de llegada.**

[E18-110] Entonces el v1 lo estaría mandando al v2, entonces es [0, v2, 0, 0], ¡ahí está!

[Ent-111] **Escríbela. Porque ahí no te dijeron cómo encontrarla, te dijeron que encontraras la transformación lineal, y viste que puedes dar respuesta.**

[E18-111] Entonces estoy tomando el v1 y estoy llevando a 0, pongo 0, 0. Tomo el v2 y lo llevo a 0, 0. El v3, 0. Tomo el v3 y 0, 0, 0. Y después… Ahí está la matriz asociada.

[Ent-112] **Y es la transformación lineal.**

[E18-112] Sí.

[Ent-113] **Ahora termina esta. Viste que con una se va sacando la otra, con la otra la otra… Están concatenadas. Vamos con esta pregunta.**

[E18-113] Eehh…

[Ent-114] **¿Y aquí qué te preguntaban?**

[E18-114] Si es un isomorfismo.

[Ent-115] **¿Es un isomorfismo o no lo es?**

[E18-115] Ya. Cuando hablamos de isomorfismo, en álgebra 2 siempre decían que las cosas tenían que tener igual dimensión.

[Ent-116] **Y.**

[E18-116] Si tenían igual dimensión iba a existir un isomorfismo; quizá a veces nunca lo encontráramos, pero aseguraba la existencia de uno. Estos tienen distinta dimensión, pero puede que no llegue a estos extractos, puede llegar sólo… Y tiene más, entonces está llegando a…

[Ent-117] **A un subespacio.**

[E18-117] Que tiene dimensión 2, entonces sí podría haber.

[Ent-118] **Ya.**

[E18-118] La pregunta ahora es si éste es un isomorfismo.

[Ent-119] **Claro, si esa función que está ahí…**

[E18-119] Es isomorfismo.

[Ent-120] **Entonces tú podrías decir que no lo es porque está en R3, pero si cambias R3…**

[E18-120] Es que como es un subespacio de R3 donde está llegando, tiene dimensión 2, entonces a de dimensión 2 a dimensión 2.

[Ent-121] **Ya. O sea…**

[E18-121] Sí se puede.

[Ent-122] **O sea, sí se puede.**

[E18-122] Sí. Yo puedo saber si este es isomorfismo.

[Ent-123] **Ya. O sea, estás viendo lo que estás diciendo.**

[E18-123] Pero si esta matriz es inyectiva… invertible…

[Ent-124] **¡Aahh! ¿Qué pasa si es inyectiva? Invertible?**

[E18-124] Entonces si mi determinante es distinto a cero, puede existir la que es… para el otro lado, entonces sí va a ser isomorfismo, porque va a existir una F’ que vaya de aquí para allá. Entonces veamos si el determinante es distinto a cero. Pero eso es fácil.

[Ent-125] **O sea, existe un isomorfismo aquí…**

[E18-125] Sí, sí existe.

[Ent-126] **Ahí respondiste todas las preguntas, ¿cierto? ¿Existe? Sí. ¿Justificaste? Sí. ¿Determinaste? Sí. Está bien, perfecto. Vamos a otra. Léela.**

[E18-126] Dada la transformación lineal que va de R3 en R2, definida por la siguiente matriz cambia de base, donde D tiene tres elementos en su base, en R3, y la D’ es de R2 y tiene dos, determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ehm. Pero si vamos al teorema, este tiene tres, y si se confirma que tiene que ser cero, más dos… No nos daría la igualdad.

[Ent-127] **A ver, cómo. Explícame. Qué es ese juego de números.**

[E18-127] Ya. Es que la dimensión de los espacios de partida… La dimensión…

[Ent-128] **No importa, como tú estimes, si está claro lo que me tratas de decir.**

[E18-128] Es 3. Eeh. Si fuera un isomorfismo, el Kernel, o sea la dimensión del Kernel, tendría que ser cero. Sí, porque para que nos podamos devolver y esa sea invertida. Y la dimensión del espacio de llegada tendría que llegar a todo el espacio, pero ese es dos po. Entonces no nos va a dar que D es igual a dos.

[Ent-129] **Ya. Entonces, ¿cuál es tu respuesta?**

[E18-129] Que no. …Y esos de ahí son LI. Quiero ver eso. (1, 0, 1), (1, 1, 0) y (2, 1, 2). [Piensa en voz alta, trabaja.] (…) Entonces…

[Ent-130] **¿Son LD?**

[E18-130] Estoy viendo si es LD. Y si es una contradicción, entonces es LI.

[Ent-131] **¿Y llegan a dónde?**

[E18-131] Eeh… Ese proceso tiene que ser dos. El 1 tiene que ser igual a B y ahí me tendría que dar C igual a dos, pero si beta es uno, entonces tendría que ser uno, entonces sí es LI.

[Ent-132] **Entonces no te engañaron ahí.**

[E18-132] No me engañaron. Pero…

[Ent-133] **Te lo pusieron como otra cosa.**

[E18-133] ¡Sí! Y ese de ahí…

[Ent-134] **Es que son dos, no hay nada… Uno tendría que ser múltiplo del otro. Si no lo son, ya… Ya, pero ahora ¿cuál es la pregunta?**

[E18-134] Si es isomorfismo.

[Ent-135] **¿Es un isomorfismo? Te recuerdo que antes tú dijiste algo, en esta pregunta [le muestra otra hoja] que me pareció muy interesante. Voy a traerla a colación. Hiciste un cálculo ahí.**

[E18-135] Ah, sí.

[Ent-136] **Entre muchas cosas, hiciste un cálculo. Incluso hasta me diste una explicación de por qué uno se podía regresar.**

[E18-136] Por el determinante. El teorema es el que determina…

[Ent-137] **¿Y se puede dar ese determinante?**

[E18-137] Ehm….

[Ent-138] **Ja ja ja, ya, entonces no podemos calcular el determinante. Y si no puedes calcular el determinante, ¿qué podrías decir de antemano? Que me lo estabas diciendo acá, que el número de…**

[E18-138] Que no es.

[Ent-139] **¿Qué no es?**

[E18-139] Todo dice que no es.

[Ent-140] **Todo apunta a que no es.**

[E18-140] Sí.

[Ent-141] **Ya. Entonces qué dice la pregunta, vuelvo a repetir.**

[E18-141] Determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

[Ent-142] **Ya, ¿y cuál es la respuesta, ahora al hueso?**

[E18-142] Que no es.

[Ent-143] **¿Por qué?**

[E18-143] Porque… Es que… No quiero, no sé, no quiero como usar… Ya, porque no cumple eso. Y no puedo calcular el determinante.

[Ent-144] **Ya, entonces son cosas que… Una que no cumple, y otra que no puedo.**

[E18-144] No puedo.

[Ent-145] **Como que no basta, ah.**

[E18-145] No, no es suficiente.

[Ent-146]- **Para ti. Y entonces, ¿qué vas a decir, cómo vas a contar la historia? Pero tienes un detalle… No, no. Ya, ¿cuál es…?**

[E18-146] Me gustaría hacer el cálculo de la cosita.

[Ent-147] **Ah, vas a hacer el cálculo. Porque ahora ya sabes decodificar lo que eso.**

[E18-147] Sí. A ver si puedo hacer algo.

[Ent-148] **Sí.**

[Trabaja, piensa en voz alta.]

[Ent-149] **Bueno, y qué pasa si ese está en el Kernel.**

[E18-149] El Kernel ya es uno y supongo que llega a todos esos. Y tres es igual a tres.

[Ent-150] **Ya.**

[E18-150] Y que ese ahora ya lo escribí… Y ese sería igual a ese.

[Ent-151] **Ya. Y qué significaba que el Kernel de una transformación lineal fuese el cero, por ejemplo.**

[E18-151] Que sólo manda el cero en el cero.

[Ent-152] **Ya. Y si tú mandas otro número en el cero, qué problemas hay.**

[E18-152] Que no es inyectiva.

[Ent-153] **Aah. Y si no es inyectiva…**

[E18-153] -No puede ser un isomorfismo. …Pero podría sacar ese número.

[Ent-154] **Ah, ¿se puede sacar?**

[E18-154] No sé si se puede. A ver, voy a seguir haciendo esto.

[Ent-155] **Recuerda que la idea es que respondas si es o no un isomorfismo.**

[E18-155] Sí.

[Trabaja. Piensa en voz alta.]

[E18-156] Ah, en álgebra, en estructuras, vimos que el espacio con el Kernel es isomorfo a la imagen.

[Ent-157] **Ya.**

[E18-157] Entonces si esta función es diyectiva, su imagen sería ése. O sea…

[Ent-158] **¿Y?**

[E18-158] Mmmm, sí sería…

[Ent-159] **O sea, es posible.**

[E18-159] Sí.

[Ent-160] **Ah. Pero la pregunta cuál es. ¿Es o no un isomorfismo lo que te mostré ahí, lo que hay ahí en el papel?**

[E18-160] Eehh…

[Ent-161] **Porque…**

[E18-161] Sí, me estoy…

[Ent-162] **No, no, no. Si está bien, pero si yo no te digo que estás haciéndolo mal, yo lo que digo es que ¿es o no es? Espero la respuesta. Ahora, he tenido algunas aproximaciones.**

[E18-162] Digo que sí es.

[Ent-163] **Ah, tú dices que sí es un isomorfismo, así como está planteado.**

[E18-163] Así no… A ver.

[Ent-164] **¿Pero sí o no? Sigues con la duda. No sé si me entiendes. Si es un**

isomorfismo, como está ahí, ¿para qué vas a hacerlo? Porque no entiendo, ¿qué significa esto de acá? No lo entiendo.

[E18-164] Ya. Es que… Así como está planteado, para que sea un isomorfismo…

[Ent-165] **Pero es o no es, primero la pregunta.**

[E18-165] Ya. Así no, no es.

[Ent-166] **Ya. ¿Por qué no es? Ahora veamos. Porque antes dijiste porque no podías responder el determinante, pero ahora una respuesta más contundente.**

[E18-166] Es que si… Ehm… Ya… Porque no cumplía esto, no cumplía esto de aquí.

[Ent-167] **Ya, eso qué significaba, que no cumplía eso.**

[E18-167] Es que, o sea calculé el Kernel y era uno.

[Ent-168] **Ya.**

[E18-168] Y para que fuera isomorfismo tendría que ser cero el Kernel. Para poder ir de un lado para el otro.

[Ent-169] **¿Entonces?**

[E18-169] Entonces no es un isomorfismo.

[Ent-170] **No es un isomorfismo. Muy bien. No es. Por fin. Y ahora ya no por el argumento de que no puedo calcular el determinante.**

[E18-170] Porque calculamos el Kernel.

[Ent-171] **Porque calculaste el Kernel, porque te diste cuenta que la imagen… O sea, yo no sé si calculaste el Kernel, lo que hiciste…**

[E18-171] Calculé las veces que está dentro…

[Ent-172] **Ahora la pregunta: ¿con eso basta para calcular el Kernel?**

[E18-172] ¿Para ver que no es isomorfismo?

[Ent-173] **Sí, no, que aquí no hay isomorfismo estoy clara, ¿pero con esto calculaste el Kernel? Porque aquí tú ya aceptaste que el Kernel era ese.**

[E18-173] Aah, o sea, es el generado por ese, pero puede que haya más po.

[Ent-174] **¿Puede?**

[E18-174] Esa es una base.

[Ent-175] **Tú demostraste que era base.**

[E18-175] Sí. Entonces no, no hay más, sólo el generado por ése. No hay más.

[Ent-176] **¿Y ahora me podrías explicar esto?**

[E18-176] Ya.

[Ent-177] **No lo entiendo eso.**

[E18-177] Ya, eeh… Veíamos que era… el cuociente…

[Ent-178] **¿Qué es eso del cuociente?**

[E18-178] Ya. Voy a poner el ejemplo que siempre da el profe.

[E18-179] **Ya.**

[E18-179] Él dice que uno desde pequeño hace relaciones de equivalencia. [Dibuja tres óvalos.] Que la mamá te manda a comprar café al supermercado. Uno va al supermercado y ve la relación de los precios que hay. Por ejemplo, hay muchos precios de los cafés, y cada precio va a tener una preimagen. Que hay muchos Nescafés, hay Dolca, hay Ecco, y hay hartas cosas, pero cuando uno se acerca al estante ve que hay muchos tarros de Nescafé del mismo tamaño pero que todos valen lo mismo. Entonces ahí uno no dice 'ah, voy a tomar este tarrito en vez del otro'. Uno llega y toma cualquiera. Entonces ahí estamos tomando un representante de la clase. Estamos tomando el que es Nescafé. Nos da lo mismo cuál de todos los tarritos es, sólo es Nescafé. Entonces ahí nosotros estamos pasando al cuociente, estamos como etiquetando las cosas. Y ya no nos importa el representante que haya. Entonces esto de aquí al cuocientarlo con el Kernel, esto de acá significa que es todo punto (x, e, z), que está en R3, más el Kernel, que lo puedo escribir de esta manera. [Describe la anotación.] Entonces al cuocientarlo, que es pasar aquí abajo, yo voy a encontrar una relación unívoca entre este de aquí, que ya me da lo mismo el representante, sino que ahora son todos los Nescafé, con los precios que tengo acá. Entonces aquí hay una… Es unívoca. Aquí es inyectiva. Aquí son muchos tarritos que van ahí. Pero al cuocientarlo a mí ya me interesa sólo la clase del Nescafé. La clase. Entonces es uno solo y está yendo justo a ese precio. Y eso es como lo que está aquí: la imagen. Lo que está acá. Y yo me di si va todo a R2, porque esto que está aquí, que es base, me genera todo R2. Y es diyectiva, sí.

[Ent-180] **¿Y es inyectiva?**

[E18-180] Y es inyectiva por esto. Porque yo estoy pasando al cero, estoy pasando a la clase. Sí. ¿Entendió el ejemplo?

[Ent-181] **Perfecto.**

[E18-181] Entendí, sí, entendí.

[Ent-182] **Perfecto. Muy bien. Vamos a ir a un detalle técnico, que ya no nos queda nada, no nos queda nada. Te das cuenta que el orden cambia, ¿o no?**

[E18-182] Sí, cambia.

[Ent-183] **Vamos.**

[E18-183] Sea T en una… que va de V a W, una transformación lineal, y dos conjuntos: A, que está contenido en V, y B, que está conteniendo a W. Entonces vamos a hacer esto así… [Dibuja.]

[Ent-184] **Ahí tienes hartas hojas, aquí hay más por si acaso.**

[E18-184] Hay muchas hojas.

[Ent-185] **Justo: mientras más hojas mejor.**

[E18-185] …Este acá y este… Ya. Tal que A es una base de A que está contenida en B y B tiene su base que está contenida en W. Entonces, T el primer elemento de esta base es w1. ¿Ya?

[Ent-186] **¿Dice que es base?**

[E18-186] Sólo está así. No lo dice.

[Ent-187] **Ah, quería saber si había puesto por ahí base.**

[E18-187] No, no lo dice. Yo llegué y asumí que era base.

[Ent-188] **Ahh.**

[E18-188] [Piensa en voz alta] Si el conjunto B es linealmente independiente, ¿Debe ser el conjunto A linealmente independiente? Hmm. Yo llegué y dije que era base. Eso están preguntando. Ya, entonces A tiene sus elementos y B tiene… Entonces, para aplicar voy a este, y este con este… [Piensa en voz alta. Trabaja]… Ya, es una transformación, estamos en la definición…

[Ent-189] **Exacto.**

[E18-189] Eso no pasa. Entonces, si este es LI y tienen la misma cantidad de elementos, entonces esté de acá también tiene que ser LI. Porque si este va acá puede haber LD, o sea, uno de esos elementos de acá…

[Ent-190] **Ajá.**

[E18-190] …Lo puedo seguir como combinación de estos dos. Qué pasaría, a ver, si este lo escribo como combinación de esos dos. Ya. Algo me dice así que es LI.

[Ent-191] **Ya.**

[E18-191] Para que vayan así como uno por uno. Porque como este tiene ene elementos y ese también…

[Ent-192] **Ya.**

[E18-192] Me dicen que tiene que ir uno con uno.

[Ent-193] **Ya.**

[E18-193] Pero en el caso de que estos de acá fueran LD, estoy viendo cómo quedaría lo de las flechitas, al aplicar…

[Ent-194] **Y es transformación lineal.**

[E18-194] Transformación lineal.

[Ent-195] **Así que preserva eso.**

[E18-195] Sí.

[Ent-196] **Preserva que justamente si este se escribe como combinación lineal de eso, lo va a preservar, ¿o no?, ¿o eso no lo hace?**

[E18-196] Ah, sí, lo hace.

[Ent-197] **Ya.**

[E18-197] Entonces estaría mandando dos flechas al mismo punto.

[Ent-198] **A ver.**

[E18-198] Si este punto lo escribiera como estos números… [Piensa en voz alta] Ya, este quedaría como combinación de ese.

[Ent-199] **Ajá.**

[E18-199] Si yo mido la transformación, o sea si le mido la transformación a este de acá, es lo mismo que aplicar la transformación aquí, los separaría. [Piensa en voz alta. Escribe] Este de aquí, sólo ese…

[Ent-200] **Ese está en otro lado, porque es un T de alguien ya, ¿no?**

[E18-200] Sí, está aquí.

[Ent-201]-Ajá. ¿Y esos son?

[E18-201] Este de aquí… Esos son LI po. Va a venir a dar uno de acá. Y esto de aquí también va a tener una preimagen. Y este de acá que es LD entonces… Va a estar… A este… Puede ser LD po.

[Ent-202] **¿Puede ser LD?**

[Piensa.]

[E18-202] A ver. Ese es LI. La pregunta: ¿ese tiene que ser LI? ¿O puede ser LD? Entonces si un punto de aquí se escribe como combinación de los dos puntos de acá… Y tienen la misma cantidad de elementos… Es que por ejemplo, si yo tengo eso y le aplico T, este de aquí que está acá tiene una preimagen. Este también. Y este de acá, que se escribe como la suma, va a tener también una preimagen…

[Ent-203] **Pero ese ¿es uno de estos?**

[E18-203] ¿Este?

[Ent-204] **Porque estos originalmente…**

[E18-204] ¿Este? No necesariamente. No po, no es uno de estos, porque se construye con un alfa y un beta y sumando.

[Ent-205] **Ajá.**

[E18-205] Entonces este de aquí no está acá po. Entonces los que puedo… Sí es LI. Es LI.

[Ent-206] **¿Ya es LI? ¿Segura? Ja ja ja ja. ¿Segura pero con duda?**

[E18-206] …Es que este no lo puedo formar po. Entonces… Sí, segura.

[Ent-207] **Ya. Vamos al otro, al B. Entonces si quieres escribes la respuesta. ¿La A era sí?**

[Escribe.]

[Ent-208] **La otra. La B, ¿qué dice la B?**

[E18-208] Si A es LI.

[Ent-209] **Dieron vuelta la historia.**

[E18-209] A ver. Mh. Pero el A vuelve a… Ah, esos son elementos.
Puedo escribir cero muchas veces cero. No creo que sea necesario que sea LI.

[Ent-210] **Ya, o sea tu respuesta es no.**

[E18-210] No.

[Ent-211] **Y esa está como más rápida, ¿o no?**

[E18-211] Sí.

[Ent-212] **Ya, escríbelo, vamos.**

[E18-212] Ya. C. Si B genera a W, ¿debe A generar a V? Uuh. B genera a W. Entonces, A genera a W. [Piensa en voz alta] La base genera… La base es un generador que además es LI. O sea, genera todo el conjunto y lo que está…

[Ent-213] **¿La base es un generador?**

[E18-213] Sí, son linealmente independientes. Pero que B genera a W no está diciendo que es base, entonces no necesariamente es LI.

[Ent-214] **Ajá.**

[E18-214] Ya. Entonces si B genera a W, ¿A genera a V? [Piensa en voz alta] Y este genera todo el conjunto, o sea puedo pintar… Pero no sé si ese conjunto B de aquí es LI. Porque si fuera LI…

[Ent-215] **Según el primero…**

[E18-215] Este sería LI y tendría que generar todo.

[Ent-216] **Ajá.**

[E18-216] Pero no sabemos si es LI.

[Ent-217] **¿Entonces tu respuesta es?**

[E18-217] Está dudoso.

[Ent-218] **Está dudoso.**

[E18-218] Bueno, sí, como cualquiera…

[Ent-219] **Ja ja ja.**

[E18-219] Bueno, sí, a ver, ya… [Piensa, revisa] ¿Qué pasaría, a ver, si aquí hubiera un elemento que fuera LD?, o sea, que esto de aquí lo formara como esto de aquí y esto de acá. ¿Pero generará todo esto? ¿Puede generar siendo no LI?

[Ent-219] **Sí.**

[E18-220] ¿Sí?

[Ent-221] **Sí se puede.**

[E18-221] Ah.

[Ent-222] **Eso sí.**

[E18-222] Habíamos visto esto…

[Ent-223] **Ya.**

[E18-223] Algo que si había una base… Una base siempre iba a contener un generador… Como que un generador y una base, algo había… De contención.

[Ent-224] **Ya. Lo que pasa es que una base es el conjunto mínimo…**

[E18-224] Mínimo que genera todo el espacio, sí.

[Ent-225] **Por lo tanto un conjunto generador siempre contiene una base.**

[E18-225] Ah, verdad. Entonces…

[Ent-226] **Entonces si quieres que te recuerde una parte de eso que tú estás citando, te cito la teoría.**

[E18-226] Sí. Ah, verdad. La base es lo más chico y es lo que genera… Ya, entonces volviendo a esto. Si ese fuera LI, lo puedo formar con… Qué pasa acá. Es una transformación, entonces este va para aquí, eso va para ahí, eso para allá… Sí, porque tienen la misma cantidad. Este es imagen de los elementos que están aquí en A. Entonces este conjunto de acá…

[Ent-227] **¿Genera?**

[E18-227] Genera. Esa es la pregunta, ja ja. [Trabaja, piensa] Sí.

[Ent-228] **¿Sí?**

[E18-228] Sí.

[Ent-229] **¿Por qué?**

[E18-229] Es que… A ver… Es que si este fuera LD y genera todo el conjunto, pero este de aquí puede que sea LI po.

[Ent-230] **Puede que no.**

[E18-230] Puede que no. Pero si… A ver. Pero si fuera LI y además tiene elementos que están contenidos en V, yo lo voy a poder generar. ¿Sí? Porque si tiene segmentos y todos ellos son LI yo puedo multiplicarlo por escalares, y como están contenidos en V puedo generar B…

[Ent-231] **Te puedes hasta pasar…**

[E18-231] Sí.

[Ent-232] **Ja ja ja.**

[E18-232] Eh… Está complicada la pregunta.

[Ent-233] **Está complicada la pregunta parece… Es inocente la pregunta.**

[E18-233] Sí.

[Ent-234] **¿Y la otra, la D?**

[E18-234] O sea, el mismo caso de la otra.

[Ent-235] **Por eso… La D a lo mejor, un ataque a la D hace que la vida tome más luces…**

[E18-235] Si A genera.

[Ent-236]-Ahora si A genera.

[E18-236] A ver. Si A genera. Es una transformación que va de aquí hasta acá. Entonces si A está generando a todo V, a cada punto que hay aquí en V le va a corresponder un punto en W. Entonces sí, sí genera a W.

[Ent-237] **¿Seguro?**

[E18-237] Lo voy a pensar nuevamente por si acaso.

[Ent-238] **Para estar segura hay que asegurarse.**

[E18-238] Sí. Si este era LI, este tenía que ser LI.

[Ent-239] **Son tus conclusiones.**

[E18-239] Sí. Mi conclusión. Si este era LI este de acá también tenía que ser LI, porque si tomaba aquí elementos como LD, esa imagen nunca iba a estar acá, entonces iba a haber una… Pero si este es LI no necesariamente este de aquí es LI, porque… Pero si este genera, y si lo mando todo a cero no va a generar nada.

[Ent-240] **Aahhh. Menos mal que hubo un repaso ahí.**

[E18-240] Sí. Entonces sí genera.

[Ent-240] **Ja ja ja…**

[E18-241] Hay que convencerse de que sí genera. Ya: B genera a W. El B genera. Si esta es LI esta también tiene que ser LI. Sí, porque… Entonces si este genera a W, ¿A debe generar a V? …Es que si fuera LI, mandaría algunos elementos de acá que fueran LI, y como está generando aquí todos los puntos de aquí también va a tener los puntos acá y los voy a generar. Entonces si B genera a W y además es LI, esa es una base, lo que generaría W.

[Ent-241] **Pero si B es una base…**

[E18-241] Si es LI.

[Ent-242] **Si es LI, entonces tú me dices que sí.**

[E18-242] Sí.

[Ent-243] **Pero si no es LI…**

[E18-243] Esa es la pregunta. A ver, si B es LD, ¿qué pasa? Sé que genera, entonces tengo todo esto cubierto a través de estos elementos que están aquí. Pero si este lo escribo como eso, igual voy a poder generar todo el conjunto que tengo acá. Y con la imagen de acá tengo una transformación de no tener una preimagen acá. Quizá estos dos van a dar… No. [Piensa en voz alta] Creo que sí…, pero por qué…

[Ent-244] **…Entonces hay que agregar una cartita…, ¿cierto?**

[E18-244] ¿Por qué?

[Ent-245] **Una cartita aclaratoria.**

[E18-245] Sí.

[Ent-246] **A lo mejor una cartita aclaratoria podría decir algo. Veamos esa cartita aclaratoria. Esa ya estaba doblada, ya había pasado**

[E18-246] Sí. Eh, consideremos T que va de R2 transformación líneal y dos conjuntos. Ah, aquí está. Y B que está contenida en R2. Voy a hacer mis dibujos. Esta es A, que tiene (2, 0) y (0, 1) y es LI. Ah, esa es LI. Y esta de acá es (0, 5, 0) y (0, 1) a R2. [Piensa en voz alta, escribe] El T es (0, 5, 0) y el T… Con esto puedo armar la transformación.

[Ent-247] **Claro.**

[E18-247] Con lo que me mande…

[Ent-248] **Con todo lo que tú repasaste y reconstruiste.**

[Trabaja. Piensa en voz alta]

[Ent-249] **Pero ahora mira lo que te pregunta.**

[E18-249] Sí. Me están preguntando…

[Ent-250] **Sí, pero tú asociaste que en realidad hay mucha mala intención en todo.**

[E18-250] Si A genera a R2. Esto lo genera todo, todo. En este caso, ¿B genera a R2? Dice que no. Lo puedo escribir como combinación de los elementos de la otra. Yo creo que sí.

[Ent-251] **Tú argumentaste ya que sí, ¿te acuerdas?, lo argumentaste.**

[E18-251] Ah, sí. Argumenté que cuando este era LI ese también iba a ser LI.

[Ent-252] **Ya. ¿Y ahora? Si el conjunto A es…**

[E18-252] Linealmente independiente. Sí, sí es linealmente independiente. ¿B es linealmente independiente? O sea, este B sí es linealmente independiente. Eeh, ¿es un isomorfismo? Sí, porque este es una base y este también po. Entonces puede generar todo el conjunto. Acá tengo esta T. Puedo calcular la asociada y si el determinante es distinto a cero estoy lista.

[Ent-253] **Ya. Y ahora que aclaraste con un ejemplo concreto, ¿qué podrías hacer**

en este que te ofrece dudas? A lo mejor R2 no es el mejor espacio…

[E18-253] Mh.

[Ent-254] **Mh. Porque te queda una sola cosa pendiente ahí.**

[E18-254] No sé por qué pensé en las matrices. Las matrices son raras.

[Ent-255] **¿Sí? ¿Las encuentras raras?**

[E18-255] O sea, es que como tienen divisiones de cero…

[Ent-256] **Ja ja ja.**

[E18-256] Son especiales. No conmutan. Sin cosas interesantes… Entonces, ya. Si este es LI, ese tiene que ser LI. Si ese es LI, ese no necesariamente tiene que ser LI. Lo mandamos al cero. Es transformación lineal todo el rato.

[Ent-257] **Perfecto.**

[E18-257] Y no genera nada tampoco.

[Ent-258] **Ya.**

[E18-258] Entonces ahí, si ese genera, este no necesariamente tiene que generar, porque lo mandamos al cero y el cero no genera.

[Ent-259] **¿Nada?**

[E18-259] Entonces, si ese genera W y es LI, entonces este también va a ser LI y va a generar… O sea, ese también va a generar.

[Ent-260] **Claro.**

[E18-260] Preguntan si ese es LD, que genere esto. Que va a generar allá. Pero es que no va a ser base aquí. Si es LD genera, no es base. Entonces… Hay algo raro.

[Ent-261] **Hay algo raro. ¿Pero por qué no va a ser base? ¿Por qué le sobra gente o porque le falta gente?**

[E18-261] Porque le sobra gente.

[Ent-262] **Ya. Ese es un buen principio.**

[E18-262] Sí. Le sobra gente. Y eso me hace pensar que si tenemos esos elementos, son LD y están generando… Quizá me generan hasta más afuera. Como tienen más gente.

[Ent-263] **No.**

[E18-263] Porque dice que genera W.

[Ent-264] **W no. Pero ¿qué puede pasar con sus tres imágenes de acá? Porque no te dijeron que la dimensión del B y del W es la misma. Era un conjunto.**

[E18-264] Sí, me dijeron que eran iguales.

[Ent-266] **No. Te dieron la misma cantidad de elementos en los conjuntos.**

[E18-266] En lo que está dentro de ellos. Pero este puede ser más chico.

[Ent-267] **O más grande.**

[E18-267] O puede ser más grande. Entonces, está ahí.

[Ent-268] **Ahí está.**

[E18-268] -Está ahí. Está diciendo "aquí estoy, aquí estoy, ¿cómo no me ves?". A ver…

[Ent-269] **Hace señas.**

[E18-269] Hace señas, sí. Dice "mírame". Ya, si es LD y estamos generando todo, entonces si estos de acá son LD quiere decir que ese punto…

[Ent-270] **Quizás con dimensión dos no te convengan los dos. Los encuentro un poquito más gorditos.**

[E18-270] El doble de F3, o quizás más.

[Ent-270] **Mh.**

[E18-270] Vamos a ver si este tiene… A ver, W tiene dimensión cuatro.

[Ent-270] **Ya.**

[E18-271] Y este conjunto de acá que es LD.

[Ent272] **Pero genera.**

[E18-272] Pero genera. O sea, puede tener… Tiene que… ¿Qué dimensión tiene que tener?

[Ent-273] **O sea, si tú quieres que lo cubra todo, puede tener lo mínimo cuatro…**

[E18-273] Cinco.

[Ent-274] **Ya.**

[E18-274] Ya, entonces puede tener cuatro de ahí o de ahí para arriba, cinco, seis, siete, pero la idea es que sean cuatro…

[Ent-275] **Por lo menos tiene cuatro y de ahí, y de ahí. Ya. ¿Ahora qué dimensión podrías darle del D?**

[E18-275] Si es más grande… No, tiene que… Que sea más chico, eso lo va a hacer interesante.

[Ent-276] **¿Sí? ¿Tú crees que eso lo va a hacer interesante?**

[E18-276] Es que si es más grande…

[Ent-277] **¿Qué pasa si es más grande? A ver, cuéntame.**

[E18-277] Quizás no lo llene todo po. Porque aquí tengo sólo cuatro LI. Entonces los que son LI aquí tengo que llevarlos a vectores LI allá po.

[Ent-278] **Ya.**

[E18-278] Entonces si tengo cuatro LI aquí sí o sí tengo que tener cuatro LI para que poder generarlos. Acá también tendría que tener cuatro LI.

[Ent-279] **O sea que para que fuese falso, ¿qué dimensión tendría que tener B según ese ejemplito que tú estás dando?**

[E18-279] Para que fuese falso.

[Ent-280] **Ajá.**

[E18-280] A ver, si B tiene dimensión cinco…, ¿qué pasa?

[Ent-281] **Claro, ahora la pregunta es: si B tiene dimensión cinco y W tiene dimensión cuatro, ¿es posible que haya una transformación lineal de algo de dimensión cinco a uno de dimensión cuatro?**

[E18-282] Eeeh, en un ejemplo vimos que sí, pero que hubo que ver si es que se puede. Pero que justo al aplicarla a uno de estos nos mandaba al cero…

[Ent-283] **Entonces, ¿se puede o no se puede?, ¿si B genera a W, A genera a B?**

[E18-283] Pero este son cuatro y para generar a B necesito cinco.

[E18-284] No se puede.

[E18-285] Cómo, ahí está. ¡No se puede!

[Ent-286] **Te hacía señas pero con luces, te tiraba fuegos artificiales, estaba que saltaba de la hoja.**

[Ent-287] **Estaba que saltaba de la hoja…**

[E18-287] Tuve que volver a decir lo que vi. Me gustó este.

[Ent-289] **Yap. Con esto terminamos.**

[E18-290] ¿Sí?

[Ent-291] **Muchas gracias.**

[E18-292] De nada.

[Ent-293] **Muchas, muchas gracias. Tú no sabes cómo… ¿Dónde apago esto ahora? Porque yo soy mandada a hacer… Aquí.**

ANEXO 2: RESPUESTAS DE ESTUDIANTES A CUESTIONARIO.

I.- Respuestas de estudiante E1 al cuestionario. Interpretación Funcional del concepto Transformación Lineal.

1 E1

1.-. Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre K; determine en cada caso la imagen del vector v

a.) $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x, y) \to x + yi \end{array}$, donde $v=(1,0)$

$Si\ v = (1,0)$

$(1,0) \to 1 + 0i = 1$

b.) $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2 + bx + c \to (a,b,c,1) \end{array}$, donde $v = x^2 + 3$.

$Si\ v = x^2 + 3$

$v = 1x^2 + 0x + 3 \to (1,0,3,1)$

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso si f es una transformación lineal.

a.) $f : R^2 \to \mathbb{C}$

$(x, y) \to x + yi$

Si es T.L.

$(0,0) \to 0$

$\alpha(x,y) \to$

$(\alpha x, \alpha y) \to \alpha x + \alpha y i$

¿Qué se entiende por T.L?
está el cero
suma y multiplicación
por escalar

b.) $f : P_2[x] \to R^4$

$ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1)$

~~Si es T.L.~~

$0x^2 + 0x + 0 \to (0,0,0,1)$

No, ya no es T.L pues la imagen del 0 no es cero

3. Considere la función $f: R^3 \to R^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(e^{2x+3y}, z\right)$

¿La imagen del vector (1,2,1) es igual a la imagen de 1(10,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.

Imagen vector (1,2,1) es $(e^{2+6}, 1) =$

$(e^{8}, 1)$

Imagen vector $1(10,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$(10,0) + (0,2,0) + (0,0,1)$

$(10,0) + (0,2,1)$

no se pueden sumar pues uno está en $\mathbb{R}^2$ y otro en $\mathbb{R}^3$

$\therefore$ Las imagenes son distintas

4. Considere f transformación lineal de $\boldsymbol{R}^2 en\ \boldsymbol{R}^2$, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

a) $f(1,1)=(-5,3)$
b) $f(-1,1)=(5,2)$

Podría ser que a) $f(x,y)=(-5x,3y)$
y b) $f(x,y)=(-5x,2y)$
pero no tienen la misma T.L.

No encuentro ninguna combinación posible

5.- Considere el espacio vectorial R^+ donde la suma y multiplicación por escalares se definen así:

$a + b$ es el producto de a y b,

$r \cdot a$ es la r-ésima potencia de a.

Verifique que la función logaritmo natural, ln: $R^+ \to R$ es una transformación lineal para estos espacios vectoriales reales.

¿Y el cero?

¿$\ln(0) = 0$?

c.) $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ x \to (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$, donde $v = 2\pi$

$v = 2\pi$

$2\pi \to (\sin(2\pi), 1-\cos 2\pi)$

d.) $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$, donde $v = (0,0,1)$

$v = (0,0,1)$

$(0,0,1) \to (e^{2\cdot 0+3\cdot 0}, 1)$

$(e^0, 1)$

$(1, 1)$

c.) $f: R \to R^2$

$x \to (\sin x, 1-\cos x)$

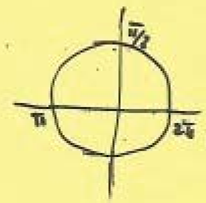
~~No es TL.~~ Si es T.L.

$0 \to (\sin 0, 1-\cos 0)$

$(0, 0)$

$\alpha(x+y) \to (\alpha x + \alpha y)$

$\to (\sin \alpha x, 1-\cos \alpha y)$



d.) $f: R^3 \to R^2$

$(x, y, z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right)$

No es TL

pues $(0,0,0) \to (e^0, 0)$

$(1,0)$ no está el cero

II.- respuestas de estudiante E2 al cuestionario. Interpretación Funcional del concepto Transformación Lineal.

2 E3

1.-. Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso la imagen del vector v

a.) $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to x+yi \end{array}$, donde $v=(1,0)$

$(1,0) \rightsquigarrow 1+0i$

Imagen $:= 1+0i$

b.) $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2+bx+c \to (a,b,c,1) \end{array}$, donde $v=x^2+3$.

$1 \cdot x^2+3 \rightsquigarrow (1,0,3,1)$

Imagen $:= (1,0,3,1)$

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso si f es una transformación lineal.

a.) $f : R^2 \to \mathbb{C}$

$(x, y) \to x + yi$

b.) $f : P_2[x] \to R^4$

$ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1)$

3. Considere la función $f: R^3 \to R^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(e^{2x+3y}, z\right)$

¿La imagen del vector (1,2,1) es igual a la imagen de 1(10,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es base canónica de $\mathbb{R}^3$, luego $\forall v \in \mathbb{R}^3$,

$$v = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$$

Como $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$(1,2,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$$

luego para que ésto ocurra, debe ocurrir que $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 1$ entonces:

$$(1,2,1) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) \quad \blacksquare$$

Verdadero.

4. Considere f transformación lineal de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(1,1) \rightsquigarrow (-5,3)$$
$$(-1,1) \rightsquigarrow (5,2)$$

Si se puede determinar, Hallando la transformación Lineal.

$$\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(-5,3)$$
$$\cancel{(\alpha+\beta)=}$$
$$(\cancel{\alpha},\cancel{\beta})=(-5,3)$$

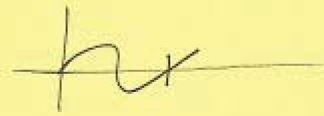
$$\cancel{\alpha(1,0)+\beta(0,1)=\alpha(-1,0)+\beta(0,1)}$$

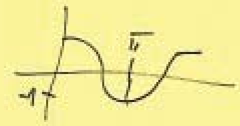
5.- Considere el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^+$ donde la suma y multiplicación por escalares se definen así:

$a + b$ es el producto de a y b,

$r \cdot a$ es la r-ésima potencia de a.

Verifique que la función logaritmo natural, ln: $\boldsymbol{R}^+ \rightarrow \boldsymbol{R}$ es una transformación lineal para estos espacios vectoriales reales.





c.) $\begin{aligned} f &: R \to R^2 \\ x &\to (\sin x, 1 - \cos x) \end{aligned}$, donde $v = 2\pi$

$$2\pi \rightsquigarrow (\operatorname{sen}(2\pi), 1 - \cos(\pi))$$
$$= (0, 1 - (-1))$$
$$= (0, 2)$$

Imagen := $(0, 2)$

d.) $\begin{aligned} f &: R^3 \to R^2 \\ (x, y, z) &\to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{aligned}$, donde $v = (0, 0, 1)$

$$(0,0,1) \rightsquigarrow \left(e^{2\cdot 0 + 3\cdot 0}, 1\right)$$
$$= (1, 1)$$

Imagen := $(1, 1)$

c.) $$f: R \to R^2$$
$$x \to (\sin x, 1 - \cos x)$$

d.) $$f: R^3 \to R^2$$
$$(x, y, z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right)$$

III.- Respuestas al cuestionario de estudiante E9. Interpretación Funcional del concepto Transformación Lineal.

E9

3

1.-. Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre K; determine en cada caso la imagen del vector v

a.) $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x, y) \to x + yi \end{array}$, donde $v=(1,0)$

$f(1,0) = 1 + 0 \cdot i = 1$

b.) $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1) \end{array}$, donde $v = x^2 + 3$.

$f(x^2 + 3) = (1, 0, 3, 1)$

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K;** determine en cada caso si f es una transformación lineal.

a.) $f : R^2 \to$ □

$(x, y) \to x + yi$

b.) $f : P_2[x] \to R^4$

$ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1)$

3. Considere la función $f: R^3 \to R^2$ definida por $f(x,y,z)=\left(e^{2x+3y}, z\right)$

¿La imagen del vector (1,2,1) es igual a la imagen de 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.

$$f(1,2,1) = \left(e^{2\cdot 1+3\cdot 2}, 1\right) = \left(e^{8}, 1\right)$$

$$1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)$$
$$=(1, 2, 1)$$

las imágenes son iguales.

4. Considere f transformación lineal de $\boldsymbol{R}^2$ *en* $\boldsymbol{R}^2$, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

Como $\{(-5,3), (5,2)\}$ es L.I., y su dimensión e[s]

es base de $\mathbb{R}^2$.

Luego, por teorema fundamental del álgebra lineal, existe una única transformación lineal de

$\mathbb{R}^2 \to \langle (-5,3), (5,2) \rangle$

5.- Considere el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^+$ donde la suma y multiplicación por escalares se definen así:

$a + b$ es el producto de a y b,

$r \cdot a$ es la r-ésima potencia de a.

Verifique que la función logaritmo natural, $ln: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ es una transformación lineal para estos espacios vectoriales reales.

$a+b = a \cdot b$

$r \cdot a = a^r$

$\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\therefore$ ln es transformación lineal.

c.) $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ x \to (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$, donde $v = 2\pi$

$$f(2\pi) = (\sin 2\pi,\ 1-\cos(2\pi))$$
$$= (0,\ 1-1) = (0,0)$$

d.) $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$, donde $v = (0,0,1)$

$$f(0,0,1) = \left(e^{2\cdot 0+3\cdot 0},\ 1\right)$$
$$= \left(e^{0}, 1\right) = (1,1)$$

c.) $$f: R \to R^2$$
$$x \to (\sin x, 1-\cos x)$$

d.) $$f: R^3 \to R^2$$
$$(x, y, z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right)$$

IV.- Respuestas al cuestionario de estudiante E18. Interpretación Funcional del concepto Transformación Lineal.

2.

1.-. Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso la imagen del vector v

a.) $f : R^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \to x + yi$, donde $v=(1,0)$

$f(1,0) = (1, 0 \cdot i)$

$= (1,0)$ → Imagen del vector V.

b.) $f : P_2[x] \to R^4$, $ax^2 + bx + c \to (a,b,c,1)$, donde $v = x^2 + 3$.

$f(ax^2 + bx + c) = (a, b, c, 1)$

$f(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 3) = (1, 0, 3, 1)$ → Imagen del vector c.) $f : R \to R^2$

$x \to (\sin x, 1 - \cos x)$

d.) $f : R^3 \to R^2$

$(x, y, z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right)$

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso si f es una transformación lineal.

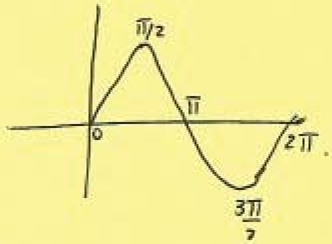
a.) $f : R^2 \to \mathbb{C}$

$(x, y) \to x + yi$

b.) $f : P_2[x] \to R^4$

$ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1)$

c.) $\begin{array}{l} f: R \rightarrow R^2 \\ x \rightarrow (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$, donde $v = 2\pi$

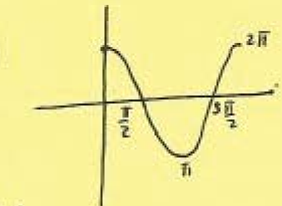


$f(x) = (\text{sen } x,\ 1-\cos x).$

$f(2\pi) = (\text{sen}(2\pi),\ 1-\cos(2\pi))$

$= (0,\ 1-1)$

$= (0,0)$ → Imagen del vector.



d.) $\begin{array}{l} f: R^3 \rightarrow R^2 \\ (x,y,z) \rightarrow \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$, donde $v = (0,0,1)$

$f(x,y,z) = \left(e^{2x+3y},\ z\right)$

$f(0,0,1) = \left(e^{2\cdot 0+3\cdot 0},\ 1\right)$

$= \left(e^{0},\ 1\right)$

$= (1,1)$ → Imagen del vector.

3. Considere la función $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(e^{2x+3y}, z\right)$

¿La imagen del vector (1,2,1) es igual a la imagen de 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.

El vector (1,2,1) se escribe como la siguiente combinación lineal en la base canónica.

$$1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

que es lo que tenemos en el enunciado.

Por lo tanto la imagen será la misma, la que es:

$$f(1,2,1) = \left(e^{2+6}, z\right)$$
$$= \left(e^{8}, 1\right).$$

5.- Considere el espacio vectorial R^+ donde la suma y multiplicación por escalares se definen asi:

$a + b$ es el producto de a y b,

$r \cdot a$ es la r-ésima potencia de a.

Verifique que la función logaritmo natural, $ln: R^+ \rightarrow R$ es una transformación lineal para estos espacios vectoriales reales.

4. Considere f transformación lineal de R^2 en R^2, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

$f(1,1) = (-5,3)$ $\quad T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(-1,1) = (5,2)$

* Si se puede porque nos enseñaron un procedimiento, que intentare recordar.

$f(a,b) = (-x,y) \wedge f(-a,b) = (x,y-1)$.

V.- Respuestas al cuestionario de estudiante E16. Interpretación Funcional del concepto Transformación Lineal.

(1)

1.-. Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre K; determine en cada caso la imagen del vector v

a.) $\begin{array}{l} f: R^2 \to \mathbb{C} \\ (x,y) \to x+yi \end{array}$, donde $v=(1,0)$

$(1,0) \longrightarrow 1 + 0 \cdot i = 1$

b.) $\begin{array}{l} f: P_2[x] \to R^4 \\ ax^2+bx+c \to (a,b,c,1) \end{array}$, donde $v = x^2+3$.

$x^2+3 \longrightarrow (1,0,3,1)$

2.- Considere las funciones definidas del espacio vectorial V al espacio vectorial W sobre **K**; determine en cada caso si f es una transformación lineal.

a.) $f : R^2 \to \mathbb{C}$
$(x, y) \to x + yi$

Si es transformación lineal se debe cumplir:

i) $f(0,0) = 0 + 0i$ [~~vector nulo~~]

ii) $f($ ← (era algo de la suma pero no recuerdo).

iii) $\alpha f(x,y) = f(\alpha x, \alpha y)$

b.) $f : P_2[x] \to R^4$
$ax^2 + bx + c \to (a, b, c, 1)$

no es transformación lineal.

pues no cumple con:

$f(0x^2 + 0x + c) \longrightarrow (0,0,0,0)$

ya que $f(0x^2 + 0x + c) = (0,0,0,1)$

3. Considere la función $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=\left(e^{2x+3y}, z\right)$

¿La imagen del vector (1,2,1) es igual a la imagen de 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)? Justifique su respuesta.

~~Si son iguales pues son linealmente dependientes, es decir:~~

~~(1,2,1) = α(1,0,0) + β(0,1,0) + γ(0,0,1)~~

~~donde α=1, β=2, γ=1~~

Si ~~son~~ iguales, pues 1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1) es la descomposición del vector (1,2,1) en su base canónica, es decir, es el mismo vector.

5.- Considere el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^+$ donde la suma y multiplicación por escalares se definen así:

$a + b$ es el producto de a y b,

$r \cdot a$ es la r-ésima potencia de a.

Verifique que la función logaritmo natural, $ln: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ es una transformación lineal para estos espacios vectoriales reales.

No sé cómo se hace.

4. Considere f transformación lineal de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$, talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. ¿Es posible determinar $f(1,2)$?. Si su respuesta es afirmativa calcule su valor.

Sé que es posible, pero no recuerdo bien en estos momentos cómo se hacía.

$f(1,1) = (-5,3)$ $\qquad (-5,3) = -5(1,0) + 3(0,1)$

$f(-1,1) = (5,2)$ $\qquad (5,2) = 5(1,0) + 2(0,1)$

$f(1,2) = (?,?)$

$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \;/ f$

$f(1,1) = 1f(1,0) + 1f(0,1) = (-5,3)$

c.) $\begin{array}{l} f: R \to R^2 \\ x \to (\sin x, 1-\cos x) \end{array}$, donde $v = 2\pi$

$$2\pi \to (\text{Sen}\, 2\pi, 1 - \text{Cos}\, 2\pi) = (0, 0)$$

d.) $\begin{array}{l} f: R^3 \to R^2 \\ (x, y, z) \to \left(e^{2x+3y}, z\right) \end{array}$, donde $v = (0, 0, 1)$

$$(0,0,1) \to \left(e^{2\cdot 0 + 3\cdot 0}, 1\right) = (e^0, 1) = (1, 1)$$

c.) $f: R \to R^2$
$x \to (\sin x, 1-\cos x)$

$f(0) = (0, 0)$ ✓

d.) $f: R^3 \to R^2$
$(x, y, z) \to (e^{2x+3y}, z)$

$f(0,0,0) = (1,0)$ ∴ no es transformación lineal.

VI.- Respuestas al cuestionario de estudiante E1. Interpretación Matricial del concepto Transformación Lineal.

E1

2

1.- Sea $T: R^2 \to R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x+y, x-y, x)$, considere $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

$T(x,y) = (x+y, x-y, x)$

$T(2,1) = (3, 1, 2)$

luego la imagen de (2,1) en C_3 es

$3(1,0,0),\ 1(0,1,0),\ 2(0,0,1)$

2.- Sea $T: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x + y - z, x + z)$, considere $B_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ base de $\boldsymbol{R}^3$ y $B_2 = \{(1,1), (0,1)\}$ base de $\boldsymbol{R}^2$.

Determine $\underbrace{\left[T(2,1,0)\right]_{B_2}}$.

No recuerdo que era esto...

3.- Sea $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a+b-c,\ d)$.

Considere $B_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$ y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

Determine $[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)]_{B_2}$.

Lo mismo que la pregunta Anterior

4.- Considere la transformación lineal T definida por $T(ax^2+bx+c)=(a+ c, a-b, b)$, desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos) a* $\boldsymbol{R}^3$.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4=\{x^2,x^2+x, x^2+x +1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y $\boldsymbol{R}^3$ respectivamente.

No se que es la matriz asociada, no recuerdo

5.- Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}$; donde $B=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ y $B'=\{x^2, x+1\}$ bases para los sub- espacios de partida y llegada respectivamente.

Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$.

VII.- Respuestas al cuestionario de estudiante E3. Interpretación Matricial del concepto Transformación Lineal.

(1) E3

1.- Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x+y, x-y, x)$, considere $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

$T(2,1) = (3, 1, 2)$

$3(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$

~~Coordenadas := (3,1,2)~~

$$[T(2,1)]_{C_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.- Sea $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b-c,\ d)$.

Considere $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$ y $B_2 = \{(1,1), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

Determine $\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}$.

$$\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2} = \left[(a+b-c,\ d)\right]_{B_2} = \cancel{\begin{bmatrix} a+b-c \\ c \end{bmatrix}}$$

$$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$

$$(a+b-c, d) = (\alpha, \alpha+\beta)$$

i) $\alpha = a+b-c$

ii) $\alpha + \beta = d \Rightarrow a+b-c+\beta = d$

$\cancel{a+b-c=d} \Rightarrow \beta = d-a-b+c$

Luego $T\left[(a+b-c, d)\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ (c+d)-(a+b) \end{bmatrix}$

2.- Sea T: $\boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x + y - z, x + z)$, considere $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de $\boldsymbol{R}^3$ y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de $\boldsymbol{R}^2$.

Determine $\left[T(2,1,0)\right]_{B_2}$.

$$T(2,1,0) = (3, 2)$$

$$\left[T(2,1,0)\right]_{B_2} = \left[(3,2)\right]_{B_2}$$

$$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$

$$(3,2) = (\alpha, \alpha + \beta)$$

$$3 + \beta = 2$$

$$\beta = -1$$

Luego $\left[(3,2)\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4.- Considere la transformación lineal T definida por $T(ax^2+bx+c)=(a+c,\ a-b,\ b)$, desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos) a* $\mathbf{R}^3$.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

$$T: \mathbb{P}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$ax^2+bx+c \rightsquigarrow (a+c,\ a-b,\ b)$$

$$\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\} \rightsquigarrow \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$[F]_B^{B'} = \left[[T(u_1)]_{B'} \; [T(u_2)]_{B'} \right]$$

5.- Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \{\overset{u_1}{(1,0,0,1)}, \overset{u_2}{(0,1,1,0)}\}$ y $B' = \{x^2, x+1\}$ bases para los sub- espacios de partida y llegada respectivamente.

Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$V = 2(1,0,0,1) + 3(0,1,1,0)$

$\underline{V = (2,3,3,2)}$

$T: \langle (1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \longrightarrow \langle x^2, x+1\rangle$

$1,0,0,1 \rightsquigarrow x^2$

$0,1,1,0 \rightsquigarrow$

VIII.- Respuestas al cuestionario de estudiante E9. Interpretación Matricial del concepto Transformación Lineal.

(2)

1.- Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x+y, x-y, x)$, considere $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

$$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2) = (3,1,2)$$

$$[(3,1,2)]_{C_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.- Sea T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x+y-z, x+z)$, considere $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de $\mathbf{R}^3$ y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbf{R}^2$.

Determine $\left[T(2,1,0)\right]_{B_2}$.

$$T(2,1,0) = (2+1-0, 2+0)$$

$$= (3, 2)$$

$$\left[T(2,1,0)\right]_{B_2} = \left[(3,2)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad 3(1,1) + -2\cdot(0,1) = (3,2)$$

3.- Sea $T: M_2(R) \to R^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b-c, d)$.

Considere $B_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_2(R)$ y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2.

Determine $\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}$.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$$

$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[(a+b-c, d)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{pmatrix}$$

4.- Considere la transformación lineal T definida por $T(ax^2+bx+c)=(a+c,\ a-b,\ b)$, desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos)* a $\mathbf{R}^3$.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

$$\cancel{[(a+c,\ a-b,\ b)]_{B_5} = \begin{pmatrix} a+c \\ c-b \\ b \end{pmatrix}}$$

$(a+c)(1,1,0)+\ \ldots$

error!

esto son las coordenadas de T

~~No se puede~~

$T(x^2) = (1,1,0)$

$T(x^2+x) = (1,0,1)$

$T(x^2+x+1) = (2,0,1)$

$[(1,1,0)]_{B_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[(1,0,1)]_{B_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[(2,0,1)]_{B_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[T(ax^2+bx+c)]_{B_4}^{B_5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \rightarrow \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ y $B' = \{x^2, x+1\}$ bases para los sub- espacios de partida y llegada respectivamente.

Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$[T(u)]_{B'} = [u]_B \cdot [F]_B^{B'}$$

$$[T(u)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+6 \\ 0+24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

IX.- Respuestas al cuestionario de estudiante E18. Interpretación Matricial del concepto Transformación Lineal.

1.

1.- Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y)=(x+y, x-y, x)$, considere $C_2=\{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (x+y, x-y, x)$

$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2)$

$= (3, 1, 2) \rightarrow$ Imagen del vector (2,1).

Busco los escalares en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$(3,1,2) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$= (\alpha, \beta, \gamma)$

$\therefore \alpha = 3, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2.$

No era necesario el buscar los escalares ya que se utiliza la base canónica.

Luego, la imagen del vector (2,1) en la base C_3 es (3,1,2).

a) $(2,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1)$

$= (\alpha+\beta+\gamma\,,\ \beta+\gamma\,,\ \gamma) \Rightarrow \gamma = 0$

$\Rightarrow \beta = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 1$

2.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z)=(x+y-z,\ x+z)$, considere $B_1=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de R^3 y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2.
Determine $\left[T(2,1,0)\right]_{B_2}$.

b) $\left[T(2,1,0)\right]_{B_2} = \left[(2+1-0\,,\ 2+0)\right]_{B_2}$

$= \left[\ 3,2\ \right]_{B_2}$

$(2,1,0) = 1(1,0,0)+1(1,1,0)+0(1,1,$

Luego, busco los escalares en la base B_2.

$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$

$= (\alpha\,,\ \alpha+\beta)$

Hago un sistema

1) $\boxed{\alpha = 3}$

2) $\alpha + \beta = 2 \Rightarrow 3 + \beta = 2$

$\boxed{\beta = -1}$

Luego,

$$\left[T(2,1,0)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) No me acuerdo muy bien, pero vi si $(2,1,0)$ se podía escribir como una combinación lineal de la base B_1, así comprobé que ese vector pertenecía.

b) Desarrollé, .

3.- Sea $T: M_2(R) \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c,\ d)$.

Considere $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $M_2(R)$ y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2.

Determine $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $a = \alpha+\beta+\gamma+\rho$; como $\boxed{c=\rho}$.

$b = \beta+\gamma+\rho$; $d = \gamma + c$

$c = \rho$; $\boxed{d-c=\gamma}$

$d = \gamma+\rho$

Luego $b = \beta + d - \cancel{c} + \cancel{c}$

$\boxed{b-d=\beta}$

Luego $a = \alpha + b - \cancel{d} + \cancel{d} - \cancel{c} + \cancel{c}$

$\boxed{a-b=\alpha}$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b-d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d-c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[a+b-c,\ d\right]_{B_2}$$

$$(a+b-c,\ d) = \delta(1,1) + \varepsilon(0,1).$$
$$= (\delta,\ \delta+\varepsilon)$$

Luego $\boxed{a+b-c=\delta}$

$d = \delta+\varepsilon$ $\Rightarrow$ $d = a+b-c+\varepsilon$

$\boxed{d-a-b+c=\varepsilon}$

$$\boxed{\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{pmatrix}}$$

5.- Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ y $B'=\{x^2, x+1\}$ bases para los sub- espacios de partida y llegada respectivamente.

Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$[V]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2(1,0,0,1) + 3(0,1,1,0)$
$= (2,3,3,2) \to$ vector

$[F]_B^{B'} \cdot [V]_B = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$
$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 2 + 8\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

* Existía un teorema que nos daba los escalares en la otra base

$8(x^2) + 24(x+1) = 8x^2 + 24x + 24$
$\hookrightarrow$ Imagen del vector. $(2,3,3,2)$.

4.- Considere la transformación lineal T definida por $T(ax^2+bx+c)=(a+c,\ a-b,\ b)$, desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos) a* R^3.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $IP_2[x]$ y R^3 respectivamente.

X.- Respuestas al cuestionario de estudiante E16. Interpretación Matricial del concepto Transformación Lineal.

3.- Sea $T: M_2(R) \to R^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a+b-c, d)$.

Considere $B_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_2(R)$ y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2.

Determine $\left[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_{B_2}$.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$$

$$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$

$$\alpha = a+b-c$$

$$\alpha+\beta = d \quad \therefore \beta = d-a-b+c.$$

$$\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{pmatrix}$$

no recuerdo para que servia B_3.

(2)

1.- Sea $T: R^2 \to R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x+y, x-y, x)$, considere $C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3.

Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.

$$T(2,1) = (2+1, 2-1, 2)$$
$$= (3, 1, 2)$$

$$[T(2,1)]_{C_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.- Sea $T: R^3 \to R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x+y-z, x+z)$, considere $B_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2.

Determine $[T(2,1,0)]_{B_2}$.

$$T(2,1,0) = (2+1-0, 2+0)$$
$$= (3,2)$$

$$(3,2) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$

$$\alpha = 3$$
$$\alpha + \beta = 2 \ \therefore \ \beta = -1$$

luego $[T(2,1,0)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

5.- Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ y $B'=\{x^2, x+1\}$ bases para los sub- espacios de partida y llegada respectivamente.

Determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Sé que se puede hacer mediante unos cálculos, pero no me recuerdo ahora.
También habrían propiedades que no recuerdo.

4.- Considere la transformación lineal T definida por $T(ax^2+bx+c)=(a+c,\ a-b,\ b)$, desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos) a* $\mathbf{R}^3$.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_3=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

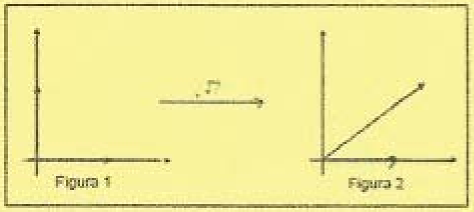
Sé que no es difícil el cálculo, pero no recuerdo como se resolvía este tipo de ejercicios (matriz asociada)

XI.- Respuestas al cuestionario de estudiante E1. Interpretación Geométrica del concepto Transformación Lineal.

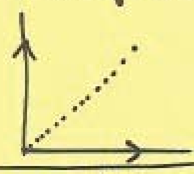
E1

3

1. ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.



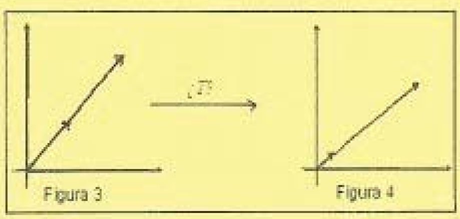
Sí, si se suma cada coordenada de la figura 1 de la forma x+x se forma la figura 2, e incluye al cero.



*Después de ver la pág. 4 me fijé que me equivoqué, me vi el vector de abajo.

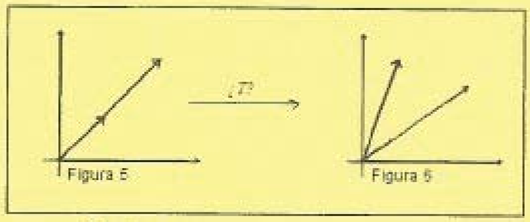
Creo que si existe, un vector puede escribirse como suma de otro

2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4 ? Justifique respuesta.



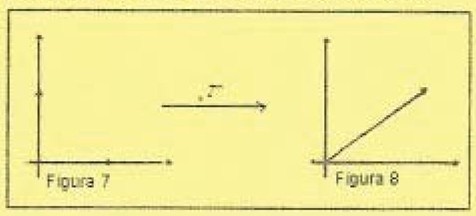
Sí, se ve que el o los vectores son multiplicados por un K.

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.



No lo sé.

4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8 ? Justifique su respuesta.



La justificación de la pregunta 1 va aquí

5.- Sea $F: R^3 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por

$$F(x,y,z) = (-2x-4z, -x-2z, 3x+y+6z)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$.

¿Puede tomarse una recta?

o quizás se puede tomar el vector característico de L para realizar la transformac

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{-3}y = z$$

de qué manera se puede escribir la recta en un vector?

$$\left.\begin{array}{l} z=1 \\ x=2 \\ y=-3 \end{array}\right\} \quad \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$(2,-3,1) = (-4-4, -2-2, 6-3+6)$$
$$= (0, 0, 9)$$

6- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F. (Ver figura 9)

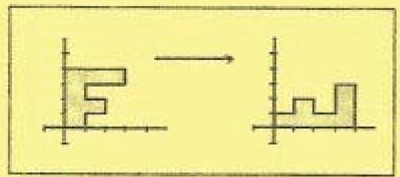


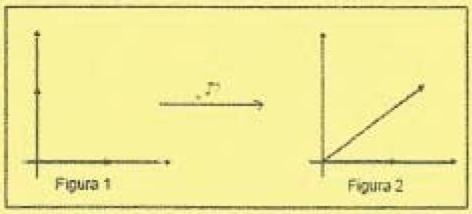
figura 9

No sé como trabajar con matrices en T.L (en gráficos)

XII.- Respuestas al cuestionario de estudiante E3. Interpretación Geométrica del concepto Transformación Lineal.

③ E_3

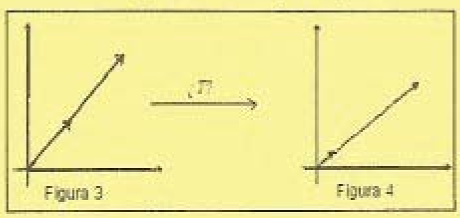
1. ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.



$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(0,y) \longrightarrow (u,v)$$
$$(x,0) \longrightarrow (x,0)$$

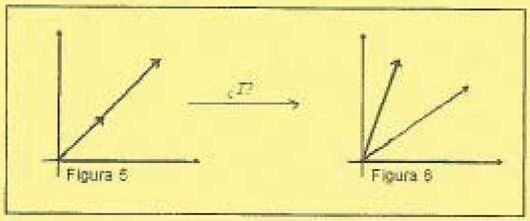
No es posible, ya que un vector quedaría fijo.

2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4 ? Justifique respuesta.



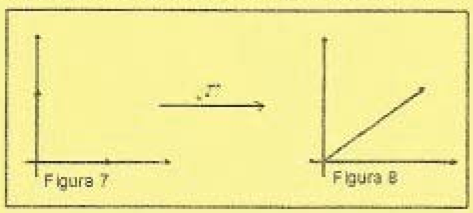
Aunque el dibujo es engañoso, a primera vista sí ~~#~~ se podría encontrar, ya que varía la longitud y ángulo de ambos vectores a la vez.

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.



Sí es posible, ya que varía el ángulo y la longuitud.

4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8 ? Justifique su respuesta.



No, ya que está anulando a sólo uno de los vectores.

5.- Sea $F: R^3 \to R^3$ transformación lineal definida por

$$F(x,y,z) = (-2x-4z, -x-2z, 3x+y+6z)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3}$$

$$\boxed{-\frac{3}{2}x = y} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y$$

$$\frac{y}{-3} = z \quad \cancel{\Rightarrow -3z = y}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -3z} \Rightarrow$$

$$\cancel{F(x,y,z) = \left(-\frac{2}{3}y, \frac{y}{3}, z\right)}$$

$$F(x,y,z) = F\left(-\frac{2}{3}y, y, -\frac{y}{3}\right)$$

← se deja expresado en términos de y, arbitrario, ya que se pudo haber usado cualquiera variable

$$= \left(-2\left(-\frac{2}{3}y\right) - 4\left(-\frac{y}{3}\right), -\left(-\frac{2}{3}y\right) - 2\left(-\frac{y}{3}\right), 3\left(-\frac{2}{3}y\right) + y + 6\left(-\frac{y}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y, \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y, -2y + y - 2y\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3}y, \frac{4}{3}y, -3y\right)$$ //

6- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F. (Ver figura 9)

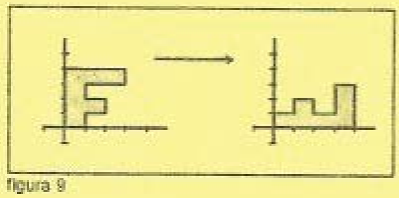


figura 9

No Recuerdo Matriz asociada

XIII.- Respuestas al cuestionario de estudiante E9. Interpretación Geométrica del concepto Transformación Lineal.

①

1. ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.

No comprendo la pregunta.

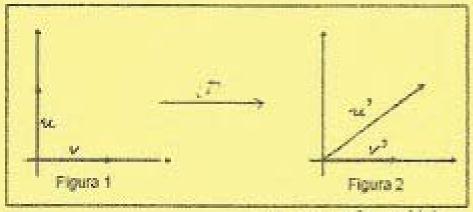


Figura 1 Figura 2

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

~~[illegible]~~

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

~~No~~ Es posible encontrar una T.L. que realice esta conversión.
En la imagen, están los vectores $u = (0, u_2)$ y $V = (v_1, 0)$
como $\vec{v}' = \vec{V}$ la transformación es de la forma.
$T(u)_{(u_1, u_2)} =$ ~~[illegible]~~ $(\alpha(u_1 + u_2), u_2)$

2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4 ? Justifique respuesta.

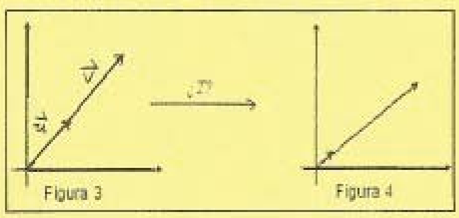
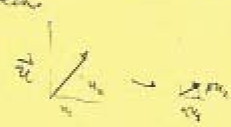


Figura 3 Figura 4

Encontrando escalares apropiados, se puede definir una transformación lineal.



Sean $u, v \in \mathbb{R}^2, K, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$

$u = (u_1, u_2)$

$V = (v_1, v_2)$

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \beta u_2)$

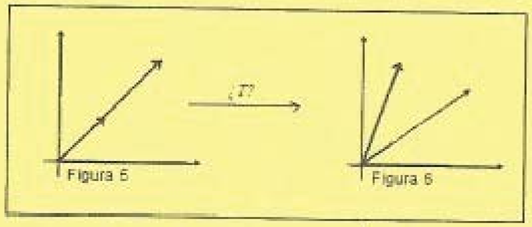
$K \cdot T(u_1, u_2) = (K\alpha u_1, K\beta u_2)$

$= K(\alpha u_1, \beta u_2)$

$T(u+v) = (\alpha(u_1 + v_1), \beta(u_2 + v_2))$

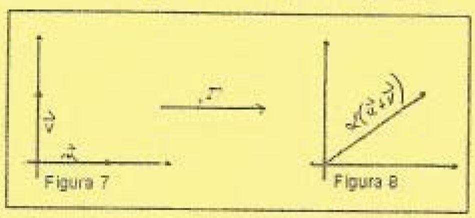
$= (\alpha u_1, \beta u_2) + (\alpha v_1, \beta v_2)$

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.



Si es posible, basta multiplicar por escalares al igual que en la actividad 2.-

4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8 ? Justifique su respuesta.



Claramente, sí se puede encontrar una transformación lineal.

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$T: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(u, v) = \alpha(u+v)$

5.- Sea $F : R^3 \to R^3$ transformación lineal definida por

$$F(x,y,z) = (-2x-4z, -x-2z, 3x+y+6z)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$.

ecuación simétrica de la recta: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-0}{1}$

?

el vector direccional de la recta es $(2,-3,1)$

el punto $(0,0,0)$ pertenece a la recta.

— — // ————

de la recta L: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$

despejamos: $z = \frac{y}{-3}$ $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3}$

$x = -\frac{2y}{3}$

Reemplazo.

$F(x,y,z) = F\left(-\frac{2}{3}y, y, \frac{y}{-3}\right) = F(2y, -3y, y) = \left(-2\left(-\frac{2y}{3}\right) - 4\right.$

$= \left(-2\left(-\frac{2y}{3}\right) - 4\left(-\frac{y}{3}\right), \frac{2y}{3} - 2\left(-\frac{y}{3}\right), 3(\right.$

$F(2,-3,1) = (-2\cdot 2 - 4\cdot 1, -2-2\cdot 1, 3\cdot 2 + (-3) + 6\cdot 1)$

$= (-4-4, -2-2, 6-3+6)$

$= (-8, -4, 9)$

luego, la recta es: $(x,y,z) = \lambda(-8,-4,9) + (0,0,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F. (Ver figura 9)

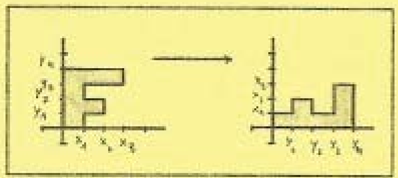


figura 9

la transformación es: Sea $B = \{(1,0), (0,1)\}$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (y,x)$$

calculo $[T(x,y)]_B^B$

$$T(1,0) = (0,1)$$
$$[T(1,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1) = (1,0)$$
$$[T(0,1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego, $[T(x,y)]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

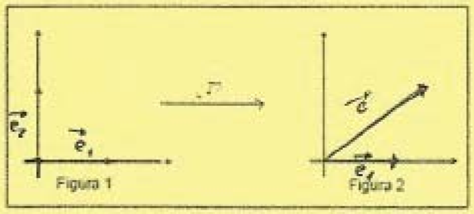
matriz de rotacion

XIV.- Respuestas al cuestionario de estudiante E18. Interpretación Geométrica del concepto Transformación Lineal.

3.

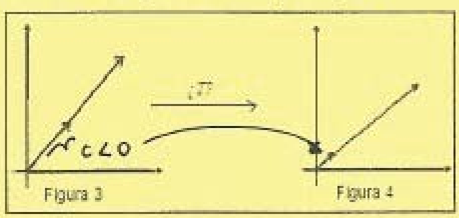
1. ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4 ? Justifique respuesta.

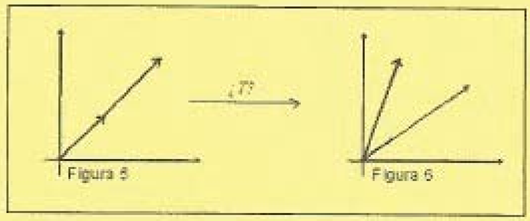
$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



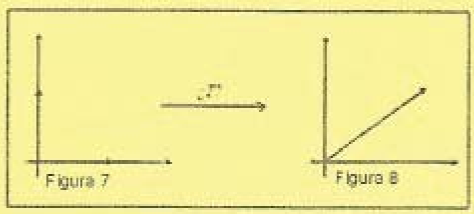
* Si es solo variar el vector, es decir, amplificando por un número conveniente para llegar al resultado.

Entonces cada vector de la figura 3, se amplica por un número.

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.



4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8 ? Justifique su respuesta.



Si existe una transformación lineal y debe ser la suma de los vectores de la figura 7, es decir una combinación lineal de los vectores de la figura 7.

5.- Sea $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ transformación lineal definida por

$$F(x,y,z) = (-2x-4z, -x-2z, 3x+y+6z)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$.

$L: (2,-3,1) + t(x,y,z).\ ,\ t \in \mathbb{Z}.$

$t = 1$ $\quad L: (2+x, -3+y, 1+z)$

$F(L) = (-2(2+x) - 4(1+z), -(2+x) - 2(1+z),$

$3(2+x) - 3+y + 6(1+z)$

$= (-4-2x-4-4z, -2-2x-2-2z, 6+3x-3+y+6$

$= (-8-2x-4z, -4-2x-2z, 9+3x+y+6z).$

$t \in \mathbb{Z}.$

$F(L) = (-2(2+tx) - 4(1+tz), -(2+tx) - 2(1+tz),$

$3(2+tx) + -3+ty + 6(1+tz))$

$= -4 - 2Tx - 4 - 4Tz, -2 - 2Tx - 2 - 2Tz,$

$6 + 3Tx - 3 + Ty + 6 + 6Tz$

$= (-8 - 2Tx - 4Tz, -4 - 2TX - 2Tz, 9 + 3TX + Ty + 6T$

6- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F. (Ver figura 9)

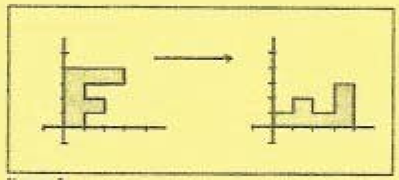


figura 9

XV.- Respuestas al cuestionario de estudiante E16. Interpretación Geométrica del concepto Transformación Lineal.

3

(T.L)

1. ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura1 en los vectores de la Figura 2? Justifique su respuesta.

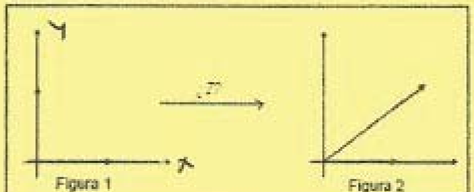


Figura 1 Figura 2

Yo creo que sí, de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante algún tipo de suma entre los vectores del conjunto de partida para obtener el vector de la figura 2.

No había visto los 2 vectores de la figura 2, pensé que había uno sólo. Dicho esto, sí se puede realizar una T.L, modificando el vector que está en el eje Y.

2.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 3 en los vectores de la Figura 4 ? Justifique respuesta.

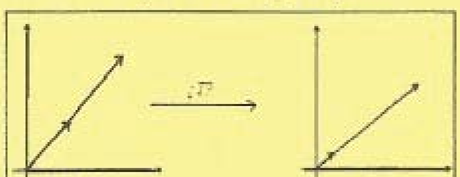
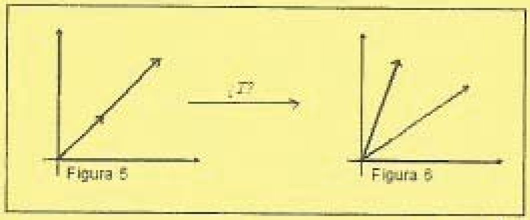


Figura 3 Figura 4

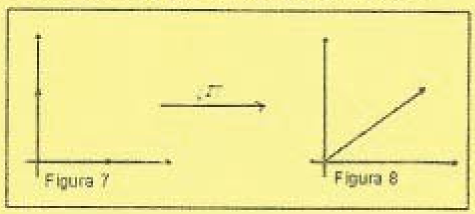
Si, multiplicando los vectores de la figura 3 por un escalar de tal forma que se obtenga la figura 4.

3.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 5 en los vectores de la Figura 6? Justifique su respuesta.



No lo sé, se me hace difícil verlo directamente del gráfico y no se me ocurre otro tipo de registro.
(verlo en)

4.- ¿Es posible que exista una transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 7 en los vectores de la Figura 8 ? Justifique su respuesta.



Si, mediante una suma entre los vectores de la figura 7 para obtener el vector de la figura 8.

6- Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F. (Ver figura 9)

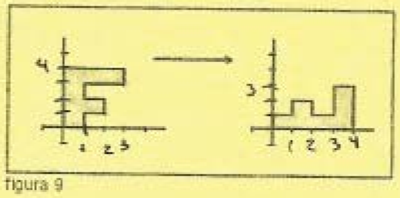


figura 9

$(0,4) \to (4,0]$

No sé cómo hacerlo

5.- Sea $F : R^3 \to R^3$ transformación lineal definida por

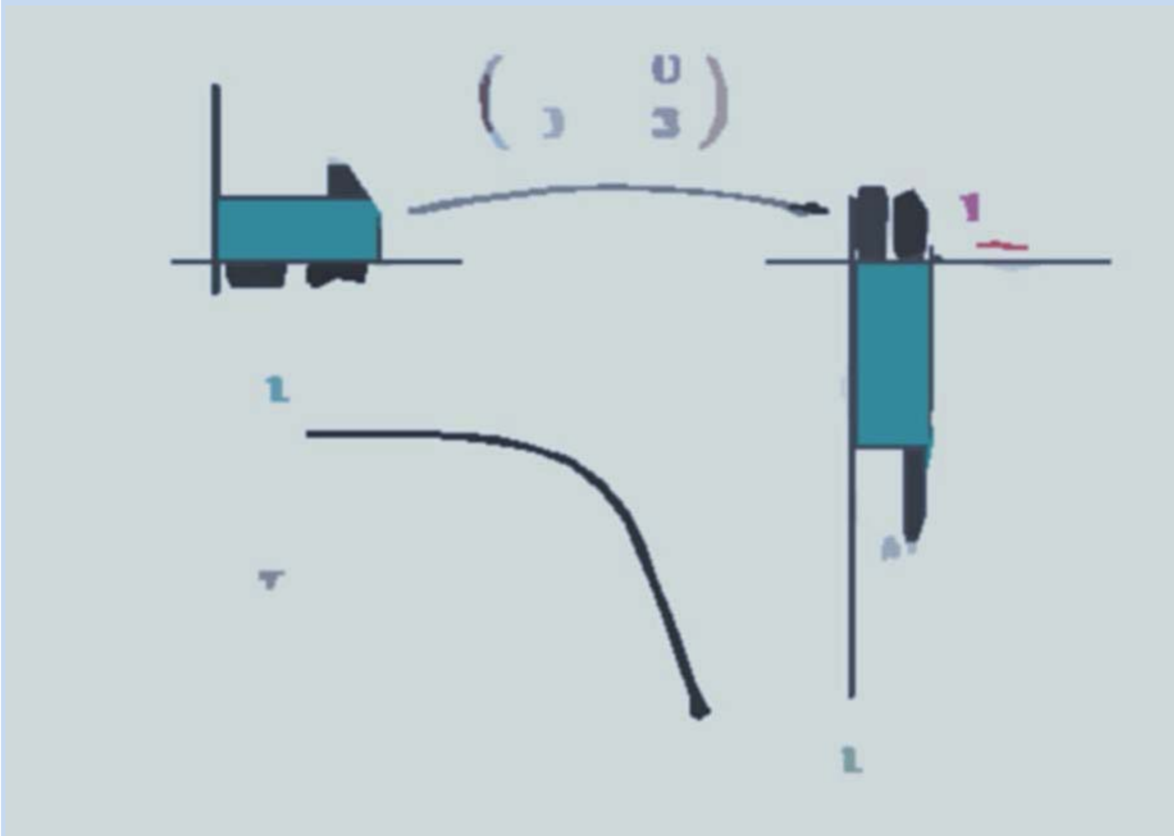
$$F(x,y,z) = (-2x-4z, -x-2z, 3x+y+6z)$$

Indique en qué forma se transforma la recta $L : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z$.

$\frac{X}{2} = \frac{Y}{-3} = \frac{Z}{1}$ $(2,-3,1)$

no recuerdo cómo hacerlo, pero en su momento sí sabría.

ÍNDICE.



ÍNDICE.

CAPÍTULO 5:
RESULTADOS DE LAS ENTREVISTAS. EVIDENCIAS PARA EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TL COMO UN MODELO MULTIINTERPRETATIVO………………………………………..…..….…126

CAPÍTULO 6:
CONCLUSIONES Y PROYECCIONES……………………………..199