

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Informática

**MODELO DE PORTAFOLIO PARA EL IPSA
UTILIZANDO MODELO DE MARKOWITZ CON
ALGORITMOS PSO**

JOSÉ ANDRÉS MARÍN GAETE

INFORME FINAL DEL PROYECTO
PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL EN INFORMÁTICA

Noviembre, 2011.

Dedicatoria

Dedico esta memoria a mis padres y hermano, quienes han sido mis pilares fundamentales en mi vida.

A mi polola por su ayuda en los momentos más difíciles y su incondicional apoyo en este proceso.

A mi profesor guía, por darme los conocimientos y consejos necesarios para ser un buen estudiante y profesional, y por su apoyo en la realización de mi memoria.

Y por último, agradezco a Dios por darme la fuerza, inteligencia y sabiduría para salir adelante en este largo y hermoso camino llamado Universidad.

Índice

Resumen	v
Abstract.....	vi
Glosario de Términos	vii
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tablas	x
1. Introducción	1
2. Definición de Objetivos	3
2.1 Objetivo General.....	3
2.2 Objetivos Específicos	3
2.3 Organización del Texto.	3
3. Estado del Arte	4
3.1 Modelo de Markowitz	4
3.1.1 Diversificación.....	5
3.1.2 Riesgo	5
3.1.3 Actitud frente al Riesgo.....	6
3.1.3 Frontera Eficiente	7
3.1.4 Fases del Modelo de Markowitz.....	8
3.2 Optimización por Enjambre de Partículas	11
3.2.1 Fundamentos del movimiento de partículas	12
3.2.2 Topologías de vecindad local y global	12
3.2.3 PSO con actualizaciones síncronas y asíncronas.....	13
3.2.4 Exploración y Explotación con PSO	14

3.3 Aplicaciones	14
4. Modelo Teórico	18
4.1 Modelo de Markowitz	18
4.2 Algoritmo PSO	21
4.2.1 Parámetros PSO.....	22
4.2.3 Variaciones del Algoritmo PSO	23
4.3 Modelo propuesto de Portafolio con PSO	27
4.3.1 Enfoque PSO	29
5. Análisis de Resultados	32
5.1 Resultados Modelo Portafolio con PSO	36
5.2 Resultados Modelo de Portafolio con PSO y parámetro de aversión.....	40
5.3 Resultados Modelo de Portafolio con IPSO	42
5.4 Resultados Modelo de Portafolio con IPSO y parámetro de aversión	46
5.5 Resultados Modelo de Portafolio con DAPSO	49
5.6 Resultados Modelo de Portafolio con DAPSO y parámetro de aversión	53
6. Conclusiones.....	60
7. Referencias	62
Anexos	65

Resumen

En la actualidad, los inversionistas chilenos están interesados de sobremanera en la rentabilidad que sus acciones les proporcionan, por lo cual necesitan una herramienta que les ayude a diversificar de mejor manera el capital que poseen para invertir. Es por esta razón que se propone un Modelo de Portafolio para las acciones del IPSA, el cual está basado en el Modelo de Portafolio de Markowitz. Este modelo se optimizará mediante el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) y dos variaciones de este algoritmo, IPSO y DAPSO, con los cuales se proyecta obtener una mayor diversificación del capital. Con este modelo se pretende probar que la integración del algoritmo PSO (y variaciones) al Modelo de Markowitz logre diversificar de mejor manera la proporción de dinero para invertir. En esta investigación se presentan los resultados obtenidos por el modelo propuesto en base a PSO tradicional, IPSO y DAPSO junto con el parámetro de aversión al riesgo por parte del inversor. De acuerdo al estudio realizado, el algoritmo óptimo para el modelo de portafolio propuesto es el algoritmo IPSO, ya que entrega mejores rendimientos y una mejor diversificación del capital en comparación con PSO tradicional y DAPSO. En el caso del modelo con parámetro de aversión, IPSO también resultó ser el óptimo. Se proyectan además estudios en nuevas técnicas o variaciones del algoritmo PSO u otro algoritmo evolutivo.

Palabras claves: Modelo de Markowitz, Optimización por Enjambre de Partículas, capital, aversión al riesgo.

Abstract

Today, Chilean investors are greatly interested in the profitability of their actions give them, so they need a tool to help them to better diversify the capital they have to invest. It is for this reason we propose a model portfolio for the IPSA stocks, which is based on the Markowitz Model Portfolio. This model is optimized by the algorithm Particle Swarm Optimization (PSO) and two variations of this algorithm, IPSO and DAPSO, which is projected to achieve greater capital diversification. This model seeks to prove that the integration of PSO algorithm (and variations) to the Markowitz model achieves better diversify the proportion of money to invest. This research presents the results obtained by the proposed model based on traditional PSO, IPSO and DAPSO along with the aversion risk parameter of the investor. According to the study, the optimal algorithm for the proposed portfolio model is the IPSO algorithm, delivering better returns and better diversification of capital compared to traditional PSO and DAPSO. The optimal model with risk aversion parameter is the IPSO algorithm. Further studies are planned in new techniques or variations of the PSO algorithm or other evolutionary algorithm.

Keywords: Markowitz Model, Particle Swarm Optimization, capital, risk aversion.

Glosario de Términos

- Fitness: Es una función la cual sirve para cuantificar la calidad de cada partícula en función de la posición que ésta ocupe.
- Portafolio: Es una combinación de activos o títulos individuales, entre ellos se consideran las acciones, de modo tal que una combinación de títulos individuales casi siempre sea menos arriesgada que cualquier título individual.
- DAPSO: Optimización por Enjambres de Partículas (PSO) con Adaptación Dinámica, en donde se modifica la actualización de la velocidad de la partícula, modificando los pesos de inercia de cada partícula, con el fin de evitar una temprana convergencia del algoritmo en el óptimo local
- IPSO: Optimización por Enjambres de Partículas (PSO) con peso de Inercia dinámico, el cual usa el peso de inercia dinámico que decrece de acuerdo al incremento iterativo de la generación.
- PSO: Optimización por Enjambres de Partículas (PSO) es un algoritmo en el cual se observa una población de partículas que comienzan a moverse en un espacio de soluciones, siendo la posición de la partícula una posible solución al problema
- Trading: Un sistema de Trading es una estrategia basada en un conjunto de reglas matemáticas con la cual es posible obtener beneficios tanto de los movimientos de subida como de caída de la Bolsa. El Trading puede ser a largo plazo, medio, corto, diario. Son usados diversos criterios matemáticos para determinar el surgimiento y finalización de un movimiento tendencial, y por consiguiente, los puntos de compra-venta en el mercado.

Lista de Figuras

Figura 3.1 Frontera Eficiente	7
Figura 3.2 Líneas de indiferencia	9
Figura 3.3 Cartera óptima	10
Figura 3.4 Topologías de la Población	13
Figura 5.1 Calibración Partículas PSO	36
Figura 5.2 Calibración Iteraciones PSO	36
Figura 5.3 Calibración Peso Inercia PSO	37
Figura 5.4 Frontera Eficiente con PSO con menor riesgo	38
Figura 5.5 Frontera Eficiente con PSO mejor partícula.....	38
Figura 5.6 Convergencia Rentabilidad PSO	39
Figura 5.7 Convergencia Riesgo PSO	39
Figura 5.8 Frontera Eficiente con PSO y parámetro de aversión menor riesgo	40
Figura 5.9 Frontera Eficiente con PSO y parámetro de aversión mejor partícula	41
Figura 5.10 Convergencia Rentabilidad PSO-aversión	41
Figura 5.11 Convergencia Riesgo PSO-aversión	42
Figura 5.12 Calibración Partículas IPSO	42
Figura 5.13 Calibración Iteraciones IPSO	43
Figura 5.14 Calibración Peso Inercia IPSO	43
Figura 5.15 Frontera Eficiente IPSO menor riesgo	44
Figura 5.16 Frontera Eficiente con IPSO mejor partícula	45
Figura 5.17 Convergencia Rentabilidad IPSO.....	45
Figura 5.18 Convergencia Rentabilidad IPSO.....	46
Figura 5.19 Frontera Eficiente con IPSO y parámetro de aversión menor riesgo	47

Figura 5.20 Frontera Eficiente con IPSO y parámetro de aversión mejor partícula.....	48
Figura 5.21 Convergencia Rentabilidad IPSO-aversión.....	48
Figura 5.22 Convergencia Riesgo IPSO-aversión.....	49
Figura 5.23 Calibración Partículas DAPSO	49
Figura 5.24 Calibración Iteraciones DAPSO.....	50
Figura 5.25 Calibración Peso Inercia DAPSO.....	50

Lista de Tablas

Tabla 5.1 Rentabilidad media de acciones de 5 años.....	32
Tabla 5.2 Promedio de las acciones por año	33
Tabla 5. 3 Promedio y Desviación Estándar ventanas deslizantes.....	33
Tabla 5.4 Desviación estándar de acciones.....	34
Tabla 5.5 Matriz de Varianza - Covarianza	34
Tabla 5.6 Comparación de Resultados.....	56
Tabla 5.7 Comparación diversificación del capital.....	56
Tabla 5.8 Comparación de Resultados con Aversión al Riesgo	57
Tabla 5.9 Comparación diversificación del capital con aversión	58
Tabla 5.10 Comparación entre mercado y modelo	58
Tabla A.1 Detalle ejecución modelo portafolio con PSO.....	66
Tabla A.2 Detalle ejecución modelo portafolio con PSO-aversión	68
Tabla A.3 Detalle ejecución modelo portafolio con IPSO.....	70
Tabla A.4 Detalle ejecución modelo portafolio con IPSO-aversión.....	72
Tabla A.5 Detalle ejecución modelo portafolio con DAPSO	74
Tabla A.6 Detalle ejecución modelo portafolio con DAPSO-aversión	76

1. Introducción

Desde su aparición, el modelo de portafolio de Markowitz ha sido un referente teórico fundamental en la selección de carteras de valores, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones. Sin embargo, su utilización en la práctica, entre gestores de carteras y analistas de inversiones, no ha sido tan amplia como podría esperarse a partir de su éxito teórico. Inicialmente, una de las principales causas de este hecho contradictorio radica en la complejidad matemática del método.

Los modelos de portafolios pretenden básicamente diversificar el capital, de tal manera de poder obtener rentabilidades en dirección del mercado en general. En este caso el modelo utiliza las acciones de la bolsa chilena y no de bolsas extranjeras, por lo cual el modelo permitirá seguir la dirección del IPSA.

La Bolsa de Comercio de Santiago [Bolsa de Comercio, 2011] publica tres tipos de índices bursátiles: Índice de Precio de Acciones, Índices Patrimoniales y los Índices Sectoriales. El IPSA (Índice de Precios Selectivo de Acciones), que corresponde al primer índice bursátil mencionado, es la selección de las 40 sociedades con mayores montos transados en la Bolsa de Comercio de Santiago ponderados trimestralmente y cuya capitalización bursátil supere los US\$ 200.000.000

Por consiguiente, se pretende demostrar que este modelo de portafolio puede ser de utilidad en la práctica, que permita generar una estrategia de Trading en la bolsa nacional. Por lo tanto, se quiere obtener un modelo de portafolio en base a un algoritmo evolutivo basado en poblaciones, el cual permita generar una Frontera Eficiente que ofrezca una mayor rentabilidad y menor riesgo.

El algoritmo de Optimización por Enjambres de Partículas (PSO) [Kennedy y Eberhart, 1995] es un algoritmo en el cual se observa una población de partículas que comienzan a moverse en un espacio de soluciones, siendo la posición de la partícula una posible solución al problema.

Para este proyecto se necesitará esta técnica, pues nos permitirá lograr encontrar la diversificación correcta de nuestros papeles bursátiles, de tal manera de hallar la frontera eficiente que garantice la máxima rentabilidad y el mínimo riesgo. Se propone además derivaciones al algoritmo, los cuales permitirán obtener mejores resultados que el algoritmo tradicional.

El modelo de Markowitz a través de los años ha sido utilizado para diversas bolsas a nivel mundial, y en varios países para estudios locales. Esto se puede apreciar en los casos que se presentan a continuación.

En estudios realizados con el modelo de portafolio de Markowitz, se tiene que en [González y Moreno, 2007] se ha aplicado el modelo del portafolio de Markowitz en el contexto del análisis convexo y su aplicación a una cartera de acciones transadas en la bolsa de valores de Bogotá, en donde se logra determinar un portafolio óptimo con las acciones involucradas en la investigación.

También se han realizado estudios en España con respecto a las carteras de mercado de referencia IBEX-35 e IGBM, en donde el modelo de Markowitz, como herramienta de selección de carteras, ha sido capaz de proporcionar carteras con mejor performance que los índices de referencia del mercado [Mendizábal, 2000].

En México se han realizado estudios respecto a los instrumentos financieros tales como la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el Mercado Mexicano de Derivados (Mexder), en donde el funcionamiento del modelo fue probado empleando la información obtenida de la BMV y Mexder, y efectivamente es posible obtener la frontera eficiente [Ochoa, 2008].

2. Definición de Objetivos

2.1 Objetivo General

Desarrollar y evaluar el rendimiento de una estrategia de portafolio en la bolsa de comercio nacional utilizando el modelo de Markowitz combinado con el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) para maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo de la inversión.

2.2 Objetivos Específicos

- Explicar el funcionamiento del modelo de portafolio de Markowitz y los algoritmos PSO.
- Diseñar e implementar una estrategia de portafolio utilizando tres esquemas de PSO.
- Evaluar el rendimiento y contrastar el modelo de portafolio al menos cinco acciones del IPSA.

2.3 Organización del Texto.

El proyecto continúa en el Capítulo 3 con la descripción del Estado del Arte relacionado al modelo de Markowitz y al algoritmo PSO. Aquí se presentan los estudios que se han realizado en relación al modelo de portafolio de Markowitz y al algoritmo PSO.

Luego el Capítulo 4 presenta el Modelo Teórico en que se sustenta este estudio, definiendo los principales componentes y aplicaciones del modelo de Markowitz y presentando como técnica evolutiva a Optimización por Enjambre de Partículas, definiendo sus elementos básicos, algoritmos, variantes y aplicaciones.

El Capítulo 5 continúa con el análisis de resultados de los distintos modelos propuestos, presentando las métricas utilizadas y los modelos desarrollados en base a los algoritmos descritos en los capítulos 3 y 4. Finalmente, el Capítulo 6 hace referencia a las conclusiones del proyecto.

3. Estado del Arte

3.1 Modelo de Markowitz

En el campo de la teoría de la selección de carteras, Harry Markowitz ocupa un lugar muy destacado, ya que en 1952 publicó en la revista *Journal of Finance* un artículo basado en su tesis doctoral titulado “Portfolio Selection” [Markowitz, 1952]. Markowitz fue el primero en poner atención en la práctica de diversificación de los portafolios. Esta es la base donde los inversores generalmente prefieren mantener portafolios de activos en vez que activos individuales, debido a que ellos no tienen en cuenta solamente los retornos de dichos activos sino también el riesgo de los mismos.

En dicho artículo Markowitz planteaba un modelo de conducta racional del inversor, centrando su atención en la diversificación de carteras, demostrando como un inversor puede reducir el riesgo eligiendo acciones cuyas oscilaciones no sean paralelas. En su modelo utiliza conceptos que han sido de gran avance teórico y cuya utilidad es incuestionable.

El primer pilar de su teoría es la relación entre el riesgo y las variables estadísticas, cuya medición es posible, específicamente la varianza histórica de la rentabilidad. El artículo argumenta que los inversores demandan un retorno mayor para inversiones más riesgosas.

Markowitz también demostró que la clave para diversificar un portafolio no estaba simplemente en el número de acciones que componen el portafolio, sino también y más importante aún, en la correlación o covarianzas de los retornos de las acciones que lo conforman [Markowitz, 1952]. Si los retornos están fuertemente correlacionados, el portafolio no se podrá diversificar, y si la correlación es baja, se podrá diversificar y el riesgo será mucho menor.

Con esta información Markowitz demostró con la técnica que se conoce como Análisis de Media–Varianza [López, 2003], la posibilidad de construir una serie de portafolios que sean eficientes. Los portafolios eficientes son aquellos que en el pasado obtuvieron el retorno más alto dado un nivel de riesgo, es decir, tienen la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles que tienen un rendimiento esperado dado, y tienen el rendimiento esperado máximo dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada [Mendizábal, 2000].

3.1.1 Diversificación

Cuanto mayor sea el número de activos incluido en un portafolio, mayor será el impacto en el riesgo debido a la diversificación [López, 2003]. Esto significa que si bien podemos eliminar algo de riesgo debido a la diversificación, existe un nivel de riesgo de cartera que permanecerá no importe cual es la cantidad de activos que incluya dicha cartera.

Este riesgo es conocido con el nombre de Riesgo Sistemático o Riesgo de mercado [López, 2003], que es aquel inherente a todos los activos en general. El riesgo No-Sistemático refleja el porcentaje de riesgo inherente a cada activo en particular y es aquel que puede ser eliminado a través de la diversificación.

No obstante, la diversificación no es sólo una compra indiscriminada de activos diferentes ya que, en este caso, se puede derivar en la denominada diversificación ingenua, o lo que es lo mismo, en incrementar los tipos de activos de la cartera sin reducir apenas el riesgo específico de la misma.

La adquisición de los activos debe realizarse de manera sistematizada. Esta política de compra debe centrarse en adquirir activos que estén lo menos correlacionados posibles entre ellos, inclusive inversamente correlacionados. De esta manera, al comportarse de forma diferente ante variaciones del mercado, sus efectos pueden compensarse en el período de tenencia de la inversión, provocando una reducción acusada de la volatilidad de la rentabilidad de la cartera y, por tanto, una disminución del riesgo asociado a la misma.

Por lo tanto, al diversificar, debe evitarse la adquisición de activos similares [López, 2003], como pueden ser activos del mismo sector o de parecidas características, intentando combinar títulos de diferentes industrias con la menor relación posible entre sí.

3.1.2 Riesgo

El riesgo de un activo es medido comúnmente como el desvío Standard de sus retornos. Es decir, el grado en el que los retornos de ese activo se dispersan del retorno esperado promedio del mismo. En este caso la medida de riesgo utilizada es la *varianza* o el *desvío típico*.

Si la distribución de los rendimientos es simétrica, entonces la varianza es el doble de la semi-varianza y en consecuencia proporcionan la misma información, pero con la ventaja que su tratamiento matemático es mucho más simple.

Para un activo dado cuanto mayor es el grado de dispersión de los retornos, mayor es el grado de Riesgo o Volatilidad, como comúnmente se lo llama en Finanzas [Grajales, 2009].

Se debe tener en cuenta que el riesgo de una cartera no es igual al promedio ponderado de los riesgos de los activos que la componen. El grado en el que los activos de una cartera son similares o diferentemente afectados por determinados hechos tiene un peso en cuanto al riesgo de la cartera [Lintner, 1965]. Esto tiene importantes implicancias para los inversores, como el significado en la cual ellos pueden elegir ciertos activos para incluirlos en una cartera el cual es ayudará a reducir el riesgo de la misma.

El riesgo de una cartera es una función del nivel de riesgo individual de cada uno de los activos que la componen y también del grado de correlación existente entre los retornos esperados de cada uno de los activos que componen la cartera [López, 2003].

El riesgo de una cartera dependerá de la extensión por la cual los activos son similarmente afectados por eventos subyacentes. La covarianza entre dos activos puede ser expresada como:

$$\text{CovAB} = \left[\sum (RA_i - RA) * (RB_i - RB) * P_i \right] \quad (3.1.1)$$

Donde:

RA_i = Rentabilidad del activo A si ocurriese el evento i

RB_i = Rentabilidad del activo B si ocurriese el evento i

P_i = Probabilidad de ocurrencia del evento i

La covarianza de dos activos podría ser positiva o negativa. Si dos activos son afectados de manera similar ante un evento cualquiera donde los retornos de los mismos aumentan o disminuyen en forma conjunta, entonces la covarianza será positiva, del mismo modo, si ante un evento subyacente los retornos del activo A se comporta de manera totalmente opuesta (Aumentan) a los del otro activo B (Disminuyen), entonces la covarianza será negativa. La covarianza será cercana a cero si el desvío de los retornos de cada uno de los activos se encuentra incorrelacionados [López, 2003].

Retornos incorrelacionados, si los retornos de ambos activos no tienen ninguna relación, quieren decir que los activos están incorrelacionados, si combinamos 2 activos incorrelacionados pueden ayudar a reducir el riesgo de una cartera.

3.1.3 Actitud frente al Riesgo

La teoría de la cartera de Markowitz se basa en la idea de que el comportamiento de un inversor se caracteriza por el grado de aversión al riesgo que tenga y el grado de maximización de utilidades que espera. Los inversores pueden encontrarse dentro de estos grupos de aversión al riesgo [López, 2003]:

- **Aversos al Riesgo:** Es aquel inversor que elegiría una inversión con el menor grado de riesgo frente a dos alternativas con el mismo nivel de retorno esperado.
- **Neutrales al Riesgo:** Es aquel inversor que elegiría una inversión con el mayor grado de riesgo frente a dos alternativas con el mismo nivel de retorno esperado.
- **Propensos al Riesgo:** Es aquel inversor que se mantendría indiferente si tuviera que elegir entre dos alternativas con el mismo nivel de retorno esperado.

3.1.3 Frontera Eficiente

El conjunto de portafolios eficientes se conoce como Frontera Eficiente. En la frontera eficiente, están situadas las mejores rentabilidades para un riesgo determinado, clasificadas de manera que a mayor riesgo corresponda una mayor rentabilidad [Cayatopa, 2008]. Si un portafolio se encuentra en la frontera eficiente, se dice que domina a los que no lo están. Según el grado de aversión al riesgo, el inversor se situará de forma razonable en uno u otro punto de la línea de la frontera eficiente.

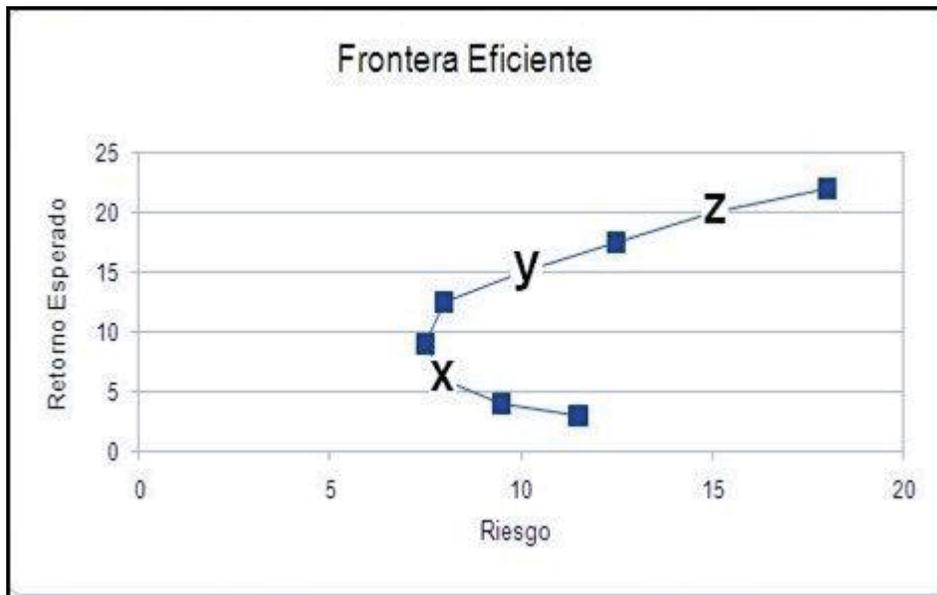


Figura 3.1 Frontera Eficiente

La construcción de la frontera eficiente se realiza bajo ciertas premisas. La primera de ellas se refiere a que las carteras que se utilizan para generar la frontera eficiente están compuestas por distintos activos. Para la elaboración de esta frontera,

las proporciones invertidas en los activos que componen las carteras deben cumplir dos requisitos:

- **Todo el capital se invierte**, es decir, el 100% del capital está invertido en la cartera [Brun, 2008].
- **No se puede estar vendido de ningún activo** [Brun, 2008], es decir, no se puede invertir una proporción negativa en un determinado activo.

La figura 3.1 representa el conjunto de portafolios eficientes y los grados de aversión al riesgo por parte de un inversor. El riesgo es medido en el eje horizontal y el retorno esperado o rentabilidad en el eje vertical. Cualquier portafolio situado por debajo y a la derecha de la Frontera Eficiente (XYZ) será ineficiente.

Para el conjunto de portafolios eficientes, el inversor podrá escoger el portafolio que prefiera dado su grado de aversión al riesgo. Si el inversor quiere rentabilidades altas sin importar el nivel de riesgo que debe asumir, entonces escoge el portafolio Z de la figura 1. Si desea un nivel medio de riesgo entonces escoge el portafolio Y, y si tiene aversión al riesgo entonces el inversionista tendrá que escoger el portafolio X.

Sin embargo, a nivel práctico, su utilización entre gestores de carteras y analistas de inversiones no ha sido tan extensa como podría suponerse de su éxito teórico [Mendizábal, 2000]. En un principio, una de las principales causas de este hecho contradictorio radicaba en la complejidad matemática del modelo.

En primer lugar, por ser un programa cuadrático paramétrico, el algoritmo de resolución era complejo. Para poder hallar la matriz de covarianzas hay que relacionar todos los valores dos a dos y calcular varianzas y covarianzas, complicándose para portafolios con un número considerable de acciones [González y Moreno, 2007].

En segundo lugar, los datos a utilizar son las rentabilidades y riesgos históricos y se supone que en el futuro serán similares. Otras razones por las cuales este modelo ha tenido una escasa utilización son algunas hipótesis restrictivas que el modelo de Markowitz contiene, según [Michaud, 1989] el modelo no tiene en cuenta los impuestos ni los costos de transacción, es decir **no encuentra las ponderaciones del capital**. Por otro lado, no proporciona ninguna herramienta para que el inversor valore su actitud ante el riesgo y deduzca su función de utilidad, necesaria para la elección de la cartera óptima.

3.1.4 Fases del Modelo de Markowitz

A continuación, se explican las fases que posee el modelo de Markowitz, obviando los desarrollos analíticos del modelo en cuestión. El modelo se divide en tres fases [Suarez, 1995]:

Fase 1: Determinación de la Frontera Eficiente, es decir, del conjunto de combinaciones de títulos o acciones que maximizan la rentabilidad esperada para un nivel determinado de riesgo, o bien minimizan el riesgo soportado para un nivel determinado de rentabilidad esperada [Suarez, 1995]. Todo ello, teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias y siempre en base al supuesto de **racionalidad del inversor** [Markowitz, 1952], es decir, que la rentabilidad esperada es un elemento positivo para dicho inversor mientras que el riesgo es un elemento no deseado. Para la resolución de esta primera parte, Markowitz propone un problema de programación matemática.

Fase 2: Determinación del mapa de líneas de indiferencia, siendo tales los conjuntos de combinaciones rentabilidad-riesgo que son indiferentes para el inversor. En este punto, es fundamental la actitud que el sujeto financiero tenga ante el riesgo, ya que de dicho comportamiento va a depender la forma de estas líneas [Suarez, 1995]. Cuanto mayor sea el nivel de rentabilidad media que el inversor exige por soportar una unidad adicional de riesgo, mayor es su aversión al riesgo. Este aspecto queda recogido en la figura 3.2, donde se reflejan a través de las curvas de indiferencia la posición de los inversores ante el riesgo.

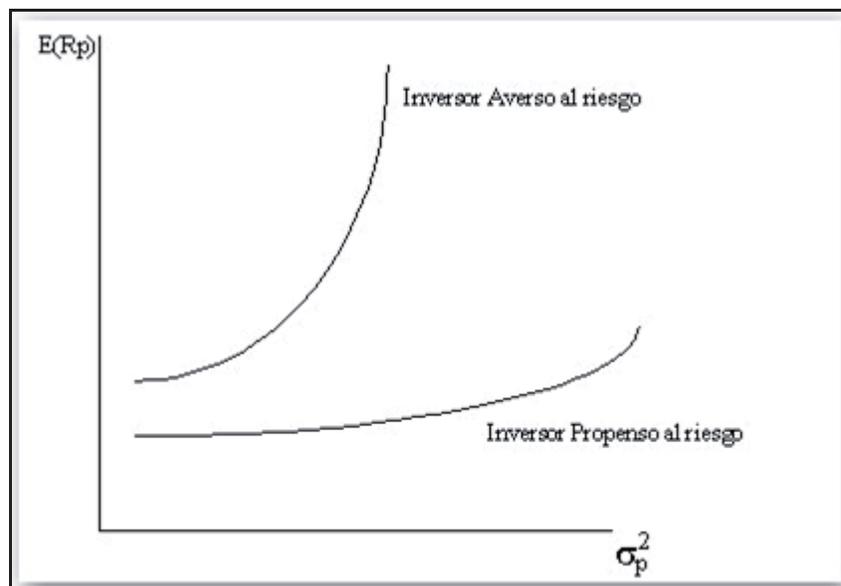


Figura 3.2 Líneas de indiferencia

De acuerdo con este aspecto, puede observarse que, en realidad, los postulados que están inherentes a estas líneas de indiferencia son los derivados de la teoría de la utilidad. De hecho, tal y como enumeran [De Pablo y Ferruz, 1996], las **líneas de indiferencia** tienen, entre otras, las siguientes características:

- **Son crecientes**, ya que un incremento del riesgo debe implicar necesariamente un incremento en la rentabilidad esperada de la inversión.
- Son **curvas y son convexas respecto al eje de coordenadas**, es decir, conforme aumenta el riesgo asociado a la inversión, el incremento de rentabilidad que se le exige a la misma es más que proporcional.
- Cada curva expresa un **nivel distinto de satisfacción** del inversor. Dicho nivel será mayor cuanto más alejada esté la curva del eje de abscisas.
- Todas **las curvas del mapa cortan al eje de ordenadas en la zona positiva** del mismo. Dichos cortes expresan el equivalente de certeza de cada línea.
- **No se pueden cortar dos líneas entre sí**, ya que de lo contrario el punto de corte expresaría distintos niveles de satisfacción para el inversor, lo cual no puede aceptarse [De Pablo y Ferruz, 1996]. O bien, manteniendo el supuesto de que la satisfacción que ofrece una combinación rentabilidad-riesgo es igual a sí misma, las dos curvas de indiferencia representarían el mismo nivel de satisfacción, lo cual tampoco es aceptable puesto que se daría el caso de que, para cualquier nivel de riesgo se obtendría la misma satisfacción con dos niveles de rentabilidad esperada diferentes e, igualmente, para cualquier valor de rentabilidad se obtendría un satisfacción igual para dos niveles de riesgo diferentes.

Fase 3: Determinación de la cartera óptima, es decir, de la combinación posible de acciones representativa de la relación **rentabilidad-riesgo** que maximiza la satisfacción del inversor financiero [De Pablo y Ferruz, 1996]. Esta cartera, tal y como se observa en la figura 3.3, tendrá las siguientes características:

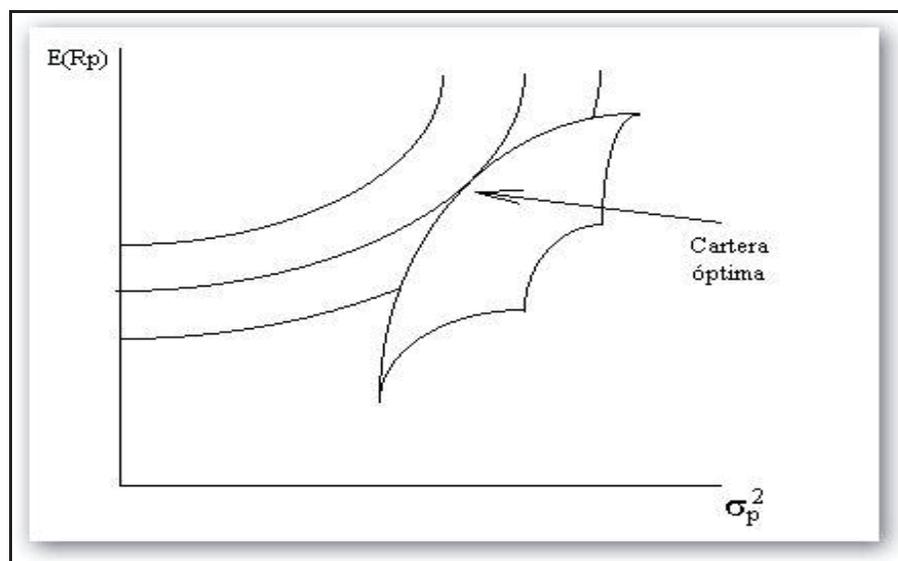


Figura 3.3 Cartera óptima

➤ Deberá **pertenecer a la frontera eficiente** determinado en la primera fase del modelo.

➤ Deberá ser el punto tangente de dicha frontera eficiente con la curva de indiferencia más alejada posible del eje de abcisas que será, tal y como se ha comentado, representativa del mayor nivel de satisfacción accesible.

De la observación de la figura 3.3 se desprende la consideración que Markowitz propone del riesgo. En el eje de abcisas se indica dicho elemento representado como **la varianza de la variable aleatoria rentabilidad**. Es decir, Markowitz propone la consideración del riesgo de una inversión como la variabilidad de su resultado en el pasado.

3.2 Optimización por Enjambre de Partículas

La optimización por enjambre de partículas, más conocida en la literatura científica como *Particle Swarm Optimization* (PSO), nace, al igual que otras técnicas estocásticas del cálculo evolutivo, en un intento por imitar y mimetizar el comportamiento de los procesos naturales. Siendo uno de los métodos más utilizados en la inteligencia computacional, busca imitar comportamientos sociales de un colectivo a partir de la interacción entre sus individuos y de éstos con su entorno.

Sus orígenes remontan de los estudio realizados por [Kennedy y Eberhart, 1995], quienes intentaron simular de manera gráfica el movimiento sincronizado e impredecible de bancos de peces o bandadas de aves, intrigados por la capacidad que tienen estos grupos para separarse, reagruparse o encontrar su alimento. Paralelamente con trabajos previos en el ámbito de la biología y la sociología, concluyen que el comportamiento, inteligencia y movimiento de estas agrupaciones está relacionado directamente con la capacidad para compartir información y aprovecha de la experiencia acumulada por cada uno de los elementos.

[Kennedy y Eberhart, 1995] introducen el término partícula, el cual representa a cualquier tipo de individuo que muestre algún tipo de comportamiento social como grupo en forma de una colección de agentes o partículas que interactúan entre sí. De acuerdo a los fundamentos teóricos del método, el movimiento de cada una de estas partículas hacia la consecución de un objetivo en común depende de 2 factores: la memoria autobiográfica de la partícula o nostalgia y la influencia social de todo el enjambre.

Esto se puede extender, dependiendo del problema bajo análisis, a nivel computacional de D-dimensiones, siendo N el número de incógnitas. Básicamente, el proceso evolutivo se reduce a mover cada partícula dentro del espacio de soluciones con una velocidad que variará de acuerdo a su velocidad actual, a la memoria de la partícula y a la información global que comparte el resto del enjambre, utilizando una función de

fitness para cuantificar la calidad de cada partícula en función de la posición que ésta ocupe [Kennedy y Eberhart, 1995].

3.2.1 Fundamentos del movimiento de partículas

Para aplicaciones relacionadas con el ámbito de la vida artificial se deben respetar cinco principios básicos de lo que se conoce como inteligencia de grupo, estos se conocen como: proximidad, calidad, diversidad de respuesta, estabilidad y adaptabilidad [Kennedy y Eberhart, 1995].

- **Proximidad.** La población debiera ser capaz de realizar cálculos sencillos de espacio y tiempo, lo cual en PSO se traduce a movimientos en D-dimensiones llevados a cabo durante un intervalo de tiempo que coinciden con movimientos de la población a una determinada velocidad.

- **Calidad.** Los factores de calidad en PSO se consiguen en base a la **memoria** de la partícula junto con la historia o conocimiento social que comparten todos los elementos.

- **Diversidad de respuesta.** Representadas por las tendencias marcadas por la memoria personal de cada partícula y por la historia de la mejor posición visitada por el conjunto.

- **Estabilidad y Adaptabilidad.** Resaltan aspectos contrapuestos, dado que por un lado, la población solo cambia su comportamiento como grupo cuando se actualiza la mejor posición históricamente visitada por alguno de los miembros que lo integran (principio de estabilidad) y, por otro lado, la población debe ser capaz de modificar su comportamiento y movimiento cuando hay alguna señal que así lo recomienda. Esto último, desde el punto de vista de ahorro computacional o mejora de precisión. En PSO esto se consigue cuando alguna partícula alcanza una solución global que mejora el resultado, en ese instante la población cambia de rumbo.

3.2.2 Topologías de vecindad local y global

En PSO los individuos mejoran sus fitness dado que en cada iteración imitan los comportamientos y tendencias que encuentran en los mejores congéneres de la población [Kennedy y Eberhart, 1995]. Establecer cómo se define la vecindad de un individuo tiene una trascendencia vital en el rendimiento del algoritmo. Dependiendo de la topología que adquiera la población, la transmisión de la información entre individuos puede acelerarse o ralentizarse, lo cual está íntimamente relacionado con la velocidad de convergencia y con la capacidad del algoritmo para escapar de soluciones locales.

La topología más extendida es la **topología de vecindad global**, en la cual todos los individuos están interrelacionados y tienen acceso inmediato a los hallazgos de sus congéneres [Kennedy y Eberhart, 1995]. Sin embargo, esta estructura social es vulnerable a soluciones locales, dado que dependiendo de la distribución puntual de las

partículas sobre el espacio de soluciones, una de ellas apuntando a una solución local puede llegar a dominar al resto.

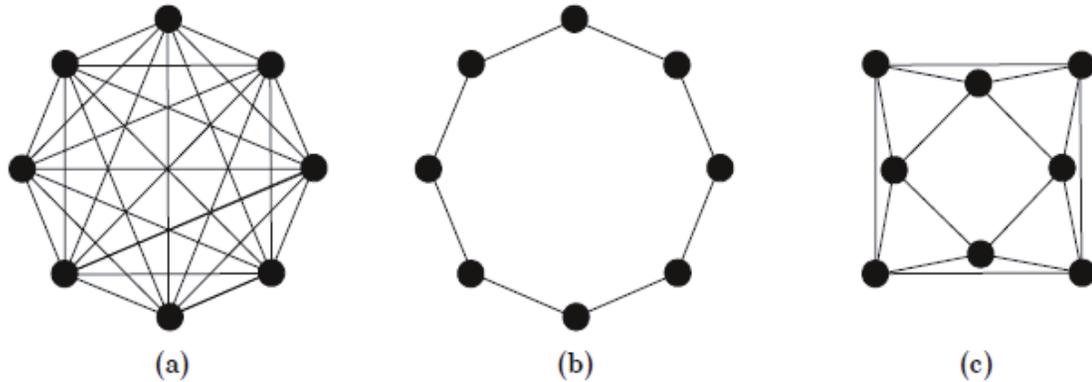


Figura 3.4 Topologías de la Población
Global, (b) Local con $N=2$, (c) Local con $N=4$

El modelo del **óptimo local** permite que cada individuo sea influenciado por un reducido número de miembros adyacentes. Estas partículas vecinas no tienen relación directa con el resto de las partículas que pertenecen a otra vecindad. Por lo general, como se visualiza en la Fig. 4, el óptimo local tienen 2 vecinos.

Autores en [Abraham *et al.*, 2006] declaran que el modelo del óptimo global converge rápidamente hacia las soluciones del problema, pero tiene la debilidad de quedar atrapado en mínimos locales, mientras que el óptimo local tiene la desventaja de converger lentamente hacia la solución del problema.

3.2.3 PSO con actualizaciones síncronas y asíncronas

La diferencia entre una actualización asíncrona con una síncrona, radica en el instante en el cual se realiza la actualización de la memoria de cada partícula y el conocimiento social del grupo [Kennedy y Eberhart, 1995].

En el modelo síncrono, todas las partículas se mueven en paralelo. El fitness de las partículas se evalúa en cada iteración, se actualiza su memoria p_{id} y el conocimiento social p_{gd} . Por otro lado, en el PSO asíncrono al momento de desplazarse, cada partícula aprovecha la información actualizada por sus inmediatos predecesores. Es decir, en cada iteración k , la i -ésima partícula se desplaza hacia un nuevo punto utilizando la información de los vectores p_{id} y p_{gd} , actualizados por las $i-1$ partículas previas. Posteriormente, la partícula evalúa la calidad del nuevo punto y actualiza, si procede, las variables p_{id} y p_{gd} . Esta información se transmite a las restantes partículas. Al

actualizar la información partícula a partícula, el modelo asíncrono acelera la optimización, aunque la naturaleza del modelo síncrono lo hace susceptible de ser ejecutado en paralelo, sobre múltiples procesadores.

3.2.4 Exploración y Explotación con PSO

Uno de los problemas de los algoritmos evolutivos, es que en ocasiones quedan atrapados en óptimos locales, lo cual en la literatura se conoce como **convergencia prematura** del algoritmo y corresponde a la incapacidad de salir la zona en la cual se encontró el mínimo local, impidiendo que se exploren otras regiones del espacio de búsqueda [Kennedy y Eberhart, 1995].

Lo ideal es que las partículas representen soluciones de diferentes zonas del espacio de búsqueda. Esto se conoce como **diversificación** y en términos de los algoritmos corresponde a que las partículas sobrevuelen diferentes zonas del espacio de soluciones antes de que se comprometan con alguna en especial. Por otro lado, las partículas, una vez encontrada una zona comprometedora deben ser capaces de mejorar la solución encontrada. Esto se conoce como **convergencia de la población**.

Se define como **exploración** a la búsqueda de la solución del problema en el espacio de búsqueda de manera amplia, privilegiando la diversificación del enjambre. Por otro lado, la **explotación** consiste en la búsqueda de la solución del problema en un rango (sub-espacio) dentro del espacio de búsqueda donde el enjambre trate de tomar todos los valores posibles, privilegiando la convergencia del enjambre.

Estudios realizados en [Kennedy, Eberhart, y Shi, 2001] revelan que altos valores para el coeficiente de inercia, factores de cognición y V_{\max} ($0.75 < w < 1$ y $2 < c_1, c_2 < 4$), favoreces el modo de exploración del PSO, mientras que valores bajos ($0.4 < w < 0.75$ y $0.1 < c_1, c_2 < 2$) favorecen el modo de explotación del PSO.

La idea es ajustar los parámetros de tal manera que el algoritmo funcione en modo de exploración en las primeras etapas y una vez transcurridas unas cuantas iteraciones cambie a modo explotación.

3.3 Aplicaciones

La moderna Teoría de Portafolio ha cambiado la forma en que los inversionistas pensaban acerca de sus estrategias. La teoría asume que los mercados financieros son eficientes, significando que el precio de cualquier acción incorpora toda la información acerca de la acción. La tarea principal de la teoría es encontrar que determina la tasa de retorno de la acción.

El modelo de portafolio de Markowitz, referente teórico en el campo de la teoría de selección de carteras, puede resultar de gran utilidad en la actualidad, y en la práctica propiamente tal. Los analistas de inversiones, los gestores de carteras, entre otros, pueden utilizarlo de forma sencilla, al disponer del software y hardware necesarios. No

obstante, el empleo de esta técnica requiere una estimación correcta de los rendimientos esperados de los títulos y de sus covarianzas [Cobo, 2004].

El modelo de Konno [Konno y Yamazaki, 1991], es la segunda gran revolución en la Teoría de Portafolios. Corresponde a medidas alternas del riesgo, siendo una de ellas capaz de “linealizar” el modelo de Markowitz. Existen también en la actualidad otro tipo de modelos lineales de portafolios tales como el Modelo de Cai, Modelo de Teo, el Modelo de Konno Modificado, además de un Modelo con Restricciones de Dominación Estocástica.

Otra aplicación es el modelo de mercado de Sharpe [Sharpe, 1963] que surgió como un caso particular del modelo diagonal del mismo autor que, a su vez, fue el resultado de un proceso de simplificación que Sharpe realizó del modelo pionero de Markowitz.

En México incluso se ha utilizado el modelo de Markowitz para ver si los portafolios eficientes de un mínimo riesgo, conformados por una mezcla diversificada de cultivos, son más eficientes en media y varianza que la especialización del patrón de cultivos [Avilés, González y Martínez, 2006].

Esto se debe a que en la producción agrícola la incertidumbre no depende solo de los cambios en las variables macroeconómicas, sino también de los cambios en las condiciones meteorológicas, la incidencia de plagas y enfermedades, entre otras. Por ello, según en [Avilés, González y Martínez, 2006] conviene hacer el análisis de riesgo de las actividades agrícolas, buscando incrementar el rendimiento de las utilidades esperadas dado un mismo nivel de riesgo.

Sharpe consideró que el modelo de Markowitz implicaba un dificultoso proceso de cálculo ante la necesidad de conocer de forma adecuada todas las covarianzas existentes entre cada pareja de títulos. Para evitar esta complejidad, Sharpe propone relacionar la evolución de la rentabilidad de cada activo financiero con un determinado índice, normalmente macroeconómico, únicamente. Este fue el denominado modelo diagonal, debido a que la matriz de varianzas y covarianzas sólo presenta valores distintos de cero en la diagonal principal, es decir, en los lugares correspondientes a las varianzas de las rentabilidades de cada título.

Otro modelo importante es el *Capital Asset Pricing Model* puede traducirse también como **Modelos de equilibrio de los Activos Financieros** intenta explicar cómo podemos obtener el precio de determinados activos financieros con relación al nivel de riesgo de cada uno de ellos, más precisamente, lo que este modelo busca es encontrar el precio justo de cada activo que asegure al inversor un retorno que compense el riesgo de dicho activo siempre que sea mantenido en una cartera bien diversificada [López, 2003].

Los autores de este modelo fueron los economistas William Sharpe [Sharpe, 1963], John Lintner [Lintner, 1965], Jan Mossin [Mossin, 1966] y Jack Treynor [Treynor, 1965]. Este modelo se apoya en la Teoría de la Cartera de Markowitz, pero agrega a los supuestos ya utilizados por Markowitz algunos más:

- Los inversores eligen sus carteras sobre la base del retorno esperado y el riesgo únicamente.
- Los inversores son aversos al riesgo y buscan maximizar el valor esperado de los rendimientos.
- Todos los inversores tienden al mismo horizonte de decisión en cuanto a las inversiones
- En el mercado hay competencia perfecta, no existen costos de transacción ni impuestos a la renta, capitales y transferencia de títulos, todos los activos son infinitamente divisibles, la información es gratuita y está al alcance de todos los inversores y estos pueden endeudarse y prestar a la misma tasa sin limitaciones.
- Existe homogeneidad en las expectativas y en el conjunto de inversiones factibles.

Siguiendo como alternativa a las teorías clásicas, la optimización de enjambre de partículas, ha recibido una gran atención en muchas aplicaciones y áreas de investigación durante los últimos años, dado a su carácter evolutivo ha dado pie para una gran cantidad de aplicaciones, tales como en problemas electromagnéticos, síntesis de agrupaciones lineales y entrenamiento de redes neuronales. En la actualidad existen una serie de variaciones del algoritmo PSO tradicional, las cuales mejoran algunas características, agregando una mayor complejidad al algoritmo tradicional.

A continuación se presentan las aplicaciones listadas en el párrafo anterior y además cabe destacar que el uso de PSO en algunos de estos casos resulta como híbrido con GA.

- **Electromagnetismo.** [Alfassio *et al.*, 2005] presenta un algoritmo híbrido evolutivo llamado GSO (Genetical Swarm Optimization) producto de la combinación de GA con PSO. En general, debido a la rápida búsqueda global en el espacio sin quedar atrapado en mínimos locales, GSO puede ser adoptado para resolver adecuadamente problemas de optimización en la síntesis de arrays lineales y planos, en materiales EBG o en el diseño de estructuras de protección.

- **Síntesis de Arrays.** [Correa *et al.*, 2005] compara PSO y Gas en la síntesis de arrays concluyendo que la aplicación de ambos metidos aplicados a la síntesis de alimentaciones en agrupaciones lineales de antenas demuestra la mutua validez pero que la sencillez de implementación, ajuste, rapidez de convergencia priman a PSO frente a los Gas.

- **Entrenamiento de RNAs.** En [Shen *et al.*, 2004] se ocupa un híbrido, formado por 2 variantes de PSO, para calcular los pesos de una RNA y definir la estructura, ambas entrenadas de manera simultánea demostrando una rápida convergencia. Por otro lado, [Noman y Mariyam, 2009] trabajan el entrenamiento híbrido de una red RBF mediante el uso de PSO. Los resultados se comparan con los obtenidos en estudios

previos realizados con Backpropagation y RBF, estos reflejan que PSO es mucho mejor tanto en términos de convergencia y en tasas de error.

4. Modelo Teórico

4.1 Modelo de Markowitz

Harry Markowitz [Markowitz, 1952] desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

Una vez establecida la **aversión** por parte de los inversores hacia el riesgo, éstos desearán conocer el nivel de riesgo que soportan. Los inversores estarán interesados por conocer la **rentabilidad media** de su título, pero también el nivel de variabilidad de sus resultados alrededor de esa media. Esta variabilidad quedará definida por la **varianza**. Por eso el modelo de Markowitz es un modelo media-varianza

Para determinar la frontera eficiente, primeramente se obtiene las rentabilidades y volatilidad o varianza de los activos del mercado, en este caso, del IPSA. Luego se obtiene la covarianza que existe entre los activos. La covarianza explica sobre la dependencia existente entre un activo y otro, pero no sobre lo fuerte que puede ser esta dependencia.

Para resolver este problema se utiliza el coeficiente de correlación lineal, que igualmente mide la dependencia de los activos, pero a diferencia de la covarianza, ésta permite determinar la intensidad de dicha dependencia. Las ecuaciones que permiten obtener dicha frontera son las siguientes:

$$\text{Min} \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (4.1.1)$$

Siendo (4.1.1) la varianza del i -ésimo activo. Cuando $i = j$, σ_{ij} representa a la varianza de cada uno de los activos que conforman el portafolio. Cuando $i \neq j$, σ_{ij} representa la covarianza entre el activo i con el activo j , la cual está representada en la fórmula (4.1.2).

El riesgo de un portafolio no sólo depende del riesgo de los activos que lo componen, sino también de la relación entre los mismos. Esta relación se puede medir mediante la covarianza de los posibles rendimientos de los activos implicados, expresada en función de sus correlaciones, es decir, a través de: $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, donde ρ_{ij} es el

coeficiente de correlación el cual se presenta en la fórmula (4.1.3), σ_i y σ_j son las desviaciones estándar de los activos y cuya fórmula es representada por (4.1.4).

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (x_i - E(R_i))(x_j - E(R_j))}{n} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (4.1.2)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (x_i - E(R_i))(x_j - E(R_j))}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - E(R_i))^2 \right]} \sqrt{\left[\sum_{j \neq i}^n (x_j - E(R_j))^2 \right]}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})} \quad (4.1.4)$$

$$\text{Max } E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i * E(R_i) = V^* \quad (4.1.5)$$

Siendo (4.1.5) el rendimiento esperado del portafolio, donde (R_p) es la suma ponderada de los rendimientos, es decir, $R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n$, en que x_i es la participación invertida en cada uno de los rendimientos; en otras palabras es la esperanza matemática de dicho activo, el cual está sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4.1.6)$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Esto quiere decir que:

- Toda la riqueza disponible debe estar invertida en la cartera, y
- Que los pesos o ponderaciones de los activos incluidos en la cartera deben ser positivos, en otras palabras, no pueden invertirse proporciones negativas.

Por todas estas cuestiones se debe de asumir que es inevitable para la creación de un modelo óptimo de selección de carteras el tratamiento conjunto de la rentabilidad esperada y del riesgo. Sin embargo, desde un principio, existen **dos condicionantes** fundamentales:

- Para que el modelo se pueda desarrollar gráficamente el número de alternativas de inversión debe ser manejable, es decir, sólo se puede trabajar con dos o tres posibilidades. A partir de ahí, existen grandes dificultades para extrapolar al caso general de n posibilidades de inversión.
- Se deben asumir determinados postulados de probabilidad estática cuando el estudio trata un análisis dinámico. De esta manera, habría que reconocer que la distribución de probabilidad de los rendimientos de cualquier alternativa de inversión depende de la variable tiempo.

4.2 Algoritmo PSO

Una partícula se define como un vector formado por la velocidad, posición y memoria de la partícula. PSO se inicializa con partículas aleatorias y optimiza sus soluciones a medida que aumentan las iteraciones. El enjambre es representado por $X = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ donde $i=1,2,\dots, n$ corresponde a la i -ésima partícula y $d=1,2,\dots, D$ corresponde a sus dimensiones.

En cada iteración cada una de las partículas del enjambre se actualizada en base a dos valores importantes:

- Mejor posición encontrada por una **partícula**, conocida como p_{best} . El p_{best} de una i -ésima partícula se representa por $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{id})$.
- Mejor posición que ha encontrado el **enjambre**, conocida como p_{gbest} .

Ambos de estos valores se actualizan en cada iteración y se utilizan ajustar la velocidad con la que se mueve una determinada partícula en cada una de las dimensiones. La influencia que tiene la mejor posición personal sobre la velocidad de una partícula se conoce como el **factor de cognición** y la influencia de la mejor partícula del enjambre se conoce como **componente social**.

En [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001] se incorpora el **factor de inercia** w en la ecuación que determina la velocidad, de tal manera de que se balancee la búsqueda global y local.

$$v_{id}(t+1) = w \cdot v_{id}(t) + c_1 r_1 (p_{id}(t) - x_{id}(t)) + c_2 r_2 (p_{gd}(t) - x_{id}(t)) \quad (4.2.1)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (4.2.2)$$

Donde r_1 y r_2 corresponden a valores aleatorios independientes en el intervalo $[0,1]$, y c_1 y c_2 corresponden a las variables que controlan la influencia de las componentes cognitiva y social.

Para prevenir que las velocidades de las partículas incrementen infinitamente, se incorpora un parámetro V_{max} que delimita el rango de velocidad $[-V_{max}, V_{max}]$ que puede tomar una partícula.

$$if(v_{ij} > V_{max}) \quad or \quad (v_{ij} < -V_{max}) \quad (4.2.3)$$

$$v_{ij} = sign(v_{ij}) \cdot V_{max} \quad (4.2.4)$$

A continuación se presentan los seis pasos relevantes que constituyen el algoritmo de PSO Tradicional:

- **Paso 1:** Se debe definir el tamaño n del enjambre y se deben inicializar las posiciones de las velocidades de las partículas en un espacio D-dimensional.
- **Paso 2:** Evaluar fitness de cada partícula en base a algún criterio de optimización (función de costo, mínimos cuadrados, error cuadrático medio).
- **Paso 3:** Comparar el fitness de cada partícula obtenido en el Paso 2 con el fitness de su mejor posición personal. Si el fitness actual es mejor que el histórico, se debe actualizar esta mejor posición por la nueva obtenida.
- **Paso 4:** Comparar el fitness actual de cada partícula con el mejor fitness encontrado por el enjambre, si el actual es mejor, entonces se actualiza la mejor posición global con el valor de la posición actual.
- **Paso 5:** Ajustar la velocidad y posición de la partículas en base a las ecuaciones de velocidad y posición descritas en este capítulo. Se debe verificar que las partículas no sobrepasen la velocidad máxima definida V_{max} .
- **Paso 6:** Si se cumple algún criterio de término, en caso contrario se debe volver al Paso 2. Los criterios de términos más conocidos pueden ser:
 - Número máximo de iteraciones
 - Numero de iteraciones sin mejoras
 - Error mínimo de la función objetivo

4.2.1 Parámetros PSO.

El ajuste de los parámetros condicionará el rendimiento posterior del algoritmo de optimización. La selección está directamente ligada a la naturaleza del problema que se desea optimizar, siendo preciso lograr un balance óptimo entre la exploración y la convergencia. La definición de la función **fitness** cumple un papel no menor, dado que una función que no introduzca una métrica adecuada para pesar la bondad de cada partícula, hará emerger las carencias del PSO, las cuales erróneamente pueden asociarse con el algoritmo.

Para **acotar la velocidad de la partícula** se define un valor máximo V_{\max} , el cual restringe a la velocidad en cada dimensión del intervalo $[-V_{\max}, V_{\max}]$. Si el valor de V_{\max} tiende a ser demasiado pequeño, las partículas exploraran el espacio de soluciones muy lento y podrán quedar atrapadas dentro de soluciones locales. Por otro lado, la no restricción de la velocidad llevaría a la no convergencia del enjambre en un punto, ocurriendo lo que se conoce como **explosión del PSO**, el cual corresponde a un comportamiento oscilatorio y creciente de la posición de las partículas provocando la ineficiencia del PSO como algoritmo de optimización.

El **peso de inercia w** , regula la compensación entre la capacidad de exploración global y locales del enjambre. A mayor w , facilita la exploración global y en caso contrario facilita la exploración local. En un comienzo w se asigna como una constante, sin embargo, resultados experimentales recomiendan la asignación de mayores valores en un comienzo para que en una primera instancia se examine de manera global el espacio de búsqueda y gradualmente se disminuya para comenzar a conseguir soluciones más refinadas.

Los parámetros c_1 y c_2 , luego de una buena sintonización, pueden acelerar la convergencia del algoritmo y aliviarlo de los mínimos locales. Típicamente a estos parámetros se les asigna 2 o 1.49. Trabajos recientes revelan que podrían ser un parámetro cognitivo c_1 más grande que el social c_2 , siempre y cuando se cumpla que $c_1 + c_2 \leq 4$ [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001].

El **tamaño de la población** debe ser seleccionado de manera rigurosa, dado que valores muy grandes pueden explorar de manera minuciosa el espacio de búsqueda pero costo computación se eleva de manera considerable debido al aumento del número de evaluaciones de la función fitness. Generalmente se utilizan poblaciones ente 10 y 50 o 100 y 200 para problemas completos [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001].

4.2.3 Variaciones del Algoritmo PSO

En la actualidad existen una serie de variaciones del algoritmo PSO tradicional, las cuales incorporan nuevos parámetros, nuevos métodos de actualización, e híbridos con otros algoritmos. La mayoría de éstas mejoran características como la solución encontrada y la velocidad de convergencia. Pese a esto, algunas versiones agregan un mayor nivel de complejidad a la versión tradicional. A continuación se describen algunas variaciones.

4.2.3.1 PSO con Peso de Inercia Dinámico

Los autores [Jiao, Lian y Gu, 2006] proponen en esta variación del algoritmo tradicional una fórmula iterativa de un algoritmo PSO con peso de inercia dinámico, el cual usa el peso de inercia dinámico que decrece de acuerdo al incremento iterativo de la generación.

El fundamento de PSO se basa en la hipótesis de que el intercambio social de la información entre sus congéneres ofrece una ventaja evolutiva. El modelo estándar PSO se basa en los siguientes dos factores: (1) La memoria autobiográfica, que recuerda la

mejor posición previa de cada individuo P_i en el enjambre, (2) El conocimiento de grupo, que es la mejor solución P_g encontrada en la actualidad por la población.

Por lo tanto, el intercambio de información entre sus congéneres se logra mediante el empleo de la información pública de P_g . No hay intercambio de información entre los individuos, salvo que P_g transmita la información a los otros individuos. Por lo tanto, la población puede perder la diversidad y es más probable a limitar la búsqueda en torno a mínimos locales si se compromete demasiado pronto en la búsqueda de los mejores globales encontrados hasta ahora.

Se supone que el espacio de búsqueda es D-dimensional y que m partículas forman la colonia. La i -ésima partícula representa un vector D-dimensional $X_i = (i = 1, 2, \dots, m)$. Esto significa que la i -ésima partícula se encuentra en $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})(i=1,2,\dots,m)$ en el espacio de búsqueda. La posición de cada partícula es un resultado potencial. Se podría calcular el fitness de la partícula colocando su posición dentro de una función objetivo designado. Cuando el fitness es más bajo, el X_i es “mejor”.

La velocidad “voladora” de la i -ésima partícula es también un vector D-dimensional, denotado como $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$. La mejor posición de la i -ésima partícula se denota como $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$ y la mejor posición de la colonia como $P_g = (p_1, p_2, \dots, p_D)$ respectivamente.

$$V_i(k+1) = \omega' V_i(k) + c_1 r_1 (P_i(k) - X_i(k)) + c_2 r_2 (P_g(k) - X_i(k)) \quad (4.2.3.1.1)$$

$$X_i(k+1) = X_i(k) + V_i(k+1) \quad (4.2.3.1.2)$$

donde $w' = w * u^{-k}$ ($w \in [0, 1]$, $u \in [1.0001, 1.005]$). w' es un peso de inercia [Shi y Eberhart, 1997], el cual es inicializado típicamente en el rango de $[0, 1]$. Un peso de inercia grande facilita la exploración global y un peso de inercia más pequeño tiende a facilitar la explotación local para afinar el área de búsqueda actual. Las variables c_1 y c_2 son constantes de aceleración [Eberhart y Shi, 2001], los cuales controlan cuán lejos la partícula se moverá en una sola iteración, y son los mismos que en (4.2.1) y (4.2.2).

Los pasos que sigue el IPSO son los siguientes:

Paso 1: dejar que el número de iniciación iterativo sea $k=0$, la inicialización del tamaño de la población debe ser p_{size} , el número de terminación de la iteración será Max_{gen} . Dar el nacimiento a p_{size} para inicializar las partículas. Calcular el fitness de cada partícula de iniciación de la población, y dejar que la primera generación P_i sean partículas de inicialización, y elegir la partícula con el mejor fitness de todas las partículas así como el P_g ($gBest$).

Paso 2: usando (4.2.3.1.1) y (4.2.3.1.2) da nacimiento a la generación siguiente de partículas X_i . Si el fitness es mejor que el mayor fitness $P_i(k)$ (pBest) en historial, dejar el valor actual como el nuevo $P_i(k)$. Elegir la partícula con el mejor fitness de todas las partículas como el $P_g(k)$. Si $k == \text{Maxgen}$, ir al Paso 3, sino dejar $k = k + 1$ e ir al Paso 2.

Paso 3: sacar el P_g .

La búsqueda es un proceso repetitivo, y el criterio de parada son el número máximo de iteraciones alcanzadas o si es satisfecha la condición de error mínima. La condición de parada depende del problema a optimizar. En el algoritmo IPSO, cada partícula del enjambre comparte información mutua de manera global y beneficios de experiencias nuevas y previas de todos los congéneres durante el proceso de búsqueda.

4.2.3.2 PSO con Adaptación Dinámica

En [Yang y Yuan, 2007] los autores proponen una modificación a la actualización de la velocidad de la partícula, modificando los pesos de inercia de cada partícula, con el fin de evitar una temprana convergencia del algoritmo en el óptimo local.

Este fenómeno se llama “similitud”, el cual reduce el área de búsqueda de las partículas, restringiendo el área de búsqueda de las partículas. Al ampliar el área de búsqueda se necesita tanto incrementar el número de partículas o disminuir la habilidad de las partículas para seguir el mejor valor gbest presente.

Los autores proponen una regla de velocidad y posición, dados por

$$v_i^{t+1} = \omega_i^t v_i^t + c_1 r_1 (pbest_i^t - x_i^t) + c_2 r_2 (gbest^t - x_i^t) \quad (4.2.3.2.1)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2.3.2.2)$$

en comparación con el PSO tradicional, la fórmula de actualización de velocidad (4.2.3.2.1) tiene dos características diferentes: (1) el valor de r_1 y r_2 sólo varían estocásticamente con el número de partículas e iteraciones.

En otras palabras, en la $(t + 1)$ iteración cada dimensión de la i -ésima partícula comparte el mismo valor aleatorio. (2) El peso de inercia también es variable con el número de partículas e iteraciones. El peso de inercia se ve afectada por el estado envolvente del algoritmo y determinado por el factor de evolución de velocidad de cada partícula y el factor de agregación gradual del enjambre, definidos en la siguiente fórmula:

(1) Factor de evolución de velocidad

$$h_i^t = \frac{\left| \min\left(F\left(\text{pbest}_i^{t-1}\right), F\left(\text{pbest}_i^t\right)\right) \right|}{\left| \max\left(F\left(\text{pbest}_i^{t-1}\right), F\left(\text{pbest}_i^t\right)\right) \right|} \quad (4.2.3.2.3)$$

donde $F(\text{pbest}_i^t)$ es el valor del fitness de pbest_i^t según la fórmula anterior se obtiene que $0 < h \leq 1$. Este parámetro toma en cuenta la historia que tiene cada partícula, y refleja la evolución de velocidad de cada partícula, esto es, a menor el valor de h , mayor la velocidad.

(2) Agregación gradual

$$s = \frac{\left| \min\left(F_{t\text{best}}, \bar{F}_t\right) \right|}{\left| \max\left(F_{t\text{best}}, \bar{F}_t\right) \right|} \quad (4.2.3.2.4)$$

donde \bar{F}_t es el fitness principal de todas las partículas en el enjambre en la i -ésima iteración. Notar que $F(\text{g}_{\text{best}})$ no puede ser sustituido por $F_{t\text{best}}$, desde que $F_{t\text{best}}$ representa el valor óptimo encontrado en esta iteración, mientras $F(\text{g}_{\text{best}})$ denota el valor óptimo que todo el enjambre ha encontrado hasta la i -ésima iteración. El valor del peso de inercia debería variar con la evolución de velocidad y el factor de agregación gradual del enjambre. De esta manera, ω puede ser escrito en función de los parámetros h y s ,

$$\omega_i^t = f\left(h_i^t, s\right) \quad (4.2.3.2.5)$$

El propósito de la variación de ω es darle al algoritmo una mejor habilidad para buscar y salirse del óptimo local. Es por eso que para prevenir la similitud del enjambre, la habilidad de saltar del óptimo local debe ser mejorada, esto es, cuando el factor de agregación gradual crece, el peso de inercia debería incrementar proporcionalmente, el cual está dado por:

$$\omega_i^t = \omega_{\text{ini}} - \alpha(1 - h_i^t) + \beta_s \quad (4.2.3.2.6)$$

donde ω_{ini} es el valor inicial de ω y se inicializa en $\omega_{ini} = 1$. Desde $0 \leq h \leq 1$ y $0 \leq s \leq 1$, se puede obtener que $1 - \alpha \leq \omega \leq 1 + \beta$. La elección de α y β están en el rango $[0,1]$.

4.3 Modelo propuesto de Portafolio con PSO

La literatura ha mostrado que se han realizado muchos y variados estudios para el problema de optimización de portafolio, y el uso de heurísticas para realizar la optimización de portafolios es bastante alto. Pero en la mayoría de estos estudios ninguno hace referencia a la optimización por enjambre de partículas.

Como se ha explicado anteriormente en este documento, el problema de optimización de portafolio radica en que se quiere encontrar la manera óptima de invertir una cierta cantidad de dinero en bienes o acciones, maximizando la rentabilidad y minimizando el riesgo en la decisión de invertir por parte del inversionista.

Markowitz formuló el teorema fundamental del portafolio de media-varianza, el cual explica la compensación entre la media y la varianza, siendo representados por la rentabilidad y riesgo respectivamente. Por lo tanto, se utilizará el modelo de Markowitz como base para resolver el problema de la volatilidad en esta investigación.

Sin embargo, según [Cura, 2008] este modelo estándar no contiene ninguna cardinalidad o restricciones, los cuales son restricciones de números de acciones y los límites superiores e inferiores de la proporción de cada acción en el portafolio, respectivamente. Es por esto que el modelo propuesto por [Chang, 2000] y [Fernández y Gómez, 2007], que es un derivado del modelo de Markowitz y que se denomina “modelo de media-varianza con cardinalidad restringida (MVCR o CCMV en inglés)”, será de gran importancia para poder lograr un mayor retorno de las acciones a menor riesgo.

El modelo de Markowitz se presenta a continuación, como base del MVCR, el cual está sujeto a (4.1.1), (4.1.2) y (4.1.3), donde N es el número de diferentes acciones, σ_{ij} es la covarianza entre los retornos de las acciones i y j , x_i es la proporción de acción i en el portafolio, $E(R_i)$ es el retorno medio de la acción i y V^* es el retorno medio esperado del portafolio. Se introduce además un parámetro de aversión al riesgo $\lambda \in [0,1]$, con el cual el modelo queda descrito como:

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1-\lambda) \left[\sum_{i=1}^N x_i R_i \right] \quad (4.3.1)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (4.3.2)$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Cuando λ es cero, el modelo maximiza el retorno medio del portafolio, sin tomar en cuenta la varianza (riesgo). En contraste, cuando λ es igual a 1, el modelo minimiza el riesgo del portafolio sin tomar en cuenta el retorno medio. Por lo tanto se puede decir que la sensibilidad del inversor al riesgo crece cuando λ se acerca a la unidad, y decrece cuando λ se acerca a cero.

Cada caso con diferentes valores de λ podría tener un valor de función objetivo distinto, el cual se compone de la media y varianza. Con esto se obtiene el trazo de las intersecciones de la media y varianza, con lo que se dibuja una curva continua que tiene el nombre de frontera eficiente según la teoría de Markowitz.

Desde que cada punto en una curva de frontera eficiente indica un óptimo, el problema de optimización de portafolio se transforma en un problema de optimización multi-objetivo. Por lo tanto, se utilizará una definición óptima en donde las soluciones factibles al problema de portafolio serán una solución óptima si no hay ninguna otra solución factible que mejore un objetivo sin hacer el otro peor.

Para poder describir de mejor manera el modelo MVCR se deben agregar variables adicionales. Como se mencionó anteriormente en esta sección, hay dos restricciones en el modelo MVCR en adición al modelo original.

La primera es restringir K , que es el número de acciones en el portafolio. Si la variable de decisión $z_i \in \{0,1\}$ es 1, la acción i será incluida en el portafolio, sino no lo hará. La segunda restricción es que una proporción de acción incluida está en los límites inferiores y superiores, ε_i y δ_i respectivamente. Así, el modelo MVCR queda:

$$\min \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^N x_i R_i \right] \quad (4.3.4)$$

sujeto a:

$$\sum_i^N x_i = 1 \quad (4.3.5)$$

$$\sum_i^N z_i = K \quad (4.3.6)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3.7)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

En la presencia de la cardinalidad y límites de restricciones, la frontera eficiente resultante, puede ser distinta de la obtenida por el modelo estándar.

4.3.1 Enfoque PSO

Para resolver el problema de optimización de portafolio se introduce en esta investigación el algoritmo PSO, el cual es uno de los últimos métodos evolutivos de optimización y que está basado en la interacción y comunicación social como lo es las bandadas de aves o los bancos de peces. El enjambre en PSO consiste de una población y cada miembro de la población se llama partícula, la cual representa a un portafolio, como objeto de estudio.

Este estudio sigue la “topología de la vecindad gbest” descrita por [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001], de acuerdo a que cada partícula recuerda su mejor posición previa y la mejor posición previa visitada por cualquier partícula de todo el enjambre, es decir, la partícula se mueve hacia su mejor posición previa y hacia la mejor partícula.

Se deben considerar ciertos factores para poder aplicar PSO al portafolio. Debería haber N dimensiones, cada uno representando una acción para cada partícula. En efecto, esta consideración organizará la formación del enjambre con dos modificaciones: la primera, cada partícula incluye variables de proporción denotadas por x_{pi} ($p= 1, \dots, P$, donde P es el número de partículas en el enjambre); la segunda, cada partícula incluye variables de decisión denotadas por z_{pi} . Así, el número de dimensiones que una partícula posee será de $2 \times N$.

Se debe asociar a cada partícula un valor fitness, así una partícula se mueve en el espacio de soluciones respecto a su posición previa donde ha encontrado el mejor fitness, y la mejor posición del vecindario donde éste ha encontrado el mejor fitness. La función fitness para este estudio es definido como:

$$f_p = \lambda \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{pi} x_{pi} z_{pj} x_{pj} \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^N z_{pi} x_{pi} R_i \right] \quad (4.3.1.1)$$

donde f_p es el fitness de la partícula p .

En cada una de las iteraciones, la mejor posición personal de la partícula y el mejor vecino en el enjambre son actualizados si una mejora se observa en cualquiera de los mejores fitness. Para efecto del movimiento de la partícula, éste depende de la velocidad actual que posea la partícula, la cual se define como:

$$v_{z_{pi}}^{t+1} = v_{z_{pi}}^t + \omega_1 \times (Gz_{bi} - z_{pi}^t) + \omega_2 \times (Gz_{pi} - z_{pi}^t) \quad (4.3.1.2)$$

$$v_{x_{pi}}^{t+1} = \begin{cases} v_{x_{pi}}^t + \omega_1 \times (Gx_{bi} - x_{pi}^t) + \omega_2 \times (Gx_{pi} - x_{pi}^t) & \text{si } z_{pi}^{t+1} = 1, \\ v_{x_{pi}}^t & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.3.1.3)$$

donde ambos ω_1 y ω_2 denotan números aleatorios uniformes entre 0 y 2, t y b denotan el número de la iteración y a la mejor partícula en el enjambre respectivamente, $v_{x_{pi}}^t$ describe la velocidad de la partícula p en la dimensión x_i , y $v_{z_{pi}}^t$ describe la velocidad de la partícula p en la dimensión z_i . Como se puede apreciar en (4.3.1.3), $v_{x_{pi}}^{t+1}$ se actualizará si la acción i es seleccionada por la partícula (o portafolio) p en la iteración $t+1$, con lo que $z_{pi}^{t+1} = 1$, z_{pi}^{t+1} es definido en (4.3.1.4). Gx_{pi} describe la mejor posición previa de la partícula p en la dimensión x_i , y Gz_{pi} describe la mejor posición previa de la partícula p en la dimensión z_i . Así, la partícula p se mueve en la iteración $t+1$ de la siguiente manera:

$$z_{pi}^{t+1} = \text{round} \left(\frac{1}{1 + e^{-\zeta}} - \alpha \right) \quad (4.3.1.4)$$

$$x_{pi}^{t+1} = \begin{cases} x_{pi}^t + vx_{pi}^{t+1}, & \text{si } z_{pi}^{t+1} = 1 \\ x_{pi}^t & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.3.1.5)$$

donde $\zeta = z_{pi}^t + vz_{pi}^{t+1}$ y α es seteado en 0.06 para una partícula dada, si la velocidad en la dimensión z_i^t es cero, la partícula no se moverá en esa dimensión en la iteración $t+1$.

5. Análisis de Resultados

Los datos o información que se utilizaron en este estudio provienen del IPSA, proporcionados por la Bolsa de Comercio de Santiago. El IPSA (Índice de Precios Selectivo de Acciones) es la selección de las 40 sociedades con mayores montos transados en la Bolsa de Comercio de Santiago ponderados trimestralmente y cuya capitalización bursátil supere los US\$200.000.000; de este índice se tomaron cinco acciones que corresponden a las más transadas o importantes en la bolsa nacional.

Las acciones que se tomaron son: Lan, SQM-B, Cencosud, Banco de Chile y Copec. Para efectos de los datos de rentabilidad, se tomaron las rentabilidades mensuales del año 2005 - 2010, para lo cual se calculó la rentabilidad media de cada acción.

El hardware y software utilizado para realizar este estudio fue el siguiente:

- Notebook Toshiba Satellite.
- Procesador Intel Pentium 4, 2.6 GHz.
- HDD de 160 Gb y memoria RAM de 2Gb.
- Windows XP SP3.
- MatLab 7.7.0 R2008b
- Microsoft Excel 2007

Se realizó, además, el cálculo de la rentabilidad por medio de ventanas deslizantes de cinco meses, de manera de poder apreciar la variabilidad de la rentabilidad de las acciones en estudio.

La tabla 5.1 refleja la rentabilidad media de las acciones Lan, SQM-B, Cencosud, Banco de Chile y Copec, durante un período de cinco años (2005 – 2010).

Acción	Lan	SQM-B	Cencosud	Bco. de Chile	Copec
Rentabilidad Media	2,0834	3,1973	2,0439	1,0638	1,0269

Tabla 5.1 Rentabilidad media de acciones de 5 años

En la tabla 5.1 se observa que la acción SQM-B durante los 5 años posee una mayor rentabilidad media con 3,1973, donde le sigue Lan con rentabilidad media de 2,0834, Cencosud con rentabilidad media de 2,0439, Banco de Chile con rentabilidad media de 1,0638, y finalmente Copec con rentabilidad media de 1,0269, siendo la acción con peor rentabilidad media durante el periodo 2005 - 2010.

La tabla 5.2 representa el promedio de las acciones por cada año.

LAN	SQM-B	CENCOSUD	COPEC	BCO. CHILE	PROMEDIO	PERIODO
1,686	4,651	0,360	0,188	-0,093	1,3583	2005
2,898	2,137	4,380	3,739	2,581	3,1468	2006
3,298	1,992	1,846	2,337	-1,023	1,6897	2007
-2,305	6,394	-6,116	-4,851	-1,317	-1,6388	2008
2,892	2,270	6,138	4,162	2,624	3,6170	2009
6,040	2,839	6,679	1,563	3,788	4,1818	2010

Tabla 5.2 Promedio de las acciones por año

De la tabla 5.2 podemos observar que en el año 2010 se obtiene el mayor promedio de las cinco acciones en estudio, con un 4,1818. Por otro lado, el año 2008 se obtiene el peor promedio con un -1,6388. Este mal promedio se relaciona directamente con la crisis económica a nivel mundial ocurrida en el año 2008.

En la tabla 5.3 se puede apreciar el promedio y la desviación estándar de las acciones en estudio (Lan, SQM-B, Cencosud, Banco de Chile, Copec) utilizando el cálculo realizado por el método de las ventanas deslizantes.

Promedio	Desviación Estándar
1,673	2,713

Tabla 5.3 Promedio y Desviación Estándar ventanas deslizantes

De la tabla 5.3 se puede observar que la desviación estándar está levemente alejada de la rentabilidad, por lo cual la distribución de las rentabilidades de las acciones no es tan homogénea como se podría desear. De este modo se ha podido comprobar la variabilidad de la distribución de las rentabilidades mensuales de las acciones en estudio.

Una vez obtenido estos datos, se calculan las desviaciones estándar de cada acción con la fórmula (4.1.4) descrita en el capítulo anterior. Posteriormente, se pasa a calcular la matriz de covarianza C y de correlaciones, con las fórmulas (4.1.2) y (4.1.3) respectivamente. En las tablas 5.4 y 5.5 se pueden apreciar las desviaciones estándar y matriz de covarianza, respectivamente.

Acción	Lan	SQM-B	Cencosud	Bco. de Chile	Copec
Desviación Estándar	7,2747	10,2040	8,5031	6,0494	5,6644

Tabla 5.4 Desviación estándar de acciones

De la tabla 5.4, se puede apreciar que la acción SQM-B posee la mayor desviación estándar, mientras que la acción Copec posee la menor desviación estándar.

LAN	SQM-B	CENCOSUD	COPEC	BCO. CHILE
52,2344	-3,5948	10,8710	7,3663	6,4184
-3,5948	102,7684	18,4844	3,4797	14,5218
10,8710	18,4844	71,3635	29,4828	17,7416
7,3663	3,4797	29,4828	36,1204	-11,5825
6,4184	14,5218	17,7416	11,5825	31,6688

Tabla 5.5 Matriz de Varianza - Covarianza

Se observa en la tabla 5.5 que la diagonal de la matriz de covarianza representa a las varianzas de cada acción, es decir, las desviaciones estándar al cuadrado.

Con estos datos, se procede a determinar la proporción de capital x_i que se debe invertir en cada activo que compone la cartera. Primero, se procede a multiplicar la inversa de la matriz C de covarianzas por un vector de soluciones B . De este modo se obtienen el vector de ponderadores X . Este vector se transpone (X^T) para que al multiplicarlo con el vector de rentabilidad media R no se produzca un error de dimensiones. Con esto se obtiene el rendimiento esperado de la cartera.

El cálculo se realiza por medio de un sistema de ecuaciones lineales matriciales, donde llegamos a la conclusión de:

Sea X = vector de las incógnitas 5×1 .

Sea C = Matriz de covarianzas 5×5 .

Sea B = vector de soluciones 5×1 .

Sea R = vector de rentabilidad 5×1 .

$$X = C^{-1} * B \quad (5.1)$$

$$E_p = X^T * R \quad (5.2)$$

Para poder obtener el máximo retorno esperado de la cartera de acciones, se incorpora al modelo de Markowitz el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas o PSO tradicional y sus variaciones IPSO y DAPSO, para de esta forma lograr una mayor diversificación de las proporciones a invertir.

El algoritmo PSO busca en este espacio de soluciones los mejores rendimientos, y con ello a sus respectivos ponderadores. El algoritmo consta de las siguientes entradas: número de iteraciones, número de partículas y el vector rentabilidad R , de manera que la función de fitness logre encontrar a la mejor partícula y multiplicarla por el vector R , de manera de obtener el mejor retorno esperado E_p .

Debido a que el algoritmo PSO es estocástico, se debe calcular la estabilidad de este algoritmo. Para calcular la estabilidad de PSO, IPSO y DAPSO con sus respectivos parámetros de aversión, se debe ejecutar 30 veces el algoritmo y calcular la media y desviación estándar de cada una de las métricas utilizadas por el algoritmo.

Para esto, se deben calibrar los parámetros de cada tipo de PSO considerando el número de partículas, el número de iteraciones y el peso de inercia. Para los algoritmos PSO, IPSO y DAPSO la cantidad de partículas, número de iteraciones y peso de inercia se determinó según el rendimiento del algoritmo.

5.1 Resultados Modelo Portafolio con PSO

Para determinar la mejor configuración del algoritmo PSO, se realizó la calibración de los parámetros del algoritmo. En la figura 5.1 se aprecia que para el algoritmo PSO el número de partículas óptimo son 40 partículas:

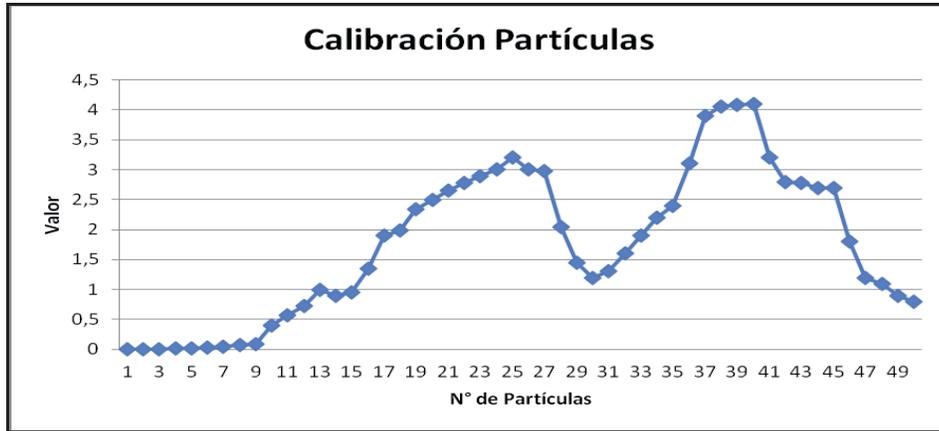


Figura 5.1 Calibración Partículas PSO

Para el nº de iteraciones, se determinó que para 500 iteraciones el algoritmo converge al óptimo, esto según la tabla 5.2:



Figura 5.2 Calibración Iteraciones PSO

Para el peso de inercia correcto, se determinó que con $w=0.8$ el algoritmo obtiene mejores resultados; esto se puede apreciar en la figura 5.3:



Figura 5.3 Calibración Peso Inercia PSO

Por lo tanto, la mejor configuración para el algoritmo PSO se compone de 40 partículas, 500 iteraciones, y de un peso de inercia de 0,8. A continuación se presentan los resultados del algoritmo PSO con la configuración obtenida.

En la tabla A.1, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor PSO con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Por lo tanto, para el Modelo de Portafolio con PSO, los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 2,229%, con un riesgo promedio del 5,353%.
- La desviación estándar es igual a 0,434 lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 2.219%, con un riesgo de 4,930%, como se muestra en la figura 5.4, con una ponderación del capital de un 0% para Cencosud, un 21,77% para Copec, un 0% para Banco de Chile, un 32,05% para SQM y un 46,18% para Lan.

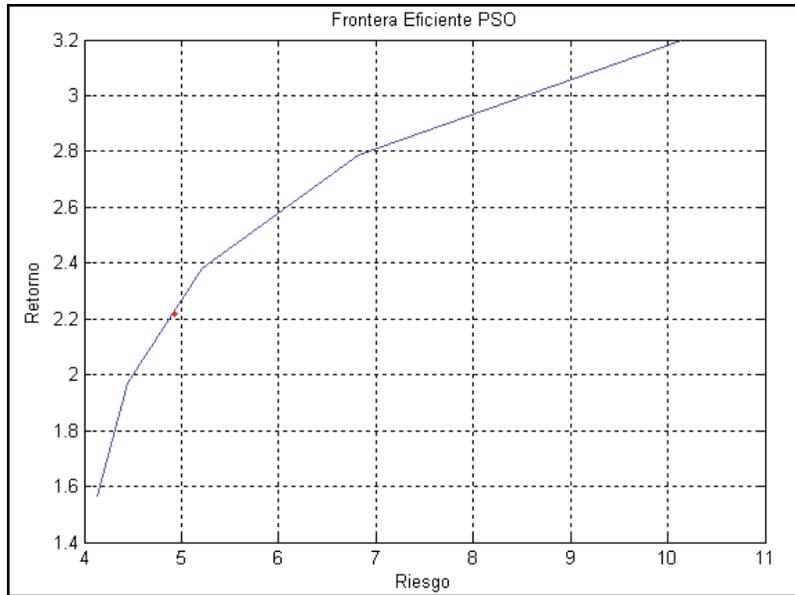


Figura 5.4 Frontera Eficiente con PSO con menor riesgo

En la figura 5.5 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 2,584% de retorno esperado y riesgo 5,802%, con una ponderación del capital de un 0% para Cencosud, un 6,71% para Copec, 0% para Banco de Chile, un 45,25% para SQM y un 48,07% para Lan.

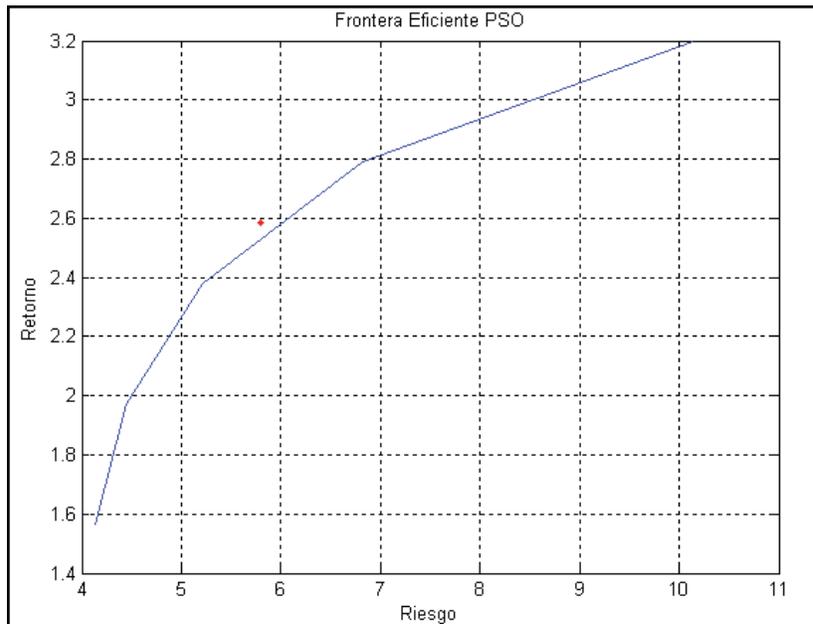


Figura 5.5 Frontera Eficiente con PSO mejor partícula

En la figura 5.6 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad, así como también en la figura 5.7 la convergencia del riesgo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

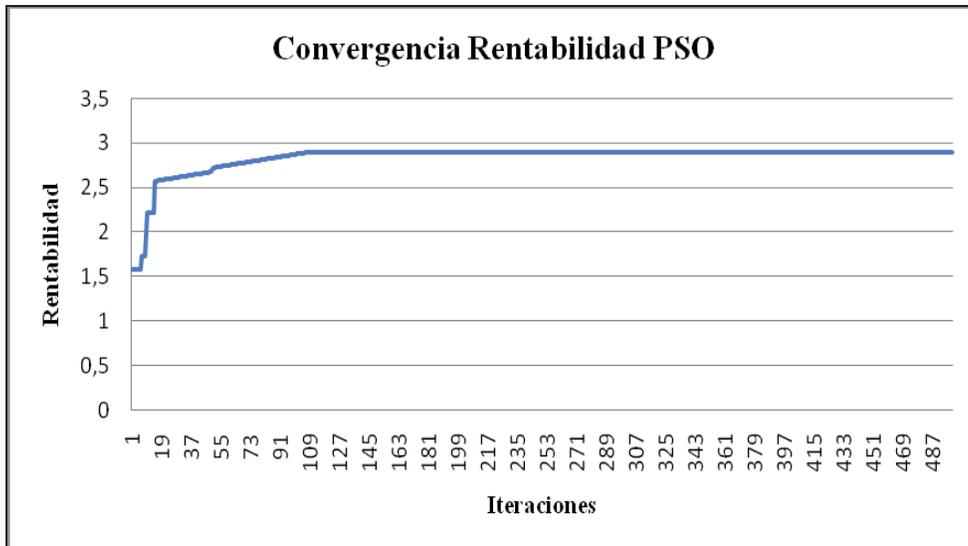


Figura 5.6 Convergencia Rentabilidad PSO

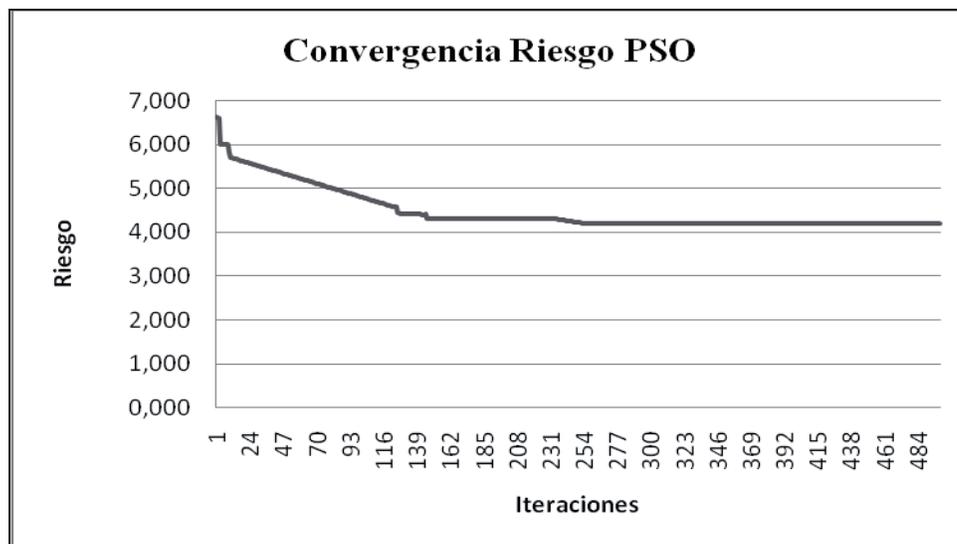


Figura 5.7 Convergencia Riesgo PSO

5.2 Resultados Modelo de Portafolio con PSO y parámetro de aversión

En la tabla A.2, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor PSO-aversión con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Para el Modelo de Portafolio con PSO y parámetro de aversión al riesgo de 0.2, los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 1,896%, con un riesgo promedio del 5,234%.
- La desviación estándar corresponde a 0,2997, lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 1,598%, con un riesgo de 3,766%, como se muestra en la figura 5.8, con una ponderación del capital de un 22,87% para Cencosud, un 15,87% para Copec, un 14,89% para Banco de Chile, un 21,75% para SQM y 24,66% para Lan.

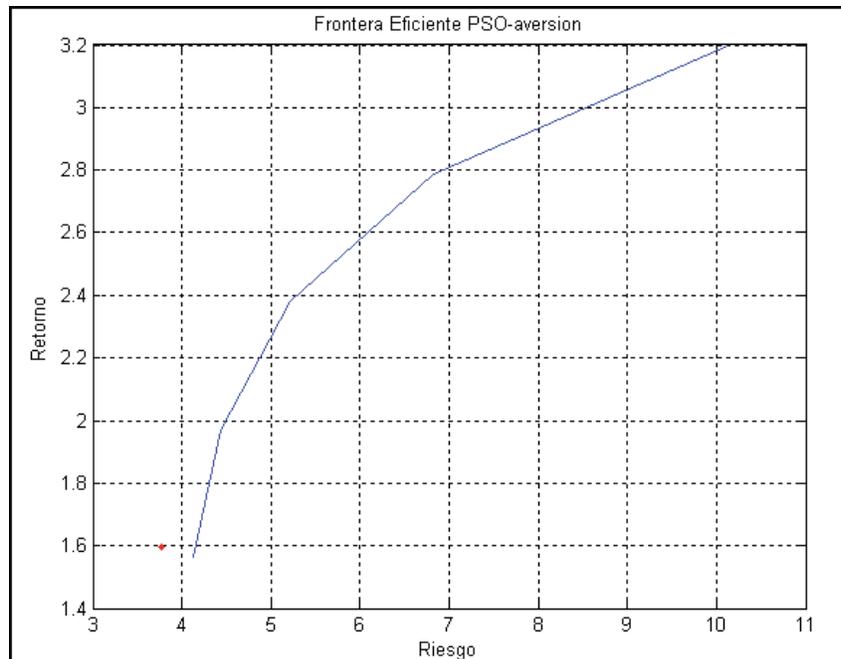


Figura 5.8 Frontera Eficiente con PSO y parámetro de aversión menor riesgo

En la figura 5.9 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 1,948% de retorno esperado y riesgo 4,385%, con una ponderación del capital de un 0% para Cencosud, 7,06% para Copec, 0% para Banco de Chile, 37,96% para SQM, y un 54,98% para Lan.

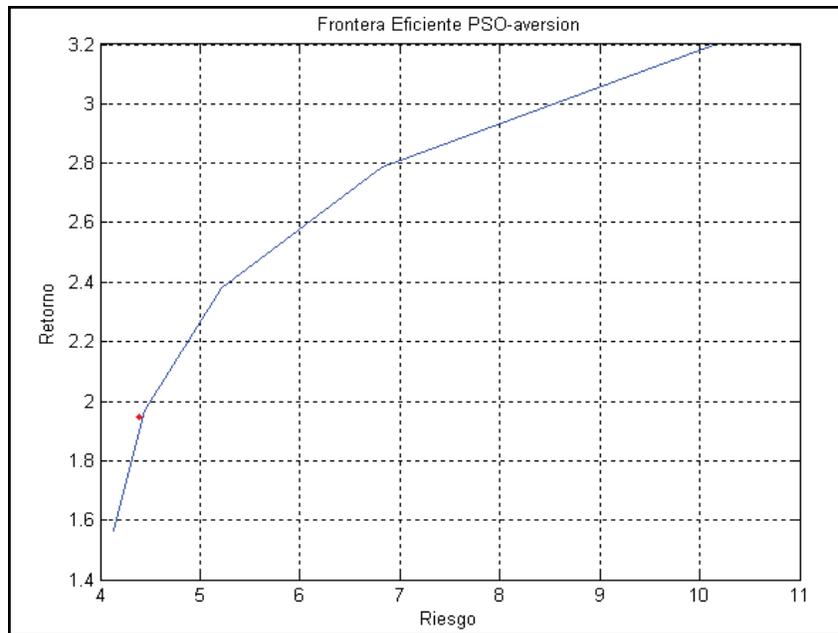


Figura 5.9 Frontera Eficiente con PSO y parámetro de aversión mejor partícula

En la figura 5.10 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad del algoritmo PSO-aversión, así como también en la figura 5.11 la convergencia del riesgo del mismo algoritmo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

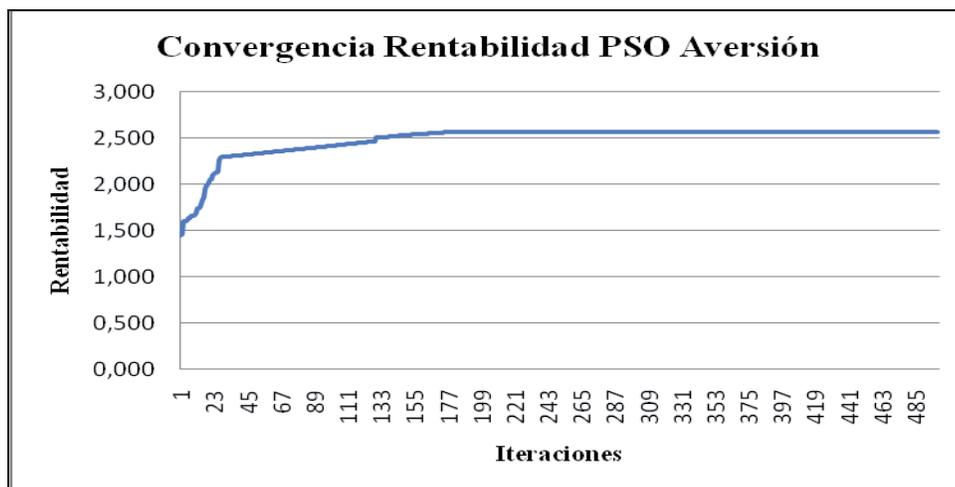


Figura 5.10 Convergencia Rentabilidad PSO-aversión

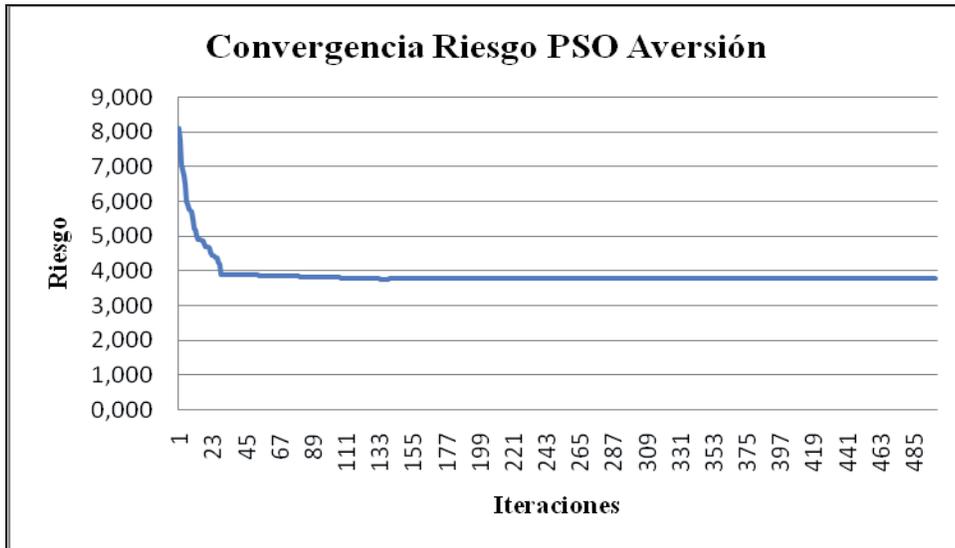


Figura 5.11 Convergencia Riesgo PSO-aversión

5.3 Resultados Modelo de Portafolio con IPSO

Para determinar la mejor configuración del algoritmo IPSO, se realizó la calibración de los parámetros del algoritmo.

En la figura 5.12 se aprecia que para el algoritmo IPSO el número de partículas óptimo son 40 partículas:

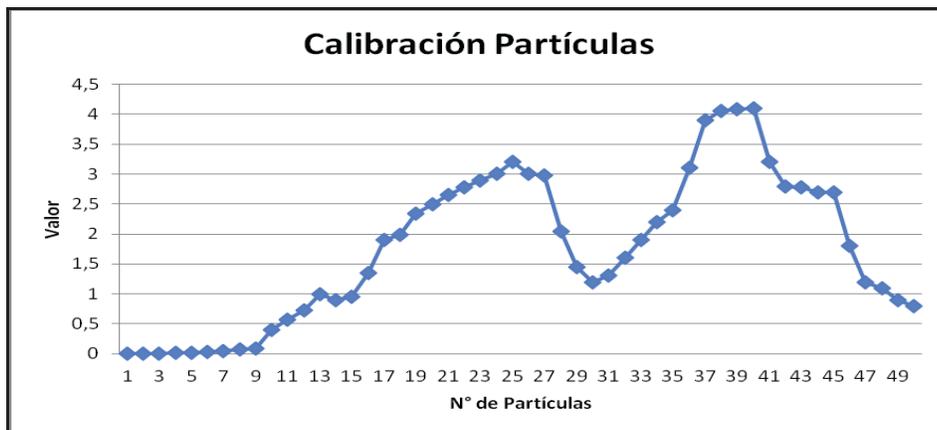


Figura 5.12 Calibración Partículas IPSO

Para el n° de iteraciones, se determinó que para 500 iteraciones el algoritmo converge al óptimo, esto según la tabla 5.13:

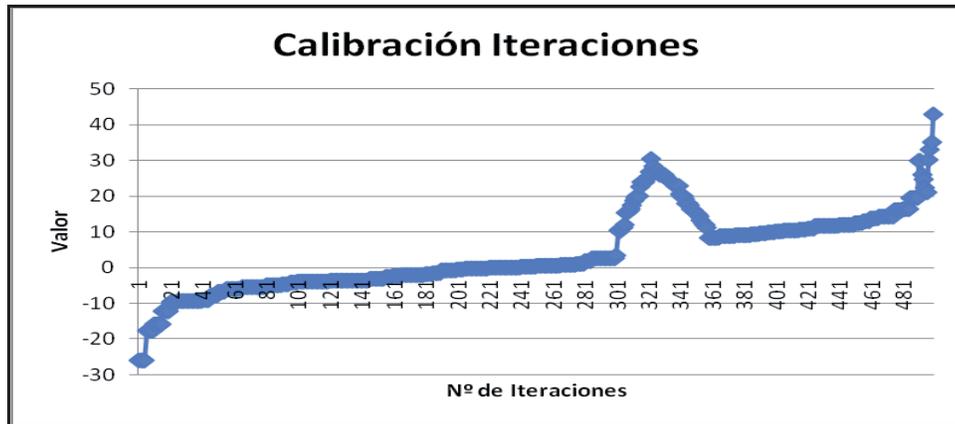


Figura 5.13 Calibración Iteraciones IPSO

Para el peso de inercia correcto, se determinó que con $w=0.7$ el algoritmo obtiene mejores resultados; esto se puede apreciar en la figura 5.14:



Figura 5.14 Calibración Peso Inercia IPSO

Por lo tanto, la mejor configuración para el algoritmo IPSO se compone de 40 partículas, 500 iteraciones, y de un peso de inercia de 0,7. A continuación se presentan los resultados del algoritmo IPSO con la configuración obtenida.

En la tabla A.3, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor IPSO con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Para el Modelo de Portafolio con IPSO, se utilizó el parámetro u con el valor de 1.005 (ver fórmula (4.2.3.1.1)), además de V_{max} equivalente a 0.04. Los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 2,135%, con un riesgo promedio del 4,584%.
- La desviación estándar corresponde a 0,2805, lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 1.737%, con un riesgo de 4,289%, como se muestra en la figura 5.15, con una ponderación del capital de un 1,94% para Cencosud, un 35,67% para Copec, un 13,14% para Banco de Chile, un 14,08% para SQM y 35,16% para Lan.

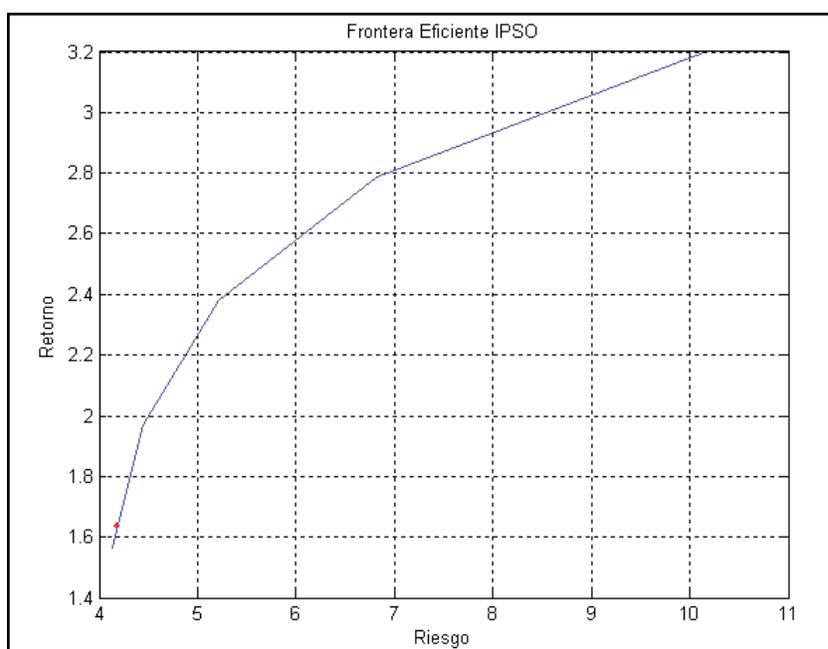


Figura 5.15 Frontera Eficiente IPSO menor riesgo

En la figura 5.16 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 2,281% de retorno esperado y riesgo 5,039%, con una ponderación del capital de un 20,47% para Cencosud, un 7,21 % para Copec, un 4,99% para Banco de Chile, un 29,78% para SQM y 37,54% para Lan.

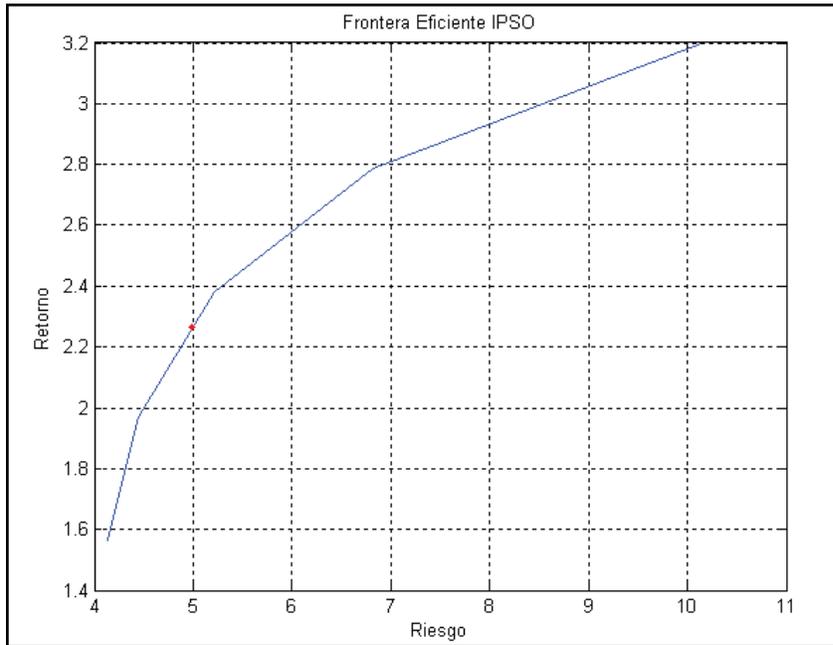


Figura 5.16 Frontera Eficiente con IPSO mejor partícula

En la figura 5.17 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad del algoritmo IPSO, así como también en la figura 5.18 la convergencia del riesgo del mismo algoritmo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

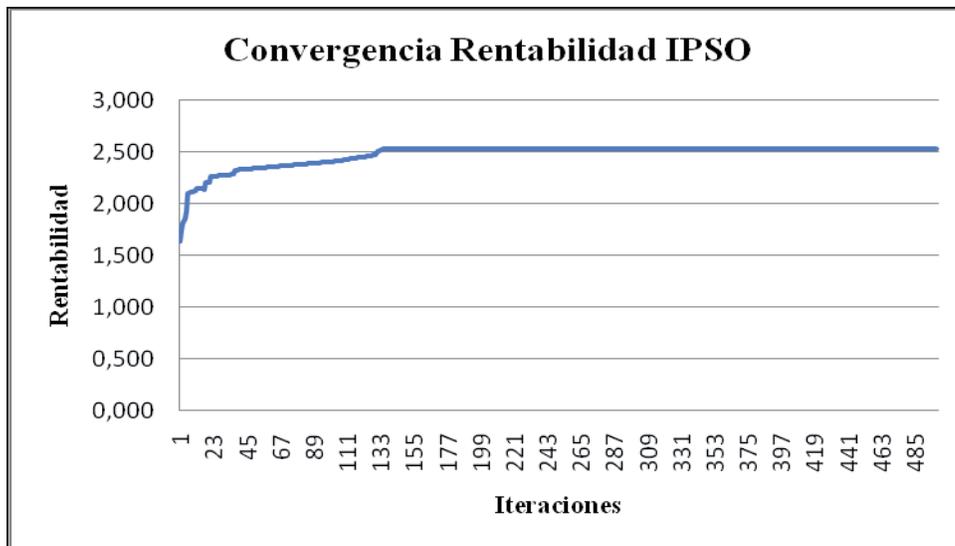


Figura 5.17 Convergencia Rentabilidad IPSO

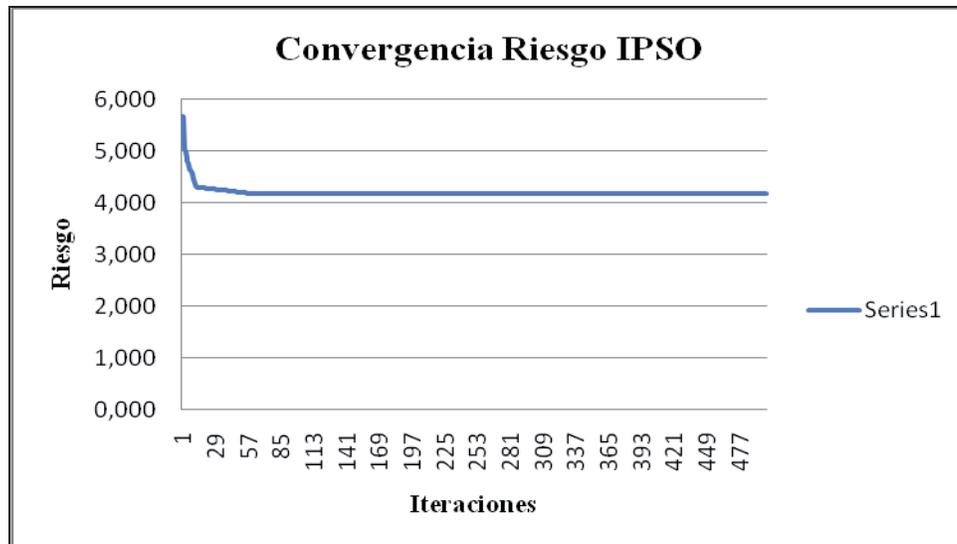


Figura 5.18 Convergencia Rentabilidad IPSO

5.4 Resultados Modelo de Portafolio con IPSO y parámetro de aversión

En la tabla A.4, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor IPSO-aversión con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Para el Modelo de Portafolio con IPSO, se utilizó un parámetro de aversión al riesgo de 0.2, los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 1,808%, con un riesgo promedio del 4,407%.
- La desviación estándar corresponde a 0,124, lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 1,7393%, con un riesgo de 3,8944%, como se muestra en la figura 5.19, con una ponderación del capital de un 29,12% para Cencosud, un 12,92% para

Copec, un 23,43% para Banco de Chile, un 26,32% para SQM y 8,22% para Lan.

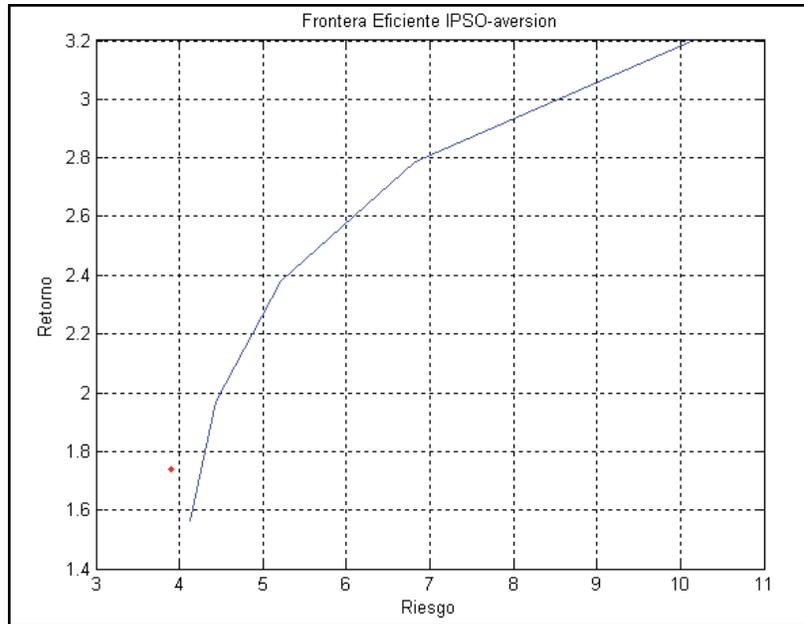


Figura 5.19 Frontera Eficiente con IPSO y parámetro de aversión menor riesgo

En la figura 5.20 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 1,910% de retorno esperado y riesgo 4,372%, con una ponderación del capital de un 0,94% para Cencosud, un 16,29% para Copec, un 4,18% para Banco de Chile, un 46,16% para SQM, y un 32,43% para Lan.

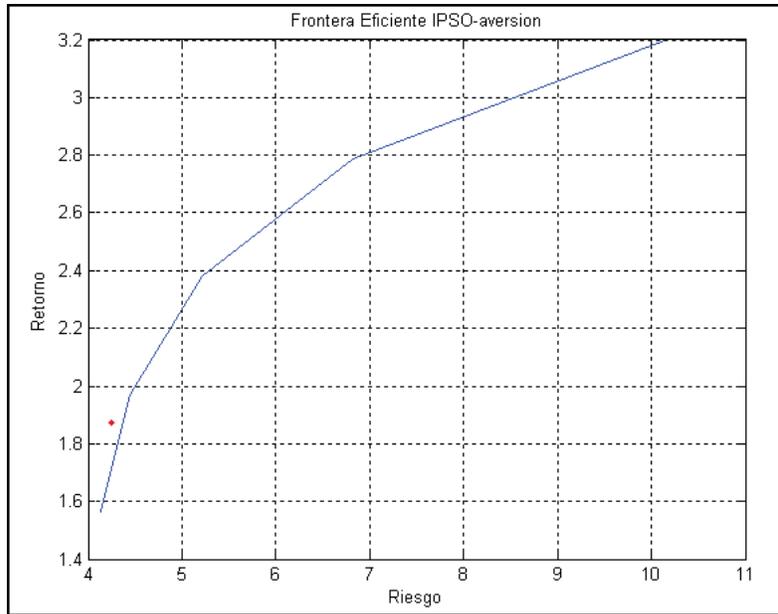


Figura 5.20 Frontera Eficiente con IPSO y parámetro de aversión mejor partícula

En la figura 5.21 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad del algoritmo IPSO-aversión, así como también en la figura 5.22 la convergencia del riesgo del mismo algoritmo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

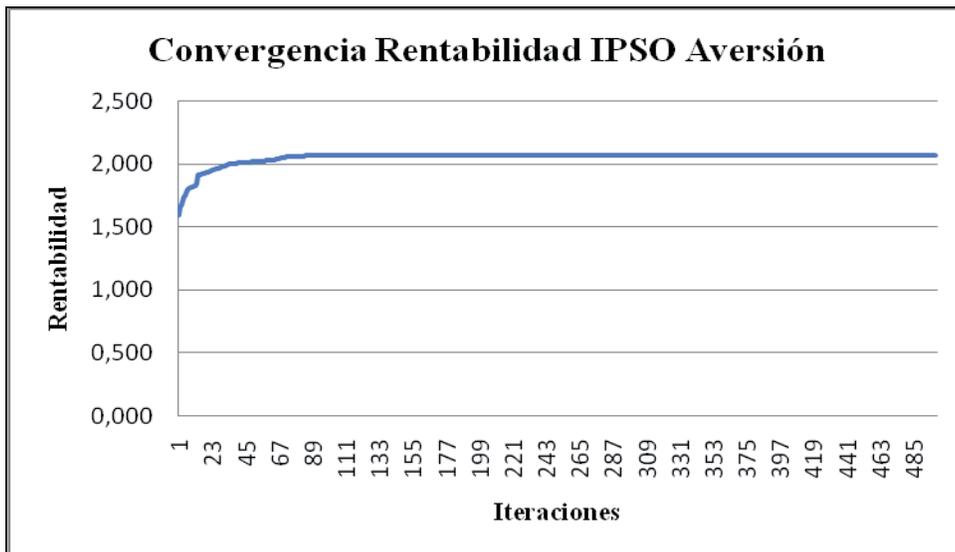


Figura 5.21 Convergencia Rentabilidad IPSO-aversión

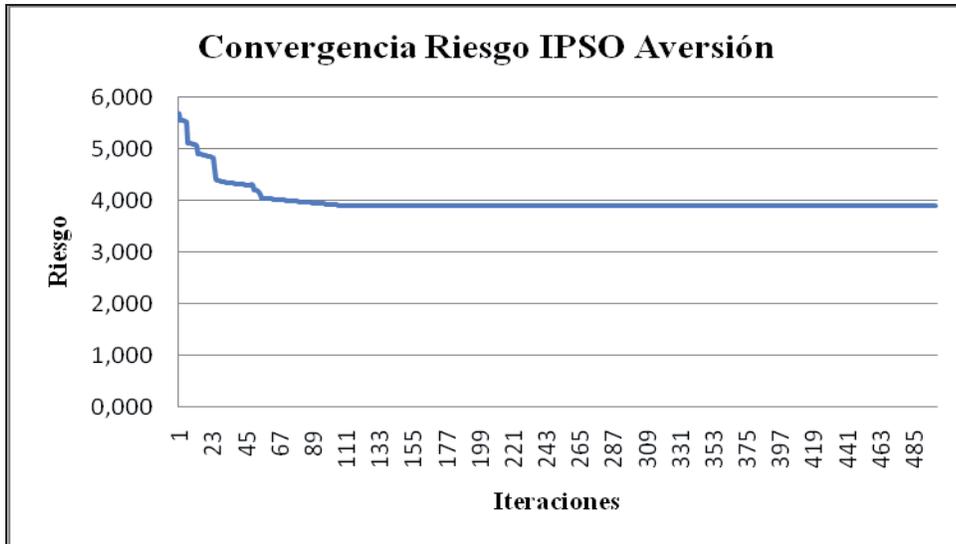


Figura 5.22 Convergencia Riesgo IPSO-aversión

5.5 Resultados Modelo de Portafolio con DAPSO

Para determinar la mejor configuración del algoritmo DAPSO, se realizó la calibración de los parámetros del algoritmo.

En la figura 5.23 se aprecia que para el algoritmo IPSO el número de partículas óptimo son 40 partículas:

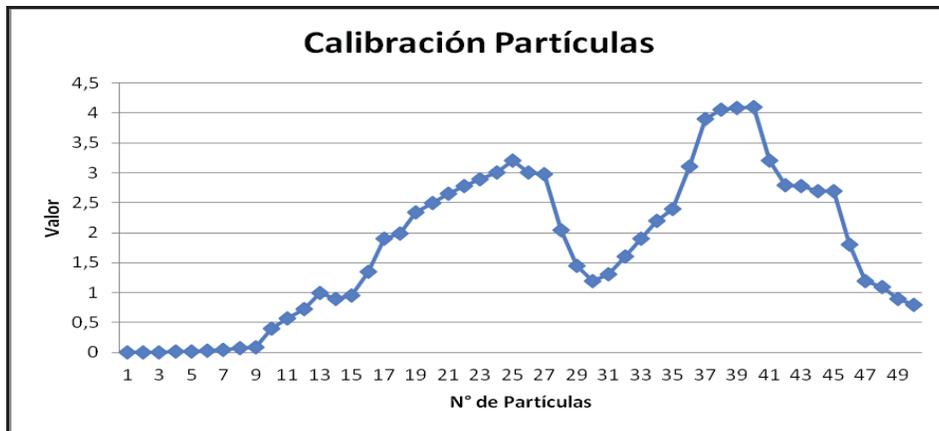


Figura 5.23 Calibración Partículas DAPSO

Para el n° de iteraciones, se determinó que para 500 iteraciones el algoritmo converge al óptimo, esto según la tabla 5.24:



Figura 5.24 Calibración Iteraciones DAPSO

Para el peso de inercia correcto, se determinó que con $w=0.7$ el algoritmo obtiene mejores resultados; esto se puede apreciar en la figura 5.25:



Figura 5.25 Calibración Peso Inercia DAPSO

Por lo tanto, la mejor configuración para el algoritmo DAPSO se compone de 40 partículas, 500 iteraciones, y de un peso de inercia de 1. A continuación se presentan los resultados del algoritmo DAPSO con la configuración obtenida.

En la tabla A.5, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor DAPSO con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Para el Modelo de Portafolio con DAPSO, se utilizó además valor de alpha $\alpha= 0,4$ y un valor de beta $\beta= 0,8$ (ver fórmula (4.2.3.2.6)), además de Vmax equivalente a 0.04. Los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 2,377%, con un riesgo promedio del 5,756%.
- La desviación estándar corresponde a 0,297, lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 1,864%, con un riesgo de 4,389%, como se muestra en la figura 5.26, con una ponderación del capital de un 3,86% para Cencosud, un 25,34% para Copec, un 13,69% para Banco de Chile, un 16,57% para SQM y 40,54% para Lan.

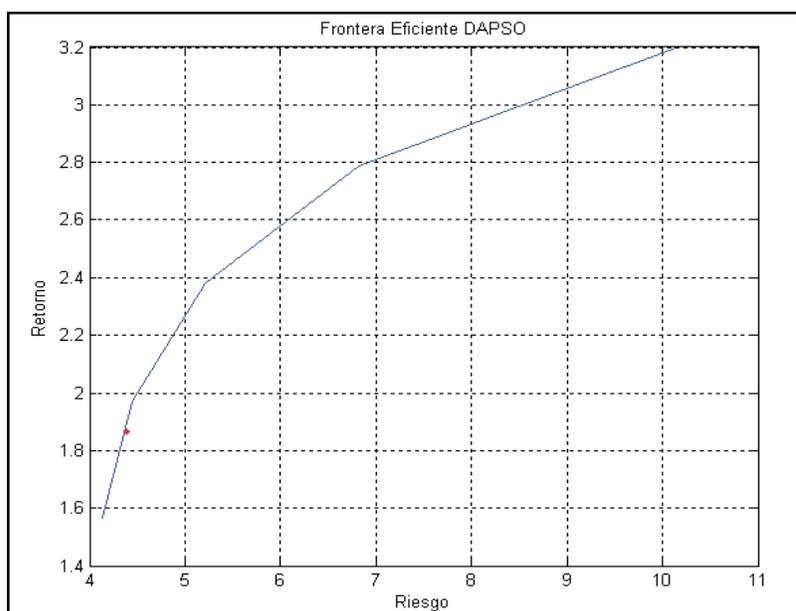


Figura 5.26 Frontera Eficiente DAPSO menor riesgo

En la figura 5.27 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 2,292% de retorno esperado y riesgo 5,058%, con una ponderación del capital de un 6,97% para Cencosud, un 19,44% para Copec, 0% para Banco de Chile, un 36,79% para SQM y 36,79% para Lan.

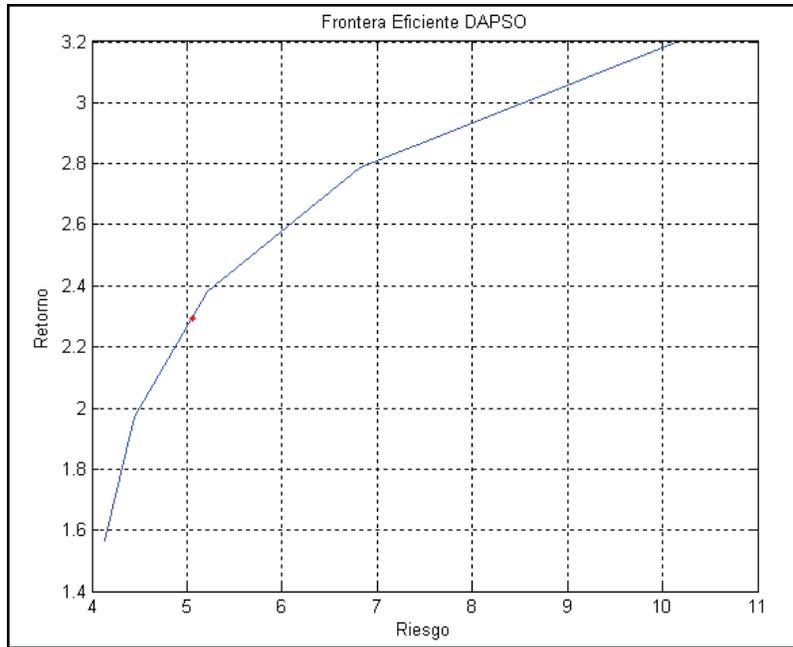


Figura 5.27 Frontera Eficiente DAPSO mejor partícula

En la figura 5.28 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad del algoritmo DAPSO, así como también en la figura 5.29 la convergencia del riesgo del mismo algoritmo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

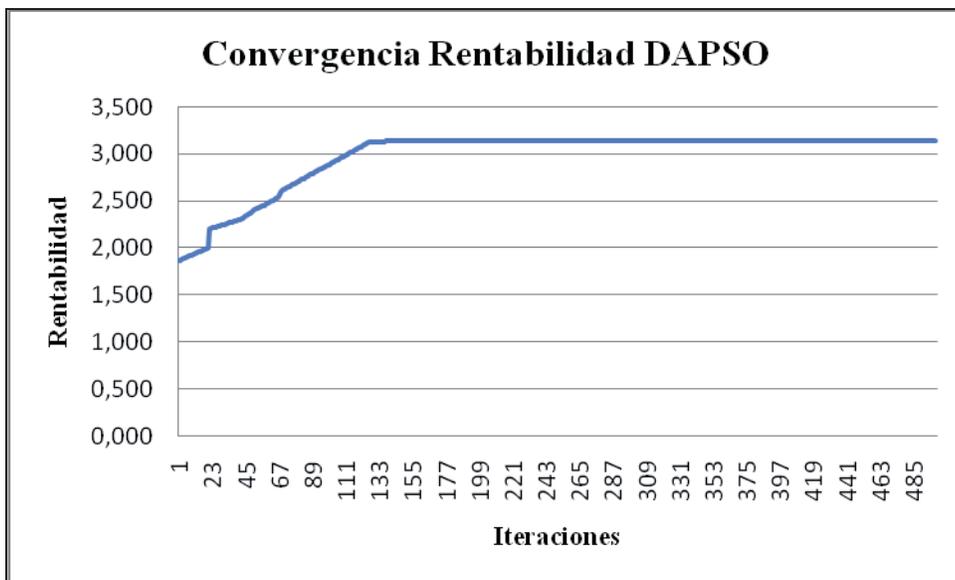


Figura 5.28 Convergencia Rentabilidad DAPSO

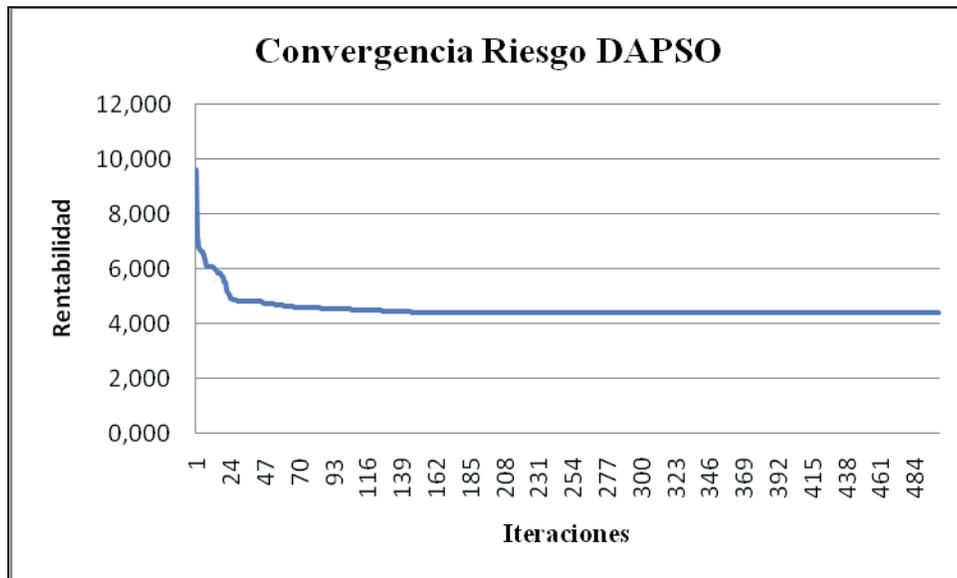


Figura 5.29 Convergencia Riesgo DAPSO

5.6 Resultados Modelo de Portafolio con DAPSO y parámetro de aversión

En la tabla A.6, que se encuentra en la sección “Anexos” de este trabajo, se presenta el proceso de obtención del mejor DAPSO-aversión con la configuración ya establecida, calculándose la media y desviación estándar de las métricas rentabilidad y riesgo luego de haber ejecutado el programa 30 veces.

Para el Modelo de Portafolio con DAPSO, se utilizó un valor de alpha $\alpha=0,4$ y un valor de beta $\beta=0,8$ (ver fórmula (4.2.3.2.6)), además de V_{max} equivalente a 0.04 y parámetro de aversión al riesgo de 0.2, los resultados son los siguientes:

- Los retornos medios equivalen al 1,828%, con un riesgo promedio del 4,914%.
- La desviación estándar corresponde a 0,256, lo cual indica que el grado en que los retornos están dispersos del retorno esperado promedio es bajo, lo que implica una distribución más homogénea.
- La cartera eficiente con menor riesgo arroja un retorno esperado de un 1,677%, con un riesgo de 3,868%, como se muestra en la figura 5.30, con una ponderación

del capital de un 28,43% para Cencosud, 0% para Copec, un 25,12% para Banco de Chile, un 18,02% para SQM y 28,43% para Lan.

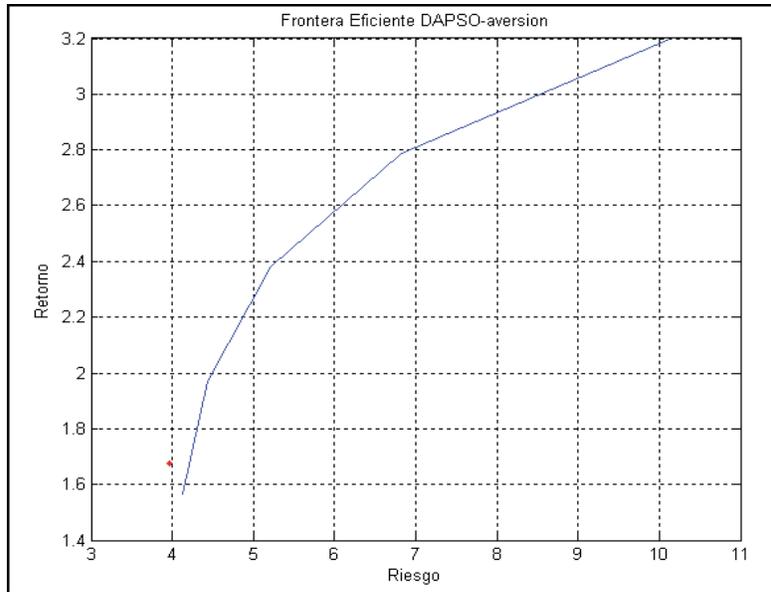


Figura 5.30 Frontera Eficiente DAPSO-aversión menor riesgo

En la figura 5.31 se puede observar la Frontera Eficiente de la **mejor partícula** que genera un 1,740% de retorno esperado y riesgo 3,918%, con una ponderación del capital de un 12,62% para Cencosud, un 25,80 % para Copec, 0% para Banco de Chile, un 32,29% para SQM y 29,29% para Lan.

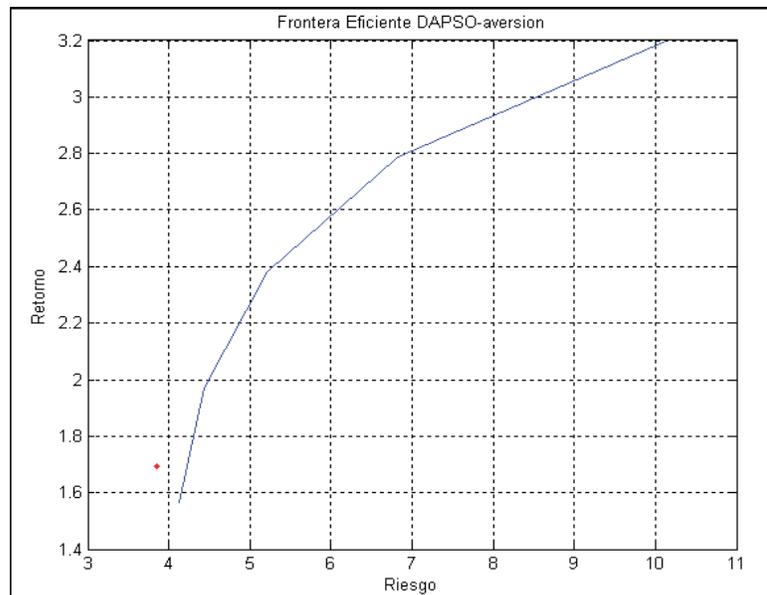


Figura 5.31 Frontera Eficiente DAPSO-aversión mejor partícula

En la figura 5.32 se puede apreciar la convergencia de la rentabilidad del algoritmo DAPSO-aversión, así como también en la figura 5.33 la convergencia del riesgo del mismo algoritmo, las cuales se basan en la efectividad del algoritmo en encontrar los mejores resultados.

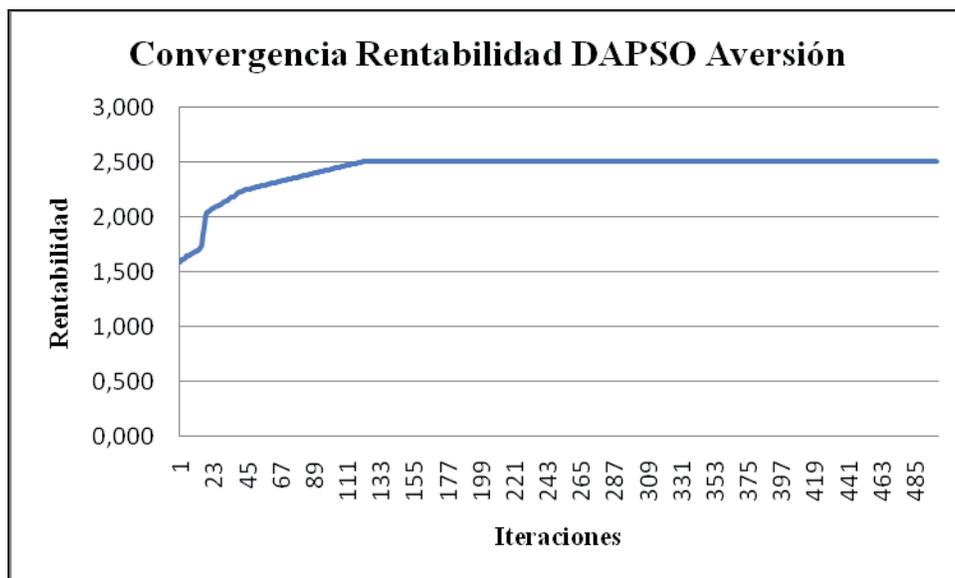


Figura 5.32 Convergencia Rentabilidad DAPSO-aversión

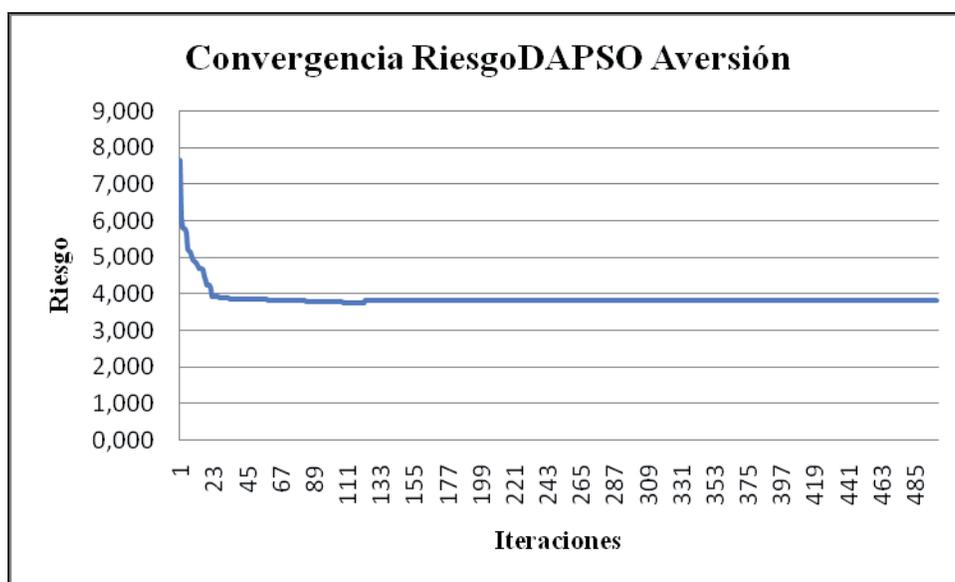


Figura 5.33 Convergencia Riesgo DAPSO-aversión

En base a estos resultados, según se puede apreciar en la tabla 5.6, se puede concluir que los tres algoritmos poseen similares retornos esperados en promedio. De la misma manera, los riesgos promedios obtenidos por los algoritmos en cuestión son similares.

En el caso de PSO, éste posee un rendimiento esperado promedio de un 2,2297% y riesgo promedio de un 5,353%. Por otro lado, IPSO posee un rendimiento esperado promedio de un 2,285% y un riesgo promedio de un 4,584%, lo que hace a IPSO levemente más óptimo que PSO.

En el caso de DAPSO, éste posee rendimiento esperado promedio de un 2,377% y riesgo promedio de un 5,353. Si se compara con PSO, DAPSO obtiene una rentabilidad levemente mejor, pero a un mismo riesgo. En cambio, si se compara con IPSO, DAPSO obtiene una leve ventaja en la rentabilidad, no así en el riesgo, ya que IPSO es mejor casi por un punto porcentual.

Algoritmo	Rentabilidad promedio (%)	Riesgo promedio (%)	Desviación estándar rentabilidades	Tiempo de ejecución (segs.)
PSO	2,2297	5,353	0,434	2-3
IPSO	2,285	4,584	0,1428	2-3
DAPSO	2,377	5,353	0,2978	7-10

Tabla 5.6 Comparación de Resultados

En lo que respecta a la diversificación del capital, IPSO obtiene un mejor desempeño respecto a los otros algoritmos en donde Lan obtiene la mayor parte del capital con un 37,53%. Esto se puede apreciar de mejor manera en la tabla 5.7 donde se comparan los tres algoritmos y las ponderaciones de capital de las acciones.

Algoritmo	Lan (%)	SQM (%)	Cencosud (%)	Copec (%)	Banco de Chile (%)	Total (%)
Acción						
PSO	48,07	45,22	6,71	0	0	100
IPSO	37,54	29,78	20,47	7,21	4,99	100
DAPSO	36,79	36,79	6,97	19,44	0	100

Tabla 5.7 Comparación diversificación del capital

Con respecto a los algoritmos con parámetro de aversión al riesgo, PSO posee un rendimiento esperado promedio de un 1,896% y un riesgo promedio de un 5,234%. Por otro lado, IPSO posee un rendimiento esperado promedio de un 1,808% y un riesgo promedio de un 4,407%. PSO posee una rentabilidad levemente mejor que IPSO, pero éste último obtiene casi un punto porcentual menos en relación al riesgo.

En el caso de DAPSO, éste posee rendimiento esperado promedio de un 1,828% y un riesgo promedio de un 4,914. Si se compara con PSO, DAPSO obtiene una rentabilidad levemente menor, pero con un riesgo menor. En cambio, si se compara con IPSO, DAPSO obtiene una leve ventaja en la rentabilidad, no así en el riesgo, ya que IPSO es levemente mejor.

Algoritmo	Rentabilidad promedio (%)	Riesgo promedio (%)	Desviación estándar rentabilidades	Tiempo de ejecución (segs)
PSO - aversión	1,896	5,234	0,2997	2-3
IPSO - aversión	1,808	4,407	0,124	2-3
DAPSO - aversión	1,828	4,914	0,2568	7-10

Tabla 5.8 Comparación de Resultados con Aversión al Riesgo

En lo que respecta a la diversificación del capital, IPSO obtiene un mejor desempeño respecto a los otros algoritmos en donde SQM se lleva la mayor parte del capital con un 46,16%. Esto se puede apreciar de mejor manera en la tabla 5.9 donde se comparan los tres algoritmos y las ponderaciones de capital de las acciones con el parámetro de aversión al riesgo.

Algoritmo	Lan (%)	SQM (%)	Cencosud (%)	Copec (%)	Banco de Chile (%)	Total (%)
Acción						
PSO - aversión	54,98	37,96	0	7,06	0	100
IPSO - aversión	32,43	46,16	0,94	16,29	4,18	100
DAPSO - aversión	29,29	32,29	12,62	25,80	0	100

Tabla 5.9 Comparación diversificación del capital con aversión

Por lo tanto, según los resultados obtenidos y las comparaciones realizadas el algoritmo que mejor rendimiento ofrece es el algoritmo IPSO, así también lo es el algoritmo IPSO con el parámetro de aversión al riesgo.

Una vez que se han obtenido los resultados de los distintos modelos, como así también la comparación de los rendimientos logrados por los algoritmos usados, se pretende observar si las rentabilidades esperadas o pronosticadas son mejores de lo que aparece en el mercado actual.

Los resultados obtenidos son los equivalentes al primer mes del año 2011, es decir las rentabilidades obtenidas por los modelos propuestos son las que se pronostican para el mes de Enero del 2011.

Como se puede apreciar en la tabla 5.10, la rentabilidad promedio del mes de Enero del año 2011 equivale a un -5,244%; en cambio el modelo de portafolio propuesto entrega una rentabilidad o retorno promedio de un 2,285% usando el algoritmo IPSO el cual resultó ser el óptimo para esta investigación.

Fuente	Rentabilidad promedio (%)
Rentabilidad del Mercado	-5,244
Modelo con IPSO	2,285
Modelo con IPSO-aversion	1,808

Tabla 5.10 Comparación entre mercado y modelo

También se puede apreciar en la tabla 5.10 que el modelo con parámetro de aversión al riesgo con IPSO genera una rentabilidad promedio de un 1,808%.

6. Conclusiones

El modelo de portafolio de Markowitz, referente teórico en el campo de la teoría de selección de carteras, puede resultar de gran utilidad en la práctica. En Chile la demanda de modelos de portafolio por parte de los inversores es grande, ya que estos modelos generan una mayor rentabilidad y menor riesgo al momento de invertir, proporcionando al inversor una herramienta útil en la toma de decisiones.

Las inversiones financieras, especialmente las carteras de inversión, pueden ser analizadas en base a la rentabilidad y el riesgo, lo cual suele ser normalmente más que suficiente para la mayoría de los análisis financieros de inversiones.

La eficiencia en gestión de carteras de inversión es un elemento de sentido común financiero ya que cualquier inversor racional prefiere más rentabilidad a menos rentabilidad (a igual riesgo), mientras que prefiere menos riesgo a más riesgo (a igualdad de rentabilidad). La diversificación financiera y la reducción de riesgos para obtener carteras eficientes son fundamentales en el contexto actual de los mercados financieros.

Para poder obtener el modelo de portafolio deseado y una buena gestión de la cartera de inversión, se ha incorporado al modelo de Markowitz el algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), sus variaciones IPSO y DAPSO, y el parámetro de aversión del inversor, con el fin de generar una frontera eficiente mejor que una obtenida por el modelo estándar, lo cual permita maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo de la inversión.

Se ha podido observar los resultados obtenidos por el modelo propuesto, los cuales indican que la implementación de PSO tradicional y sus variaciones al modelo de Markowitz diversifica de buena manera el capital, logrando un buen retorno en comparación al obtenido por el mercado.

Los resultados recogidos indican que el algoritmo IPSO obtiene levemente un mejor rendimiento con una rentabilidad promedio de 2,285% y un riesgo promedio de un 4,584%, respecto de PSO tradicional. Por otro lado, el modelo de portafolio con PSO-aversión fue levemente mejor con una rentabilidad promedio de un 1,896%, en comparación con el modelo de portafolio con IPSO y DAPSO.

Con respecto a la diversificación del capital, para los modelos de portafolio con PSO, IPSO y DAPSO, se observó que los activos SQM y Lan poseen la mayor parte del capital invertido. No obstante, el modelo de portafolio con IPSO es quien posee la mejor diversificación del capital invertido respecto a los otros modelos, con un 31,54% para Lan, un 29,78% para SQM-B, 20,47% para Cencosud, un 7,21% para Banco de Chile, y un 4,99% para Copec.

El algoritmo DAPSO también logra resultados similares a los otros algoritmos, pero IPSO sigue siendo más óptimo respecto al riesgo obtenido en cada uno. Además, el algoritmo DAPSO toma más tiempo en ejecutarse que en los otros dos algoritmos.

Por lo tanto, el algoritmo óptimo para el modelo de portafolio propuesto es el algoritmo IPSO, ya que entrega mejores rendimientos y una mejor diversificación del capital en comparación con PSO tradicional y DAPSO. En contraparte, el riesgo obtenido por el modelo no es igual o menor a los retornos logrados por el modelo propuesto.

Esto se debe a la variabilidad de las rentabilidades mensuales de los últimos 5 años, ya que los activos están correlacionados entre sí, provocando un mayor riesgo. Es decir, al comportarse de forma similar ante variaciones del mercado, sus efectos no se compensan en el período de tenencia de la inversión, provocando un aumento de la volatilidad de la rentabilidad de la cartera y, por tanto, un incremento del riesgo asociado a la misma.

Este modelo propuesto se podría mejorar usando nuevos algoritmos evolutivos o incluso algoritmos híbridos, que permitan encontrar mejores ponderadores, mejores retornos esperados y que el riesgo de estas carteras sea el mínimo; lo último depende de los activos a escoger, ya que como se mencionó en el párrafo anterior, para no caer en una diversificación ingenua, los activos deben estar lo menos correlacionado posible.

7. Referencias

- [Abraham *et al.*, 2006] Abraham, A., Guo, H., y Liu. H. (2006). “Swarm Intelligence: Foundations, Perspectives and Applications”, Studies in Computational Intelligence (SCI), Springer-Verlag.
- [Alfassio *et al.*, 2005] Alfassio, E., Gandelli, A., Grimaccia, M., Mussetta, M., y Zich, R. (2005). A new Irvid Technique for the optimization of large-domain electromagnetic problems.
- [Avilés, González, y Martínez, 2006] M. Avilés, A. González, Á. Martínez. Análisis de riesgo, portafolios óptimos y diversificación en la Agricultura. Agrociencia, mayo-junio, año/vol. 40, número 003. Colegio de Postgraduados. Texcoco, México.
- [Bolsa de Comercio, 2011] Bolsa de Comercio de Santiago, 2011, Chile.
- [Brun, 2008] Brun, X., (2008). Análisis y Selección de Inversiones en Mercados Financieros. Bresca Editorial, S.L., Barcelona.
- [Cayatopa, 2008] Cayatopa, L. (2008). Desarrollo sobre la teoría de la Cartera. Perú.
- [Chang, 2000] T.J. Chang, N. Meade, J.E. Beasley, Y.M. Sharaiha, Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, Computers & Operations Research 27 (2000) 1271–1302
- [Cobo, 2004] A.J Cobo, La Selección de Carteras: Desde Markowitz, Bogotá.
- [Correa *et al.*, 2005] Correa, A., Villanueva, J., Pérez, J. y Basterrechea, J. (2005) Aplicación de PSO y GA en la síntesis de agrupaciones lineales de antenas. Universidad de Cantabria.
- [Cura, 2008] Tunchan Cura, Particle swarm optimization approach to portfolio optimization, Nonlinear Analysis: Real World Applications 10 (2009) 2396–2406.
- [De Pablo y Ferruz, 1996] De Pablo, A. Y Ferruz, L (1996): "Finanzas de Empresa". Editorial Centro de Estudios Ramón Areces (CEURE). Madrid.
- [Eberhart y Shi, 2001] Eberhart RC, Shi Y. Particle swarm optimization: developments, applications and resources. Proceedings of IEEE international conference on evolutionary computation 2001:81–6.
- [Fernández y Gómez, 2007] A. Fernandez, S. Gomez, Portfolio selection using neural networks, Computers & Operations Research 34 (2007) 1177–1191.
- [Gallego, 2003] R. Gallego, “Introducción al Matlab para economistas”, Editorial Dykinson, S.L. Melendez Valdés, Madrid.

[Gilat, 2006] A. Gilat, “Matlab: una introducción con ejemplos prácticos”, Editorial Reverté, UA de Madrid, España.

[González y Moreno, 2007] A. González, V. Moreno, “Modelo de media-varianza de Markowitz para portafolio de activos con retornos mezcla de Gaussianos finitos”, Bogotá, Colombia.

[Grajales, 2009] D. Grajales, “Gestión de portafolios. Una mirada crítica más allá de Markowitz”, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

[Jiao, Lian y Gu, 2006] A dynamic inertia weight particle swarm optimization algorithm, *Chaos, Solitons and Fractals* 37 (2008) 698–705.

[Kennedy y Eberhart, 1995] Kennedy, J. y Eberhart, R., (1995) “Particle Swarm Optimization”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*.

[Kennedy, Eberhart, y Shi, 2001] Kennedy, J., Eberhart, R. y Shi, Y. (2001). “Swarm Intelligence”, *The Morgan Kaufmann Series in Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann.

[Konno y Yamazaki, 1991] H. Konno, H. Yamazaki, Mean-absolute deviation portfolio in optimization model and its application to Tokyo stock market, *Management Science* 37 (1991) 519–531.

[López, 2003] López, C., (2003). *Teoría de la Cartera*. UADE, Argentina.

[Lintner, 1965] Lintner, J.: "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets". *Review of economics and statistics*. Febrero, 13-37.

[Markowitz, 1952] H.M. Markowitz, Portfolio selection, *Journal of Finance*, vol. 7, n.º 1, marzo, pp. 77-91.

[Mendizábal, 2000] A. Mendizábal, Gestión de carteras de renta variable: Importancia de los índices bursátiles, *Best Papers Proceedings*, AEDEM.

[Michaud, 1989] R. O. Michaud: The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal? *Financial Analyst Journal*, n.º 45, enero - febrero, pp. 31-42.

[Mossin, 1966] Mossin, Jan. *Equilibrium in a Capital Asset Market*, *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, pp. 768-783.

[Noman y Mariyam, 2009] Noman S., Mariyam S., Hybrid Learning Enhancement of RBF Network based on Particle Swarm Optimization, *Soft Computing Group*, UTM, Malaysia.

[Ochoa, 2008] I. Ochoa. *El Modelo de Markowitz en la Teoría de Portafolios de Inversión*. México.

DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

[Sharpe, 1963] Sharpe, W.F.: "A Simplified Model for Portfolio Analysis". Management Science, vol. IX, Enero, 277-293

[Shen *et al.*, 2004] Shen, Jiang, Jiao, Lin, Shen, G., Yu. (2004). Hybridized Particle Swarm Algorithm for Adaptive Structure Training of Multilayer Feed-Forward Neural Network: QSAR Studies of Bioactivity of Organic Compounds. Wiley InterScience

[Shi y Eberhart, 1997] Shi Y, Eberhart RC. A modified particle swarms optimiser. In: Proceedings of the IEEE international conference on evolutionary computation, 1997, p. 303–8.

[Treynor, 1965] Treynor, J.L.: "How to Rate Management of Investment Funds?" Harvard Business Review, XLIII, 63-75.

[Yang y Yuan, 2007] Yang X., Yuan J., A modified particle swarm optimizer with dynamic adaptation, Applied Mathematics and Computation 189 (2007) 1205–1213.

Anexos

En esta sección se presentan los datos utilizados en el desarrollo de los modelos de portafolio con los distintos algoritmos. La tabla A.1 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo PSO.

RUN:30	w:0,8 N° partículas:40 iteraciones:500	
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	2,590	5,602
Run 2	1,5785	6,624
Run 3	1,5785	6,601
Run 4	1,5785	6,601
Run 5	1,5785	6,001
Run 6	1,5785	6,001
Run 7	1,5785	6,001
Run 8	1,733	6,001
Run 9	1,733	6,001
Run 10	1,733	6,001
Run 11	2,219	5,802
Run 12	2,219	5,702
Run 13	2,219	5,692
Run 14	2,219	5,682
Run 15	2,219	4,930
Run 16	2,569	4,822
Run 17	2,569	5,652

Run 18	2,584	5,802
Run 19	2,584	5,632
Run 20	2,584	5,622
Run 21	2,587	5,612
Run 22	2,590	5,602
Run 23	2,593	5,592
Run 24	2,596	5,582
Run 25	2,599	5,572
Run 26	2,602	5,562
Run 27	2,605	5,552
Run 28	2,608	5,542
Run 29	2,611	5,532
Run 30	2,614	5,512
Promedio	2,2297	5,353
Desv. Estándar	0,1428	0,379
Max Rentab. Max Riesgo	2,614	6,624
Min Rentab. Min Riesgo	1,5785	4,822
Mejor Partícula	2,584	5,802

Tabla A.1 Detalle ejecución modelo portafolio con PSO

La tabla A.2 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo PSO-aversión.

RUN:30	w:0,8 aversión:0,2	
	N° partículas:40	
	iteraciones:500	
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	2,296	5,896
Run 2	2,112	4,863
Run 3	2,558	8,110
Run 4	1,988	5,712
Run 5	2,055	4,690
Run 6	1,667	5,782
Run 7	1,976	4,528
Run 8	1,849	4,368
Run 9	2,170	5,994
Run 10	2,048	4,676
Run 11	1,733	4,911
Run 12	1,732	5,014
Run 13	2,102	5,209
Run 14	1,446	3,835
Run 15	2,558	8,110
Run 16	1,650	4,863
Run 17	1,453	5,170

Run 18	2,284	7,045
Run 19	1,598	3,766
Run 20	1,636	4,457
Run 21	1,613	3,918
Run 22	1,688	4,658
Run 23	1,635	6,758
Run 24	1,831	5,504
Run 25	1,948	4,385
Run 26	1,601	4,434
Run 27	1,655	4,767
Run 28	2,118	4,883
Run 29	2,128	6,477
Run 30	1,752	4,245
Promedio	1,896	5,234
Desv. Estándar	0,2997	1,1304
Max Rentab. Max Riesgo	2,558	8,110
Min Rentab. Min Riesgo	1,446	3,766
Mejor Partícula	1,948	4,385

Tabla A.2 Detalle ejecución modelo portafolio con PSO-aversión

La tabla A.3 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo IPSO.

RUN:30	w:0,7	
	N° partículas:40	
	iteraciones:500	
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	1,638	5,039
Run 2	1,737	4,992
Run 3	1,807	4,848
Run 4	1,852	4,802
Run 5	1,919	4,749
Run 6	2,101	4,631
Run 7	2,102	4,620
Run 8	2,112	4,559
Run 9	2,114	4,449
Run 10	2,116	4,385
Run 11	2,117	4,302
Run 12	2,140	4,298
Run 13	2,141	4,295
Run 14	2,143	4,293
Run 15	2,144	4,290
Run 16	2,145	4,287
Run 17	2,132	4,285
Run 18	2,200	4,282
Run 19	2,201	4,279

Run 20	2,203	4,276
Run 21	2,260	4,274
Run 22	2,261	4,271
Run 23	2,263	4,268
Run 24	2,264	4,266
Run 25	2,265	4,263
Run 26	2,267	4,260
Run 27	2,525	4,258
Run 28	2,525	4,255
Run 29	2,525	4,252
Run 30	2,525	4,276
Promedio	2,285	4,584
Desv. Estándar	0,2805	0,4502
Max Rentab. Max Riesgo	2,614	5,039
Min Rentab. Min Riesgo	1,638	4,252
Mejor Partícula	2,281	5,039

Tabla A.3 Detalle ejecución modelo portafolio con IPSO

La tabla A.4 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo IPSO-aversión.

RUN:30	w:0,7 aversión:0,2	
	N° partículas:40	
	iteraciones:500	
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	1,671	4,108
Run 2	1,801	4,302
Run 3	1,736	4,669
Run 4	1,589	4,144
Run 5	1,847	4,865
Run 6	2,031	5,048
Run 7	1,820	4,186
Run 8	1,775	4,300
Run 9	1,910	4,372
Run 10	1,825	4,520
Run 11	1,807	4,039
Run 12	1,829	4,179
Run 13	1,812	3,994
Run 14	2,072	5,685
Run 15	1,743	3,899
Run 16	1,663	4,204
Run 17	1,671	4,669
Run 18	1,801	4,144
Run 19	1,736	4,865

Run 20	1,589	5,048
Run 21	1,847	4,186
Run 22	2,031	4,300
Run 23	1,820	4,372
Run 24	1,775	4,520
Run 25	1,910	4,039
Run 26	1,825	4,179
Run 27	1,807	3,994
Run 28	1,829	5,685
Run 29	1,812	3,899
Run 30	2,072	4,204
Promedio	1,808	4,407
Desv. Estándar	0,124	0,464
Max Rentab. Max Riesgo	2,072	5,685
Min Rentab. Min Riesgo	1,589	3,899
Mejor Partícula	2,281	5,039

Tabla A.4 Detalle ejecución modelo portafolio con IPSO-aversión

La tabla A.5 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo DAPSO.

RUN:30	w:1 $\alpha= 0,4$	
	N° partículas:40 $\beta= 0,8$	
	iteraciones:500	
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	1,864	4,389
Run 2	2,008	4,835
Run 3	2,025	4,591
Run 4	2,062	6,110
Run 5	2,088	4,915
Run 6	2,089	5,714
Run 7	2,101	4,875
Run 8	2,113	4,736
Run 9	2,113	4,874
Run 10	2,115	4,780
Run 11	2,115	4,780
Run 12	2,115	5,189
Run 13	2,170	5,904
Run 14	2,192	4,883
Run 15	2,271	5,529
Run 16	2,292	5,058
Run 17	2,366	5,750
Run 18	2,458	6,030
Run 19	2,459	5,525

Run 20	2,548	5,820
Run 21	2,554	6,492
Run 22	2,581	6,770
Run 23	2,596	5,832
Run 24	2,601	5,973
Run 25	2,640	6,079
Run 26	2,640	6,079
Run 27	2,640	6,079
Run 28	2,640	6,079
Run 29	2,662	7,175
Run 30	2,691	6,291
Promedio	2,377	5,756
Desv. Estándar	0,2978	0,9944
Max Rentab. Max Riesgo	2,691	7,175
Min Rentab. Min Riesgo	1,864	4,389
Mejor Partícula	2,292	5,058

Tabla A.5 Detalle ejecución modelo portafolio con DAPSO

La tabla A.5 representa la ejecución del modelo de portafolio con el algoritmo DAPSO-aversión.

RUN:30	w:1 $\alpha= 0,4$	
	N° partículas:40	$\beta= 0,8$
	iteraciones:500	aversión:0,2
	Rentabilidad	Riesgo
Run 1	1,650	4,891
Run 2	1,692	3,824
Run 3	2,510	7,665
Run 4	2,044	5,194
Run 5	1,689	4,229
Run 6	1,620	4,364
Run 7	1,644	5,211
Run 8	1,606	3,868
Run 9	2,281	5,790
Run 10	2,112	4,863
Run 11	2,055	4,690
Run 12	1,916	4,644
Run 13	1,840	4,842
Run 14	1,649	4,921
Run 15	2,002	5,153
Run 16	1,587	4,700
Run 17	1,655	4,767
Run 18	1,667	5,782
Run 19	1,698	4,160

Run 20	1,680	4,473
Run 21	2,240	6,083
Run 22	1,740	3,918
Run 23	1,604	4,233
Run 24	1,683	5,673
Run 25	1,667	5,782
Run 26	1,698	4,160
Run 27	1,680	4,473
Run 28	2,240	6,083
Run 29	1,740	3,918
Run 30	1,604	4,233
Promedio	1,828	4,914
Desv. Estándar	0,2568	0,8528
Max Rentab. Max Riesgo	2,510	7,665
Min Rentab. Min Riesgo	1,587	3,824
Mejor Partícula	1,740	3,918

Tabla A.6 Detalle ejecución modelo portafolio con DAPSO-aversión