PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Magíster en Didáctica de la Matemática

CAMINOS COGNITIVOS EN UNA DESCOMPOSICIÓN GENETICA DEL CONCEPTO SISTEMA DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA

Trabajo final para optar al grado académico de Magíster en Didáctica de la Matemática

Dirigido por: **Mg. Patricia Vásquez Saldías**
Presentado por: **Rodrigo Lazcano Arena**

Proyecto Financiado por CONICYT- CHILE
Valparaíso, Chile, Diciembre de 2016

Proyecto financiado por el Programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT-CHILE.

Agradecimientos

En primer lugar agradecer a mi familia que siempre me ha apoyado en los proyectos, planes e ideas que han surgido de mi imaginación e ímpetu a lo largo de mi vida.

A la profesora Patricia Vásquez, quien siempre me ha apoyado y a creído en mis capacidades aun cuando yo no creía en ellas, dándome ánimo y fuerza para seguir en los desafíos que presenta el estudio y la universidad.

Al todo el Instituto de Matemática que siempre provee de conocimiento, ambiente y generosidad a todo aquel que quiera aprender de la matemática y de sus diversas formas de estudiarla, conocerla y analizarla.

A Sebastián, quien ha sido siempre el catalizador de mis logros académicos y emocionales dando siempre el empuje para que todo tome su ritmo y curso natural.

A todos mis compañeros que hicieron que esta experiencia fuera grata en momentos difíciles, adversos y complejos, ya que sin ellos no podría haber aprendido lo importante que es el estudio en un grato ambiente.

INDICE

RESUMEN

Utilizando la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) como marco teórico y metodológico se presenta una Descomposición Genética Hipotética del concepto sistema de ecuaciones que involucra una recta y una parábola (SECRP). Este estudio se origina por la relevancia que presenta este concepto para el álgebra lineal y por las dificultades que presentaron estudiantes de tercero y cuarto medio, de 4 establecimientos, en un Estudio de Clases en torno este concepto. Para dar cuenta como construyen este concepto se realizó un estudio de caso con tres estudiantes, dos estudiantes de 17 años de edad y un estudiante de magíster en matemática, a los cuales se les presentó un cuestionario en el cual se abordan los constructos y mecanismos mentales presentes en la Descomposición Genética (DG). A partir de las producciones fue posible generar una DG para cada uno de los estudiantes, logrando de este modo tres caminos cognitivos distintos.

Palabras claves: Sistema de ecuaciones cuadráticas, APOE, descomposición genética, estudio de clase.

INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual, la enseñanza de la matemática es cada día más exigente y toma mayor importancia para un buen desarrollo social, económico y tecnológico, por lo cual, es necesario que los docentes fomenten más y mejor educación. En vista de esta necesidad y de los resultados obtenidos por los estudiantes a través de la historia se ha desarrollado la didáctica de la matemática que busca una mejor relación entre la enseñanza y el aprendizaje de modo que el estudiante logre aprendizajes significativos.

En la actualidad los contenidos que son abordados por los establecimientos educacionales no se logran vincular en clases, de lo contrario, se aíslan unos de otros, pero luego se espera que los estudiantes logren generar esta conexión de manera natural, siendo que no es un proceso tan inmediato. En vista de esta necesidad es que nace esta investigación que consiste en vincular la ecuación de una recta con la ecuación de una parábola por medio de un sistema de ecuación, no abordado con antelación en el curriculum, con el propósito de comprender de manera más amplia el concepto de sistema de ecuación.

Para el análisis de este concepto fue necesario que los estudiantes tuvieran los conocimientos previos para alcanzar el desarrollo de la actividad en donde el marco teórico que delinea como realizar el análisis y los elementos principales que involucran este concepto, corresponde ser la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) desarrollada por el investigador Ed Dubinsky y mejorada junto a su grupo de investigación.

Esta investigación nace de una actividad desarrollada en el contexto del curso “seminario de investigación en Didáctica de la Matemática” desarrollada el primer semestre del 2016 en donde se abordaba un contenido innovador para el estudio de clases y es ahí donde surge la necesidad de entender que conceptos son los necesarios para comprender esta actividad, escogiendo de este modo el marco teórico mencionado anteriormente, ya que es el que se ajusta de mejor manera a esta investigación.

A continuación se procederá a describir la organización y una breve descripción de lo que aborda cada capítulo.

Capítulo 1: Antecedentes, acá se abordarán estudios que avalan la investigación y que además dan fundamento desde lo teórico y desde otras evidencias, ya que en esta parte se realizará un análisis de los artículos, estudios o tesis que estén vinculados con el concepto matemático que se quiere abordar. Este capítulo se dividirá en 3 apartados, siendo el primero el análisis de literatura, es decir, se analizaran los estudios que estén vinculados con el concepto matemático involucrado, que en este caso corresponde ser el sistema de ecuaciones que involucra una recta y una parábola. También se analizarán que elementos están presentes en el currículo nacional y es posible acoplar este concepto con los conocimientos previos que poseen los estudiantes y finalmente en este capítulo se realizará un análisis de textos escolares revisando la evolución que tiene el concepto ecuación y sus diversas aplicaciones y grados que se abordan en la educación media.

Capítulo 2: Pregunta y objetivo de investigación, en esta sección se darán algunas indicaciones sobre las directrices de la investigación cuáles son sus principales focos que están directamente relacionadas con el marco teórico elegido para el análisis de los datos posteriores.

Capítulo 3: Objeto matemático, se realiza una breve descripción del objeto de estudio desde el saber erudito, hasta cuáles son sus transposiciones y/o adaptaciones de los conceptos que son la base para el sistema de ecuaciones que involucra una recta y una parábola en los programas curriculares y textos de estudio de la educación escolar chilena.

Capítulo 4: Marco teórico, se organiza de modo que se pueda dar cuenta de los elementos principales de la teoría. En primera instancia se indica el origen y el acróstico que da nombre a la teoría para luego dar paso a las construcciones y mecanismos mentales que dan la base para poder generar la hipótesis llamada descomposición genética del concepto en estudio, para luego concluir en la importancia de los caminos cognitivos presentes en la descomposición genética.

Capítulo 5: Metodología, se indican los elementos característicos del ciclo de investigación APOE. Se indica el enfoque cualitativo que posee la investigación para brindar el método de estudio de cado y la decisión con respecto a la elección de los informantes. Una vez determinados los elementos generales, se procede a indicar una posible descomposición genética del sistema de ecuaciones que involucra una recta y una parábola de acuerdo a un análisis preliminar realizado de una actividad previa, la cual proveerá de conceptos claves para realizar el instrumento de recogía de datos que finalmente se analizará de manera a priori de modo de detectar elementos faltantes, agudizar preguntas o bien orientarlas de manera que den cuenta de lo que se busca que evidencien para el análisis de datos.

Capítulo 6: Resultados, se analizan los datos obtenidos de los tres informantes que se estudiaron y sus respectivos caminos cognitivos realizado por la descomposición genética planteada como hipótesis, validando de esta manera lo planteado como elementos claves para el logro de la comprensión del concepto sistema de ecuaciones que involucra una recta y una parábola.

Capítulo 7: Discusión y conclusiones, de manera amplia, se indican los principales resultados, la verificación de la hipótesis, las proyecciones de la investigación e incluso las mejoras para la descomposición genética y el instrumento.

CAPITULO 1: ANTECEDENTES

1.1 ANÁLISIS DE LITERATURA

La revisión bibliográfica de los textos escolares vigentes y los programas de estudio chilenos nos permiten delimitar las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones, y podemos observar que tienen orígenes diversos. Esta revisión tiene la intención de fundamentar porque es una problemática la enunciada anteriormente. Las dificultades determinadas están ligadas principalmente a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistema de ecuaciones lineales (números reales y función afín, ambos en vías de construcción); otro al concepto de ecuaciones lineales y sus soluciones y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico (Segura, 2004).

Tabla 1
Análisis comparativo

Dificultad	Error asociado	Antecedente
Trabajo en tablas de valores	Errores al reemplazar los valores, no aplicar correctamente prioridad en las aplicaciones o errores en signos	De acuerdo a las prácticas docentes es posible observar que los estudiantes cometen este tipo de error.
Interpretar gráficamente un sistema de Ecuaciones lineales	Inadecuada comprensión de la función afín y sus parámetros	No efectúan la representación y solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus intramatemático a este registro de representación (Ramírez, 1997)
Resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones	Errores de operatoria algebraica, como ejemplo realizar cambios de variables, o errores procedimentales al aplicar algún método de resolución.	De acuerdo a las prácticas docentes es posible observar que los estudiantes cometen este tipo de error.
Analizar geométricamente la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales	Errores en la graficación de las funciones asociadas al sistema	Recurren pocas veces al pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, 1998)
Analizar algebraicamente la	Errores en la clasificación del tipo de solución asociado al	De acuerdo a las prácticas docentes es posible observar que los

existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales	problema	estudiantes cometen este tipo de error.
Plantear y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales	Errores en el planteamiento de problemas por escaso dominio del lenguaje algebraico	No realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, 1998)
Analizar e interpretar la pertinencia de la solución	Error en no corroborar la solución numérica determinada con el contexto del problema.	Resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifica la solución, es decir, hay una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al., 1995)

Esta tabla tiene como objetivo comparar las Dificultad, errores y antecedentes que se evidencian en la práctica.

1.2 ANÁLISIS DEL CURRÍCULO

Poder sustentar una propuesta didáctica que aborde la resolución de sistema de ecuaciones cuadráticas con una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, objeto matemático no presente en los programas de estudios, requiere un detallado análisis de cómo los conocimientos o contenidos previos son abordados desde los planes ministeriales para poder ubicar esta propuesta e instaurarla como actividad de aprendizaje.

Se presenta a continuación cómo desde los programas de estudio y desde las bases curriculares es abordado el desarrollo de los contenidos y habilidades asociadas a dos temas: ecuaciones lineales y cuadráticas, todas por medio de los sistemas de ecuaciones. Damos cuenta que la evolución de estos, en la propuesta ministerial, se plantea de forma progresiva e interconectada de acuerdo a nuestro parecer.

Para realizar el barrido curricular y posterior análisis, se expondrá de manera separada los temas de ecuaciones lineales y no lineales. Cabe enfatizar que el objeto matemático trabajado no está contemplado en el currículum nacional; por lo que podemos desprender del análisis, que estos dos temas propuestos son trabajados en forma aislada.

1.2.1 ECUACIÓN LINEAL

En el primer ciclo de educación básica, es el eje de patrones y álgebra el que alberga el objeto de ecuaciones, comenzando en primer año básico con las nociones de igualdad y desigualdad (desde la concepción de números iguales o distintos) aplicando modelo "concreto, pictórico, simbólico" que se designa con la sigla COPISI. Posteriormente, podemos apreciar en segundo año básico que las nociones de igualdad (=) y desigualdad (>, <) con ámbito numérico 0-20 (MINEDUC 2012, p.100-104) permiten ampliar la mirada del conocimiento aprendido durante al año anterior.

Esta construcción primaria nos permite apreciar cómo las nociones, necesarias para el concepto de ecuación, son cimentadas desde los elementos básicos, igualdad y desigualdad; por lo que la construcción de la noción de igualdad es de suma importancia a la hora de comprender el concepto de ecuación.

En tercero básico, se introduce la noción de incógnita y despeje de incógnita con ámbito número 0-100, resolviendo ecuaciones de un paso que involucren adiciones, sustracciones y un símbolo geométrico que represente el número desconocido (MINEDUC 2012, p. 108). En cuarto básico se introduce la comprobación de resultados de ecuaciones en forma pictórica y simbólica en el mismo ámbito numérico que tercero básico.

Es importante detenernos a analizar éste momento. El estudiante se enfrenta a la representación de lo incógnito por primera vez en el trabajo matemático, siendo representado este como un espacio en blanco o un símbolo que ejemplifica el "valor desconocido"; pero además, no solo posee herramientas para reconocerlo, sino también para determinar su valor y comprobarlo. Es en el primer ciclo básico donde se realiza la construcción de las nociones más básicas de ecuación: igualdad e incógnita.

En segundo ciclo básico, comenzando en quinto año básico se introduce la resolución de problemas usando ecuaciones y en sexto se suman estrategias de resolución como la descomposición y la correspondencia 1 a 1 (MINEDUC 2012, p. 120-125). La introducción al segundo ciclo básico, desde el currículo instala la ecuación como herramienta para la resolución de problemas y además asocia estrategias para ello.

En séptimo y octavo básico se trabaja con la modelación y la resolución de problemas diversos de la vida diaria que involucran ecuaciones lineales trabajando en Z y en Q respectivamente (MINEDUC 2013, p. 118-124). Así el segundo ciclo básico, preserva la estructura de la ecuación como una herramienta para la resolución de problemas en contexto, otorgándole aplicaciones y utilización en el cotidiano.

En el ciclo de enseñanza media, comenzando en primer año medio, se presentan como aprendizajes esperados: Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales y resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado

(MINEDUC 2011a, p. 28), para posteriormente plantear y resolver sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante gráfica y de manera algebraica (MINEDUC 2011a, p. 29).
Este es el momento culmine del barrido curricular, la construcción del sistema de ecuaciones como estrategia para plantear y resolver problemas, de manera algebraica y gráfica. Este proceso es necesario y el que da sustento a nuestra propuesta didáctica, por lo que es importante contemplar la construcción del objeto desde los programas de estudio y como éste es presentado a los estudiantes.

1.2.2 ECUACIÓN CUADRÁTICA

El concepto de ecuación es ampliado a ecuaciones de segundo grado en tercer año medio, añadiendo también la posibilidad de determinar la solución, independiente su naturaleza, ya que el sistema numérico de los complejos es conocido (MINEDUC 2015a, p. 33). Es en este curso donde se realiza un trabajo profundo respecto del estudio de la solución de una ecuación cuadrática y el discriminante asociado a la ecuación. Así también, las ecuaciones cuadráticas permiten resolver problemas.
El último año de educación media está enfocado al trabajo con sistema de inecuaciones lineales y la modelación de la funciones (MINEDUC 2015b, p. 33), sin declarar nada específico del trabajo con ecuaciones; pero el conocimiento de la igualdad permite poder graficar ecuaciones (de recta, de parábola) o funciones (lineales o cuadráticas) en el plano cartesiano y el concepto de desigualdad es el que permite achurar zonas dentro de la misma gráfica, terminando con el proceso iniciado en primer año básico.
La construcción de los conceptos necesarios y suficientes para la noción de ecuación y sus aplicaciones posteriores, muestra que el año escolar óptimo para implementar una propuesta de análisis de la naturaleza de la solución de un sistema de ecuaciones, con una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, es tercer año medio; por lo que será el curso a estudiar, analizar e implementar la propuesta.

1.3 ANÁLISIS DE TEXTOS DEL ESTUDIANTE

En la siguiente sección se realiza una revisión respecto al objeto matemático en los textos de estudio, hasta tercero medio, entregados por el Ministerio de Educación el año 2016. Esta revisión se basa en determinar cómo son presentados los conocimientos previos necesarios para la construcción de los sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, proponer los sistemas de ecuaciones cuadráticos.
La revisión de textos será en forma decreciente, en función del año escolar, por lo que se presentarán los contenidos individualizados, anexándolos con la forma de abordar estos conocimientos respecto del año anterior. Se seguirá una línea de análisis respecto de la ecuación lineal y ecuación cuadrática; ya sea que estén de manera explícita o implícita.

1.3.1 TEXTO DEL ESTUDIANTE, TERCER AÑO MEDIO

La ecuación cuadrática se enseña en tercer año medio. Ésta se presenta de manera algebraica y gráfica, donde se realiza un análisis procedimental en ambos registros de la resolución de ecuaciones cuadráticas y la solución obtenida.

El texto se centra inicialmente en resolver ecuaciones cuadráticas y en la naturaleza de la solución asociada a esta. Se presenta también el análisis de los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática en su forma general, $ax^2+bx+c=0$ y la injerencia que estos tienen en la naturaleza de la solución, desde el análisis del discriminante.

Figura 1: Diagrama de función y ecuación cuadrática. (Saiz y Blumenthal; 2014; p 74)

Posteriormente se realiza el análisis gráfico de la ecuación $y=ax^2+bx+c$, haciendo énfasis en que se puede utilizar como estrategia de resolución en cuyos problemas que permiten tal modelación.

Determinen la intersección de las siguientes parábolas con los ejes coordenados (eje x y eje y). Grafiquen las funciones; ayúdense con el programa Graphmatica e identifiquen allí sus respuestas.

a. $f(x) = 2x^2 - 6x - 176$

b. $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c. $y = -x^2 + 2x + 2$

d. $f(x) = x^2 - 17x + 16$

e. $y = 3x^2 + 18x + 27$

f. $f(x) = -x^2 + 196$

Figura 2 : Determinar la intersección de la parábola con los ejes coordenados por medio de la resolución de ecuaciones. (Saiz y Blumenthal; 2014; p. 109)

En cuanto a las actividades planteadas por el texto se puede apreciar énfasis en cada una de los elementos de análisis que involucra la ecuación cuadrática, discriminante, vértice, intersecciones con los ejes y soluciones. Pero no muestra una relación entre la resolución algebraica de algún problema con la gráfica asociada. Así tampoco la interpretación de los elementos visualizados en la gráfica con lo obtenido en lo algebraico, por lo que queda al docente como labor pendiente.

1.3.2 TEXTO DEL ESTUDIANTE, SEGUNDO AÑO MEDIO

En este nivel se presentan los sistemas de ecuaciones lineales, donde el texto realiza un análisis gráfico de la posible solución y sobre los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. Determina la solución y la caracteriza en función de las intersecciones de las ecuaciones de recta asociadas.

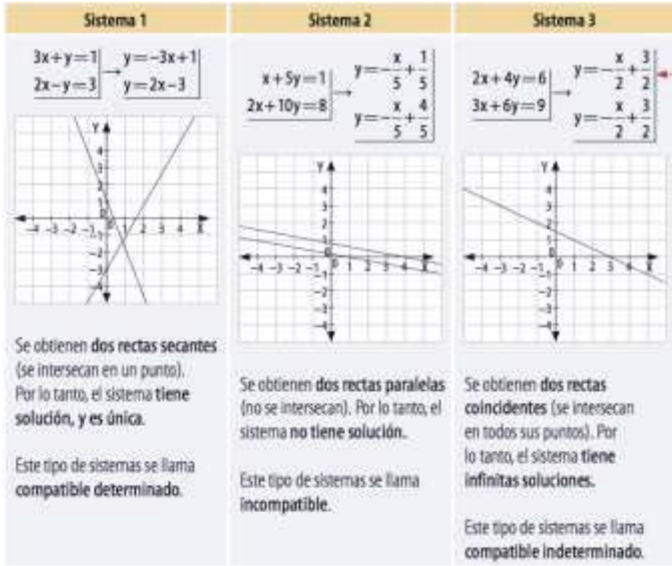


Figura 3 : Análisis gráfico de sistema de ecuaciones lineales. (Jiménez, Muñoz y Rupin; 2016; p. 223)

El texto del estudiante considera relevante el trabajo con distintos registros, pues contribuye a mejorar y fomentar un aprendizaje más acabado del saber. Pero sí se menosprecia el tratamiento y, por sobre todo, la conversión en ejemplos presentados. En cuanto al proceso de construcción de registros tabulares, para posteriormente resolver y luego graficar, el texto no le brinda mucha relevancia y no aprovecha de realizar el análisis de relación entre los registros.

$y=-x+1$

x	y	(x, y)
−2	3	(−2, 3)
−1	2	(−1, 2)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$y=-2x-1$

x	y	(x, y)
−2	3	(−2, 3)
−1	1	(−1, 1)
0	−1	(0, −1)
1	−3	(1, −3)

Figura 4: Cálculo de la solución por medio de tabla de datos. (Jiménez et al; 2016; p. 222)

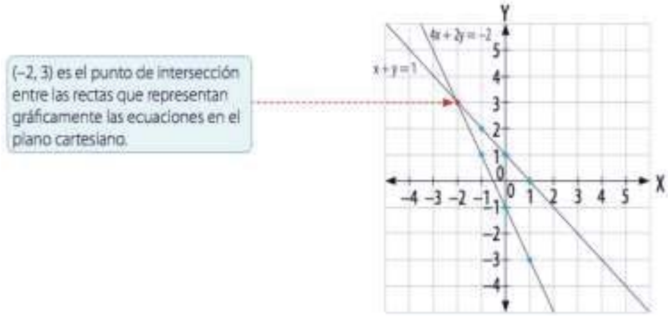


Figura 5: Interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuación. (Jiménez et al; 2016; p. 222)

1.3.3 TEXTO DEL ESTUDIANTE, PRIMERO MEDIO

La ecuación lineal, se presenta mayormente en este nivel, indicando distintas características de ésta. También se realiza un análisis de la solución que puede entregar una ecuación lineal y un análisis gráfico de la solución de la ecuación. En este nivel las ecuaciones se presentan con coeficientes racionales, por lo que se suma como estrategia la de amplificar por el mínimo común múltiplo, para resolver ecuaciones.

a) $a + 5 = 2a + 3$

b) $\frac{5}{8}d - \frac{1}{9} = \frac{13}{2}d - \frac{6}{5}$

c) $\frac{7}{3}x - \frac{1}{5}x = \frac{2}{15}x + 5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{5}$

d) $\frac{3z}{2} + \frac{2z}{3} = \frac{z}{2} - \frac{2z}{4}$

e) $\frac{3x - 4}{4} = x + 6$

Figura 6: Ecuaciones de primer grado con una incógnita. (Del Valle, Muñoz y Santis; 2016; p.112)

La ecuación se presenta como herramienta para la resolución de problemas de planteo en contexto, y se centra en el despeje de incógnita como estrategia de resolución y posterior respuesta asociada a la situación problema.

a) Una pirámide de base cuadrada tiene un área basal de 2304 m^2. Si el volumen de la pirámide es de 7680 m^3, ¿cuál es la medida de la mitad de su altura?

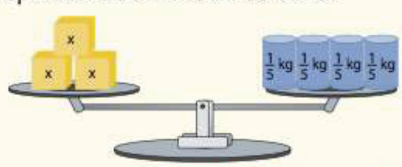
b) Un depósito tiene forma de cono y su radio basal es de 30 m de longitud. Si contiene líquido hasta el 60% de su capacidad, que corresponde a 48 600 m^3 de agua, ¿cuál es la altura del depósito? Considera $\pi = 3$.

Figura 7: Problemas que involucran ecuaciones. (Del Valle et al; 2016; p.112)

1.3.4 TEXTO DEL ESTUDIANTE, OCTAVO AÑO BÁSICO

En este nivel se aborda el contenido de ecuaciones lineales, donde se hace énfasis en el análisis algebraico y pictórico de los contenidos, aludiendo al concepto de la balanza, posteriormente a la resolución de ejercicios y finalmente a la modelación de problemas. Lo que si se considera es la representación que se realiza de las distintas ecuaciones y que pueden utilizarse en diversos contextos.

Escribe en lenguaje algebraico la ecuación que está representada en cada balanza.



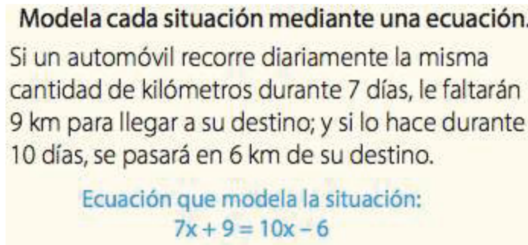
Ecuación: $x + x + x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \rightarrow 3x = \frac{4}{5}$

Figura 8: Representación de ecuación por medio de una ecuación. (Catalán, Pérez, Prieto y Rupin; 2016; p. 126)

Resuelve cada ecuación e indica las transformaciones aplicadas para determinar su solución.

$6m - 18 = 3m - 21$	$/-3m$
$6m - 18 = -21$	$/+18$
$3m = -3$	$/:3$
$m = -1$	

Figura 9: Resolución de ecuación de primer grado con una incógnita. (Catalán et al; 2016; p. 131)



Modela cada situación mediante una ecuación.

Si un automóvil recorre diariamente la misma cantidad de kilómetros durante 7 días, le faltarán 9 km para llegar a su destino; y si lo hace durante 10 días, se pasará en 6 km de su destino.

Ecuación que modela la situación:

$7x + 9 = 10x - 6$

Figura 10: Modelación de un problema por medio de una ecuación. (Catalán et al; 2016; p.127)

1.3.5 TEXTO DEL ESTUDIANTE, SÉPTIMO AÑO BÁSICO

En este nivel hay un énfasis importante a lo pictórico o representación de los diversos contextos en que se puede aplicar el concepto de ecuación. Por lo que en general se solicita algún tipo de representación, ya sea en la recta numérica o del contexto de la situación para resolver la ecuación lineal.

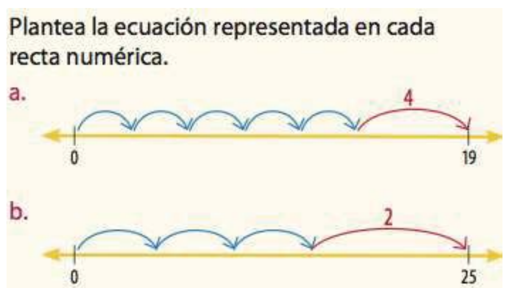
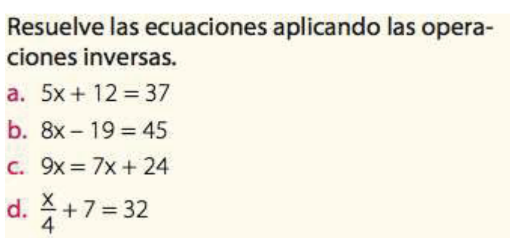


Figura 11: Resolución de ecuaciones lineales por medio de la recta numérica. (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin; 2016; p. 119)



Resuelve las ecuaciones aplicando las operaciones inversas.

a. $5x + 12 = 37$

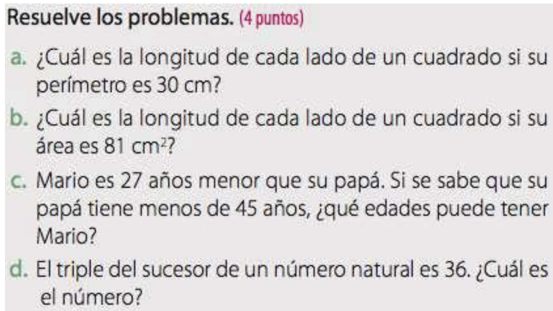
b. $8x - 19 = 45$

c. $9x = 7x + 24$

d. $\frac{x}{4} + 7 = 32$

Figura 12: Resolución de ecuaciones por medio de operaciones inversas. (Merino et al; 2016; p. 119)

Es importante notar que el tipo de problema y de ejercicios planteados, se caracterizan por ser de resolución expedita y de fácil planteo, ya que el énfasis está centrado en el traspaso de lenguaje natural a lenguaje algebraico. Esto nos permite apreciar la intencionalidad, de parte del currículo, de la aprehensión de ciertas habilidades, previas a la resolución de problemas más complejos y aquí radica la secuencia que poseen los textos.



Resuelve los problemas. (4 puntos)

a. ¿Cuál es la longitud de cada lado de un cuadrado si su perímetro es 30 cm?

b. ¿Cuál es la longitud de cada lado de un cuadrado si su área es 81 cm^2?

c. Mario es 27 años menor que su papá. Si se sabe que su papá tiene menos de 45 años, ¿qué edades puede tener Mario?

d. El triple del sucesor de un número natural es 36. ¿Cuál es el número?

Figura 13: Resolución de problemas por medio de ecuaciones. (Merino et al; 2016; p. 105)

Los cursos básicos anteriores a los ya mostrados, trabajan e introducen el concepto de ecuación, pero no se abordarán; puesto que el tema a tratar está basado en sistema de ecuaciones cuadráticas y no se pretende llegar al principio de los contenidos, sino tener una visión clara de los contenidos. A pesar de ello, se indica que en los años escolares previos se trabaja el concepto de ecuación en forma pictórica y la noción de igualdad durante el primer ciclo de educación básica y extiende esta noción a los cursos posteriores junto con el de incógnita.

En la educación secundaria de Chile se aprecia que los contenidos de ecuación de la recta y ecuación de la parábola no se vinculan, además el conocimiento actual en el aula se caracteriza por la resolución de ejercicios, donde el desarrollo de los contenidos en el aula se caracteriza por el desarrollo de ejercicios, dejando de lado la resolución de problemas que permite desarrollar el análisis del objeto matemático involucrado. A partir de esta problemática se generó una situación en el curso de Seminario Taller de Investigación del programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV primer semestre de 2016, el cual aborda ambos contenidos, generando así un sistema de ecuaciones la que fue implementada por medio de estudios de clases (Isoda, M; Mena, A. & Arcavi A., 2005). Estas implementaciones fueron realizadas por 4 profesores, en distintos establecimientos educacionales, tres de la región de Valparaíso y uno de la región del Biobío, dos de tipo particular y dos de tipo particular subvencionado, cuyas clases se realizaron en tres cursos de tercer año medio y en un curso de cuarto año medio, con un promedio de 20 estudiantes por curso.

En la búsqueda de antecedentes no fue posible encontrar alguna investigación que aborde SECRP con el marco teórico APOE, por lo cual los antecedentes para esta investigación están vinculados a la solución de un sistema de ecuaciones lineales o bien aquellas que tienen que ver con la representación o interpretación de ecuaciones.

Una investigación realizada por Panizza, Sadovky y Sessa (1999) se refiere a las distintas dificultades de los estudiantes al momento de interpretar un sistema de ecuaciones lineales, quienes no logran comprender que las ecuaciones definen un conjunto de infinitos pares de números reales. Estos autores además identifican otra dificultad que presentan los estudiantes, a pesar del tratamiento que se le otorga a la ecuación lineal con dos variables como ecuación de la recta, estos no logran establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación.

De modo similar, Arellano y Oktaç (2009) dan cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes al momento de realizar la correspondencia entre las variables visuales de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica (en el sentido de Duval (1988)). Por cierto el foco del investigador estaba en distinguir las dificultades relacionadas con una ecuación y aquéllas que se relacionan con el concepto de sistemas, llegando a la conclusión que efectivamente se presenta una serie de dificultades en la graficación de las rectas y en la representación de una ecuación lineal en un plano, entre otras.

Otra investigación, que si bien no está ligada directamente con esta problemática, sí entrega información bastante interesante respecto de cómo se puede construir el concepto de sistema de ecuación, corresponde al trabajo realizado por Cutz (2005). La autora se enfoca en observar las estrategias y dificultades de los estudiantes cuando estos pretenden utilizar el modo geométrico para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables, como también en el estudio del tránsito del modo geométrico al modo analítico. Este trabajo fue realizado con el marco teórico de los modos de pensamiento de Sierpinska (2000).

En suma, existen antecedentes que dan cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes, no tan solo al resolver los sistemas de ecuaciones, sino también en cómo las ecuaciones lineales con dos variables se relacionan con estos y a su vez cómo los estudiantes entienden y representan un sistema de ecuación en sus distintos registros de representación semiótica (Duval, 1988).

CAPITULO 2: PREGUNTA Y OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

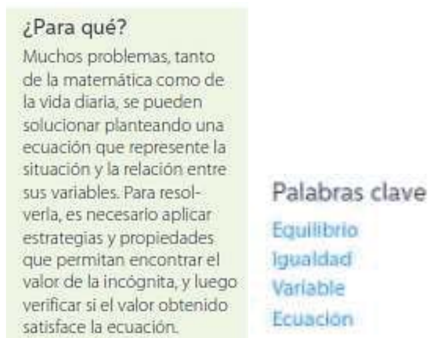
Las preguntas que surgen del análisis anterior son: ¿Cómo los estudiantes construyen el concepto de sistema de ecuaciones cuadráticas con una recta y una parábola?; ¿Qué construcciones y mecanismos mentales manifiesta cada estudiante de enseñanza media y postgrado al trabajar el objeto matemático de sistema de ecuaciones que involucra dos ecuaciones, la de una recta y la de una parábola? Para estas preguntas se analizaron las producciones realizadas por los estudiantes de tercer año medio y a un estudiante de magíster en matemática con el marco teórico APOE. Se considera que este marco teórico es pertinente para esta investigación, ya que otorga una metodología integrada y principalmente porque proporciona una metodología para la construcción del objeto matemático.

CAPITULO 3: OBJETO MATEMÁTICO

3.1 SABER MATEMÁTICO ESCOLAR

3.1.1 ECUACIONES

Analizando los textos escolares correspondiente a los cursos analizados anteriormente, podemos apreciar la intención de desarrollar el concepto de ecuación. Sin embargo, solo se entrega características de este concepto. No se define previamente que es una ecuación en términos estrictos, ni en el texto del estudiante, ni en la guía didáctica del profesor. Ejemplos de lo recién mencionado se puede observar en las siguientes figuras:



¿Para qué?

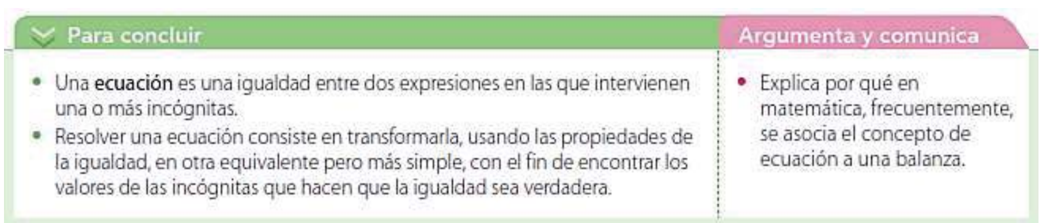
Muchos problemas, tanto de la matemática como de la vida diaria, se pueden solucionar planteando una ecuación que represente la situación y la relación entre sus variables. Para resolverla, es necesario aplicar estrategias y propiedades que permitan encontrar el valor de la incógnita, y luego verificar si el valor obtenido satisface la ecuación.

Palabras clave

Equilibrio
Igualdad
Variable
Ecuación

Figura 14: Concepto de ecuación. (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin; 2016; p. 114)

Sí se entregan orientaciones claras a modo de conclusión, posterior trabajo, de la finalidad de una ecuación y se orienta respecto del concepto de balanza. Además se entregan y definen propiedades asociadas a la operatoria en el trabajo algebraico y numérico de una ecuación, definiendo esta para números naturales.



Para concluir

- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones en las que intervienen una o más incógnitas.
- Resolver una ecuación consiste en transformarla, usando las propiedades de la igualdad, en otra equivalente pero más simple, con el fin de encontrar los valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea verdadera.

Argumenta y comunica

- Explica por qué en matemática, frecuentemente, se asocia el concepto de ecuación a una balanza.

Figura 15: Definición de ecuación.(Merino, Muñoz, Pérez y Rupin; 2016; p. 116)

Ampliando

Las siguientes propiedades de la igualdad que permiten resolver ecuaciones de manera algebraica:

Si a, b, c $\in \mathbb{N}_0$, entonces se cumple que:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.
3. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.
4. Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $a : c = b : c$.

Resolver una ecuación consiste en transformarla, usando las propiedades de la igualdad, en otra equivalente pero más simple, con el fin de encontrar los valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea verdadera.

Figura 16: Propiedades de los números naturales. (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin; 2016; p.115)

3.1.2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Por su parte los sistemas de ecuaciones lineales son abordados en segundo año de enseñanza media, de acuerdo a lo propuesto por el MINEDUC en los planes y programas, en donde se enseñan los distintos métodos de resolución (igualación, sustitución, reducción, gráfico, entre otros).

En el tratamiento de este objeto matemático, vemos que sólo se tratan ecuaciones lineales, y en algunos casos, con ecuaciones cuadráticas, las que son transformadas a lineales por medio de un cambio de variable. Es decir, no se abordan casos donde, por ejemplo, se busque la intersección entre una recta y una parábola.

Un ejemplo de cómo se presentan los sistemas de ecuaciones lineales en los textos escolares se muestra en las siguientes figuras:

Lo que ha hecho Paulina es resolver un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** (una ecuación es lineal si el mayor exponente de sus incógnitas es igual a 1), es decir, ha planteado dos ecuaciones con incógnitas **x** e **y** y ha determinado un par de valores de ellas que satisfacen **simultáneamente** a ambas ecuaciones. En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar de las siguientes maneras:

$$\begin{matrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} ax+bx=e \\ cx+dx=f \end{matrix}\right|$$

a, b, c y **d** se llaman **coeficientes** mientras que **e** y **f** son los **términos libres**. La solución del sistema se escribe como un par ordenado **(x, y)**. En el ejemplo, la solución del sistema es **(21, 13)**.

Figura 17: Definición de sistemas de ecuaciones lineales. (Muñoz, Rupin y Jiménez; 2014; p. 220)

¿Cómo podemos determinar, algebraicamente de qué tipo es un sistema sin necesidad de resolverlo? Considerando el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right|$$

Se tiene que:

- el sistema es **compatible indeterminado** si es posible obtener la segunda ecuación a partir de la primera (o la primera a partir de la primera) multiplicando o dividiendo por un número $k \neq 0$. Es decir, se cumple la relación:

  $c = ka \rightarrow \frac{c}{a} = k \qquad d = kb \rightarrow \frac{d}{b} = k \qquad f = ke \rightarrow \frac{f}{e} = k$

  Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{f}{e}$

- el sistema es **incompatible** si es posible obtener los coeficientes de **x** e **y** de la segunda ecuación a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$, pero no el término libre. Es decir, se cumple la relación:

  $c = ka \rightarrow \frac{c}{a} = k \qquad d = kb \rightarrow \frac{d}{b} = k \qquad f \neq ke \rightarrow \frac{f}{e} \neq k$

  Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \neq \frac{f}{e}$

- el sistema es **compatible determinado** si no es posible obtener los coeficientes de la segunda a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$. Es decir, para todo número $k \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$$

Figura 18: Análisis de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. (Muñoz, Rupin y Jiménez 2014; p.233)

En resumen

Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de ecuaciones lineales.

Se representa de la forma

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right|$$

donde **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** $\in \mathbb{R}$ y **x** e **y** son las incógnitas.

Una solución **(p, q)** del sistema es un par de valores que satisface simultáneamente ambas igualdades.

Figura 19: Definición de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Muñoz, Rupin y Jiménez; 2014; p. 220)

3.1.3 ECUACIÓN CUADRÁTICA

La noción matemática ecuación cuadrática, según lo propuesto en los planes y programas, es abordada en tercer año de enseñanza media. Su tratamiento es de manera aislada y sin ser relacionada con otros contenidos. La definición entregada se presenta a continuación:

Definiremos ecuación cuadrática como aquella ecuación en la que al menos una de las incógnitas involucradas está elevada al cuadrado, siendo la mayor potencia de ella.

Así, una ecuación cuadrática será toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Figura 20: Ecuación cuadrática (Saiz y Blumenthal; 2014; p. 81)

Sintetizando

- Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son reales y $a \neq 0$.
- Al resolverla se buscan los valores de x que hacen que la igualdad se satisfaga.
- La fórmula general para resolverla es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Sin embargo, hay ocasiones en que se pueden resolver por factorización o extrayendo raíces.
- Las ecuaciones cuadráticas pueden tener una, dos soluciones reales o dos soluciones complejas conjugadas (dependiendo del valor de $\Delta = b^2 - 4ac$)
  Si $\Delta > 0$ entonces hay dos soluciones reales y distintas.
  Si $\Delta = 0$ entonces hay dos soluciones reales e iguales.
  Si $\Delta < 0$ entonces no tiene soluciones reales.
- Las ecuaciones fraccionarias que se reducen a ecuaciones cuadráticas deben ser siempre comprobadas.

Figura 21: Síntesis unidad ecuación cuadrática. (Saiz y Blumenthal; 2014; p. 98)

Por otro lado, al analizar los programas de estudio de segundo y tercer año medio podemos notar que los contenidos, que son nuestro interés de estudio, no presentan relación entre ellos al pasar de un nivel a otro, es decir, son trabajados totalmente independientes.

Otro punto importante a mencionar es que los programas de estudio no definen el objeto matemático a tratar, sino que entregan constantemente propiedades o aplicaciones que caracterizan a estos conceptos. Ejemplo de lo mencionado anteriormente está en las siguientes imágenes.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.	› Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente. › Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, usando un software gráfico. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante reducción. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante igualación. › Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales dado y determinan su solución. › Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Figura 22:Tratamiento del aprendizaje esperado según MINEDUC (2011b)

3.2 SABER MATEMÁTICO

En este apartado, se presenta la definición de nuestro objeto matemático desde lo erudito. El objeto matemático tratado es ***"Sistema de ecuaciones cuadráticas".*** Dado que este objeto matemático no aparece explícito en el currículum escolar, para definirlo, se considerarán las nociones de: ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, formas cuadráticas, ecuación cuadrática y sistema de ecuaciones cuadráticas.

3.2.1 ECUACIONES LINEALES

Definición (Kolman y Hill, 2006, p.1)
Se denomina **ecuación lineal** de n variables (o incógnitas), x_i, a aquella que se expresa de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde los $a_i, b \in \mathbb{R}$.

La **solución de la ecuación lineal** corresponde a la n-upla $(s_1, s_2, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, tales que $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$.

Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación de le denomina *conjunto solución* de la ecuación.

3.2.2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Definición (Kolman y Hill, 2006, p. 1)

Un sistema de m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas** $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ –al que podemos llamar simplemente **sistema lineal**-, es un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas.

Un sistema lineal puede denotarse sin problema mediante:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Una n-upla $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ es solución del sistema si es solución de todas y cada una de las ecuaciones lineales.

Como se mencionó al comienzo de este apartado, nuestro objeto matemático de interés es sistema de ecuaciones cuadráticas; dado que ya se han presentado los conceptos ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales, se procederá a definir el objeto "formas cuadráticas", agregando un teorema relativo a él.

3.2.3 FORMAS CUADRÁTICAS

Definición (Abia, 2013, p. 1)

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, y sea B una base de V. Se denomina **forma cuadrática** sobre V a toda "función polinómica" $Q: V \to \mathbb{R}$ de la forma

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

donde $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Es decir, una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de segundo con n variables.

Toda forma cuadrática Q sobre V, se puede expresar matricalmente como:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Teorema: Si A es una matriz simétrica, entonces toda forma cuadrática Q sobre V se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q(x) = {[x]_B}^t A [x]_B$$

Demostración:

Si en la expresión de la forma cuadrática, $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, consideramos los pares de sumandos de la forma $a_{ij} x_i x_j$ y $a_{ji} x_j x_i$ se tiene que

$$a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j$$

Por lo que la expresión matrical de Q, es también

$$Q(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {[x]_B}^t A [x]_B$$

Cabe destacar que una de las aplicaciones de las formas cuadráticas, se da en el estudio de las secciones cónicas (en un sistema de coordenadas rectangulares en el plano cartesiano), como por ejemplo parábola, circunferencia, etc. y en el estudio de superficies cuádricas (en un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional) como por ejemplo paraboloide, esfera, etc. Por ello, a continuación se da a conocer una definición formal del objeto matemático cónica.

3.2.4 CÓNICAS

Definición (Abia, 1997, p.15)

Se define cónica en $\mathbb{R}^2$ al lugar geométrico de los puntos P, cuyas coordenadas (x, y) verifican una ecuación de la forma:

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

donde a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos.

3.2.5 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Definición (Kolman y Hill, 2006, p.15)

Se llama ecuación cuadrática en las variables x y y a una ecuación de la forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

Considerando las definiciones previamente declaradas, podemos dar a conocer la definición de nuestro objeto matemático de estudio. Es decir, a continuación definiremos sistema de ecuaciones formado por una ecuación lineal y una ecuación cuadrática.

3.2.6 SISTEMA FORMADO POR UNA ECUACIÓN LINEAL Y UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Definición (Mejía, Álvarez & Fernández, 2005, p. 79)

Un sistema formado por una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, es un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ px^2 + qx + r = y \end{array}\right|$$

donde $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}$ y $p \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right|$$

3.3 COMPARACIÓN ENTRE DISTINTOS SABERES

3.3.1 ECUACIÓN LINEAL

El saber erudito la muestra como una ecuación de la forma $a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, donde los $a_i, b \in R$ con n variables (o incógnitas), x_i. En cambio, el saber escolar la presenta como una igualdad entre dos expresiones con una o más incógnitas.

Considerando esto, las principales diferencias están en la formalidad con que se entregan las definiciones y en la rigurosidad con que se denotan las expresiones. Sin embargo, la idea principal de ambas definiciones se mantiene.

3.3.2 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

En el saber erudito se define sistema de ecuaciones lineales como un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas. En cambio, en el saber escolar se presenta la forma en que se puede denotar, es decir:

$$\begin{array}{c} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \qquad \left.\begin{array}{c} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right|$$

dejando claro que esto representa un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

De esto podemos mencionar que, en el saber escolar no se habla de conjunto de ecuaciones y no se clarifica que éstas deben ser lineales, se limita a mostrar la forma en que se escriben y cómo resolverlos.

3.3.3ECUACIONES CUADRÁTICAS

En el saber erudito se define principalmente una forma cuadrática como un polinomio homogéneo de segundo grado con n variables. Luego se da a conocer una representación con matrices. Posterior a esto, como uso particular de las formas cuadráticas se presentan las cónicas en R^2. Éstas se definen como el lugar geométrico de los puntos P, cuyas coordenadas (x, y) verifican una ecuación de la forma:

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}x + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

donde a_{11}, a_{12} y a_{22} no son simultáneamente nulos. De acá se obtiene la definición de ecuación cuadrática en las variables x y y como una ecuación de la forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

En cambio, en el saber escolar se entrega directamente la definición de ecuación cuadrática como: aquella ecuación en la que al menos una de las incógnitas involucradas está elevada al cuadrado, siendo la mayor potencia de ella. Así, una ecuación cuadrática será toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c número reales y $a \neq 0$.

La distancia existente entre estos saberes es principalmente que en el saber escolar se limita a entregar una forma particular de las que son las ecuaciones de segundo grado, sin dar algún argumento de porqué sólo se tratarán estas formas en dicho nivel escolar. Esto determina un corte en el lineamiento curricular, ya que en el estudio de los lugares geométricos que se propone por el MINEDUC para tercero medio en plan electivo, tampoco se da paso a comprender que todos esos objetos matemáticos provienen de una ecuación cuadrática del tipo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales.

CAPITULO 4: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La sigla APOE hace referencia a las construcciones mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Esta teoría desarrollada por Dubinsky y el grupo RUMEC (reserch in Undergraduate Mathematics Education Community) nace desde el desarrollo cognitivo basada en las ideas de Piaget sobre las abstracciones reflexivas para describir la construcción de objetos mentales en relación a objetos matemáticos determinados.

La abstracción reflexiva da paso a distintos mecanismos mentales: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación, desencapsulación y reversión, que se detallarán a continuación.

4.1 CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES

Una construcción ***acción*** es aquella en la cual un individuo realiza transformaciones sobre un concepto, guiado por una serie de instrucciones externas de manera explícita. En el caso de esta investigación no se abordará esta construcción en favor del tiempo destinado para el análisis de los datos.

Una construcción ***proceso*** hace referencia a una serie de *acciones* que realiza un individuo y que luego reflexiona sobre ellas dejando de lado las instrucciones externas, es decir, tiene la capacidad de imaginar la ejecución de los pasos sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso saltarse algunos de estos (Arnon et al., 2014). De este modo se *interioriza* la o las *acciones* en la construcción *proceso*. Dos procesos pueden coordinarse para dar paso a un nuevo constructo mental llamado objeto.

Una construcción ***objeto*** se logra cuando un individuo piensa en un *proceso* como un todo, con el cual realiza y construye transformaciones sobre su totalidad. En este caso se dice que ha *encapsulado* el *proceso* y que posee ahora una concepción *objeto* del concepto en cuestión.

La coordinación de procesos genera nuevos procesos que a su vez se encapsulan en nuevos objetos. La *desencapsulación*, al retornar sobre el *proceso* que estableció el *objeto*, permite *coordinar* ese *proceso* con otros.

Una construcción ***esquema*** es una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas* que se relacionan consciente e inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente.

Los elementos anteriormente mencionados son estructurados por medio de una descomposición genética (DG), el cual es un modelo hipotético que describe las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante logre aprender un objeto matemático (Arnon et al., 2014).

En el caso de esta investigación solo se abordarán los constructos ***proceso*** y ***objeto***.

En la figura N°23 se muestra como se relacionan los elementos constitutivos de la teoría APOE.

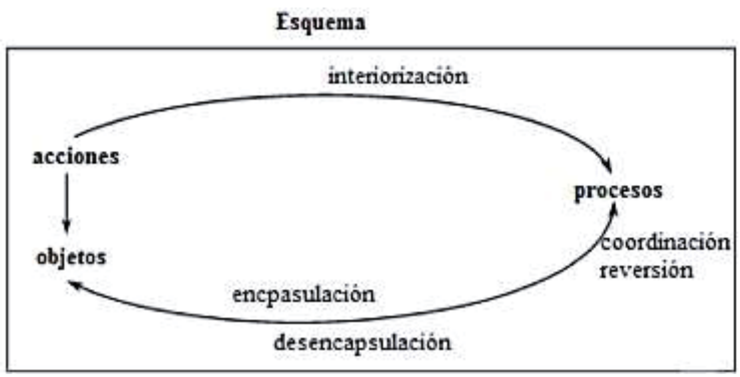


Figura 23: Relaciones entre construcciones y mecanismos mentales de la Teoría APOE (Arnon et al, 2014)

4.2 RELEVANCIA DE LOS CAMINOS COGNITIVOS

Desde los antecedentes presentados es posible indicar que más allá de las dificultades de los estudiantes, estos logran comprender el concepto sistema de ecuación cuadrática pero de distintas maneras, es decir, analizado con el marco teórico se generan distintos caminos cognitivos que dan cuenta de las distintas formas de concebir un mismo objeto matemático. Se entenderá por caminos cognitivos en una DG a la ruta que realiza cada estudiante para lograr construir el concepto matemático investigado, ya que una descomposición genética para un tema concreto no puede ser asumida como única (Vidakovic, 1993).

Importante a mencionar es que de acuerdo los antecedentes estudiados, no fue posible identificar alguno que utilice este tipo de análisis en que en una misma descomposición genética se infieran los caminos realizados por los estudiantes a través de ella, esto es, en definitiva una innovación sobre el marco teórico utilizado.

CAPITULO 5: METODOLOGÍA

Para establecer los mecanismos y construcciones mentales necesarias para el concepto SECRP, se diseñó una descomposición genética que es descrita y detallada más adelante, a continuación se generó una encuesta fundada en la descomposición genética con el propósito de utilizarla de instrumento de recogida de datos, es decir, para poder aplicarla a los estudiantes quienes darán cuenta de su ruta o tránsito por medio de la DG planteada anteriormente. Para realizar el análisis de estos datos se considera que el estudio de casos múltiples es ad hoc para el objetivo propuesto, ya que considera cada producción del estudiante como un caso individual a analizar, además permite realizar el análisis en un periodo acotado de tiempo sin perder profundidad y especificidad. El estudio de casos múltiples está inmerso dentro del ciclo de investigación que APOE (Asiala et al., 1996) trae como propia metodología de trabajo, de modo que ambos se complementan y se potencian.
Es importante mencionar que no existe una única DG asociada al concepto, ya que hay muchos caminos para lograr comprender el concepto, y esto además dependerá de los conocimientos que posea cada estudiante (Arnon et al., 2014).

5.1 PARTICIPANTES

En esta investigación los participantes fueron 2 estudiantes de 17 años de tercer año medio y un estudiante de 26 años de magíster en matemática, todos chilenos. (Stake, 1999). Los tres casos de estudio que se escogieron tienen como propósito delimitar y validar la descomposición genética planeada, que a su vez será utilizada como guía de ruta para los distintos caminos que pueden realizar los participantes a través de esta al momento de trabajar con el SECRP.

Los criterios para la selección de los casos de estudio fueron: estudiantes que posean los conocimientos previos, es decir, que sepan sobre una recta y una parábola, la accesibilidad del investigador con los informante, estudiantes que analizan de distintas formas un mismo problema, por su destacado desempeño en el área de estudio y además el último participante fue seleccionado para estudiar el caso de la reversión entre la interpretación geométrica de ecuaciones y las ecuaciones equivalentes asociadas.

A modo de simplificar el análisis se les asignarán siglas a los estudiantes como se indica en la siguiente tabla.

Tabla 2: Codificación de informantes

Estudiante	Tercer año medio 1	Tercer año medio 2	Magíster en matemática.
Sigla	E1	E2	E3

En la tabla presentada anteriormente se indican las codificaciones para realizar un análisis más rápido y eficiente.

5.2 ANÁLISIS TEÓRICO

El análisis teórico consistió en un estudio exhaustivo sobre el concepto SECRP por parte del investigador para lograr estructurar la descomposición genética con el propósito de poseer un modelo epistemológico-cognitivo de la construcción de SECRP.

5.2.1 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE SECRP

Considerando como hipótesis la descomposición genética de acuerdo a lo que plantea la teoría APOE en conjunto con las nociones matemáticas de SECRP, se indica que los conocimientos previos requeridos por el aprendiz para la construcción SECRP corresponden ser los de conjunto, función proposicional, sistema de ecuaciones, conjunción de ecuaciones, interpretación geométrica de ecuaciones, ecuaciones equivalentes, intersección de ecuaciones y ecuación de segundo grado como un proceso, mientras que los conceptos de ecuación y sistema de ecuaciones cuadráticas con una recta y una parábola como un objeto.

El modelo de la construcción mental SECRP se inicia desde 2 entradas en la descomposición genética, una de ellas corresponde ser por medio de las coordinaciones de los procesos conjunto y función proposicional que se coordinan por medio de la definición $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{matrix} y=ax+b \\ y=cx^2+dx+e \end{matrix}\right\}$, para dar paso al proceso sistema de ecuaciones el cual se revierte en el proceso conjunción de ecuaciones por medio del conectivo “y”, para luego coordinarse por medio de la lógica proposicional para dar lugar al proceso ecuación de segundo grado que se encapsula en el objeto sistema de ecuación cuadrática de una recta y una parábola a través del conjunto solución.

Por otro lado el SECRP comienza en la DG por el objeto ecuación que es desencapsulado a los procesos de conjunción de ecuaciones, interpretación geométrica de ecuaciones y ecuaciones equivalentes. Luego se genera una reversión entre el proceso conjunción de ecuaciones e interpretación geométrica[1] entre ecuaciones generado por los conceptos de gráfico y gráfica[2]. Otra reversión en este nivel de la DG corresponde ser entre los procesos interpretación geométrica y ecuaciones equivalentes el cual se da gracias a la definición de lugar geométrico.

En tanto los procesos conjunción de ecuaciones e interpretación geométrica entre ecuaciones se coordinan por medio del conjunto solución llegando al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones el cual es encapsulado al objeto SECRP.

Cabe señalar que esta DG nace a partir un análisis exploratorio realizado en un estudio de clases. En la Figura 14 se ilustra la descomposición genética hipotética del SECRP.

---

[1] Cuando se habla de una representación geométrica se hace referencia a la gráfica de las soluciones de la ecuación.

[2] Se entenderá por Gráfico al conjunto de puntos que cumplen cierta relación y se llamará Gráfica a la representación geométrica de estos puntos.

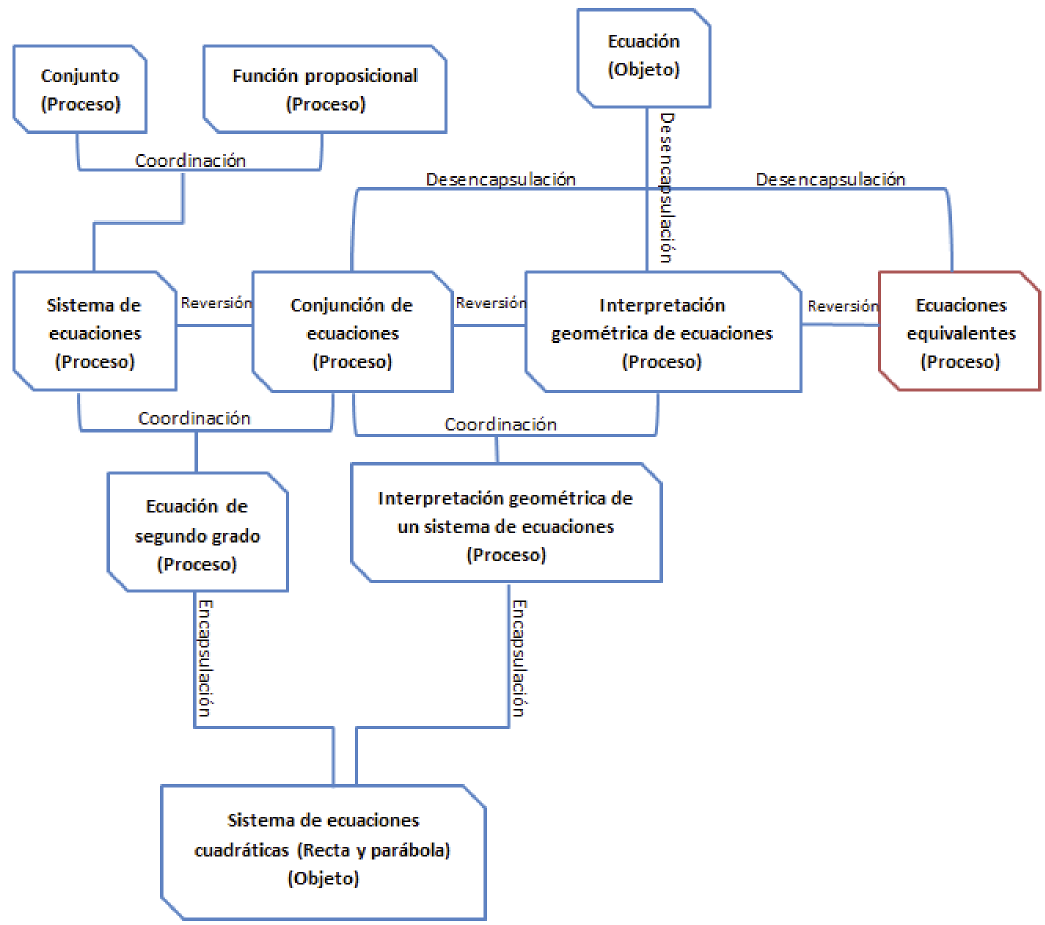


Figura 24: descomposición genética para el concepto SECRP

5.3 INSTRUMENTOS

En una primera instancia se diseñó una encuesta con 6 preguntas que abordó todos los componentes de la DG, es decir, que se logró documentar todos los mecanismos y construcciones mentales vaticinados en la DG. Las preguntas se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1: cuestionario creado en relación a la descomposición genética hipotética

Pregunta N°1	Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}\right\|$ Escriba el conjunto solución para los casos a) $p = 9$ b) $p = 12$ c) $p = 15$ d) $p = 11$ ¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?
Pregunta N°2	¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?
Pregunta N°3	¿Hay relación entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones? ¿En qué influye el discriminante?
Pregunta N°4	Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique
Pregunta N°5	Al resolver el sistema y transformar los sistemas de ecuaciones equivalentes, ¿Cuáles son sus gráficas equivalentes? ¿Qué relación existe entre ellas? [3]
Pregunta N°6	¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

Antes y después de implementado el cuestionario se realizó un análisis para casa una de las preguntas del cuestionario con el propósito de contrastar y refinar la DG propuesta. Otro

[3] Esta pregunta será implementada a un estudiante de Magíster en matemática para analizar sus producciones, ya que los otros estudiantes no poseen los conocimientos previos para ello.

propósito importante que tiene la encuesta es dar cuenta de los distintos caminos[4] que siguen los estudiantes a través de la DG sobre el SECRP.

Las preguntas realizadas en la encuesta se enfocan principalmente a entregar a los estudiantes preguntas al alcance de sus conocimientos previos pero que requieran de un análisis más profundo sobre la relación que se establecer entre estas ecuaciones ya trabajadas; una ecuación de la recta y una ecuación de la parábola. Las preguntas del cuestionario fueron resueltas en su totalidad por los tres estudiantes.

5.4 ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO

El objetivo de la pregunta N°1 es que el estudiante logre coordinar el proceso conjunto y el proceso función proposicional para dar paso a un sistema de ecuación por medio de la expresión $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{matrix} y=ax+b \\ y=cx^2+dx+e \end{matrix}\right\}$ llegando de este modo a los puntos que cumplen ambas condiciones. Es decir para esta pregunta en específico se pretende que indique que para el caso:

a) No existen soluciones

b) Existen 2 soluciones las cuales son: (2,8) y (0,12)

c) Existen 2 soluciones las cuales corresponden ser: (3,9) y (-1,17)

d) Existe 1 solución la cual es: (1,9)

La pregunta N°2 en tanto, está enfocada a otro segmento de la DG, ya que pretende que el estudiante sea capaz de indicar que las intersecciones entre las ecuaciones corresponden ser las soluciones del sistema de ecuación planteado, es decir, son los puntos que cumplen ambas ecuaciones, de modo que el proceso sistema de ecuaciones se revierta por medio del conectivo lógico "y" para dar paso al proceso conjunción de ecuaciones.

Por otro lado la pregunta N°3 tiene su foco en dar respuesta a la reversión entre la conjunción de ecuaciones y la interpretación geométrica de ecuaciones. En la cual se pretende que el estudiante

[4] Se entenderá por ruta, como el camino utilizado por el informante que permite lograr la construcción del objeto sistema de ecuaciones cuadráticas.

sea capaz de indicar que la conjunción de ecuaciones corresponde ser la intersección geométrica que se da entre las ecuaciones.

El proceso conjunción entre ecuaciones se revierte por medio de los conceptos de gráfica y gráfico para dar lugar al proceso interpretación de ecuaciones. Específicamente se pretende que el estudiante logre a partir de los resultados obtenidos de su desarrollo algebraico conectarlos con la interpretación geométrica que tienen estos a través del discriminante, quien es el que determina si es que existe o no intersección (o solución según como se desee analizar) en el sistema de ecuación.

La pregunta N° 4 está enfocada principalmente a evidenciar como los estudiantes logran coordinar los procesos conjunción de ecuaciones e interpretación geométrica de ecuaciones por medio del conjunto solución del sistema de ecuación.

La respuesta que se espera en esta pregunta es que los estudiantes logren explicar que la conjunción de ecuaciones geométricamente se observa como los puntos de intersección entre ambas representaciones, de modo que ambas están relacionadas por el conjunto solución del sistema de ecuaciones.

El interés que presenta la pregunta N°5 apunta hacia un problema un tanto más complejo (desde el punto de vista de los estudiantes de tercer año medio) que se evidenció dentro del análisis exploratorio llevado en el Estudio de Clases, en donde se observó que los estudiantes resolvían en sistema de ecuación llegando a una ecuación de segundo grado que luego graficaban como si correspondiera ser una parábola.

Es por esta razón que se espera que un estudiante con conocimientos más avanzados logre dar respuesta a esta inquietud, ya que de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes de tercer año medio no es posible dar una respuesta satisfactoria a dicha dificultad que emergió.

En tanto, esta da la oportunidad de evidenciar cómo es posible realizar una reversión desde el proceso interpretación geométrica de ecuaciones al proceso ecuaciones equivalentes por medio del concepto lugar geométrico.

Finalmente en la pregunta N°6 se espera que el estudiante logre encapsular el proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación al objeto SECRP. Esta construcción mental se logra de acuerdo a lo analizado anteriormente cuando el estudiante es capaz de comprender la importancia de los coeficientes de las ecuaciones, específicamente, el parámetro “p”, ya que es este elemento el que permite determinar si existe o no soluciones, intersecciones o bien conjunciones entre las ecuaciones planteadas.

Una vez generados y aplicados los instrumentos, para este caso el cuestionario, se procede a realizar el análisis comparativo de la DG hipotética con las evidencias de los tres casos estudiados, con el propósito de identificar si es que los estudiantes poseen o no las construcciones y mecanismos mentales predichos en la DG.

Además el análisis pretende indicar la ruta que realiza cada estudiante a través de la DG hipotética para poder llegar al concepto de sistema de ecuación cuadrática con una recta y una parábola. Ahora bien se analizan también los mecanismos y construcciones mentales que no fueron previstos en la DG hipotética, la cual sirve de ruta para lograr identificar la ruta que cada estudiante logra realizar por esta.

CAPITULO 6: RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos a la luz del marco teórico y contrastado con la descomposición genética hipotética que fue prevista anteriormente para de este modo indicar las descomposiciones genéticas personales de cada uno de los casos estudiados.

6.1 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE E1

El estudiante comienza su desarrollo con el objeto ecuación para dar paso por medio de una desencapsulación a cargo del gráfico y la gráfica para llegar al proceso interpretación geométrica de ecuaciones y genera a su vez una reversión por medio de la ecuación de segundo grado para llegar al proceso intersección entre ecuaciones que a su vez genera una reversión a través del conjunto solución con sistema de ecuación para dar paso a una coordinación entre estos tres procesos dando lugar de esta forma al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación. Finalmente el proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación se encapsula en el objeto sistema de ecuaciones cuadráticas (recta y parábola) por medio del conjunto solución.

En la pregunta N°1, el objeto ecuación ha sido desencapsulado al proceso de interpretación geométrica de ecuaciones por el estudiante a través de la utilización de los conceptos gráfico y gráfica, como se muestra a continuación.

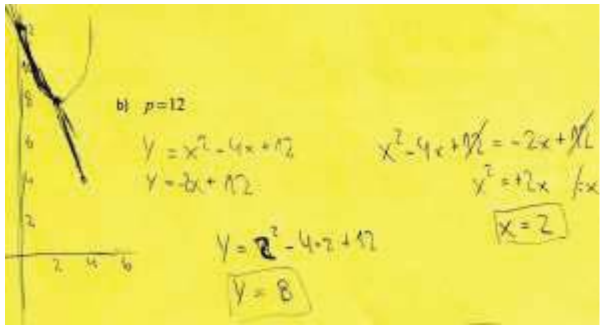


Figura 25: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°1

A pesar que el estudiante comente un error al determinar el valor de “x” logra el mecanismo de desencapsulación del *objeto* ecuación.

En relación a la pregunta N°2, el estudiante realiza el proceso sistema de ecuaciones el cual es revertido al proceso conjunción de ecuaciones por medio del conectivo “y”, que se ve reflejado al momento de igualar ambas ecuaciones, es decir, que ambas cumplan la condición a la vez. Luego de esto el estudiante logra llegar a una ecuación de segundo grado que le permite encontrar la solución del sistema.

Todo lo comentado anteriormente se evidencia con la siguiente imagen.

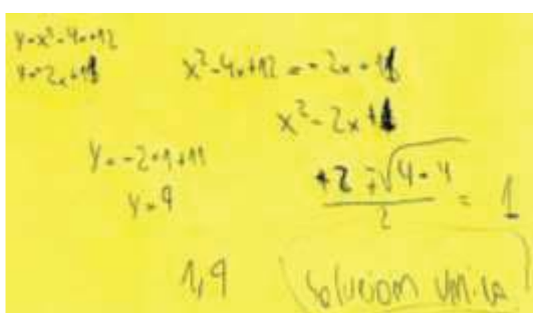


Figura 26: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°2

Por otro lado este estudiante responde a la pregunta de la siguiente manera:

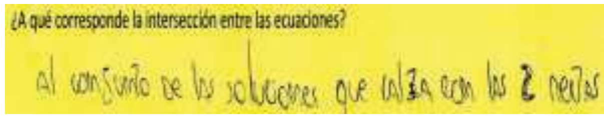


Figura 27: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°2

Es decir, el estudiante está pensando en que se cumplan ambas condiciones, aunque no está explicito, si está pensando en la conjunción de ecuaciones.

Con lo que respecta al análisis de la pregunta N°3, se puede afirmar que el estudiante logra la reversión del proceso sistema de ecuación al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación por medio del conjunto solución. Luego para coordinar los procesos sistema de ecuaciones con la conjunción de ecuaciones por medio del discriminante para motivar la construcción proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación.

Algunas evidencias que dan cuenta de esto se presentan a continuación.

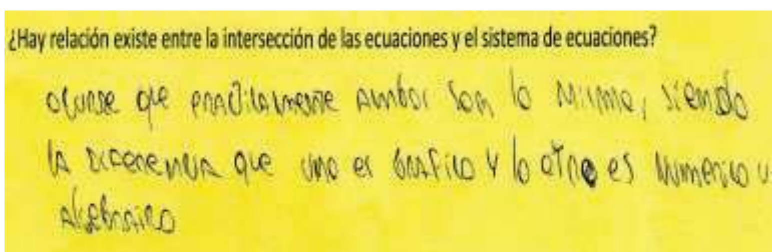


Figura 28: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°3

En esta pregunta el estudiante da cuenta de cómo comprende un sistema de ecuación y declara que un concepto hace referencia al ámbito geométrico y el otro hace referencia al ámbito algebraico.

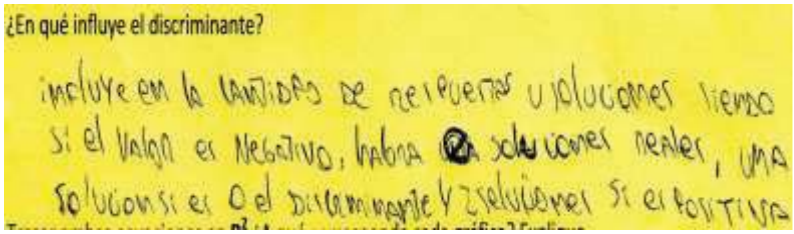


Figura 29: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°3

Claramente se aprecia como el estudiante ya posee un manejo sobre la importancia que posee el discriminante en el sistema de ecuación, ya que este permite determinar si es que existe solución del sistema y si es que existen, cuantas hay.

Para la pregunta N°4, el estudiante logra realizar las gráficas de las ecuaciones e identifica las soluciones o intersecciones de las gráficas llegando de este modo a coordinar los procesos intersección de ecuaciones e interpretación geométrica de ecuaciones dando lugar al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación por medio del conjunto solución. Así mismo el proceso intersección de ecuaciones se revierte en el proceso interpretación geométrica de ecuaciones mediante los conceptos del gráfico y la gráfica.

Estos mecanismos se identifican en la siguiente imagen

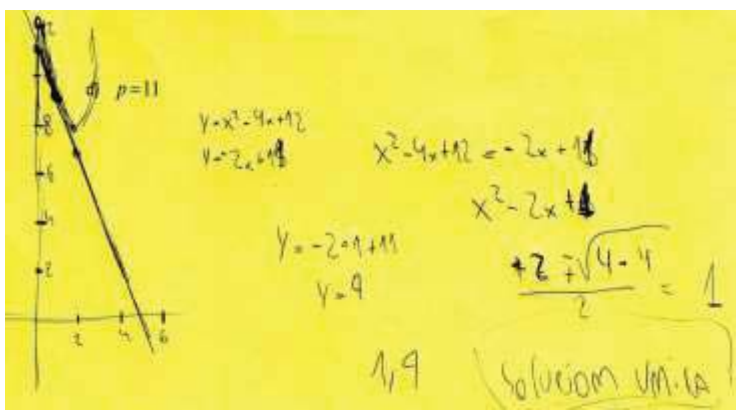
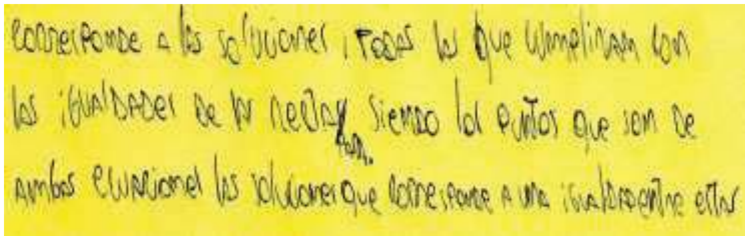


Figura 30: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°4

En esta imagen se puede ver como el estudiante busca la conjunción entre las ecuaciones igualando estas llegando a una ecuación de segundo grado y resolviéndola. Para luego graficar ambas ecuaciones y representar la solución por medio de la intersección entre estas.



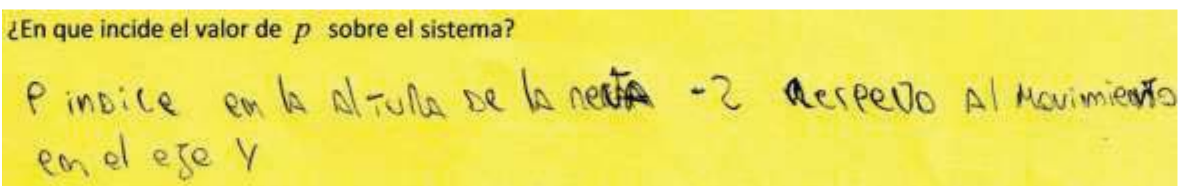
corresponde a las soluciones, todas las que cumplieran con las igualdades de la recta, siendo los puntos que son de ambas ecuaciones las soluciones que corresponde a una igualdad entre estas

Figura 31: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°4

En esta imagen la respuesta muestra que el estudiante comprende perfectamente la relación que se tiene entre la intersección de las ecuaciones y la solución del sistema de ecuaciones planteado.

Como se mencionó anteriormente la pregunta N°5 solo será abordada por el estudiante de Magister en matemática, es decir, E3.

En atención a la pregunta N°6, el estudiante logra dar respuesta desde un ámbito geométrico a la respuesta, es decir, logra encapsular el proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones al objeto sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P) como se muestra a continuación en la imagen.



¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

P incide en la altura de la recta -2 respecto al movimiento en el eje Y

Figura 32: Evidencia de E1 respecto de la pregunta N°6

Para esta encapsulación es claramente visible que el estudiante logra llegar de la construcción objeto interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones a la construcción objeto sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P) por medio del número de intersecciones.

6.1.1 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PERSONAL DEL ESTUDIANTE N°1

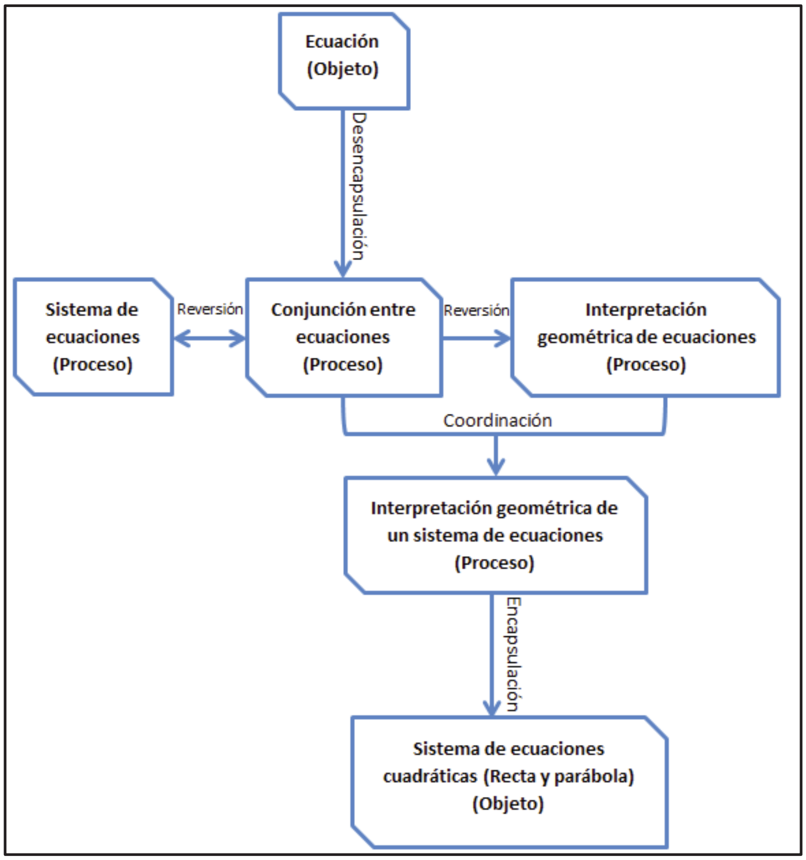


Figura 33: Descomposición genética hipotética generada con la información de la encuesta realizada y los respectivos análisis.

6.2ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE E2

En el desarrollo del estudiante N°2 se aprecia que comienza con los procesos conjunto y función proposicional, los cuales se coordinan por medio de la definición matemática $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{matrix} y=ax+b \\ y=cx^2+dx+e \end{matrix}\right\}$, para dar paso al proceso sistema de ecuación. Luego de esta construcción proceso sistema de ecuación el estudiante genera una reversión al constructo proceso intersección entre ecuaciones por medio de la igualdad entre ecuaciones. Luego estos dos procesos se coordinan en por medio de la lógica proposicional para dar lugar al proceso ecuación de segundo grado que se encapsula en el objeto sistema de ecuación cuadrática de una recta y una parábola a través del conjunto solución.

Primeramente se indica que este estudiante tiene otra entrada desde la descomposición genética hipotética mencionada anteriormente, es decir, construye el objeto sistema de ecuación cuadrática de una recta y una parábola a partir de otras construcciones y mecanismos mentales.

En la pregunta N°1 las construcciones proceso conjunto y función proposicional se coordinan en el proceso sistema de ecuaciones por medio de la relación que se da entre los pares ordenados y las ecuaciones planteadas. A continuación se muestra una imagen que evidencia dicha coordinación.

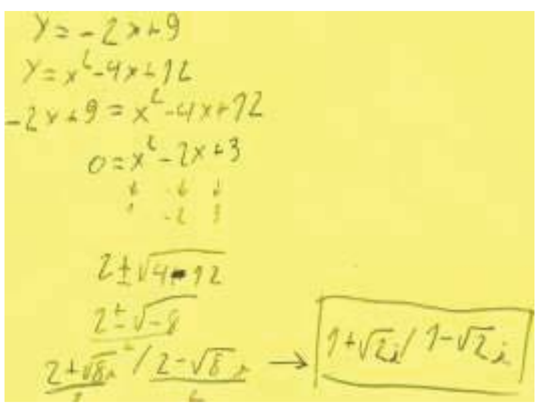


Figura 34: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°1

En esta producción, a pesar que no entrega la solución del sistema como par ordenado, comprende que es necesario determinar la el valor de “x” e “y” que cumple con ambas condiciones. Aunque no explicita el valor de “y” para esta pregunta.

La pregunta N°2 está enfocada para dar lugar al proceso sistema de ecuaciones, el cual se revierte en el proceso intersección entre ecuaciones. Esta situación se evidencia en la siguiente imagen.

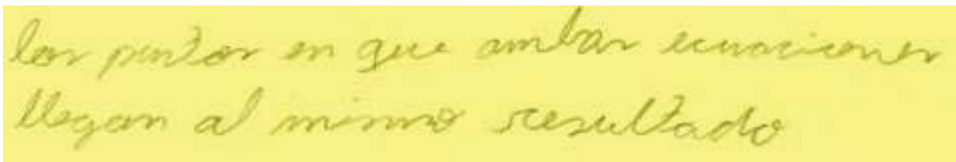


Figura 35: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°2

En la imagen se aprecia como este estudiante por medio del conjunto solución logra generar la reversión entre el proceso sistema de ecuación y el proceso intersección de ecuaciones.

En el principio de la pregunta N°3 se pretendía que los procesos sistema de ecuación e intersección de ecuaciones se coordinaran para da paso al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación, sin embargo, este estudiante logra encontrar otra vía de la construcción del objeto sistema de ecuación cuadrática (R y P), generando una variante dentro de la DG hipotética planteada inicialmente.

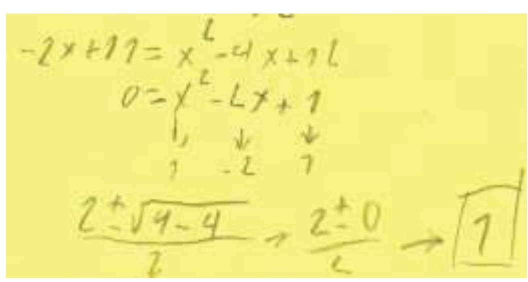


Figura 36: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°3

En la producción realizada por este estudiante los procesos sistema de ecuación e intersección de ecuaciones se coordinan para dar cabida al proceso ecuación de segundo grado.

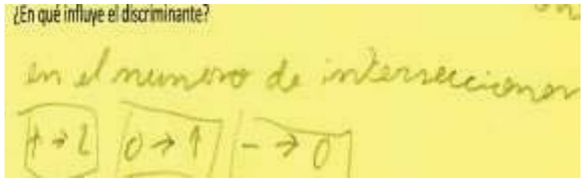


Figura 37: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°3

Con respecto a esta producción se puede mencionar que el estudiante logra relacionar el signo del discriminante con la cantidad de soluciones o intersecciones que posee el sistema de ecuación genérico.

La pregunta N°4 tiene por objetivo que el estudiante logre coordinar los procesos intersección de ecuaciones e interpretación geométrica de ecuaciones dando lugar al proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación por medio del conjunto solución, no obstante, este estudiante solo grafica las ecuaciones y menciona sus nombres, prestando poca importancia a esta pregunta.
Lo comentado anteriormente se presenta en la siguiente imagen.

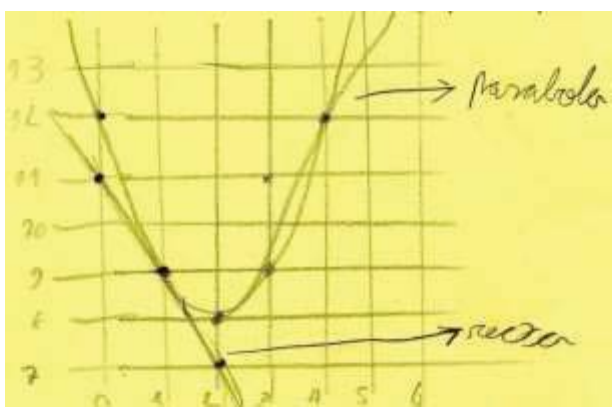


Figura 38: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°4

Como se mencionó anteriormente la pregunta N°5 solo será abordada por el estudiante de Magister en matemática, es decir, E3.

La pregunta N°6 tiene su foco en la encapsulación del proceso interpretación geométrica de un sistema de ecuación al objeto sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P), en cambio, el estudiante construye este objeto de otra manera (como se menciona anteriormente).

Por otro lado este estudiante logra encapsular el proceso ecuación de segundo grado en el objeto sistema de ecuaciones cuadráticas, es decir, su construcción mental está ligada al desarrollo algebraico, más que al desarrollo geométrico.

La respuesta dada en esta pregunta por el estudiante se presenta a continuación.

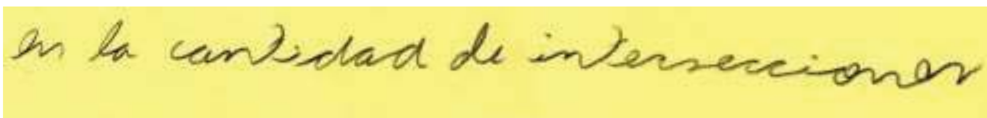


Figura 39: Evidencia de E2 respecto de la pregunta N°6

Para lograr la encapsulación del proceso ecuación de segundo grado al objeto sistema de ecuaciones cuadráticas es necesario entender qué importancia tiene el discriminante para este mecanismo, ya que es este elemento matemático quien permite realizar este mecanismo.

6.2.1 DESCOMPOSICIÓN PERSONAL DEL ESTUDIANTE N°2

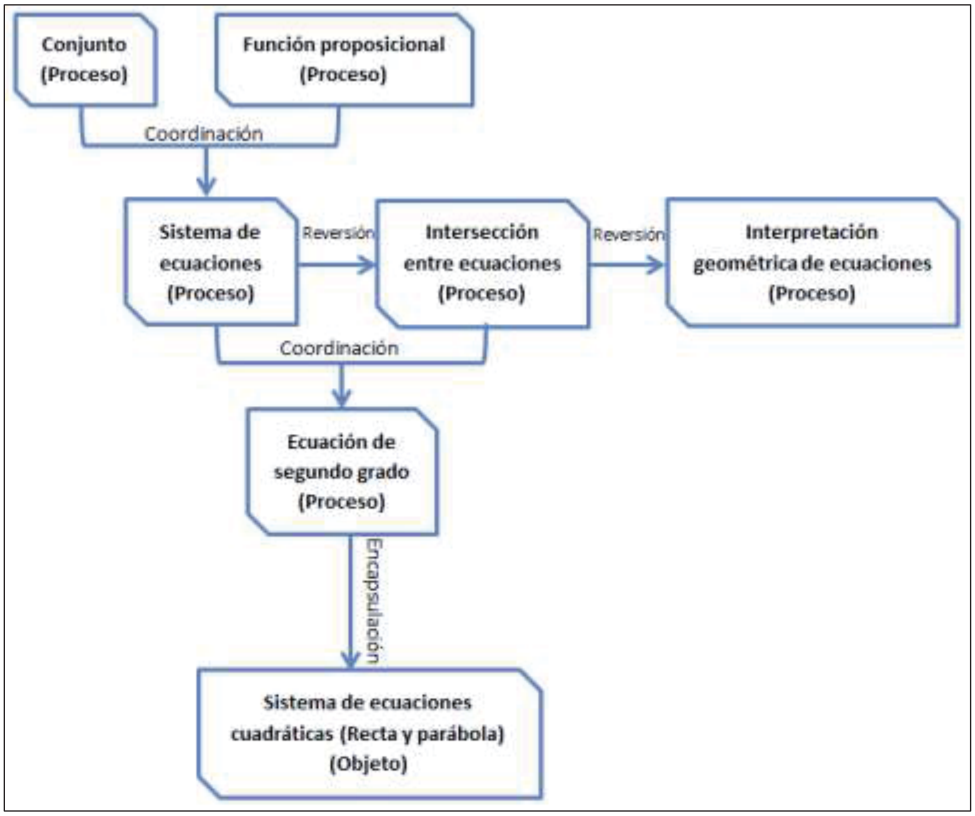


Figura 40: Descomposición genética hipotética generada con la información de la encuesta realizada y los respectivos análisis.

6.3 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE E3

En una primera instancia comienza realizando la gráfica de la ecuación de la parábola, para luego utilizar la derivada de la parábola. A continuación determina cuando la pendiente de la recta es igual a la derivada de la ecuación de la parábola de modo que logra encontrar en qué punto ambas gráficas son tangentes, lo cual le permite describir las familias de rectas que se plantean en la situación. En resumen este estudiante busca generalizar el problema de modo que a partir de una expresión logre dar cuenta de la cantidad de ecuaciones sin la necesidad de determinar cuáles son estas.

Ahora bien desde el punto de vista de la DG hipotética este estudiante comienza su construcción objeto ecuación desencapsulando este en el proceso conjunción de ecuaciones que luego revierte en el proceso sistema de ecuación por medio del conectivo lógico "y" que se ve reflejado en al momento en que encuentra el punto tangente entre ambas ecuaciones.

Luego desde el proceso conjunción de ecuaciones realiza una reversión hacia el proceso interpretación geométrica de ecuaciones que a su vez esta última se revierte al proceso ecuaciones equivalentes de manera un tanto precaria, respecto de lo que se esperaba.

A continuación coordina los procesos conjunción de ecuaciones e interpretación geométrica de ecuaciones por medio del conjunto solución llegando así al proceso interpretación geométrica un sistema de ecuaciones, para finalmente encapsular este último al objeto SECRP.

En la pregunta N°1 el estudiante pretende dar una respuesta general que permita encontrar el número de soluciones si la necesidad de encontrarlas. Un ejemplo de esto se presenta en la siguiente imagen.

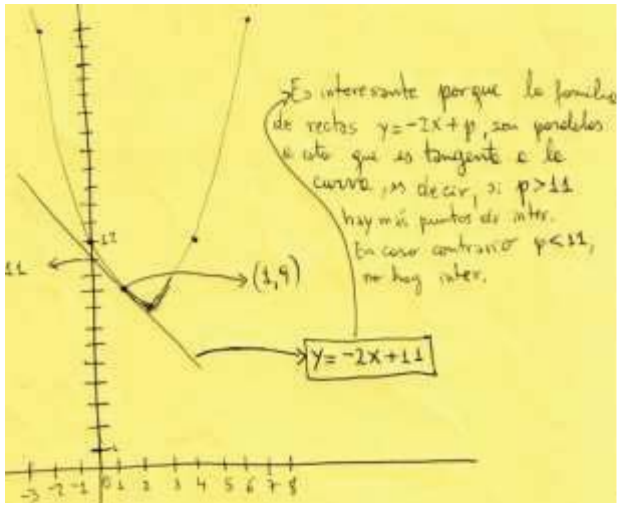


Figura 41: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°1

Es interesante mencionar como este estudiante relaciona el desarrollo algebraico con el gráfico, es decir, como logra la reversión entre el proceso conjunción de ecuaciones y el proceso interpretación geométrica de ecuaciones.

La pregunta N°2 está orientada principalmente a dar cuenta de cómo se están construyendo los procesos sistema de ecuaciones y conjunción de ecuaciones o bien como se están revirtiendo.

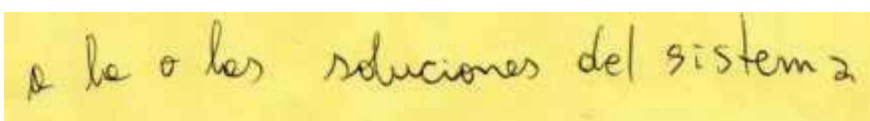


Figura 42: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°2

Dentro de la respuesta se puede ver que el estudiante está completamente consciente que la intersección entre las gráficas corresponde ser las soluciones del sistema.
Es este modo se presente a continuación una imagen que se muestra la respuesta entregada por el estudiante.
La pregunta N°3 tiene como propósito la coordinación que se espera ver entre los procesos sistema de ecuaciones y conjunción de ecuaciones para dar lugar al proceso interpretación

geométrica de un sistema de ecuaciones. A continuación se muestra la respuesta que escribió el estudiante.

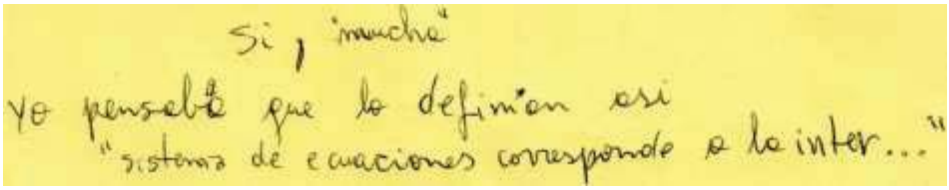


Figura 43: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°3

La respuesta que entrega el estudiante no logra el objetivo que se esperaba, sin embargo, permite al menos comprender cuál es la definición que tiene este estudiante sobre el concepto sistema de ecuaciones. Además permite ver la reversión que existe entre un proceso y otro.

En tanto la pregunta N°4 pretende coordinar el proceso conjunción de ecuaciones e interpretación geométrica de ecuaciones dando origen al proceso interpretación geométrica un sistema de ecuaciones. Ahora bien se exhibe a continuación la producción realizada por este estudiante.

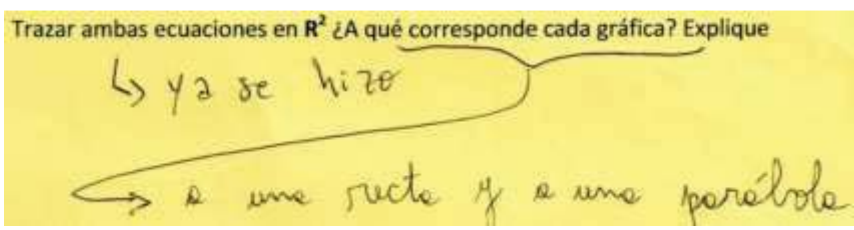


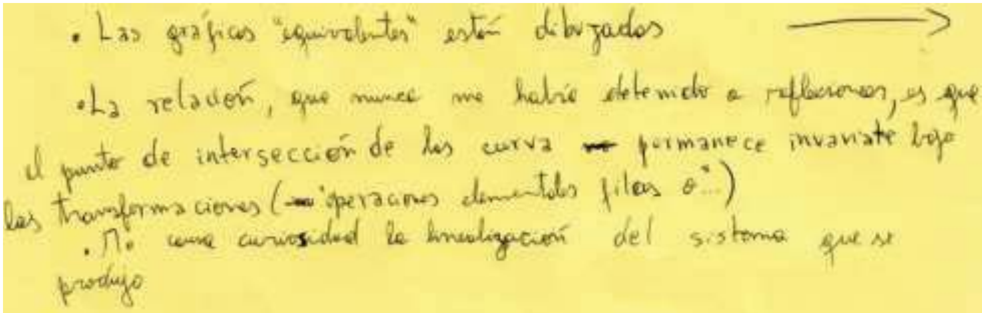
Figura 44: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°4

De a acuerdo a las producciones realizadas por este se logra ver cómo es que este estudiante coordina estos procesos por medio del conjunto solución.

La pregunta N°5 apunta a ver como el estudiante logra concebir el proceso sistema de ecuación y cuáles son los elementos que permiten definir si existen o no soluciones del sistema y en caso de existir cuantas soluciones o intersecciones existen.

Así mismo la pregunta busca validar los mecanismos y construcciones mentales, es decir, en este caso se pretende que el estudiante logre la reversión planteada en la DG.

A continuación se muestra la respuesta entregada por el estudiante.



• Las gráficas "equivalentes" están dibujados →

• La relación, que nunca me había detenido a reflexionar, es que el punto de intersección de las curva permanece invariante bajo las transformaciones (operaciones elementales filas o ...)

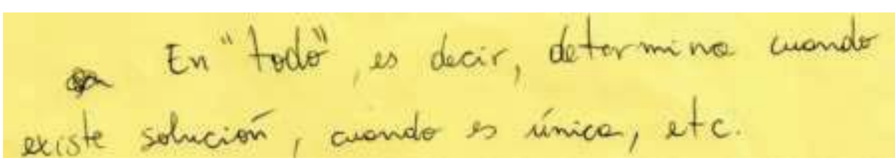
• No como curiosidad la investigación del sistema que se produjo

Figura 45: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°5

Para esta pregunta fue necesario realizar algunas indicaciones sobre su desarrollo, ya que en la actualidad no es un contenido que se aborde ni en los programas de educación media, ni programas de magíster en Matemática.

Aun cuando se le realizaron algunas aclaraciones al estudiante no se logró el desarrollo y análisis esperado para esta pregunta. Por otro lado este estudiante no presenta de forma clara y precisa sobre la relación que existe entre estos procesos.

Finalmente de acuerdo a las preguntas anteriores y en vista del desarrollo realizado por este estudiante se puede afirmar que el estudiante logra efectivamente encapsular el proceso interpretación geométrica un sistema de ecuaciones al objeto SECRP. Evidencia de esto se presenta en la siguiente imagen



En "todo", es decir, determina cuando existe solución, cuando es única, etc.

Figura 46: Evidencia de E3 respecto de la pregunta N°6

Para esta producción se puede ver claramente que el parámetro por el que se pregunta es concebido como un elemento clave a la hora de realizar los análisis correspondientes al cuestionario.

6.3.1 DESCOMPOSICIÓN PERSONAL DEL ESTUDIANTE N°3

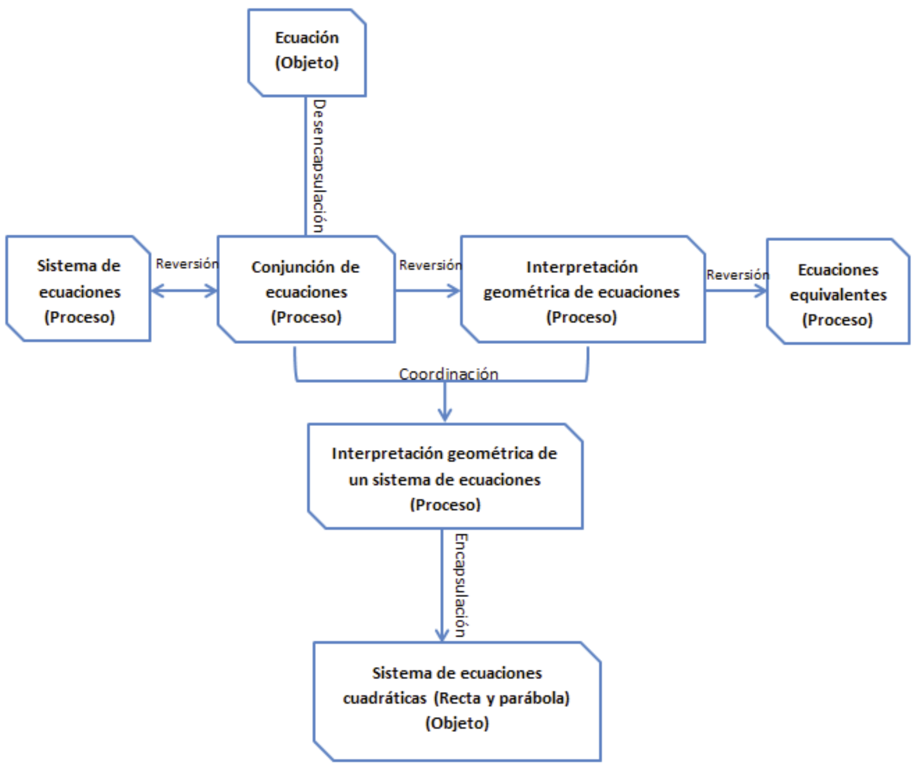


Figura 47: Descomposición genética hipotética generada con la información de la encuesta realizada y los respectivos análisis.

CAPITULO 7: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En relación a los resultados obtenidos del análisis se puede indicar que las construcciones mentales descritas en la Descomposición Genética hipotética son viables para el aprendizaje del concepto, ya que fueron evidenciados en los tres informantes, aun cuando existen distintos mecanismos y construcciones asociados para el aprendizaje de este concepto.

Otro aspecto importante a mencionar es que en los tres casos estudiados se abordó el problema de forma algebraica, predominando está por sobre el análisis geométrico.

En lo que respecta a las dificultades presentadas en la Descomposición Genética hipotética, se encuentra la reversión del proceso interpretación geométrica de ecuaciones en el proceso ecuaciones equivalentes, ya que como bien se mencionó anteriormente es un foco poco estudiado e incluso casi indocumentado, por lo cual pocos estudiantes manejan esta relación que existe entre el tratamiento[5] en lo algebraico de las ecuaciones y su conversión[6] al registro de representación geométrica. Aunque esta reversión no es indispensable para lograr la construcción objeto sistema de ecuaciones cuadráticas (R y P), da un complemento y permite comprender de una manera más integral el objeto de matemático involucrado.

En atención a la Descomposición Genética hipotética se puede mencionar que fue necesario realizar algunos ajustes, debido a que dentro del análisis era preciso completar las construcciones mentales para describir de manera óptima la circulación del estudiante que realizó su desarrollo en su mayor parte de manera algebraica. Esta modificación corresponde a la eliminación de la coordinación entre sistema de ecuación y conjunción de ecuaciones para dar paso a la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones, además se agregó un nuevo constructo mental correspondiente al proceso ecuación de segundo grado, el cual es producto de la coordinación de los procesos sistema de ecuación y conjunción de ecuaciones.

Finalmente cabe destacar que sería necesario precisar otros conceptos matemáticos, tales como, función, variable, etc., que no fueron abordados en esta Descomposición Genética, ya que de este modo se podría robustecer el concepto matemático abordado y permitir clarificar cuales son los conceptos más elementales o bien más primitivos que se necesitan para lograr el aprendizaje completo y óptimo de este objeto matemático.

---

[5] Tratamiento en el sentido de las representaciones semióticas de Duval

[6] Conversión en el sentido de las representaciones semióticas de Duval

La recogida de datos y el análisis de estos han permitido describir la circulación que tiene cada uno de los estudiantes encuestados dentro de la Descomposición Genética hipotética, de modo que se genera una descomposición que describa todos los constructos y mecanismos necesarios para lograr aprender el concepto matemático.

Estos tres informantes dan cuenta de elementos distintos para lograr la construcción de este objeto, es así por ejemplo, que el tercer informante utiliza la derivada para poder realizar el análisis de los distintos casos planteados en el cuestionario, mientras que los estudiantes de tercer año medio analizan la situación desde los conocimientos previos que poseen, es decir, sistemas de ecuaciones lineales, ecuación de segundo grado y gráficas de rectas y parábolas.

Gracias al ciclo de investigación de la teoría APOE, se puede iterar todas las veces necesarias o pertinentes el ciclo de investigación, permitiendo de este modo la refinación constante de la DG. Este ciclo da la posibilidad de especificar cada vez mejor las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir el SECRP.

La descomposición genética que se presentó permite ver e indicar cuales son los distintos caminos cognitivos que realizan los estudiantes para llegar a la construcción del concepto. Lo interesante y novedoso de esta investigación consiste en que no existen muchos artículos que mencionen explícitamente estos posibles caminos que se pueden dar en una descomposición genética y precisamente en esta investigación es lo que se logra evidenciar entre los tres estudiantes estudiados.

Una de las proyecciones es cómo es posible que los estudiantes logren realizar los tratamientos de las ecuaciones y que luego sus sistemas de ecuaciones equivalentes las lleven a su representación geométrica, ya que como bien se había comentado anteriormente casi no existen antecedentes sobre este tipo de tránsito entre los sistemas equivalentes y sus representaciones geométricas. Además, es bastante interesante darse cuenta que a pesar que los tratamientos algebraicos realizados entre los sistemas de ecuaciones son equivalentes, los tratamientos geométricos respectivos a estos mismos sistemas no siempre lo son.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo ha sido financiado gracias a CONICYT BECAS / BECAS DE MAGÍSTER NACIONAL PARA PROFESIONALES DE LA EDUCACIÓN AÑO ACADEMICO 2014-2015 50150142

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arellano F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con sus representaciones gráficas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 357-368. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education 6, 1-32.*

Arnon, I., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. & Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante 8º básico matemáticas.* Santiago: Ediciones SM.

Cutz, B. (2005) *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Tesis magister no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Del Valle J., Muñoz G. & Santis, M. (2016). *Texto del estudiante 1°medio matemáticas*. Santiago: Ediciones SM.

Duval R. (1988). Graphiques et equations: I'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol 1, 235-253.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Isoda, Masami; Mena, Arturo & Arcavi, Abraham, eds., *El estudio de Clases*. Versión en español de Zudemiru Nihonno Sansu Sugaku Jyugyo-Kenkyu, Shizumi Shimizu, Masami, Isoda, Kazuyoshi Okubo & Takuya baba, eds. 2005, Meijitosyo, Tokio, a la que se le ha agregado artículos y apéndices relevantes.

Jiménez, L., Muñoz, G. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante 2º medio matemáticas*. Santiago: Ediciones SM.

Mejía, F., Álvarez, R., Fernández, H. (2005). *Matemáticas previas al cálculo*. Medellín: Sello editorial Universidad de Medellín.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante 7º básico matemáticas*. Santiago: Ediciones SM.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares de 1° básico a 6° básico, aprobada por el Consejo Nacional de Educación*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

MINEDUC (2013). *Bases Curriculares de 7° básico a 2° medio, aprobada por el Consejo Nacional de Educación*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

MINEDUC (2011). *Programa de estudio matemáticas primer año medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

MINEDUC (2011). *Programa de estudio matemáticas segundo año medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

MINEDUC (2015). *Programa de estudio matemáticas tercer año medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

MINEDUC (2015). *Programa de estudio matemáticas cuarto año medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación República de Chile.

Muñoz, G., Raydoret del Valle, J. & Santis, M. (2016). *Texto del estudiante 1º medio matemáticas*. Santiago: Ediciones SM.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1995). *Los primeros aprendizajes algebraicos.* Comunicación REM 95-96.

Panizza, M., Sadovky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de la ciencias*, *17* (3), 453-461.

Pérez Donoso, L. (1998). *Pasaje de registros: Ecuaciones.* Tesis del magíster en enseñanza de las ciencias con mención en Didáctica de las Matemáticas no publicada, Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ramírez, M. (1997). *El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraicos-verbales en el estudio de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México.

Saiz, O. y Blumenthal, V. (2016). *Texto del estudiante 3º medio matemáticas*. Santiago: Ediciones Cal y Canto.

Sierpinska, A (2000) One some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra. En Dorier, J. L. (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Segura, S. (2004). Sistema de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Relime, 7, 49-78.*

Stake, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Vidakovic, Draga (1993). *Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, IN.

ANEXOS

Cuestionario

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}\right|$

I. Escriba el conjunto solución para los casos

e) $p = 9$

f) $p = 12$

g) $p = 15$

h) $p = 11$

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

II. ¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?

III. ¿Hay relación existe entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones?

IV. ¿En qué influye el discriminante?

V. Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique

VI. Al resolver el sistema y transformar los sistemas de ecuaciones equivalentes, ¿Cuáles son sus gráficas equivalentes? ¿Qué relación existe entre ellas?

VII. ¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

Cuestionario

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}\right|$

$y = -2x + 9$

I. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$

$y = -2x + 9$

$y = x^2 - 4x + 12$

$-2x + 9 = x^2 - 4x + 12$

$0 = x^2 - 2x + 3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad -2 \quad 3$

$4 \quad 2$

$\sqrt{2} \quad \sqrt{3}$

$2 \pm \sqrt{4 - 12}$

$\frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

$\frac{2 + \sqrt{8}i}{2} / \frac{2 - \sqrt{8}i}{2} \rightarrow \boxed{1 + \sqrt{2}i / 1 - \sqrt{2}i}$

b) $p = 12$

$y = -2x + 12$

$y = x^2 - 4x + 12$

$-2x + 12 = x^2 - 4x + 12$

$0 = x^2 - 2x$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad -2 \quad 0$

c) $p=15$

$y=-2x+15$

$y=x^2-4x+12$

$-2x+15=x^2-4x+12$

$0=x^2-2x-3$

$1 \quad -2 \quad -3$

$\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \rightarrow \frac{2\pm\sqrt{20}}{2} \rightarrow \boxed{1+\sqrt{5} / 1-}$

d) $p=11$

$y=-2x+11$

$y=x^2-4x+12$

$-2x+11=x^2-4x+12$

$0=x^2-2x+1$

$1 \quad -2 \quad 1$

$\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} \rightarrow \frac{2\pm 0}{2} \rightarrow \boxed{1}$

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

a → 0
b → 2
c → 2
d → 1

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

II. ¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?

los puntos en que ambas ecuaciones llegan al mismo resultado

III. ¿Hay relación existe entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones?

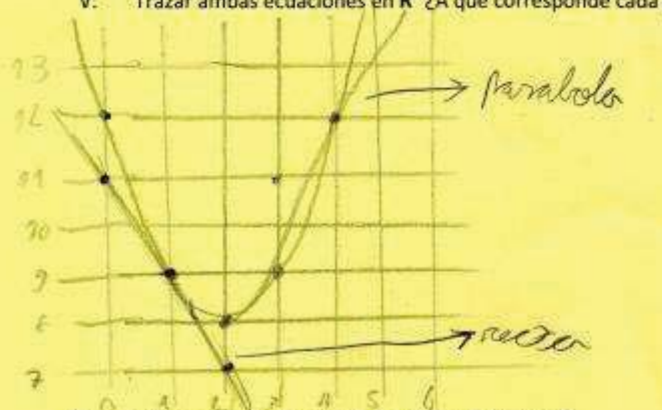
con el sistema de ecuaciones se obtienen los resultados en donde se intersectan las ecuaciones

IV. ¿En qué influye el discriminante?

en el numero de intersecciones

$\boxed{+ \to 2}$ $\boxed{0 \to 1}$ $\boxed{- \to 0}$

V. Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique



VI. ¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

~~en la altura de la recta (que se mueve por el eje x)~~

en la cantidad de intersecciones

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAISO

Cuestionario

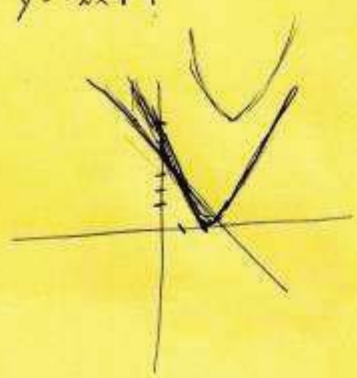
Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}\right|$

I. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$

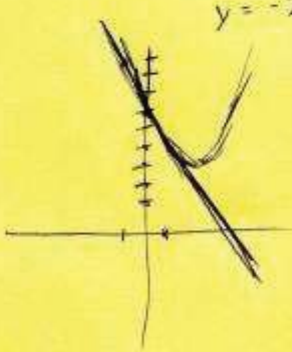
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2}$ → $\boxed{1 + 3i}$, $\boxed{1 - 3i}$

$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 9$



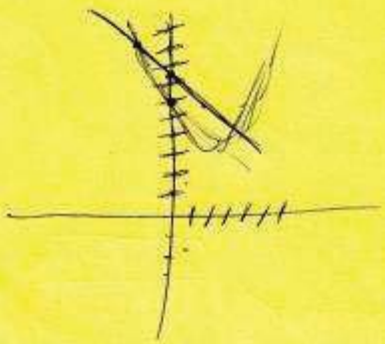
b) $p = 12$

$y = -2x + 12$



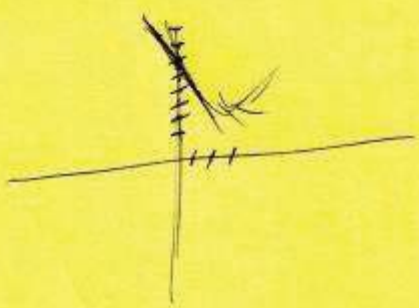
• una solución

c) $p = 15$



$\cdot\ 2$.

d) $p = 11$



¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

E

A = ninguna
B = 1
C = 2
d = ninguno .

II. ¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?

A la solución con los números reales que tienen relacionados.

III. ¿Hay relación existe entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones?

la relación son las soluciones con las intersecciones.

IV. ¿En qué influye el discriminante?

En la cantidad de intersecciones que tendrá y como se graficará

V. Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique

Atrás.

VI. ¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

En la intersección en el eje y

Cuestionario

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{matrix}\right|$

$$\begin{matrix} 48 \\ 16 \\ \hline 32 \end{matrix}$$

I. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$

$y = -2x + 9$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}\, i}{2}$

$\dfrac{\cancel{2} + \cancel{6} i}{\cancel{2}}$ $\quad$ $\dfrac{\cancel{2} - \cancel{6} i}{\cancel{2}}$

$x = \boxed{1 - 3i}$

o

$x = \boxed{1 + 3i}$

$y = -2(1 + 3i) + 9$

$y = -2 - 6i + 9$

$\boxed{y = -6i + 7}$ o

$y = -2(1 - 3i) + 9$

$y = -2 + 6i + 9$

$\boxed{y = 6i + 9}$

$y = -2x + p$

b) $p = 12$

$y = -2(1 + 3i) + 12$

$y = -2 - 6i + 12$

$\boxed{y = -6i + 10}$ o

$y = -2(1 - 3i) + 12$

$y = -2 + 6i + 12$

$\boxed{y = 6i + 12}$

$y = (1 + 3i)^2 - 4(1 + 3i) + 12$

$y = 6i - 8 - 4 - 12i + 12$

$\boxed{y = -6i}$

$y = (1 - 3i)^2 - 4(1 - 3i) + 12$

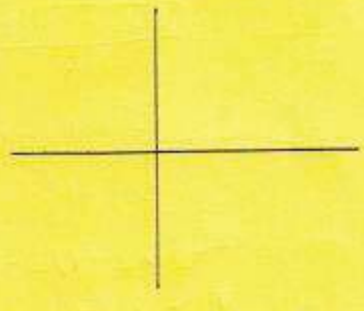
$y = -6i + 10 - 4 + 12i + 12$

$\boxed{y = 6i + 18}$

c) $p=15$

$$y=-2(1-3i)+15$$
$$y=-2+6i+15$$
$$\boxed{y=6i+13}$$

$$y=-2(1+3i)+15$$
$$y=-2-6i+15$$
$$\boxed{y=-6i+13}$$



d) $p=11$

$$y=-2(1-3i)+11$$
$$y=-2+6i+11$$
$$\boxed{y=9+6i}$$

$$y=-2(1+3i)+11$$
$$y=-2-6i+11$$
$$\boxed{y=-6i+9}$$

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

$(1-3i)(1-3i)$

$1+3i+3i-9$

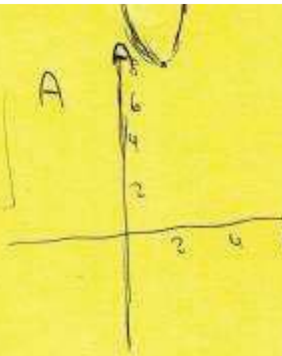
$+6i \quad -8$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = 1-3i \\ x = 1+3i \end{array}}$$

Cuestionario

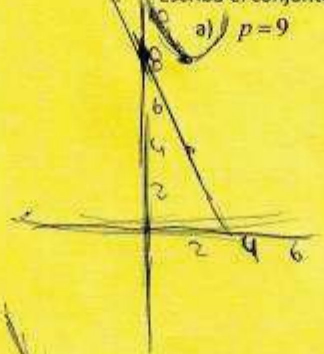
Dado el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}$

A $y = (x-2)^2 + 8$
B $y = -2x + p$



1. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$

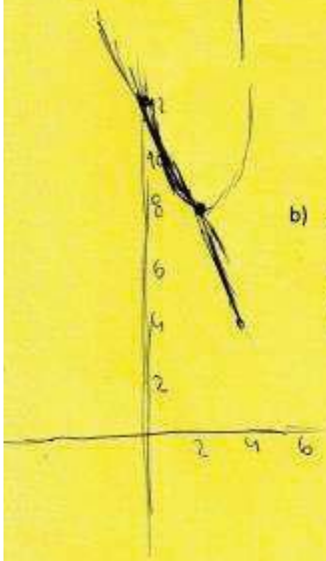


$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 8$

$0 = x^2 - 2x + 4$

$x^2 - 4x + 12 = -2x + 8$
$x^2 = 2x - 4$

Sin solucion $\mathbb{R}$



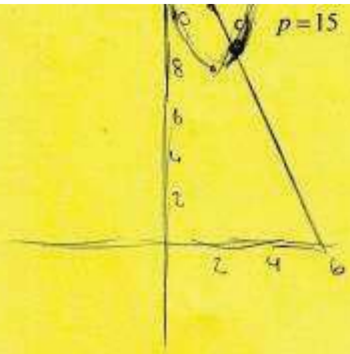
b) $p = 12$

$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 12$

$x^2 - 4x + \cancel{12} = -2x + \cancel{12}$
$x^2 = +2x \quad /:x$
$\boxed{x = 2}$

$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 12$
$\boxed{y = 8}$

Solucion unica



$p = 15$

$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 15$

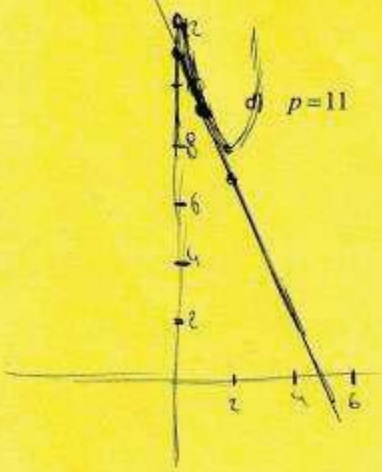
$-2x + 15 = x^2 - 4x + 12$
$0 = x^2 - 2x - 3$

$4 + 12$
$\sqrt{16}$
4

Dos soluciones

$\frac{+2+4}{2} = 3$ $y = -2\cdot 3 + 15 = 9$

$\frac{-2}{2} = -1$ $y = -2\cdot -1 + 15 = 18$



$p = 11$

$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 11$

$x^2 - 4x + 12 = -2x + 11$
$x^2 - 2x + 1$

$y = -2\cdot 1 + 11$
$y = 9$

$\frac{+2 \mp \sqrt{4-4}}{2} = 1$

1,9

Solucion unica

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

II. ¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?

Al conjunto de las soluciones que calza con las 2 rectas

III. ¿Hay relación existe entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones?

ocurre que prácticamente ambos son lo mismo, siendo la diferencia que uno es gráfico y lo otro es numérico y algebraico

IV. ¿En qué influye el discriminante?

influye en la cantidad de respuestas y soluciones siendo si el valor es negativo, habrá 0 soluciones reales, una solución si es 0 el discriminante y 2 soluciones si es positivo

V. Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique

corresponde a las soluciones, todas las que cumplan con las igualdades de las rectas, siendo los puntos que son de ambas ecuaciones las soluciones que corresponde a una igualdad entre ellas

VI. ¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

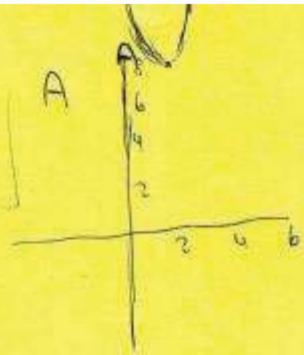
P indica en la altura de la recta -2 respecto al movimiento en el eje Y

Cuestionario

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}$

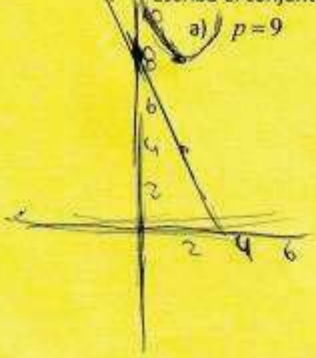
A $y = (x-2)^2 + 8$
B $y = -2x + p$

A



1. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$

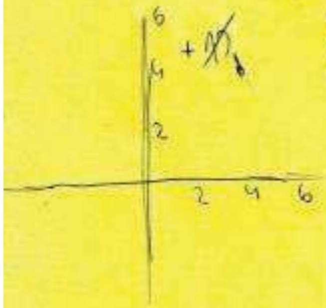


$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 8$

$0 = x^2 - 2x + 4$

$-2x + 8$
$2x - 4$

Sin solucion $\mathbb{R}$



$+12$

$y = x^2 - 4x + 12$
$y = -2x + 12$

$x^2 - 4x + \cancel{12} = -2x + \cancel{12}$
$x^2 = +2x \quad /:x$
$\boxed{x = 2}$

$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 12$
$\boxed{y = 8}$

Solucion unica

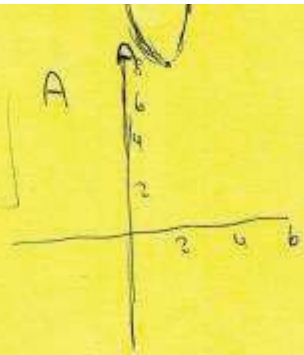
Cuestionario

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}$

A $y = (x-2)^2 + 8$

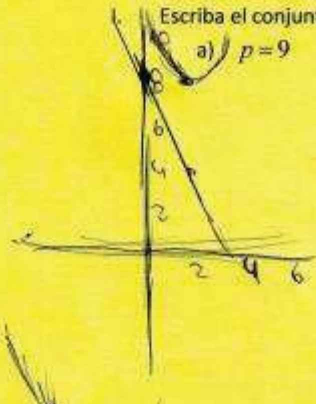
B $y = -2x + p$

A



1. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$



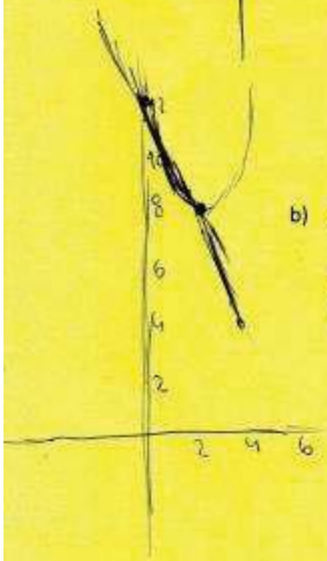
$y = x^2 - 4x + 12$

$y = -2x + 8$

$0 = x^2 - 2x + 4$

$x^2 - 4x + 12 = -2x + 8$

$x^2 = 2x - 4$



b) $p = 12$

$y = x^2 - 4x + 12$

$y = -2x + 12$

$x^2 - 4x + \cancel{12} = -2x + \cancel{12}$

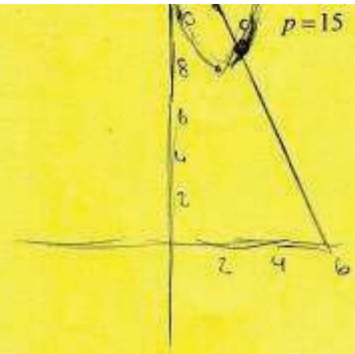
$x^2 = +2x \quad /:x$

$\boxed{x = 2}$

$y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 12$

$\boxed{y = 8}$

Solucion unica



$p = 15$

$y = x^2 - 4x + 12$

$y = -2x + 15$

$-2x + 15 = x^2 - 4x + 12$

$0 = x^2 - 2x - 3$

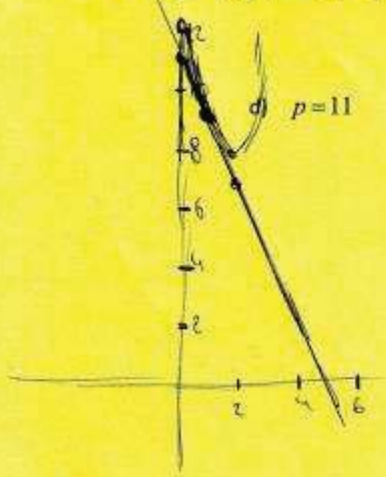
$4 + 12$

$\sqrt{16}$

4

$\frac{2+4}{2} = 3 \quad y = -2 \cdot 3 + 15 = 9$

Dos soluciones



d) $p = 11$

$y = x^2 - 4x + 12$

$y = -2x + 11$

$x^2 - 4x + 12 = -2x + 11$

$x^2 - 2x + 1$

$\frac{2 \mp \sqrt{4-4}}{2} = 1$

$y = -2 \cdot 1 + 11$

$y = 9$

$1, 9$

Solución única

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

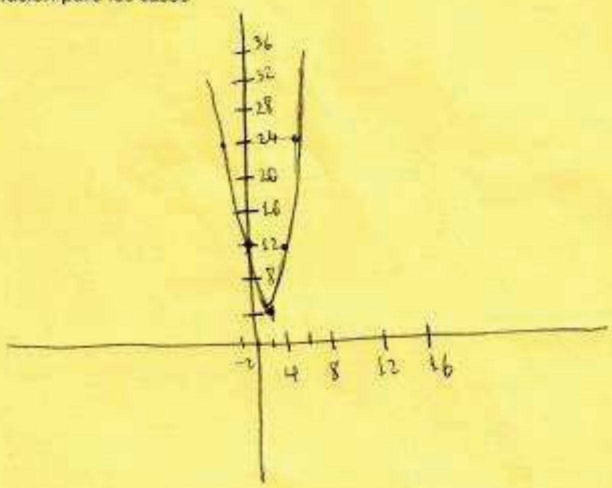
Cuestionario

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{array}\right|$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 16 - 4(1 \cdot 12) = 16 - 48 < 0.$

I. Escriba el conjunto solución para los casos

a) $p = 9$



b) $p = 12$

si $x=4$ entonces $y = \cancel{16} - \cancel{16} + 12$
$= 12$

si $x=2 \Rightarrow$ $y = 4 - \cancel{4 \cdot 2} + \cancel{12}$

si $x=8 \Rightarrow y = 64 - 32 + 12$
$y = 76 - 32$
$= 44$ ✗

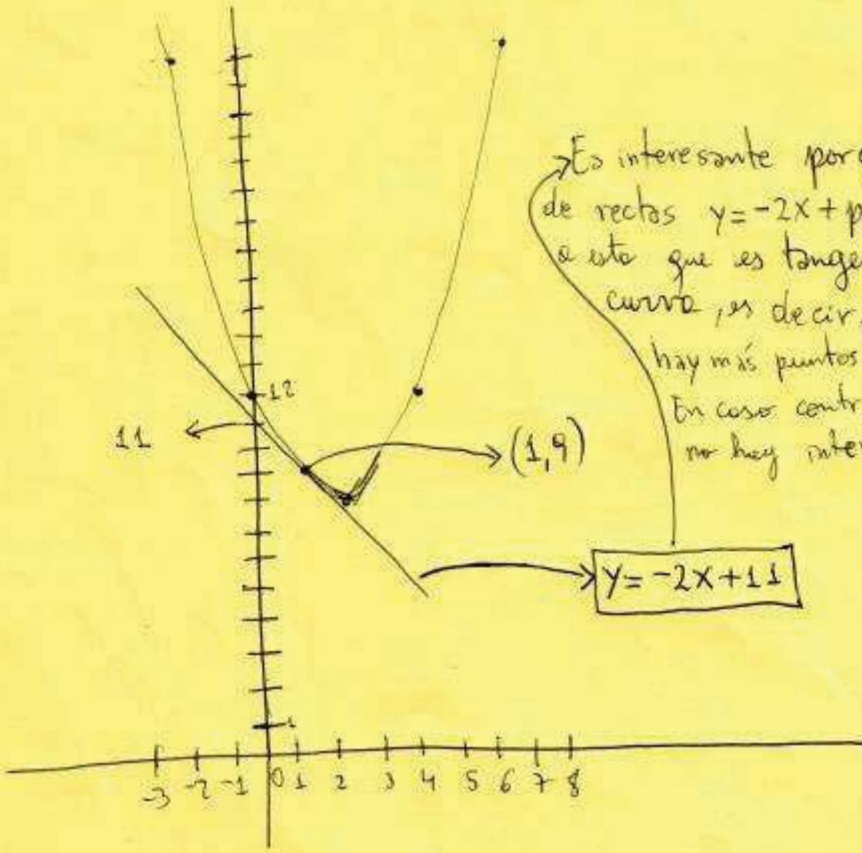
si $x=6 \Rightarrow y = 36 - 24 + 12$
$= 36 - 12$
$= 24$

Por otra parte, si $f(x) = x^2 - 4x + 12$
tenemos que $Df(p): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto Df(p)\,t$
donde $\boxed{Df(p) = 2p - 4}$, luego la recta
tangente a la curva en "1" tiene pendiente
-2.

si $x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 12 = 9$

$y - 9 = -2(x-1)$
$y = -2x + 2 + 9$
$\boxed{y = -2x + 11}$

haciendo zoom al dibujo, pero ahora con un poco de información.



Es interesante porque la familia de rectas $y=-2x+p$, son paralelas a esta que es tangente a la curva, es decir, si $p>11$ hay más puntos de inter. En caso contrario $p<11$, no hay inter.

Ahora respondamos las preguntas.

1) a) $p=9$, el conjunto solución es vacío.

b) $p=12$, hay dos puntos en el conjunto solución ¿Cuáles?
¡ buu!!! hay que comenzar a calcular.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + 12 \end{array}\right|$$

$$x^2 - 4x + \cancel{12} = -2x + \cancel{12}$$

$$x^2 - 4x + 2x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \lor x = 2$$

Poro sabemos que hay dos solu. Luego el Conjunto solucion (S) es igual

$$S = \{ (0, f(0)), (2, f(2)) \} \text{ con } f(x) = x^2 - 4x + 12$$

$$= \{ (0, 12), (2, 8) \}$$

---

c) $p = 15$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + 15 \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} x^2 - 4x + 12 = -2x + 15 \\ x^2 - 2x + 12 - 15 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ (x-3)(x+1) = 0 \end{array}$$

Como sabemos que hay 2 solu,

$$S = \{ (3, f(3)), (-1, f(-1)) \}$$

d) $p = 11$ ya lo teníamos

$$S = \{(1, 9)\}$$

c) $p = 15$

d) $p = 11$

¿Cuántos elementos tienen cada uno de los conjuntos?

J.

p	N°
9	0
10	
11	1
12	2
15	2

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

II. ¿A qué corresponde la intersección entre las ecuaciones?

a la o las soluciones del sistema

¿?

III. ¿Hay relación existe entre la intersección de las ecuaciones y el sistema de ecuaciones?

¿??

Si, "mucha"
yo pensaba que lo definían así
"sistema de ecuaciones corresponde a la inter..."

IV. ¿En qué influye el discriminante?

¿en qué?
La intersección que las curvas no depende del discri.

V. Trazar ambas ecuaciones en $\mathbf{R}^2$ ¿A qué corresponde cada gráfica? Explique

↳ ya se hizo

→ a una recta y a una parábola

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

IMA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

VI. Al resolver el sistema y transformar los sistemas de ecuaciones equivalentes, ¿Cuáles son sus gráficas equivalentes? ¿Qué relación existe entre ellas?

~~no entiendo xD~~

• Las gráficas "equivalentes" están dibujadas →

• La relación, que nunca me había detenido a reflexionar, es que el punto de intersección de las curvas permanece invariante bajo las transformaciones ("operaciones elementales filas o...")

• Me causa curiosidad la linealización del sistema que se produjo

VII. ¿En que incide el valor de p sobre el sistema?

En "todo", es decir, determina cuando existe solución, cuando es única, etc.

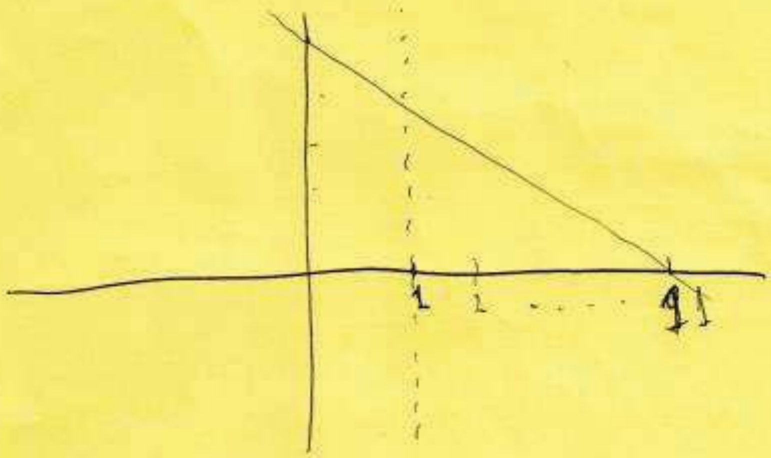
Caso 1

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + p \end{cases} \cdot(-1)$$

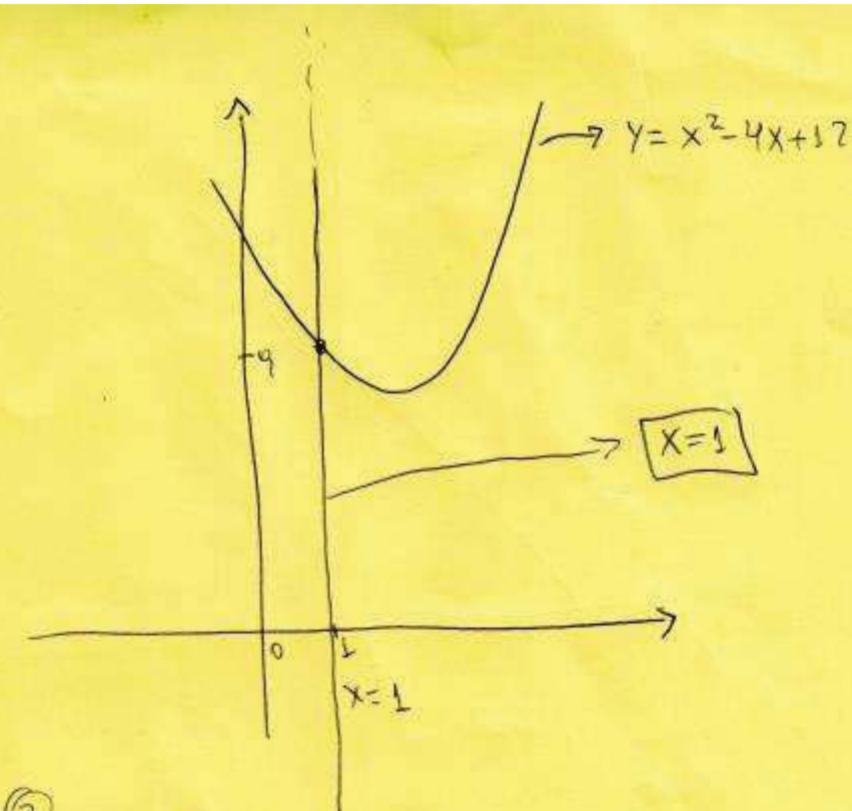
$$0 = x^2 - 4x + 12 + 2x - p$$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x + 12 - p \\ y &= -2x + p \end{aligned}}$$ supongamos $p = 11$

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} 0 &= (x - 1)(x - 1) \\ y &= -2x + 11 \end{aligned}$$

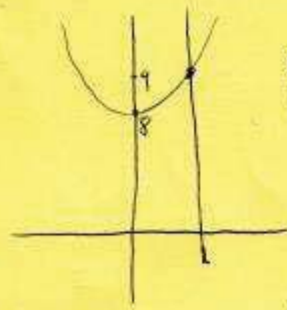


Caso 2 $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 12 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \cdot(-1) \Longrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 12 \\ 0 = -x^2 + 2x - 1 \end{cases}$ $\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 12 \\ 0 &= (x - 1)^2 \end{aligned}$



Caso ③

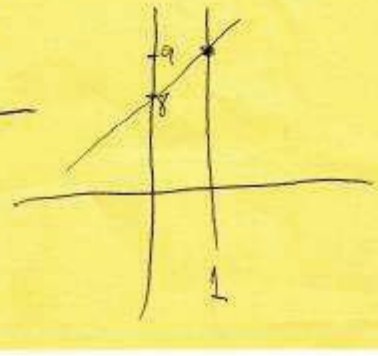
$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 12 \\ x &= 1 \\ 0 &= x - 1 \end{aligned}\right\} \quad (4) \quad \begin{aligned} y &= x^2 + 8 \\ 0 &= x - 1 \end{aligned}$$



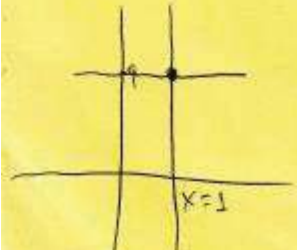
Caso ④

¿Qué sucede si multiplico por $-x$ y le suma arriba?
¿Se puede? ¿Porqué no?

$$\begin{aligned} y &= x + 8 \\ 0 &= x - 1 \end{aligned}$$



Caso ⑤



$$\begin{aligned} y &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$