

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Facultad de Ciencias  
Instituto de Matemáticas



**INCLUSIÓN DESDE LA ASIGNATURA DE  
MATEMÁTICA: El concepto de función; propuesta de  
adecuación curricular desde la Teoría de Registros  
de Representaciones Semióticas**

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

De: Valeria Francisca Pastén Villarroel  
Profesor Guía: Sr. Arturo Mena Lorca

2017

# ÍNDICE

RESUMEN .....	3
INTRODUCCIÓN .....	4
PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES .....	5
ANTECEDENTES DE INNOVACIÓN .....	11
OBJETO MATEMÁTICO .....	14
PLAN DE CLASES Y ANALISIS A PRIORI.....	21
ANÁLISIS Y RESULTADOS .....	43
CONCLUSIONES.....	50
REFERENCIAS .....	51
ANEXOS .....	53

## RESUMEN

Con el objetivo de avanzar hacia una educación inclusiva este estudio propone una adecuación curricular para el objeto matemático funciones, en el nivel de 8° básico a partir de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS). Para ello se diseñó e implementó un estudio de casos con tres estudiantes que presentan discapacidad intelectual. En todos los casos se aplicó un material didáctico mediante un cuadernillo de trabajo que considera los objetivos de aprendizaje del nivel de 8° básico, en la unidad de funciones. Las producciones de los estudiantes fueron analizadas desde la TRRS, definiendo unidades de análisis referentes a los tratamientos en los tipos de representaciones y las conversiones de un registro a otro. Junto con lo anterior, se sugieren modificaciones al material de trabajo a la luz de los resultados obtenidos.

**Palabras clave:** inclusión, adecuación curricular, funciones matemáticas, necesidades educativas especiales, teoría de registros de representaciones semióticas.

## INTRODUCCIÓN

La educación en Chile es un DERECHO, un beneficio para la sociedad ya que se contempla como una herramienta y espacio para la movilidad social, así como para el desarrollo del intelecto y de habilidades. Desde esta perspectiva la educación posee una labor emancipadora del ser humano, que pretende generar autonomía y cambio frente a algunas realidades opresivas y reproductivas de nuestra sociedad.

En nuestro país y en el mundo, la tarea de educar y de entregar estas herramientas se centra principalmente en la escuela, la cual se regula mediante el currículo escolar que es elaborado en pos de la visión de hombre y mujer que se quiere formar; es por ello que se realiza una selección de contenidos en la conformación de currículo, los que a su vez dependen del contexto histórico. Esto conlleva, por tanto, una situación política, social y económica específica.

Las personas con discapacidad intelectual son también sujetos de derecho y la sociedad ha evolucionado en la comprensión de esta materia. En diversos ámbitos se ha logrado, por medio de leyes, la integración de estas personas a la sociedad, avanzando desde un paradigma integracionista a uno inclusivo, lo que supone algo más que habitar físicamente un espacio. La educación no ha estado ajena a este proceso y hoy en día asisten estudiantes con discapacidad, tanto física como intelectual, a la escuela regular. Es todo lo descrito anteriormente que surge la necesidad de realizar adecuaciones curriculares para dar respuesta en alguna medida a la diversidad dentro del aula.

En este estudio, se propone una adecuación curricular para el objeto matemático funciones, específicamente en el nivel de 8° año de Enseñanza Básica, desde la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas.

Para ello se diseñó e implementó un estudio de casos con tres estudiantes que presentan discapacidad intelectual, que actualmente cursan niveles superiores a 8° básico y que no han trabajado anteriormente con funciones. En todos los casos se aplicó un material didáctico que consistía en un cuadernillo de trabajo que consideraba una adecuación de los objetivos de aprendizaje, reduciendo la profundización y priorizando aquellos objetivos que representarían un desafío y, al mismo tiempo, pudieran ser alcanzados por los estudiantes.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas desde la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS), definiendo unidades de análisis referentes a los tratamientos en los tipos de representaciones y las conversiones de un registro a otro. Para esto se consideraron cinco tipos de registros: verbal, tabular, relacional, algebraico y gráfico.

A la luz de los resultados obtenidos, se sugieren modificaciones en el cuadernillo de trabajo, con el fin de generar un rediseño que contemple aquellos aspectos débiles o no trabajados en la versión preliminar y que se ajusten a lo que necesitan los estudiantes para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos. De esta manera los estudiantes podrían enfrentar los cursos de Enseñanza Media con mayores herramientas, con el fin de asegurar o promover la progresión dentro del currículo en el eje de Álgebra y Funciones.

## **PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES**

En Chile, se ha posicionado en el último tiempo la discusión acerca de la inclusión versus la integración. Al revisar la ley 20.422 que Establece Normas sobre Igualdad de Oportunidades e Inclusión Social de Personas con Discapacidad, se puede observar que entre otras afirmaciones, se declara que:

“Artículo 36.- Los establecimientos de enseñanza regular deberán incorporar las innovaciones y adecuaciones curriculares, de infraestructura y los materiales de apoyo necesarios para permitir y facilitar a las personas con discapacidad el acceso a los cursos o niveles existentes, brindándoles los recursos adicionales que requieren para asegurar su permanencia y progreso en el sistema educacional.

Cuando la integración en los cursos de enseñanza regular no sea posible, atendida la naturaleza y tipo de la discapacidad del alumno, la enseñanza deberá impartirse en clases especiales dentro del mismo establecimiento educacional o en escuelas especiales.

Asimismo, el Ministerio de Educación deberá hacer las adecuaciones necesarias para que los alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales puedan participar en las mediciones de la calidad de la educación.

El Estado colaborará para el logro de lo dispuesto en los incisos precedentes, introduciendo las modificaciones necesarias en el sistema de subvenciones educacionales o a través de otras medidas conducentes a este fin.”

(Ley N°20.422, 2010, p. 19)

Generalmente, en educación la integración configura el paso de los estudiantes de la educación especial a la educación general. En la escuela se relaciona con el proceso mediante el cual las personas que presentan algún grado de discapacidad física y/o intelectual o alguna otra dificultad para enfrentar el trayecto educativo, forman parte de las comunidades educativas, pero aun manteniéndose en un estatus diferente a la de los otros estudiantes, puesto que no vivencia todas las instancias institucionales o pese a la presencia física, no habitan todos los espacios, incluyendo la participación, que en ocasiones se ve disminuida por su discapacidad, ya que las actividades no fueron diseñadas de forma universal.

Por otra parte, se entiende la inclusión educativa como el proceso orientado a responder a la diversidad de los estudiantes, incrementando su participación y reduciendo la exclusión en y desde la educación. El objetivo debe ser garantizar el acceso a la educación, no obstante, se agrega que el acceso es a una educación de calidad sin discriminación, por lo que la inclusión así entendida es un paso hacia delante de la integración ya que habla de toda la diversidad como componente de todo el trayecto educativo y no en un estatus diferenciado. (UNESCO, 2008).

Lo descrito anteriormente interpela al docente: ¿cómo realizar adecuaciones curriculares? Es una interrogante compleja, ya que todo estudiante tiene sus particularidades. Cuando se trata de estudiantes sin discapacidad intelectual, existen directrices que ayudan al docente; un ejemplo son los programas de estudio, materiales descargables de sitios web (educarchile, curriculumlinea y otros), orientaciones al docente y textos del estudiante; Por lo tanto, se puede decir que hay alguna claridad respecto del qué y cómo enseñar desde la propuesta curricular.

Pero, ¿qué ocurre con la progresión curricular de estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad intelectual?, ¿cuántas adecuaciones son necesarias?, ¿qué tipo de adecuaciones se deben realizar?... en fin, son muchas las preguntas que surgen. En este escenario, la labor del docente es más ambigua, dado que no existe una propuesta curricular con adecuación. En el sitio web del ministerio existe un apartado de educación especial, en el que se entregan datos legales, nómina de establecimientos, guías para padres y madres y recursos de apoyo al aprendizaje para docentes. En las orientaciones para el docente el foco está puesto en algunos diagnósticos (déficit atencional, espectro autista y otros).

Con respecto a matemática, existe una propuesta denominada “matemática funcional”, que tiene por objetivo acercar a la matemática a estudiantes con necesidades educativas especiales. Para ello se dispone de 3 textos: *Manual del docente*, *Manual del estudiante primera a cuarta etapa* y *Manual del estudiante quinta etapa*. Desde la primera a la cuarta etapa se trabaja matemática básica (patrones, números, problemas de adición, sustracción, multiplicación y división), y en la quinta etapa el énfasis está puesto en uso del dinero, es decir reconocer monedas y billetes nacionales, contar dinero, realizar equivalencias de dinero (entre billetes, monedas, monedas y billetes) y resolver problemas de situaciones de compras y vueltos.

Se supone que los y las estudiantes desarrollen las habilidades propuestas desde el currículo y no sea la sociedad, ni la escuela quienes pongan los límites, por ejemplo definiendo que no es relevante que aprendan álgebra, estadística u otros contenidos, centrándose solo en operaciones básicas o visualizando solamente que en el futuro puedan ir al supermercado o hacer algunas compras de forma autónoma. Desde esa perspectiva resulta difícil muchas veces realizar adecuaciones curriculares, puesto que no se cuenta con una base de datos de material pertinente para ello y tampoco los profesores han tenido una preparación en la formación inicial para asumir este desafío, dado que históricamente en Chile la educación especial se ha desarrollado en un espacio fuera de la escuela regular, a cargo de especialistas en el área de la educación diferencial o la psicopedagogía, que hasta hace poco no trabajan en el sistema educativo regular.

Cabe señalar que el modelo integracionista fue implementado a partir del año 1994 con la ley N° 19.284 de integración social de personas con discapacidad y posteriormente en el año 1998 con el Decreto 01, que permitió a las escuelas regulares integrar a estudiantes con distintas necesidades educativas por medio de una subvención estatal para la contratación de profesionales que trabajan en el ámbito de la educación especial, cambiando entonces también el rol del educador diferencial transitando desde el diagnóstico a la evaluación, con el fin de determinar Necesidades Educativas Especiales (NEE) para permitir el desarrollo del estudiante en el sistema escolar (Manguí, Julio, Conejeros, Donoso, Murillo y Díaz. 2012, p.49)

En el año 2010, en Chile se hace patente el paso de un paradigma integracionista a uno inclusivo con la ley N° 20.422. Este cambio es relevante, dado que pone el foco más allá de las políticas públicas y los aportes estatales de dinero que sin duda son importantes, se busca además un cambio de mentalidad en la sociedad, promoviendo el respeto y valoración de la diferencia y el derecho de todas las personas a la educación y su desarrollo integral.

“El desafío que plantea la Educación Inclusiva, a la sociedad en general y a la escuela en particular, es el respeto a la diversidad, la valoración positiva de la diferencia y la consideración de las mismas para dar respuesta a los requerimientos propios de los procesos de aprendizaje de todos y cada uno. En dicho proceso cualquier profesor ha de ser responsable de crear ambientes y situaciones para el aprendizaje de carácter inclusivo para todos y todas sus estudiantes” (Guajardo, 2010; como se citó en Manguí, 2012, p.51)

En lo cotidiano, nos encontramos con que muchos de nosotros (docentes) buscamos material de otros cursos (habitualmente de enseñanza básica), pues asumimos que ese es el nivel que podemos exigir a nuestros estudiantes, dado que contenidos con mayor nivel de abstracción los consideramos difíciles de enseñar y pensamos que son complejos de aprender e incluso en ocasiones se declara que para estos estudiantes son innecesarios - afirmación que sin que nos propongamos, estamos teniendo un prejuicio respecto de las capacidades de nuestros alumnos y alumnas, y a la vez los estamos discriminando -. Sin duda el camino a la inclusión no

es sencillo, para lograr que todos puedan aprender es fundamental que la inclusión se lleve a cabo desde los niveles iniciales hasta la enseñanza media.

En Chile si bien se habla de inclusión a nivel de políticas públicas, se practica un modelo más bien integracionista, puesto que aun el énfasis está puesto en el diagnóstico y tratamientos individuales por medio de docentes especialistas, siendo el aula un espacio en el que el estudiante se encuentra físicamente, pero que no habita completamente (Mangui et al. 2012).

En el año 2015, el Ministerio de Educación estableció el Decreto 83 de Criterios y Orientaciones de Adecuación Curricular para estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE) de Educación Parvularia y Educación Básica. Dentro de los principios que busca resguardar el decreto, está presente la valoración de la diversidad y la inclusión educativa, señalando que el Estado debe favorecer la presencia y participación dentro del sistema escolar de todos los estudiantes, debiendo la propuesta de educación ser flexible para poder llegar a toda persona inserta en el sistema educativo.

Según el decreto, “se entenderá por alumno o alumna que presenta Necesidades Educativas Especiales a aquél que precisa ayudas y recursos adicionales, ya sea humanos, materiales o pedagógicos, para conducir su proceso de desarrollo y aprendizaje, y contribuir al logro de los fines de la educación (LGE art. 23).”

Además se diferencia entre NEE permanente y transitorio, siendo el primero producto de la obtención de un diagnóstico que indique el carácter permanente asociado a discapacidad visual, auditiva, intelectual o múltiple y a trastornos autistas u otros. En el caso de ser transitorio se define por un diagnóstico que es válido por un periodo de tiempo, por ejemplo referente a trastornos específicos del lenguaje, dificultades de aprendizaje, déficit atencional, entre otros.

Cabe señalar que las NEE, van más allá de los y las estudiantes que requieren de ayudas adicionales o que tiene alguna discapacidad intelectual, dado que el aula en sí misma se configura por la diversidad de estudiantes, en donde cada persona es diferente a la otra y cada estudiante necesita de apoyos distintos, incluso aquellos estudiantes avanzados en que la escuela requiere de esfuerzos adicionales para desafiar a ese estudiante. Desde esa perspectiva todos y todas tenemos necesidades educativas especiales. Sin embargo eso no está considerado en el decreto, y no todos los estudiantes están afectos a él.

Por otra parte, a partir del Decreto 83, se entenderá como adecuación curricular a toda medida que permita entregar las condiciones necesarias para asegurar la permanencia y progreso en el sistema escolar, atendiendo a las características y procesos de aprendizaje individuales de los estudiantes.

“La adecuación curricular es la respuesta a las necesidades y características individuales de los estudiantes, cuando la planificación de clases (aun considerando desde su inicio la diversidad de estudiantes en el aula) no logra dar respuesta a las necesidades educativas especiales que presentan algunos estudiantes, que requieren ajustes más significativos para progresar en sus aprendizajes y evitar su marginación del sistema escolar.” (Decreto 83, 2015, P. 14)

Es preciso señalar la importancia de la evaluación diagnóstica para ver estilo, ritmo y progreso de aprendizajes: “Las estrategias para dar respuesta a la diversidad en el aula deben considerar la evaluación diagnóstica de aprendizaje del curso, la cual se realiza al inicio del año escolar, y proporciona información relevante al docente respecto del progreso, estilo y ritmo de aprendizaje de todos los estudiantes de un curso y de cada uno en particular, lo que permite planificar estrategias diversificadas que favorezcan el aprendizaje de todos.” (Decreto 83, 2015, P. 19)

Para realizar las adecuaciones curriculares se han establecido en el decreto 83 una serie de criterios y clasificación de tipos de adecuación curricular. Se deben tener presente los siguientes elementos:

- a) Diversidad individual, para que todos los estudiantes alcancen los objetivos.
- b) Recabar toda la información previa del estudiante: diagnóstico, información escolar, familiar, etc.
- c) La adecuación debe lograr que los estudiantes permanezcan y logren transitar en diversos niveles educativos para desarrollar sus capacidad de forma integral.
- d) Las adecuaciones curriculares deben priorizar el aprendizaje de conocimientos que se consideren básicos e imprescindibles de acuerdo al impacto para el desarrollo personal y social del estudiante.
- e) La implementación de la adecuación curricular debe decidirse con los profesionales que cuenta el establecimiento.

Por otro lado en el currículum de primer año de enseñanza media (MINEDUC, 2011), además de los contenidos o conocimientos básicos, se enfatiza que el foco de aprendizaje esté en el desarrollo de habilidades.

“...el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles y adquirir y generar nuevos conocimientos. Esta situación hace relevante la promoción de diversas habilidades, como resolver problemas, formular conjeturas, realizar cálculos en forma mental y escrita y verificar proposiciones simples, entre otras”

“...sin esas habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan adquirir los alumnos resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos.” (p. 8)

Un tópico de aprendizaje dentro del currículum de matemática que usualmente se considera de mayor grado de complejidad y abstracción que el trabajo con números y operatoria básica, son las funciones. Su tratamiento aparece formalmente en octavo año de enseñanza básica y posteriormente se trabaja en todos los niveles escolares siguientes, ampliando su uso y relaciones con otras áreas tanto dentro como fuera de la matemática.

El trabajo con el concepto de función y las formas de representarla, contribuye a desarrollar habilidades como formular conjeturas, realizar cálculos mentales, verificar proposiciones simples, comparar registros y analizar situaciones. Lo descrito anteriormente va más allá de la aplicación directa de una operación matemática, aunque se utilizan para ello las operaciones básicas.

Las funciones están presentes en lo cotidiano, las utilizamos para modelar matemáticamente diversas situaciones, algunas de uso común y otras ligadas a áreas de estudio científico y social. Las funciones ayudan a desarrollar competencias clave en la enseñanza media, tales como establecer relaciones entre variables, analizar, conjeturar, proyectar resultados y generalizar.

Blomhøj (2002) postula la modelización matemática como una teoría para la enseñanza, relevando el valor de ésta práctica en el desarrollo de competencias de orden superior. Por su parte Blum y Borromeo-Ferri (2009) indican que la modelización matemática contribuye al aprendizaje de la matemática no solo en cuanto a comprensión y motivación, sino en el desarrollo de competencias, actitudes y visiones hacia la matemática, puesto que los estudiantes logran comprender mejor los contextos en lo que se desenvuelven. También existen propuestas de enseñanza de funciones que aluden a la importancia del desarrollo de las competencias descritas anteriormente. En Chile, el centro Comenius para el desarrollo de innovaciones en educación de la Universidad de Santiago de Chile ha elaborado material al respecto, así como el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, quienes realizan perfeccionamientos para docentes con el fin de mejorar el trabajo con funciones, incorporando la modelización.

Es por todo esto que las adecuaciones curriculares con respecto al contenido “funciones” son necesarias; es un espectro del conocimiento matemático que se debe priorizar, considerando las capacidades intelectuales de cada estudiante según su ritmo de aprendizaje. Actualmente los apoyos a los docentes están centrados en contenidos de enseñanza básica (hasta sexto grado), pero no se incluyen tópicos de cursos superiores ni de álgebra, ya que el desarrollo formal de álgebra comienza en séptimo básico. No se cuenta con material previo al nivel de octavo básico del contenido funciones, como sí ocurre por ejemplo con contenidos del eje de números o datos, que están presentes en cursos anteriores.

## ANTECEDENTES DE INNOVACIÓN

Al realizar un estado del arte respecto de investigaciones y propuestas relacionadas al objeto matemático funciones, se pueden encontrar variados aportes, pero al incorporar la variable de adecuación curricular para estudiantes en etapa escolar con necesidades educativas especiales, específicamente con alguna discapacidad intelectual se torna difícil. Sin embargo la tesis doctoral de Higuera (1994) aporta información relevante referente al tema, puesto que además de ser un estudio muy acabado que considera lo didáctico de la matemática y lo epistemológico de las funciones, se centra profundamente en las construcciones de los estudiantes del concepto función.

Ese trabajo resume algunas investigaciones de didáctica de la matemática previas realizadas por otros autores acerca de las concepciones que tiene los estudiantes relativos al concepto de función, identificando áreas en que se presentan problemas de aprendizaje. Higuera clasifica las investigaciones en: epistemología genética sobre el desarrollo de estadios, epistemología histórica y las basadas en procesos cognitivos.

Ugalde (2013) realiza un trabajo en el que principalmente se centra en tres momentos: el desarrollo histórico de las funciones, el estudio de los tipos de definiciones de función en conjunto con las diferentes representaciones utilizadas y en la compilación de un conjunto de actividades para el estudio de las funciones.

Por otra parte, un antecedente relevante a esta propuesta de adecuación curricular en el objeto matemático funciones, para el nivel de octavo básico es lo declarado en el Decreto 83(2015) en donde se define no solo qué se entiende por adecuación curricular, sino que también entrega por primera vez para Chile, directrices acerca de las adecuaciones curriculares.

A nuestro parecer, el principal aporte en ese decreto en relación a nuestro tema es la generación de tipos de adecuaciones curriculares, clasificadas de la siguiente manera:

- Adecuaciones curriculares de acceso: “intentan reducir o incluso eliminar las barreras a la participación, al acceso a la información, expresión y comunicación, facilitando así el progreso en los aprendizajes curriculares y equiparando las condiciones con los demás estudiantes, sin disminuir las expectativas de aprendizaje.” (Decreto 83, 2015, p.27).

Para facilitar el acceso se debe procurar presentar la información de variadas maneras (visual, auditiva, múltiple), considerando estrategias tales como mayor tamaño de letra, apoyo con imágenes, uso de color para resaltar palabras clave, mayor interlineado para facilitar la lectura, material audiovisual, lenguaje de señas, sistema Braille, entre otros. También se debe potenciar las formas en que los estudiantes presenten sus respuestas para fomentar la participación; en este caso se puede trabajar completando oraciones, uniendo conceptos, elaborando textos breves, expresando de forma oral las respuestas, etc. Otros elementos importantes para facilitar el acceso son el ajuste de tiempos y horario y la adaptación del entorno, ya que organizar el espacio físico y temporal donde se mueve el estudiante favorece la autonomía para el desarrollo de sus actividades. En estas líneas se puede considerar modificaciones en la jornada escolar, estructura del horario, dar más tiempo para el desarrollo de una tarea o evaluación y así también adecuar en el establecimiento el lugar donde se disponen los materiales, buscar un puesto estratégico al interior de la sala de clases para evitar distracciones o por luminosidad.

- Adecuaciones curriculares en los objetivos de aprendizaje: “Un criterio fundamental a tener en cuenta para la decisión del uso de adecuaciones en los objetivos de aprendizaje es evitar la eliminación de aquellos aprendizajes que se consideran básicos imprescindibles para el desarrollo integral del estudiante, que son requisitos para seguir aprendiendo y que se detallan más adelante.” (Decreto 83, 2015, p.29).

Lo anterior señala la importancia de resguardar el progreso del estudiante en el sistema educativo, es por esto que la propuesta de adecuación curricular para los objetivos de aprendizaje referentes a funciones en el nivel de octavo año básico, es un aporte dado que entrega la base para la continuidad de este contenido en los siguientes años de enseñanza media en la asignatura de matemática.

Para efectuar adecuaciones en los objetivos de aprendizaje, se puede adoptar algunas de las siguientes medidas según se indica en el Decreto 83:

a) Graduación del nivel de complejidad; para ello es necesario conocer tanto aquellos aprendizajes logrados por el estudiante, como los no logrados, con el fin de proponer objetivos de aprendizajes desafiantes y alcanzables.

b) Priorización de objetivos de aprendizaje y contenidos; consiste en la selección de objetivos de aprendizaje, jerarquizando unos por sobre otros, sin renunciar necesariamente a los que queden en segundo plano, pueden postergarse o sustituirse de forma temporal.

c) Temporalización; se debe flexibilizar los tiempos previamente establecidos por el currículo para la consolidación de los aprendizajes, atendiendo principalmente a aquellas NEE que afectan el ritmo de aprendizaje.

d) Enriquecimiento del currículo; consiste en incorporar objetivos de aprendizaje que no están contemplados en el currículo, pero que se consideran relevantes para el desarrollo social y académico del estudiante.

e) Eliminación de aprendizajes; cuando los apoyos extraordinarios y las otras formas de adecuación curricular descritas anteriormente no resultan efectivas o satisfactorias, resguardando que no afecten aquellos aprendizajes considerados básicos e imprescindibles, como lo son en el área de matemática las operaciones básicas y toda aquellas que permita que el estudiante se desenvuelva en la vida cotidiana.

## OBJETO MATEMÁTICO

A continuación se expone una breve pasada por el devenir histórico y epistemológico del objeto matemático funciones, desde las civilizaciones antiguas, hasta el mundo moderno.

El concepto y tratamiento de las funciones, al igual que muchos otros conceptos matemáticos, surge desde ideas intuitivas que se van formalizando hasta llegar a lo que conocemos actualmente. Ese proceso de refinamiento es complejo, largo y laborioso, ya que diversas civilizaciones y matemáticos de todas las épocas han realizado su aporte, claramente con distintos grados de precisión y abstracción.

Inicialmente el desarrollo de las funciones emergió mediante la idea de dependencia y proporción. Culturas antiguas, como los egipcios y babilonios ya utilizan algunas relaciones de proporcionalidad, y lograron generalizar formas para determinar el cálculo de algunas medidas útiles. Si bien no se señala la idea de función, existen tablas de cálculo que datan de 2000 a.C en que se generaliza la forma de resolver productos entre dos cantidades, también ecuaciones. Cabe precisar que no lograron abstraer el concepto general de fórmula con una variable, pero sus aproximaciones develan la comprensión del concepto de dependencia y variabilidad. Por su parte, los griegos también trabajaron la noción de dependencia entre cantidades en especial con leyes de la mecánica, en donde Arquímedes establece que todo cuerpo sólido que se encuentre sumergido en un fluido será empujado por una fuerza en dirección ascendente y que dicha fuerza será equivalente al peso del volumen del fluido que ha sido desplazado por el cuerpo sólido (Ugalde, 2013, p.6).

Diofanto de Alejandría, es un matemático conocido por sus libros, entre ellos uno de los más conocidos es "Aritmética". No hay precisión de la época en que nació, pero se presume que fue alrededor del 200 d.C, viviendo 84 años (este dato se conoce gracias a un acertijo matemático encontrado). Sus aportes en el álgebra son importantes, ya que en los seis de los trece capítulos de este libro que se conocen, se puede observar el uso del simbolismo o nacimiento del álgebra como algunos lo llaman.

El álgebra de Diofanto es conocida con el nombre de "sincopada", ya que se caracterizaba por usar abreviaciones para las incógnitas. El aporte de Diofanto sin duda se utiliza actualmente en el trabajo con funciones.

En 1591 Francois Viète, moderniza el álgebra, si bien ya en el 1202 se reemplazan los números por símbolos, es él quien sienta precedente con el uso de " $y = f(x)$ ", planteamiento que se utiliza en la actualidad. Luego, alrededor del 1630, el conocido matemático francés René Descartes trabajó con variables y constantes, asignando las primeras letras del abecedario a las constantes y las últimas letras a

las incógnitas “x” e “y”, además en 1637 postula el plano cartesiano para representar puntos y rectas, definiendo una referencia por medio de los ejes, generando así una relación entre lo numérico (patrones), lo geométrico y lo algebraico. Estos aportes permitieron unificar simbología y dejar un poco de lado tanta verbalización en las explicaciones de la era sincopada, para dar inicio a la simbología moderna.

La palabra función se mencionó por primera vez en 1673, en los manuscritos de Leibniz, en un ámbito geométrico. Johann Bernoulli en 1699 se adjudica la primera definición formal, planteando que la función de una variable es una cantidad que se construye utilizando la variable y constantes (Díaz, 2013).

Posteriormente en 1740 Euler, acuñó también una definición más elaborada que la descrita por Bernoulli, utilizando el símbolo  $f(x)$  y en 1748 se refirió al concepto de función como toda relación entre  $x$  e  $y$  tal como se presenta en el plano mediante una curva trazada a mano libre.

Casi 100 años después, Fourier afina la definición.

“En general, la función  $f(x)$  representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa  $x$ , hay un número igual de ordenadas  $f(x)$ . Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única” (Rüting, 1984).

La definición moderna se adjudica a Dirichlet en 1837, quien señala: Una cantidad variable “y” se llama función de la cantidad variable “x” si a cada valor de “x” le corresponde un solo y determinado valor de “y”.

Finalmente Bourbaki en 1939, estableció las funciones como una correspondencia entre el dominio y el rango, definiendo los conjuntos y sistematizando la definición actual y generalizando.

*Sean  $E, F$  conjuntos. Una relación  $R$  de  $E$  en  $F$  es una función si y solo si:*

- i)  $(\forall x \in E)(\forall y \in F)(\forall y' \in F)(xRy \wedge xRy' \Rightarrow y = y')$
- ii)  $(\forall x \in E)(\exists y \in F)(xRy)$

Luego de esto, se puede ver cómo ha ido cambiando la visión que rodea a la matemática y por ende la construcción del álgebra y las funciones, pasando por distintas épocas.

En la enseñanza escolar actual, se inicia con la definición formal matemática de funciones y luego se van explicando los elementos que la componen, así como el “saber hacer” que deviene de su estudio. El objeto matemático “Funciones”, se enmarca en el eje de Álgebra y Funciones. La primera aparición formal en el currículo es en el nivel de Octavo año Básico, en el que se proponen los siguientes objetivos de aprendizaje:

*Tabla 1.  
Objetivos de aprendizajes de octavo año básico*

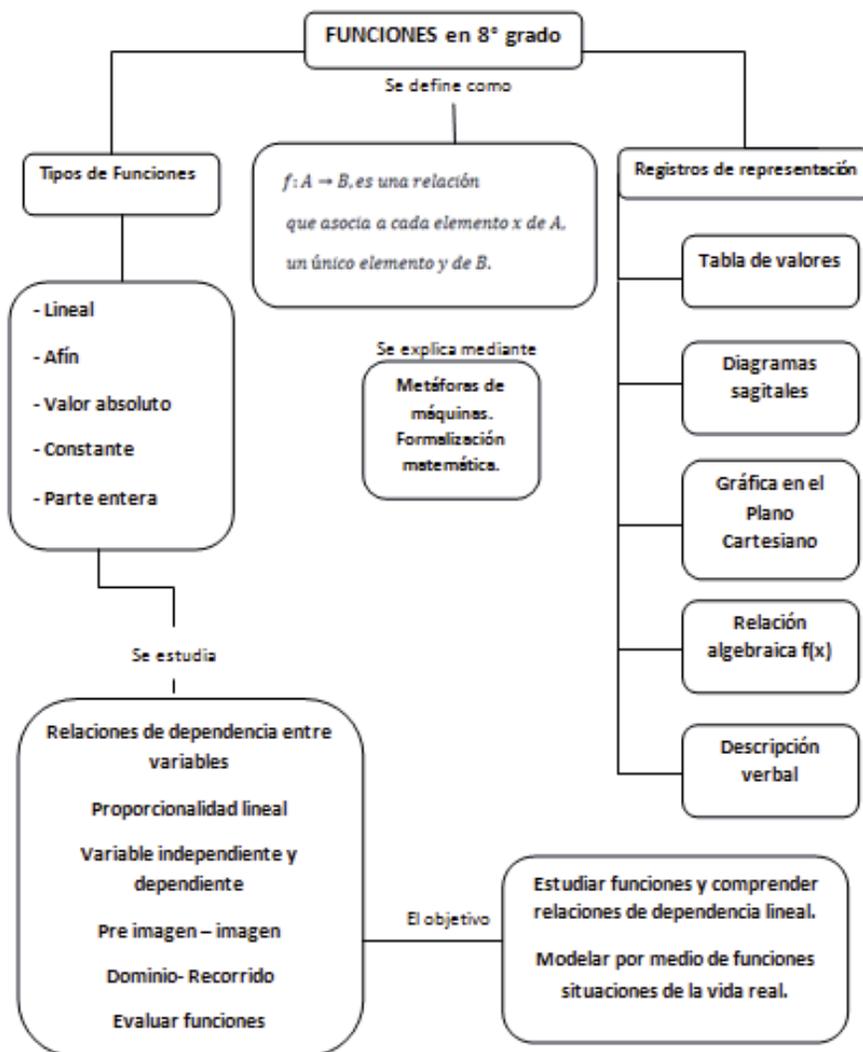
OBJETIVO	INDICADORES
<p>OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizando tablas.</li> <li>- Usando metáforas de máquinas.</li> <li>- Estableciendo reglas entre x e y.</li> <li>- Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn, de manera manual y/o con software educativo.</li> </ul>
<p>OA 8: Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma <math>ax=b</math>; <math>x/a=b</math>, <math>a \neq 0</math>; <math>ax + b = c</math>; <math>x/a + b = c</math>; <math>ax = b + cx</math>; <math>a(x+b) = c</math>; <math>ax + b = cx + d</math>   (<math>a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}</math>)</p>	
<p>OA 10: Mostrar que comprenden la función afín.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal.</li> <li>- Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano.</li> <li>- Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.</li> <li>- Relacionándola con el interés simple.</li> <li>- Usándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.</li> </ul>

Posteriormente en primero medio se aborda desde la gráfica de relaciones lineales en dos variables de forma  $f(x,y) = ax+by$ , mediante la creación de tabla de valores y gráficos manuales y/o con software educativo.

En Segundo medio hasta el año 2017 se debe trabajar la función exponencial, logarítmica y raíz cuadrada. A partir del año 2018 se comenzará con las nuevas bases curriculares y en ese caso correspondería desarrollar la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ : ( $a \neq 0$ ), en tablas y gráficos, determinando puntos especiales en su gráfica (intersección con los ejes y vértice) y como modelo de situaciones. Además en este nivel educativo se busca que los y las estudiantes comprendan la inversa de una función.

En Tercero y Cuarto medio según el currículo aún vigente (hasta 2018 y 2019 respectivamente), se abordará el modelamiento matemático con funciones cuadráticas, función potencia e inversa de una función. La nueva propuesta de bases curriculares para tercero y cuarto medio aún está en proceso, por lo que no existe una definición clara al respecto.

A continuación se muestra un mapa conceptual del trabajo con funciones en 8° año de educación básica.



Desde el saber sabio, las funciones se enmarcan en el estudio de relaciones, como un caso específico dentro de estas. Para ello la notación es muy importante, dado que se usa lenguaje matemático para describir qué es una función.

### 1.6.1. Conceptos básicos

**Definición 106** Sea  $x\mathcal{R}y$  una relación de  $A$  a  $B$ . Se dice que  $\mathcal{R}$  es funcional en  $y$  si y sólo si  $(\forall x \in A) (\forall y' \in B) (\forall y'' \in B) (x\mathcal{R}y' \wedge x\mathcal{R}y'' \Rightarrow y' = y'')$

**Definición 107** Sea  $x\mathcal{R}y$  una relación de  $A$  a  $B$ . Se dice que  $\mathcal{R}$  es una función de  $A$  a  $B$  si y sólo si

- i.  $Dom(\mathcal{R}) = A$
- ii.  $\mathcal{R}$  es funcional en  $y$

Imagen 2: (Mena, 2002, p.31).

En los textos del saber erudito el énfasis está en los teoremas y sus demostraciones, dado que por medio de estos se define muchas veces un objeto matemático.

**Ejemplo 113** Sea  $A = B = \mathbb{R}$ . Entonces:

1. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 2x + 3$  es una función
2. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x^2$  es una función
3. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 2$  es una función

Imagen 3: (Mena, 2002, p.32).

**Ejemplo 114** Sea  $A = B = \mathbb{R}$ . Entonces:

1. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$  no es una función (falla i.).
2. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$  no es una función (falla i.).
3. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y^2 = x$  no es una función (falla ii.). (Se puede observar, además, que falla también i., pero por ahora es más importante nuestra primera afirmación).
4. La relación definida por  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 1 = x$  no es una función (falla ii.). (Se puede observar, además, que falla también i., pero por ahora es más importante nuestra primera afirmación).

Imagen 4: (Mena, 2002, p.32).

Por otra parte, en los textos escolares se muestra una adaptación de esta notación, en un formato más accesible a los estudiantes. A continuación se muestra un ejemplo de un texto escolar vigente de octavo básico, en donde se introduce la relación entre proporcionalidad y funciones.

### ¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal?

Para elaborar 0,6 L de jugo de frutas no gasificado se deben incorporar 48 g de azúcares.



#### Situación 1 Relacionando variables

¿Qué relación existe entre la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben agregar al proceso y el número de litros de jugo embotellado?

Para responder, primero constatamos que si se quiere aumentar el número de litros de jugo embotellado, entonces se debe aumentar la cantidad de kilogramos de azúcares que se incorporan al proceso.

¿Qué ocurre con la cantidad de azúcares que se deben incorporar si el número de litros de jugo embotellado disminuye?

**Paso 1** Representa el hecho de que si se desea embotellar 0,3 L de jugo (la mitad de 0,6 L) se deben agregar 24 g de azúcares (la mitad de 48 g) y que si se desea embotellar 1,2 L de jugo se deben agregar 96 g de azúcares.



Imagen 5: (Texto del estudiante Matemática, MINEDUC 2017, p.154).

▶ Para concluir	Argumenta y comunica
<p>Dos variables tienen una relación de <b>proporcionalidad directa</b> cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante. A esta constante se le llama constante de proporcionalidad. Esta relación puede ser descrita por la ecuación</p> $y = mx$ <p>donde <math>x</math> y <math>y</math> representan las variables relacionadas y el valor <math>m</math> es la constante de proporcionalidad.</p> <p>A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama función lineal, que puede ser escrita como:</p> $f(x) = y = mx$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Considera una tabla de datos con los valores de dos variables relacionadas. ¿Cómo reconoces si estos valores se pueden modelar usando una función lineal? Explica detalladamente por escrito.</li> <li>• Analiza la ecuación general de una función lineal, <math>y = mx</math>. Sin importar el valor que tenga la constante <math>m</math>, ¿qué par de valores numéricos <math>(x, y)</math> siempre verifica esta ecuación matemática? Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera y comuniquen su respuesta en común al resto del curso.</li> </ul>

Matemática 8.º básico

Imagen 6: (Texto del estudiante Matemática, MINEDUC 2017, p.155).

### Ampliando

Para una función  $f(a)$ , se define su dominio como el conjunto de todos los valores que puede asumir la variable independiente  $a$ . Y se define su recorrido como el conjunto de todos los valores que puede adquirir la función  $f(a)$ .

Una función lineal puede representarse de muchas maneras. La más usual es la representación en el plano cartesiano.

La recta que representa a la función lineal  $f(x) = mx$ , crece en el sentido positivo del eje  $X$  si  $m > 0$  y decrece si  $m < 0$ .

Imagen 7: (Texto del estudiante Matemática, MINEDUC 2017, p.158).

► Para concluir	Argumenta y comunica
<p>Una función afín puede definirse como una función lineal trasladada en el plano cartesiano a lo largo del eje <math>Y</math>. La ecuación que la modela es de la forma</p> $f(x) = y = mx + n$ <p>Al coeficiente <math>m</math> se le llama pendiente de la recta y a <math>n</math> se le llama coeficiente de posición.</p>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Si se define un punto en el plano cartesiano, ¿cuántas rectas se pueden dibujar que pasen por él?</li><li>• Si se grafican dos puntos diferentes en el plano cartesiano, ¿siempre es posible dibujar una recta que pase por los dos puntos? ¿Cómo cambia tu respuesta si se dibujan tres puntos diferentes? Explica y ejemplifica.</li></ul>

Imagen 8: (Texto del estudiante Matemática, MINEDUC 2017, p.165).

Los textos escolares responden a los requerimientos desde el currículo escolar, en donde el estudio de las funciones se aborda principalmente desde el modelamiento matemático, definiendo elementos generales de una función lineal y afín y su relación con la recta en el plano cartesiano.

## PLAN DE CLASES Y ANÁLISIS A PRIORI

A continuación, se propone una adecuación curricular para el objeto matemático funciones, específicamente en el nivel de 8° año de Enseñanza Básica, desde la TRRS.

Con esta propuesta se espera que los y las estudiantes que presentan discapacidad intelectual y que están incluidos en escuelas tradicionales, puedan lograr los objetivos de aprendizaje definidos en el currículo escolar y así enfrentar los cursos de Enseñanza Media con mayores herramientas, con el fin de asegurar o promover la progresión dentro del currículo en el eje de Álgebra y Funciones.

La TRRS, de Raymond Duval, plantea que uno de los aspectos relevantes con respecto al aprendizaje de las matemáticas, es que para lograr la comprensión se debe distinguir el objeto matemático de sus representaciones y éstas no se deben confundir, pues ello podría provocar pérdida de comprensión del concepto.

Duval señala que las representaciones semióticas son indispensables para la actividad matemática, “Los tratamientos matemáticos no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación. Y esta función de tratamiento solo la pueden cumplir las representaciones semióticas y no las mentales. La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y parece serle intrínseca” (Duval, 2004).

Entonces las representaciones semióticas son imprescindibles, puesto que no se puede acceder al conocimiento de los objetos matemáticos por los sentidos. Las representaciones pueden ser externas o internas, en esta línea las representaciones externas son representaciones semióticas por naturaleza, puesto que son producidas por un sujeto o un sistema y solo pueden ser efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico. Este tipo de representaciones son accesibles para todos aquellos sujetos que las hayan aprendido el sistema semiótico utilizado y cumplen funciones comunicacionales, de objetivación y de tratamiento, dado que son representaciones conscientes. Las representaciones internas en tanto pueden ser conscientes o no conscientes, son aquellas imágenes y concepciones que pertenecen solo a ese sujeto, dado que no son externalizadas ni comunicadas, por lo tanto pueden ser mentales, incluyendo a las nuevas representaciones o representaciones computacionales cuando cumplen una función de tratamiento instantáneo.

Se entiende por **semiósisis** a la producción de una representación semiótica y **noesis** a las producciones o aprehensiones cognitivas conceptuales de un objeto. (Duval, 2004). Entonces, se dice que no hay semiósisis sin noesis.

Las representaciones externas son claves para el uso de tratamientos, puesto que dependen del sistema semiótico en el que desarrollen. Duval explica que no es lo mismo por ejemplo sumar en el sistema decimal que en el sistema fraccionario, puesto que se utilizan tratamientos distintos según el sistema al que se esté ligado (procedimientos). Entonces las representaciones semióticas son aquellas que cumplen con ser conscientes y externas, pudiendo ser gráficos, esquemas, figuras, expresiones simbólicas entre otras.

Los tratamientos se entienden como la transformación que produce como resultado otra representación pero conservando el registro, en cambio cuando se efectúa una modificación que implica un cambio de registro se entenderá como una “conversión”, siendo entonces una transformación de tipo externa al registro inicial de la representación, en donde se genera una correspondencia y para ello se debe percibir la diferencia entre el contenido de una representación y lo que se está representando.

“En general en la enseñanza se privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento” (Duval, 2004 p.48).

Por otra parte la conversión de representaciones semióticas a otro registro constituye una actividad cognitiva más compleja y difícil de adquirir.

La TRRS es pertinente para diseñar una propuesta de adecuación curricular respecto del objeto matemático “funciones”, dado que pone énfasis en las distintas representaciones y su interacción, pudiendo ser el lenguaje natural, aritmético, geométrico, tabular, algebraico, entre otros.

Para el trabajo del concepto de función es importante el tránsito entre las distintas representaciones, así como el tratamiento al interior de cada una de ellas.

A la luz del planteamiento de Duval, se definen para esta propuesta de adecuación curricular 5 tipos de registros para el contenido funciones en el nivel de octavo año básico.

a) Verbal: consiste en expresar de forma escrita la relación entre las variables o la regla a aplicar en cada función para obtener el valor de  $y$  dado un valor de  $x$ .

b) Algebraico: para la adecuación curricular se establece como forma matemática o algebraica expresar función en términos de la variable  $x$ , haciendo uso de lenguaje algebraico.

c) Tabular: este registro constituye la formación de una tabla de valores en la que se exprese de forma numérica la relación entre las variables  $x$  e  $y$ .

d) Relacional: por medio de un diagrama sagital se observa la relación entre dos conjuntos, atribuyendo a cada valor de la variable  $x$  un único valor de la variable  $y$ , considerando casos finitos.

Se considera un registro puesto que permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis, aún cuando en este momento no se realicen dichas actividades:

- 1) La presencia de una representación identificable.
- 2) El tratamiento de una representación, mediante la composición de funciones, la inversa y análisis de características.
- 3) La conversión de una representación a otro registro, conservando el significado inicial.

e) Gráfico: se plasma la función que relaciona las variables  $x$  e  $y$  en el plano cartesiano, por medio de pares ordenados.

En la propuesta de adecuación curricular, se trabajan tratamientos al interior de cada tipo de registro, así como la conversión de un registro a otro, generando equivalencias en la forma de expresar una función.

Es importante señalar que antes de elaborar el plan de clases de  $y$  diseñar el cuadernillo, se priorizaron contenidos del currículo escolar, tal y como se señala en la tabla a continuación.

*Objetivos de aprendizajes de octavo año básico plan regular y propuesta de adecuación curricular*

<b>Currículo escolar</b>	<b>adecuación curricular</b>
<p><b>OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizando tablas.</li> <li>- Usando metáforas de máquinas.</li> <li>- Estableciendo reglas entre <math>x</math> e <math>y</math>.</li> <li>- Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn, de manera manual y/o con software educativo.</li> </ul>	<p><b>OA 7: Mostrar que comprenden la noción de función por medio del uso de diferentes registros de representación.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Utilizando tablas.</li> <li>- Usando metáforas de máquinas.</li> <li>- Estableciendo reglas entre <math>x</math> e <math>y</math>.</li> <li>- Representando de manera gráfica (plano cartesiano y diagramas de Venn, de manera manual.</li> </ul>
<p><b>OA 8: Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma <math>ax=b</math>; <math>x/a=b</math>, <math>a \neq 0</math>; <math>ax + b = c</math>; <math>x/a + b = c</math>; <math>ax = b + cx</math>; <math>a(x+b) = c</math>; <math>ax + b = cx + d</math>   (<math>a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}</math>).</b></p>	<p><b>OA 8: Utilizar situaciones conocidas en donde se utilicen funciones.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Perímetro de un cuadrado.</li> <li>- Área de un cuadrado.</li> <li>- Volumen de un cubo.</li> </ul>

Cabe señalar que el OA 10 no ha sido abordado en la propuesta de adecuación curricular de objetivos de aprendizaje; considerando graduación del nivel de complejidad que atienda a objetivos desafiantes y alcanzables a la vez; es por ello que se han priorizado los objetivos de aprendizaje 7 y 8 del programa de estudios. Otra variable que se ha considerado es el tiempo necesario para consolidar los aprendizajes por lo que atendiendo al ritmo de aprendizaje de los estudiantes la unidad puede desarrollarse en una, dos o tres semanas de clases.

En la propuesta se trabajará con números naturales y se establecieron los siguientes aprendizajes previos por parte del estudiante: leer, escribir, sumar, restar y multiplicar de forma manual o con ayuda de una calculadora.

### **Objetivo Clase 1**

“Concepto de función mediante metáfora de máquina lavadora y funciones matemáticas”

En la primera clase, además de la presentación de la unidad y del material de trabajo, se espera lograr que el estudiante comprenda el concepto de función, para ello lo aborda mediante la metáfora de la “máquina” y luego se lleva al ámbito matemático, introduciendo números naturales y operaciones aditivas en las funciones en tabla de valores y lenguaje natural.

### **Objetivo Clases 2, 3, 4 y 5**

“Representar funciones en registro verbal, tabular y matemático. Trabajo con algunas funciones conocidas; perímetro de un cuadrado, área de un cuadrado y volumen de un cubo”

Luego de lograr el objetivo de la clase 1, el estudiante, junto con consolidar el concepto de función matemática y el trabajo con tablas de valores, comenzará a reconocer el tratamiento a realizar al interior del registro tabular y su conversión al registro algebraico.

En las clases 4 y 5 se intenta trabajar las funciones en el ámbito geométrico, contextualizando los valores de  $x$  e  $y$ .

### **Objetivo Clases 6, 7 y 8**

“Las funciones también se pueden representar con un diagrama sagital”

En estas clases se incorpora una nueva forma de representar funciones, mediante el registro organizacional, en donde es clave comprender cuál es la función que vincula a cada elemento  $x$  del conjunto de partida un único elemento  $y$  del conjunto de llegada. Además se pretende reforzar y relacionar este nuevo registro con los anteriormente trabajados (verbal y algebraico).

### Objetivo Clases 9, 10 y 11

“Aplicar lo aprendido: ejercitación de registro verbal, algebraico, tabular y diagrama sagital”

En estas clases se propone ejercitar lo aprendido hasta el momento, incluyendo tratamientos al interior de los registros y conversiones. En esta parte del trabajo con el cuadernillo se sugiere potenciar la autonomía del estudiante, evitando la mediación por parte del docente.

### Objetivo Clases 12, 13 y 14

“Registro gráfico; plano cartesiano”

Finalmente, en las últimas, clases se propone incluir un nuevo registro para representar funciones; el plano cartesiano. Para ello se debe trabajar la ubicación de puntos en el plano y la relación entre los valores de la tabla y su transformación a pares ordenados  $x,y$ .

A continuación se presenta una planificación más detallada en la cual se realiza un análisis a priori de la secuencia didáctica. Además se sugieren acciones y devoluciones para cada momento por parte del docente.

Cada clase tiene una duración de 45 minutos.

### Plan de trabajo con cuadernillo para la unidad de funciones en el nivel de octavo básico (adecuación curricular)

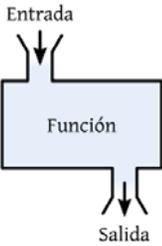
Profesor.....(Colegio/Liceo .....)

Tema de estudio de la unidad	<ul style="list-style-type: none"><li>• Desarrollar el concepto de función a través de la metáfora de la máquina.</li><li>• Identificar secuencias y patrones.</li><li>• Tabla de valores.</li><li>• Forma algebraica de una función.</li><li>• Diagrama sagital.</li><li>• Funciones referentes a perímetro y área de un cuadrado y a volumen de un cubo.</li><li>• Representación gráfica de una función en el plano cartesiano.</li></ul>
------------------------------	--

### Material complementario:

Cuadernillo impreso a color y calculadora.

Tiempo	Tarea matemática	Rol del estudiante/posibles respuestas	Rol del profesor/devoluciones
Clase 1	<p>Inicio de la unidad:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Acogida.</li> <li>• Presentación del cuadernillo de trabajo y objetivos de la unidad.</li> <li>• Indicaciones de la forma de trabajo de la unidad.</li> </ul> <p>Página 1.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Escuchar atentamente al profesor.</li> <li>• Hacerse responsable de su material de trabajo.</li> <li>• Anotar fechas importantes de la unidad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Generar clima de clase adecuado.</li> <li>• Presentar los objetivos de trabajo.</li> <li>• Dar las indicaciones del trabajo con el cuadernillo y enfatizar en la responsabilidad con el cuadernillo de trabajo.</li> <li>• Asegurarse que el estudiante complete los datos solicitados en la portada.</li> </ul>
Clase 1	<p>Inicio del cuadernillo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Concepto de función mediante metáfora de máquina lavadora.</li> </ul> <p>Observa la imagen y responde</p>  <p>¿Cuál es la función de ésta máquina?</p> <p>¿Qué ocurre con un vestido sucio si lo meto a la lavadora?</p> <p>Luego se formaliza el concepto función. Y se pregunta:</p> <p>¿Qué otra máquina</p>	<p>El estudiante observa la imagen y luego contesta las preguntas. Posteriormente responde desde su experiencia.</p> <p>Se espera que el estudiante identifique la máquina lavadora y luego de otro ejemplo.</p> <p><b>Respuesta experta:</b> La función es lavar la ropa. El vestido sale limpio o lavado. Luego dar un ejemplo de otra máquina (abierto).</p> <p><b>Posibles respuestas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lavar ropa</li> <li>• Secar ropa</li> <li>• No sé</li> </ul> <p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Describir elementos de la máquina (botones, puerta, etc.) en caso de no reconocerla.</li> <li>• Preguntar ¿qué hace esta máquina?</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• No reconocer qué tipo de máquina es.</li> </ul>	<p>El profesor observa al estudiante y va mediando en caso de ser necesario. Además se asegura de que el estudiante escriba correctamente las palabras que quiere expresar.</p> <p>Ante el caso que el estudiante no reconozca la máquina, puede guiar con las siguientes preguntas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Sabes qué hacen en tu casa con la ropa sucia?</li> <li>• ¿Conoces las lavadoras?</li> <li>• ¿Qué hacen las lavadoras?</li> </ul>

	<p>conoces que transforme lo que pones, y sale diferente?</p> <p>¿Cuál es la función de esa máquina?</p> <p>Páginas 2-3.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No saber qué significa la palabra función en su uso coloquial.</li> <li>Confundir la máquina con una secadora y no relacionar la pregunta 1 con la 2.</li> </ul> <p><b>Posibles Errores</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pensar que es una secadora.</li> </ul>	<p>Por otro lado, si un estudiante la confunde con una secadora, se le puede decir que es otra máquina, parecida a la secadora y darle un tiempo para pensar.</p>
<p>Clase 1</p>	<p>Funciones en la matemática (tabla de valores y metáfora de la máquina).</p>  <p>Tabla 1: ¿Qué transformación hace la máquina al número que entra?</p> <p>Si entra un número 10 ¿qué número sale?</p> <p>Tabla 2: ¿Qué transformación hace la máquina al número que entra?</p> <p>Si entra un número 5 ¿qué número sale?</p> <p>Si entra un número 32 ¿qué número sale?</p> <p>Tabla 3: En ésta máquina, la</p>	<p>Se espera que el estudiante asocie la metáfora de la máquina con las funciones representadas en una tabla de valores, vinculando a cada elemento que “entra” un elemento que “sale” y conjeturando acerca de cuál es la función de la máquina de forma verbal, para luego formalizar el conjunto de partida como <math>x</math>, el conjunto de llegada como <math>y</math>; además de la forma algebraica de representarla.</p> <p><b>Respuesta experta:</b> Cada una de las tablas expuestas, representa a una función afín.</p> <p>Tabla 1: - Sumar uno - 11</p> <p>Tabla 2: - Restar uno - 4 - 31</p> <p>Tabla 3: - 42</p> <p><b>Posibles respuestas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>La respuesta experta.</li> <li>No responder correctamente.</li> </ul> <p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En cada tabla, completar en la columna <math>x</math> la cantidad a sumar o restar para obtener el número de</li> </ul>	<p>El docente va mediando, asegurándose que las instrucciones se entiendan y propiciando el cálculo mental.</p> <p>-Posibles devoluciones durante las 3 actividades según las dificultades y errores explicitados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Observa el número de la columna <math>x</math> y luego como sale en la columna <math>y</math>, el número que sale ¿es mayor o menor?, la máquina ¿suma o resta una cantidad?</li> <li>¿Qué número debo sumar (o restar, según el caso) para obtener el valor de <math>y</math>?</li> <li>Comprueba el número que sale obtenido con ayuda de la calculadora</li> </ul> <p>En la tabla 3, el docente realiza en</p>

	<p>función es “sumar 2”</p> <p>Matemáticamente se escribe así “<math>x+2</math>”</p> <p>Si entra un número 40 ¿cuál es el resultado de la función?</p> <p>Páginas 4-6</p>	<p>la columna <math>y</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Agregar en la tabla de valores los números que “entran” solicitados.</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El estudiante no es capaz de identificar la operación matemática aplicada sobre <math>x</math> para obtener <math>y</math>.</li> </ul> <p><b>Posibles Errores:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentran la regla general, pero se equivoca en el tratamiento para calcular el valor de la variable <math>y</math>.</li> </ul>	<p>conjunto al estudiante una síntesis de los elementos utilizados, enfatizando en que el elemento de entrada será la variable <math>x</math> y el de salida la variable <math>y</math>. Además de escribir la función de forma verbal (regla) y algebraicamente (ejemplo: <math>x+2</math>)</p>												
<p>Clases 2 y 3</p>	<p>Representar funciones en el registro verbal, tabular y algebraico.</p> <p>Páginas 7-9.</p>	<p><b>Actividad 1: recordar lo visto en la clase anterior</b></p> <p><b>Respuesta experta:</b></p> <p>Actividad 1</p> <p>Observa la tabla. Luego descubre la función y escríbela de</p> <table border="1" data-bbox="672 1020 893 1245"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>y</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>19</td> <td>22</td> </tr> <tr> <td>23</td> <td>26</td> </tr> </tbody> </table> <p>Función es “sumar 3”</p> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x + 3</math></p> <p><b>Posibles respuestas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar que en el registro tabular se debe sumar, pero no especificar la cantidad.</li> <li>• Identificar en el registro tabular la función y expresarla verbalmente, pero no en el registro matemático (algebraico).</li> </ul>	$x$	$y$	10	13	14	17	15	18	19	22	23	26	<p>Actividad 1: El docente verifica que el estudiante comprende el enunciado, luego realiza mediación en caso de ser necesario.</p> <p>Finalmente revisa el desarrollo de la actividad y corrige el trabajo realizado.</p> <p>En caso que el estudiante identifique que debe sumar, pero no la cantidad específica, el profesor puede realizar las siguientes devoluciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si tienes que sumar una cantidad, ¿puedes calcular cuánto debes sumar a cada valor de <math>x</math> para obtener el valor de <math>y</math>? Si el estudiante dice</li> </ul>
$x$	$y$														
10	13														
14	17														
15	18														
19	22														
23	26														

		<p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>En cada valor de <math>x</math>, contar con los dedos cuánto falta para llegar al valor de <math>y</math>, para comprobar que sea la misma regla en cada caso.</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>No logra identificar si se debe sumar o restar una cantidad.</li> <li>No identificar cuál es la cantidad a sumar en la tabla de valores.</li> </ul> <p><b>Posibles Errores:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>No calcular correctamente la cantidad a sumar a cada valor de <math>x</math> para obtener el valor de <math>y</math>.</li> </ul> <p><b>Actividad 2: Dada la función de forma verbal, completar tabla de valores y determinar la función en el registro matemático.</b></p> <p><b>Respuesta experta:</b></p> <p>a) Sumar 7:</p> <table border="1" data-bbox="652 1066 1021 1320"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>y</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>11</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>27</td> <td>34</td> </tr> </tbody> </table> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x+7</math></p> <p>b) Restar 3:</p> <table border="1" data-bbox="652 1488 1021 1743"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>y</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>8</td> </tr> </tbody> </table> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x-3</math></p>	$x$	$y$	2	9	4	11	5	12	13	20	27	34	$x$	$y$	4	1	5	2	7	4	9	6	11	8	<p>que no, entonces se le puede solicitar que cuente con los dedos cuánto falta para llegar de 10 a 13, luego verificar que se cumpla en los otros casos.</p> <p>Actividad 2: El docente verifica que el estudiante comprende el enunciado, luego realiza mediación en caso de ser necesario. Finalmente revisa el desarrollo de las actividades y corrige el trabajo realizado.</p> <p>En las actividades propuestas la forma verbal de la función es la información con la que cuenta el estudiante para realizar el tratamiento en la tabla de valores y luego generalizar al registro algebraico. En el caso de los ejercicios c y d, es posible que se requiera de mayor mediación, puesto que no corresponden a adiciones o sustracciones (ejemplos trabajados anteriormente). Si el estudiante no</p>
$x$	$y$																										
2	9																										
4	11																										
5	12																										
13	20																										
27	34																										
$x$	$y$																										
4	1																										
5	2																										
7	4																										
9	6																										
11	8																										

		<p>c) Multiplicar por 2:</p> <table border="1" data-bbox="654 222 1023 476"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table> <p>Matemáticamente se escribe: <math>2x</math></p> <p>d) Elevar al cuadrado:</p> <table border="1" data-bbox="654 644 1023 898"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>36</td> </tr> </tbody> </table> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x^2</math></p> <p><b>Posibles respuestas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante realiza un tratamiento correcto en cada tabla de valores, calculando correctamente el valor de la variable y, según los valores de x. Lee correctamente la función en su forma verbal. En el registro algebraico el estudiante no es capaz de representar la función.</li> </ul> <p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Con ayuda de una calculadora el estudiante podría realizar la operación indicada sobre el valor de x, para obtener el valor de y, también puede utilizar la calculadora para comprobar sus propios cálculos.</li> <li>Es muy probable que algunos estudiantes tengan problemas para representar la función en el registro algebraico, puesto que es más abstracto, en ese caso se sugiere que en la columna de la variable y, escriban la operación que los lleva a obtener el resultado, de modo que luego puedan generalizar.</li> </ul>	x	y	2	4	4	8	6	12	8	16	10	20	x	y	2	4	3	9	4	16	5	25	6	36	<p>conoce o recuerda la operación “multiplicar por 2” o “elevar al cuadrado”, se le puede explicar en qué consiste y responder con ayuda de una calculadora.</p>
x	y																										
2	4																										
4	8																										
6	12																										
8	16																										
10	20																										
x	y																										
2	4																										
3	9																										
4	16																										
5	25																										
6	36																										

		<p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En la tabla 3, dado que el primer valor de la variable <math>x</math> es 2, y el de la variable <math>y</math> es 4, algunos estudiantes podrían confundir elevar al cuadrado con obtener el doble.</li> <li>• No vincular la generalización de la función con su representación algebraica.</li> <li>• Comprender el tratamiento a realizar en cada tabla, pero errar en el cálculo.</li> </ul> <p><b>Posibles Errores</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Considerar <math>x^2 = 2x</math></li> <li>• Escribir erróneamente la forma algebraica, aún teniendo la tabla de forma correcta.</li> </ul>	
Clases 4 y 5	<p>Actividad 3: Algunas funciones conocidas. a) Perímetro de un cuadrado. b) Área de un cuadrado. c) Volumen de un cubo.</p> <p>Páginas 10-14.</p>	<p>Se espera que el estudiante responda acerca de cómo se calcula cada uno de los casos propuestos, obteniendo la forma matemática, completando tabla de valores y reflexionando acerca de qué ocurre cuando el valor del lado o arista según el caso, aumenta de medida.</p> <p><b>Actividad 3:</b> <b>Respuesta experta:</b></p> <p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cómo se calcula el perímetro de un cuadrado?</li> </ul> <p>Sumando todos sus lados o sumando 4 veces el lado o multiplicando el valor del lado por 4.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Matemáticamente se escribe como: <math>x + x + x + x = 4x</math></li> </ul>	<p>Actividad 3:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- El docente recuerda junto al estudiante el concepto de perímetro de una figura plana, área de una figura plana y volumen de un cuerpo geométrico. Además se asegura que las preguntas se entiendan correctamente y realiza mediación en caso de ser necesario.</li> <li>- Se dará tiempo al estudiante para que complete la actividad de perímetro de forma autónoma, luego el docente retroalimentará el trabajo realizado. Lo mismo ocurrirá con la actividad de área y de volumen. Es importante que el</li> </ul>

- Completar tabla de valores

<b>X</b> <b>Lado</b> <b>(cm)</b>	<b>Y</b> <b>Perímetro</b>
2	8
3	12
7	28
12	48

- ¿Qué ocurre con el perímetro, cuando el lado del cuadrado aumenta de medida?

A medida que el lado del cuadrado aumenta, el perímetro también aumenta de medida (directamente proporcionales)

b)

- ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado?

Multiplicando base por altura o multiplicando lado por lado.

- Matemáticamente se escribe como:  $x \cdot x = x^2$
- Completar tabla de valores

<b>X</b> <b>Lado (cm)</b>	<b>Y</b> <b>Área</b>
2	4
3	9
4	16
5	25

docente retroalimente cada actividad antes de pasar a la siguiente, para evitar que en caso de incurrir en error, se repita en las otras actividades.

- ¿Qué ocurre con la superficie del cuadrado, cuando su lado aumenta de medida?

A medida que el lado del cuadrado aumenta, el área también aumenta de medida.

c)

- ¿Cómo se calcula el volumen de un cubo?

Multiplicando largo por ancho por alto o elevando su arista a 3.

- Matemáticamente se escribe como:  $x \cdot x \cdot x = x^3$

- Completar tabla de valores

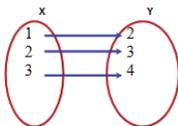
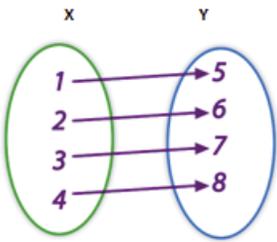
<b>X</b> <b>Lado</b> <b>(cm)</b>	<b>Y</b> <b>Volumen</b>
2	8
3	27
4	64
5	125

- ¿Qué ocurre con el volumen del cubo, cuando su lado aumenta de medida?

A medida que el lado del cuadrado aumenta, el volumen también aumenta de medida.

**Posibles respuestas:**

- La respuesta experta.
- Completar las tablas de valores, pero no responder correctamente las preguntas que relacionan el lado o arista con el perímetro, área o volumen.

		<p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dibujar distintos cuadrados aumentando el valor del lado, con el fin de hacer visible que el perímetro o área también aumenta.</li> <li>• Explicar qué es el perímetro y/o el área para luego avanzar con la tabla de valores.</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• No recordar cómo se determina el perímetro y/o área de un cuadrado o el volumen de un cubo.</li> </ul> <p><b>Posibles Errores:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Confundir elevar al cuadrado con multiplicar por 2.</li> <li>• Confundir elevar al cubo con multiplicar por 3.</li> </ul>	
<p>Clases 6, 7 y 8</p>	<p><b>Diagrama Sagital:</b> Las funciones también se pueden representar con un diagrama sagital. Ejemplo:</p>  <p>Diagrama Sagital Las funciones también se pueden representar con un diagrama sag Ejemplo:</p> <p>Función es "sumar uno" Matemáticamente se escribe como: <math>x+1</math></p> <p>Actividad 4: Observa el diagrama. Luego encuentra la función y escríbela de forma</p>	<p>En las actividades 4, 5 y 6 se debe completar el registro relacional de la función a partir de la función dada en forma verbal. Finalmente se debe escribir la generalización en la forma algebraica.</p> <p><b>Respuesta experta:</b> <b>Actividad 4:</b></p>  <p>La función es: <b>sumar cuatro</b> Matemáticamente se escribe como: <b><math>x+4</math></b></p>	<p>El docente explica al estudiante qué es un diagrama sagital y lo vincula con las representaciones de una función ya trabajadas. Por medio del ejemplo conecta el registro verbal, algebraico y relacional (diagrama sagital).</p> <p>En la actividad 4 y 5 el docente va guiando el trabajo del estudiante, comprobando que las instrucciones sean entendidas y fortaleciendo el trabajo autónomo.</p>

matemática.

Actividad 5:  
Observa el diagrama. Luego descubre la función y escríbela de forma matemática.

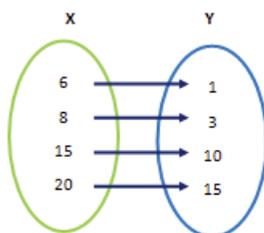
Actividad 6:  
Observa el diagrama. Luego descubre la función y escríbela de forma matemática.

Actividad 7:  
Observa la función en su forma verbal. Luego completa el diagrama y escríbela de forma matemática.

Actividad 8:  
Observa la función de forma matemática. Luego escríbela en palabras y completa el diagrama.

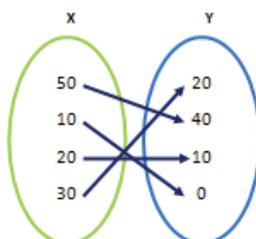
Páginas 14-20.

### Actividad 5:



La función es: **restar cinco**  
Matemáticamente se escribe como:  
 **$x - 5$**

### Actividad 6:



La función es: **restar diez**  
Matemáticamente se escribe como:  
 **$x - 10$**

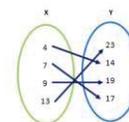
### Posibles respuestas:

- Respuesta experta.
- El estudiante en cada caso identifica la operación matemática “sumar” o “restar”, logra determinar la cantidad que se suma o resta, pero no convierte la función al registro algebraico.
- El estudiante en cada caso identifica la operación matemática “sumar” o “restar”, pero no logra determinar la cantidad que se suma o resta.
- El estudiante en cada caso no logra identificar la operación matemática definida en el diagrama sagital.

Antes de la actividad 6, el docente se asegura de la comprensión del diagrama sagital, haciendo énfasis en que indica la relación entre los elementos del conjunto de partida y del conjunto de llegada. Para ello se dispone de un ejemplo que indica que en ocasiones los elementos no estarán en orden.



Observa el siguiente diagrama sagital. Fíjate muy bien en las flechas.



Función es: \_\_\_\_\_

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Este ejemplo lo realizará el profesor en conjunto con el estudiante.

**Estrategias:**

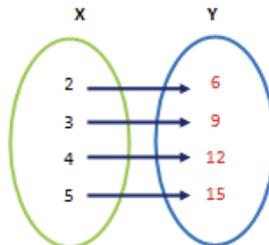
- Recordar que la variable inicial  $x$ , es a quien se le aplica la función, por lo tanto la variable  $y$  se define en función de  $x$ .
- Contar en cada caso de forma manual o con calculadora la diferencia entre el valor de la variable  $x$  y su respectivo valor de  $y$ .

**Posibles Dificultades:**

- No comprender el diagrama sagital.
- No comprender el diagrama sagital cuando las flechas que relacionan  $x$  con  $y$  están cruzadas.

**Posibles Errores:**

- Escribir de forma incorrecta la forma algebraica de la función.

**Actividad 7: La función es “multiplicar por 3”**

Matemáticamente se escribe como:

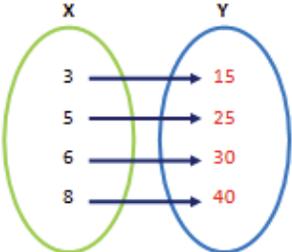
$$3 \cdot x$$

Si entra un número 8 ¿cuál es el resultado?

$$y = 24$$

**Posibles respuestas:**

- Respuesta experta.
- El estudiante convierte del registro verbal al relacional correctamente, pero no logra convertir al registro algebraico.

		<ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante no logra convertir del registro verbal al relacional, pero sí convierte de verbal a algebraico.</li> </ul> <p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Recordar qué significa multiplicar; si la dificultad persiste se puede transformar a la suma <math>x + x + x</math>.</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Comprende correctamente la operación multiplicar por tres, pero al convertir al registro matemático confunde con la forma algebraica <math>x^3</math></li> </ul> <p><b>Posibles Errores:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Escribir de forma incorrecta la forma algebraica de la función.</li> </ul> <p><b>Actividad 8:</b>  <b>Matemáticamente la función es:</b>  <math>5 \cdot x</math>      La función es: <b>multiplicar por cinco</b></p>  <p>Si entra un número 12 ¿cuál es el resultado?  <math>y = 60</math></p> <p><b>Posibles respuestas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Respuesta experta.</li> <li>El estudiante no logra convertir del registro algebraico al relacional por no comprender cómo realizar una multiplicación, pero sí convierte de algebraico a verbal.</li> </ul>	<p>En la actividad 8, el docente debe acompañar al estudiante y verificar si conoce el tratamiento que debe hacer en el registro relacional (multiplicar por 5), en caso de ser una dificultad, se sugiere utilizar la calculadora como herramienta de ayuda.</p> <p>Si en la forma algebraica el estudiante define de forma incorrecta la función, confundiendo <math>5x</math> con <math>x^5</math>:</p>
--	--	---	--

		<p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utilizar calculadora para realizar tratamiento en el registro relacional.</li> <li>• Recordar qué significa multiplicar, si la dificultad persiste se puede transformar a la suma <math>x + x + x + x + x</math>.</li> </ul> <p><b>Posibles Dificultades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende correctamente la operación multiplicar por cinco, pero al convertir al registro algebraico confunde con la forma algebraica <math>x^5</math></li> </ul> <p><b>Posibles Errores:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escribir de forma incorrecta la forma algebraica de la función.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cuánto es <math>5 \cdot 3</math>?, ahora con ayuda de la calculadora determina el valor de <math>3^5</math>, ¿es el mismo resultado?</li> <li>• ¿Cómo se expresa en forma matemática la acción de multiplicar?</li> </ul>
--	--	--	---

<p>Clases 9, 10 y 11</p>	<p><b>Aplicar lo aprendido:</b> ejercitación de registro verbal, algebraico, tabular y diagrama sagital.</p> <p>1) Completa las tablas según la función, luego escribe matemáticamente la función.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>a)</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td></td></tr> <tr><td>20</td><td></td></tr> <tr><td>25</td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Función es "multiplicar por dos"</p> <p>Matemáticamente: _____</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>c)</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Función es "multiplicar por cinco"</p> <p>Matemáticamente: _____</p> </div> </div> <p>2) Observa la tabla, descubre la función y escribe la matemáticamente.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>b)</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>22</td><td></td></tr> <tr><td>35</td><td></td></tr> <tr><td>41</td><td></td></tr> <tr><td>53</td><td></td></tr> <tr><td>89</td><td></td></tr> </tbody> </table> <p>Función es "restar 12"</p> <p>Matemáticamente: _____</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>a)</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>15</td></tr> <tr><td>13</td><td>18</td></tr> <tr><td>18</td><td>23</td></tr> </tbody> </table> <p>Función es "_____"</p> <p>Matemáticamente: _____</p> </div> </div>	x	y	5		10		15		20		25		x	y	2		4		6		8		10		x	y	22		35		41		53		89		x	y	1	6	2	7	10	15	13	18	18	23	<p>En este momento de la unidad, lo ideal es que el docente de espacio para que el estudiante realice un trabajo individual, con ayuda de calculadora si es necesario pero sin la intervención de terceros, salvo que el estudiante manifieste explícitamente tener alguna duda.</p>
x	y																																																	
5																																																		
10																																																		
15																																																		
20																																																		
25																																																		
x	y																																																	
2																																																		
4																																																		
6																																																		
8																																																		
10																																																		
x	y																																																	
22																																																		
35																																																		
41																																																		
53																																																		
89																																																		
x	y																																																	
1	6																																																	
2	7																																																	
10	15																																																	
13	18																																																	
18	23																																																	

b)

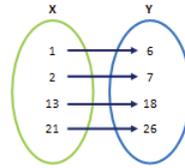
x	y
15	0
20	5
30	15
45	30
73	58

Función es "....."

Matemáticamente: .....

3) Observa los diagramas. Luego completa lo que falta

a)



Función es "....."

Matemáticamente: .....

Si entro un número 92 ¿cuál es el resultado?

\_\_\_\_\_

c)

x	y
2	12
3	18
4	24
10	60
20	120

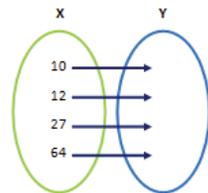
Función es "....."

Matemáticamente: .....

b)

Matemáticamente:  $X - 6$

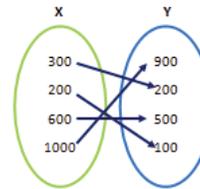
Función es "....."



Si entro un número 15 ¿cuál es el resultado?

\_\_\_\_\_

c)



Función es "....."

Matemáticamente se escribe como: .....

Si entro el número 1834 ¿cuál es el resultado?

\_\_\_\_\_

4) Inventa dos funciones diferentes a los que aparecen en las preguntas anteriores. Completa la tabla, función y forma matemática.

a)

x	y
3	
4	
12	
15	
22	

Función es "....."

Matemáticamente: .....

b)

x	y
1	
6	
54	
66	
80	

Función es "....."

Matemáticamente: .....

En la actividad 4, se puede intencionar un trabajo colaborativo con algún compañero(a) de curso, en donde deban inventar dos funciones y luego completar lo solicitado. Finalmente se sugiere realizar una corrección con el docente.

Clases  
12, 13 y  
14

## Representación gráfica en el plano cartesiano:

Se expone un ejemplo, con la función “sumar uno”, de forma verbal, matemática, tabular y relacional.

### Gráficos de funciones:

Hemos visto que las funciones se pueden representar:

- ✓ Matemáticamente
- ✓ Tablas
- ✓ Diagramas sagitales

Pero también se pueden representar gráficamente en el PLANO CARTESIANO.

Veamos un ejemplo:

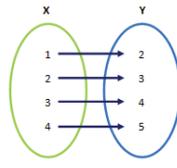
La función “sumar uno”

Matemáticamente se escribe como:  $X+1$

En tabla:

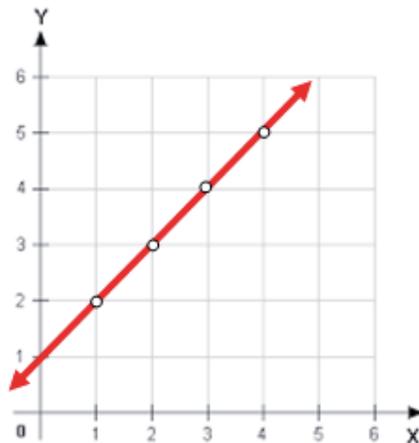
X	Y
1	2
2	3
3	4
4	5

En diagrama sagital



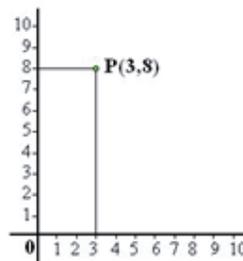
Luego se presenta la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Gráficamente la función “ $X + 1$ ”



Para graficar funciones, debes ubicar los puntos de tu tabla en el plano  $(X, Y)$ . Ejemplo:

X	Y
3	8



Luego debes unir todos los puntos

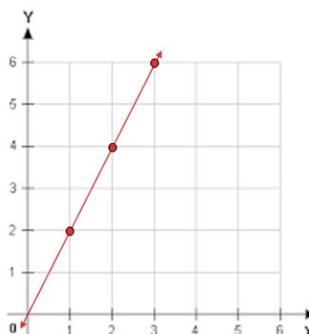
El docente, por medio del ejemplo propuesto, sintetiza lo trabajado hasta el momento, relacionando los distintos registros (verbal, algebraico, tabular y relacional).

Luego incorpora la forma gráfica mediante el uso del plano cartesiano, para ello explica cómo se relaciona la variable  $x$  con la variable  $y$ , vinculando cada par ordenado a la tabla de valores con un punto en el plano cartesiano.

## Ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Actividad 1: Observa la tabla. Luego descubre la función y grafica en el plano cartesiano.

x	y
1	2
2	4
3	6

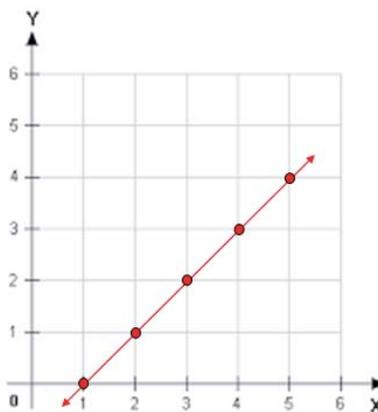


función es “multiplicar por dos”  
Matemáticamente se escribe:  $2x$

Actividad 2: Completa la tabla según la función indicada y luego grafica la función

Función es “Restar 1”

x	y
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4



Matemáticamente se escribe:  $x - 1$

Finalmente se pone en práctica todo lo aprendido durante la unidad con algunas funciones ya trabajadas anteriormente. En esta etapa el docente va guiando el trabajo del estudiante mediando la conversión de la función a la forma gráfica.

En caso de que el estudiante presente dificultad para ubicar los puntos en el plano cartesiano, se sugieren las siguientes preguntas:

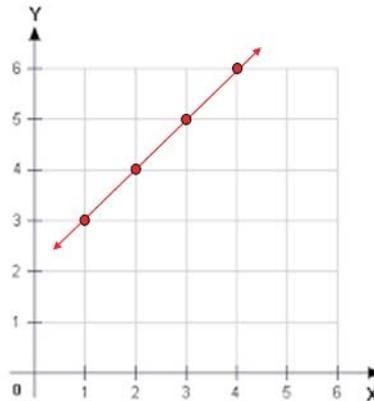
- ¿Qué representa el eje horizontal?
- ¿Qué representa el eje vertical?

Luego de la revisión y retroalimentación de las actividades, el docente felicita al estudiante por su progreso en la unidad y puede plantear logros y desafíos que debe seguir trabajando.

Actividad 3: Completa la tabla según la función indicada y luego descubre la forma matemática y su gráfica.

**Función es "Sumar 2"**

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6



**Matemáticamente se escribe:  $x+2$**

**Posibles respuestas:**

- Respuesta experta.
- El estudiante logra transitar entre los registros verbal, algebraico y tabular, pero no convierte al registro gráfico.

**Estrategias:**

- Utilizar calculadora para realizar tratamiento en el registro tabular.
- Recordar constantemente cómo ubicar puntos en el plano cartesiano.

**Posibles Dificultades:**

- No comprender que un punto corresponde al par ordenado  $(x,y)$ , valores disponibles en la tabla de valores.
- No comprender cómo ubicar el valor de  $x$  y el valor de  $y$  en el plano cartesiano.

**Posibles Errores:**

- Graficar en el plano cartesiano cada punto como el par ordenado  $(y,x)$ .

Páginas 29-32.

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El estudio de casos permite estudiar un tema claramente definido desde múltiples perspectivas y no atendiendo a una única variable, explorando de forma más profunda el fenómeno para obtener un mayor conocimiento y comprensión al respecto.

Dado el objetivo de realizar una propuesta de adecuación curricular para el objeto matemático funciones en el nivel de octavo básico desde la TRRS, se hizo preciso estudiar casos de estudiantes que requieren de adecuación curricular y que están incluidos en un sistema de educación regular. Para ello se consideraron 3 estudiantes de un colegio particular pagado de Santiago de Chile, que cursan algún nivel igual o superior a 8° básico. En todos los casos se trabajó la unidad de funciones mediante un cuadernillo preliminar que contempla los contenidos y habilidades priorizados para la propuesta y se tomaron notas de este proceso. Posteriormente se aplicó una evaluación de la unidad mediante una prueba escrita a cada estudiante.

La autora realiza su desempeño profesional en más de una institución. De todas maneras, para extremar el resguardo de la privacidad de las personas consideradas en el estudio ha evitado referirse en detalle al correspondiente diagnóstico médico de cada una de ellas

Los sujetos que participaron de este estudio de casos son tres estudiantes que se describen a continuación:

- Estudiante 1 (E1): Estudiante con parálisis cerebral leve. En matemática logra una aproximación favorable a los principales contenidos mínimos aplicando criterios de reducir complejidad, volumen y abstracción. Cumple con la realización de guías y trabajos, logrando desarrollar habilidades en el cálculo mental en ámbito de unidades y decenas. Logra operatoria con canje en sustracción y procede en multiplicación con apoyo de tabla pitagórica. Las principales dificultades se refieren a la desorientación en procedimientos y menor interiorización de axiomas.
- Estudiante 2 (E2): Estudiante con daño neurológico. En matemática logra interiorizar reglas y secuencias que operan al resolver fórmulas matemáticas. Manifiesta pensamiento episódico en relación a los aprendizajes que exigen mayor memoria procedimental. Presenta dificultad en la comprensión de enunciados verbales cuando se alejan de la experiencia cotidiana y cuando exigen abstracciones entre más de dos variables. Se evidencian algunos conceptos y procedimientos erróneos al resolver ejercicios matemáticos, lo que sumado a cierta inflexibilidad de pensamiento restan precisión y exactitud en resultados.

- Estudiante 3 (E3): Estudiante con Síndrome de Down. En matemática logra ámbito numérico hasta el 999, requiere mediación para la lectura de números. Las operaciones que maneja son suma y resta sin reserva, realiza operatoria de multiplicación y división con uso de calculadora. Resolución de problemas matemáticos correspondientes a un nivel inicial con elementos gráficos de apoyo visual.

Los criterios para la interpretación de los datos, organizados en dos categorías:

1. Tratamiento
  - 1.1 En registro tabular
  - 1.2 En registro organizacional
  - 1.2 En registro gráfico
  
2. Conversión de registros
  - 2.1 De registro verbal a tabular
  - 2.1 De registro verbal a algebraico
  - 2.3 De registro tabular o relacional a verbal
  - 2.4 De registro algebraico a verbal

A continuación se presentan los resultados obtenidos según los criterios fijados para el análisis.

**1. Tratamiento:** se observa el tratamiento realizado al interior de tres tipos de registros, considerando el análisis a priori expuesto anteriormente.

**1.1 En registro tabular:** cálculos al interior de las tablas de valores una vez comprendida la función.

E1	E2	E3
<p>Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.</p> <p>Se observa que cuando la función implica potencias, le es más difícil realizar el tratamiento, por lo que debe escribir todos los pasos para determinar el valor de y.</p>	<p>Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.</p> <p>Cabe señalar que no presenta dificultad en contextos de producto.</p>	<p>Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.</p> <p>Se observa que en las funciones donde debe sumar o restar utiliza estrategias de conteo con “palitos”</p> <p>Si la función implica potencias, debe escribir todos los pasos para determinar el valor de y, utilizando calculadora.</p>

<p>d)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>2<sup>2</sup>=4 ✓</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>3<sup>2</sup>=9 ✓</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>4<sup>2</sup>=16 ✓</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>5<sup>2</sup>=25 ✓</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>6<sup>2</sup>=36 ✓</td> </tr> </tbody> </table> <p>Función es "elevar al cuadrado"</p> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x^2</math> ✓</p>	x	y	2	2 <sup>2</sup> =4 ✓	3	3 <sup>2</sup> =9 ✓	4	4 <sup>2</sup> =16 ✓	5	5 <sup>2</sup> =25 ✓	6	6 <sup>2</sup> =36 ✓	<p>c)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>4 ✓</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>8 ✓</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>12 ✓</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>16 ✓</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20 ✓</td> </tr> </tbody> </table> <p>Función es "multiplicar por dos"</p> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x \cdot 2</math></p> <p>d)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>4 ✓</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>9 ✓</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>16 ✓</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>25 ✓</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>36 ✓</td> </tr> </tbody> </table> <p>Función es "elevar al cuadrado"</p>	x	y	2	4 ✓	4	8 ✓	6	12 ✓	8	16 ✓	10	20 ✓	x	y	2	4 ✓	3	9 ✓	4	16 ✓	5	25 ✓	6	36 ✓	<p>Actividad 2</p> <p>Completa la tabla según la función indicada y luego escribe la función de forma matemática.</p> <p>a)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>9 ✓</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>11 ✓</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>12 ✓</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>20 ✓</td> </tr> <tr> <td>27</td> <td>34 ✓</td> </tr> </tbody> </table> <p>Función es "Sumar 7"</p> <p>Matemáticamente se escribe: <math>x + 7</math> ✓</p>	x	y	2	9 ✓	4	11 ✓	5	12 ✓	13	20 ✓	27	34 ✓
x	y																																																	
2	2 <sup>2</sup> =4 ✓																																																	
3	3 <sup>2</sup> =9 ✓																																																	
4	4 <sup>2</sup> =16 ✓																																																	
5	5 <sup>2</sup> =25 ✓																																																	
6	6 <sup>2</sup> =36 ✓																																																	
x	y																																																	
2	4 ✓																																																	
4	8 ✓																																																	
6	12 ✓																																																	
8	16 ✓																																																	
10	20 ✓																																																	
x	y																																																	
2	4 ✓																																																	
3	9 ✓																																																	
4	16 ✓																																																	
5	25 ✓																																																	
6	36 ✓																																																	
x	y																																																	
2	9 ✓																																																	
4	11 ✓																																																	
5	12 ✓																																																	
13	20 ✓																																																	
27	34 ✓																																																	

**1.2 En registro organizacional:** cálculos al interior del diagrama sagital una vez comprendida la función, de modo que a cada valor de x se le asocie un único valor de y.

Los ejercicios propuestos no involucran potencias, solo adiciones, sustracciones y multiplicaciones.

E1	E2	E3
Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.	Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.	Determina correctamente los valores de la variable y dados los valores de la variable x.

**1.3 En registro gráfico:** ubicar puntos en el plano cartesiano para generar una representación gráfica de la función.

E1	E2	E3
Grafica en el plano cartesiano cada punto como el par ordenado (y,x). Una vez realizada la mediación del docente logra graficar correctamente cada punto.	Grafica correctamente en el plano cartesiano cada punto como el par ordenado (x,y)	Grafica correctamente en el plano cartesiano cada punto como el par ordenado (x,y).

Actividad 1

Observa la tabla. Luego descubre la función y grafica en el plano cartesiano.

x	y
1	2
2	4
3	6

Función es "MULTIPLICAR  $\times 2$ "

Matemáticamente se escribe:  $x \cdot 2$

Gráfica

Función es "multiplicado por 2"

Matemáticamente se escribe:  $x \cdot 2$

Gráfica

Actividad 2

Completa la tabla según la función indicada y luego grafica la función.

a)

x	y
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

Función es "Restar 1"

Matemáticamente se escribe:  $x - 1$

Gráfica:

**2. Conversión de registros:** se observan los cambios de registros en las representaciones de una función, considerando el análisis a priori expuesto anteriormente.

**2.1 De registro verbal a tabular:** dada la función en forma verbal, el estudiante es capaz de completar la tabla de valores, representando la función en su forma tabular.

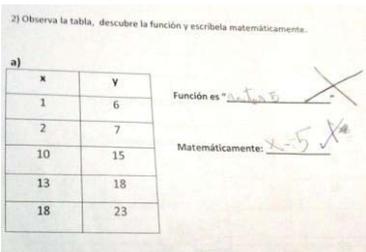
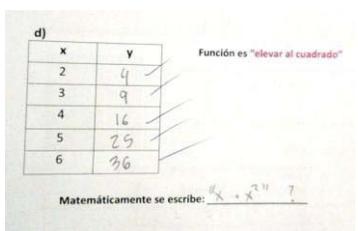
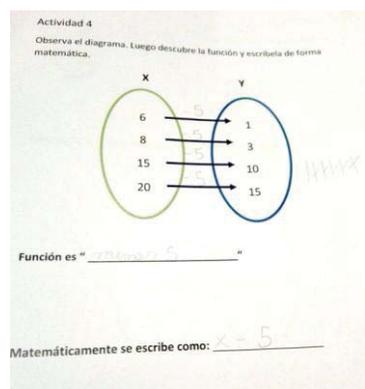
E1	E2	E3
Realiza correctamente el cambio de registro.	Realiza correctamente el cambio de registro.	Realiza correctamente el cambio de registro.

**2.2 De registro verbal a algebraico:** el estudiante es capaz de convertir la información acerca de la función de forma verbal a un registro algebraico, utilizando lenguaje algebraico.

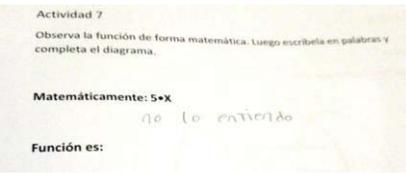
E1	E2	E3
Realiza correctamente el cambio de registro.	Realiza correctamente el cambio de registro.	Realiza correctamente el cambio de registro. Cabe señalar que para indicar multiplicación utiliza el signo de la calculadora ( $\times$ ), sin embargo no confunde el signo de multiplicación con la variable $x$ .

		<p>c)</p> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table> <p style="margin-left: 20px;">Función es "multiplicar por cinco"</p> <p style="margin-left: 20px;">Matemáticamente: <math>x \times 5</math></p>	x	y	2	10	4	20	6	30	8	40	10	50
x	y													
2	10													
4	20													
6	30													
8	40													
10	50													

**2.3 De registro tabular o sagital a verbal:** el estudiante observa la tabla de valores y es capaz de conjeturar acerca de la regla que se aplica a cada valor de la variable x, para obtener el valor de la variable y, comprueba su conjetura y expresa la función en el registro verbal.

E1	E2	E3
<p>Generalmente realiza correctamente la conversión entre el registro tabular y el verbal.</p> <p>En algunas ocasiones confunde el orden de las variables y expresa erróneamente la forma verbal y algebraica.</p> 	<p>Generalmente realiza correctamente la conversión entre el registro tabular y el verbal.</p> <p>Cuando la función implica el desarrollo de potencias no logra expresar correctamente la forma algebraica.</p> 	<p>Le cuesta conjeturar acerca de la regla que define la función. Necesita de mediación para lograrlo.</p> <p>Las sugerencias al docente descritas en el análisis a priori realizado son insuficientes en algunas ocasiones, dado que pese a las devoluciones el estudiante no logra identificar la regla.</p> 

**2.4 De registro algebraico a verbal:** dada la forma algebraica de una función, el estudiante convierte a registro verbal la expresión algebraica.

E1	E2	E3
Realiza correctamente el cambio de registro.	<p>Realiza correctamente el cambio de registro cuando la expresión algebraica involucra adición y sustracción. En caso de representar un producto se confunde.</p> 	Realiza correctamente el cambio de registro.

## Resultados

Luego de realizar el análisis de las producciones de los estudiantes desde la TRRS, según la propuesta de adecuación curricular que se ha establecido, considerando una adecuación desde el currículo escolar del nivel de 8° grado, se puede dar cuenta de los siguientes aspectos:

- Con respecto a los objetivos propuestos por el currículo escolar, se observa que los priorizados en la propuesta de adecuación curricular son pertinentes, ya que son alcanzables por los estudiantes y a la vez desafiantes, entregando posibilidades reales de aprendizaje. La propuesta trabajada es una primera aproximación al trabajo con funciones en la etapa escolar.
- Al trabajar las funciones en contextos conocidos por los estudiantes (área y perímetro de cuadrados y volumen del cubo), se observa poco nivel de logro, genera confusión el trabajo con potencias en la representación algebraica de las funciones, por lo que se debe reformular la forma de presentación de la resolución de problemas.

- Los tres estudiantes que participaron del estudio de casos logran representar las funciones en forma verbal y en tablas de valores sin grandes dificultades, sin embargo el registro algebraico presenta mayores dificultades cuando se involucran productos o potencias. En el registro gráfico mediante el uso del plano cartesiano se logra el cambio de registro de tabular a gráfico; sin embargo, el cuadernillo contiene poca ejercitación de este ámbito, por lo que se sugiere trabajar en mayor profundidad este aspecto.
- La propuesta promueve el desarrollo de habilidades de conversión de registros, pero no se vincula directamente con la resolución de problemas de funciones.

## Consideraciones

Algunas modificaciones que se deben realizar sobre el cuadernillo de trabajo de la propuesta de adecuación curricular son:

- Sustituir el trabajo de funciones en contextos conocidos de perímetro y área de cuadrados y de volumen de cubo, por resolución de problemas que mediante los diversos registros trabajados se puedan abordar de forma efectiva.
- Evitar por el momento trabajar con funciones que involucren potencias para, en una primera instancia, fortalecer el trabajo con funciones lineales y afines.
- Profundizar en el trabajo de funciones con el plano cartesiano, con la finalidad de poder afianzar la conversión desde el registro tabular con el registro gráfico, vinculando la relación de dependencia entre las variables  $x$  e  $y$ .
- Incluir mediante la metáfora de la máquina, la identificación de la variable independiente y la dependiente, ampliando las relaciones de dependencias e incorporando la unicidad en el diagrama sagital.
- Antes del trabajo con tabla de valores, se debe significar el concepto de función con ayuda de diagramas sagitales que evidencien la relación de dependencia entre dos variables en contextos no matemáticos.
- La metáfora de la máquina es útil para introducir el concepto de función, sin embargo es necesario profundizar en la idea general de función.

## CONCLUSIONES

- Desde la TRRS de la didáctica de la matemática, se puede realizar una propuesta de adecuación curricular, puesto que considera aspectos relevantes relacionados con los aprendizajes de los estudiantes mediante los tratamientos y conversiones de registros que dan cuenta de las concepciones y comprensiones respecto del objeto matemático funciones. Para este contenido tal y como se indica en el currículo, unos de los objetivos de aprendizaje es el concepto de función por medio de metáforas y el trabajo con tablas de valores, plano cartesiano, diagramas sagitales y uso de expresiones algebraicas. Para los estudiantes con NEE es fundamental poder representar situaciones en más de un registro ya que parte de las adecuaciones de acceso son los distintos formatos en que se puede presentar la información, aportando a la consolidación de los aprendizajes.
- La propuesta de adecuación curricular en el contenido de funciones es un apoyo para los docentes y contribuye a que este contenido no se excluya del currículum para aquellos estudiantes que requieren de adecuación curricular, sino que se busque el logro de los objetivos de aprendizaje del programa de estudio de octavo básico, en el eje de álgebra para asegurar el tránsito en los siguientes niveles educativos.

Las siguientes conclusiones tienen un carácter más general y reflexivo respecto del tema:

- Se debe avanzar en la creación de orientaciones al docente respecto del trabajo con estudiantes con discapacidad intelectual, proponiendo ejemplos de adecuaciones curriculares y facilitando material que cada docente puede intervenir con el fin de personalizarlo según la necesidad. Entendiendo que es el docente de matemática el especialista a cargo y la persona idónea para proponer adecuaciones curriculares para los estudiantes que lo requieran, en colaboración con profesionales de otras áreas.
- Las escuelas de pedagogía deben tener la capacidad de revisar sus mallas de estudios y orientar la formación inicial de profesores en lo relativo a la diversidad educativa.

## REFERENCIAS

- Aznar, E. R. (01 de 07 de 2017). *Universidad de Granada*. Obtenido de <http://www.ugr.es/~eaznar/otros.htm>
- Caamaño E, C; Aravena D, M; (2007). *Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile..* Estudios Pedagógicos, XXXIII () 7-25. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=173514134001>
- Catalán D., Pérez B., Prieto C., Rupin P. (2017). *Texto del estudiante Matemática*. Santiago: SM.
- Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica*. Marsella: Aique.
- Decreto N° 83/2015. Aprueba criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con necesidades educativas especiales de Educación Parvularia y Educación Básica. Diario Oficial de la República de Chile. Santiago, 05 de febrero de 2015.
- Díaz, J. L. (2013). *El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones*. Obtenido de Cinvestav-IPN, México, D.F: [rt994http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el\\_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf](http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf)
- Duval, R. (2004). *Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Universidad del Valle, Colombia.
- Escribano, A y Martínez, A (2013), *Inclusión educativa y profesorado inclusivo*, Madrid: Narcea.
- Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Toronto, Canadá: Birkhauser Boston.
- Latorre A., Del Rincón D., Arnal J. *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona, España: Ediciones Experiencias.

- Ley N° 20.422. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 10 de febrero de 2010.
- Manghi, D., Julio, C., Conejeros, M. L., Donoso, E., Murillo, M. L., & Diaz, C. (2012). *El profesor de educación diferencial en Chile para el siglo XXI: Tránsito de paradigma en la formación profesional*. Páginas 46-71.
- Martínez Carazo, P C; (2006). *El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica*. *Pensamiento & Gestión*, (p) 165-193. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=64602005>
- Mena, A. (2002). *Elementos de matemáticas, 2*. Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Ministerio de Educación. (2013). *Currículum en Línea*. Recuperado el 10 de 10 de 2016, de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articulos-18976\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articulos-18976_programa.pdf)
- Ochoviet, C. (No 1 de Vol 8 de 2007). *De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas*. Obtenido de Revista digital Matemática, Educación e Internet.: [www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate](http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate).
- Stewart, I. (2007). *Historia de las Matemáticas en los Últimos 10.000 años*. Obtenido de Libros Maravillosos: [www.librosmaravillosos.com](http://www.librosmaravillosos.com)
- Ugalde, W (2014). *Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje*. Revista digital Matemática, Educación e Internet (<http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>). Vol 14, No 1. Septiembre – Febrero 2014.
- UNESCO/OREALC (2008). *Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe. Primer reporte de los resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo*. Santiago de Chile: Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe de la UNESCO, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación.

## ANEXOS

1. cuadernillo preliminar

# Unidad: "Funciones"

**Fernanda en ésta unidad aprenderás:**

- 1. Concepto de Función a través de metáforas**
- 2. Reconocer secuencias y patrones numéricos**
- 3. Diagrama Sagital**
- 4. Tabla de valores**
- 5. Forma algebraica de una función**
- 6. Funciones conocidas**
- 7. Gráficos de funciones**

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Profesora: \_\_\_\_\_

## Concepto de Función

Observa la imagen y responde



**¿Cuál es la función de ésta máquina?**

---

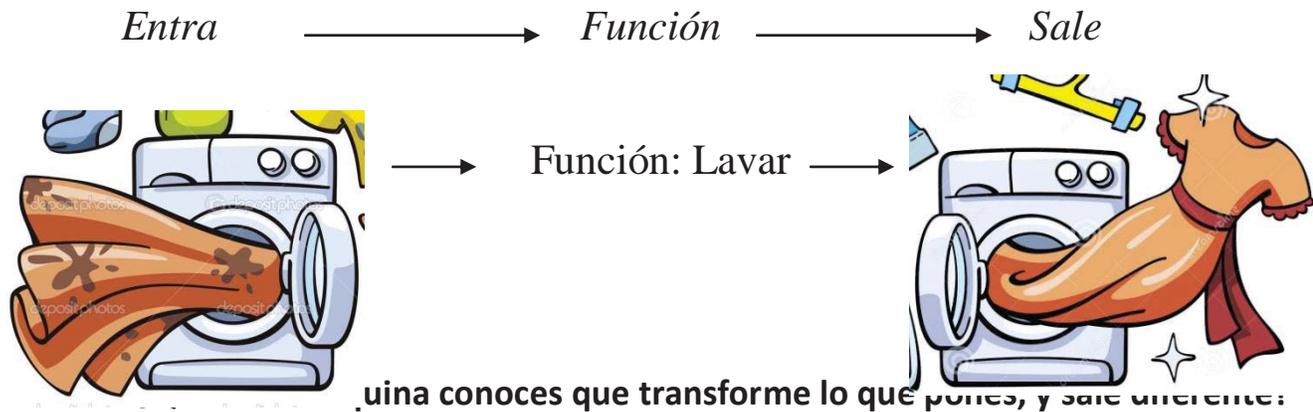
**¿Qué ocurre con un vestido sucio si lo meto a la lavadora?**

---

## Las funciones

*Las funciones son como máquinas, que tienen una fórmula, de modo que si un elemento ingresa a la función, luego sale transformado (diferente).*

*Por ejemplo en la lavadora, si entra un vestido sucio, la máquina hace “su función” de lavar y luego sale un vestido limpio.*



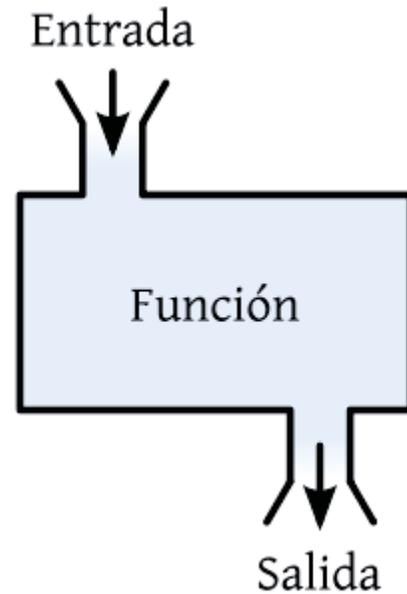
---

¿Cuál es la función de esa máquina?

---

En matemática, tenemos nuestras funciones. Existen muchas, pero debes observar qué número entra y qué número sale, si miras bien, podrás descubrir la función.

<b>Entra</b>	<b>Sale</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>7</b>



¿Qué transformación hace la máquina al número que entra?

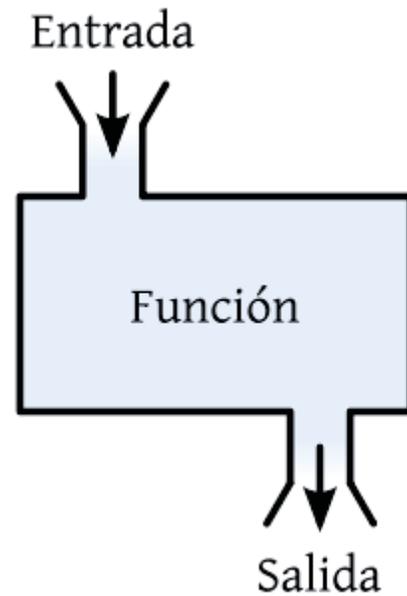
---

Si entra un número 10 ¿qué número sale?

---

Miremos esta otra máquina

<b>Entra</b>	<b>Sale</b>
<b>8</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>2</b>
<b>12</b>	<b>11</b>
<b>23</b>	<b>22</b>



¿Qué transformación hace la máquina al número que entra?

---

Si entra un número 5 ¿qué número sale?

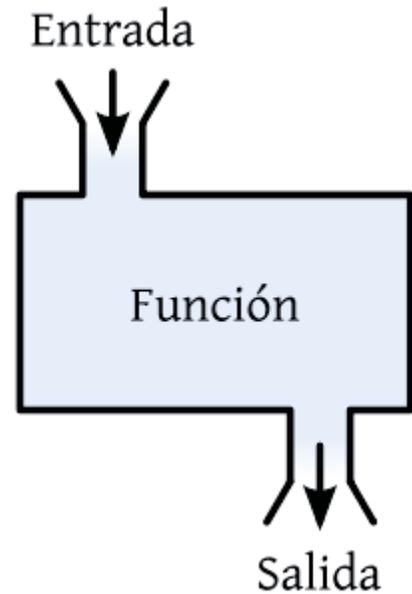
---

Si entra un número 32 ¿qué número sale?

---

A los números que entran, los llamaremos **X** y a los que salen **Y**  
Miremos esta otra máquina

<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>6</b>



En ésta máquina, la función es “**sumar 2**”  
**Matemáticamente se escribe así: “ $X + 2$ ”**

Al número que sale, se le llama resultado de la función

**Si entra un número 40 ¿cuál es el resultado de la función?**

Actividad 1

Observa la tabla. Luego descubre la función y escríbela de forma matemática.

x	y
10	13
14	17
15	18
19	22
23	26

Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

Actividad 2

Completa la tabla según la función indicada y luego escribe la función de forma matemática.

a)

x	y
2	
4	
5	
13	
27	

Función es “Sumar 7”

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

b)

x	y
4	
5	
7	
9	
11	

Función es "restar 3"

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

c)

x	y
2	
4	
6	
8	
10	

Función es "multiplicar por dos"

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

d)

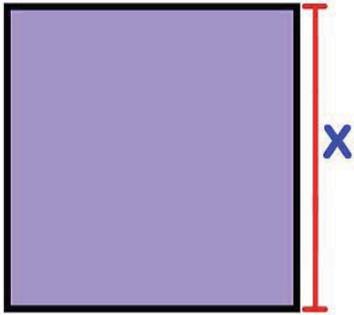
x	y
2	
3	
4	
5	
6	

Función es "elevar al cuadrado"

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

Actividad 3: Algunas funciones conocidas:

a) Perímetro de un cuadrado:



¿Cómo se calcula el perímetro de un cuadrado?

---

Para determinar el perímetro de un cuadrado de lado “x”, podríamos representarlo con la función “4 veces el lado”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Completa la siguiente tabla

x (cm) Lado	y Perímetro
2	
3	
7	
12	

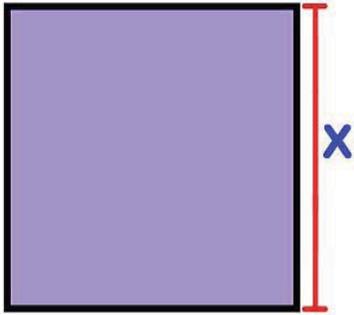
¿Qué ocurre con el perímetro, cuando el lado del cuadrado aumenta de medida?

---

---

---

b) Área de un cuadrado:



¿Cómo se calcula el área de un cuadrado?

---

Para determinar el área de un cuadrado de lado “x”, podríamos representarlo con la función “**x multiplicado por x**”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Completa la siguiente tabla para el área de un cuadrado

x (cm) Lado	y Área
2	
3	
4	
5	

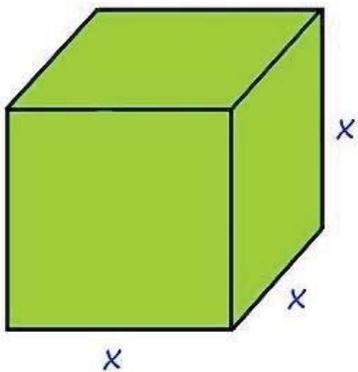
¿Qué ocurre con la superficie del cuadrado, cuando su lado aumenta de medida?

---

---

---

c) Volumen de un cubo:



¿Cómo se calcula el volumen de un cubo?

---

Para determinar el volumen de un cubo de lado "x", podríamos representarlo con la función "x elevado a 3"

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Completa la siguiente tabla para el volumen de un cubo

<b>x (cm)</b> <b>Lado</b>	<b>y</b> <b>Volumen</b>
2	
3	
4	
5	



**¿Qué ocurre con el volumen del cubo, cuando su lado aumenta de medida?**

---

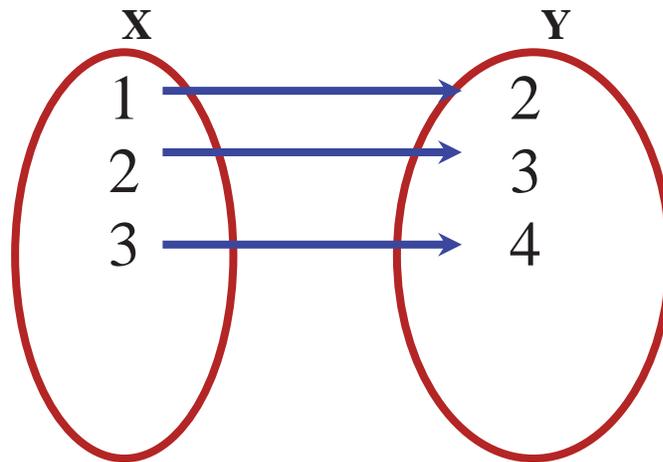
---

---

## Diagrama Sagital

Las funciones también se pueden representar con un diagrama sagital.

Ejemplo:

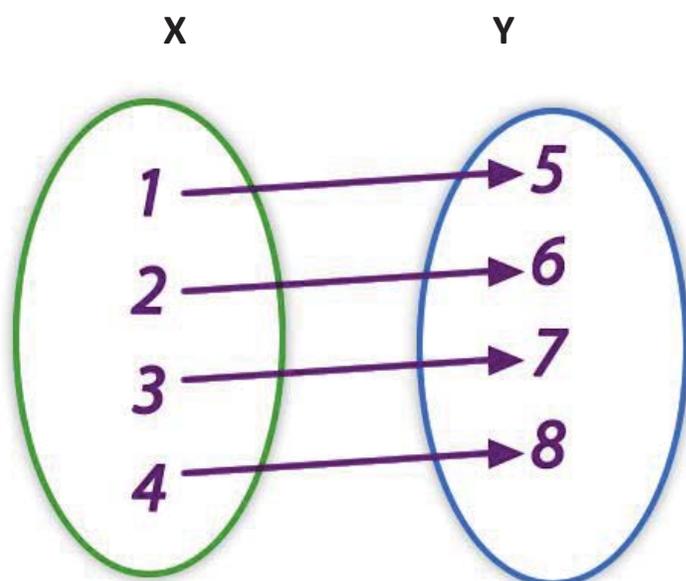


Función es “sumar uno”

Matemáticamente se escribe como:  $X+1$

### Actividad 4

Observa el diagrama. Luego encuentra la función y escríbela de forma matemática.

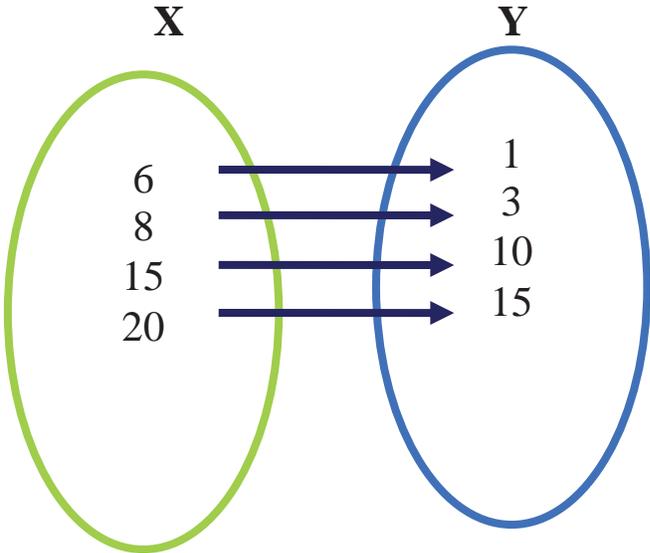


Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Actividad 5

Observa el diagrama. Luego descubre la función y escríbela de forma matemática.



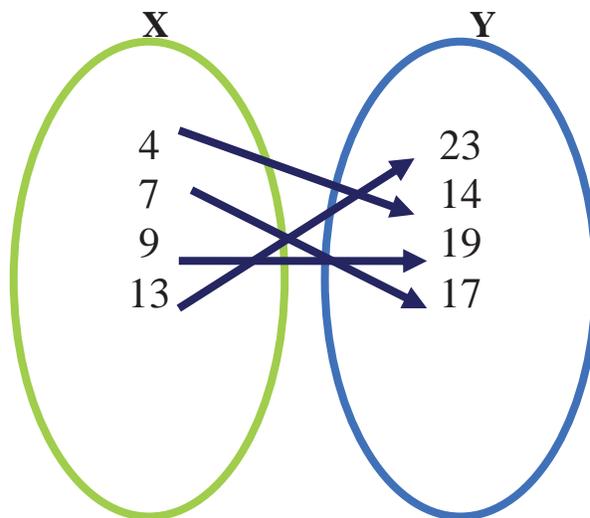
Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_



Las flechas indican el número que entra y el número que sale.  
**A veces pueden estar desordenadas.**

Observa el siguiente diagrama sagital, fíjate muy bien en las flechas.

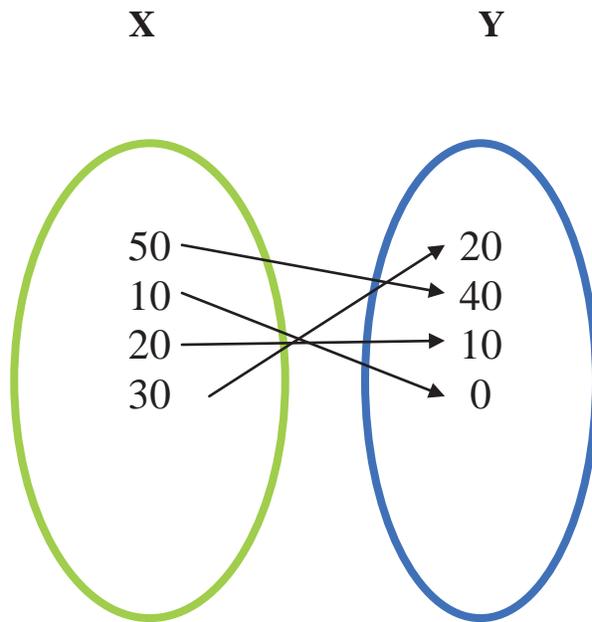


Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

### Actividad 6

Observa el diagrama. Luego encuentra la función y escríbela de forma matemática.



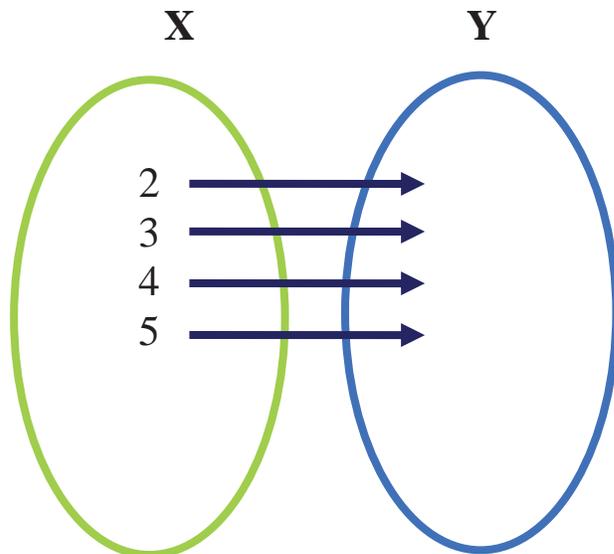
Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

### Actividad 7

Observa la función. Luego completa el diagrama y escríbela de forma matemática.

Función es “multiplicar por tres”



Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Si entra un número 8 ¿cuál es el resultado?

---

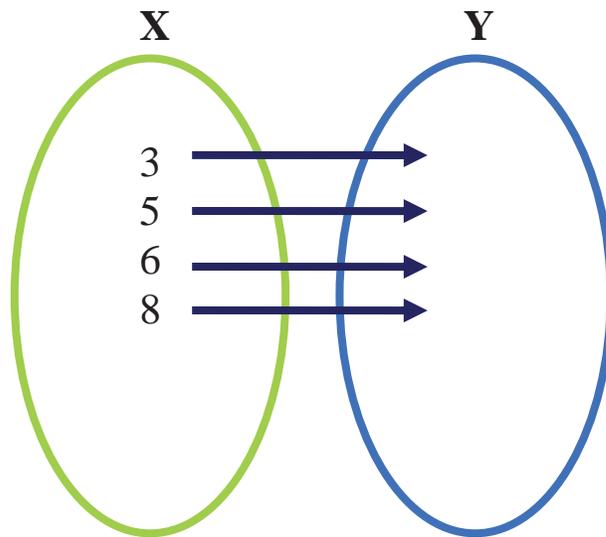
### Actividad 8

Observa la función de forma matemática. Luego escríbela en palabras y completa el diagrama.

**Matemáticamente:  $5 \cdot X$**

**Función es:**

“ \_\_\_\_\_ ”



**Si entra un número 12 ¿cuál es el resultado?**

## Aplicar lo aprendido

1) Completa las tablas según la función, luego escribe matemáticamente la función.

a)

x	y
5	
10	
15	
20	
25	

Función es “**multiplicar por dos**”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

b)

x	y
22	
35	
41	
53	
89	

Función es “**restar 12**”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

c)

x	y
2	
4	
6	
8	
10	

Función es “multiplicar por cinco”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

2) Observa la tabla, descubre la función y escríbela matemáticamente.

a)

x	y
1	6
2	7
10	15
13	18
18	23

Función es “\_\_\_\_\_”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

**b)**

x	y
15	0
20	5
30	15
45	30
73	58

**Función es “ \_\_\_\_\_ ”**

**Matemáticamente: \_\_\_\_\_**

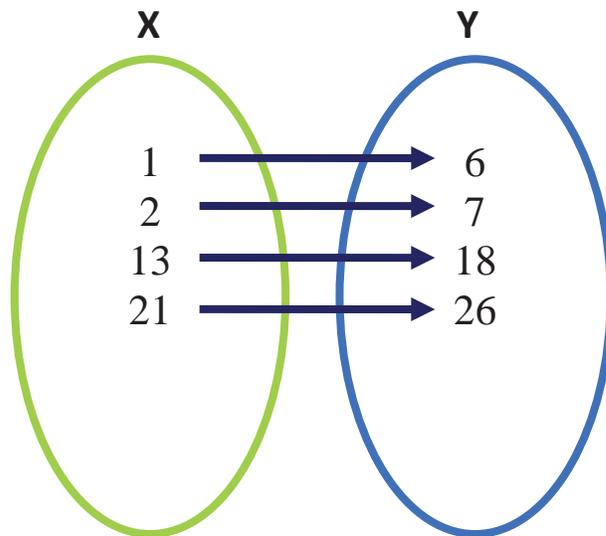
**c)**

x	y
2	12
3	18
4	24
10	60
20	120

**Función es “ \_\_\_\_\_ ”**

**Matemáticamente: \_\_\_\_\_**

3) Observa los diagramas. Luego completa lo que falta  
a)



Función es \_\_\_\_\_“

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

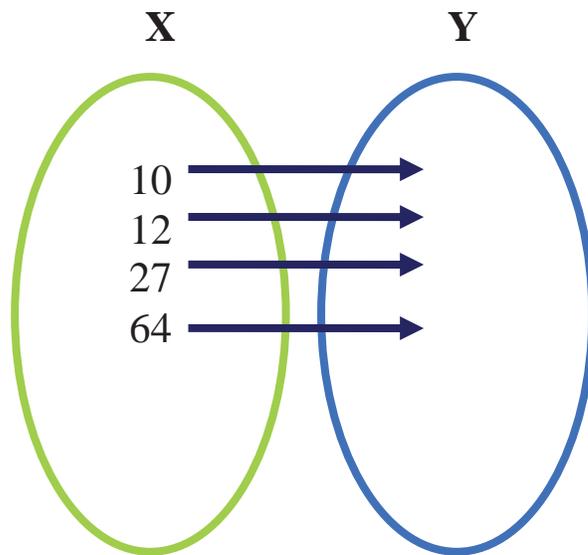
Si entra un número 92 ¿cuál es el resultado?

---

b)

Matemáticamente:  $X - 6$

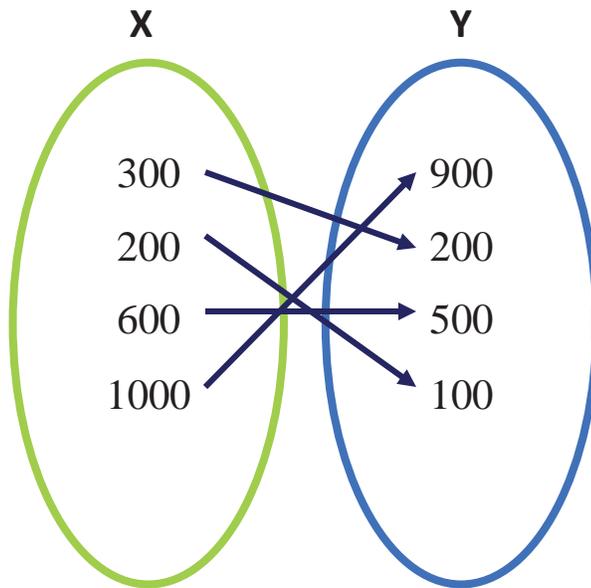
Función es “ \_\_\_\_\_ ”



Si entra un número 15 ¿cuál es el resultado?

---

c)



Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe como: \_\_\_\_\_

Si entra el número 1834 ¿cuál es el resultado?

---

4) Inventa dos funciones diferentes a los que aparecen en las preguntas anteriores. Completa la tabla, función y forma matemática.

a)

x	y
3	
4	
12	
15	
22	

Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

b)

x	y
1	
6	
54	
66	
80	

Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente: \_\_\_\_\_

## Gráficos de funciones:

Hemos visto que las funciones se pueden representar:

- ✓ Matemáticamente
- ✓ Tablas
- ✓ Diagramas sagitales

Pero también se pueden representar **gráficamente** en el **PLANO CARTESIANO**.

Veamos un ejemplo:

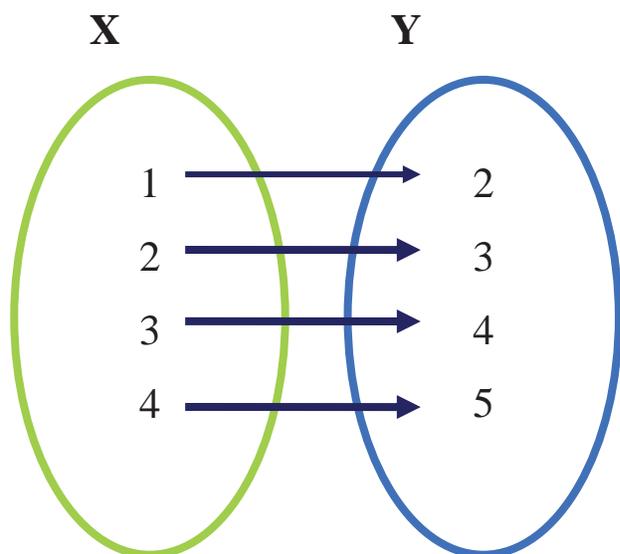
La función “**sumar uno**”

Matemáticamente se escribe como:  **$X+1$**

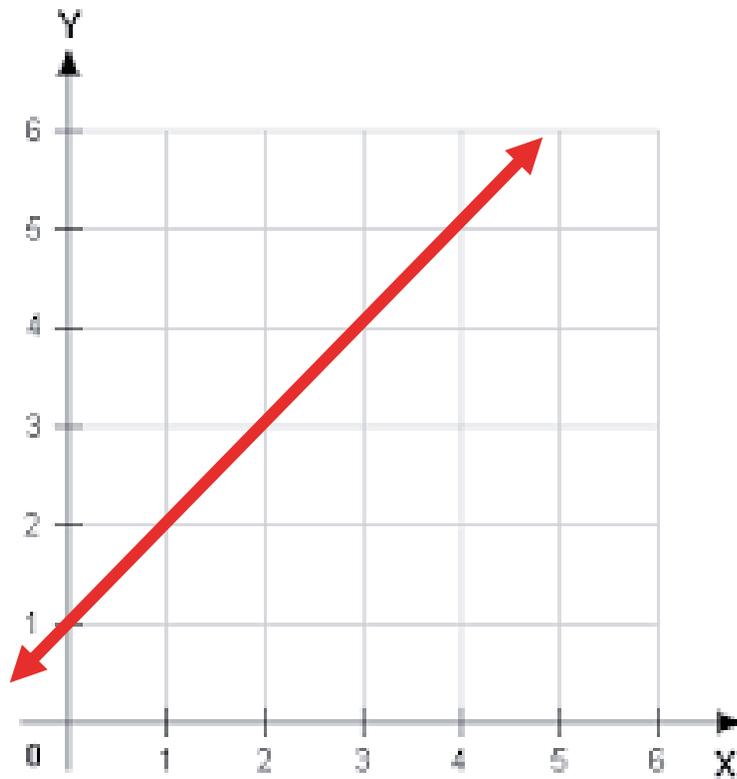
En tabla:

<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>5</b>

En diagrama sagital



## Gráficamente la función "X + 1"

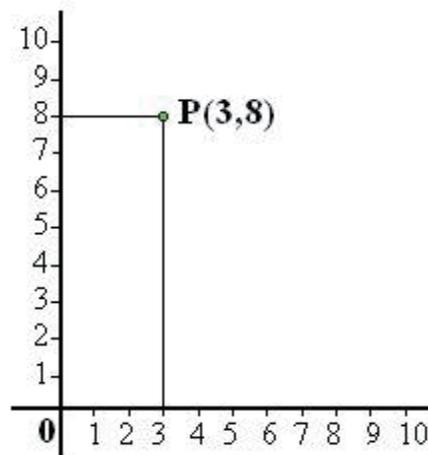


Para graficar funciones, debes ubicar los puntos de tu tabla en el plano (X,Y).

Ejemplo:

X	Y
3	8

Luego debes unir todos los puntos



### Actividad 1

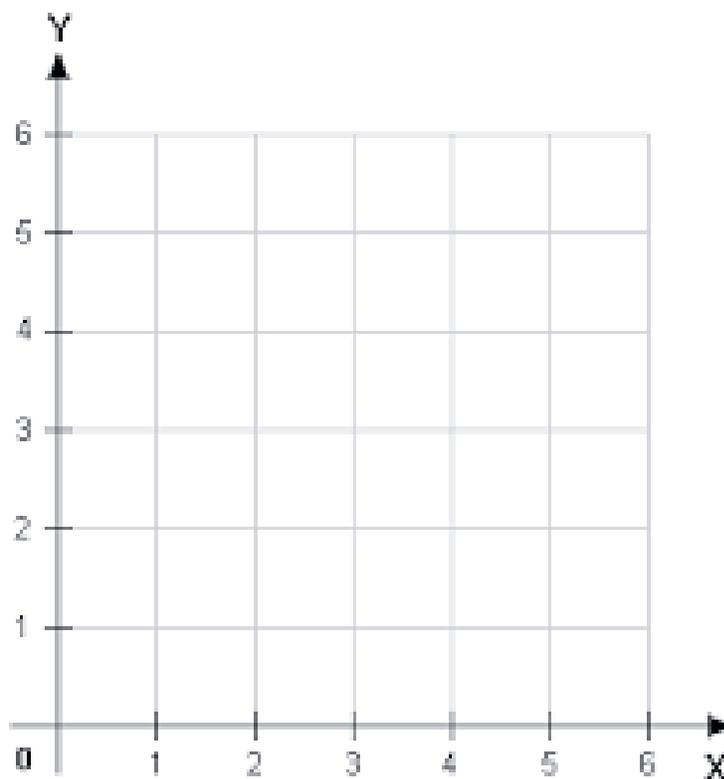
Observa la tabla. Luego descubre la función y grafica en el plano cartesiano.

x	y
1	2
2	4
3	6

Función es “ \_\_\_\_\_ ”

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

Gráfica



## Actividad 2

Completa la tabla según la función indicada y luego grafica la función

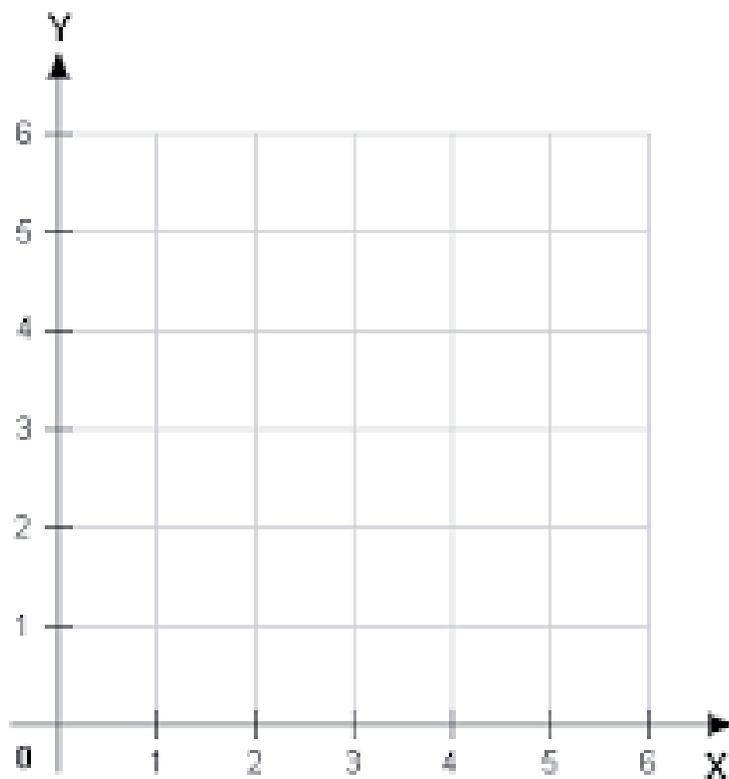
a)

x	y
1	
2	
3	
4	
5	

Función es "Restar 1"

Matemáticamente se escribe:  $X - 1$

Gráfica:



### Actividad 3

Completa la tabla según la función indicada y luego descubre la forma matemática y su gráfica.

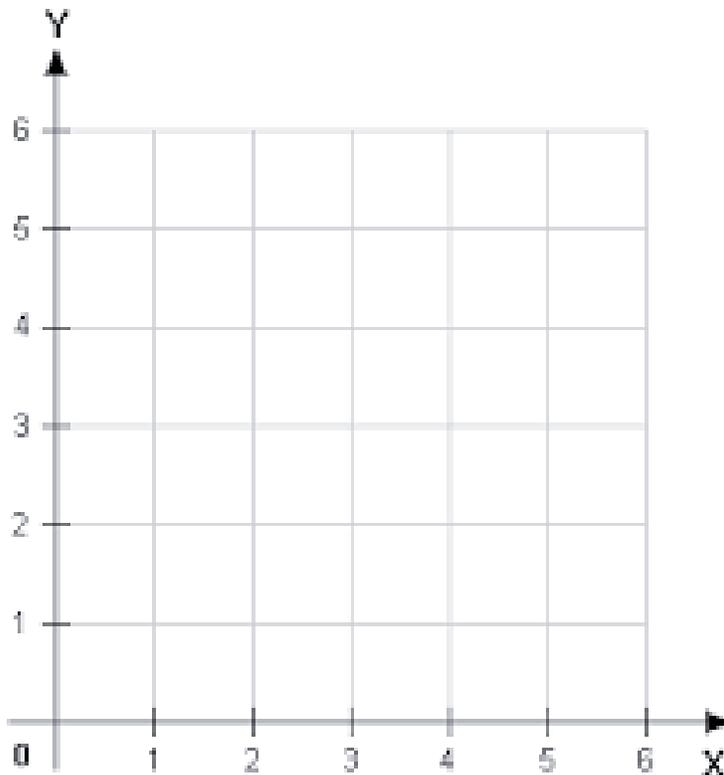
a)

x	y
1	
2	
3	
4	

Función es "Sumar 2"

Matemáticamente se escribe: \_\_\_\_\_

Gráfica:



¡Excelente trabajo!