PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO-CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Análisis del conjunto solución de un sistema de ecuaciones de 2x2 y 3x2 en $\mathbb{R}^2$, en distintos contextos, tanto el matemático como el cotidiano, desde la modelización

TRABAJO FINAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

NOMBRE ALUMNO
Luis Muñoz Hernández

PROFESORES GUÍA:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

SANTIAGO, DICIEMBRE DE 2017

Índice

INTRODUCCIÓN

Las dificultades que presenta el proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales son el principal motor de esta investigación. El escaso análisis del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) por parte de los estudiantes, la poca variabilidad existente en las propuestas pedagógicas gubernamentales y las estrategias pedagógicas utilizadas por los docentes, son algunos de los aspectos que se deben mejorar a nivel secundario para que esto no repercuta en la formación profesional de los estudiantes.

La Teoría de situaciones didácticas propone que, en el proceso de enseñanza, se deben buscar las condiciones para la construcción del conocimiento, siendo este a través del tránsito de los estudiantes por sus distintas fases, culminando esta construcción en una etapa donde el profesor formaliza el contenido.

La investigación tiene como objetivo la creación de una situación adidáctica, la cual genere las condiciones apropiadas para facilitar el proceso de enseñanza de los SEL, por lo que la propuesta que se expondrá en este documento, junto con ser innovadora, pretende aportar al estudiantes herramientas que le permitan superar las dificultades presentes en la enseñanza del objeto matemático a estudiar.

Lo expuesto anteriormente se pretende llevar a cabo a través de tres clases, creadas a partir de las dificultades detectados en la literatura y en un Estudio de Clases realizado a estudiantes de Tercero y Cuarto año de enseñanza secundaria. El documento presentará el estudio del arte y un recorrido epistemológico del objeto matemático, así como el barrido curricular de este mismo en el contexto escolar, mostrando la distancia entre los saberes, para posteriormente detallar el diseño de una clase basada en la modelización a través de una situación adidáctica, con el fin de que esta ayude a que el proceso de enseñanza-aprendizaje cumpla con los objetivos propuestos.

Por su parte, la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en Chile, se ha centrado en los diferentes métodos algebraicos de resolución (sustitución, igualación y reducción), evidenciado en los textos de estudios que son distribuidos por el Ministerio de Educación, los cuales enfatizan sus actividades en dichos métodos, haciendo así exclusiva la enseñanza de sistemas de ecuaciones en aquellos que poseen dos ecuaciones y dos incógnitas.

La influencia que tienen los textos ministeriales en la labor docente es muy potente, ya que la mayoría de los profesores se basa en estos para planificar sus clases, teniendo como argumento que los textos son la forma en que los alumnos y apoderados conocen el programa, sirviendo así como guía para el desarrollo del currículo. Es por esto que, en una cantidad importante de casos, la enseñanza del docente también se centra en los métodos de resolución, por lo que a su vez el aprendizaje de los estudiantes se ve limitado a técnicas y aplicaciones, lo cual hace que el análisis del contenido pierda relevancia en el aprendizaje (Berté, 1999).

El Ministerio de Educación, en la nueva propuesta de Bases Curriculares para 3° y 4° año de enseñanza media (MINEDUC, 2014), intenta modificar el enfoque resolutivo o algorítmico de los sistemas de ecuaciones, planteando que lo fundamental es el desarrollo de la capacidad de análisis en la enseñanza de los SEL por lo que se debe enfatizar las diversas representaciones por sobre las resoluciones, algo que dista mucho de lo expresado en el párrafo anterior.

En general, en la enseñanza media, existe un escaso análisis del conjunto solución de un sistema y poca variabilidad en la cantidad de ecuaciones e incógnitas a las cuales los estudiantes se enfrentan, ya que comúnmente los docentes proponen en mayoría absoluta sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ (dos ecuaciones y dos incógnitas). Con base en esto se puede decir que prácticamente no existe una conexión entre los sistemas de ecuaciones y su conjunto solución, ya que los estudiantes no comprenden el significado del conjunto solución y de la misma manera no verifican sus soluciones. Por otra parte los estudiantes no vinculan la resolución con análisis gráfico de lo que es el conjunto solución de un SEL (Ochoviet, 2009).

Los sistemas de ecuaciones lineales son un objeto matemático que presenta un profundo interés para los investigadores, lo que se justifica con una cantidad considerables de investigación en educación matemática, que se enfocan principalmente en el cómo se resuelven estos, ya sea a través de métodos o diversas estrategias. Dentro de estas, en el año 2009, Ochoviet realizó una que precisamente tenía como propósito estudiar el concepto que tenían los estudiantes sobre el conjunto solución cuando la introducción a este comienza a través de la enseñanza de los SEL. Junto con esto diseñó una secuencia didáctica la cual facilitase la enseñanza del concepto, permitiendo a los estudiantes alcanzar un modo de pensamiento estructural que un sistema de ecuaciones lineales requiere para su aprendizaje.

Anterior a esta investigación, en el año 2002, Oaxaca había definido que los problemas con el aprendizaje de los SEL se reflejaban en estudios superiores, ya que los alumnos de ingeniería de la U.N.A.M, en su primer año presentaban dificultades al momento de resolver un sistema. Esto no apuntaba a los métodos de solución, los cuales ellos sí conocían, sino que a la interpretación que los estudiantes le daban a las situaciones que involucraban sistemas, siendo cualquiera el registro en el que se encontrara.

Como se expuso anteriormente, la mayor dificultad que presentan los estudiantes es al momento de resolver los sistemas, por lo que esta es la dificultad que estudió Trigueros en el año 2012. Esta investigación confirma que los métodos de resolución son memorizados por los estudiantes, por lo que las estrategias de resolución no son más que un algoritmo y no son capaces de interpretar su significado, lo cual de igual manera influye en la poca compresión del concepto conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Debido a esto, los estudiantes tampoco son capaces de analizar el conjunto solución, es decir, determinar el número de soluciones que puede tener o como estas se representan geométricamente.

En 2013, Figueroa realiza una tesis la cual tenía como objetivo la creación de una propuesta didáctica sustentada en la Teoría de situaciones didácticas, la cual potenciara en los estudiantes las habilidades para poder resolver problemas a través de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. De esta investigación se desprende que crear situaciones cuya resolución involucre SEL aporta a estimular habilidades de resolución de problemas, y que este tipo de problemas atrae a los estudiantes a resolverlos, a diferencia de los que se plantean comúnmente (Figueroa, 2013).

OBJETO MATEMÁTICO: Sistemas De Ecuaciones Lineales

Sistemas de ecuaciones lineales en el currículo

El objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales se encuentra presente a lo largo del currículo escolar, siendo en el nivel secundario en el cual se trabajan específicamente como ecuaciones y también se utilizan como herramientas para la resolución de problemas.
Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden analizar desde distintas aristas, las cuales dependerán de la aplicación que se les quiera dar y del objetivo que va a tener su uso. El siguiente mapa conceptual pretende estructurar el objeto matemático de manera que permita clasificar cada una de estas aristas.

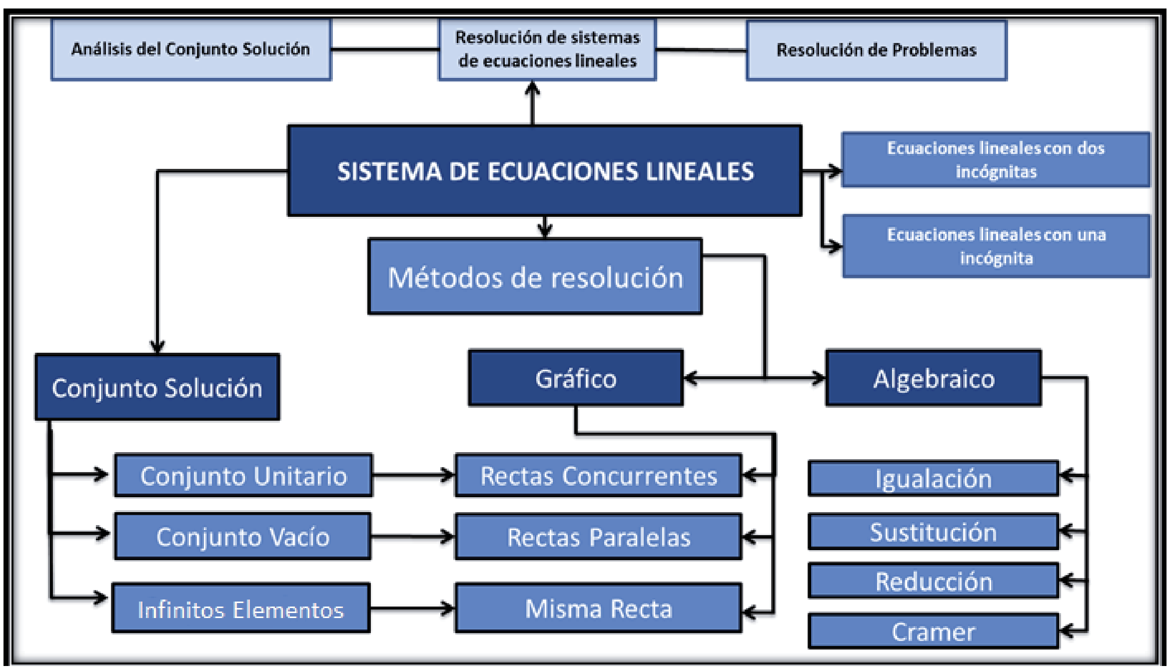


Figura 1.- Mapa conceptual Sistemas de ecuaciones Lineales

Para la enseñanza de los SEL, es necesario que los estudiantes adquieran conocimientos previos, que permitirán comprender el objeto matemático de manera que cumplan los objetivos propuestos por el currículo. Es por esto que los conceptos necesarios aparecen tempranamente en la educación primaria, de manera que van

construyendo el objeto desde las nociones de igualdad hasta definiciones formales de lo que es una ecuación.
La siguiente tabla detalla el recorrido del concepto de ecuación (como concepto previo para el estudio de SEL) en el currículo, especificando cada vez el nivel y el objetivo de aprendizaje propuesto en los planes y programas.

Tabla 4

Tránsito del objeto matemático en el currículo escolar chileno.

Curso	Objetivo de aprendizaje
Tercero Básico	Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.
Cuarto Básico	Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.
Quinto Básico	Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.
Sexto Básico	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: › usar una balanza › usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.
Septimo Básico	Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: $>>ax = b; x/a = b$ (a, b y c P N; $a \neq 0$) $>>ax < b; ax > b$ $x/a < b; x/a > b$ (a, b y c P N; $a \neq 0$)

Nota: Esta tabla pertenece a la investigación correspondiente al curso de avance de seminario de grado realizada por distintos autores en conjunto con el autor de la presente investigación

Tabla 5

Objetivos de aprendizaje de conceptos previos (8° Básico) necesarios para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2.

Concepto	Objetivo de aprendizaje
Función	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: • Utilizando tablas. • Usando metáforas de máquinas. • Estableciendo reglas entre x e y. • Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con *software* educativo.
Ecuaciones lineales	Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$ $\frac{x}{a} = b, a \neq 0$ $ax + b = c$ $\frac{x}{a} + b = c$ $ax = b + cx$ $a\,(x + b) = c$ $ax + b = cx + d$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{Q})$.
Inecuaciones lineales	Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo
Función afín	Mostrar que comprenden la función afín: • Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. • Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. • Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. • Relacionándola con el interés simple. • Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Nota: La información corresponde al programa vigente desde el 2016. Esta tabla pertenece a la investigación correspondiente al curso de avance de seminario de grado realizada por distintos autores en conjunto con el autor de la presente investigación

De esta manera, se crean las bases para poder abordar este objeto en la enseñanza media. En 1° medio se propone, según Bases Curriculares 2015, como objetivo de aprendizaje

Tabla 6

Objetivos de aprendizaje e indicadores para sistemas de ecuaciones lineales de $2x2$ en 1° Medio.

Objetivo de aprendizaje	Indicadores
Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2×2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.	Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • Creando tablas de valores con *a, b* fijo y "x","y" variable. • Representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo. • Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima).

Nota: La información corresponde al programa vigente desde el 2017. Esta tabla pertenece a la investigación correspondiente al curso de avance de seminario de grado realizada por distintos autores en conjunto con el autor de la presente investigación

Sistemas de Ecuaciones Lineales en los textos

De los textos del *saber sabio* se han considerado: "Algebra Lineal" de Juan de Burgos y "Algebra Lineal" de Kenneth Hoffmann y Ray Kunze. Por otro lado, para indagar en el *saber escolar*, se recurrirá a textos ministeriales la enseñanza media. A continuación, en la tabla 7 se muestra un cuadro comparativo donde se pone de relieve las distancias que se presentan entre el saber sabio y el saber escolar para el objeto matemático en estudio:

Tabla 7

Comparación entre textos de Álgebra lineal y textos escolares.

Criterio	Textos de álgebra lineal	Textos escolares
Extensión	En Hoffman, se presenta el sistema cuyo número de filas y el número de columnas puede ser igual o distinto	En los textos del saber escolar se considera un caso particular (un sistema de 2×2).
Coeficientes	Los coeficientes se encuentran en un cuerpo K. Sin embargo, en Burgos se particulariza este cuerpo K a los cuerpos de los números reales y los números complejos.	En primero medio, se especifica que los coeficientes a, b, c, d, e y f se encuentran en los números racionales, mientras que en segundo medio se amplía el sistema al cuerpo de los números reales.
Conjunto solución	El conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales se presenta como una $n-tupla$, donde los valores de las incógnitas son los elementos de esta secuencia.	En el texto de primer año medio los valores de las incógnitas son presentados como los valores de x e y que satisfacen las ecuaciones, en cambio en segundo medio se establece que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 corresponde a un par

		ordenado $(2 - tupla)$ de la forma (p, q), relacionando esta representación con los puntos sobre el plano cartesiano.
Representación	En los libros del saber sabio se trata la representación en forma matricial, donde los elementos del conjunto solución son $n - tuplas$ o matrices.	La representación en los textos del saber escolar es la gráfica, donde cada ecuación corresponde a una recta en el plano XY y el conjunto solución se representa por los puntos de intersección de las dos rectas que componen el sistema.
Resolución	Se propone trabajar los sistemas utilizando la técnica de eliminación. En su forma matricial, el método de resolución que se propone es el método de Gauss usando pivotes y eliminación.	En los textos de educación media se propone revolver los sistemas utilizando los métodos de resolución, a saber, gráfico, sustitución, reducción.
Clasificación	Se presentan casos particulares de sistemas. Si las ecuaciones están todas igualadas a cero, se menciona que el sistema se denomina *homogéneo*.	Esta clasificación no se encuentra registrada en alguno de los libros de textos del saber escolar.

Nota: Esta tabla pertenece a la investigación correspondiente al curso de avance de seminario de grado realizada por distintos autores en conjunto con el autor de la presente investigación

El objeto matemático a pesar de ser uno solo, tiene distintas definiciones, las cuales dependen del contexto en el que se estudiará. Es por esto que se presentarán a través de tablas las definiciones expuestas es diversos textos, tanto de saber sabio como de saber escolar, para posteriormente hacer un cuadro comparativo el cual analizará la distancia entre los saberes.

Tabla 8

Definición Experta

Autor	Definición Experta
De Burgos	Un sistema de m ecuaciones lineales en las n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es todo conjunto de relaciones del tipo: $\left.\begin{array}{ll} \text{Ecuación primera:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{Ecuación segunda:} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{Ecuación } m\text{-ésima:} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad [S]$ Los a_{ij} (coeficientes) y los b_i (términos independientes) son escalares dados; es decir, elementos de un cuerpo cualquiera(*). Se dice que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constituyen una *solución* de S si al tomar $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, las m ecuaciones se convierten en igualdades; *resolver S* es hallar todas sus soluciones. Se dice que un sistema es *compatible* si tiene alguna solución y que es *incompatible* si carece de ellas; cuando es compatible, se dice que es *determinado* si tiene una sola solución e *indeterminado* si tiene más de una. (De Burgos, 1993,p.4)
Hoffman (1973)	Suppose F is a field. We consider the problem of finding n scalars (elements of F) $x_1, \ldots, x_n$ which satisfy the conditions (1-1) $\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m \end{array}$ where $y_1, \ldots, y_m$ and A_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, are given elements of F. (Hoffman y Runze,1973, p.3) <u>Traducción:</u> *Supongamos que F es un cuerpo. Consideremos el problema de encontrar n escalares (elementos de F) $x_1, \ldots, x_n$ los cuales satisfacen las condiciones.* *(…)* *Donde $y_{1,\ldots,}y_n$ (…) , son elementos dados de F.*

La siguiente tabla, presenta la definición escolar de cada uno de los textos distribuidos por el Ministerio de educación. Se presentará la forma en que se define Sistema de Ecuaciones Lineales en cada nivel de la enseñanza secundaria.

Tabla 9

Definición escolar

Curso	Definición Escolar
1° Medio	**Conceptos** Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas tiene la forma: $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\rvert$ Donde a, b, c, d, e y f son números racionales y x e y son las incógnitas. Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisfacen ambas igualdades. (Alvarado & Vásquez,2016,p.106)
2° Medio	**En resumen** Un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de ecuaciones lineales. Se representa de la forma $\left.\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right\rvert$ donde **a, b, c, d, e, f** $\in \mathbb{R}$ y **x** e **y** son las incógnitas. Una solución **(p, q)** del sistema es un par de valores que satisface simultáneamente ambas igualdades. (Muñoz, Rupin & Jiménez,2013,p.220)

Toma nota

En un sistema lineal de 2 x 2,

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$$

donde x e y son las incógnitas, se cumple que:

- Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
- Si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, el sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

(Saiz & Blumenthal,2013,p.281)

- Cada sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2, representa dos rectas en el plano.
- El tipo de sistema determina la posición relativa de las rectas en el plano y viceversa.

(Saiz & Blumenthal,2013,p.281)

4° Medio

Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales de la derecha tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en determinar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema a la vez. Por ejemplo, la solución $\{x = 2, y = 1\}$ es la única que satisface el sistema de la derecha.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 5x - 2y &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

(Muñoz & Gutiérrez,2013,p.15)

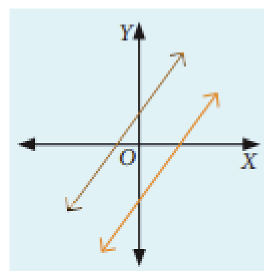
Nota: Información del saber escolar es recuperada de los textos distribuídos por el Ministerio de Educación

Se puede notar que las definiciones que se presentan son distintas según el objetivo de aprendizaje que posee el nivel (ver barrido curricular) y distan bastante de la definición expuesta en los textos del saber sabio, ya que limitan las definiciones a los ejemplos expuestos posteriormente.

Para hacer un análisis de la distancia entre los saberes se presentará una tabla comparativa de ambas definiciones, tomando los aspectos más importantes del objeto matemático.

Tabla 10

Distancia entre saber sabio y saber escolar

	Saber sabio	Saber escolar
Tamaño del sistema	$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & y_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$ m filas y n columnas (Hoffman y Runze,1973, p.3)	$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$ 2 filas y 2 columnas
Sistema numérico de los coeficientes	Cuerpo K (reales o complejos)	Racionales (1° medio) y reales (2° medio)
Conjunto solución	*n-tupla* $((x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$	Par ordenado (p, q)
Representación	$$AX = Y$$ $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$ $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ and } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$ Representación matricial (Hoffman y Runze,1973, p.6)	 Representación gráfica

Nota: Esta tabla pertenece a la investigación correspondiente al curso de avance de seminario de grado realizada por distintos autores en conjunto con el autor de la presente investigación

Recorrido histórico-epistemológico de los sistemas de ecuaciones lineales.

Los sistemas de ecuaciones lineales han estado presentes en la historia desde sus inicios, por lo que a continuación se expondrá un barrido histórico relacionado con el objeto matemático en sus fundamentos epistemológicos.

Los **Babilonios** trabajaron con ecuaciones desde hace más de 4000 años, destacando principalmente las de segundo grado, que modelaban situaciones como: "Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado" (Kline, 1972). El mayor número de registros babilónicos, se encontraron a través de su sistema de escritura cuneiforme, la cual se originó alrededor del año 1700 A.C.

Se ha determinado que estos también utilizaban las cuatro operaciones básicas de la aritmética y recurrían a organizar la información en diversas tablas o tablillas. Estas tablillas poseían fundamentalmente operaciones correspondientes a multiplicaciones, inversos, cuadrados, cubos, raíces cuadradas y se ha determinado que hasta raíces cúbicas.

Con todos estos elementos, los babilonios tenían herramientas para poder solucionar las ecuaciones con las que modelaban las situaciones. Sin embargo en los registros encontrados, solo se representaba la solución, no la forma en la que llegaban a esta, por lo que es más complejo realizar un análisis correspondiente a las formas de resolución y a los métodos empleados. Por lo expuesto anteriormente, no se pudo determinar la forma en que resolvían los problemas, pero sí que desde esa época ya sabían cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas $(2x2)$ (Kleiner, 2007) Un ejemplo de un sistema de ecuaciones de $2x2$ tomado de las tablillas es el siguiente:

$$\frac{1}{4} anchura + longitud = 7$$
$$longitud + anchura = 10\, manos$$

Escrito en notación moderna sería:

$$\frac{1}{4} y + x = 7$$
$$y + 4x = 28$$
$$y + x = 10$$

Los **Chinos** cercanos al año 200 A.C, realizaron importantes avances en el desarrollo de las ecuaciones, los cuales plasmaron en el famoso libro *Jiŭzhāng Suànshù,* lo cual se traduce en *Nueve capítulos sobre el arte matemático*. Estos avances apuntan principalmente a métodos para resolver tanto ecuaciones lineales como sistemas de estas.

Es en el capítulo VIII, titulado "Método de las tablas", donde se dedica con exclusividad a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de 3x3, a través del tratamiento de sus coeficientes, lo que se puede vincular con el método de eliminación de Gauss, con la salvedad que este libro fue escrito con veinte siglos de anticipación. Al comienzo de dicho capítulo aparece el siguiente problema:

> Tres gavillas de buen cereal, dos gavillas de cereal mediocre y una gavilla de cereal malo se venden por 39 dou. Dos gavillas de bueno, tres mediocres y una mala se venden por 34 dou. Y una buena, dos mediocres y tres malas se venden por 26 dou. ¿Cuál es el precio recibido por cada gavilla de buen cereal, cada gavilla de cereal mediocre, y cada gavilla de cereal malo?

Lo cual en la escritura moderna se podría escribir:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

Los **Griegos** también desarrollaron técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de estas. En el siglo IV d.C Thymaridas de Paros planteó un método de resolución de sistemas de ecuaciones cuadrados, de la siguiente manera:

> "Si se conoce la suma de varias incógnitas, así como también las sumas parciales de una de ellas con cada una de las otras, y se suman todas estas sumas parciales, restando después la primera suma total y se divide la diferencia por el número de incógnitas disminuido en 2, se obtiene el valor de la primera; y de éste se deducen los demás"

(Guerra, 2012,p.8)

Este método es conocido como "La flor de Thymaridas", la cual en escritura moderna sería:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = s \\ x + x_1 = k_1 \\ x + x_2 = k_2 \\ x + x_3 = k_3 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = k_{n-1}. \end{cases}$$

Figura 3. Flor de Thymaridas en escritura actual.
(Guerra, 2012,p.8)

En el siglo III d.C el álgebra comienza a evolucionar gracias a los aportes de Diofanto de Alejandría, el cual fue el autor de diversas obras. Klein (1992) piensa que *La Arithmética* fue la obra que contribuyó con más aportes al desarrollo de la matemática, siendo que sólo se conocen seis de los trece libros que la componen. En el primer libro, Diofanto se dedica a plantear ecuaciones de una o más variables, lo cual demostró que una de las habilidades que poseía era reducir ecuaciones de diversos tipos a formas conocidas o que pudiera manejar, generalmente lineales. Diofanto también resolvió sistemas de ecuaciones, pese a disponer de sólo un símbolo que representaba la cantidad desconocida, que llamaba aritmo, es decir, número. (Klein, 1992)

Un problema que aparece en el libro es:

"Sumar el mismo número (buscado) a dos números dados de modo que cada uno de ellos sea un cuadrado. Números dados 2,3; número buscado x"

lo que sería:

$$\left.\begin{matrix} x + 2 \\ x + 3 \end{matrix}\right\} \text{ ambos deben ser cuadrados.}$$

Él conocía este tipo de planteamiento como ecuación doble, la cual debía reducir a sólo una. Para poder lograrlo, tomaba la diferencia entre las expresiones presentadas y lo descomponía en dos factores bastantes convenientes. (Guerra, 2012)

Se puede evidenciar que son los aportes de las diversas culturas, los que establecen las bases para construir un futuro "objeto matemático", entregando información clave para el avance en la materia. Vale la pena destacar, que no es hasta el siglo $XVI\ y\ XVII$ que comienza el desarrollo concreto de lo que hoy se conoce como álgebra abstracta.

El estudio moderno de las ecuaciones lineales, se enfocó principalmente en los sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Se dice que este estudio fue originado por Leibniz, precisamente en el año 1693, con la invención de la noción de determinante. Parece difícil comprender pero este concepto nace previo a lo que es la definición de las matrices. Es necesario precisar que estudios similares los había realizado 100 años el matemático Japonés Seki Kowa, quien también desarrolló métodos de resolución de sistemas y cálculos determinantes de casos particulares. (Kleiner, 2007)

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales se transformó en un problema de mucho interés para la época. Fue entonces el matemático Italiano Girólamo Cardano quien, a través de su regla llamada "regula de modo" se dedicó a resolver SEL. Así, sin definir formalmente el concepto de determinante, creó una regla que posteriormente sería conocida como la regla de Cramer. (Kleiner, 2007)

A mediados del siglo $XVIII$ el suizo Gabriel Cramer publicó *Introduction to the Analysis of Algebraic Curves*, incluyendo ahí el trabajo que desarrolló con respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de nxn. El método propuesto, si bien se cumplía para los casos propuestos, no pudo ser demostrado, por lo que Cramer junto con estudiar sistemas de ecuaciones también se dedicó a resolver problemas de índole geométrico. Fue en el mismo período donde la publicación de un libro póstumo de Maclaurin también presentó la resolución de sistemas, destacando dos formas: La eliminación sucesiva de variables y el método de determinantes para sistemas de dos, tres o cuatro ecuaciones. Él desarrolló esto, y presentó su resultado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d \\ a_2x + b_2y + c_2z = e \\ a_3x + b_3y + c_3z = f. \end{cases}$$

siendo su solución:

$$z = \frac{a_1b_2f - a_1b_3e + a_2b_3d - a_2b_1f + a_3b_1e - a_3b_2d}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Si bien el método de resolución de Mclaurin era prácticamente el mismo que el utilizado por Cramer, se dice que debido a la notación más avanzada y precisa de este último fue que se le otorgó el nombre de "método de Cramer" (Guerra 2012).

La mayoría de los estudios realizados planteaba sistemas, que tenían una única solución. Fue Euler quien observó que estos podían tener más de una o no tener soluciones, para lo que era necesario agregar condiciones, todo esto independiente del orden del sistema, es decir, que era válido para los que tenían "n" ecuaciones y "n" incógnitas. Euler tenía en mente la idea de dependencia lineal, dependencia de una ecuación con respecto a otras, pero a pesar de esto no fue capaz de precisar las condiciones necesarias para esto. El estudio de los sistemas de ecuaciones, durante el mismo siglo, pasó a ser consecuencia del estudio de determinantes, ya que el mayor énfasis se le dio a estos. Es por esto que la mayor relevancia la tuvo el desarrollo de sistemas de orden cuadrado.

El alemán Carl Friedrich Gauss, considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia, desarrolló diversos estudios enfocados en los sistemas. Entre los años 1803 y 1809, resuelve un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, sistematizando un método el cual se conoce hasta el día de hoy como "eliminación Gaussiana". El método de resolución propuesto no utiliza notación matricial y se enfoca en sistemas de orden no cuadrado, pero también fue el primer matemático en usar formalmente el término de determinante en una publicación, aunque no es precisamente el mismo concepto que hoy se conoce por determinante.

(Kleiner,2007)

Las matrices son objetos matemáticos "naturales" que aparecen en conexión con las ecuaciones lineales, por lo que se dice que su primera aparición formal fue con los chinos 200 A.C. Se considera que su aparición adquirió un rol más importante cuando estas se comenzaron a operar de manera algebraica, lo cual sería más adelante.

Gauss, si bien no utilizó la notación matricial, lo hizo más bien de manera implícita. La palabra "matriz" dentro de un contexto matemático fue utilizada por primera vez por el británico Sylvester, en el año 1850, definiéndola como un "arreglo rectangular de términos", lo cual llamó la atención del matemático- abogado Cayley, quien comenzó a trabajar en el campo de las matrices, agregando en 1853 el concepto de inversa de una matriz. Se puede decir que la primera definición, para lo que es una matriz, fue publicada en 1858 en *"Memoir on the theory of matrices",* en esta obra, él generaliza los conceptos y presenta a las transformaciones lineales como casos especiales. Cayley declara que el sistema de ecuaciones $x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy$ se puede representar como el un arreglo rectangular de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Este arreglo contiene el coeficiente de las variables del sistema. Apoyándose en esa notación, su estudio se pudo complementar, ya que también desarrolla el álgebra de matrices, definiendo las operaciones básicas, además de demostrar que las matrices de $2x2$ satisfacen su propia ecuación característica.

Durante esta misma época el francés Cauchy introdujo en sus trabajos el término de determinante, pero esta vez tal como se conoce hoy en día. El estudio más completo de determinantes de esa época fue el hecho por él, ya que no sólo demuestra resultados conocidos previamente sino que también agrega nuevas propiedades, especialmente sobre menores y adjuntos. Junto con probar que: $det(AB) = det(A)\, det(B)$, Cauchy trabajó los valores propios de una matriz simétrica, la ecuación característica de una matriz, y demostró que toda matriz simétrica es diagonizable. Todo esto fue paralelo a los estudios realizados por Cayley, ya que la primera aparición de Cauchy con respecto a los determinantes fue en el año 1812. (Kleiner, 2007)

En el siglo XIX, especialmente entre la década del 20 y del 70, los matemáticos se dedicaron a hacer un trabajo a fondo con las matrices, creando la conocida "The espectral theory of matrices", definiéndolas y clasificándolas en distintos tipos (simétrica, ortogonal, unitaria). Un ejemplo de aquello es la forma canónica de Jordan, introducida por Weierstrass, quien vio que dos matrices son similares si y solo si tienen la misma forma canónica de Jordan.

Frobenius aplicó la teoría de matrices para el trabajo en la teoría de grupos y así realizar un vínculo importante entre los conceptos, dando muestra que el estudio de estos conceptos aún estaban en desarrollo, lo cual Herman Grassman corrobora apoyándose en todos los estudios realizados anteriormente, entregando el primer testimonio escrito de lo que es un espacio vectorial. Hoy en día la resolución de SEL forma parte integral de la teoría de espacios vectoriales ya que esta se construyó con base en todo los estudios preliminares de los sistemas de ecuaciones lineales.

ESTUDIO DE CLASES

La propuesta considera realizar un análisis cualitativo a través de un Estudio de Clases, el cual contribuye a desarrollar el análisis del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales. El estudio se centra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la implementación de una clase.

La clase tiene una duración de 50 minutos y contiene 3 actividades, que permiten obtener producciones que muestren la comprensión del concepto en estudio. El diseño de esta clase fue a través de un plan de clases, el cual declara como objetivo: "Modelar situaciones a través de ecuaciones lineales de $2x2$ y $3x2$ en $\mathbb{R}^2$ y analizar su conjunto solución". Se pretende lograr este objetivo a través de una división del curso en grupos de 4 estudiantes.

Se espera que en el desarrollo de esta clase se genere una interacción entre los estudiantes, con el fin de facilitar el aprendizaje y el análisis del concepto de conjunto solución desde una perspectiva diferente a la algebraica, es por esto que en su mayoría las actividades también otorgan la posibilidad a que el estudiante sea capaz de argumentar de manera geométrica

Las actividades están ordenadas de una manera progresiva, para así ir construyendo el conocimiento en base a lo analizado en la actividad anterior. Esta clase tuvo dos aplicaciones previas, de las cuales se decidió hacer modificaciones a la secuencia original, principalmente en la primera y última actividad, precisando el enunciado y agregando un plano cartesiano graduado de manera proporcional para así facilitar el gráfico de las situaciones.

A continuación se presenta el plan de clases:

Plan de Clase

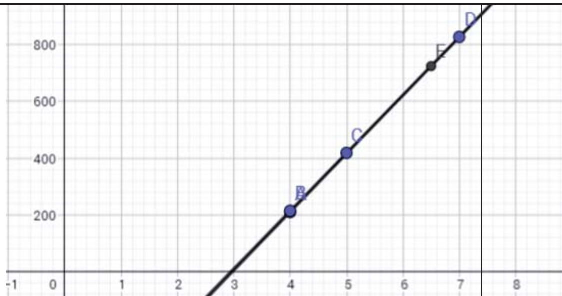
Minutos	Actividades: Tareas Matemáticas	Posibles estrategias de resolución de los estudiantes.	Intervenciones del profesor
		INICIO	
5	Inicio de la clase: • Acogida y normalización. • Indicaciones de la clase: forma de trabajo y conformación de grupos (3 personas).	• Escuchar atentamente al profesor. • Formar los grupos de trabajo indicados. • Iniciar trabajo *grupal de forma* autónoma Exposición del tema. Comienza la clase haciendo una breve explicación sobre el NEM instando a los estudiantes que realicen preguntas sobre el tema abordado.	• Generar clima de clase adecuado a la actividad. • Dar las indicaciones de la clase. • Recordar los grupos que han sido previamente confeccionados en las clases anteriores • Entregar material impreso a cada grupo

	DESARROLLO		
10	**Actividad 1** En Chile, el proceso de admisión al sistema de educación superior considera diferentes aspectos, dentro de los cuales se encuentra las notas de enseñanza media (NEM). Es por esto, que se creó una tabla de transformación de los promedios para alinear esta escala con la de la PSU. La escala dependerá del tipo de enseñanza de la cual los estudiantes egresen. Dos amigos, Waldo y Felipe, estudian en un colegio científico humanista y técnico profesional respectivamente, estos tienen la duda de qué puntaje se le asignará a cada uno cuando completen su enseñanza media. Con este objetivo, investigan y encuentran la siguiente información: **1) Analicen la información que encontraron, discutan y respondan: ¿Ambos estudiantes pueden resolver su duda?¿Por qué?**	Cada grupo analiza la información, discute y responde a la situación planteada *¿Qué se espera?* que los estudiantes sean capaces de determinar si con la información obtenida se puede modelar la situación planteada. **Estrategias:** - Analizar a través de la representación gráfica. - Analizar a través de la representación tabular. - Representar a la recta en forma de tabla y viceversa. **Posibles Dificultades y/o Errores:** - Pensar que basta con el dibujo para determinar cada puntaje asociado a la nota - No conocer cuáles son los elementos necesarios para modelar a través de una ecuación de la recta - Sacar la pendiente de la recta con regla de tres simple. - No vincular la información entregada en las tablas como puntos.	El docente se traslada por la sala verificando que los grupos comiencen a trabajar y estén formulando sus estrategias, comunicándolas con los miembros de su grupo Es importante que el docente marque la importancia de determinar **exactamente** el puntaje, lo cual se diferencia inmediatamente de una estimación. Si los estudiantes comprenden que esta situación se puede modelar a través de una recta, invitarlos a reflexionar por sus elementos y la información necesaria para determinarlos. También aportar a destrabar algunas dificultades a través de : ¿Qué relación tiene la forma en qué encuentran la información con poder resolver su duda? ¿Se puede hacer un vínculo entre

	Respuesta Experta: a) Sólo Felipe puede resolver su duda ya que con la información encontrada se puede modelar la situación a través de una recta. Dados los puntos $(4, 213)$ y $(5,417)$ se puede utilizar la ecuación: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ A través de esta ecuación, determinar la recta que modela la situación y así determinar para cada nota el puntaje PSU asociado. No es el caso de Waldo, ya que el sólo conoce un punto (*(4, 208)*) y no tiene los elementos necesarios para poder modelar la situación a través de una ecuación de la recta.	- No relacionar la tabla con la representación gráfica. **Posibles Respuesta:** - Si, ya que con dos puntos se puede modelar la situación y así determinar los puntajes asociados. - Ambos no, sólo Waldo ya que posee los puntos para modelar. - Si, ya que una recta modela la situación.	ambas formas de entregar la información? **Conceptos previos:** - **Ecuación de la recta y sus elementos.**

15	**Actividad 2** Debido a la importancia e interés que le genera este tema, deciden seguir investigando y encuentran lo siguiente (ver anexo) : **1) En base a esta información y la anterior, determinen si existe una nota que sea equivalente (para ambos tipos de enseñanza) en cuanto al puntaje PSU asociado. Justifiquen su respuesta.** **Respuesta Experta:** 1) Para determinar si existe una nota en la que el puntaje asociado sea equivalente para ambos es posible analizar la existencia de un conjunto solución con un único elemento. Si las pendientes de cada recta que modela a ambos tipos de enseñanza, son distintas, quiere decir que existe una nota que tienen un puntaje en común. Determinemos	Cada grupo analiza y determina la existencia de una nota que tenga la misma transformación a puntaje PSU para ambos. *¿Qué se espera?* Que los estudiantes reconozcan gráficamente el conjunto solución de la situación y lo vinculen al contexto planteado. **Estrategias:** - Dibujar ambas rectas y analizar su solución. - Representar la situación a través de un sistema de ecuaciones y analizar su conjunto solución. - Representar la situación a través de un sistema de ecuaciones y analizar su conjunto solución y resolverlo. **Posibles Dificultades y/o Errores:** - No relacionar la situación con una modelación a través de ecuaciones de la recta. - No representar la situación a través de rectas. - No vincular la pregunta con la intersección de las rectas o con el conjunto solución del sistema de ecuaciones.	-Posibles devoluciones, según las dificultades y errores explicitados: • ¿De qué manera podemos representar cada situación? Si hay estudiantes empeñados en plantear sistemas y resolverlos, lo cual los induce a errores. Se puede aportar: • ¿Están preguntando cuál es la nota? Las devoluciones siempre irán orientadas a la reflexión, no a dar pistas de cuál es la respuesta. Por lo que el docente incentiva a que busquen distintas representaciones de la situación. ¿Están bien planteadas las representaciones? ¿Es la mejor forma de representar? Es importante que los estudiantes se cuestionen la validez de sus argumentos, entre ellos mismos, por lo se les puede sugerir la pregunta: ¿Basta con esos argumentos?

	las pendientes a través de: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Enseñanza TP : $(4, 213)$ $(5,417)$ $m_1 = \frac{417 - 213}{5 - 4} = 204$ Enseñanza HC: $(4,208)$ $(7, 826)$ $m_1 = \frac{826 - 208}{7 - 4} = 206$ Al ser distintas las pendientes, asegura que existe un único punto en el que estas rectas se intersectan. Es necesario corroborar si la intersección se encuentra dentro del contexto del problema, es decir que sea dentro de la escala de notas. Esto se puede demostrar graficamente:	- Representar la situación a través de un sistema de ecuaciones, resolverlo y no llegar a una solución única. - Representar mal las rectas en el plano cartesiano. **Posibles Respuesta:** - Si existe, ya que la situación se representa gráficamente a través de dos rectas secantes. - No existe ya que la situación se representa gráficamente a través de dos rectas paralelas. - Si existe, ya que la situación se representa a través de un sistema de ecuaciones que su conjunto solución tiene un único elemento. - No existe, ya que la situación se representa a través de un sistema de ecuaciones que su conjunto solución es vacío.	**Conceptos previos:** - Ecuación de la recta y sus elementos. - Sistemas de ecuaciones lineales y sus representaciones - Conjunto solución

	 El punto E es la intersección, por lo tanto podemos decir que SI existe una nota en la que ambos tipos de enseñanza tengan el mismo puntaje PSU asociado.		
20	**Actividad 3** *Nicolás: -No existe ninguna nota con la que los tres tengamos el mismo puntaje PSU-* *Waldo: -Estás equivocado-* *Nicolás: -¿Cómo lo voy a saber? si yo soy malo para las matemáticas-* *Waldo: -Para saber si existe esa nota, no necesitas ser un gran matemático, sólo necesitas saber*	Cada grupo analiza y determina la existencia de una nota que tenga la misma transformación a puntaje PSU para ambos. *¿Qué se espera? Que los estudiantes modelen la situación a través de un sistema de ecuaciones lineales de* $3x2$ *y lo resuelvan.* **Estrategias:** - Dibujar las tres rectas y analizar su solución. - Representar la situación a través de un sistema de ecuaciones de $3x2$ y analizar su conjunto solución. - Representar la situación a través de	El docente incentiva a los estudiantes a dibujar los a representar la situación. Además recordar que pueden vincular las reflexiones con las actividades anteriores. En esta fase de la clase, los estudiantes han construido el problema de manera que les permita llegar a su solución. Es importante que en esta fase ya hayan validado sus argumentos, por lo que sean capaces de vincular los argumentos

	dibujar- **1) a) ¿Cuál de los dos tiene la razón? ¿Por qué?** **Respuesta Experta:** a) Waldo tiene la razón, ya que para analizar si los tres tipos de enseñanza concurren basta con graficar en el plano cartesiano. Esto indicará si existe una nota en la cual los tres tipos de enseñanza coincidan. **b) Si Waldo tiene la razón, determina qué nota deberían tener los tres estudiantes para obtener el mismo puntaje PSU.** **Respuesta Experta:** Con la siguiente información, podemos modelar a través de una recta los tres tipos de enseñanza: $TP: (4{,}213)(5{,}417)$ $HC: (4{,}208)(7{,}826)$ $Adultos: (6{,}622)(7{,}824)$	un sistema de ecuaciones de $3x2$ y analizar su conjunto solución y resolverlo. - **Posibles Dificultades y/o Errores:** - Representar gráficamente y no llegar a que concurren en un punto. - Plantear un sistema de $3x2$ y no saber resolverlo. - No interpretar de manera correcta el problema. - No vincular la resolución del problema con el conjunto solución del sistema planteado. - No diferenciar que una cosa es determinar si existe una nota en común y la otra es cuál es esa nota. **Posibles Respuesta:** - Waldo, ya que la situación se representa gráficamente a través de tres rectas son concurrentes. - Nicolás, ya que la situación se representa gráficamente a través de tres rectas que no son concurrentes. - Waldo, ya que la situación se representa a través de un sistema de ecuaciones de $3x2$ que su conjunto	de las actividades anteriores con el modelo a entregar para la solución. El docente debe potenciar esa validez a través de preguntas que inviten a la reflexión. El docente supervisa las distintas respuestas efectuadas por los estudiantes y posteriormente recoge las distintas estrategias. **Conceptos previos:** - Ecuación de la recta y sus elementos. - Sistemas de ecuaciones lineales y sus representaciones - Conjunto solución

	$y-213=\frac{417-213}{5-4}(x-4)$ $y=204x-603$ $y-208=\frac{826-208}{7-4}(x-4)$ $y=206x-616$ $y-622=\frac{824-622}{7-6}(x-6)$ $y=202x-590$ Resolvemos el sistema de ecuaciones de $2x2$. $y=204x-603$ $y=206x-616$ $S \coloneqq \{(6.5\,,723)\}$ Como las tres rectas concurren en un punto, el punto $(6.5\,,723)$ debe satisfacer también a la ecuación que representa a la recta que modela la enseñanza de adultos. Para corroborar eso reemplazamos en la recta: $723=202\cdot 6.5-590$ $723=1313-590$ $723=723$	solución tiene un único elemento. - Nicolás, ya que la situación se representa a través de un sistema de ecuaciones de $3x2$ que su conjunto solución es vacío. - $(6.5\,,723)$ - Un punto determinado aproximadamente según el análisis gráfico -	

	Por lo que podemos decir que la nota que tienen en común los 3 tipos de enseñanza es un 6.5 y asigna 723 puntos PSU.		
CIERRE			
10	**Sintetizar los contenidos trabajados durante la clase.** - Modelización de la situación a través de sistemas de ecuaciones. - Representación gráfica de la situación e interpretación de su conjunto solución. Posiciones relativas de las rectas en el plano.	Cada grupo aportará voluntariamente a hacer un resumen de la clase y sus contenidos. De esta manera apoyará la institucionalización del profesor.	El docente institucionaliza todos los conceptos construidos por los estudiantes a través de la clase. El proceso de institucionalización se dará de forma más espontánea a través de los aportes recogidos por el docente en los distintos grupos.

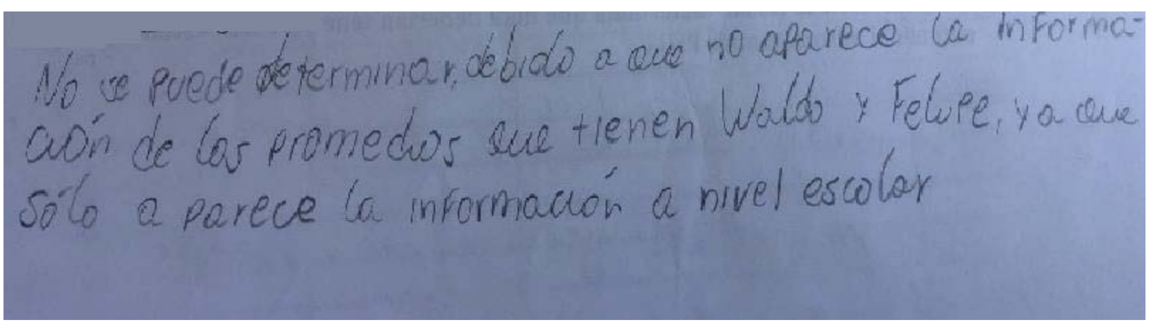
Contraste análisis

Los resultados obtenidos a través de la guía de actividades que resolvieron los estudiantes, se analizarán clasificados en cada una de las actividades. A continuación, se presentará un análisis general cada actividad, vinculada, contrastándola con el análisis expresado en el plan de clases.

Los resultados son los recogidos a los 32 estudiantes, presentes el día que se realizó el estudio de clases, distribuidos en ocho grupos de tres estudiantes y dos grupos de cuatro.

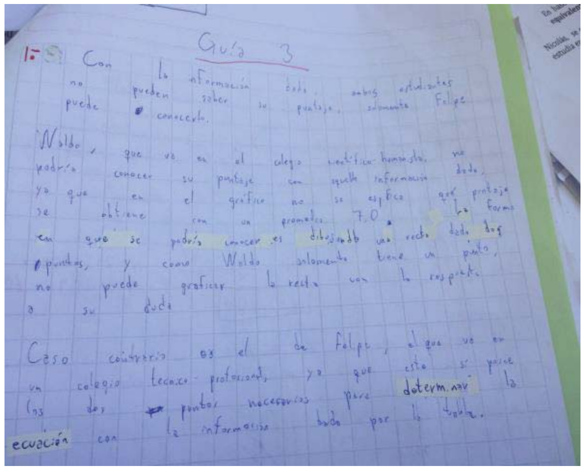
Análisis: Actividad 1

Tal como se planteó en el análisis, la mitad de los estudiantes fueron capaces de sostener que en el tipo de enseñanza en el cual se tiene la tabla, es la única posible para resolver la duda de qué puntaje se le asignaría a cada uno según la nota que obtengan. Es importante destacar que la otra mitad no fue capaz de argumentar el por qué se puede o no conocer el puntaje asociado; si bien hay indicios de un conocimiento capaz de solventar el argumento, los estudiantes no son capaces de expresarlo.
Es por esto que existen producciones que no tienen ningún argumento matemático, se vieron reflejadas a través de producciones como la del siguiente estudiante.



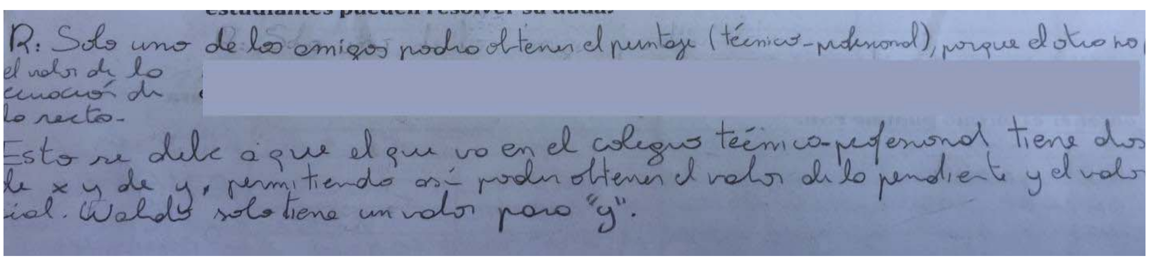
Producción 1: *"No se puede determinar debido a que no aparece la información de los promedios que tienen Waldo y Felipe, ya que sólo aparece la información a nivel escolar."*

Así también, la mitad de los estudiantes logró completar las fases de formulación y MRS, ya que argumentaron con elementos matemáticos explícitos como lo declara la siguiente producción



Producción 2: "..no podría conocer su puntaje con aquella información dada, ya que en el gráfico no se especifica que puntaje se obtiene con un promedio 7,0.

Si bien hubo estudiantes que lograron justificar a través de argumentos matemáticos explícitos, estos carecieron de precisión como se muestra a continuación:



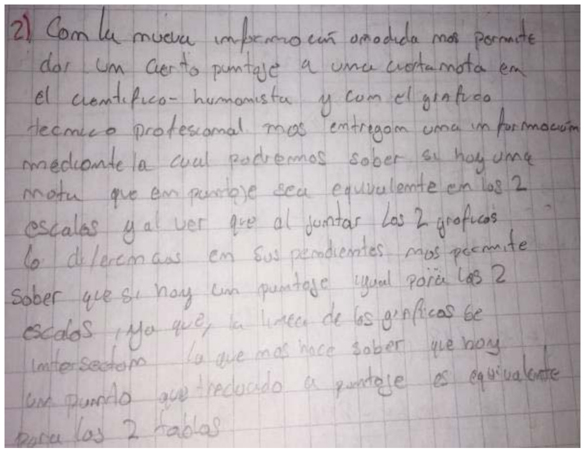
R: Solo uno de los amigos podría obtener el puntaje (técnico-profesional), porque el otro no,
el valor de la
ecuación de
la recta.
Esto se debe a que el que va en el colegio técnico-profesional tiene dos
de x y de y, permitiendo así poder obtener el valor de la pendiente y el valor
ial. Waldo solo tiene un valor para "y".

Producción 3: *"…el que va en el colegio técnico-profesional tienes dos valores de "x" e "y", permitiendo así poder obtener el valor de la pendiente y el valor de $\frac{x}{y}$ inicial. Waldo solo tiene un valor para "y".*

Análisis: Actividad 2

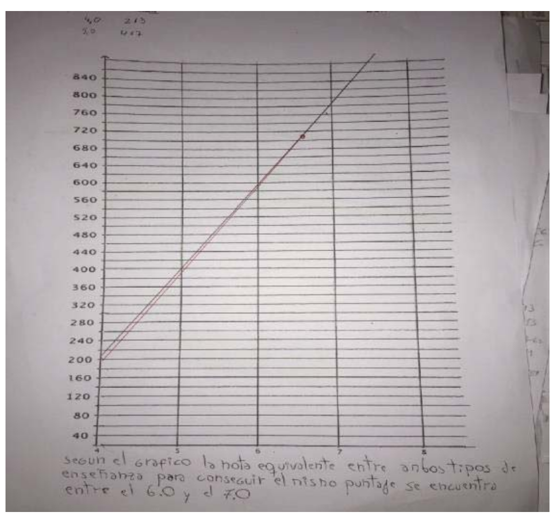
En esta actividad la mayoría justifica sus respuestas a través de argumentos matemáticos explícitos. Estos varían desde justificaciones teóricas narradas, hasta registros algebraicos y/o gráficos.

A continuación se presentará una producción de cada justificación mencionada anteriormente.


2) Con la nueva informacion otorgada nos permite
dar un cierto puntaje a una cierta nota en
el cientifico-humanista y con el grafico
tecnico profesional nos entregan una informacion
mediante la cual podremos saber si hay una
nota que en puntaje sea equivalente en las 2
escalas y al ver que al juntar los 2 graficos
la diferencias en sus pendientes nos permite
saber que si hay un puntaje igual para las 2
escalas, ya que, la linea de los graficos se
intersectan lo que nos hace saber que hay
un punto que traducido a puntaje es equivalente
para las 2 tablas

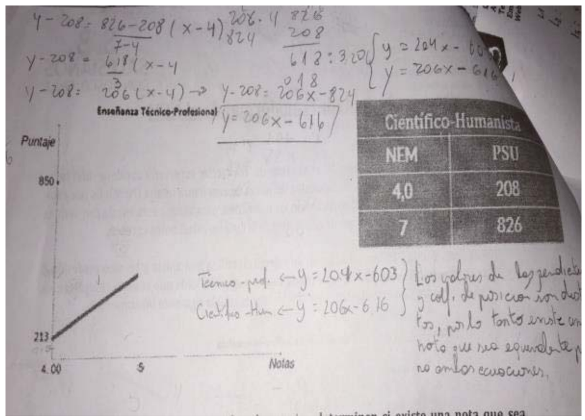
Producción 4: " *nos entregan una información mediante la cual podremos saber si hay una nota que en puntaje sea equivalente en las 2 escalas y al ver que al juntar los 2 gráficos la diferencia de sus pendientes nos permite saber que si hay un puntaje igual para las 2 escalas"*

Así también los argumentos gráficos se hacen presentes, intentando precisar el lugar donde ambos tipos de enseñanza se juntan, esto evidencia que el análisis gráfico del conjunto solución permitió a los estudiantes argumentar el problema.



Producción 5: *Según el gráfico, la nota equivalente entre ambos tipos de enseñanza para conseguir el mismo puntaje se encuentra entre el 6 y el 7.*

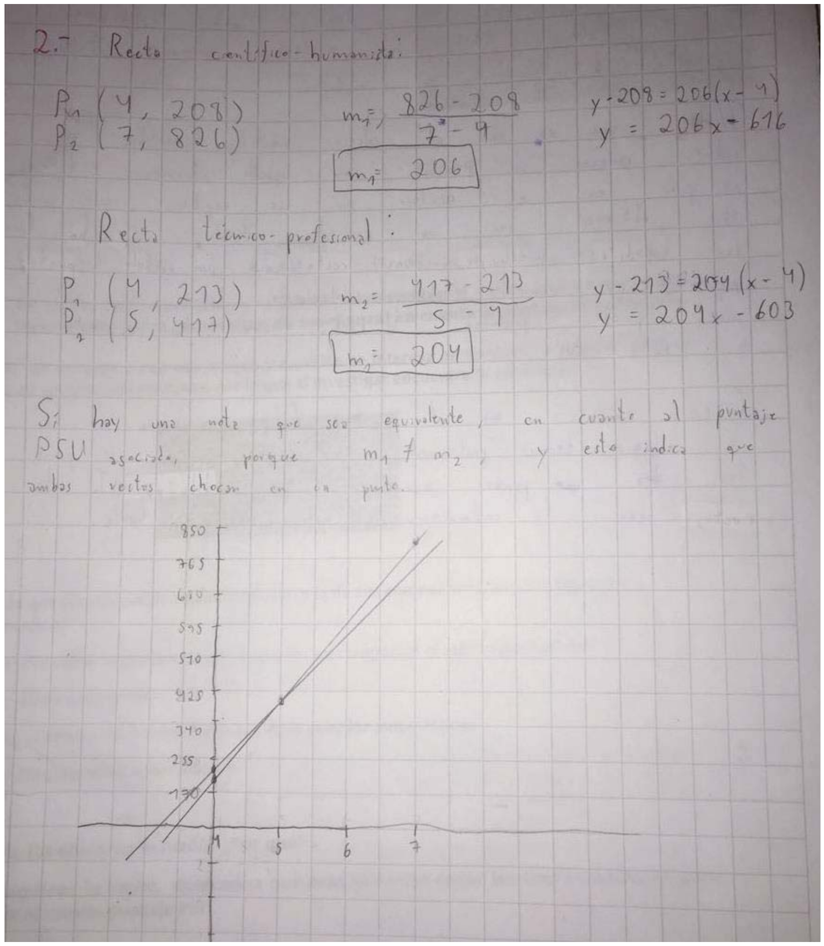
Es importante notar como los estudiantes argumentan en base a concepciones teóricas reforzadas y/o adquiridas en el transcurso de la secuencia. Con esto, ellos fueron capaces de encontrar los elementos necesarios para responder la pregunta que plantea la actividad 2, tal como lo muestra la imagen.



Producción 6: *"Los valores de las pendientes y coeficientes de posición son distintos, por lo tanto existe una nota que sea equivalente para ambas ecuaciones."*

Además, existe un porcentaje importante de los estudiantes que más que analizar, como lo propone el problema, resuelven de manera algebraica entregando valores que no se solicitan pero que si se encuentran correctos.

Los argumentos de los estudiantes, están enfocados en representaciones matemáticas. Estas en su mayoría apuntaban a la existencia de una nota común en la que ambos tipos de enseñanza representaban el mismo puntaje, ya que ambos se podían representar a través de rectas que se intersectaban, lo cual ratifica lo expuesto en el análisis a priori. En algunos casos se recurrió a conocimientos extra-matemáticos ya que se realizó un análisis más profundo, el cual permitió determinar si esa intersección estaba dentro del contexto del problema, es decir, analizaron si esa intersección se llevaba a cabo en los rangos que permite la escala de notas de nuestro país, tal como lo muestra la siguiente producción:


2.- Recta científico-humanista:

$P_1\ (4,\ 208)$ $\quad m_1 = \dfrac{826-208}{7-4}$ $\quad y-208 = 206(x-4)$

$P_2\ (7,\ 826)$ $\quad \boxed{m_1 = 206}$ $\quad y = 206x - 616$

Recta técnico-profesional:

$P_1\ (4,\ 213)$ $\quad m_2 = \dfrac{417-213}{5-4}$ $\quad y-213 = 204(x-4)$

$P_2\ (5,\ 417)$ $\quad \boxed{m_2 = 204}$ $\quad y = 204x - 603$

Si hay una nota que sea equivalente, en cuanto al puntaje PSU asociado, porque $m_1 \neq m_2$, y esto indica que ambas rectas chocan en un punto.

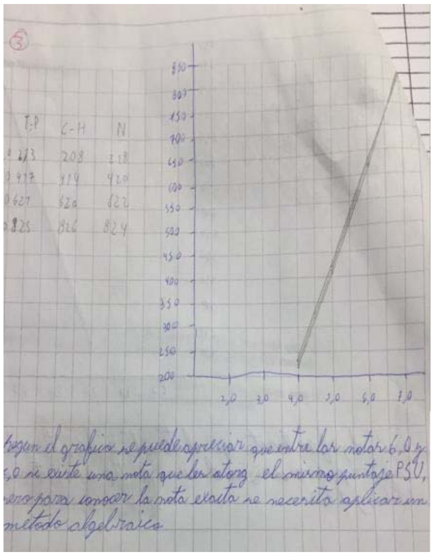
Producción 8: *Si hay una nota que sea equivalente en cuanto al puntaje PSU asociado porque $m_1 \neq m_2$ y esto indica que ambas rectas chocan en un punto.*

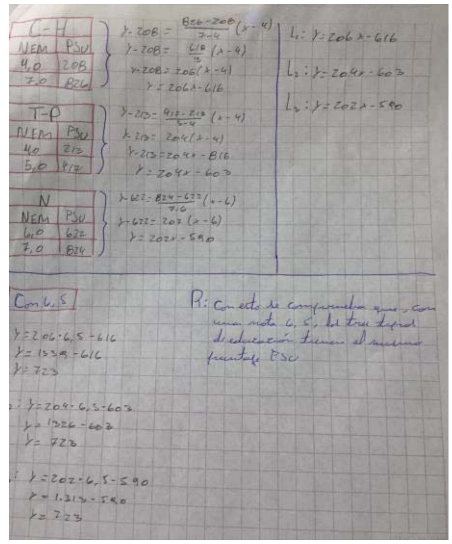
Análisis: Actividad 3

La actividad se separa en dos momentos, en el primer momento los estudiantes validan sus estrategias a través de registros gráficos y algebraicos, siendo en algunos caso, ambos los registros utilizado. Estos les permiten resolver el problema planteado inicialmente.

Es importante considerar que muchos si bien validaron sus estrategias de forma gráfica, se cuestionaron la exactitud de esta, por lo que recurrieron a otros elementos matemáticos para reafirmar la fase de validación, estos nuevos argumentos fueron en su totalidad algebraicos, algo que se expresa claramente en el plan de clases a través de su análisis a priori.

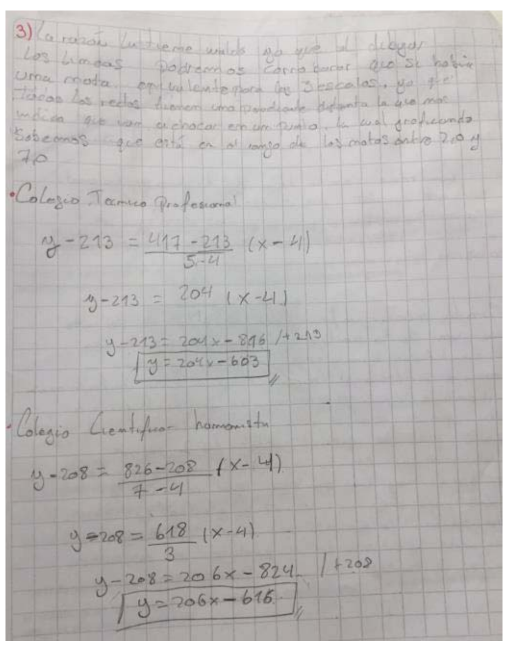
La siguiente producción evidencia lo anteriormente expuesto:





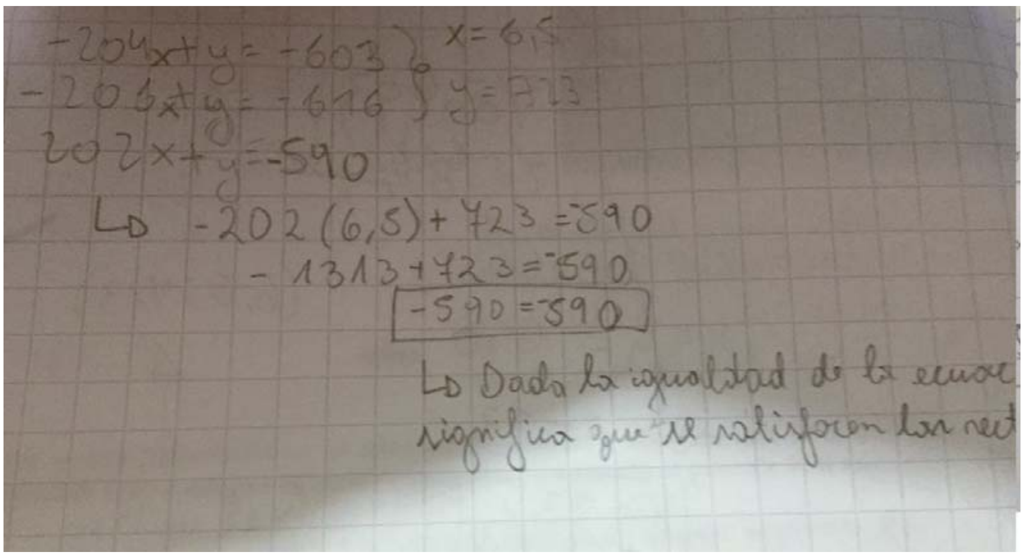
Producción 9: *Según el gráfico se puede apreciar que entre las notas 6 y 7 si existe una nota que les otorgue el mismo puntaje PSU, pero para conocer la nota exacta se necesita aplicar un método algebraico.*

Existe una cantidad no menor en la que los estudiantes llegan al resultado correcto, lo validan algebraicamente, pero no expresan su respuesta de la mejor forma o carecen de precisiones matemáticas, como lo presenta la siguiente producción:



Producción 10: *ya que todas las rectas tienen una pendiente distinta, lo que nos indica que van a chocar en un punto, la cual graficándola sabemos que está en el rango de las notas entre 2 y 7.*

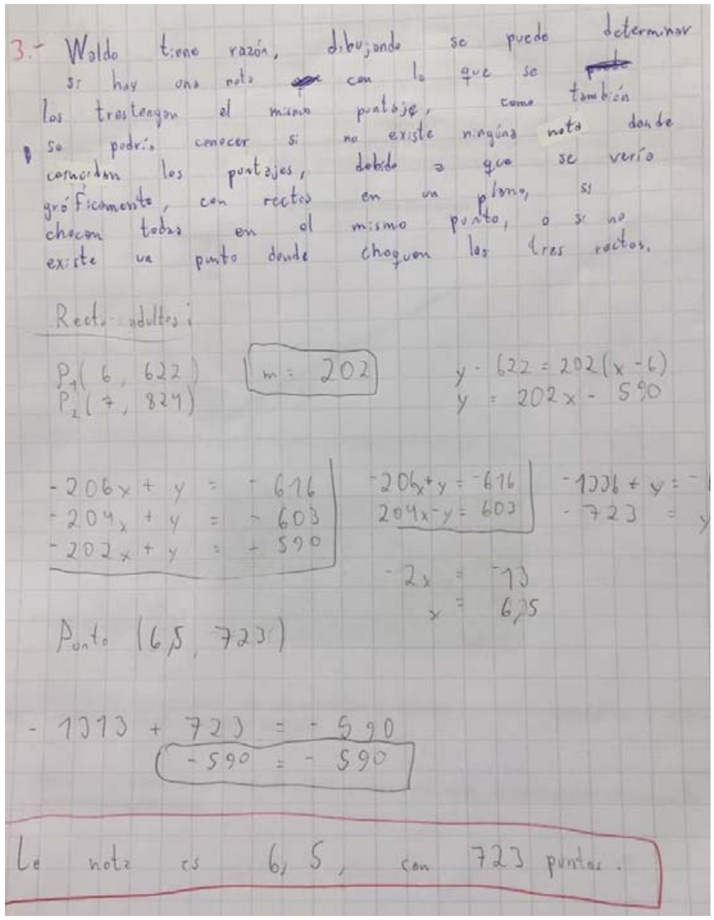
En el segundo momento de la actividad, los estudiantes manifiestan en su totalidad, la resolución de esta a través de un sistema de ecuaciones lineales de $3x2$ de manera algebraica. Cada grupo resuelve es sistema con los elementos propios que adquirió en cuanto al análisis del conjunto solución. Todos los grupos lograron resolver el sistema de $2x2$ y comprobaron si la solución satisfacía la tercera ecuación, ya que argumentaban que si el sistema tenía solución única, esta debía satisfacer las 3 ecuaciones, como se muestra a continuación:



Producción 11

El análisis del conjunto solución permitió a los estudiantes encontrar estrategias de resolución para el problema, a través de modelos matemáticos que a su vez evidenciaron que en su proceso cognitivo los estudiantes lograron transitar por la fase de modelo matemático, ya que los argumentos de resolución están totalmente alineados al área matemática por sobre la realidad que plantea el contexto del problema.

Si bien los argumentos matemáticos variaron en cuanto a su expresión, el modelo fue el mismo para todos los grupos. La siguiente producción presenta evidencia lo relatado anteriormente.



3.- Waldo tiene razón, dibujando se puede determinar si hay una nota con lo que se ~~pude~~ los tres tengan el mismo puntaje, como también se podría conocer si no existe ninguna nota donde coincidan los puntajes, debido a que se vería gráficamente, con rectas en un plano, si chocan todas en el mismo punto, o si no existe un punto donde choquen las tres rectas.

Recta adultos:

$P_1(6, 622)$
$P_2(7, 824)$
$\boxed{m = 202}$

$y - 622 = 202(x - 6)$
$y = 202x - 590$

$-206x + y = -616$
$-204x + y = -603$
$-202x + y = -590$

$-206x + y = -616$
$204x - y = 603$

$-2x = -13$
$x = 6,5$

$-1336 + y = -$
$-723 = y$

Punto $(6,5, 723)$

$-1313 + 723 = -590$
$\boxed{-590 = -590}$

La nota es 6,5, con 723 puntos.

Producción 12: *con rectas en un plano, si chocan todas en el mismo punto, o si no existe un punto donde choquen las tres rectas.*

SECUENCIA DIDÁCTICA

Los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) están presentes en el currículo nacional en diversos niveles, diferenciándose en el enfoque que se le da a su enseñanza, sea este en cuanto a los métodos de resolución o al análisis de sus componentes, ya sea sus ecuaciones o su conjunto solución. La secuencia didáctica que se presenta en este documento apunta precisamente al análisis del conjunto solución de los SEL, con el objetivo que el estudiante sea capaz de reconocerlo, describirlo y representarlo de diversas maneras. En la educación media chilena, este objeto matemático aparece en distintos niveles, siendo tercero medio el año en el que se espera que el estudiante sea capaz de vincular la ecuación lineal con una recta en el plano cartesiano, tal como lo declara el aprendizaje esperado: “Relacionar sistemas $2x2$ de ecuaciones lineales con pares de retas en el plano cartesiano para representar soluciones gráficas” (MINEDUC, 2012, p.33). Si bien en los ejercicios propuestos en los textos ministeriales aparecen sistemas de $3x2$, no se profundiza en ellos por lo que escaso análisis se hace se reduce simplemente a dos rectas en el plano, siendo que la reflexión se podría enriquecer mucho más ampliando el concepto tal como se propone en los ejercicios.

A través de los años de escolarización, las definiciones de lo que es un sistema de ecuaciones van cambiando, según el objetivo de aprendizaje propuesto en el nivel en el cual se desea enseñar. Esta secuencia didáctica está destinada a los alumnos de tercer año medio, año en el que la definición de lo que es un sistema de ecuaciones, a diferencia de años anteriores, se presenta de esta manera:

- Cada sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2, representa dos rectas en el plano.
- El tipo de sistema determina la posición relativa de las rectas en el plano y viceversa.

(Saiz & Blumenthal,2013,p.281)

Con base en esta definición y al aprendizaje esperado expuesto anteriormente, se diseña una secuencia didáctica que consta de tres clases, las cuales se desarrollarán con los estudiantes distribuidos en grupos de 3 ó 4. La primera clase tiene como objetivo introducir el concepto de conjunto solución, para lo que se destinan 50 minutos. La segunda sesión contará con 90 minutos para abordar la representación gráfica del conjunto solución, extendiéndose también a los sistemas de 3x2. La última sesión de la secuencia corresponde pretende que los estudiantes afronten los obstáculos presentes en el aprendizaje del objeto matemático, para esta situación están destinados 60 minutos. La clase tres se basará en la resolución de problemas a través de la modelización, en la cual los estudiantes utilizarán todas las herramientas y conocimientos adquiridos en las sesiones previas, con el fin de construir un nuevo conocimiento sin la intencionalidad que le pudo haber entregado el docente en las clases anteriores.

OBJETIVOS

Los objetivos de esta secuencia didáctica están fundamentados en la problemática expuesta anteriormente y en los aprendizajes que se esperan que los estudiantes adquieran según el ministerio de educación.

En tercer año medio, en los planes y programa que entrega el MINEDUC, declara explícitamente el objeto matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales a través de los siguientes aprendizajes esperados:

AE 13
"Relacionar sistemas $2x2$ de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar soluciones gráficas."

AE 14
"Resolver problemas de sistemas $2x2$ de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano."

En pos de lo anterior, se creó una secuencia didáctica, la cual será planteada a través de distintas actividades, desde la perspectiva de la Teoría de las Situaciones Didácticas, y tiene como propósito que los estudiantes se enfrenten al objeto matemático apoyado en sus conocimientos previos y al trabajo en equipo, siendo así capaz de expresar sus conocimientos y conjeturas con una puesta en común, la cual será la base de la institucionalización realizada posteriormente por el docente. Así mismo, pretende que el estudiante, sin la intencionalidad del docente, afronte los obstáculos reconocidos en la literatura, para que así se logren los aprendizajes esperados

La secuencia didáctica consta de tres clases, las cuales tienen los siguientes objetivos:

Objetivo Clase 1

Reconocer y describir el conjunto solución de ecuaciones lineales.

Objetivo Clase 2

Desarrollar el análisis de la representación gráfica del conjunto solución en Sistemas de Ecuaciones Lineales de $2x2\ y\ de\ 3\times 2$.

Objetivo Clase 3

Modelar situaciones a través de ecuaciones lineales de $2x2$ *y* $3x2$ *en* $\mathbb{R}^2$ *y analizar su conjunto solución.*

Las clases están diseñadas de manera que se vayan logrando secuencialmente los objetivos, es decir, el cumplimiento del objetivo de la clase 1 facilitará el cumplimiento de la clase 2. El cumplir el objetivo de las dos primeras clases permitirá al estudiante poder construir los conocimientos y lograr los aprendizajes esperados en la clase 3.

MARCO TEÓRICO

La presencia de dificultades en el aprendizaje de sistema de ecuaciones lineales (SEL); que se han generado por la concentración en el aprendizaje de los diferentes métodos algebraicos de resolución y el escaso análisis de conjunto solución de un SEL, ha mostrado la necesidad de avanzar en la construcción de propuestas desde la didáctica de la matemática que permitan afrontar estas dificultades, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje referentes a los SEL propuestos en el currículo escolar chileno y que los docentes intencionan en la planificación de sus clases.

En este trabajo se presenta una secuencia didáctica para abordar el estudio de los SEL, para ello se ha considerado la importancia de la modelización y del análisis del conjunto solución de un SEL por sobre los métodos algebraicos de resolución. La propuesta didáctica se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau.

El propósito de esta secuencia didáctica es que por medio de una situación adidáctica, los estudiantes se enfrenten al objeto matemático SEL, apoyados en sus conocimientos previos y al trabajo en equipo, con el fin de promover la movilización de sus conocimientos y conjeturas, siendo capaces de expresarlos posteriormente en una puesta en común, la que será la base de la institucionalización realizada por el docente.

Teoría de Situaciones Didácticas

Desde la TSD se establecen cuatro fases en el logro de los objetivo de aprendizaje: acción, formulación, validación e institucionalización; siendo esta última de vital importancia, pues es de la que carecen los textos escolares y cumple un rol fundamental en la transformación del saber personal del estudiante a un saber institucional; es decir, en esa fase se acercan las producciones de los estudiantes a los objetivos de aprendizaje de la clase y le da a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes.

La TSD plantea que una situación adidáctica promueve el aprendizaje de los estudiantes, a través de discusiones entre ellos, reconociendo los contenidos a estudiar, validando sus propias estrategias con el propósito que la construcción del conocimiento sea en conjunto y apoyado en las conjeturas realizadas por ellos mismos. Así también es importante considerar que este tipo de situaciones debe ser abordada a través de los conocimientos o saberes que se pretende que se construyan, además que sean los propios estudiantes que sanciones sus decisiones sin una intervención directa del docente en la construcción del conocimiento. (Brousseau, 1986)

Cabe señalar que la definición de situación adidáctica contiene distintos aspectos relevantes, los que están presentes en la clase diseñada. Para comprender esto, se presenta a continuación una tabla que organiza los aspectos relevantes de esta misma.

Tabla 7

Aspectos relevantes en una situación adidáctica

Característica	Descripción
Necesidad de los conocimientos	El diseño de la situación se hace de manera que el conocimiento que se desea construir sea estrictamente necesario para resolver el problema, es decir, que este conocimiento se debe poner en práctica en la resolución.
Noción de "sanción" (retroacción)	El diseño de la situación se hace de manera que el estudiante se desenvuelva en un medio capaz de entregarle información que le permita juzgar sus resultados y a la vez le otorgue posibilidad de realizar distintas estrategias para así vincular estas con los resultados que obtiene.
"No intervención" del maestro	El docente debe intervenir con el propósito de que los alumnos hagan propio el desafío de resolver el problema y mantenerse en esa tarea. De alguna manera el docente se tiene que marginar de la responsabilidad de construir el saber, pero no siendo un espectador sino que interviniendo para que el estudiante mantenga la relación adidáctica con el problema.

(Brousseau, 1999)

Las dificultades evidenciadas en el Estudio de Clases se pueden estudiar a través del análisis de los errores presentados por los estudiantes en una secuencia didáctica, considerando que el principal obstáculo proviene de la enseñanza de los métodos de resolución planteados en el currículo escolar nacional (sustitución, igualación y reducción) y en el enfoque algebraico que se le otorga a este objeto matemático por sobre el geométrico sintético. Sumado a esto, la noción de conjunto solución de un sistema de ecuaciones es conocida desde el ámbito aritmético-algebraico, tal como se declara en el currículo, por lo que desplaza totalmente a la interpretación geométrica impidiendo superar el obstáculo didáctico que se genera en el concepto conjunto solución.

Esta investigación tiene como objetivo mejorar habilidades de los estudiantes, específicamente el análisis, por lo que es necesario que esta revele una evolución en el desarrollo de las tareas propuestas. Es

necesario determinar un método que sea capaz de entregar la existencia de la evolución de las habilidades. Dentro de estos existe la modelización, ya que además de representar situaciones cotidianas a través de un modelo matemático, el conocer los aspectos que la componen permite analizar la evolución de habilidades matemáticas y entrega información de las habilidades reflexivas de los estudiantes en relación al desarrollo de la tarea matemática, tarea que está vinculada con representar la realidad a través de un modelo matemático.
Por lo anterior, la situación que se presentará en la clase que se estudiará, estará basada en la modelización, con el fin que esta sea un elemento facilitador al momento de responder las preguntas de investigación.

Es necesario conocer los procesos cognitivos de la modelación, ya que estos son los que permiten realizar los análisis antes descritos. La siguiente tabla presenta las fases presentes en los procesos. (Guerrero y Mena, 2015)

La clase está diseñada con la intención que los estudiantes transiten por las distintas fases para así lograr los objetivos. Estas fases representan el tránsito desde la realidad al modelo matemático, tal como lo muestra el siguiente diagrama:

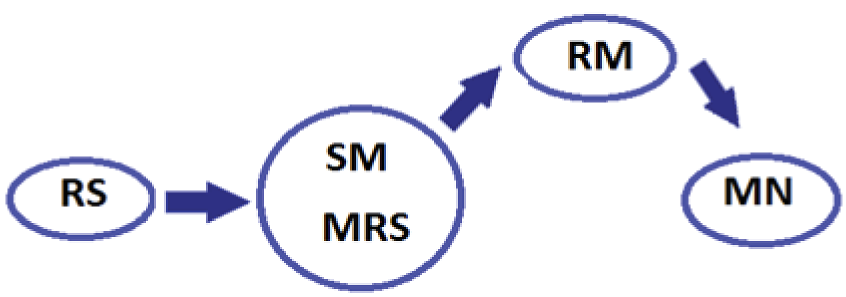


Figura 2. Procesos cognitivos (Guerrero y Mena, 2015, p)

Situación Real:	**RS**	Representación Mental de la Situación:	**MRS**
Modelo real:	**RM**	Modelo Matemático:	**MM**

Estos aspectos representan las etapas que están presentes en el tránsito entre la situación cotidiana, llamada realidad, con el modelo matemático. Estas etapas vienen argumentadas por el análisis cognitivo que se le realiza a cada una de ellas, profundizando en las interacciones de cada una de estas.
El modelar una situación incluye distintos procesos, tanto matemáticos como los que relacionan las situaciones cotidianas con la matemática, así mismo considera las situaciones que son presentadas a través de su modelo matemático y su solución, en las cuales el estudiante debe interpretar el modelo basado en el contexto en el cual se encuentra.

CLASES DE LA SECUENCIA

Como se ha mencionado anteriormente, la consecución de los objetivos, se basa principalmente en llevar a cabo las clases diseñadas para la secuencia descrita. Es por esto que a continuación se detallarán las dos clases restantes, a través de su plan de clases, los cuales contienen un análisis detallado de las actividades matemáticas involucradas, las posibles estrategias-dificultades que presentará el estudiante y la intervención que deberá tener el docente en la realización de cada una de estas.

Las clases de la secuencia, se enmarcan dentro de lo siguiente:

- **Nombre de la Unidad:** Geometría
- **Nombre de la sub-unidad:** Rectas en el Plano
- **Nombre del tema:** Sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución en $\mathbb{R}^2$.
- **Aprendizajes Esperados:**

  AE 13
  Relacionar sistemas $2x2$ de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar soluciones gráficas.

  AE 14
  Resolver problemas de sistemas $2x2$ de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.

PLANES DE CLASES

CLASE 1

Minutos	Actividades: Tareas Matemáticas	Posibles estrategias de resolución de los estudiantes.	Intervenciones del profesor
	INICIO		
5	Inicio de la clase: • Acogida y normalización. Indicaciones de la clase: forma de trabajo y conformación de grupos (4 personas).	• Escuchar atentamente al profesor. • Formar los grupos de trabajo indicados. Iniciar trabajo *grupal de forma* autónoma.	• Generar clima de clase adecuado a la actividad. • Informarle a los estudiantes que durante la clase se trabajará en grupo, por lo que deben asociarse de a 4 estudiantes por grupo. • Entregar material impreso a cada grupo (Guía).
	DESARROLLO		
10	**Actividad 1: Analicen y respondan:** **a) ¿Qué es el conjunto solución de una ecuación lineal de una o dos incógnita?** **b) ¿Cuántos elementos puede poseer el**	Cada grupo debate acerca de la veracidad de la afirmación propuesta. *¿Qué se espera?* Que cada grupo debata acerca de lo que significa conjunto solución y sea capaz de determinar la cantidad de elementos que puede tener éste. **Estrategias:** a) Vincular los conceptos conocidos, como conjunto y solución, y definir en base a estos. b) Dar distintas ecuaciones, resolverlas y analizar que puede suceder con estos, clasificando en categorías según la cantidad de elementos.	El profesor observa a cada grupo y luego de 5 minutos realiza un pequeño plenario entorno a la pregunta, escuchando los argumentos y confirmando las respuestas correctas. Ante el olvido de algún grupo que no recuerde qué es una ecuación lineal el profesor puede guiar con las siguientes

	conjunto solución de una ecuación lineal? **Respuesta Experta:** **a)** Conjunto de solución de una ecuación lineal es el conjunto de valores que la satisfacen. Es un subconjunto de los valores “permitidos” a las incógnitas. **b)** El conjunto de soluciones puede tener un solo elemento, varios (incluso infinitos, por ejemplo en una identidad) o ninguno (el conjunto vacío).	**Posibles dificultades y/o errores:** - No recordar el concepto de ecuación de lineal. - No poder expresar con concepto matemáticos certeros las definiciones propuestas por el grupo. - No considerar el caso que el conjunto no tenga elementos o tenga infinitos elementos. **Posibles Respuesta:** a) - Es el conjunto que tiene como elementos las soluciones de la ecuación. - Es el conjunto que tiene como elementos los valores que satisfacen la ecuación. - Es el conjunto que tiene como elementos los números que cumplen la igualdad. b) - Puede tener un elemento o muchos, dependiendo de la ecuación. - Según la ecuación puede que no tenga elementos, que tenga uno o varios. - Puede tener ningún elemento, un elemento, varios o infinitos.	preguntas: • ¿Puedes dar un ejemplo de una ecuación de primer grado con una incógnita? • ¿Puedes crear otra ecuación de primer grado pero con dos incógnitas? Si no se consideran algunos casos de la cantidad de elementos del conjunto, se invita al estudiante a reflexionar a través de las preguntas: ¿Son todos esos los casos? ¿Existe alguna ecuación no tenga una única solución? Da un ejemplo. **Conocimientos Previos:** - Ecuación lineal de una variable - Ecuación lineal de una o dos incógnitas - Conjuntos

10	**Actividad 2: Para cada una de las siguientes ecuaciones:** a) $2x + 3 = 9$ b) $4x + 8 = 4(x + 2)$ c) $3x + 5 = 3x - 9$ **Determina su conjunto solución y descríbelo según su cantidad de elementos.** **Respuesta Experta:** a) $S = \{3\}$ El conjunto solución tiene un elemento. b) $S = \mathbb{R}$ El conjunto solución posee infinitos elementos. c) S= $\emptyset$ El conjunto solución no posee elementos.	*<u>Objetivo actividad</u>: Describir el conjunto solución de cada ecuación y analizar los distintos casos.* *¿Qué se espera?* Que cada grupo sea capaz de analizar cada conjunto solución, diferenciando los 3 casos según su cantidad de elementos. **Estrategias:** - Resolver cada ecuación y analizar la(s) solución(es). - Dar valores a la incógnita para satisfacer la igualdad. **Posibles dificultades y/o errores:** - No saber resolver ecuaciones lineales. - No considerar todas las soluciones posibles. - Resolver mal las ecuaciones. - No poder describirlo el conjunto solución según la cantidad de elementos. **Posibles Respuestas:** a) - La solución es 3. - Para $x = 3$ se satisface la ecuación. - Para $x = 3$ se cumple la igualdad. - El conjunto solución posee un único elemento que es 3. c) - La solución es cualquier número. – cualquier número que satisface la ecuación. - Para cualquier número se cumple la igualdad. - El conjunto solución posee cualquier número.	**Actividad 2:** El profesor verifica que cada grupo logre determinar el conjunto solución de las ecuaciones planteadas y que expresen su respuesta de la mejor manera. Orienta la acción de los alumnos preguntando: ¿Qué nos piden? ¿Cómo podemos conocer el conjunto solución de una ecuación lineal? Si las soluciones entregadas están erróneas, el docente cuestiona: ¿Las soluciones satisfacen la ecuación? Finalmente se realiza un plenario, en donde se escogen algunos representantes de cada grupo para que expongan su solución. **Conocimientos Previos:** - Resolución de

		– El conjunto solución posee infinitos elementos. – El conjunto solución es el conjunto de los números Reales. a) - La solución no existe. - ningún número se satisface la ecuación. - Para ningún número se cumple la igualdad. - El conjunto solución No posee números. – El conjunto solución No posee elementos. – El conjunto solución es un conjunto vacío.	ecuaciones lineales de una incógnita - Cardinalidad de Conjuntos
10	**Actividad 3: Para la ecuación de dos variables: $x + y = 15$ Determina su conjunto solución y descríbelo según la cantidad de elementos.** **Respuesta Experta:** $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \ / \ x + y = 15\}$ Podemos decir que todos los puntos que pertenecen a la recta: $y = 15 - x$, son elementos del conjunto solución.	*<u>Objetivo actividad</u>: Identificar el conjunto solución de una ecuación lineal de dos incógnitas* *¿Qué se espera?* Que los grupos logren identificar las soluciones de la ecuación lineal de dos variables y clasificarlas de algún modo, buscando alguna representación común para todas las soluciones. **Estrategias:** - Asignar valores arbitrariamente que satisfagan la ecuación. - Representar gráficamente la ecuación línea de dos variables. **Posibles dificultades y/o errores** - No recordar las ecuaciones lineales de dos incógnitas. - No considerar todas las soluciones posibles. - No saber expresar las soluciones de una forma	**Actividad 3** El docente se traslada por la sala verificando que los grupos estén determinando y describiendo el conjunto solución. También puede apoyar la reflexión de los estudiantes preguntado por la representación gráfica del conjunto solución. En caso que los estudiantes insistan en que no tiene solución o no sepan expresarlas, invitarlos a la reflexión:

		general. - Decir que no se puede resolver ya que tiene dos incógnitas y una sola ecuación. **Posibles respuestas:** - El conjunto solución son todos los pares ordenados (x, y) que cumplan con $x + y = 15$ - Es la recta que $y = 15 - x$. - El conjunto solución tiene infinitos elementos. - El conjunto solución son infinitos puntos. - El conjunto solución son todos los puntos que pertenecen a las recta $y = 15 - x$.	¿Existen valores que satisfacen la ecuación? ¿Cuántos? ¿Es posible escribirlos por comprensión? **Conocimientos Previos:** - Ecuación lineales de dos incógnitas
10	**Actividad 4: El sistema de ecuaciones** $\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{array}$ **tiene como único elemento de su conjunto solución el par ordenado $(11, 4)$.** **a) Explica qué significa la afirmación anterior.** **b) ¿Es posible agregar una ecuación al sistema y que el**	<u>*Objetivo actividad:*</u> Analizar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales *¿Qué se espera?* Que los grupos logren analizar el conjunto solución de ecuaciones lineales y logren determinar que el elemento perteneciente al conjunto solución debe satisfacer a cada ecuación del sistema. ***Estrategias*** - Resolver el problema para confirmar dicha afirmación y analizar el conjunto solución del sistema. - Representar gráficamente el sistema de ecuaciones y analizar en este mismo registro su conjunto solución.	El docente va guiando las discusiones de cada grupo, comprobando que la interpretación sea que el punto satisface a ambas ecuaciones o que gráficamente el punto pertenece a ambas rectas. La reflexión inicial el profesor puede orientarla sobre la pregunta: ¿Qué es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones? ¿Esa solución es independiente de cada ecuación?

	conjunto solución no varíe? Si es posible ¿Qué condición debe cumplir ésta? **c)** **Respuesta Experta:** a) Significa que el punto $(11,4)$ satisface ambas ecuaciones o que ambas rectas pasan por el punto $(11,4)$ **b)** Si, es posible. Debe cumplir que el punto $(11,4)$ satisfaga a la ecuación agregada o que la recta agregada debe pasar por el punto $(11,4)$	**Posibles dificultades y/o errores** - No comprender lo que es un sistema de ecuaciones - No relacionar el par ordenado con los valores de las incógnitas. - Explicar que el par ordenado satisface una sola ecuación o no vincularlo con las soluciones de cada ecuación. - Considerar que el par ordenado es solución del sistema, no de cada solución **Posibles Respuestas:** - El elemento que pertenece al conjunto solución satisface a ambas ecuaciones. - El elemento que pertenece al conjunto solución cumple ambas igualdades. - El elemento que pertenece al conjunto solución es un punto y este punto pertenece a ambas rectas pertenecientes al sistema de ecuaciones. - Si, la ecuación que se agregue debe tener como solución el mismo elemento que indicado. - Si, el punto $(11,4)$ también debe satisfacer la ecuación agregada. - Si, el punto $(11,4)$ también debe cumplir la ecuación agregada.	Si los estudiantes interpretan de manera incorrecta, se puede hacer explícita la instrucción de hacer un análisis gráfico para ayudar la reflexión. Es importante que si los estudiantes no relacionan el par ordenado con los valores de las incógnitas el docente apoyo ese vínculo indicando que el par ordenado indica los valores de las coordenadas. **Conocimientos Previos:** -Sistema de ecuaciones lineales - Conjunto solución

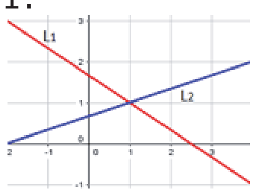
CIERRE			
5	**Sintetizar los contenidos trabajados durante la clase.** - **Descripción del conjunto solución.**	Cada grupo aportará voluntariamente a hacer un resumen de la clase y sus contenidos. De esta manera apoyará la institucionalización del profesor.	El docente institucionaliza todos los conceptos construidos por los estudiantes a través de la clase. De esta manera el concepto de conjunto solución debe quedar internalizado en el estudiante.

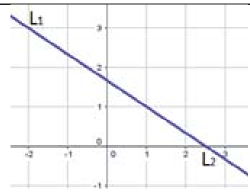
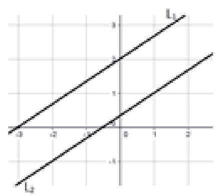
CLASE 2			
Minutos	**Actividades: Tareas Matemáticas**	**Posibles estrategias de resolución de los estudiantes.**	**Intervenciones del profesor**
0 – 5	Inicio de la clase: • Acogida y normalización. • Indicaciones de la clase: forma de trabajo y conformación de grupos (3 personas).	• Escuchar atentamente al profesor. • Formar los grupos de trabajo indicados. • Iniciar trabajo grupal de forma autónoma.	• Generar clima de clase adecuado a la actividad. • Dar las indicaciones de la clase. • Recordar los grupos que han sido previamente confeccionados en la clase anterior por el

			docente (se proyectan en PPT) y la distribución del espacio al interior de la sala de clases. • Entregar material impreso a cada grupo (Guía).
5 – 10	Actividad 1: Decide si la siguiente afirmación es cierta o no: Una ecuación de primer grado con una o dos incógnitas representa siempre una recta. Respuesta experta: Las ecuaciones lineales de varias variables admiten también interpretaciones geométricas, cuando los coeficientes de la ecuación pertenecen a un cuerpo. Así una función lineal de dos variables de la forma $f(x,y) = a_1 x + a_2 y$ representa una recta en un plano.	Cada grupo debate acerca de la veracidad de la afirmación propuesta. Se espera que la mayoría concluyan que la afirmación es verdadera. **Estrategias:** • Asignar valores a las constantes m y n de una ecuación lineal de la forma • $y = mx + n$ y graficar en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores".	El profesor observa a cada grupo y luego de 3 minutos realiza un pequeño plenario entorno a la pregunta, escuchando los argumentos y confirmando que la afirmación es verdadera. Ante el olvido de algún grupo que no recuerde qué es una ecuación de primer grado de dos incógnitas, el profesor puede guiar con las siguientes preguntas: • ¿Puedes dar un ejemplo de una ecuación de primer

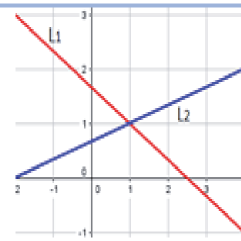
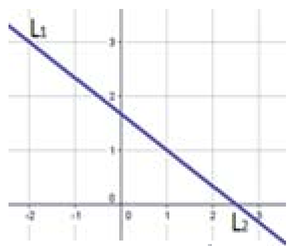
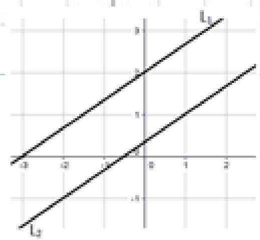
		Posibles Dificultades y/o errores: • No reconocer cuando una variable $(x\ o\ y)$ toma el valor nulo, igualmente corresponde a una recta paralela a los ejes coordenados, según corresponda. • No reconocer de qué forma es una ecuación de primer grado. • Los estudiantes se quedan con las ecuación de primer grado y no consideran el resto del enunciado, así ven ecuaciones como $2x - 3 = 5$. • Considerar como ecuación de primer grado a una ecuación del tipo $xy = c$ • Asignar valores y equivocarse en el tratamiento algebraico de manera que el gráfico no represente una recta. **Posibles respuestas:** • Sí, porque la ecuación es lineal. • Sí, porque si se dan valores a la variable y se gráfica,	grado con una incógnita? • ¿Puedes crear otra ecuación de primer grado pero con dos incógnitas? • La ecuación que me acabas de entregar, ¿cuántas soluciones tiene? ¿Por qué? • ¿Cómo se representan en el plano estas soluciones? Por otro lado, si un grupo cree que la solución de la ecuación es un único par ordenado, la mediación del profesor puede ser: • Si cambiamos el valor de una de las incógnitas, por ejemplo el sucesor del número encontrado. La otra incógnita, ¿qué valor tendría que tomar para que la igualdad se siguiera cumpliendo? **Conceptos previos:**

		representa una línea en el plano. • No, porque la solución de una ecuación es un número. • No, porque una ecuación no se puede graficar.	- Ecuación lineal con una o dos incógnitas.
10 – 25	**Actividad 2:** **¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2, es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?** **Respuesta experta:** Cada una de las ecuaciones pertenecientes al sistema representa una recta en el plano cartesiano. Por lo que el sistema de ecuaciones $2x2$ representa dos rectas en el plano.	Se espera que los grupos logren identificar que un sistema de ecuaciones de 2×2 representa dos rectas en el plano y luego en la actividad 3 logren visualizar los 3 casos posibles (secantes, paralelas o coincidentes). **Estrategias:** • Los estudiantes crean un sistema de ecuaciones lineales y asignan valores a las constantes m y n de cada ecuación de la forma $y = mx + n$ y grafican en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores". • Infieren de la actividad 1. Una ecuación lineal se representa gráficamente a través de una recta, entonces dos ecuaciones se representarán como dos	• El docente entrega una hoja tamaño carta con planos cartesianos para que el grupo pueda realizar la actividad 3 y observa el trabajo de los grupos, les da unos 3 min para la actividad 2. -Posibles devoluciones durante la actividad 2, según las dificultades y errores explicitados: • ¿Nos están preguntando por el conjunto solución? • ¿Cuántos elementos forman el sistema de ecuaciones? • ¿Qué representa cada uno de esos

	Actividad 3: **Representa gráficamente de todas las formas posibles dos rectas en el plano cartesiano.** **Respuesta experta:** • Forma 1:  . Forma 2:	rectas. **Posibles dificultades y/o errores:** • Los estudiantes observan al sistema de ecuaciones como un solo objeto y no reconocen que está formado por dos rectas. • Representan gráficamente el sistema de ecuaciones a través de su solución. • Asignan valores y se equivocan en el tratamiento algebraico de manera que el gráfico no represente dos rectas. **Posibles respuestas:** • El sistema representará lo que determine su conjunto solución. • El sistema representa dos rectas en el plano.	elementos? Luego el docente incentiva a que busquen otras representaciones **Conceptos Previos:** - Sistema de ecuaciones lineales de 2x2 - Posibles devoluciones durante la actividad 3, según las dificultades y errores explicitados: (1) No considerar rectas coincidentes: el profesor puede guiar la reflexión mediante las siguientes preguntas. • La suma de dos

	 Forma 3: 	• La representación gráfica dependerá de cómo sean las ecuaciones del sistema. **Actividad 3:** **Estrategias:** • Trazar distintas rectas (de a pares) en el plano al azar. • Trazar las rectas considerando sus posiciones relativas: paralelas o secantes. **Posibles Dificultades y/o Errores:** • No considerar que las rectas puedan ser coincidentes. • Considerar que siempre dos rectas se intersectan. • Considerar como casos distintos los que tienen el mismo tipo de conjunto solución, por ejemplo rectas paralelas con pendiente positiva versus rectas paralelas con pendientes negativas, o si se encuentran en distinto cuadrantes. • Pensar que un sistema de ecuaciones de $2x2$ se	números es igual a 5, ¿cuáles son los posibles números? • La suma del doble de un número con el doble de otro número es igual a 10, ¿cuáles son los posibles números? De este modo, con un caso sencillo el alumno podrá visualizar que estos dos casos tienen iguales soluciones, es decir son ecuaciones cuyo conjunto solución son iguales. Ahora bien: ¿cómo se graficaría el conjunto solución de cada caso en el plano? (2) Considerar solo un punto como la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales (rectas secantes): el profesor puede recordar que la solución del sistema serán los puntos que son comunes a ambas *rectas*, o de otro modo, que satisfagan ambas ecuaciones. En general no

		representa gráficamente como un punto (solo considerar dos rectas secantes y pensar en el conjunto solución). • Considerar como casos distintos dos rectas perpendiculares y dos rectas secantes que no forman un ángulo recto. **Posibles respuestas:** • Graficar las tres formas posibles • Considerar solo las formas 1 y 3, pues en estas aparecen las dos rectas visibles.	sabemos este punto a priori y por este motivo graficamos cada recta y visualizamos si tienen puntos comunes o no. - Plenario: en el minuto 20, el docente realiza una puesta en común respecto de la actividad 3, para ello pide a un representante de algunos grupos que salga a la pizarra a mostrar una de las formas encontradas. El docente proyectará 3 planos cartesianos para completar. **Conceptos Previos:** - Representación gráfica de una recta -
25 – 50	**Actividad 4:** **Describe el conjunto solución de los sistemas graficados en la actividad 3 y asócialo a una representación geométrica, según la posición de las rectas.**	**Actividad 4** **Estrategias:** • Analizar los puntos comunes de ambas rectas como objetos geométricos (puntos, rectas, segmentos, líneas, etc.)	**Actividad 4:** El docente se traslada por la sala verificando que los grupos estén empleando los conceptos geométricos apropiados para cada conjunto solución, por ejemplo, punto, recta o vacío.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Respuesta experta:
<table>
<tr><td>Descripción conjunto solución</td><td>Representación geométrica</td></tr>
<tr><td>Forma 1:
El conjunto solución es el punto donde se intersectan las dos rectas en el plano cartesiano. .</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Forma 2:
El conjunto solución es la recta que representa ambas ecuaciones en el plano cartesiano, ya que estas son coincidentes.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Forma 3:
El conjunto solución es vacío ya que las rectas no se intersectan.</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
Posibles Dificultades y/o Errores:

Confundir el describir geométricamente la solución de un sistema de ecuaciones con encontrar explícitamente los valores solución. Es posible que algunos estudiantes, con el afán de encontrar explícitamente las soluciones se creen ecuaciones que describan las rectas dibujadas (similar a la actividad 5).
No reconocer que la solución gráfica de un sistema de ecuaciones está representada por la intersección de las todas rectas del sistema.
No reconocer que un sistema de ecuaciones posee un conjunto solución.
No reconocer gráficamente la solución.
No describir el conjunto solución y basar la respuesta en la cantidad de soluciones que tiene cada forma.
Mencionar que el sistema de la forma 3 no tiene solución.

</td>
<td>
En caso que el estudiante solo describa la cantidad de soluciones y no su representación gráfica, por ejemplo, en el caso de rectas coincidentes que el estudiante diga que tiene infinitas soluciones, el profesor le puede sugerir la siguiente pregunta:

Conceptos Previos:

Representación gráfica de una recta
Sistemas de ecuaciones lineales
Conjunto solución

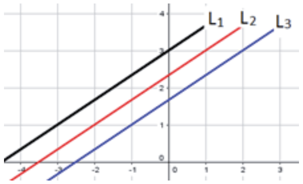
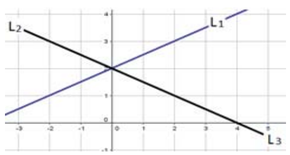
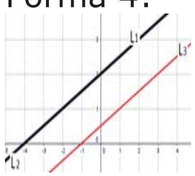
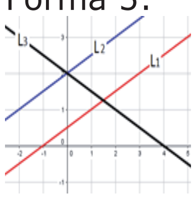
</td>
</tr>
</table>

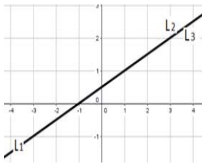
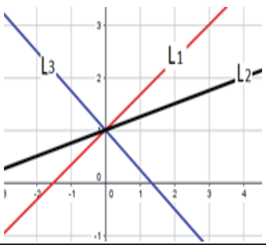
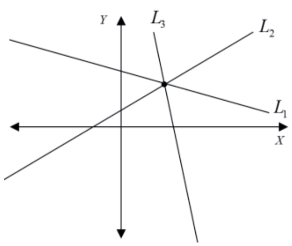
	Actividad 5: **Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.** **Respuesta experta:** Caso 1: Para que el conjunto solución sea un punto, las pendientes de las rectas deben ser diferentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ Con $\frac{-A}{B} \neq \frac{-D}{E}$ Caso 2: Para que el conjunto solución sea una recta, las rectas deben ser coincidentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ Con $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$ Caso 3: Para que el conjunto solución	• Identificar como un mismo caso la forma 2 y la forma 3, pues ambas poseen la misma pendiente. • Mencionar que el sistema de la forma 2 no tiene solución. • Describir solamente la gráfica y no el conjunto solución. **Posibles respuestas:** • Describir una solución particular para cada una de las formas. • Mencionar la cantidad de soluciones que tiene cada forma. • El sistema de la forma 3 tiene solución vacía. **Actividad 5** **Estrategias:** • Escribir un sistema en particular y encontrar el conjunto solución y asignar ese sistema a una de las formas posibles. • Escribir una solución e idear un sistema donde tal solución	**Actividad 5:** El profesor verifica que cada grupo logre construir un sistema de ecuaciones para cada gráfica de la actividad anterior. Si a los estudiantes se les dificulta la construcción algebraica de estas rectas se le puede recordar la ecuación particular de la recta y=mx+n, donde m es la pendiente de la recta y n es el coeficiente de posición. Para los estudiantes que creen que si los coeficientes son todos distintos entonces el sistema de ecuaciones es del tipo 1, se les puede sugerir estudiar el sistema formado por las ecuaciones $x + 2y = 3$ y otra $4x + 8y = 12$. Para aquellos grupos de estudiantes que tengan mal asociado un sistema de ecuaciones con un determinado tipo de representación gráfica, se le

	sea vacío, las rectas deben ser paralelas y no coincidentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $$Ax + By + C = 0$$ $$Dx + Ey + F = 0$$ Con $\frac{-A}{B} = \frac{-D}{E}$	satisfaga las dos ecuaciones. • Es muy probable que algunos estudiantes no usen la forma general de la ecuación de la recta ($Ax + By = C$) y usen por comodidad la ecuación particular de la recta ($y = mx + n$) • Graficar las rectas y de ahí sacar las ecuaciones que representan esas rectas. • Usar la ecuación particular de la recta modificando los valores de m y n para cada ecuación lineal de cada caso. • Ensayo y error. **Posibles Dificultades y/o Errores:** • Considerar que deben encontrar el sistema de ecuación exacto de su representación gráfica entregada, aun no entendiendo que se le pide un sistema de ecuaciones que represente ese caso (por ejemplo, que el conjunto solución sea un punto). • No vincular la pendiente con	puede sugerir al grupo que reescriban cada ecuación del modo particular de la recta. De esta forma es más sencillo visualizar la relación entre los coeficientes y el paralelismo de las rectas, o si son coincidentes o secantes. Finalmente en el minuto 40 se realiza un plenario, en donde se escogen algunos representantes de cada grupo y entregan un ejemplo para cada tipo de sistema. **Conceptos Previos**: - Sistemas de ecuaciones lineales y su representación gráfica.

		la posición relativa de las rectas en el plano. • Escribir las ecuaciones del sistema en forma general y no poder determinar las pendientes de forma correcta. • Considerar que cuando dos rectas tienen la misma pendiente son solamente paralelas. • Escribir cualquier sistema de ecuación sin corroborar que cumple con la forma asignada. • Considerar que si las ecuaciones tienen todos los coeficientes distintos el sistema de ecuaciones representará la forma 1. • Determinar de manera errónea la pendiente de las rectas. **Posibles respuestas:** • Los sistemas de ecuaciones de $2\,x\,2$ que representan los casos de la actividad 4. Los sistema pueden estar representados de las siguientes formas:	

		1) $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ 2) $Ax + By = C$ $Dx + Ey = F$ 3) $y = Ax + B$ $y = Dx + F$	
50 – 70	**Actividad 6: Representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 3×2, es decir, tres ecuaciones y dos incógnitas.** **Actividad 7: Representa gráficamente de todas las formas posibles tres rectas en el plano cartesiano.** **Respuesta experta:** La respuesta experta de esta actividad también corresponde a la de la actividad número 7, ya que en ésta a los estudiantes se les pide sólo hacer una representación de las siete posibles, por lo que podrían hacer cualquiera de las siguientes:	Se espera que los grupos identifiquen que un sistema de ecuaciones de $3x2$ representa tres rectas en el plano y luego en la actividad 7 logren visualizar los 7 casos posibles. **Actividad 6** **Estrategias:** • Fijar una recta e ir modificando las otras dos para obtener las distintas formas. **Posibles Dificultades y/o Errores:** • No considerar que las tres rectas pueden ser coincidentes. • No considerar como válido	**Actividad 6:** - El docente entrega una hoja tamaño carta con planos cartesianos para que el grupo pueda realizar la actividad 6 y 7. - Se darán 2 minutos para que dibujen libremente la representación del sistema de ecuaciones. El docente supervisa el trabajo de los estudiantes buscando aquellas que el conjunto solución sea de la misma forma (un punto, una recta o el conjunto vacío). - Se revisarán en plenario las representaciones realizadas, poniendo en relieve los conjuntos solución en cada

	Forma 1  Forma 2:  Forma 3:  Forma 4:  Forma 5: 	que dos pueden coincidir y que esta recta se intercepte con la tercera. Considerar como formas distintas cuando dos rectas son paralelas y la tercera recta transversal perpendicular a estas y cuando dos rectas son paralelas y la tercera recta transversal forma un ángulo distinto al ángulo recto con las otras rectas. • Considerar como casos distintos los que tienen el mismo tipo de conjunto solución, por ejemplo, rectas paralelas con pendiente positiva versus rectas paralelas con pendientes negativas, o si se encuentran en distintos cuadrantes. • Considerar como la misma forma cuando las rectas son paralelas y cuando son coincidentes. **Posibles respuestas:** • Dibujar tres rectas en el plano y sus 7 posibilidades.	caso. Se revisan máximo dos casos de igual conjunto solución en la pizarra. **Actividad 7:** El docente incentiva a los estudiantes a dibujar los distintos casos, reflexionando cuando los estudiantes consideren casos similares como casos distintos, por ejemplo tres rectas paralelas con pendiente positiva y tres rectas paralelas con pendiente negativa, ver que en ambos casos el conjunto solución tiene la misma "forma o cantidad de soluciones". En este caso recordar la reflexión realizada en la actividad 3. En el minuto 60 se revisa las distintas representaciones efectuadas por los estudiantes en forma plenaria, recogiendo las 7 representaciones posibles, invita a los estudiantes a

	Forma 6:  Forma 7: 	• Dibujar tres rectas en el plano sin considerar los 7 casos.	evidenciar las diferencias entre ellas. **Conceptos Previos:** Sistemas de ecuaciones lineales y su representación gráfica.
70–90	**Actividad 8:** **En la figura, el punto de intersección satisface a cada una de las ecuaciones del sistema,**  **¿Qué ocurre en cada una de las distintas formas graficadas en la**	Se espera que los grupos logren visualizar la naturaleza del conjunto solución de cada uno de los 7 casos, según su representación en el plano cartesiano. **Actividad 8** **Estrategias:** • Categorizar los sistemas según la cantidad de soluciones que presente el sistema.	El docente va guiando las discusiones de cada grupo, comprobando que las clasificaciones sean en los siguientes tipos: El conjunto solución es vacío, tiene una única solución, el conjunto solución tiene infinitos elementos. Si los estudiantes describen cada sistema según la posición relativa de las rectas y no según la cantidad de soluciones, se puede hacer explícita la instrucción de

	actividad 7? **Respuesta experta:** En la forma 1, 2 , 4 y 5 no existe ningún punto de intersección para las tres rectas. Es decir, ningún punto satisface las tres ecuaciones, por lo que el conjunto solución del sistema de ecuaciones es vacío. En la forma 3 y 7 existe un punto de intersección para las tres rectas. Es decir, ese punto satisface las tres ecuaciones, por lo que el conjunto solución del sistema es un punto. En la forma 6 las tres rectas son coincidentes, por lo que existen infinitos puntos colineales que pertenecen a la intersección de las tres rectas. Es decir, el conjunto solución es una recta que representa a las 3 ecuaciones del sistema y por ende contiene infinitos puntos.	**Posibles Dificultades y/o Errores:** • No comprender que solo un par ordenado pertenece al conjunto solución cuando este pertenece a las tres rectas. • No comprender que un punto que satisface a las tres ecuaciones pertenece al conjunto solución • Considerar que en la forma 1, el sistema tiene tres soluciones, pues "aparecen tres puntos de intersección" • Considerar que en la forma 4, el sistema tiene dos soluciones, pues "aparecen dos puntos de intersección" **Posibles respuestas:** • Describir cada sistema según la cantidad de intersecciones que presenten las rectas. • Describir cada sistema según la posición relativa de las rectas.	clasificar los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales en función de la cantidad de soluciones que tengan. Si un estudiante plantea que algún sistema tiene 2 o 3 soluciones, el profesor puede mediar con las siguientes preguntas: • La solución de un sistema, ¿qué condición debe cumplir?. • El docente puede poner de ejemplo un punto que pertenezca solo a una recta y preguntar ¿Puede ser este punto la solución del sistema?, ¿Por qué? • De la misma forma que la pregunta anterior, ¿Por qué este punto (indicarlo en el gráfico) es solución del sistema?, ¿cumple con la condición definida anteriormente? Finalmente en el minuto 80,

		- Mencionar que solamente en la forma 7 el conjunto solución es único y no vacío. - Mencionar que en la forma 6 el sistema tiene infinitas soluciones.	se realiza el último plenario, compartiendo cuáles sistemas tienen solución vacía, tienen solución única y tienen infinitas soluciones. También se realiza la reflexión en torno a la importancia del análisis del conjunto solución mediante la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales. **Conceptos Previos:** -Sistemas de ecuaciones lineales - Conjunto solución

CONCLUSIONES

Los sistemas de ecuaciones lineales son de gran interés para los investigadores debido a la importancia que tienen como herramienta para la resolución de problemas y a la cantidad de dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje de estos, los cuales se han detectado a través de los diversos estudios que se han realizado, los cuales siempre dan pie a una nueva investigación o una nueva propuesta que permita ayudar a superar dichas dificultades.

La importancia que adquiere el objeto matemático en el currículo nacional se ve reflejada en la presencia de este en toda la educación media, siendo desde tercer año básico que se introduce a través de las ecuaciones. Los textos escolares dedican gran parte al desarrollo de este objeto, desde su definición hasta ejercicios de aplicación. Las definiciones de este varían según el nivel en el cual se encuentran, haciendo diferencias especialmente en los conjuntos donde viven sus coeficientes o en los tipos de representación que tendrán los sistemas.

Las dificultades que los estudiantes presentan están ligadas a vacíos de conceptos fundamentales, los cuales fueron adquiridos en el proceso de aprendizaje, por lo cual se puede deducir que alguna actividad o práctica del docente está influyendo y se traduce en dificultades para los alumnos. Esto no permite al estudiante comprender el concepto de conjunto solución y mucho menos interpretarlo, a pesar de estar explícito, especialmente en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Es prácticamente imposible que el estudiante sea capaz de interpretar un concepto que no se declara formalmente en el currículo si no que se "asume" que se debe enseñar. Al no aparecer ni en textos, ni currículo, el docente difícilmente profundizará en dicho contenido, creando inconscientemente esas dificultades que saldrán a la luz en el desarrollo del contenido

Los estudiantes enfrentan las dificultades dependiendo del diseño de las tareas que se les entreguen; es decir, que si hay elementos que dentro de estas que faciliten el sortear la dificultad, el estudiante será capaz de hacerlo en base a sus conocimientos y a corregir internamente conceptos mal adquiridos o mal comprendidos.

El diseño de las actividades de este trabajo tiene como propósito que faciliten la comprensión del conjunto solución apuntando al análisis de este de manera progresiva, vinculando el concepto en cuestión con la resolución del problema, haciendo esta comprensión estrictamente necesaria para lograr cumplir con la tarea propuesta. Es por esto que una situación adidáctica facilita el superar las dificultades, teniendo en la modelización una herramienta que permite ver la evolución del análisis, hasta llegar a un modelo matemático capaz de responder a las exigencias que plantea el problema y a la vez cumplir con los objetivos propuestos para cada clase. Las actividades en las cuales el estudiante se involucra y hace propias, diseñadas desde un marco teórico como la TSD a través de la modelización, permiten que el análisis de la propuesta sea más profundo, independiente del nivel de desarrollo cognitivo que el estudiante posea, ya que estas facilitan el tránsito entre las distintas fases de la mayoría de los estudiantes, para así lograr los objetivos y superar los desafíos detectados previamente en el estudiante.

Es importante que el estudiante comprenda el concepto de conjunto solución, ya que de esta manera lo puede interpretar y contextualizar según lo requiera el problema. Una forma de adquirir esta concepción teórica, dependerá del cumplimiento del objetivo de la clase 1, la cual está diseñada para construir el concepto de conjunto solución de una ecuación lineal de una o dos incógnitas. Una vez adquirido el concepto, el estudiante debe analizarlo en sus distintas representaciones, siendo la representación gráfica la que posee mayor relevancia en los planes y programas correspondientes al nivel. Para realizar este análisis, la clase 2 puede ser una herramienta validad, ya que permite que el estudiante relacione las representaciones gráficas con las interpretaciones del conjunto solución. El modelizar e interpretar el conjunto solución permite además de cumplir con los objetivos trazados, medir y evidenciar los contenidos construidos en las clases anteriores. Para facilitar esto, la clase 3 está diseñada pensando en que los estudiantes pongan en juego todos los conocimientos construidos previamente, a través de una situación cotidiana que deben modelizar para poder resolver.

La investigación arrojó que la modelización diseñada evidentemente potencia el análisis del conjunto solución, ya que no permite solamente resolver el problema sino que también interpretar dependiendo el contexto, por lo que obliga al estudiante a hacer un análisis mayor. Podemos decir que la actividad basada en la modelización fue completada por todos los estudiantes, mostrando una evolución en cuanto al análisis del concepto en cuestión. Si en algún momento de la resolución de la tarea el estudiante se enfrenta a situaciones en las cuales considere que falte información, esto hace que él limite sus justificaciones, y de esta manera el análisis, haciendo que se involucre menos con la tarea.

El que la situación planteada esté conectada directamente con el contexto real del estudiante, hace que este se involucre y utilice todas las herramientas disponibles para argumentar sus respuestas, siendo determinantes los conocimientos previos de cada uno. Si el diseño permite que todos los estudiantes se vean involucrados en la resolución, independiente del nivel de desarrollo de sus habilidades, el análisis del conjunto solución como parte de la solución del problema se ve potenciado transversalmente, desde la motivación frente a la tarea matemática hasta la adquisición de conocimientos.

REFERENCIAS

Berté, A. (1999). Matemática Dinámica. Buenos Aires, Argentina: Editorial AZ.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19. Versión castellana 1993.

Brousseau, G. (2007). Théorie des situations didactiques. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage

De Burgos Román, J. (1993). Álgebra lineal. Madrid, España: Mcgraw-Hill Interamericana de España

Hoffman, K., Kunze, R., & Finsterbusch, H. E. (1973). Álgebra lineal. New Jersey, EEUU: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Figueroa Vera, R. (2013). Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas. Tesis para obtener el grado de Magister en enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Guerra, A. (2012) Propuesta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales. Trabajo final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Guerrero-Ortiz, C., & Mena-Lorca, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, vol.10(1), pp. 1-14. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273341286001

Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. Toronto, Canadá: Birkhauser Boston.

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días. Madrid, España: Alianza Editorial.

MINEDUC (2012). Curriculum en línea. Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyname-623.html

MINEDUC (2012). Bases curriculares. Santiago: MINEDUC. República de Chile.

MINEDUC (2015). Bases curriculares. Santiago: MINEDUC. República de Chile.

Muñoz, G., Rupin, P., & Jiménez, L. (2013). Matemática 2° Medio. Santiago: Ediciones SM.

Oaxaca, J., De la Cruz, J, Sánchez, J. (2009). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Trabajo presentado en el Primer Congreso internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Cuautitlán Izcali, México.

Ochoviet, C. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis de Doctorado. CICATA-IPN. México.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables. Enseñanza de las Ciencias, vol 17(3), pp 453-461.

Segura de Herrero, Sandra Mabel; (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol 7(1), pp. 49-78. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33570103.pdf

.

Actividad Grupal:

I Analicen y respondan:

c) **¿Qué es el conjunto solución de una ecuación lineal de una o dos incógnitas?**

d) **¿Cuántos elementos puede poseer el conjunto solución de una ecuación lineal?**

II Dadas las siguientes ecuaciones en los números reales:

d) $2x + 3 = 9$
e) $4x + 8 = 4(x + 2)$
f) $3x + 5 = 3x - 9$

Determina cada conjunto solución y describe cada uno de estos según su cantidad de elementos.

III Para la ecuación de dos variables: x + y = 15. Describe su conjunto solución.

IV El sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{c} x + y = 15 \\ x - y = 7 \end{array}\right|$ **tiene como único elemento**

en su conjunto solución el par ordenado (11,4). Explica qué significa la afirmación anterior.

a) **Es posible agregar una ecuación al sistema y que el conjunto solución no varié. Si es posible ¿Qué condición debe cumplir ésta?**

Actividad grupal
Sistemas de ecuaciones lineales

Nombres:

1. Decidan si la siguiente afirmación es cierta o no:

> **Una ecuación de primer grado con una o dos incógnitas representa siempre una recta.**

2. ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones lineales de 2×2, es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?

3. Representen gráficamente de todas las formas posibles un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 en el plano cartesiano (pueden utilizar los planos cartesianos adjuntos).

4. Describan el conjunto solución de los sistemas graficados en la actividad 3 y asócienlos a una representación geométrica, según la posición de las rectas.

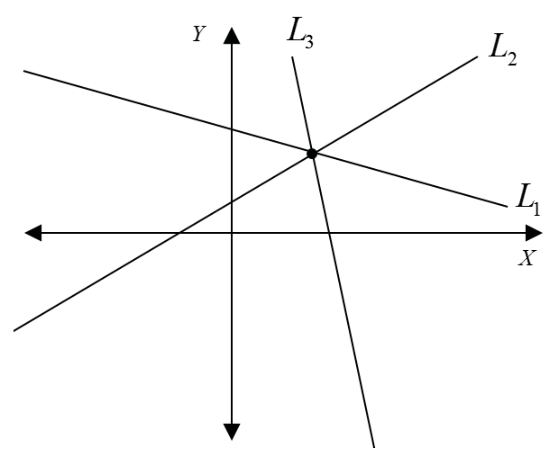
Descripción conjunto solución	Representación geométrica

5. Escriban un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos representados (dibujados) en la actividad 3.

6. Representen gráficamente un sistema de ecuaciones lineales de 3×2, es decir, tres ecuaciones y dos incógnitas.

7. Representen gráficamente de todas las formas posibles, un sistema de ecuaciones lineales de 3×2 en el plano cartesiano (pueden utilizar los planos cartesianos adjuntos).

8. En la figura, el punto de intersección satisface a cada una de las ecuaciones del sistema, ¿qué ocurre en cada una de las distintas formas graficadas en la actividad 7?

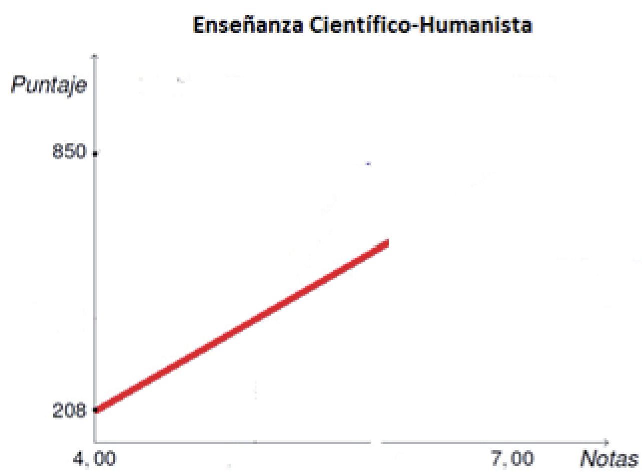


Actividad: Transformando el NEM

Nombres: 1.- 2.- 3.- **Curso:**

En Chile, el proceso de admisión al sistema de educación superior considera diferentes aspectos, dentro de los cuales se encuentra las notas de enseñanza media (NEM). Es por esto, que se creó una tabla de transformación de los promedios para alinear esta escala con la de la PSU. La escala dependerá del tipo de enseñanza de la cual los estudiantes egresen.

Dos amigos, Waldo y Felipe, estudian en un colegio científico humanista y técnico profesional respectivamente, estos tienen la duda de qué puntaje se le asignará a cada uno cuando completen su enseñanza media. Con este objetivo, investigan y encuentran la siguiente información:



Fuente: www.demre.cl

Y para los establecimientos de enseñanza Técnico-Profesional

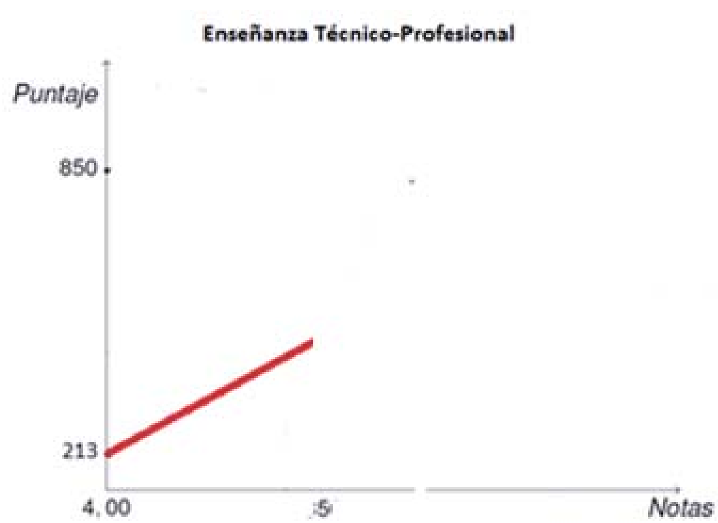
Técnico-Profesional	
NEM	PSU
4,0	213
5,0	417

Fuente: www.demre.cl

1) **Analicen la información que encontraron, discutan y respondan: ¿Ambos estudiantes pueden resolver su duda?¿Por qué?**

R:

Debido a la importancia e interés que les genera este tema, deciden seguir investigando y encuentran lo siguiente:



Fuente: www.demre.cl

Científico-Humanista	
NEM	PSU
4,0	208
7	826

Fuente: www.demre.cl

2) **En base a esta información y la anterior, determinen si existe una nota que sea equivalente (para ambos tipos de enseñanza) en cuanto al puntaje PSU asociado. Justifiquen su respuesta.**

R:

Nicolás, se encuentra con sus amigos y también se interesa en conocer su puntaje, pero él estudia en una escuela de adultos, por lo que al investigar encuentra lo siguiente:

Adultos	
NEM	PSU
6	622
7	824

Después que Nicolás analiza su información y la de sus compañeros, se da la siguiente conversación:

Nicolás: -No existe ninguna nota con la que los tres tengamos el mismo puntaje PSU-

Waldo: -Estás equivocado-

Nicolás: -¿Cómo lo voy a saber? si yo soy malo para las matemáticas-

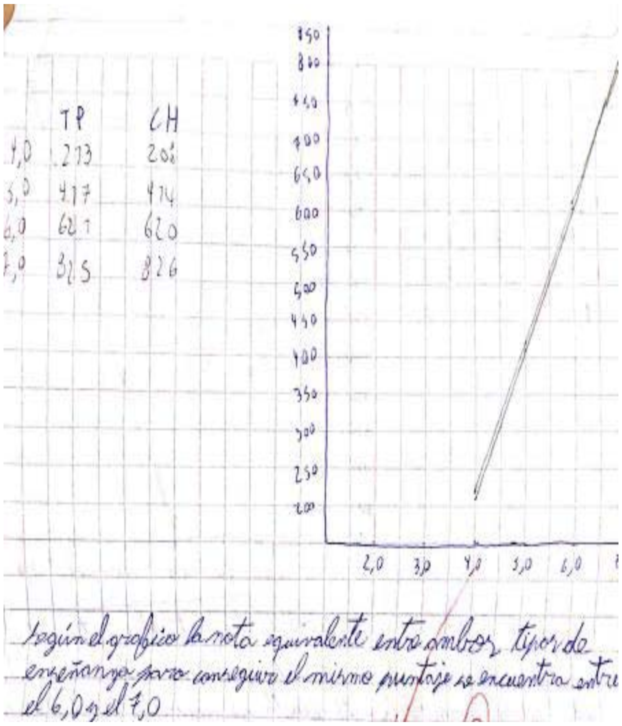
Waldo: -Para saber si existe esa nota, no necesitas ser un gran matemático, sólo necesitas saber dibujar-

3) a) ¿Cuál de los dos tiene la razón? ¿Por qué?

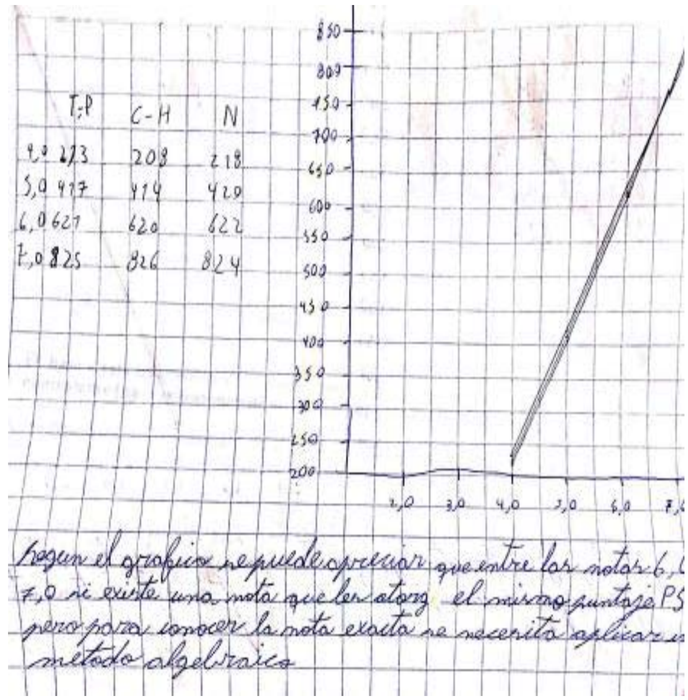
R:

b) Si Waldo tiene la razón, determina qué nota deberían tener los tres estudiantes para obtener el mismo puntaje PSU.

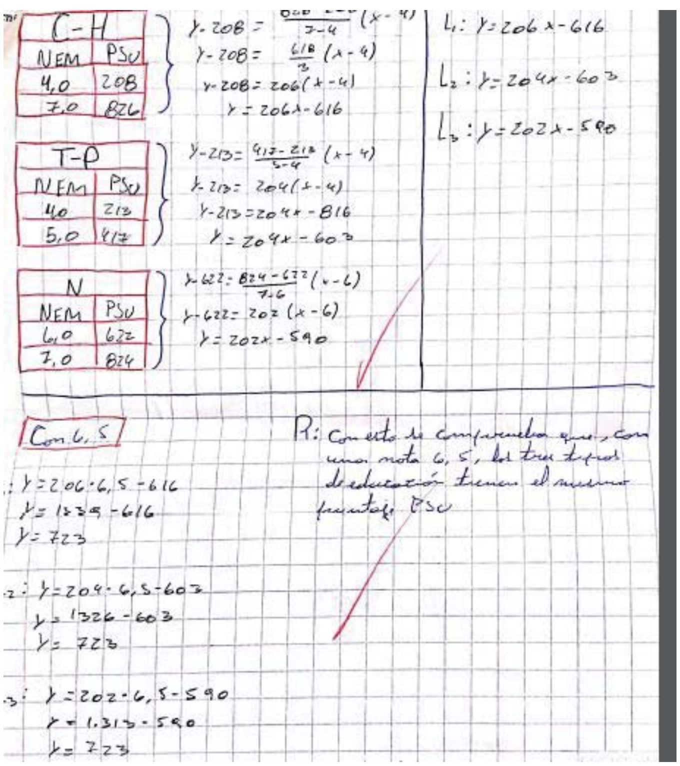
Producciones



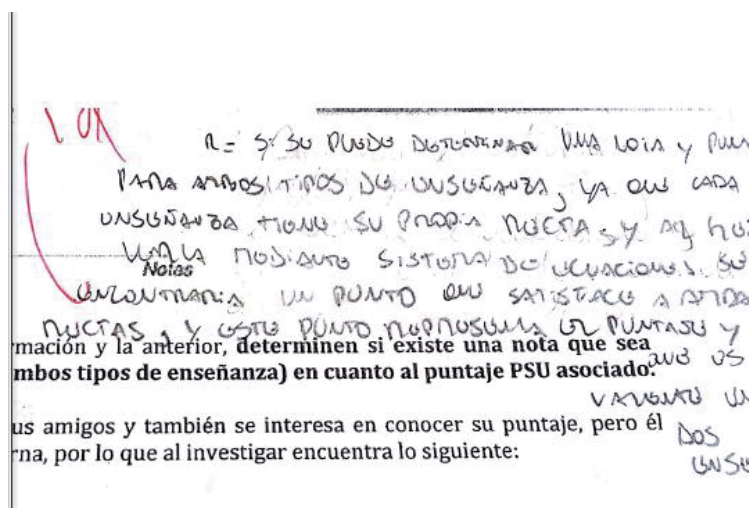
Producción 1 Argumento Gráfico



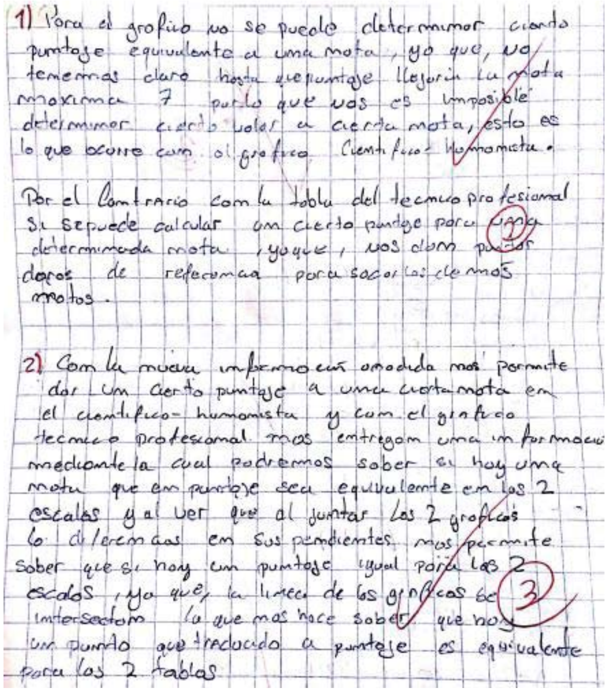
Producción 2 Argumento Gráfico



Producción 3 Análisis del conjunto solución



Producción 4 Análisis del conjunto solución



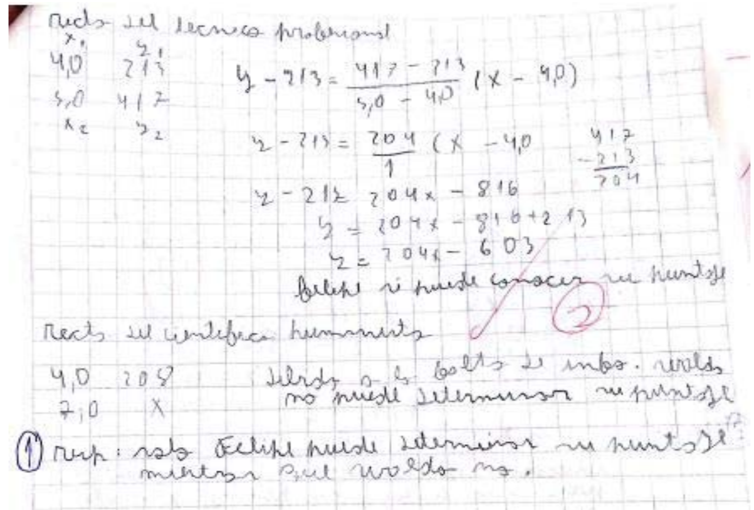
1) Para el gráfico no se puede determinar cierto puntaje equivalente a una nota, ya que, no tenemos claro hasta que puntaje llegaría la nota maxima 7 por lo que nos es imposible determinar cierto valor a cierta nota, esto es lo que ocurre con el grafico Cientifico-Humanista.

Por el contrario con la tabla del tecnico profesional si se puede calcular un cierto puntaje para una determinada nota, ya que, nos dan puntos dados de referencia para sacar las demas notas.

2) Con la nueva informacion añadida nos permite dar un cierto puntaje a una cierta nota en el cientifico-humanista y con el grafico tecnico profesional nos entregan una informacion mediante la cual podremos saber si hay una nota que en puntaje sea equivalente en las 2 escalas y al ver que al juntar las 2 graficas la diferencia en sus pendientes nos permite saber que si hay un puntaje igual para las 2 escalas, ya que, la linea de los graficos se intersectan lo que nos hace saber que hay un punto que traducido a puntaje es equivalente para las 2 tablas

3

Producción 5 Argumento Gráfico



Recta del tecnico profesional

x_1	y_1
4,0	213
5,0	417
x_2	y_2

$y - 213 = \frac{417 - 213}{5,0 - 4,0}(x - 4,0)$

$y - 213 = \frac{204}{1}(x - 4,0)$ $\quad 417 - 213 = 204$

$y - 213 = 204x - 816$

$y = 204x - 816 + 213$

$y = 204x - 603$

Felipe si puede conocer su puntaje

2

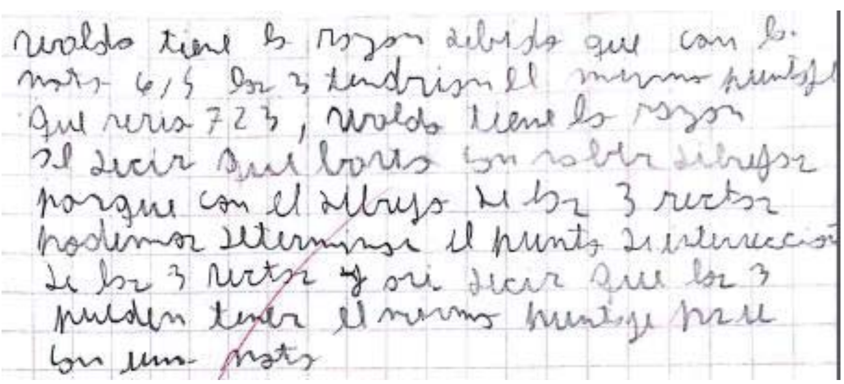
Recta del cientifico humanista

4,0	208
7,0	X

Debido a la falta de datos. Waldo no puede determinar su puntaje

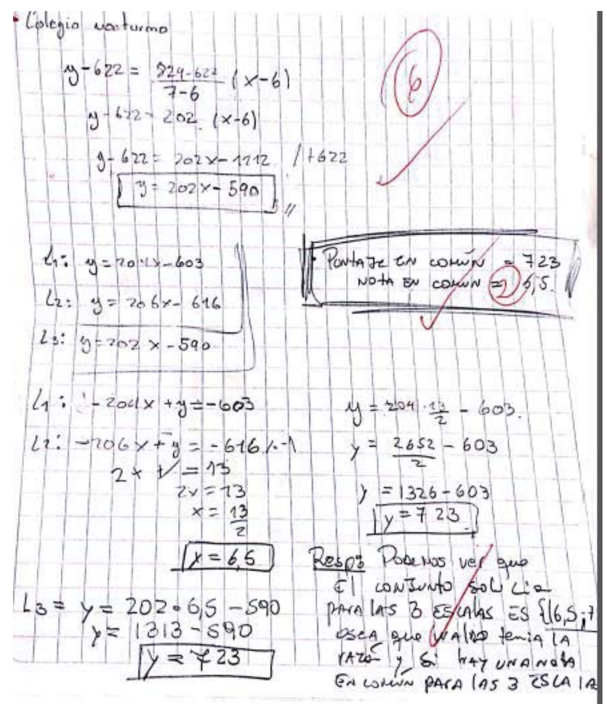
1 resp: solo Felipe puede determinar su puntaje mientras que Waldo no.

Producción 6 Análisis de suficiencia de datos



Waldo tiene la razón debido que con la nota 6,5 las 3 tendrían el mismo puntaje que sería 723, Waldo tiene la razón al decir que bastaba con saber dibujar porque con el dibujo de las 3 rectas podemos determinar el punto de intersección de las 3 rectas y así decir que las 3 pueden tener el mismo puntaje para una nota

Producción 7 Análisis gráfico del conjunto solución



Colegio nocturno

$y - 622 = \frac{824 - 622}{7 - 6}(x - 6)$

$y - 622 = 202(x - 6)$

$y - 622 = 202x - 1212 \quad / + 622$

$\boxed{y = 202x - 590}$

6

$L_1: y = 204x - 603$

$L_2: y = 206x - 616$

$L_3: y = 202x - 590$

$\boxed{\text{Puntaje en común} = 723 \quad \text{Nota en común} = 6,5}$ 2

$L_1: -204x + y = -603$

$L_2: -206x + y = -616 \quad / \cdot -1$

$2x = 13$

$x = \frac{13}{2}$

$\boxed{x = 6,5}$

$y = 204 \cdot \frac{13}{2} - 603$

$y = \frac{2652}{2} - 603$

$y = 1326 - 603$

$\boxed{y = 723}$

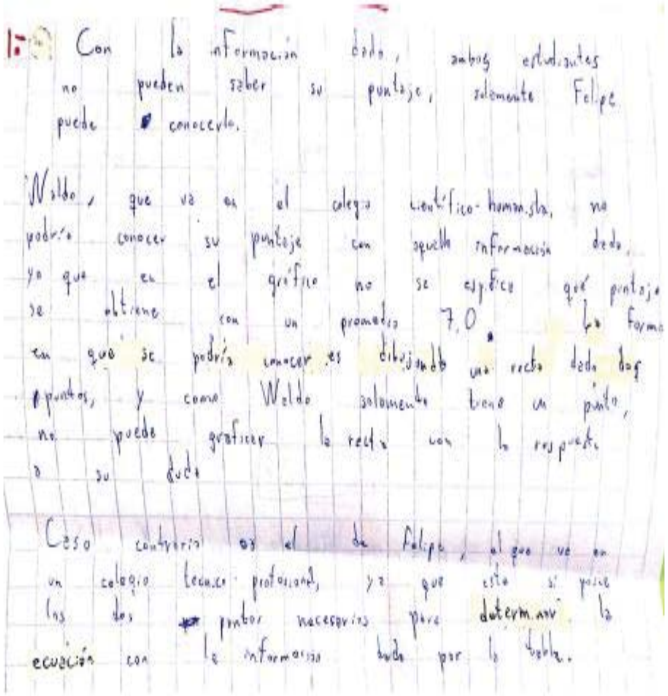
$L_3 = y = 202 \cdot 6,5 - 590$

$y = 1313 - 590$

$\boxed{y = 723}$

Resp: Podemos ver que el conjunto solución para las 3 escalas es {(6,5; 723)} o sea que Waldo tenía la razón y sí hay una nota en común para las 3 escalas

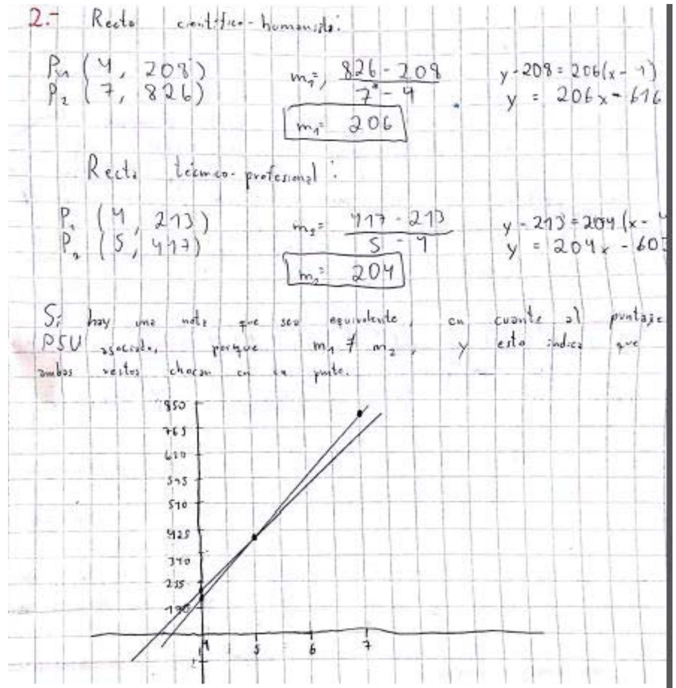
Producción 8 Modelización de la situación real.



1.- Con la información dada, ambos estudiantes no pueden saber su puntaje, solamente Felipe puede conocerlo.

Waldo, que va en el colegio científico-humanista, no podría conocer su puntaje con aquella información dada, ya que en el gráfico no se especifica qué puntaje se obtiene con un promedio 7,0. La forma en que se podría conocer es dibujando una recta dado dos puntos, y como Waldo solamente tiene un punto, no puede graficar la recta con lo respecto a su duda.

Caso contrario es el de Felipe, el que va en un colegio técnico profesional, ya que este sí posee los dos puntos necesarios para determinar la ecuación con la información dada por la tabla.



2.- Recta científico-humanista:

$P_1(4, 208)$, $P_2(7, 826)$ $\quad m_1 = \frac{826-208}{7-4}$ $\quad \boxed{m_1 = 206}$ $\quad y - 208 = 206(x-4)$, $y = 206x - 616$

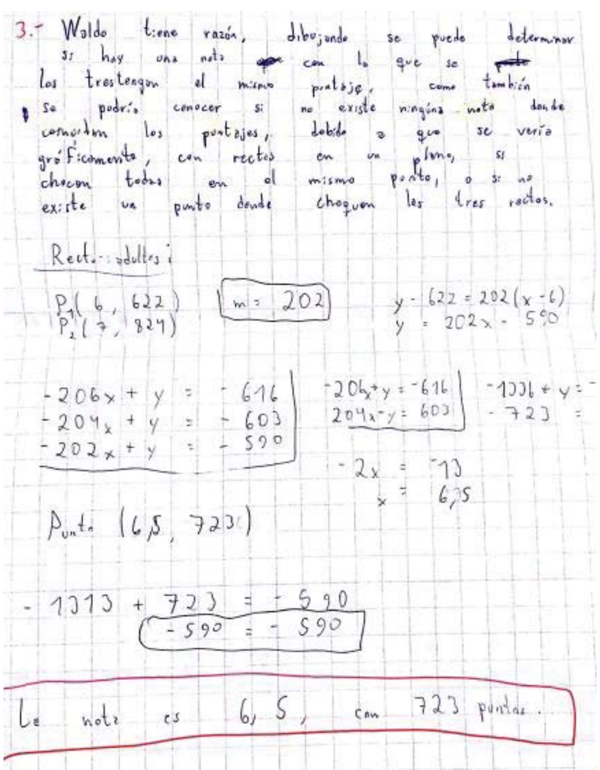
Recta técnico-profesional:

$P_1(4, 213)$, $P_2(5, 417)$ $\quad m_2 = \frac{417-213}{5-4}$ $\quad \boxed{m_2 = 204}$ $\quad y - 213 = 204(x-4)$, $y = 204x - 603$

Si hay una nota que sea equivalente en cuanto al puntaje PSU asociado, porque $m_1 \neq m_2$, y esto indica que ambas rectas chocan en un punto.

Producción 9 Análisis de suficiencia de datos

Producción 10 Análisis Gráfico/algebraico del C.S



3.- Waldo tiene razón, dibujando se puede determinar si hay una nota con la que los tres tengan el mismo puntaje, como también se podría conocer si no existe ninguna nota donde coincidan los puntajes, debido a que se vería gráficamente, con rectas en un plano, si chocan todas en el mismo punto, o si no existe un punto donde choquen las tres rectas.

Recta adultos:

$P_1(6, 622)$, $P_2(7, 824)$ $\quad \boxed{m = 202}$ $\quad y - 622 = 202(x-6)$, $y = 202x - 590$

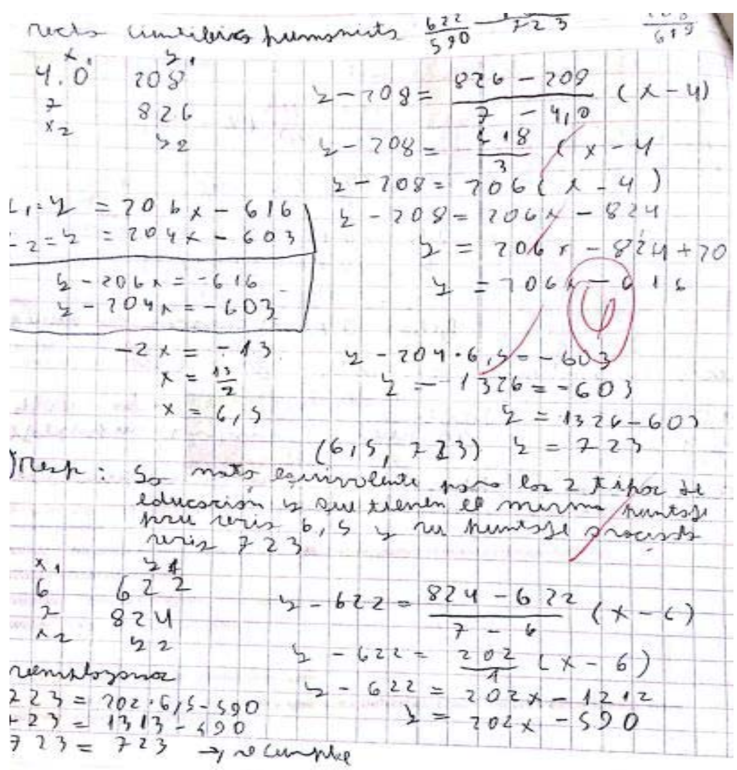
$$-206x + y = -616$$
$$-204x + y = -603$$
$$-202x + y = -590$$

$$-206x + y = -616$$
$$204x - y = 603$$
$$-2x = -13$$
$$x = 6{,}5$$

Punto $(6{,}5,\ 723)$

$$-1313 + 723 = -590$$
$$\boxed{-590 = -590}$$

La nota es 6,5, con 723 puntos.



recta científico humanista

x_1	y_1
4,0	208
7	826
x_2	y_2

$$y - 208 = \frac{826-208}{7-4{,}0}(x-4)$$
$$y - 208 = \frac{618}{3}(x-4)$$
$$y - 208 = 206(x-4)$$
$$y - 208 = 206x - 824$$
$$y = 206x - 824 + 208$$
$$y = 206x - 616$$

$$L_1: y = 206x - 616$$
$$L_2: y = 204x - 603$$
$$y - 206x = -616$$
$$y - 204x = -603$$
$$-2x = -13$$
$$x = \frac{13}{2}$$
$$x = 6{,}5$$

$$y - 204 \cdot 6{,}5 = -603$$
$$y - 1326 = -603$$
$$y = 1326 - 603$$
$$(6{,}5,\ 723) \quad y = 723$$

Resp: La nota equivalente para los 2 tipos de educación y que tienen el mismo puntaje psu sería 6,5 y su puntaje psu sería 723

x_1	y_1
6	622
7	824
x_2	y_2

$$y - 622 = \frac{824-622}{7-6}(x-6)$$
$$y - 622 = \frac{202}{1}(x-6)$$
$$y - 622 = 202x - 1212$$
$$y = 202x - 590$$

reemplazamos

$$723 = 202 \cdot 6{,}5 - 590$$
$$723 = 1313 - 590$$
$$723 = 723 \rightarrow \text{se cumple}$$

Producción 11 y 12 Modelización de la situación real, Análisis e interpretación del Conjunto Solución