Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Propuesta de una secuencia didáctica de los productos notables bajo la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Constanza Jaque Vega

PROFESORES GUÍA:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

SANTIAGO, DICIEMBRE DE 2017

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Actualmente el Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC) plantea que es necesario abordar el objeto matemático de productos, en Primero Medio, de manera concreta, pictórica y simbólica; transformando productos en sumas y factorizar estas expresiones algebraicas. Junto con esto se tienen que aplicar a situaciones concretas, completando el cuadrado del binomio y utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas.

Es por este motivo que se propone e implementa una situación de aprendizaje con material concreto para ser abordado con las representaciones geométrica y algebraica utilizando bajo el marco de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval, con la finalidad de que los y las estudiantes deduzcan la regularidad de la expresión algebraica del cuadrado de binomio a partir de la registro geométrico, abordando este producto notable con base en una actividad geométrica y no solamente algebraica, como se presenta en los dos textos escolares analizados, correspondientes a proyecto "Sé Protagonista" SM y el texto MINEDUC de "Santillana".

Junto con proponer e implementar una situación de aprendizaje con respecto al cuadrado de binomio, se diseñó una secuencia didáctica de tres clases, que incluye esta clase implementada, la cual correspondería a la clase dos, para la enseñanza de la reducción de términos semejantes, multiplicación de expresiones algebraicas, cuadrado de binomio y cubo de binomio.

El diseñó de esta secuencia didáctica se basó, como ya se mencionó anteriormente, en la implementación de la clase que aborda el cuadrado de binomio. Según los resultados obtenidos, se tomó la decisión que los y las estudiantes al no tener adquiridos los conocimientos previos necesitaban una clase previa para la enseñanza de la reducción de términos semejantes y la multiplicación de expresiones algebraicas, utilizando las representaciones algebraica y geométrica de acuerdo con el marco teórico de Duval.

La tercera clase se enfoca en la enseñanza del cubo de binomio, enfatizando nuevamente la relación entre las representaciones algebraica y geométrica. La clase 3 se agrega a la secuencia didáctica, para seguir desarrollando el trabajo con los binomios.

En las tres clases se trabaja con material concreto, como una forma de representar geométricamente estos productos notables.

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

Hasta el año 2016, los planes y programas del Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC, 2011) introducían el objeto matemático **productos notables** en primero medio, dando un énfasis a su representación algebraica; por tanto, los distintos textos escolares (MINEDUC, 2016; Santillana, 2016) de este nivel proponían actividades en las cuales el o la estudiante solo aplicaba regularidades algebraicas en este objeto. Con los nuevos cambios curriculares, realizados en el año 2017, MINEDUC propone realizar un nexo entre la representación geométrica y la algebraica respecto a los productos notables. El objetivo de aprendizaje que propone MINEDUC es “Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: transformando productos en sumas y viceversa, aplicándolos a situaciones concretas, completando el cuadrado del binomio y utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas” (MINEDUC, 2017, p. 68).

Es por este motivo, que esta secuencia didáctica se enfocará en los productos notable, específicamente en la multiplicación y reducción de términos semejantes, cuadrado de binomio y cubo de binomio, abarcando representaciones algebraica y geométrica bajo el marco teórico de Raymond Duval, la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Respecto al objeto matemático de productos notables, al analizar dos textos escolares de primero medio del año 2017. Los textos son: “Sé protagonista”, editado por SM y el “texto del estudiante”, producido por MINEDUC y editado por Santillana, se evidencia que el primero expone los productos notables como multiplicaciones algebraicas que presentan regularidades, lo que permite que su cálculo se pueda realizar de manera abreviada, utilizando la regularidad establecida para cada uno, sin la necesidad de aplicar la propiedad distributiva. Además, propone actividades donde hay que calcular el área de 4 cuadriláteros algebraicamente, utilizando la regularidad; para cada una de ellas existen ejemplos de lo que deberían de realizar los y las estudiantes.

El segundo texto presenta la definición de cada uno de los productos notables, según su representación algebraica, e identifica las propiedades que se utilizan en el desarrollo del producto para llegar a la regularidad, específicamente la propiedad distributiva. Si bien se presenta en él la representación geométrica atribuida a los productos notables, no se realiza una conexión entre estos dos registros. En el cuadernillo de actividades se presentan ejercicios con desarrollo algebraico, en su gran mayoría, y solo cuatros problemas donde el o la estudiante tiene que analizar desde una mirada geométrica para luego representarla de manera algebraica para así desarrollar el problema.

Es importante mencionar que los conocimientos geométricos datan desde las primeras civilizaciones mediterráneas, las cuales aplicaban “algoritmos en forma de receta” con el fin de calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones (Barreto, 2009).

Con respecto al saber erudito de este objeto matemático hay dos proposiciones que plantea Euclides en el segundo libro de "Los Elementos" (300 a.C./1991): Proposición 1: "Si hay dos rectas a y l se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos". Proposición 4: "Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos". Euclides llama "recta" a lo que hoy llamamos "segmento". Esto corresponde a los inicios del cuadrado de binomio, ya que surgió desde la representación geométrica y luego se realizó su representación algebraica, similar a lo propuesto en los nuevos planes y programas de MINEDUC.

Para realizar la representación geométrica del cuadrado de binomio en el plan de clase que se diseñó e implementó se utilizará material concreto, similar a "algebocks".

Tangarife (2013) realizó una tesis utilizando como estrategia didáctica algeblocks, para lograr una transición lógica del pensamiento numérico al pensamiento algebraico en el octavo grado de un colegio en Colombia. Presenta una propuesta didáctica donde los y las estudiantes tuvieron que realizar demostraciones, resolver problemas, resolver operaciones algebraicas en figuras geométricas. Las conclusiones a las que llegó fueron que el uso de figuras geométricas de algeblocks permite que el o la estudiante pueda trabajar conceptos abstractos en lo concreto para luego aplicarlas en operaciones algebraicas; junto con esto los y las estudiantes mostraron un avance en el uso del lenguaje y el simbolismo en el inicio del estudio del álgebra.

En la propuesta de la situación didáctica que se diseñó para este Estudio de Clase, con respecto al objeto matemático del cuadrado de binomio se utilizó material concreto para que los y las estudiantes determinaran su regularidad. Por este motivo es importante mencionar al método COPISI, ya que este hace referencia a un enfoque concreto, pictórico y simbólico para desarrollar una comprensión conceptual de acuerdo a los distintos estilos de aprendizajes. Este método fue creado por Brunner, quien plantea tres modalidades de representación en una secuencia (Brunner, 1988):

- Enactiva (concreta): es el aprendizaje por medio de una determinada acción, se realiza sin palabras; ejemplo, aprender a saltar la cuerda.
- Icónica (pictórica): es la representación por medios perceptibles, como una imagen; por ejemplo, un mapa mental que nos permita seguir una ruta.
- Simbólica: se da a través de un esquema abstracto que puede ser el lenguaje o cualquier otro sistema simbólico estructurado. Es la traducción de la experiencia en palabras que permiten otro tipo de transformaciones más complejas.

Este método se desarrolla pasando del material concreto, a las representaciones pictóricas para finalizar en los conceptos abstractos. En este estudio el enfoque se encuentra entre estas tres áreas, pero específicamente en el material concreto (geometría) y conceptos abstractos (álgebra). A su vez, favorece a que los y las estudiantes puedan resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando desde el material concreto a las representaciones simbólicas. Los y las estudiantes, al manipular el material concreto desarrollan estructuras mentales para lograr una comprensión del objeto matemático en estudio, dando un sentido a los que aprenden y logran construir su propio significado.

Un error común que realizan los y las estudiantes al desarrollar el cuadrado de binomio es por ejemplo $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Méndez (2008), en su artículo sobre las dificultades en la práctica de productos notables y factorización, señala este error que cometen los y las estudiantes, como por ejemplo $(5x-4)^2 = 25x^2 - 16$, es debido a que “se relaciona con la lectura que el alumno efectúa en el registro algebraico de estos ejercicios; una lectura de izquierda a derecha, en una dimensión, que obstaculiza el modelo de acción pertinente que el alumno debe poner en juego” (p. 60).

Teniendo todos estos antecedentes con respecto a los recursos didácticos que se utilizarán en este diseño de situación de aprendizaje, se espera que los y las estudiantes logren un aprendizaje significativo en la deducción del cuadrado de binomio, transitando por las representaciones geométricas y algebraicas al utilizar material concreto.

Frente a lo mencionado anteriormente, se evidencia que una de las razones por las cuales los y las estudiantes no logran un aprendizaje significativo respecto a los productos notables es el hecho de que, al introducirlo en el nivel escolar establecido por el MINEDUC, no se transita por los distintos registros de este objeto. En efecto, se verifica en los dos textos escolares analizados que se limitan a que el o la estudiante reconozca solo la representación algebraica del cuadrado de binomio para luego desarrollar una serie de ejercicios utilizando su regularidad, sin considerar su representación geométrica.

Es por ello que se desarrolla este trabajo de innovación, generando un plan de clase en el cual se realizan tanto representaciones geométricas como algebraicas del cuadrado de binomio, reconociendo en ello la importancia que tiene transitar por los distintos registros de este objeto matemático, como primer paso para que el o la estudiante deduzca la regularidad del cuadrado de binomio utilizando algeblocks, logrando un aprendizaje significativo de este.

Transitar por el registro algebraico y geométrico para la deducción de la regularidad del cuadrado de binomio podría generar un impacto positivo si es que se logra esta comprensión del conocimiento.

OBJETO MATEMÁTICO

1. Análisis curricular

Al analizar los planes y programas de MINEDUC en todos los niveles escolares con respecto a productos notables y teniendo en cuenta los conocimientos previos que los y las estudiantes necesitan para lograr una comprensión de este objeto matemático, se observó lo siguiente.

A partir de quinto básico comienzan a descubrir regularidades de sucesiones dadas, lo que permite hacer predicciones, aunque en ese nivel solo se tienen en cuenta de manera numérica.

Al siguiente año, en sexto básico, los y las estudiantes profundizan lo aprendido en quinto básico con patrones numéricos, determinando regularidades de valores dados en tablas, estableciendo relaciones, para finalmente establecer regularidades utilizando patrones algebraicos.

En séptimo básico, los y las estudiantes plantean expresiones algebraicas en lenguaje natural y viceversa. Junto con esto, reducen términos semejantes en expresiones algebraicas sencillas.

En octavo básico, comienzan a operar expresiones algebraicas en conceptos de geometría como el área y volumen, tanto para desarrollar productos entre expresiones algebraicas y factorizaciones con término común, representándolas de manera pictórica y simbólica.

En primer año de enseñanza media, deducen de las regularidades de tres productos notables, el cuadrado de binomio, la suma por su diferencia y el cubo de binomio; junto a esto se incluye la multiplicación de dos binomios con término común. A partir del año 2017, los planes y programas especifican que este aprendizaje es a partir de representaciones pictóricas en cuanto a áreas y volúmenes. Junto con esto aplican la propiedad distributiva de la multiplicación en productos de binomios, representan tres productos notables mediante la composición y descomposición de cuadrados y rectángulos y trabajan la factorización a partir de los productos notables, para completar sumas como en el cuadrado de binomio.

En los siguientes años se aplican los productos notables en otros objetos matemáticos, los cuales se especificarán a continuación:

En segundo medio, aplican los productos notables en la multiplicación de números irracionales y su racionalización; y en las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

En tercero medio, los aplican en productos de números complejos en el plano de los números reales e imaginarios y en la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Es importante que los y las estudiantes logren un aprendizaje significativo de este objeto matemático ya que se aplican en otros conocimientos matemáticos en los cursos superiores.

2. Definición escolar

Para tener una definición del saber escolar con respecto al objeto matemático de productos notables, se analizaron dos textos escolares del año 2017 en el sistema escolar chileno. El primero de ellos corresponde al texto del estudiante del proyecto "Sé Protagonista" de la Editorial SM (Muñoz y Pérez, 2017), y el segundo es el texto del estudiante ministerial de la editorial de Santillana (Galasso, Maldonado y Marambio, 2017).

La definición de los productos notables en cuanto al texto del proyecto "Sé Protagonista" es que son multiplicaciones algebraicas que presentan regularidades, lo que permite que su cálculo se pueda realizar de manera abreviada. En la definición de cada producto notable se menciona la multiplicación de binomios; por ejemplo, "cuadrado de binomio: es la multiplicación de un binomio por sí mismo" (p. 70).

En el texto ministerial no se define el concepto de productos notables como tal, pero sí se da a conocer verbalmente la regularidad de cada uno de los productos por separado. Esta regularidad se rea es con respecto a cómo se tiene que resolver y no a su significado, por ejemplo: el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Como se ha dicho, se analizaron dos textos escolares de primero medio del año 2017, los cuales fueron: proyecto "Sé Protagonista" SM y el texto MINEDUC (2017, Galasso, Maldonado y Marambio). En la siguiente tabla se presenta el análisis de cada uno:

Tabla 1: Análisis de textos.

Texto del estudiante "Sé Protagonista"	Texto del estudiante MINEDUC
Define cada producto notable como un cálculo abreviado de la multiplicación algebraica. Esto intenciona a que el o la estudiante memorice esta regularidad que le permitirá resolver multiplicaciones algebraicas del tipo $(a+b)(a+b)$, cuando podría ser igual de rápido multiplicar término a término (propiedad distributiva). No se justifica el objetivo de "abreviar" el	Inicia su estudio en productos notables recordando lo enseñado en el nivel de octavo básico. Presenta cuatro productos notables: cubo de binomio, cuadrado de binomio, suma por su diferencia y productos de binomios con un término común.

procedimiento, junto con esto no se presenta el significado de cada producto notable ni su génesis. Se abordan cuatro productos notables (cuadrado de binomio, suma por su diferencia, multiplicación de binomios con término común y cubo de binomio), proponiendo actividades desde la mirada geométrica cuyo objetivo no es representar productos notables (la representación viene dada), sino que aplicar lo aprendido de productos notables para determinar el área de estos cuadriláteros en forma abreviada, mostrando ejemplos con el procedimiento a seguir.	La forma como presenta el texto cada producto notable es a través de las representaciones geométrica y algebraica, identificando las propiedades en la operatoria algebraica. Luego presenta las regularidades de los productos notables en su forma algebraica, mostrando su regularidad. Tanto el texto de estudio como el cuadernillo de ejercicios que se anexa, presentan ejercicios con desarrollo algebraico en su gran mayoría, y solo cuatros problemas donde el o la estudiante tiene que analizar desde una mirada geométrica para luego representarla de manera algebraica para así desarrollar el problema.

Ambos textos presentan los objetivos de aprendizajes de MINEDUC con respecto a los productos notables. Junto con esto, presentan una secuencia de los contenidos muy parecida, apuntando al indicador: “Aplican los productos notables en el desarrollo de expresiones algebraicas” (MINEDUC, 2017).

Pese a esto, en ambos textos no se aborda uno de los indicadores en cuanto a “Representan los tres productos notables mediante la composición y descomposición de cuadrados y rectángulo”. Los textos solo aplican los productos notables en el cálculo de áreas de representaciones geométricas dadas, y se enfocan principalmente en utilizar expresiones como una forma de “abreviar” los cálculos.

3. Barrido histórico y epistemológico

En este apartado se presenta un estudio epistemológico con respecto al objeto matemático de los productos notables. Se analizará el origen histórico que tienen los productos notables y cómo a lo largo de la historia se ha ido trabajando este objeto, evidenciando su aplicación a otros objetos matemáticos, como son las ecuaciones cuadráticas, cúbicas, cuárticas, etc. Se expondrán algunos autores que tuvieron gran relevancia en el desarrollo de los productos notables o bien hicieron contribuciones para lograr comprenderlo en su plenitud. Primero se expondrá la matemática babilónica, considerando que los productos notables tuvieron su origen en la representación geométricas; para finalizar con Newton en su trabajo del “teorema del binomio”. Es importante realizar esta mirada epistemológica para darle un valor como recurso didáctico en el aula, y provocar una innovación que culmina en el aprendizaje de los y las estudiantes.

Es importante recalcar este desarrollo histórico ya que este trabajo se realizó bajo el marco teórico de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval. Se presentan estos elementos históricos porque corresponden a la construcción del objeto matemático de los productos notables, donde inicialmente se desarrolla su representación geométrica, y más tarde su representación algebraica. Esta construcción histórica de los acontecimientos con respecto a los productos notables, dieron elementos que enriquecieron cada plan de clase de la secuencia didáctica.

Como se mencionó anteriormente, el punto de partida del álgebra corresponde a la civilización babilonia. Kline en su libro llamado "El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días" (1994), menciona que con los babilonios (hacia el año 2300 a.C.) se constituye un punto de partida en el Álgebra. En sus escritos en tablas no utilizaban símbolos para referirse, por ejemplo, al área, anchura, longitud, etc, sino que lo hacían de forma verbal.

Las tablas de los Babilonios proporcionaron información sobre el sistema números y operaciones aritméticas, problemas algebraicos y geométricos. Los babilonios, en el área de álgebra, llegaron a resolver sistemas de ecuaciones con 10 incógnitas y 10 ecuaciones lineales. Muchos de los problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas.

Otra civilización que aportó en los conocimientos con respecto a algebra fue la egipcia. Se piensa que esta civilización existió desde antes de los 4000 a.C., sin verse afectada por influencias de civilizaciones extranjeras. Existen dos documentos matemáticos muy importantes que han sobrevivido, los cuales son: el papiro de Moscú y el papiro Rhind, que fueron escritos alrededor del año 1650 antes de Cristo.

En el área de álgebra, existen papiros que contienen soluciones de ecuaciones con una incógnita; los problemas son solucionados verbalmente, presentando instrucciones para encontrar o determinar la solución. Un ejemplo de sus problemas algebraicos es (Kline, p. 40, 1992): "Una cantidad; sus $\frac{2}{3}$, su $\frac{1}{2}$, su $\frac{1}{7}$, su totalidad asciende a 33". Los egipcios resolvieron algunas ecuaciones de segundo grado, pero no dedujeron cómo se resuelven a nivel general.

Los griegos en el siglo VI a.C se les dificultó el tratamiento aritmético de magnitudes, áreas y volúmenes; usaron entonces las figuras geométricas para representar magnitudes (Kline, 1994). A continuación, se presentarán dos grandes matemáticos griegos que aportaron enormemente en el desarrollo del álgebra, el primero de ellos es Euclides y el segundo Diofanto.

En el segundo libro de Euclides de "Los Elementos" (300 a.C./1991), se presentan algunos ejemplos de tratamientos geométricos de las magnitudes; en este caso, solo se consideran las proposiciones 1 y 4 que se relacionan con el objeto matemático de productos notables. Se debe contemplar que estas proposiciones realizadas por Euclides, fueron desde una representación geométrica, sin una representación algebraica.

Euclides en la proposición 1 plantea: “Si hay dos rectas a y l se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos” (ilustración 1).

Con respecto a esta proposición, Euclides se refiere a rectas, pero en realidad son segmentos, ya que tienen una longitud en específico, por lo que la proposición quedaría redactada como: Si hay dos segmentos a y l se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por los dos segmentos mayores es igual a los rectángulos comprendidos por el (segmento) no cortado y cada uno de los segmentos.

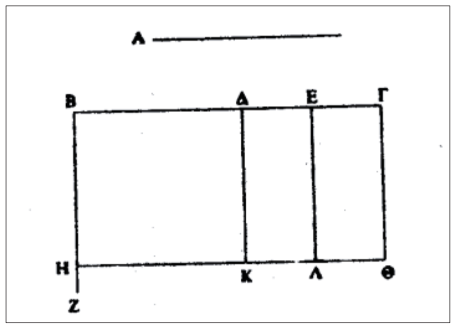


Ilustración 1: Libro II de Euclides (Editorial Gredos, 1991, p. 267).

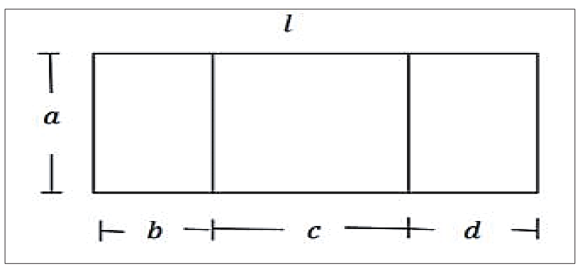


Ilustración 2:Área de figuras compuestas, propiedad distributiva de la multiplicación.

Hoy en día, haciendo referencia a los textos ministeriales, esta proposición presentada por Euclides se presenta geométricamente como se muestra en la ilustración 2.

Si se desea determinar el área algebraicamente de este cuadrado, sería:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

La proposición 1 hace referencia a la propiedad distributiva, la cual es importante mencionar, ya que es base para comprender el cuadrado de binomio correspondiente a la proposición 4 de Euclides en su segundo libro.

Euclides en la proposición 4 plantea: “Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos”.

Nuevamente Euclides menciona que es una recta, pero en realidad se refiere a un segmento, por lo que la proposición 4 quedaría redactada como: si se corta al azar un segmento, el cuadrado del (segmento) entero es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

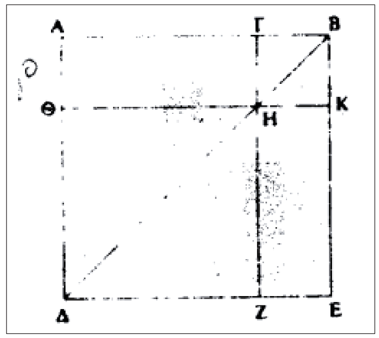


Ilustración 3: Libro II de Euclides (Editorial Gredos, 1991, p.270).

Si se desea determinar el área algebraicamente de este cuadrado, sería:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta igualdad es lo que se conoce actualmente como el cuadrado de binomio. Corresponde a la suma de las áreas de los cuadrados y de los dos rectángulos iguales.

Diofanto, como ya se mencionó anteriormente, fue un matemático que en ocasiones es reconocido como el “padre del algebra”; probablemente fue griego y nació en el siglo II d.C.; en su época no fue reconocido por su trabajo hasta que falleció. La obra más importante que se conoce de Diofanto es “Arithmetica”, la cual es una colección de 130 problemas que dan solución a ecuaciones con una única solución y ecuaciones con más de una solución; creó un método de resolución para estas últimas denominado hoy como análisis Diofántico. Uno de los hitos más importantes de Diofanto fue la introducción del simbolismo en el álgebra, por ejemplo: llamó a la incógnita como “el número del problema”, la x^2 como actualmente se conoce, él la designo como Δ^{Y} (O'Connor y Robertson, 1999c).

Diofanto analizó tres tipos de ecuaciones, ya que él no tenía noción sobre el cero y a su vez no conoció los coeficientes negativos (en el caso de los coeficientes numéricos de las ecuaciones): $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$ y $ax^2 + c = bx$. Con respecto a las soluciones de este tipo de ecuaciones, solo acepta las raíces racionales positivas, ignorando cualquier otra, como por ejemplo las raíces negativas e irracionales. Tampoco hay evidencia que Diofanto considerara que las ecuaciones cuadráticas puedan tener dos soluciones (O'Connor y Robertson, 1999c).

Otro momento importante en la historia del álgebra y que se encuentra relacionado con el objeto matemático de productos notables, es el de los árabes, en el mundo musulmán entre los años 700 y 1200 d.C. Es importante destacar que los árabes, al tener influencias de los griegos, realizaron demostraciones de álgebra con métodos geométricos. Se presentarán tres matemáticos árabes que destacan con respecto a su trabajo en los productos notables, los cuales son Al'Khwarizmi, Al-Karaji y Omar Khayyan.

Al'Khwarizmi, fue matemático islámico que vivió entre los años 790 y 850. Escribió un libro en el año 825 llamado *Hisab al-jabr wa´lmuqäbala*. En este libro aparece la palabra “al-jabr” de donde deriva la palabra álgebra que, según Ballén (2012) significa restauración del equilibrio mediante la transposición de términos de una ecuación, “muqäbal” significa la simplificación de la expresión resultante mediante la cancelación de términos semejantes de cada lado de la ecuación (O'Connor y Robertson, 1999a).

En su libro trabaja con ecuaciones lineales y cuadráticas, compuestas por unidades, raíces y cuadrados, por ejemplo la unidad para él era un número, una raíz era x y un cuadrado era x^2, todas sus nociones son trabajadas en palabras.

En cuanto a las ecuaciones de segundo grado, Al-Khwarizmi consideraba que existían 6 tipos, que hoy en día se conocen como casos particulares de la ecuación general de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números enteros positivos. Junto con esto, y a diferencia de Diofanto, Al-Khwarizmi considera que las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos raíces, aunque solo toma en cuenta las reales y positivas.

Al-Khwarizmi trabaja con el proceso completación de cuadrado, mostrando su representación geométrica. En la ilustración 4 se muestra la representación de la completación de cuadrados realizada por Al-Khwarizmi (O'Connor y Robertson, 1999a).

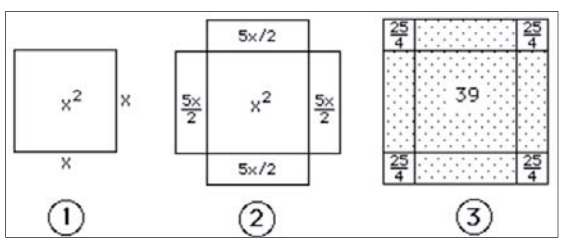


Ilustración 4: O'Connor y Robertson (1°imagen).

Al-Karaji, fue un matemático e ingeniero que nació en Bagdad, vivió entre los años 953 y 1030. Sus obras más importantes fueron: “al-Fakhri fi'l-Jabr wa-muqabala”, “fi'l-Hisab al-Badi'” y “al-Kafi fi'l-Hisab”, la primera se refiere al álgebra, la segunda y tercera al cálculo algebraico (O'Connor y Robertson, 1999b).

En su libro “Al-Fakhri”, define los monomios x, x^2, x^3,... y $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ..., con esto da reglas para el producto entre cualquiera de ellos, sin utilizar una representación geométrica, $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, considerando que n y m son números enteros, según la lectura que se le dio a su obra. Dio reglas para la adición, sustracción y multiplicación entre polinomio; en el caso general de los monomios se incluye una regla para la división.

Él, junto con esto, dijo que para saber el número necesario de multiplicaciones de estos grados en sí, se tiene que “que colocar 'uno' en una mesa y 'uno' por debajo de la primera 'uno', mueva el primer 'uno' en una segunda columna, agregue el primero 'uno' a la 'uno ' por debajo de eso. Por lo tanto se obtiene 'dos', que se pone debajo de la 'uno' transferido y se coloca el segundo 'uno' por debajo de la 'dos'. Se tiene, por tanto, 'uno', 'dos', y 'uno'” (O'Connor y Robertson, 1999, Párrafo 16); esto es lo que se conoce hoy en día como triángulo de Pascal. Al-Karaji solo construye la tercera columna a partir de la segunda. Esto se relaciona con el objeto matemático de productos notables, con respecto a los coeficientes del cuadrado de binomio y el cubo de binomio.

Omar Khayyan fue un matemático árabe que vivió entre los años 1048 y 1122. Su obra más famosa en álgebra fue “Tratado de Demostración de Problemas de Álgebra”, en el cual desarrolló una clasificación de las ecuaciones cúbicas con soluciones geométricas, utilizando la intersección de secciones cónicas.

Khayyam fue otro matemático en discutir sobre las propiedades del triángulo de Pascal, utilizando un método para encontrar las raíces n-ésimas basado en el desarrollo del binomio, y por lo tanto en los coeficientes binomiales (O'Connor y Robertson, 1999d).

Otro matemático importante que hay que mencionar con respecto a su aporte en el desarrollo de los productos notables es Zhu Shijie.

Fue un matemático chino que nació cerca de Pekín en el año 1260 y falleció aproximadamente en el año 1320. Se sabe que él escribió dos libros “Suanxue Qimeng” y “Siyuan yujian”, que traducidos al español sería, “Introducción a los estudios matemáticos” y “Espejo precioso de los cuatro elementos” (O'Connor y Robertson, 2003).

Uno de los conceptos que abordó Zhu es el triángulo de Pascal (ver ilustración 5), dando los coeficientes para ampliar las sumas de incógnitas hasta la octava potencia, a lo que nombró como: “la mesa del antiguo método de potencias de hasta el octavo”.

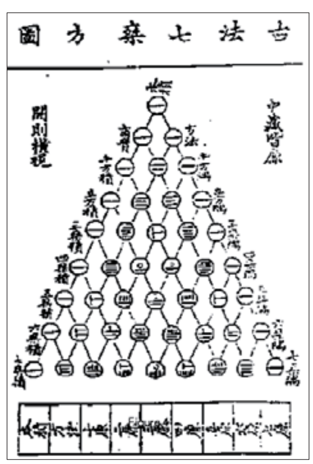


Ilustración 5: Diagrama del triángulo de Pascal Zhu, 1303 (García,2007, p. 44).

Tartaglia fue otro matemático que contribuyó al desarrollo del triángulo de Pascal, que se relaciona con los productos notables. Fue un matemático autodidacta que vivió entre los años 1500 y 1557. Resolvió ecuaciones cúbicas de tres tipos distintas, de la forma $x^3 + mx^2 = n$ y $x^3 + mx = n$, con n y m positivos. Desde el año 1539 tuvo rivalidades con Cardano y su discípulo Ferrari, en cuanto a las soluciones de ecuaciones cubicas y cuárticas. Sus rivales publicaron su trabajo y los adjudicaron a sus nombres (O'Connor y Robertson, 2005).

Tartaglia también trabajo en el triángulo de Pascal, o bien en el teorema de binomio para exponente enteros positivos. A continuación se presenta una imagen que ilustra su trabajo.

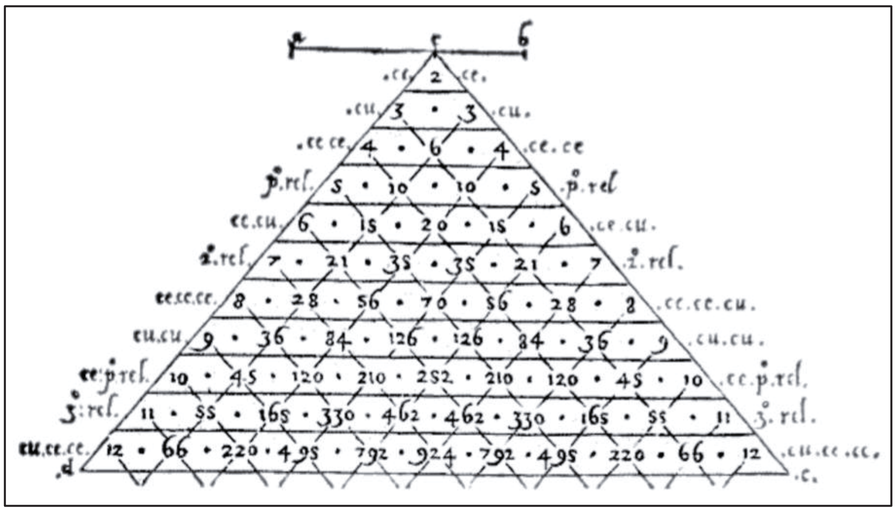


Ilustración 6: Triángulo de Tartaglia para formar medidas, 1523 (García, 2007, p. 46).

Otro matemático que cabe destacar en el desarrollo de los productos notables es Blaise Pascal, quien nació en Clermont en el año 1623 y falleció en el año 1662.

Trabajó en las secciones cónicas, aportando enormemente en el campo de la geometría proyectiva, él considera secciones cónicas generadas por la proyección central de un círculo.

La relación que existe entre el objeto matemático de productos notables con lo que trabaja Pascal, es el "triángulo de Pascal" (ver ilustración 6), para obtener los coeficientes del desarrollo del binomio. Él no fue el primer matemático en estudiar el triángulo de Pascal, pero su trabajo sobre el tema "Tratado del Triángulo Aritmético" fue uno de los más importantes en este tema" (O'Connor y Robertson, 1996).

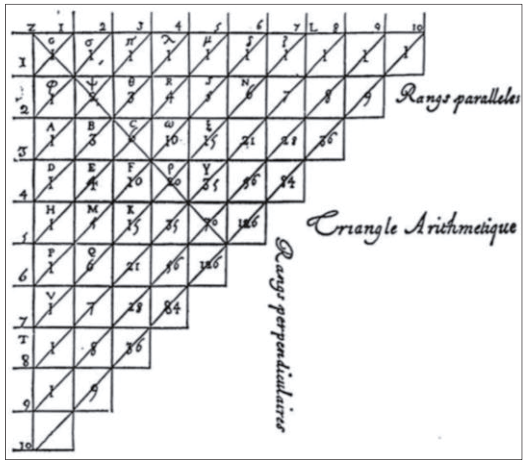


Ilustración 7: Escrito original de Pascal sobre el triángulo de Pascal (García, 2007, p. 47).

Pascal insistió en que el generador del triángulo de Pascal podía ser un número distinto de 1.

Un descubrimiento importante a lo largo de la historia es el *teorema del binomio*. Fue desarrollado por matemáticos como Zhu Shijie, Tartaglia, Newton, entre otros. El teorema del binomio consiste en:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Si se relaciona este teorema con el objeto matemático de productos notables, específicamente con el cuadrado de binomio, se tiene:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El último matemático que se presenta con respecto al gran aporte para el desarrollo de los productos notables es Isaac Newton, quien nació en una aldea de Woolsthorpe en el año 1642 y falleció en el año 1727.

En el área de matemática hizo grandes contribuciones como el cálculo diferencial e integral, suyo es el “método de las fluxiones”, basado en que la integración de una función es el procedimiento inverso para diferenciarlo (O'Connor y Robertson, 2000).

Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita. En efecto, desarrolló el teorema del binomio con exponentes racionales, lo cual consiste en:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots$$

Actualmente el teorema del binomio se considera como lo siguiente:

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k \qquad r \in Q$$

ESTUDIO DE CLASES

La secuencia didáctica se diseño a partir de un Estudio de Clase que se realizó en el primer semestre del año 2017. La clase realizada en el Estudio de Clase corresponde a la segunda de la secuencia didáctica, que aborda el cuadrado de binomio.

En este apartado, se presentará el Estudio de Clase realizado, inicialmente se hablará sobre qué es el Estudio de Clase, quienes participaron de este y cuál fue la metodología que se utilizó. Finalmente se abordarán los resultados obtenidos y las conclusiones con respecto a esta investigación.

1. ¿Qué es el Estudio de clases?

Esta modalidad se originó hace 140 años en las escuelas japonesas (Isoda y Olfos, 2009), y su finalidad es planificar, observar, enseñar y analizar en forma colaborativa una clase para perfeccionar la práctica docente.

El Estudio de Clase se basa en mejorar el desarrollo profesional docente de todos los que participan de esta, ya que se forja un aprendizaje a partir de una experiencia colectiva (los docentes participantes generan, acumulan y comparten conocimientos entre pares), logrando un espacio de conversación y discusión profesional en cada una de las tareas que realizan, para el mejoramiento de la enseñanza y de los aprendizajes escolares en matemática.

Las principales actividades que generan los y las docentes involucrados en el estudio de clase es de una planificación colectiva y su implementación en una clase cotidiana, para observarla y analizarla a posteriori. A continuación se presenta una imagen donde se detallan cada etapa del proceso de un Estudio de Clase:

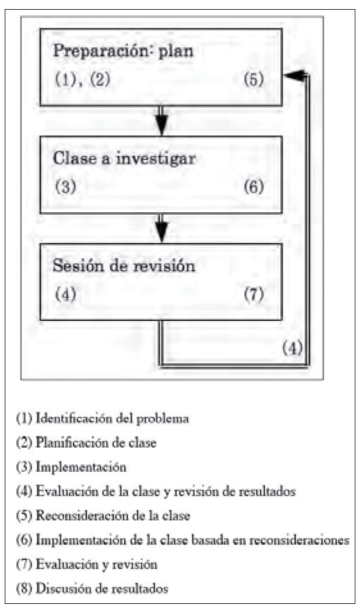


Ilustración 8:Diagrama de flujo de entrenamiento pedagógico (Stigler & Hiebert, 1999). Citado por Isoda, Arcavi y Mena. (2012 3ª ed, p. 27)

En la planificación de la clase lo primero que se realiza es ubicar un objeto matemático en un plan de unidad para un nivel de enseñanza en específico; luego se planifica cada momento de la clase detallando cada tarea que realizará el grupo de estudiantes para lograr el objetivo.

Se especifica el aprendizaje que se quiere evidenciar en la clase, junto con esto se contemplan las habilidades y tareas matemáticas que se pondrán en juego.

Según Isoda y Olfos, el plan de clase que se diseña, como se mencionó anteriormente, involucra una serie de tareas que desarrollaran individualmente, en grupo y todo el curso. Se describen cada una de estas situaciones en contexto que se desarrollarán en la clase, delimitando el tiempo y la organización de cada momento de la clase. Al planificar cada momento, se realiza un análisis a priori para identificar cuáles son las dificultas, posibles errores, comportamientos y producciones que podrían realizar los y las estudiantes, con el fin de diseñar devoluciones o intervenciones del docente para conducir hacia el objetivo de la clase.

Junto con esto, los y las docentes participantes del Estudio de Clase seleccionan y preparan los materiales y medios que se utilizarán en cada tarea a desarrollar.

Uno de los o las docentes participantes del Estudio de Clase implementa la clase, eventualmente con público. La clase constituye un escenario de trabajo matemático colectivo. Los y las estudiantes participan de manera espontánea, sin haber realizado antes las tareas que se van a plantear. En base a lo que se planificó, el o la docente conduce la clase hacia el logro del objetivo.

En la observación de la clase se verifica el funcionamiento de cada una de las tareas matemáticas que se les presenta a los y las estudiantes como medios donde se generan oportunidades de aprendizajes. Se evidencia junto con esto, si los y las estudiantes logran los aprendizajes según el análisis a priori que se realizó, teniendo en cuanta los planes y programas de MINEDUC.

Además, se verifica la evolución de la clase y la gestión del o la docente como un instrumento para facilitar el aprendizaje de los y las estudiantes.

Finalmente se reflexiona y analiza la clase en base a lo observado en la implementación, realizando a su vez una comparación entre el análisis a priori y a posteriori, con el fin de proponer sugerencias al plan de clase para la próxima implementación de otro u otra docente del grupo en otro curso.

Al finalizar el proceso de diseño, implementación y análisis de esta, se espera que se realice una segunda implementación de la clase a cargo de otro u otra docente que participa del Estudio de Clase con otro curso.

Tras cada implementación de la clase se crea un documento que evidencie la experiencia de esta.

El impacto del Estudio de clases se puede observar en distintas áreas, en cuanto a los conocimientos de los y las docentes sobre los conceptos de la disciplina y su enseñanza, sus aspectos pedagógicos, análisis de las producciones de los y las estudiantes en clases y la conexión entre la práctica y los objetivos del año. En cuanto al trabajo colaborativo, se puede observar una motivación de la mejora del trabajo docente, relaciones entre colegas, como beneficia a la escuela y en un sentido de evaluación de una práctica compartida (Isoda y Olfos, 2009).

2. Diseño del Estudio de Clase

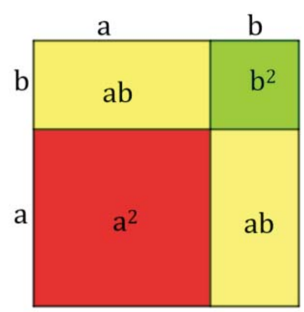
En el Estudio de Clase participaron cuatro docentes (D_1, D_2, D_3 y D_4) que a su vez son estudiantes de Magíster de segundo año en la Universidad Católica de Valparaíso con sede en Santiago. Diseñaron una situación de aprendizaje con respecto al objeto matemático "cuadrado de binomio" en la unidad de "Álgebra".

2.1 Identificación del problema

La elección del objeto fue de acuerdo con el nivel que realizaban clases, correspondiente al primer semestre de primero medio en la educación chilena. Junto con esto detectaron una dificultad en la enseñanza con respecto a la regularidad del cuadrado de binomio. En ocasiones los y las estudiantes realizan el siguiente error $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Para prevenir esta dificultad las docentes diseñaron una propuesta de aprendizaje utilizando material concreto, para que los y las estudiantes relacionaran las representaciones algebraica y geométrica del cuadrado de binomio, y así afianzar este conocimiento a partir de la relación de la composición de las áreas del cuadrado. Es decir:

Se tiene un cuadrado cuyas medidas de sus lados son $a+b$, la suma de la descomposición de su área será equivalente al cuadrado de binomio.



Al relacionar cada área de la descomposición de la superficie del cuadrado de lado $a+b$ con respecto a cada término del cuadrado de binomio $a^2 + 2ab + b^2$, se tiene:

- El área del cuadrado cuya medida de lados es a, corresponde al primer término del cuadrado de binomio.

- El área del cuadrado cuya medida de lados es b, corresponde al tercer término del cuadrado de binomio.
- El área de los dos rectángulos que se generan en la descomposición del cuadrado de lado $a+b$ son iguales y cuyas medidas de los lados son a y b, es lo que corresponde al segundo término del cuadrado de binomio.

2.2 Planificación de la clase

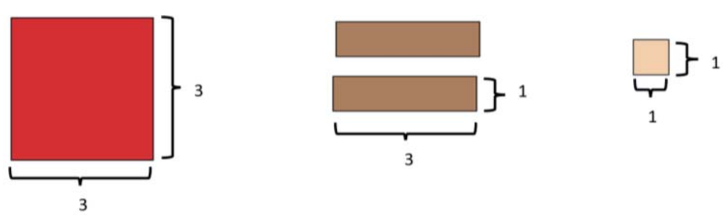
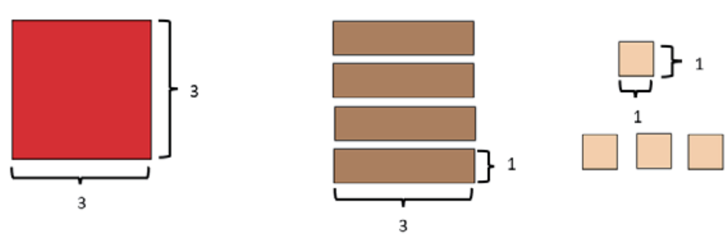
El plan de clase que se diseñó se presentará en la sección 3 de este apartado. Esté, contiene cuatro tareas matemáticas que tendrán que desarrollar los y las estudiantes. Se planificaron con la intención que los y las estudiantes relacionaran las representaciones geométrica y algebraica para lograr un posible aprendizaje significativo.

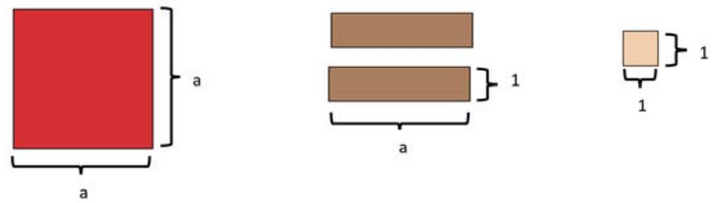
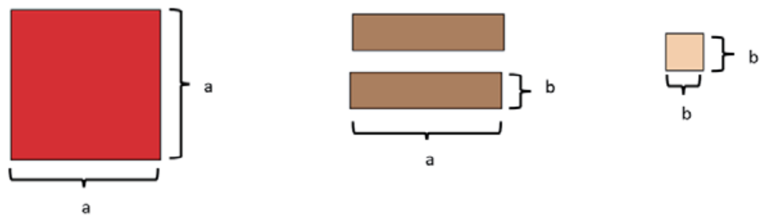
En cada tarea matemática los y las estudiantes tienen que formar un cuadrado según las fichas que se les entregan. Estas fichas están compuestas por dos cuadrados de distintos lados y un rectángulo, cuya altura corresponde a una medida de los lados de uno de los cuadrados y la base corresponde a la medida del otro cuadrado.

El material concreto corresponde a un set de fichas de goma eva (cuadrados y rectángulos) de tres colores distintos. El o la docente utiliza estos mismos cuadrados y rectángulos, pero de cartulina y más grandes para manipularlas en la pizarra (por ello es necesario contar además con cinta masking).

En la siguiente tabla se presenta el material concreto que se utilizó en cada tarea matemática propuestas para la clase.

Tabla 2: Dibujos del material concreto utilizado en la implementación del plan de clase.

Tarea matemática	Material concreto y sus medidas
1) Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.	
2) Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.	

3) Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.	
4) Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.	

La primera y segunda tarea matemática están enfocadas en calcular el área del cuadrado formado con medidas numéricas, con el objetivo que los y las estudiantes tengan una cierta familiaridad con el cálculo del área según lo que han realizado en años anteriores y que pueda surgir dos estrategias de desarrollo, la primera es a través del cálculo de áreas por la suma de la descomposición de las áreas de cada una de las fichas y la segunda corresponde al cálculo del área del cuadrado formado por la suma de sus lados. En la sección 4 de este apartado se detallarán las posibles estrategias con más detalle.

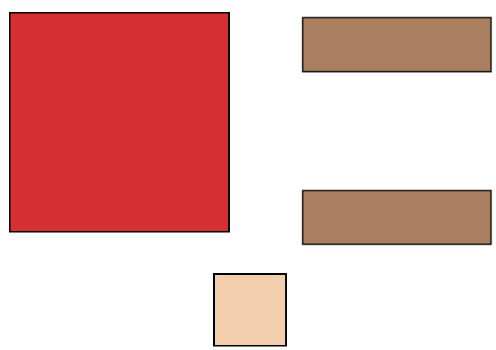
La tercera tarea matemática propuesta relaciona medidas tanto numérica y algebraica, para que los y las estudiantes realicen un tránsito desde lo numérico a lo algebraico de forma paulatina.

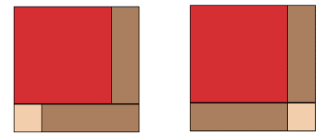
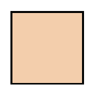
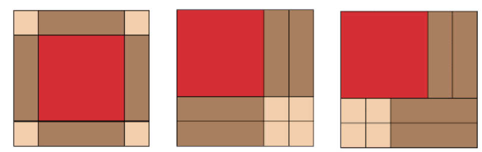
La cuarta tarea matemática propuesta tiene el objetivo final de la clase el cual corresponde deducir la regularidad del cuadrado de binomio con medida de los lados algebraicas.

Al realizar el plenario de las tareas 1 y 2, se seleccionarán tres parejas para presentar sus resultados. Una pareja argumentará sobre la primera tarea y dos parejas para argumentar sus resultados con respecto a la segunda tarea. Esta selección de las parejas se realizará de acuerdo a como componen el cuadrado y las estrategias que utilicen para calcular su área

3. Plan de clase

A continuación se presenta la propuesta del plan de clase para el Estudio de Clase que se diseñó:

TAREA MATEMÁTICA	ROL DOCENTE	ROL ESTUDIANTE	TIEMPO
INICIO DE LA CLASE			
0. Se da a conocer el objetivo de la clase: Construir cuadrados de distintas medidas y calcular sus superficies. 1. Tarea parte 1 Docente: Vamos a trabajar en parejas con las siguientes fichas: un cuadrado color rojo de lado 3 u, un cuadrado rosado de lado 1 u y dos rectángulos cafés de lados 3 u y 1 u. Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.	Docente muestra las fichas que se les entregará a las parejas. 		8 min

DESARROLLO DE LA CLASE			
2. Manipular las 4 fichas haciendo ensayo y error.	Docente monitorea el trabajo de las parejas, siendo un facilitador del conocimiento, observando las estrategias y resultados que surgen de las parejas de trabajo.	Los posibles cuadrados construidos por las parejas son:  Estudiantes: el área del cuadrado es 16 u^2 **Posibles dificultades:** Los y las estudiantes no logran construir un cuadrado dadas las fichas.	10 min
3. Tarea parte 2. Docente entrega a cada pareja un cuadrado de color rojo de lado 3u, cuatro cuadrados rosados de lado 1u y cuatro rectángulos cafés de lados 3u y 1u. Nuevamente utilizando todas las piezas, se les indica que formen un cuadrado y luego determinen su área.	Docente muestra las fichas que se agregarán a las ya entregadas en tarea parte 1. Se agregan 4 fichas de:  Y 4 fichas de:  Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los y las estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de las parejas de trabajo. Es importante que el o la docente identifique las posibles estrategias que	En esta actividad, los posibles cuadrados construidos son:  Estudiantes: el área del cuadrado es 25 u^2 **Posibles dificultades:** • Los y las estudiantes no logran construir un cuadrado dadas las fichas. • No logran identificar más de una estrategia.	10 min

4. Plenario Los y las estudiantes presentan los cuadrados que construyeron y las estrategias que utilizaron para determinar el área de cada uno de ellos.	utilizan los y las estudiantes, para luego exponerlas en el plenario. **A) Si de las dos estrategias esperadas, los y las estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:** Docente hace explícito en pizarra los lados de los cuadriláteros menores, de manera que el o la estudiante identifique la suma de los lados menores como el lado mayor del cuadrado. **B) Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:** Dcoente: “¿Cómo establecieron que el área es 16?”. Docente pide a los y las estudiantes que indiquen cómo obtuvieron el lado 4. Estudiantes exponen en la pizarra las estrategias y cuadrados que formaron en la actividad. Docente según lo que observó, selecciona a las parejas que salen a la pizarra. Docente: Encontraron más de una forma de construir el cuadrado usando las 4 y 9 fichas. ¿Qué tiene en común todos estos cuadrados?	Estudiante: Por el producto de 4 por 4. Estudiante: Identifica la operación de adición para obtener 4 como (3 + 1), y así determinar el área de cada cuadrilátero, obteniendo la mayor como la suma de estos. Estudiantes: es la misma área. Estudiantes: lado mayor al cuadrado y suma de las áreas menores. Estudiantes: dan el mismo resultado **Posibles dificultades:** No logren descomponer la multiplicación 4 por 4 como $(3+1)\cdot(3+1)$	20 min

	¿Qué estrategias utilizaron para determinar el área? Docente: ¿qué ocurre con las estrategias utilizadas?		5 min
5. Concluir igualdades en los procedimientos. :	Docente realiza lo siguiente en la pizarra: 4^2 | $9+3+3+1$ $4 \cdot 4$ $(3+1) \cdot (3+1)$ 16 | 16 Luego concluyen que: $(3+1) \cdot (3+1) = 9+3+3+1$ Es decir el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros que lo componen	Posibles respuestas $(a+1) \cdot (a+1)$ y/o $a^2 + a + a + 1$	20 min
6. Mostrar el problema y manipular las 4 fichas con nuevas medidas	Escribir en pizarra los nuevos datos de las fichas.		
Con los mismos cuadriláteros de la tarea 1, se pide que determinen el área del cuadrado formado por ellos, pero ahora con	Retomar los cuadriláteros por grupo y determinar el área del cuadrado que se puede formar con 4 cuadriláteros (un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ un cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lado $\boldsymbol{a}\ y\ \mathbf{1}$)	Estudiantes: Son iguales	

nuevas medidas: cuadrado color rojo de lado $\boldsymbol{a}$, cuadrado color naranjo de lado 1 y rectángulos cafés de lados $\boldsymbol{a}$ y 1.	Observar si utilizan las estrategias utilizadas anteriormente. Estudiantes exponen en la pizarra sus estrategias y resultados. Profesor: Según lo trabajado anteriormente ¿Qué ocurre con estos resultados? Se concluye que: $(a+1)\cdot(a+1)=a^2+a+a+1$	**Posible dificultad**: No establecen relación de actividad anterior (numérico y algebraico) a esta nueva tarea (algebraica).	
CIERRE DE LA CLASE			
7. Institucionalización Docente muestra en la pizarra cuatro cuadriláteros como en la tarea uno. Un cuadrado rojo de lado $\boldsymbol{a}$, un cuadrado anaranjado de lado $\boldsymbol{b}$ y dos rectángulos de lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.	Utilizando todos los cuadriláteros se forma un cuadrado en la pizarra, según los resultados que expusieron los y las estudiantes en la pizarra de las tareas anteriores. Docente les pregunta, ¿cuál es el área del cuadrado que se forma? Una vez que los y las estudiantes logran deducir la regularidad, se les explicita que esta recibe el nombre de cuadrado de binomio y la relación que tiene con geometría.	Estudiantes utilizan las estrategias expuestas en las tareas anteriores. Respuesta: $(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2$ O bien, $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$	17 min

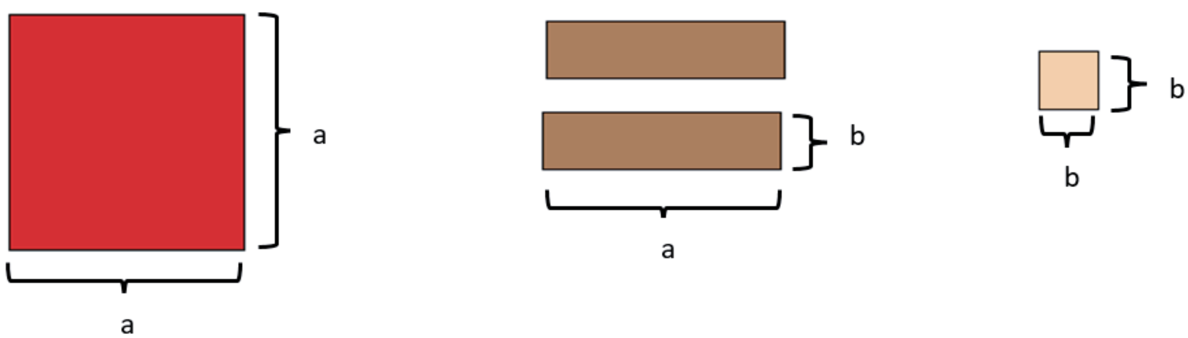
4. Análisis a priori

El análisis a priori del plan de clase se presenta en el anexo 1. A continuación se detallan las posibles estrategias que debiesen de realizar los y las estudiantes en el desarrollo de las tareas matemáticas propuestas. Para esto se considerará una tarea, ya que para todas se esperan las mismas estrategias para el cálculo del área del cuadrado formado.

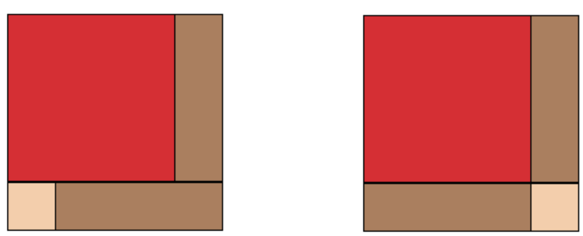
<u>Tarea 4</u>

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego calculen su área.

En la cuarta tarea matemática los y las estudiantes realizan el cálculo del área del cuadrado con valores algebraicos. Las fichas utilizadas y la medida de sus lados se presentan a continuación:



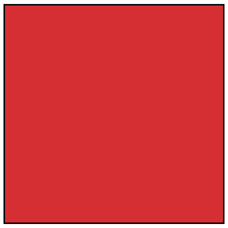
Posibles construcciones del cuadrado realizado por los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar la tarea:

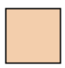
1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Calcular cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

1° Desarrollo (estrategia1):



El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma: $A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$

El área del rectángulo de lado **a** y **b**, lo calculan de la siguiente forma: $A_{rectangulo} = a \cdot b = ab$



El área del cuadrado de lado **b**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ b} = b \cdot b = b^2$$

Recordar que, para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado **b** y dos rectángulos de lado **a** y **b**. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

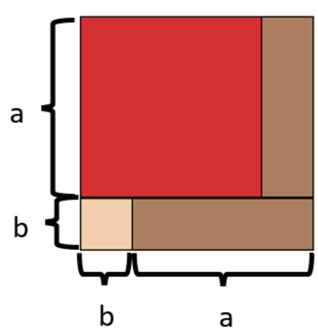
$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 2\ A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + b^2$$

O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$A_{Total} = a^2 + 2ab + b^2$$

2° Desarrollo (estrategia 2):

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman b y a.

$$Medida\ del\ lado = a + b$$

Para calcular el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a+1)(a+b)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican las expresiones utilizando la propiedad distributiva, por lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + a + a + b^2$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + b^2$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo de ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

5. Contextualización

La implementación, desarrollada en primero medio, se realizó en tres colegios, el primero de ellos de modalidad gratuita y los restantes son particulares pagados. Se inicia este proceso de Estudio de Clase en un colegio ubicado en la comuna de Quilicura en la región Metropolitana a cargo de D_1, luego se desarrolla en un colegio ubicado en Rancagua en la región de O´Higgins a cargo de D_2. La tercera y cuarta implementaciones son desarrolladas en un colegio ubicado en la comuna de Ñuñoa en la región Metropolitana, a cargo de las docentes D_3 y D_4, respectivamente.

Para esta investigación se considerará solo la implementación de la docente D_1 con respecto al plan de clase diseñado.

Para el análisis de esta investigación se considerarán los datos de la primera implementación realizada por la docente D_1 en un colegio ubicado en la comuna de Quilicura en la región Metropolitana.

El colegio es particular subvencionado con modalidad gratuita en este momento. Cuenta con proyecto de integración desde pre básica a cuarto medio, con apoyo motor, psicológico y académico, es importante recalcar esto ya que en el curso que se implementó la clase hay estudiantes que pertenecen a este proyecto.

El colegio tiene tres cursos por nivel, por lo que se seleccionó a uno de los cursos de primero medio para la primera implementación del plan de clase, correspondiente al curso que imparte la docente D_1. El curso está compuesto por 40 estudiantes; el día de la implementación del plan de clase asistieron 34.

6. Instrumento de recolección de datos

Para este estudio de clase se consideró como instrumento de recolección de los datos un video de la clase. La codocente de la docente D_1 grabó la clase inicialmente con una cámara de video; por razones técnicas, pasados los primeros 20 minutos de la clase, tuvo que cambiar de cámara.

La clase comenzó a las 9:55 y finalizó a las 11:25 de la mañana. Como solo se contaba con una cámara y una persona que grabara la clase, se tomó la decisión de grabar dos focos, el primero de ellos es como los y las estudiantes desarrollaban cada una de las tareas que se les presentaba y cuáles eran las devoluciones que realizaba la docente.

Al momento de dar las instrucciones el foco de la cámara se encontraba al final de la sala, para grabar la panorámica del curso. Cuando los y las estudiantes desarrollaron las tareas, la persona a cargo de grabar se fue paseando por la sala para rescatar las acciones que realizaban los y las estudiantes. Para cada desarrollo de las tareas presentadas, se grababa en al menos dos oportunidades las devoluciones de la docente D_1.

Cuando los y las estudiantes exponen sus resultados en la pizarra, el foco de la cámara se encuentra adelante, con el fin de captar la imagen principal de lo que explicaban y señalaban en la pizarra.

7. Análisis de la clase implementada

El video de la clase fue analizado por las cuatro docentes D_1, D_2, D_3 y D_4 en una primera instancia. Luego se presentó al curso del Magíster para complementar las mejoras que se realizaron al plan de clase.

Para esta investigación, se observaron y analizaron los siguientes puntos:

1) Dificultades que tuvieron los y las estudiantes en el uso de registros algebraico y geométrico:
   1.1 dificultades en el tratamiento.
   1.2 dificultades en la conversión.
   1.3 dificultades en la congruencia de registros.

2) Si fueron correctas las devoluciones del docente sobre el uso de registros semióticos utilizados por los y las estudiantes.

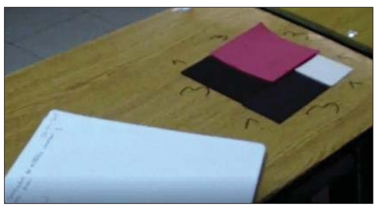
8. Resultados

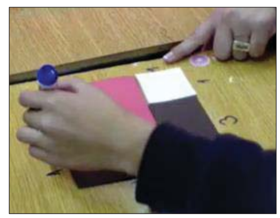
8.1 Análisis a posteriori

En el presente apartado se abordarán los resultados de la primera implementación del Estudio de Clases, los cuales son importantes para ajustar el plan de clase para las siguientes implementaciones. Se detallarán los resultados de cada una de las tareas propuestas para luego realizar un análisis general de la implementación de la clase.

Primera tarea del plan de clase:

- Al dar a conocer las instrucciones a los y las estudiantes no se les especificó que tenían que dejar registros en sus cuadernos para determinar el área; por lo que algunas parejas al formar el cuadrado comenzaron a marcar con un plumón sobre sus mesas los datos que tenían, otras realizaron sus cálculos en los cuadernos.





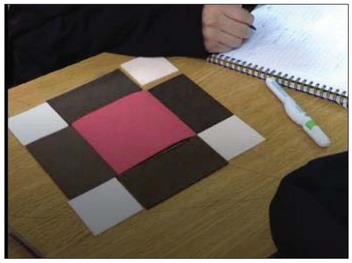
- Durante la actividad, los y las estudiantes determinaron el área del cuadrado utilizando la segunda estrategia, correspondiente a determinar los lados del cuadrado, para luego multiplicar lado por lado, es decir: $(3+1)(3+1) = 4 \cdot 4 = 16$.

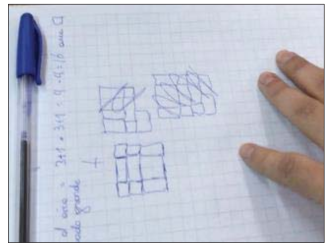
- La docente, al monitorear el trabajo que realizaron los y las estudiantes en la actividad uno, pudo identificar que no utilizaron la primera estrategia, correspondiente al cálculo del área cuadrado formado mediante la descomposición de sus áreas para luego sumarlas.

Segunda tarea del plan de clase:

Nuevamente utilizando todas las piezas, se les indicó que formarán un cuadrado y luego calcularán su área.

- En esta tarea, los y las estudiantes no presentaron mayores dificultades al formar el cuadrado que se solicitaba, de hecho, surgen 2 nuevas formas que no estaban propuesta en el análisis a priori. Una de estas formas se presenta en las siguientes imágenes:

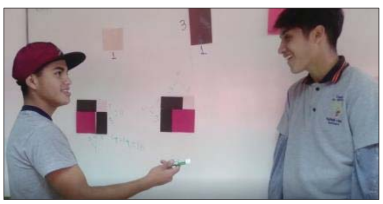


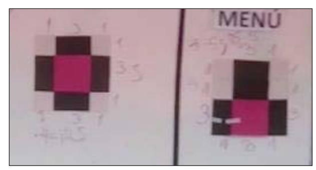


- La estrategia utilizada por los y las estudiantes para realizar esta tarea fue la misma que en la anterior, correspondiente a identificar la medida del lado del cuadrado formado y luego multiplicar largo por ancho.

Plenario

A continuación se presentan algunas imágenes de este plenario:

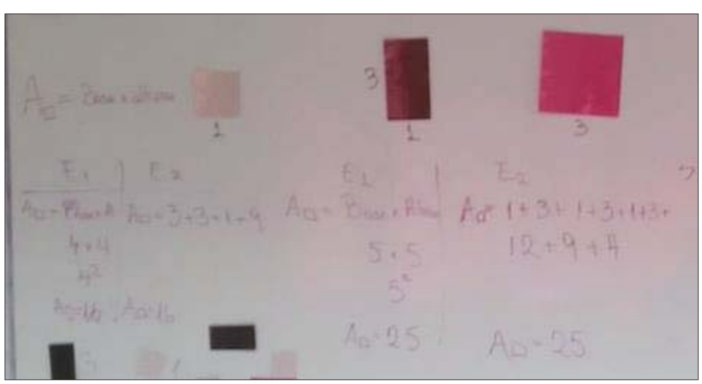




Después que los y las estudiantes expusieron y argumentaron, la docente realizó una síntesis de lo que dijeron, para luego realizar devoluciones a todo el curso, y lograr que surgiera la primera estrategia, que no se dio en las tareas. Luego, de realizar las devoluciones, los y las estudiantes lograron realizar la primera estrategia de cada una de las actividades, la cual corresponde a calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumar cada una para obtener el área del cuadrado formando.

Finalmente se realizó, en la pizarra, una comparación entre ambas estrategias de cada una de las tareas, para que los y las estudiantes verificarán que al calcular el área del cuadrado, utilizando ambas estrategias, el resultado sería el mismo.

A continuación se presenta el registro que se dejó en la pizarra:



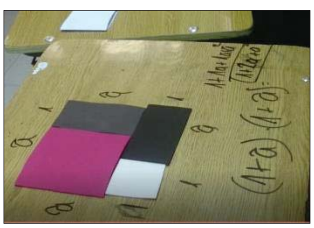
Tercera tarea del plan de clase:

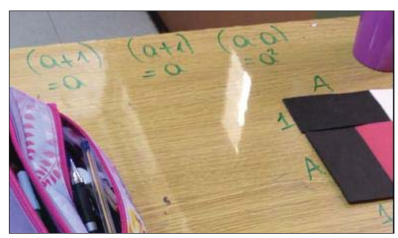
En esta tarea, se realiza un nexo entre un desarrollo numérico y algebraico, es decir las medidas de los lados que forman el cuadrado en este caso son a y 1.

- Los y las estudiantes no tienen dificultad en formar el cuadrado. La estrategia que utiliza la mayoría del curso es determinar los lados del cuadrado formado, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación para calcular el área del cuadrado; solo dos grupos utilizaron la primera estrategia planteada en el análisis a priori, la que corresponde a calcular el área de cada cuadrilátero para luego sumarlas, logrando determinar el área del cuadrado formado.

- Los y las estudiantes que realizaron la estrategia 2, desarrollaron la multiplicación término a término de los binomios (lado del cuadrado) utilizando la propiedad distributiva. Luego redujeron los términos semejantes. En algunos grupos, la docente tuvo que realizar devoluciones, en cuanto al concepto de términos semejantes, porque presentaban errores en la reducción de los términos. Por ejemplo cuando tenían $a + 1$ dan como resultado a.

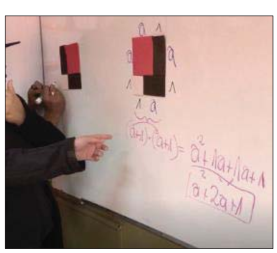
A continuación se presentan algunas estrategias que desarrollaron en esta actividad los y las estudiantes:





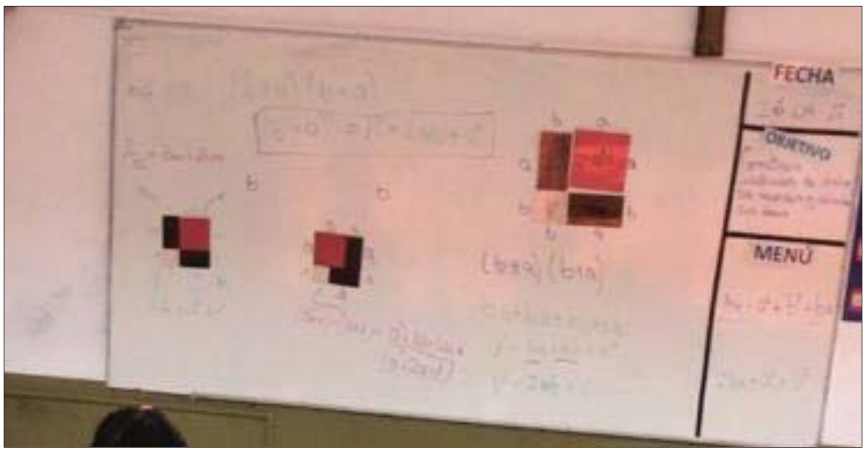
Plenario

Después de realizar esta tarea, se realizó un plenario. Salieron dos grupos a la pizarra a argumentar sobre como calcularon el área del cuadrado formado; cada una de las parejas, presentaron una estrategia (1 y 2) que estaban consideradas en el análisis a priori y que anteriormente fueron presentadas. A continuación se presentan imágenes del plenario:




Cuarta tarea del plan de clase:

- Debido al tiempo de implementación, esta tarea se realizó en un plenario considerándola como la institucionalización del plan de clase. La docente es quien guía la tarea. Si bien, se desarrolla en la pizarra ambas estrategias. Los y las estudiantes son capaces de reconocer inmediatamente los lados del cuadrado formado, la estrategia 2, correspondiente a aplicar la propiedad distributiva para multiplicar los lados del cuadrado, al parecer les es más fácil de realizar, recordando que esta corresponde al desarrollo algebraico del cuadrado de binomio. Es importante mencionar que no fue posible verificar que el 100% de los y las estudiantes comprendieran la regularidad del cuadrado de binomio, debido al tiempo y a que se desarrolló en plenario.



8.2 Contraste entre análisis a priori y a posteriori

Al realizar la comparación entre análisis a priori y a posteriori, se evidencia que para los y las estudiantes es más fácil desarrollar la estrategia 2, que corresponde al desarrollo algebraico o numérico, en el caso de las dos primeras actividades. El motivo por el cual se piensa que tiene una mayor facilidad en realizar el desarrollo algebraico es porque los y las estudiantes se encuentran en el módulo de álgebra y antes de esta clase, ya trabajaron dos clases reduciendo y multiplicando expresiones algebraicas. Con respecto a este último punto, se recomienda realizar una clase previa para que los y las estudiantes relacionen las representaciones geométrica y algebraica en el cálculo de perímetro y área de figuras planas, ya que se observa que algunos o algunas estudiantes aún no logran reducir términos semejantes correctamente.

Junto con esto, en los años anteriores no se ha intencionado un gran trabajo en la descomposición de figuras para el cálculo de sus áreas, por lo que podría ser un antecedente del por qué no logran vincular el cálculo del área total del cuadrado con la descomposición de sus áreas.

En la primera y segunda tarea, se evidencia que los y las estudiantes, solo utilizan la estrategia del desarrollo numérico, determinando sus lados para luego multiplicar las medidas de estos y calcular así el área del cuadrado formado. Algunas parejas suman las medidas para obtener el lado y luego calculan el área, mientras que otras realizan la multiplicación término a término para determinar el área, por ejemplo $(3+1)(3+1) = 9+3+3+1 = 16$.

De acuerdo con las dificultades que se presentaron en el análisis a priori, la gran mayoría de estas sí sucedieron en la clase, pero con las devoluciones que fueron planificadas, la docente pudo redireccionar correctamente a los y las estudiantes. Junto con esto los y las estudiantes no presentaron dificultades al formar los cuadrados con las fichas entregadas.

8.3 Análisis global de la implementación

Se presentará el análisis global de la clase de acuerdo con las preguntas y objetivos de esta investigación.

Según las dificultades que presentaron los y las estudiantes en la implementación del plan de clase según los recursos se realizaron las siguientes categorías:

1) Dificultades en el tratamiento en cada registro.
2) Dificultades en la conversión entre los registros.
3) Dificultades en la congruencia de los registros.

A continuación se presentan las dificultades de los y las estudiantes según las categorías mencionadas anteriormente.

1) <u>Dificultades en el tratamiento en cada registro.</u>

Con respecto al registro geométrico, los y las estudiantes tuvieron dificultades en la composición de los cuadriláteros para formar el cuadrado. Esta dificultad se debió a que las fichas tenían una diferencia milimétrica, por lo que podían componer una figura que no necesariamente fuera un cuadrado. Esto se solucionó cuando la docente pregunta a los y las estudiantes si todas las fichas están bien juntas una al lado de otra sin dejar espacios entre medios, los y las estudiantes verificaron la composición y se percataron que la figura compuesta no era un cuadrado. Esta dificultad se superó con la devolución que realizo la docente y pudieron seguir trabajando correctamente con la composición del cuadrado.

En cuanto al registro algebraico las dificultades presentadas por los y las estudiantes fueron más evidentes y constantes en comparación con las dificultades en el registro geométrico.

Los y las estudiantes tuvieron dificultades en la reducción de los términos semejantes, ya que en algunos casos consideraban los términos algebraicos y numéricos como semejantes, por ejemplo al tener $a+1$ daban como resultados 1. De acuerdo a las devoluciones de la docente, los y las estudiantes superaron esta dificultad. Junto con esto en el plenario de las tareas 1 y 2 se trabajó este error.

La segunda dificultad que presentaron algunas parejas fue que en la tarea 3, al calcular el área del cuadrado formado utilizando la estrategia 2, correspondiente a determinar la medida del lado del cuadrado formado y luego multiplican lado por lado para determinar su área, no aplican la propiedad distributiva para multiplicar dos binomios, cometiendo el siguiente error $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

La tercera dificultad que presentaron los y las estudiantes en el tratamiento del registro algebraico fue que en las dos primeras tareas (numéricas) calculan el área del cuadrado utilizando la estrategia 2, correspondiente a determinar la medida del lado del cuadrado formado y luego multiplican lado por lado para determinar su área. Los y las estudiantes no logran establecer la estrategia 1, correspondiente a calcular el área del cuadrado formado a través de la suma de las áreas de los cuadriláteros que forman el cuadrado. En el plenario a través de las preguntas que realiza la docente surgió la segunda estrategia. Aunque en la tercera tarea, solo tres parejas la aplicaron.

2) <u>Dificultades en la conversión entre los registros.</u>

Los y las estudiantes no tuvieron mayores dificultades en la conversión entre registros, ya que identificaron como calcular el área del cuadrado formado a partir del registro geométrico.

Cabe destacar que con respecto al material utilizado se deben realizar ciertos ajustes en cuanto a las medidas de los rectángulos y los cuadrados rosados, ya que tienen una diferencia milimétrica en cuanto a que el largo del cuadrado podría ser dos veces el lado del cuadrado rosado, es por esto que para la segunda implementación se reduce la medida del lado del cuadrado rosado y el ancho del rectángulo. Junto con esto, se aprecia que los y las estudiantes tienen una gran motivación a trabajar con el material, e incluso utilizan plumones y sus bancos, lo que no se consideraba para la clase, al calcular el área del cuadrado formado.

3) <u>Dificultades en la congruencia de los registros.</u>

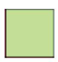
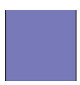
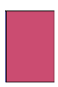
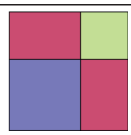
Los y las estudiantes en la clase no lograron establecer la congruencia entre los registros algebraico y geométrico en las tareas presentadas. Esto se debe a que no surgieron reflexiones a nivel curso y en las parejas con respecto a este punto, la clase se centró en la deducción del cuadrado de binomio y calcular el área del cuadrado formado.

Es por este motivo que una de las principales mejoras que hay que realizar del plan de clase, es el que los y las estudiantes logren conectar las representaciones geométrica y algebraica del cuadrado de binomio a través de preguntas de reflexión sobre este punto, o en su defecto que el o la docente realice devoluciones a partir de la estrategia 1, correspondiente a calcular el área del cuadrado formado a través de la suma de las áreas de los cuadriláteros que forman el cuadrado, para lograr que los y las estudiantes realicen una congruencia entre los registros.

Devoluciones de la docente sobre el uso de los registros semióticos.

Con respecto a las devoluciones de la docente sobre el uso de registros semióticos utilizados por los y las estudiantes, se puede observar que no hubo evidencias de que se realizarán devoluciones con respecto a la congruencia de los registros, ya que no se consideró inicialmente en el análisis a priori y en el plan de clase. Por este motivo, es necesario que dentro de las mejoras del plan de clase la docente realice preguntas que orienten a la reflexión de que cada área de la composición del cuadrado formado corresponderá a cada término del cuadrado de binomio, es decir:

Tabla 3: Congruencia de las representaciones algebraica y geométrica de la regularidad del cuadrado de binomio.

Representación geométrica	Representación algebraica
 Superficie del cuadrado de medida de lado b	Área del cuadrado de lado b. $A_1 = b^2$
 Superficie del cuadrado de medida de lado a	Área del cuadrado de lado a. $A_2 = a^2$
 Superficie del rectángulo de medidas de lados a y b	Área del rectángulo de lados a y b. $A_3 = ab$
 Superficie del cuadrado de medida de lado $a + b$	Área del cuadrado de lado $a + b$. $A_T = A_1 + 2A_3 + A_2$ $A_T = a^2 + 2ab + b^2$

En cuanto a las devoluciones realizadas por la docente según a las posibles dificultades de los y las estudiantes en los tratamientos de los registros fueron correctas. Solo que, debido al tiempo, en algunos casos, se tuvieron que realizar de manera general a todo el curso, como en el cuadrado de medida $a + b$.

Los y las estudiantes no logran deducir, de manera independiente, la regularidad del cuadrado de binomio a partir de las representaciones algebraica y geométrica, falta intencionar que en cada tarea los y las estudiantes se hagan consientes sobre lo que realizan. El tiempo no favoreció a que dedujeran de manera independiente, por lo que para una próxima implementación es necesario acortar las primeras tareas para lograr realizar la última en el tiempo adecuado.

La disposición de los puestos no fue acertada ya que al trabajar en parejas no se logra que surjan todas las estrategias planteadas en el análisis a priori y junto con esto, las parejas cercanas conversaban entre ellas sobre lo que iban realizando. Por estos motivos se considera que para una próxima implementación los y las estudiantes trabajen en grupos de cuatro personas para intencionar una mayor discusión y argumentación sobre lo que van realizando en cada tarea.

8.4 Mejoras al plan de clase

Luego de analizar la primera implementación se dan las siguientes mejoras al plan de clase:

- A los y las estudiantes se les da la instrucción de trabajar en parejas al inicio de la clase, en el momento que interactuaron con el material concreto, algunas parejas comenzaron a trabajar con otras. Por este motivo se considera que para la próxima implementación los y las estudiantes trabajen en grupos de cuatro personas y así surjan más de una estrategia a partir de los y las estudiantes.
- Dado a que el tiempo no fue lo suficiente y de acuerdo con la decisión de considerar una de las tareas como la institucionalización, se considera modificar las tareas que realizarán los y las estudiantes, eliminando las dos primeras correspondientes a dar valores numéricos de los cuadriláteros, ya que puede ser uno de los motivos por los cuales los y las estudiantes no logran visualizar la segunda estrategia (suma de las partes). A continuación se detallan las tareas para el plan de clase mejorado:

  Tarea 1: los lados de las fichas serán: cuadrado de lado a, cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lados a y 1.

  Tarea 2: los lados de las fichas serán cuadrado de lado a, cuadrado de lado 2 y dos rectángulos de lado a y 2.

  Tarea 3: los lados de las fichas serán cuadrado de lado a, cuadrado de lado b y dos rectángulos de lado a y b.

- Por lo tanto, el plan de clase mejorado solo tendrá 3 tareas, con la finalidad que la tarea 3 la realicen los y las estudiantes, para luego realizar el plenario.
- La institucionalización corresponderá a las conclusiones de los y las estudiantes en la tarea 3.
- Existe una escasa información sobre las notas o escritos que hacen los y las estudiantes. Se agrega a la recolección de la información tomar fotografías o hacer más primeros planos en la grabación a las creaciones de los y las estudiantes en sus cuadernos o mesas.
- Se agregan preguntas con la finalidad que los y las estudiantes logren establecer una congruencia de los registros algebraico y geométrico, para deducir la regularidad del cuadrado de binomio. Estas preguntas se agregan antes del plenario de las tareas 1 y 2.

El plan de clase con las mejoras propuestas y su respectivo análisis a priori se presentan en la segunda clase de la secuencia didáctica del siguiente apartado.

9. Conclusiones

Se puede evidenciar que el plan de clases diseñado a partir de la Teoría de Registros de Representaciones Semiótica de Raymond Duval con material concreto para que los y las estudiantes sean capaces de deducir la regularidad del cuadrado, fue logrado parcialmente. Ya que en el diseño del plan de clase en un Estudio de Clase no se consideraron algunos aspectos para que los y las estudiantes reflexionarán en cuanto a la congruencia de las representaciones algebraica y geométrica del cuadrado de binomio, es por este motivo que se agregan tareas en cuanto a preguntas para que se logre este aspecto en el plan de clase mejorado. Hay que tener en consideración que para esta investigación solo se analizó la primera implementación del plan de clase.

Con respecto al análisis de las dificultades del uso de registros de los y las estudiantes en la implementación de la situación de aprendizaje para deducir la regularidad del cuadrado de binomio, se evidencia la importancia que tiene realizar una conexión entre la representación geométrica y algebraica del cuadrado de binomio, comprendiendo que cada término de este producto notable corresponde a una superficie del área de la descomposición del cuadrado.

Al realizar esta conversión entre los registros del cuadrado de binomio, los y las estudiantes podrían lograr un significado a este objeto para luego aplicarlo en otros objetos matemáticos. Con base en este plan de clase que se aplicó en este curso, cabe destacar que es necesario seguir trabajando en la visualización y congruencia de los registros, dado que la institucionalización de este objeto fue realizada por la docente en el plenario, en vez de que los y las estudiantes descubrieran la regularidad del cuadrado de binomio, realizando un vínculo entre las distintas representaciones.

Es por esto que, para una próxima implementación de este plan de clase, se deben realizar preguntas que favorezcan a que el o la estudiante realice esta conexión y congruencia entre los registros para comprender el objeto matemático, dado a que en este caso no fue posible visualizarlo.

Luego de analizar las devoluciones de la docente con respecto a las dificultades en los cambios de registros que presentan los y las estudiantes en la clase implementada, se observa que falta agregar al plan de clase devoluciones de la docente o preguntas para analizar la congruencia entre los registros algebraico y geométrico, para que los y las estudiantes puedan relacionar que cada término algebraico del cuadrado de binomio corresponde al área de los cuadriláteros que forman el cuadrado de binomio. Es por este motivo que se agrega al plan de clase preguntas que logren que los y las estudiantes analicen esta congruencia entre los registros.

En cuanto a las devoluciones de la docente relacionadas con el análisis a priori fueron correctas para que los y las estudiantes lograran realizar el tratamiento en cada uno de los registros algebraico y geométrico.

Es importante recalcar la importancia que tiene este tipo de tareas en las clases de matemáticas y el impacto que se puede lograr. Luego de la implementación en el colegio, estudiantes que tienen problemas cognitivos (que se encuentran dentro del proyecto de integración del colegio) y que en algunas ocasiones no deseaban participar en clases, después de la implementación desarrollaron todas las tareas que se le propusieron al curso, con una gran motivación a participar en la resolución de ejercicios, argumentando sus resultados frente a sus compañeros y compañeras. Esto se puede deber a que el plan de clase corresponde a una innovación en la enseñanza en este contexto, estimulando el logro de los aprendizajes que se espera, enmarcando los conocimientos de forma significativa y no exclusivamente memorística (Esquinas 2009).

De acuerdo con el marco teórico propuesto para esta implementación, se puede concluir que si bien el plan de clases está diseñado para que el o la estudiante transite entre la representación geométrica y algebraica del cuadrado de binomio para lograr una aprehensión del conocimiento, esto no se logró, ya que faltó intencionar de una mejor forma, que el o la estudiante realizará las dos estrategias descritas en el análisis a priori, con la finalidad que comprendiera lo que significa cada uno de los términos algebraicos en la regularidad del cuadrado de binomio, realizando una conexión entre ambas representaciones. Es por esto que, para un futuro planteamiento de este plan de clase, se propone que las tareas estén intencionadas en que el o la estudiante inevitablemente logre realizar las dos estrategias, la descomposición del cuadrado formado para calcular su área y el desarrollo algebraico.

Los y las estudiantes no realizaron conversiones y tratamientos congruentes bajo el marco teórico de Duval, ya que no asociaron, como se mencionó anteriormente, cada área de las superficies de los cuadriláteros con cada uno de los términos algebraicos de la regularidad del cuadrado de binomio. Es por este motivo que para una próxima implementación se debe intencionar la clase a que las conclusiones a la que lleguen los y las estudiantes sean con respecto a la congruencia entre los registros algebraico y geométrico del cuadrado de binomio; esto podría realizarse en el plenario con preguntas dirigidas a los y las estudiantes o, en su defecto, realizar estas preguntas en cada actividad de modo que conecten ambas representaciones.

El material utilizado en este plan de clase favorece al tránsito de las representaciones geométrica y algebraica, pero no consigue que los y las estudiantes realicen una congruencia entre los registros, ya que no logran relacionar la superficie de cada área de los cuadriláteros que forman el cuadrado con cada uno de los términos del cuadrado de binomio. Para esto se realiza una mejora al plan de clase realizando preguntas a los y las estudiantes, para que analicen estas dos representaciones y lograr una congruencia entre los registros, con el fin de comprender la regularidad del cuadrado de binomio.

Por lo mencionado anteriormente, es importante indicar que no todo el estudiantado logra deducir la regularidad del cuadrado de binomio, ya que por falta de tiempo se realiza en un plenario con preguntas dirigidas. Las preguntas están orientadas a realizar las estrategias que se plantearon en el análisis a priori, que relacionan las representaciones geométrica y algebraica, pero no la totalidad del curso logra comprender la relación entre ambas.

Dos grupos en la tarea 3, logran relacionar el área de cada cuadrilátero del cuadrado formado con cada uno de los términos resultantes del área del cuadrado formado, cuyas medidas de sus lados son $a + 1$. Esto se debe a que en el plenario de las tareas

1 y 2, la docente a través de preguntas logro que los y las estudiantes visualizaran esta estrategia y luego la aplicaron en la siguiente tarea.

Al tomar todas estas consideraciones, se reformulará está la situación de aprendizaje de acuerdo a los resultados obtenidos en el Estudios de clase, a continuación se presentan las mejoras para el plan de clase:

- Los y las estudiantes trabajarán en grupos de cuatro personas.
- Las tareas 1 y 2 se eliminarán; en la clase solo se realizarán tres tareas. La primera las medidas de los lados de las fichas serán: cuadrado de lado a, cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lados a y 1. En la segunda las medidas de los lados serán: cuadrado de lado a, cuadrado de lado 2 y dos rectángulos de lado a y 2. En la tercera las medidas de los lados serán: cuadrado de lado a, cuadrado de lado b y dos rectángulos de lado a y b.
- La institucionalización corresponderá a las conclusiones de los y las estudiantes con respecto a la tarea 3.
- Entregar hojas en blanco para que los y las estudiantes registren lo que van realizando en cada actividad y anoten sus respuestas.
- Se agregan preguntas al plan de clase con la intención que los y las estudiantes relacionen las representaciones algebraica y geométrica del cuadrado de binomio, logrando una comprensión del objeto matemático, y a su vez exista una congruencia entre estos dos registros. Estas preguntas se agregan antes del plenario de las tareas 1 y 2.

SECUENCIA DIDÁCTICA

En el siguiente apartado se presenta la secuencia didáctica que aborda el objeto matemático de los productos notables en el nivel de primero medio, donde se contemplaron 3 clases de 90 minutos cada una. En cada una de ellas se trabaja con material concreto entregado por el o la docente. El aprendizaje esperado que aborda este objeto matemático en este nivel es: “desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: transformando productos en sumas y viceversa, aplicándolos a situaciones concretas, completando el cuadrado del binomio y utilizándolas en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas” (MINEDUC, 2017). En esta secuencia didáctica solo se considerarán los productos notables: cuadrado de binomio y cubo de binomio, sin abordar la factorización de estos.

La clase 1 se diseñó a partir de la implementación de la clase 2 de esta secuencia didáctica, donde se identificaron los conocimientos previos que requiere el o la estudiante en el nivel de primero medio en la unidad de álgebra, correspondientes a octavo básico, y que no fueron logrados, los cuales se relacionan con la reducción de términos semejantes y la multiplicación de expresiones algebraicas. Uno de los errores que se pudieron observar en la aplicación de la clase 2 fue “$a + 2 = 2a$".

La clase 2, está relacionada con el cuadrado de binomio y la tercera clase al cubo de binomio. Se pensó de esta forma, para tener una linealidad dentro de los contenidos que se aplicarán en cada una de las clases y teniendo en cuanta el objetivo de aprendizaje de MINEDUC, ya antes mencionado.

A continuación, se describe cada una de las clases de esta secuencia didáctica:

La primera está enfocada a abordar contenidos que debiesen haber adquirido los y las estudiantes en el nivel de octavo básico, sobre la reducción de términos semejantes y la multiplicación de expresiones algebraicas. Trabajarán en parejas con material concreto componiendo y descomponiendo cuadriláteros para determinar perímetro y área de figuras compuestas. Se dará énfasis a los cambios de registros o de representación, geométrica y algebraica, en cada una de las tareas. Se expone y argumenta en plenario las distintas estrategias que utilizaron, para discutir luego cuál es la más eficiente.

La segunda fue la clase aplicada para el estudio de clase, consiste en construir un cuadrado con los cuadriláteros dados (cuadrados y rectángulos), en conjunto con esto se calcula su área. Para esto los y las estudiantes trabajarán en grupos de cuatro personas, primero formando el cuadrado con dos rectángulos y dos cuadrados, y luego con cuatro rectángulos y cinco cuadrados. En esta etapa se espera que los y las estudiantes utilicen al menos una de las dos estrategias previstas: el área del cuadrado construido y/o la suma de las áreas de los todos los cuadriláteros.

Las primeras tareas son expuestas en la pizarra por los y las estudiantes. Como última tarea, se les solicita calcular el área del cuadrado formado por los cuadriláteros, uno de lado a, otro de lado b y dos de lados $a\ y\ b$ respectivamente. Se espera que los y las estudiantes comparen las estrategias utilizadas, realizando una tabla en la pizarra, para establecer que $(a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$. En la institucionalización se les indica que matemáticamente la expresión algebraica inicial se llama cuadrado de binomio y la final trinomio ordenado, la cual geométricamente, si se identifican las letras como si fueran medidas, entonces los valores de las expresiones algebraicas corresponden a las áreas de los cuadriláteros representados.

La tercera clase aborda el cubo de binomio utilizando material concreto. Esta clase está orientada a que el o la estudiante analice la relación entre el volumen de los distintos cuerpos geométricos con los que trabajarán y el desarrollo algebraico del cubo de binomio.

Los y las estudiantes trabajarán en grupos de cuatro personas desarrollando tres tareas en la clase, todas están dirigidas a que relacionen las representaciones algebraica y geométrica en juego. A diferencia de las clases anteriores, en esta ya se les da a conocer los cuerpos geométricos desagregados que forman el cubo, por lo que no tendrían que pensar previamente como componer los cuerpos geométricos para formar el cubo. En la institucionalización se les indica que matemáticamente la utilizada recibe el nombre de cubo de binomio, la cual geométricamente, si se identifican las letras como las medidas de cada arista de los cuerpos geométricos que originan el cubo, entonces los valores de las expresiones algebraicas corresponden al volumen del cubo.

Explicación y pertinencia del marco teórico

Al tener en cuenta el análisis histórico de los productos notables con respecto a estas representaciones y con el objetivo que esta secuencia didáctica transite entre los registros algebraico y geométrico para conjeturar las regularidades del cuadrado de binomio y el cubo de binomio utilizando material concreto es pertinente considerar el marco teórico de Duval. Hay que tener en cuenta que Duval no trabaja con material concreto en su teoría, pero en este caso se utilizará este medio para representar geométricamente el cuadrado de binomio.

Las representaciones con las cuales se va a trabajar en esta secuencia didáctica serán geométrica y algebraica.

De acuerdo con el marco teórico que se utilizará de la Teoría de registros de representaciones semióticas de Duval, se considera que los y las estudiantes relacionen la representación geométrica con la algebraica con el fin de llegar a una compresión más profunda sobre este objeto matemático, para que deduzcan y reconozcan a que corresponde cada uno de los términos de la regularidad del cuadrado de binomio y cubo de binomio.

A continuación se presentan los aspectos más relevantes de esta teoría de registros semióticos y que son de interés para esta investigación:

Duval (2004, p. 14) define las **representaciones semióticas** como “aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…)”, estas son un medio para expresar las representaciones mentales que tiene una persona. En matemáticas, sus principales funciones son de comunicación y la necesidad del desarrollo de la actividad matemática en sí misma.

Las representaciones semióticas son representaciones conscientes y externas, están constituidas por el uso de signos y son la forma en como los individuos exteriorizan sus representaciones mentales. Como se mencionó anteriormente, estas representaciones además de cumplir con la función de comunicación tienen una función de objetivación, ya que “son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión” (Duval, 2004, pag. 33).

Duval propone que un objeto matemático no se puede comprender si no existe una aprehensión de cada una de sus representaciones, junto a conversiones entre los registros y los tratamientos existentes dentro de cada uno de ellos. Cada representación es una parte del significado del objeto matemático; entonces, para que exista una comprensión del objeto, es necesario tener un significado total, de cada una de las representaciones para luego desprenderse de estas.

Junto con esto, no se puede lograr la comprensión en matemática si no se distingue el objeto de su representación; para que esto suceda, es necesario realizar diversas representaciones. Para esto, Duval (2004) plantea las actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis, las cuales son: formación, tratamiento y conversión. La **formación** corresponde a la representación de un registro semiótico en particular, lo cual permite expresar un objeto matemático como una representación en un sistema determinado, que podría ser por ejemplo algebraico, gráfico, numérico, etc. El **tratamiento** corresponde a las transformaciones de la representación dentro de un mismo registro (interna), de acuerdo a reglas que son propias en cada uno de los sistemas, se tiene como resultado otras representaciones dentro del mismo registro que se pueden identificar como una ganancia de conocimiento con respecto a las iniciales. La **conversión** es el cambio de representación semiótica de un registro a otro, lo que permite que se pueda explicitar otras significantes para lograr comprender el objeto.

Dos puntos clave para lograr el aprendizaje de los y las estudiantes son relacionar los tratamientos y las conversiones, diferenciando los registros de representación semiótica. Pese a esto, en la enseñanza usualmente no existe una conversión entre los registros que se utilizan.

Con respecto a las conversiones y tratamientos entre un registro de representación y otro, se puede hablar de **congruencia** o no congruencia entre estos registros. “Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar segmentándolas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples” (Duval. 2004, pag. 51). En el caso de no-congruencia aumenta el tiempo de tratamiento y la conversión puede resultar imposible de efectuar, o incluso de comprender.

Para que exista una congruencia se tienen que cumplir tres criterios:

- <u>Correspondencia semántica de los elementos significantes</u>, a lo que se refiere es que a cada unidad significante del registro de partida se asocia con una unidad significante del registro de llegada.
- <u>Univocidad semántica terminal</u>, hace referencia a que la unidad significante del registro de representación de partida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada.
- <u>Orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones</u>, hace alusión a que existe igual orden de aprehensión en correspondencia semántica de las unidades significantes en las dos representaciones de los registros de partida y de llegada.

En la medida que existan condiciones de congruencia entre los diferentes registros de representación, podría decirse habría mejores procesos de comprensión en el aprendizaje del concepto matemático.

Para Duval existen tres fenómenos que están ligados al análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos en los aprendizajes fundamentales asociados al razonamiento, comprensión de los textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos (Duval, 2004).

1. <u>Diversificación de registros de representación semiótica</u>, lo que corresponde a que existe más de un registro para una representación semiótica, por ejemplo las tablas y los gráficos son sistemas de representaciones diferentes entre sí.
2. <u>Diferenciación entre representante y representado</u>, en otras palabras, es la diferencia entre la forma y el contenido de una representación semiótica. Tiene relación con lo que se interpreta de una representación, cómo se asocia a otras representaciones y sobre como se integran en los procedimientos de tratamientos.
3. <u>Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica</u>, se refiere a conocer las reglas de correspondencia y a su vez los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones producidas en los distintos sistemas.

En el caso de esta investigación, sobre el cuadrado de binomio, es importante que los y las estudiantes realicen una conversión entre las representaciones algebraicas y geométricas, para lograr así acercarse a este objeto y comprenderlo en su totalidad, al transitar por estas. El tratamiento toma relevancia en cuanto a cómo se trabaja este objeto matemático en un determinado registro. La conversión también surge como una interacción sobre cómo se relacionan los distintos tratamientos en los registros.

Aprehender estas dos representaciones, algebraica y geométrica, de los productos notables y relacionarlas entre sí, para luego desprenderse de estas, tiene un rol fundamental para comprender la regularidad del cuadrado de binomio y cubo de binomio, y obtener con esto un aprendizaje significativo a lo largo del tiempo, ya que así los y las estudiantes tienen una mejor percepción hacia la realidad de lo que significa este objeto, ayudando a la deducción y aplicación más que a una memorización. Junto con esto, facilitaría a que el o la estudiante pueda en cursos superiores lograr aplicar este conocimiento en otros contenidos como, por ejemplo, en los números irracionales.

Clases de la secuencia didáctica

A continuación se presentan las clases 1, 2 y 3 de la secuencia didáctica. La clase 2 corresponde al Estudio de Clase presentado en el apartado anterior, se considera el plan de clases con mejoras a partir de su implementación.

Clase 1

Objetivo

Nombre del Tema: Composición y descomposición de figuras planas para determinar sus perímetros y áreas.

Objetivo de la clase: Aplicar reducción y multiplicación de expresiones algebraicas en la composición y descomposición de figuras planas.

Para mantener la expectación de los y las estudiantes en la clase se redactará el objetivo de otra manera en la pizarra, para no dar a conocer con anterioridad los conocimientos matemáticos que estarán en juego. Este objetivo escrito es: construir composiciones con figuras geométricas con distintas medidas, determinando sus perímetros y áreas.

Tarea matemática: Calcular el perímetro y área de figuras compuestas (cuadriláteros).

Materiales:

- Docente: un cuadrado amarillo, tres rectángulos (verde, azul y fucsia). Cada cuadrilátero se confecciona con cartulina y se encuentra plastificado. Para la tarea final, se tienen dos cuadrados (rojo y morado) y tres rectángulos (fucsia, azul y verde)
- Estudiante: cada pareja tiene un cuadrado amarillo, tres rectángulos (verde, azul y fucsia). Cada cuadrilátero se confecciona con goma eva.

Descripción de las tareas de la clase 1 de la secuencia didáctica

La primera clase de esta secuencia didáctica corresponde al objetivo aplicar reducción y multiplicación de expresiones algebraicas en la composición y descomposición de figuras planas. Esta clase contempla tres tareas matemáticas que deben desarrollar los y las estudiantes.

La primera tarea, se diseñó para que los y las estudiantes activarán sus conocimientos previos para la clase, relacionado con que una variable algebraica puede representar la longitud de un trazo.

Los y las estudiantes verán un vídeo de la sobrina de su docente, quién realiza tres preguntas sobre las medidas que debería tener una huincha según su estatura; las primeras dos están centradas en medidas numéricas y la última en medidas numéricas y algebraicas.

La segunda tarea que deben realizar los y las estudiantes está enfocada en calcular el perímetro y área de cuadriláteros, con los cuales trabajaran en la siguiente tarea. La finalidad de la segunda tarea es recordar conceptos sobre el perímetro y área de cuadriláteros con medidas numéricas y algebraicas.

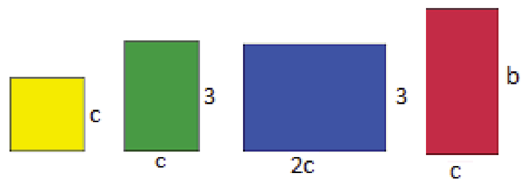
La tercera actividad de esta clase considera que los y las estudiantes creen figuras compuestas con las fichas que se les entregan y según los cuadriláteros que se les indican en las cuatro subtareas que se les proponen.

La finalidad de esta tarea es que los y las estudiantes multipliquen expresiones algebraicas y reduzcan términos semejantes relacionándolas con la representación geométrica de la composición de los cuadriláteros para desarrollar las clases 2 y 3 de la secuencia didáctica. Deben establecer estrategias para calcular el área y perímetro de las figuras compuestas, algunas de estas estrategias están estrechamente ligadas entre la representación geométrica y algebraica con el objetivo que haya una congruencia entre los dos registros que se utilizan.

Plan de clase de la clase 1 de la secuencia didáctica

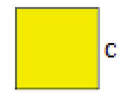
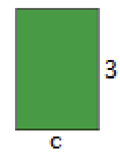
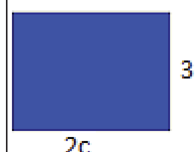
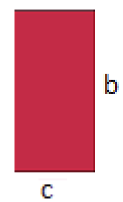
Tarea matemática	Rol docente	Rol estudiante	Tiempo
Inicio de la clase			
<u>Se da a conocer el objetivo de la clase:</u> Construir composiciones de figuras geométricas de distintas medidas, determinando sus perímetros y áreas. 1. <u>Mostrar tarea 1</u> Docente: Antes de comenzar a construir composiciones de figuras planas, tendrán la misión de ayudar a mi querida sobrina que tiene 6 añitos a determinar cuánto mide. Para esto veremos el siguiente video.	Docente muestra el video, de su sobrina, donde les solicita ayuda a los y las estudiantes para determinar cuánto debería marcar la huincha según su estatura. Las preguntas que aparecen en el video son: a) La última vez que me medí, la huincha marcaba 112 cm. Desde esa vez hasta mes pasado crecí 3 cm, ¿cuánto tendría que marcar la huincha según mi estatura hace un mes? b) Si del mes pasado hasta el día de hoy crecí 2 cm, ¿cuánto tendría que marcar la huincha hoy? c) Si en los siguientes dos meses crezco **a** cm, ¿cuánto tendría que marcar la huincha en dos meses? Si es necesario el o la docente repite el video dos veces. Si los y las estudiantes responden erróneamente la pregunta c, el o la docente realiza una contra pregunta con respecto a cómo desarrollaron las preguntas a y b. Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento.	Estudiantes ven el video y toman apuntes en sus cuadernos con los datos que se dan en el video. a) Respuesta 115 cm. $\boxed{112+3=115}$ b) Respuesta 117 cm. $\boxed{115+2=117}$ c) Respuesta $117+a$ cm. $\boxed{117+a}$ **POSIBLE DIFICULTAD** • En la pregunta c, reduzcan erróneamente la expresión dando como resultado $120a$.	10 min

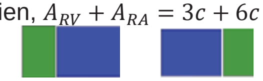
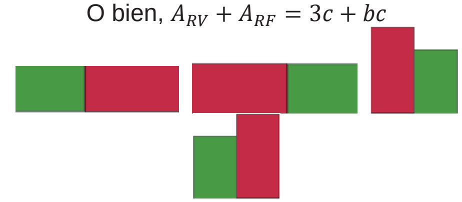
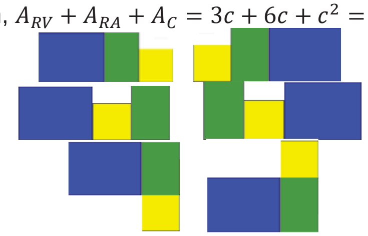
<table>
<tr><th colspan="4">Desarrollo de la clase</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">2. <u>Mostrar tarea 2</u>

Docente: Le entregaré sus respuestas a mi sobrina y gracias a ella, pudimos reconocer ciertos conceptos claves para iniciar con esta clase.
Ahora trabajaremos en parejas con las siguientes fichas: un cuadrado amarillo y tres rectángulos de distintas medidas cada uno de colores fucsia, azul y verde.
Determinar el perímetro y el área de cada cuadrilátero dadas sus medidas.</td>
<td rowspan="2">Docente presenta las fichas a los y las estudiantes, luego las pega en la pizarra para que estén visibles toda la clase.

Se anotan las medidas de cada cuadrilátero para que los y las estudiantes realicen la actividad 2.

Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento.

En el caso de que los y las estudiantes no recuerden el concepto de área y perímetro. Docente realiza contra preguntas, sobre el significado del perímetro y área, luego pregunta de forma en específico cómo sería para el caso de estos cuadriláteros.

En el caso de que los y las estudiantes no reduzcan correctamente el perímetro de los rectángulos, el o la docente realiza contra preguntas orientado a la actividad inicial de la clase.</td>
<td>Cada pareja trabaja con su set de fichas en sus puestos.
Respuestas:

Perímetro:
$P_C = c + c + c + c = 4c$
Área:
$A_C = a \cdot a = a^2$

Perímetro:
$P_{RV} = c + c + 3 + 3 = 2c + 6$
Área:
$A_{RV} = c \cdot 3 = 3c$

Perímetro:
$P_{RA} = 2c + 2c + 3 + 3 = 4c + 6$
Área:
$A_{RA} = 2c \cdot 3 = 6c$

Perímetro:
$P_{RR} = c + c + b + b = 2c + 2b$
Área:
$A_{RR} = c \cdot b = bc$</td>
<td rowspan="2">10 min</td>
</tr>
<tr>
<td>POSIBLES DIFICULTADES
• Reducen de forma errónea el perímetro de los rectángulos.
• No se acuerdan del concepto de área y perímetro de cuadriláteros.</td>
</tr>
</table>

3. <u>Mostrar tarea 3</u> Utilizando todos los cuadriláteros realizaremos composiciones con estas figuras, para luego determinar su perímetro y área. a) Realizar la composición entre los rectángulos verde y azul. b) Realizar la composición entre los rectángulos verde y fucsia. c) Realizar la composición entre el cuadrado amarillo y los rectángulos verde y azul. d) Realizar la composición entre todos los cuadriláteros.	Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los y las estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de las parejas. Es importante que el o la docente identifique las posibles estrategias que utilizan los y las estudiantes, para luego exponerlas en el plenario. <u>Estrategias para determinar el perímetro:</u> A) Suma de los lados de la composición de los cuadriláteros. B) Suma uno de los lados paralelos horizontales y verticales, para luego multiplicarlos por dos. C) Identifica que la suma de dos lados corresponde al lado de mayor medida de uno de los cuadriláteros, para luego determinar el perímetro utilizando esta medida. <u>Estrategias para determinar el área:</u> A) Suma las áreas ya determinadas de cada uno de los cuadriláteros. B) determina el área de la figura compuesta según la suma de sus lados correspondientes.	Posibles posiciones de las fichas y sus perímetros y áreas correspondientes: **a)** Perímetro: $c + 2c + c + 2c + 3 + 3 = 6c + 6$ o bien, $(c + 2c + 3) \cdot 2 = 6c + 6$ Área: $(2c + c) \cdot 3 = 9c$ O bien, $A_{RV} + A_{RA} = 3c + 6c = 9c$  **b)** Perímetro: $c + c + c + c + b + b = 2b + 4c$ o bien, $(b + 2c) \cdot 2 = 2b + 4c$ Área: $(c + c) \cdot b - (b - 3) \cdot c = 3c + bc$, $(3 + b) \cdot c = 3c + bc$, O bien, $A_{RV} + A_{RF} = 3c + bc$  **c)** Perímetro: $3 + 3 + c + c + 2c + c + c + 2c = 6 + 8c$, $(3 + 4c) \cdot 2 = 6 + 8c$, $3 + 3 + c + c + 2c + c + c + 2c + (3 - c) + (3 - c) = 12 + 6c$, $[3 + 4c + (3 - c)] \cdot 2 = 12 - 6c$, O bien, $(3 + 3c) \cdot 2 + 2c = 6 + 8c$ Área: $3 \cdot 4c - (3 - c) \cdot c = 9c + c^2$, $(3 + c) \cdot (2c + c) - (c \cdot c) = 9c + c^2$, O bien, $A_{RV} + A_{RA} + A_C = 3c + 6c + c^2 = 9c + c^2$ 	30 min

d) Perímetro: $b+b+c+c+c+c+c+c+2c+2c=2b+10c$,

$$(b+5c)\cdot 2=2b+10c,$$

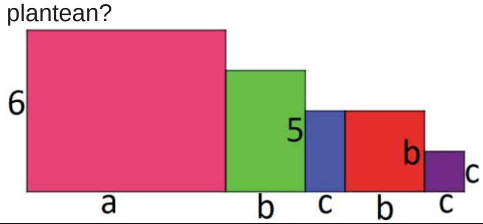
$$b+c+2c+c+c+c+c+(3-c)+c+2c+(b-3)+c=2b+10c$$

Área: $b\cdot 5c-[3c\cdot(b-3)]-[c\cdot(b-c)]=bc+9c+c^2$,

O bien, $A_{RV}+A_{RF}+A_{RA}+A_C=3c+bc+6c+c^2=bc+9c+c^2$

POSIBLES DIFICULTADES

- No identifican que al existir distintas alturas en la composición, se puede considerar el lado mayor para determinar su perímetro.
- Al determinar el área de la composición formada, utilizando la estrategia B, no identifican que hay que restar el área faltante, cuando existe un desnivel de uno de sus lados.
- No aplican propiedad distributiva.
- Reducen de forma errónea los términos.

4. <u>Plenario</u> Los y las estudiantes presentan la composición de los cuadriláteros que formaron y las estrategias que utilizaron para determinar el perímetro y área de cada uno de ellos.	Docente pide a los y las estudiantes que argumenten cómo obtuvieron el perímetro y el área de la composición de los cuadriláteros formados. Según lo observado por el o la docente, selecciona a las parejas que saldrán a la pizarra. Estudiantes exponen y argumentan en la pizarra las estrategias y las composiciones de los cuadriláteros que formaron. Docente: Encontraron más de una forma de componer los cuadriláteros. ¿Qué tiene en común estas composiciones? ¿Qué estrategias utilizaron para determinar el perímetro y área? Docente: ¿Todos los perímetros son iguales sin importar la ubicación según la composición? ¿Para todos los casos? ¿Varia el área de las composiciones si se tienen distintas posiciones? ¿Por qué? ¿Qué relación existe entre sus resultados y las figuras compuestas?	Las parejas seleccionadas salen a la pizarra, se realiza una tabla de acuerdo a las estrategias utilizadas para determinar el perímetro y área según las figuras compuestas, para luego compararlas a nivel general. Es importante mantener el orden en la pizarra para no generar una confusión entre cada una de las actividades de la tarea. Algunas son iguales, solo se diferencian por una reflexión. Las áreas determinadas son todas iguales. Se mencionan todas las estrategias utilizadas por los y las estudiantes, identificando la más eficiente. No, en el caso de tener 3 o más cuadriláteros, el perímetro va a depender de cómo se realizó la composición, debido a que puede abarcar más o menos longitud externa. No, porque en todos los casos se mantiene la superficie. Podemos simplificar el perímetro de la figura compuesta identificando el lado mayor, en vez de ir sumando lado a lado. Al sumar cada área de los cuadriláteros se obtiene el área total de la figura compuesta.	30 min
Cierre de la clase			
5. <u>Institucionalización</u> Se realizan las conclusiones de la clase, identificando los conceptos claves, correspondientes a la reducción de términos semejantes y la multiplicación de expresiones algebraicas (utilizando la propiedad distributiva). Se realiza un énfasis sobre la relación geométrica y algebraica en juego de todas las tareas de la clase.	¿Qué elementos fueron claves dentro de la clase? Si queremos determinar el perímetro de figuras compuestas de distinta altura, ¿qué altura consideraremos para determinar el perímetro? ¿Cuál es el perímetro y área de la siguiente figura compuesta según las medidas de los lados que se plantean? 	Área, perímetro, reducción de términos semejantes, multiplicación de expresiones algebraicas, composición de figuras geométricas. Consideraremos dos veces la de mayor altura y el mismo caso ocurre el lado horizontal, al componer las figuras de menor a mayor a altura o viceversa. Perímetro: $(6+a+2b+2c)\cdot 2 = \boxed{12+2a+4b+4c}$ Área: $6\cdot a+5\cdot b+c\cdot b+b\cdot b+c\cdot c$ $= \boxed{6a+5b+cb+b^2+c^2}$	10 min

Análisis a priori del plan de clase de la clase 1 de la secuencia didáctica

<u>Tarea 1:</u>

Docente muestra un video, de su sobrina, donde les solicita ayuda a los y las estudiantes para determinar cuánto debería marcar la huincha según su estatura. Las preguntas que debiesen de contestar son:

a) La última vez que me medí, la huincha marcaba 112 cm. Desde esa vez hasta mes pasado crecí 3 cm, ¿cuánto tendría que haber marcado la huincha según mi estatura hace un mes?

> Respuesta de los y las estudiantes para determinar cuánto marca la huincha es:
>
> $112 + 3 = 115$
>
> Hace un mes, la huincha debió marcar 115 cm.

b) Si del mes pasado hasta el día de hoy crecí 2 cm, ¿cuánto tendría que marcar la huincha hoy?

> Respuesta de los y las estudiantes para determinar cuánto marca la huincha es:
>
> 115+2=117
>
> Hoy la huincha tendría marcar 115 cm.

c) Si en los siguientes dos meses crezco a cm, ¿cuánto tendría que marcar la huincha en dos meses?

> Respuesta de los y las estudiantes para determinar cuánto marca la huincha es:
>
> 117+a
>
> En un mes, la huincha debiese marcar 117+a cm.

<u>Posibles dificultades y errores:</u>

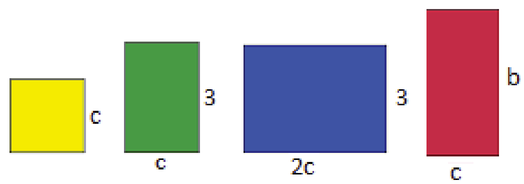
- En la pregunta c, los y las estudiantes reducen erróneamente la expresión dando como resultado 120a.

Devoluciones:

Docente pregunta a los y las estudiantes qué realizaron en las preguntas a y b. Luego se les pregunta lo que realizaron en la pregunta c, para que reflexionen y logren deducir si es correcto lo que realizaron.

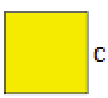
Tarea 2:

Estudiantes trabajan en parejas con las siguientes fichas un cuadrado amarillo y tres rectángulos de distintas medidas cada uno de colores fucsia, azul y verde, como se muestra a continuación:



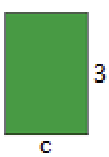
Docente da la instrucción que deben determinar el perímetro y el área de cada cuadrilátero dadas sus medidas.

Estrategias para calcular el perímetro y el área de cada una de las figuras geométricas:



Cuadrado de medida de lado c:
Perímetro: $P_C = c + c + c + c = 4c$
O bien, $P_C = 4 \cdot c = 4c$
Área: $A_C = a \cdot a = a^2$

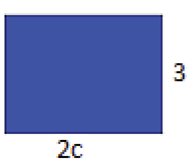
Rectángulo de medidas de lado 3 y c:



Perímetro: $P_{RV} = c + c + 3 + 3 = 2c + 6$
O bien, $P_{RV} = 2 \cdot c + 2 \cdot 3 = 2c + 6$

Área: $A_{RV} = c \cdot 3 = 3c$

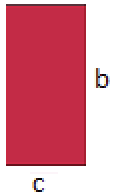
Rectángulo de medidas de lado 3 y 2c.



Perímetro: $P_{RA} = 2c + 2c + 3 + 3 = 4c + 6$
O bien, $P_{RA} = 2 \cdot 2c + 2 \cdot 3 = 4c + 6$

Área: $A_{RA} = 2c \cdot 3 = 6c$

Rectángulo de medidas de lado b y c.



Perímetro: $P_{RR} = c + c + b + b = 2c + 2b$

O bien, $P_{RR} = 2 \cdot c + 2 \cdot b = 2c + 2b$

Área: $A_{RR} = c \cdot b = bc$

<u>Posibles dificultades y errores:</u>

- Reducen de forma errónea el perímetro de los rectángulos, no reconocen cuando dos términos son semejantes por ejemplo $2c + 3 = 5c$.
- No se acuerdan del concepto de área y perímetro de cuadriláteros.

<u>Devoluciones:</u>

Si los y las estudiantes tienen dificultades con el cálculo del área y perímetro de los cuadriláteros la o el docente realiza las siguientes devoluciones:

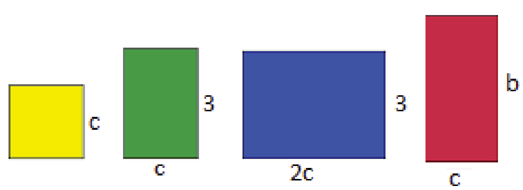
- ¿Qué es el perímetro?
- Si quieres calcular cuantos pasos darás al caminar por el borde de una cancha de babyfutbol, ¿qué realizarás?, ¿qué estarías determinando matemáticamente?
- En el caso de un cuadrilátero ¿cómo calcularías el perímetro?
- ¿Qué es el área?
- ¿Cuál es la diferencia entre el área y la superficie?
- En el caso de un cuadrilátero ¿cómo calcularías el área?

Si los y las estudiantes tienen dificultades con la reducción de términos semejantes:

- ¿Cuándo dos términos son semejantes?
- ¿Qué tienen en común dos términos semejantes?
- Por lo tanto, ¿cuáles son los términos que se pueden reducir?

<u>Tarea 3:</u>

Utilizando todos los cuadriláteros los y las estudiantes realizarán composiciones con estas figuras, para luego calcular su perímetro y área.



a) Realizar la composición entre los rectángulos verde y azul.
b) Realizar la composición entre los rectángulos verde y fucsia.
c) Realizar la composición entre el cuadrado amarillo y los rectángulos verde y azul.

d) Realizar la composición entre todos los cuadriláteros.

A continuación se presentarán estrategias generales para calcular el perímetro y área de las figuras compuestas.

<u>Estrategias para determinar el perímetro:</u>

A) Suma de los lados exteriores de la composición de los cuadriláteros.

B) Suma uno de los lados paralelos horizontales y verticales, para luego multiplicarlos por dos.

C) Identifica que la suma de dos lados corresponde al lado de mayor medida de uno de los cuadriláteros, para luego determinar el perímetro utilizando esta medida.

<u>Estrategias para determinar el área:</u>

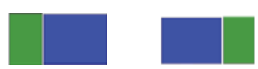
A) Suma las áreas ya determinadas de cada uno de los cuadriláteros.

B) determina el área de la figura compuesta según la suma de sus lados correspondientes.

<u>Posibles posiciones de las fichas y sus perímetros y áreas correspondientes:</u>

a) Perímetro: $c + 2c + c + 2c + 3 + 3 = 6c + 6$
o bien, $(c + 2c + 3) \cdot 2 = 6c + 6$

Área: $(2c + c) \cdot 3 = 9c$
o bien, $A_{RV} + A_{RA} = 3c + 6c = 9c$

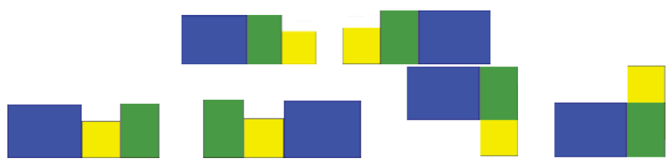


b) Perímetro: $c + c + c + c + b + b = 2b + 4c$
o bien, $(b + 2c) \cdot 2 = 2b + 4c$

Área: $(c + c) \cdot b - (b - 3) \cdot c = 3c + bc$,
$(3 + b) \cdot c = 3c + bc$,
O bien, $A_{RV} + A_{RF} = 3c + bc$

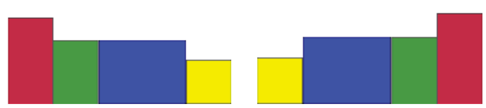
c) Perímetro: $3 + 3 + c + c + 2c + c + c + 2c = 6 + 8c$,
$(3 + 4c) \cdot 2 = 6 + 8c$,
$3 + 3 + c + c + 2c + c + c + 2c + (3 - c) + (3 - c) = 12 + 6c$,
$[3 + 4c + (3 - c)] \cdot 2 = 12 - 6c$,
O bien, $(3 + 3c) \cdot 2 + 2c = 6 + 8c$

Área: $3 \cdot 4c - (3 - c) \cdot c = 9c + c^2$,
$(3 + c) \cdot (2c + c) - (c \cdot c) = 9c + c^2$,
o bien, $A_{RV} + A_{RA} + A_C = 3c + 6c + c^2 = 9c + c^2$



d) Perímetro: $b + b + c + c + c + c + c + c + 2c + 2c = 2b + 10c$,
$(b + 5c) \cdot 2 = 2b + 10c$,
$b + c + 2c + c + c + c + c + (3 - c) + c + 2c + (b - 3) + c = 2b + 10c$

Área: $b \cdot 5c - [3c \cdot (b - 3)] - [c \cdot (b - c)] = bc + 9c + c^2$,
o bien, $A_{RV} + A_{RF} + A_{RA} + A_C = 3c + bc + 6c + c^2 = bc + 9c + c^2$



<u>Posibles dificultades y errores:</u>

- No identifican que al existir distintas alturas en la composición, se puede considerar el lado mayor para determinar su perímetro.

- Al calcular el área de la composición formada, utilizando la estrategia B, no identifican que hay que restar el área sobrante, cuando existe un desnivel de uno de sus lados (caso b, c y d).

- No aplican propiedad distributiva en el cálculo del área y perímetro según sea la estrategia utilizada.

- No identifican los términos semejantes y reducen erróneamente estos términos.

Devoluciones:

Si los y las estudiantes no identifican los términos semejantes y reducen erróneamente estos términos, el o la docente realiza las siguientes devoluciones:

- ¿Cuándo dos términos son semejantes?
- ¿Qué tienen en común dos términos semejantes?
- Por lo tanto, ¿cuáles son los términos que se pueden reducir?

Si los y las estudiantes no aplican la propiedad distributiva en el cálculo del área y perímetro, el o la docente realiza las siguientes devoluciones:

- ¿Cómo multiplicábamos un monomio por un binomio?
- Ahora, ¿cómo podrías determinar el producto entre dos binomios?
- Si el o la estudiante aun no lo visualiza, con el dedo se tapa uno de los términos de un binomio para que determine como multiplicaría y luego se taparía el otro, luego se pregunta ¿qué operatoria realizas para unir estos dos resultados.

Los y las estudiantes no identifican que, al existir distintas alturas en la composición, se puede considerar el lado mayor para determinar su perímetro.

- Docente realiza la comparación entre las distintas estrategias utilizadas, preguntando las diferencias entre ambas. Si no surge la estrategia C, nombrada anteriormente, en un grupo se desarrollará en el plenario.

Al calcular el área de la composición formada, utilizando la estrategia B, no identifican que hay que restar el área sobrante, cuando existe un desnivel de uno de sus lados (caso b, c y d).

- ¿Cuál es el perímetro del área que están calculando?
- ¿Corresponde al área que calcularon?

MATEMÁTICA EN JUEGO

- Comprender la diferencia entre superficie y área.
- Realizar una conexión entre las representaciones tanto algebraica como geométrica del perímetro y área de figuras compuestas.
- Identificar términos semejantes en la adición de expresiones algebraicas al componer las figuras y reducirlas al sumar las áreas.
- Identificar que en algunos casos (como la tarea 2 parte 1), se pueden multiplicar los lados por dos y sumarlos para obtener el perímetro, ya que son de la misma medida por ser rectángulos.

- Determinar posibles estrategias para determinar el área en la composición y/o descomposición de cuadriláteros (en este caso).
- Establecer la congruencia entre los registros utilizados según el marco teórico de la teoría de registros de Duval.

Para dar a conocer la congruencia entre las representaciones algebraica y geométrica de las áreas y perímetros calculados, se considerará la tarea 2 parte c.

A continuación, se presenta una tabla que describe lo mencionado anteriormente, haciendo alusión a la congruencia entre estas dos representaciones que deberían de realizar los y las estudiantes en base al marco teórico correspondiente al perímetro y área de la composición de los cuadriláteros:

Tabla 4: Congruencia de las representaciones algebraica y geométrica del perímetro de la figura compuesta.

Representación geométrica	**Representación algebraica**
 Contorno de la figura compuesta por 2 rectángulos y un cuadrado. Rectángulo azul de medidas de lados $2c$ y 3. Rectángulo verde de medidas de lados c y 3. Cuadrado amarillo de medidas de lados c.	Perímetro de la figura compuesta: Identificar que si se suman los lados horizontales una vez y se multiplica por dos corresponderá a la longitud de todos los lados horizontales. $2c + c + c = 6c$ $6c \cdot 2 = 12c$ Si se considera uno de los lados verticales y se multiplica por dos (de acuerdo con las dos medidas verticales distintas) corresponderá a la longitud de todos los lados verticales. $3 + (3 - c) = 3 + 3 - c = 6 - c$ $(6 - c) \cdot 2 = 12 - 2c$ $P = 12c + 12 - 2c$ $P = 10c + 12$

Tabla 5: Congruencia de las representaciones algebraica y geométrica del área de la figura compuesta.

Representación geométrica	**Representación algebraica**
 Superficie del rectángulo de medidas de lados $2c$ y 3.	Área del rectángulo de lados $2c$ y 3. $A_{RA} = 6c$
 Superficie del rectángulo de medidas de lados c y 3.	Área del rectángulo de lados c y 3. $A_{RV} = 3c$
 Superficie del cuadrado amarillo de medida de lado c.	Área del cuadrado de lado c. $A_C = c^2$
 Superficie de la figura compuesta por 2 rectángulos y un cuadrado. Rectángulo azul de medidas de lados $2c$ y 3. Rectángulo verde de medidas de lados c y 3. Cuadrado amarillo de medidas de lados c.	Área del cuadrado de lado $a + b$. $A_T = A_{RV} + A_{RA} + A_C$ $A_T = 3c + 6c + c^2$ $A_T = 9c + c^2$

Los y las estudiantes deben de identificar que el área corresponde a estar trabajando en dos dimensiones y el perímetro es en una dimensión.

Clase 2

Objetivo

Nombre del Tema: Formular la expresión que define el cuadrado de binomio

Objetivo de la clase: Conjeturar la regularidad del cuadrado de binomio.

Para mantener la expectación de los y las estudiantes en la clase se redactará el objetivo de otra manera en la pizarra, para no dar a conocer con anterioridad los conocimientos matemáticos que estarán en juego. Este objetivo escrito es: construir cuadrados de distintas medidas y calcular sus superficies.

Tarea matemática: Calcular el área del cuadrado que se forma con todas las fichas.

Materiales:

- Docente: un cuadrado rojo, cuatro cuadrados rosados, cuatro rectángulos cafés. Cada cuadrilátero se confecciona con cartulina y se encuentra plastificado.
- Estudiante: cada pareja tiene un cuadrado rojo, cuatro cuadrados rosados, cuatro rectángulos cafés. Cada cuadrilátero se confecciona con goma eva.

Descripción de las tareas de la clase 2 de la secuencia didáctica

La segunda clase de esta secuencia didáctica corresponde al objetivo conjeturar la regularidad del cuadrado de binomio. Esta clase contempla tres tareas matemáticas que deben desarrollar los y las estudiantes.

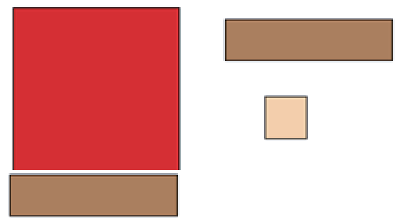
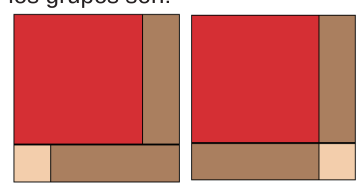
En la primera tarea los y las estudiantes deben crear un cuadrado con cuatro fichas que se les entrega correspondientes a dos cuadrados de medidas a y 1, respectivamente, y dos rectángulos de medidas a y 1. Independiente de cuál sea la composición de los cuadriláteros para forma un cuadrado el área siempre será la misma, por lo que la finalidad de la tarea no es crear el cuadrado si no más bien es calcular el área de este estableciendo distintas estrategias, y relacionar la representación geométrica y algebraica del cuadrado de binomio para lograr una comprensión del cuadrado de binomio.

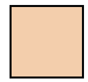
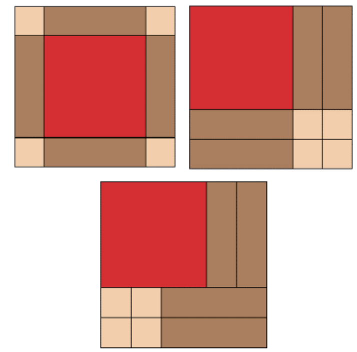
La segunda tarea, es muy parecida a la primera. En este caso se agregan dos cuadrados de medida de lado 1, creando un cuadrado de lado $a + 2$. Nuevamente los y las estudiantes deben establecer estrategias para calcular el área del cuadrado formado y relacionar la representación algebraica y geométrica, según la congruencia entre los registros.

La última tarea de la clase está diseñada para que los y las estudiantes deduzcan la regularidad del cuadrado de binomio, por lo que trabajan con un cuadrado de medida a, un cuadrado de medida b y dos rectangulos de medidas a y b.

Esta tarea es la central de la clase, por lo que se formaliza la regularidad del cuadrado de binomio y se relaciona cada termino algebraico con su representación geométrica para lograr una comprensión de este objeto matemático.

Plan de clase de la clase 2 de la secuencia didáctica

Tarea matemática	Rol docente	Rol estudiante	Tiempo
Inicio de la clase			
<u>Se da a conocer el objetivo de la clase:</u> Construir cuadrados de distintas medidas y calcular sus superficies. 1. <u>Docente muestra el material concreto con el que se trabajará en clase.</u> Docente: Vamos a trabajar en grupos de 4 personas con las siguientes fichas: un cuadrado color rojo de lado a, un cuadrado rosado de lado 1 y dos rectángulos cafés de lados a y 1.	Docente muestra las fichas que se les entregará a las parejas. 		5 min
Desarrollo de la clase			
2. <u>Mostrar tarea 1</u> Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área Manipular las 4 fichas haciendo ensayo y error.	Docente monitorea el trabajo, siendo un facilitador del conocimiento, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos. Es importante que el o la docente identifique las posibles estrategias que utilizan los y las estudiantes, para luego exponerlas en el plenario. **A) Si de las dos estrategias esperadas, los y las estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:** Docente hace explícito en la pizarra los lados de los cuadriláteros menores, de manera que el o la estudiante identifique la suma de los lados menores como el lado mayor del cuadrado. **B) Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:** Docente: "¿Cómo establecieron que el área es $a^2 + 2a + 1$?".	Los posibles cuadrados construidos por los grupos son:  Estudiantes: el área del cuadrado es $a^2 + 2a + 1$ **POSIBLES DIFICULTADES** • Estudiantes no logran construir un cuadrado con las fichas. • Estudiantes no logran determinar el lado. • Estudiantes no aplican propiedad distributiva	10 min

3. <u>Mostrar tarea 2.</u> Docente entrega a cada grupo un cuadrado de color rojo de lado a, cuatro cuadrados rosados de lado 1 y cuatro rectángulos cafés de lados a y 1. Nuevamente utilizando todas las piezas, se les indica que formen un cuadrado y luego determinen su área.	Docente muestra las fichas que se agregarán a las ya entregadas en tarea parte 1. Se agregan 4 fichas de:  Y 4 fichas de:  Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los y las estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos. Es importante que el o la docente identifique las posibles estrategias que utilizan los y las estudiantes, para luego exponerlas en el plenario. **A) Si de las dos estrategias esperadas, los y las estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:** Docente hace explícito en la pizarra los lados de los cuadriláteros menores, de manera que el o la estudiante identifique la suma de los lados menores como el lado mayor del cuadrado. **B) Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:** Docente: "¿Cómo establecieron que el área es $a^2 + 4a + 4$?".	En esta actividad, los posibles cuadrados construidos son:  Estudiantes: el área del cuadrado es $a^2 + 4a + 4$ **POSIBLES DIFICULTADES** • Estudiantes no logran construir un cuadrado dadas las fichas. • No logran identificar más de una estrategia. • Estudiantes no logran determinar el lado. • Estudiantes no aplican propiedad distributiva. Estudiante: Por el producto de $(a + 2)$ por $(a + 2)$ Estudiante: Identifica la operación de adición para obtener el lado y así, aplicando propiedad distributiva, determinar el área del cuadrado.	15 min

4. <u>Reflexiones grupales</u> Docente expone las siguientes preguntas para que los y las estudiantes relacionen sus dos estrategias, junto con esto se intenciona a que analicen la relación existente entre las representaciones geométrica y algebraica del cuadrado de binomio. a) ¿Qué relación existe entre el exponente 2 y el área? b) ¿Qué relación existe entre los términos algebraicos del área del cuadrado de lado $a+1$ y el área de cada uno de los cuadriláteros? c) ¿Qué relación existe entre los términos algebraicos del área del cuadrado de lado $a+2$ y el área de cada uno de los cuadriláteros?	Docente monitorea el trabajo realizados por los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento, para que logren una reflexión entre lo geométrico y algebraico en los procedimientos utilizados.	Respuestas que se espera de los y las estudiantes: a) Cuando se determina el área de un cuadrado, es en un plano bidimensional, ya que se determina la superficie donde se encuentra el cuadrilátero, por lo tanto el exponente 2 corresponde a la dimensión en la cual se trabaja. b) El área del lado $a+1$ del cuadrado formado es a^2+2a+1, el primer término corresponde al área de cuadrado de lado a que forma el cuadrado de lado $a+1$, el segundo término corresponde al área de los dos rectángulos iguales, de lados a y 1, que forman el cuadrado de lado $a+1$ y el tercer término corresponde al área del cuadrado de lado 1, que forma el cuadrado de lado $a+1$. c) El área del lado $a+2$ del cuadrado formado es a^2+4a+4, el primer término corresponde al área de cuadrado de lado a que forma el cuadrado de lado $a+2$, el segundo término corresponde al área de los cuatro rectángulos iguales, de lados a y 1, que forman el cuadrado de lado $a+2$ y el tercer término corresponde al área d los cuatro cuadrados de lado 1, que forma el cuadrado de lado $a+2$.	10 min

5. <u>Plenario</u> Los y las estudiantes presentan los cuadrados que construyeron y las estrategias que utilizaron para determinar el área de cada uno de ellos.	Docente pide a los y las estudiantes que indiquen cómo obtuvieron el lado $a + 2$. Según lo observado por el o la docente, selecciona a los grupos que salen a la pizarra. Estudiantes exponen en la pizarra las estrategias y cuadrados que formaron en la actividad. Docente: Encontraron más de una forma de construir el cuadrado usando las 4 y 9 fichas. ¿Qué tiene en común todos estos cuadrados? ¿Qué estrategias utilizaron para determinar el área? Docente: ¿qué ocurre con las estrategias utilizadas?	Estudiantes: es la misma área. Estudiantes: lado mayor al cuadrado y suma de las áreas menores. Estudiantes: dan el mismo resultado	20 min
6. <u>Concluir</u> igualdades en los procedimientos.	Docente solita que un o una estudiante escriba en la pizarra una tabla comparativas de las estrategias que se utilizaron para calcular el área del cuadrado. $(a+2)^2$ | $a^2+2a+2a+4$ $(a+2)\cdot(a+2)$ $a^2+2a+2a+4$ a^2+4a+4 | a^2+4a+4 Luego concluyen que: $(a+2)^2 = a^2+4a+4$ Es decir el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros que lo componen.		6 min
7. <u>Mostrar tarea 3</u> Con los mismos cuadriláteros de la tarea 1, se pide que determinen el área del cuadrado formado por ellos, pero ahora con nuevas medidas: cuadrado color rojo de lado $\boldsymbol{a}$, cuadrado color rosado de lado $\boldsymbol{b}$ y rectángulos cafés de lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.	Escribir en pizarra los nuevos datos de las fichas. Retomar los cuadriláteros por grupo y determinar el área del cuadrado que se puede formar con 4 cuadriláteros (un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$ y dos rectángulos de lado $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$) Observar si utilizan las estrategias utilizadas anteriormente. Se expone en la pizarra las estrategias y resultados de los y las estudiantes. Docente: Según lo trabajado anteriormente ¿Qué ocurre con estos resultados? Se concluye que: $(a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$	Posibles respuestas $(a+b)\cdot(a+b)$ y/o $a^2 + ab + ab + b^2$ **POSIBLE DIFICULTAD** No establecen relación de actividad anterior (alfanumérico) a esta nueva tarea (algebraica). Estudiantes: Son iguales	15 min

<table>
<tr><th colspan="4">Cierre de la clase</th></tr>
<tr>
<td>8. <u>Institucionalización</u>
Docente muestra en la pizarra cuatro cuadriláteros como en la tarea 1.

Un cuadrado rojo de lado $\boldsymbol{a}$, un cuadrado rosado de lado $\boldsymbol{b}$ y dos rectángulos cafés de lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.</td>
<td>Utilizando todos los cuadriláteros se forma un cuadrado en la pizarra, según los resultados que expusieron los y las estudiantes en respecto a las tareas anteriores.

Docente les pregunta, ¿cuál es el área del cuadrado que se forma? ¿Qué relación existe entre cada término de la expresión del área del cuadrado y los cuadriláteros que lo originan?

Docente vuelve a escribir en la pizarra los resultados de los ejercicios anteriores y pide a los y las estudiantes que observen si hay algo en común con los tres desarrollos.
$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$
$(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Una vez que los y las estudiantes logran determinar la regularidad, se les explicita que esta recibe el nombre de cuadrado de binomio y la relación que tiene con geometría.

Para corroborar que los y las estudiantes entienden igualdad. Docente plantea el siguiente cuadrado de binomio: $(3+b)^2$.

Docente: ¿cuál es el desarrollo de este cuadrado de binomio? ¿Cuál sería la relación entre la expresión obtenida con los cuadriláteros que originan el cuadrado de binomio? ¿Cuáles serían las medidas de los lados de cada uno de los cuadriláteros?</td>
<td>Estudiantes utilizan las estrategias expuestas en las tareas anteriores.

Logrando decir que:
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
O bien,
$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

Estudiantes: todos tienen un a^2.

POSIBLES DIFICULTADES
• Estudiantes sólo no determinan que $1 = 1^2$ y $4 = 2^2$.
• Estudiantes no observan que cada expresión tiene el doble del producto de los términos del paréntesis.

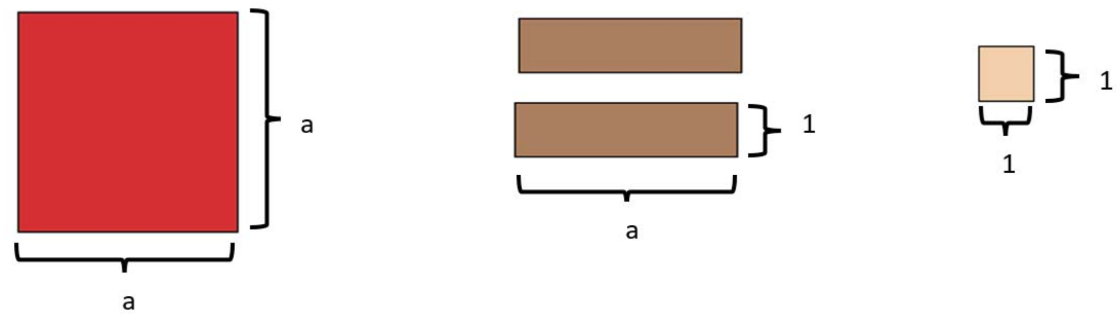
Estudiantes: tres al cuadrado más seis b más b^2. El tres al cuadrado es nueve.</td>
<td>9 min</td>
</tr>
</table>

Análisis a priori del plan de clase de la clase 2 de la secuencia didáctica

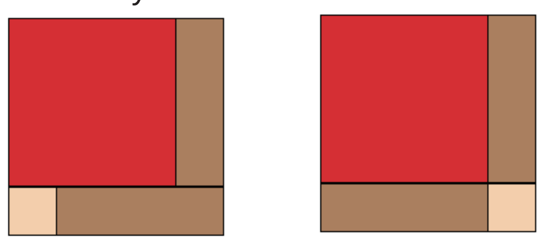
<u>Tarea 1:</u>

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área.

En la primera actividad se desarrolla el cálculo del área del cuadrado con valores algebraicos y numéricos.



Posibles construcciones de los y las estudiantes:



<u>Estrategias para desarrollar el problema:</u>

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

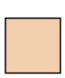
<u>1° Desarrollo (estrategia1):</u>

El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo de lado **a** y 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = a \cdot 1 = a$$



El área del cuadrado de lado 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Recordar que para formar el cuadrado con las cuatro fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lado **a** y 1. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

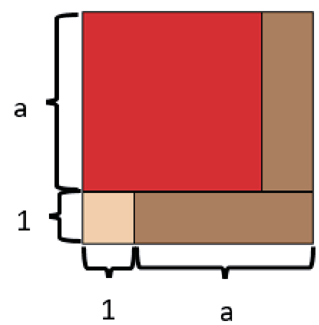
$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 2\ A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + 1$$

O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = a^2 + a + a + 1$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + 1$$

<u>2° Desarrollo (estrategia 2):</u>

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman 1 y a.

$$Medida\ del\ lado = a + 1$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a + 1)(a + 1)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican término por término, obteniendo el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + a + a + 1$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + 1$$

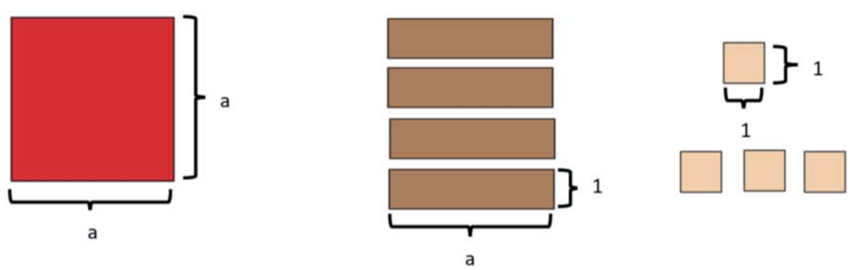
Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

Posibles dificultades y errores:

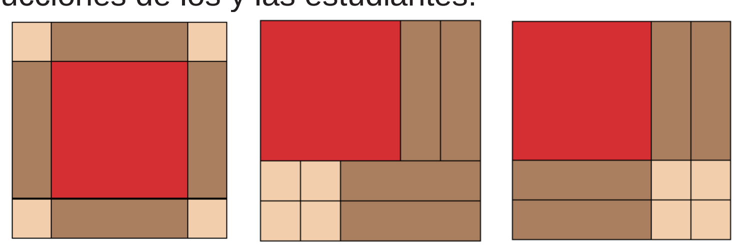
- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Los y las estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran construir el cuadrado con las fichas.
- No identifican los términos semejantes, por lo que no reducen correctamente la expresión que da como resultado un trinomio.
- No logran multiplicar término por término.
- Estudiantes no logran construir un cuadrado con las fichas.
- Estudiantes no logran determinar el lado.
- Estudiantes no aplican propiedad distributiva

Tarea 2:

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área. En este caso se tiene: 1 cuadrado rojo de lado a, cuatro rectángulos de lados a y 1 y cuatro cuadrados de lado 1.



Posibles construcciones de los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

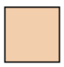
1° Desarrollo (estrategia1):

El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo de lado **a** y 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = a \cdot 1 = a$$



El área del cuadrado de lado 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Recordar que para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lado **a** y 1. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 4\ A_{rectangulo} + 4\ A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = a^2 + 4 \cdot a + 4 \cdot 1$$
$$A_{Total} = a^2 + 4a + 4$$

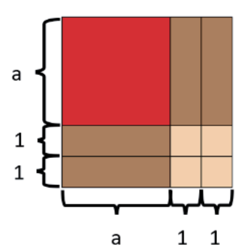
O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} \\ + A_{cuadrado\ lado\ 1} + A_{cuadrado\ lado\ 1} + A_{cuadrado\ lado\ 1} + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$

$$A_{Total} = a^2 + a + a + a + a + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$A_{Total} = a^2 + 4a + 4$$

2° Desarrollo (estrategia 2):

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las nueve fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman 1, 1 y **a**.

$$Medida\ del\ lado = a + 1 + 1 = a + 2$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a+2)(a+2)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican término por término, obteniendo el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + 2a + 2 \cdot 2$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 4a + 4$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las nueve fichas.

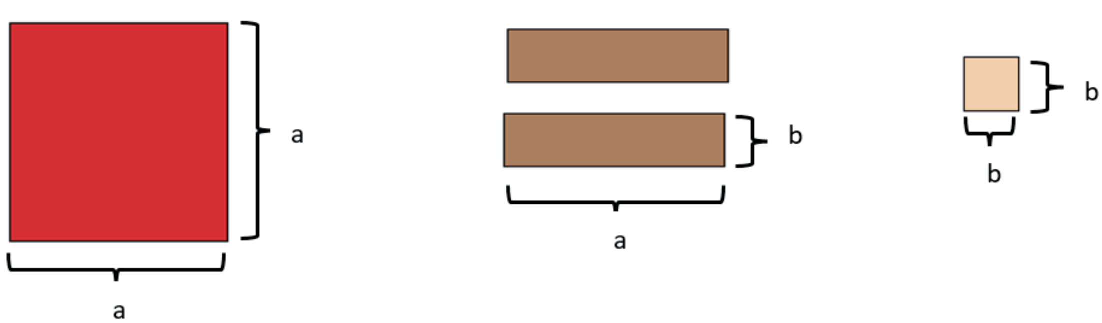
<u>Posibles dificultades y errores:</u>

- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.
- No identifican los términos semejantes, por lo que no reducen correctamente la expresión que da como resultado un trinomio.
- No logran multiplicar término por término.

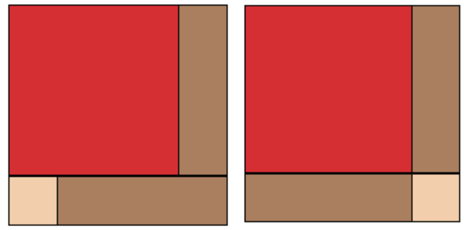
<u>Tarea 3:</u>

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área.

En la tercera actividad se desarrolla el cálculo del área del cuadrado con valores algebraicos.



Posibles construcciones de los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

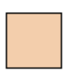
1° Desarrollo (estrategia1):

El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo de lado **a** y **b**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = a \cdot b = ab$$



El área del cuadrado de lado **b**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ b} = b \cdot b = b^2$$

Recordar que para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado **b** y dos rectángulos de lado **a** y **b**. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

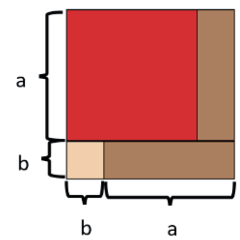
$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 2\,A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + b^2$$

O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$A_{Total} = a^2 + 2ab + b^2$$

2° Desarrollo (estrategia 2):

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman b y a.

$$Medida\ del\ lado = a + b$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a + 1)(a + b)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican término por término, obteniendo el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + a + a + b^2$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + b^2$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

<u>Posibles dificultades y errores:</u>

- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.
- No identifican los términos semejantes, por lo que no reducen correctamente la expresión que da como resultado un trinomio.
- No logran multiplicar término por término.

<u>Posibles devoluciones a las dificultades y errores</u>

Si los y las estudiantes no reconocen los términos semejantes, como por ejemplo $a^2 + 1 = a^2$:

- ➢ ¿Cuándo dos términos son semejantes?
- ➢ ¿Qué tienen en común dos términos semejantes?

- Por lo tanto, ¿cuáles son los términos que se pueden reducir?
- Recuerdan la clase anterior, al sumar los términos, ¿cómo los sumaron?

Si los y las estudiante no logran multiplicar término por término aplicando la propiedad distributiva:

- ¿Cómo multiplicábamos un monomio por un binomio?
- Ahora, ¿cómo podrías determinar el producto entre dos binomios?
- Si el o la estudiante aun no lo visualiza, con el dedo se tapa uno de los términos de un binomio para que determine como multiplicaría y luego se taparía el otro, luego se pregunta ¿qué operatoria realizas para unir estos dos resultados.

Si los y las estudiantes tienen dificultad en el cálculo del área de cuadriláteros porque no lo recuerdan:

- ¿Cómo se determina el área de un cuadrado?
- ¿Cuánto miden los lados de un cuadrado?
- ¿Son distintos?
- Nuevamente se pregunta al estudiante: ¿Cómo se determina el área de un cuadrado?, en el caso que se respondiera inicialmente.
- ¿Cómo se determina el área de un rectángulo?
- ¿Cómo podrías determinar el área del piso de la sala? (en este caso es rectangular), la idea es ejemplificar.

Los y las estudiantes no logran componer el cuadrado con las fichas:

- Si mantienes una fija, y mueves el resto, ¿podrías formar el cuadrado?, ¡inténtalo!

Si es que los y las estudiantes solo realizan una de las estrategias:

A) Si de las dos estrategias esperadas, los y las estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:

Docente realiza las siguientes preguntas, luego que los y las estudiantes exponen sus resultados y estrategias en el plenario:

- ¿Existe otra estrategia para determinar el área del cuadrado mayor?
- ¿Qué ocurre si unimos todas las fichas, formando los cuadrados?
- ¿Se podría determinar un dato para generar otra estrategia para calcular la superficie del cuadrado?

B) Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:

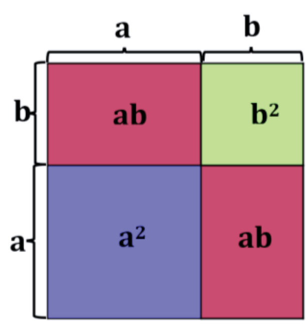
Docente realiza las siguientes preguntas, luego que los y las estudiantes exponen sus resultados y estrategias en el plenario:

- ¿Existe otra estrategia para determinar el área del cuadrado mayor?
- ¿Podríamos determinar la superficie total del cuadrado si lo descomponemos?
- ¿Qué realizarían en este caso?

MATEMÁTICA EN JUEGO

- Comprender la diferencia entre superficie y área.
- Realizar una conexión entre las representaciones tanto algebraica como geométrica del cuadrado de binomio.
- Identificar términos semejantes en el producto de binomio o bien, en la reducción de términos semejantes al sumar las superficies.
- Determinar la regularidad del cuadrado de binomio.
- Analizar cada una de las situaciones.
- Determinar posibles estrategias para determinar el área en la composición y/o descomposición de cuadriláteros (en este caso).

Los y las estudiantes tienen que establecer la congruencia entre los registros evidenciando lo siguiente:

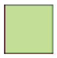
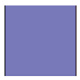
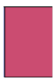
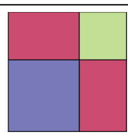


Al relacionar cada área de la descomposición de la superficie del cuadrado de lado $a + b$ con respecto a cada término del cuadrado de binomio $a^2 + 2ab + b^2$, se tiene:

- El área del cuadrado cuya medida de lados es a, corresponde al primer término del cuadrado de binomio.
- El área del cuadrado cuya medida de lados es b, corresponde al tercer término del cuadrado de binomio.
- El área de los dos rectángulos que se generan en la descomposición del cuadrado de lado $a + b$ son iguales y cuyas medidas de los lados son a y b, es lo que corresponde al segundo término del cuadrado de binomio.

A continuación, se presenta una tabla que describe lo mencionado anteriormente, haciendo alusión a la congruencia entre estas dos representaciones que deberían de realizar los y las estudiantes en base al marco teórico:

Tabla 6: Congruencia de las representaciones algebraica y geométrica de la regularidad del cuadrado de binomio.

Representación geométrica		Representación algebraica
	Superficie del cuadrado de medida de lado b	Área del cuadrado de lado b. $A_1 = b^2$
	Superficie del cuadrado de medida de lado a	Área del cuadrado de lado a. $A_2 = a^2$
	Superficie del rectángulo de medidas de lados a y b	Área del rectángulo de lados a y b. $A_3 = ab$
	Superficie del cuadrado de medida de lado $a + b$	Área del cuadrado de lado $a + b$. $A_T = A_1 + 2A_3 + A_2$ $A_T = a^2 + 2ab + b^2$

Clase 3

Objetivo

Nombre del Tema: Formular la expresión que define el cubo de binomio.

Objetivo de la clase: Conjeturar la regularidad del cubo de binomio.

Para mantener la expectación de los y las estudiantes en la clase se redactará el objetivo de otra manera en la pizarra, para no dar a conocer con anterioridad los conocimientos matemáticos que estarán en juego. Este objetivo escrito es: descomponer y componer cuerpos geométricos para formar un cubo.

Tarea matemática: Calcular el volumen del cubo que se forma con los cuerpos geométricos.

Materiales:

- Docente: dos cubos (rojo y azul), y seis prismas de base cuadrada (3 amarillos y 3 verdes). Cada cuerpo geométrico se confecciona con plumavit. Junto con esto cuenta con otro set, con las mismas características, pero en este caso todos los cuerpos geométricos son del mismo color.
- Estudiante: dos cubos (rojo y azul), y seis prismas de base cuadrada (3 amarillos y 3 verdes). Cada cuerpo geométrico se confecciona con plumavit.

Descripción de las tareas de la clase 3 de la secuencia didáctica

La tercera clase de esta secuencia didáctica corresponde al objetivo deducir la regularidad del cubo de binomio. Esta clase contempla tres tareas matemáticas que deben desarrollar los y las estudiantes.

La primera tarea se presenta a los y las estudiantes la composición de cuerpos geométricos que forman un cubo, deben identificar por cuántos cuerpos geométricos está compuesto el cubo, sin manipular el material. La finalidad de esta tarea es que los y las estudiantes visualicen cuerpos en tres dimensiones antes de comenzar a manipular el material concreto.

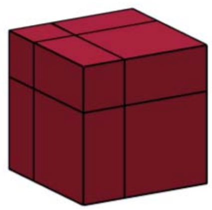
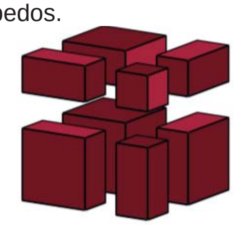
En la segunda tarea de la clase los y las estudiantes deben calcular el volumen de un cubo formado por un cubo de medida a, un cubo de medida 2, tres paralelepípedos de medidas a, a y 2, y tres paralelepípedos de medidas a, 2 y 2. La composición de los cuerpos geométricos en esta clase se les presenta antes de comenzar la tarea, por lo que los y las estudiantes se enfocan en determinar el volumen del cubo formado utilizando más de una estrategia.

Junto con esto, se les presenta tres preguntas a los y las estudiantes para que formulen conclusiones con respecto a la congruencia entre las representaciones algebraica y geométrica del cubo de binomio.

Los y las estudiantes en la tercera actividad deben deducir la regularidad del cubo de binomio calculando el volumen del cubo formado por un cubo de medida a, un cubo de medida b, tres paralelepípedos de medidas a, a y b, y tres paralelepípedos de medidas a, b y b. Nuevamente los y las estudiantes deben calcular el volumen del cubo utilizando más de una estrategia.

En la institucionalización del cubo de binomio, los y las estudiantes deben de relacionar cada uno de los volúmenes de los cuerpos geométricos, que forman el cubo, con cada termino algebraico de la regularidad del cubo de binomio, para que relacionen las representaciones algebraica y geométrica del objeto matemático trabajado en la clase.

Plan de clase de la clase 3 de la secuencia didáctica

Tarea matemática	Rol docente	Rol estudiante	Tiempo
Inicio de la clase			
<u>Se da a conocer el objetivo de la clase:</u> Descomponer y componer cuerpos geométricos para formar un cubo. 1. <u>Mostrar tarea 1</u> Docente: En esta clase nuevamente trabajaremos en grupos de 4 personas. Antes de entregarles los cuerpos geométricos con los que trabajaremos, quiero que discutan en sus grupos correspondientes, cuantas piezas tiene este cubo, de arista $a + b$. Junto con esto deben argumentar su respuesta.	Docente muestra el cubo a los y las estudiantes desde un lugar donde todos puedan observar el cubo.  Docente deja en un lugar alto y visible el cubo para que los y las estudiantes puedan observar (no tocar) el cubo. Luego monitorea el trabajo de los y las estudiantes	Estudiantes: tiene 8 cuerpos geométricos, dos cubos de distintas aristas y seis paralelepípedos.  **POSIBLES DIFICULTADES**: • No logran visualizar cuantos cuerpos geométricos se forman al dividir de esta forma un cubo. • Identifican cuantos cuerpos geométricos conforman el cubo, pero no los distinguen entre si.	10 min

<table>
<tr><th colspan="4">Desarrollo de la clase</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">En este momento no determinaremos el volumen de este cubo, ya que lo haremos al final de la clase.

2. <u>Mostrar tarea 2</u>
Ahora imaginemos que este cubo tiene aristas de medida $a+2$.
Utilizando las dos estrategias de las clases anteriores, sobre la descomposición de las figuras y el cálculo total, determinen el volumen de este cubo.
</td>
<td rowspan="2">Docente entrega los cuerpos geométricos (2 cubos de distintas aristas y seis paralelepípedos mostrados anteriormente).

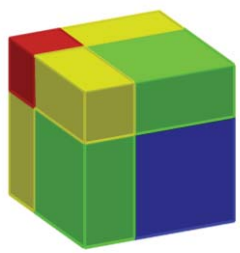
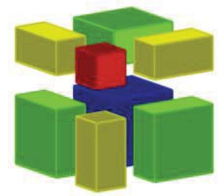
Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los y las estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos.

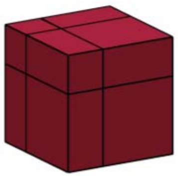
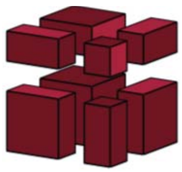
Es importante que el o la docente identifique las estrategias que utilizan los y las estudiantes, para luego exponerlas en el plenario. Estrategias que deberían de realizar:

A) Los y las estudiantes logran determinar el volumen como la suma de los volúmenes de cada uno de los cuerpos geométricos.

B) Determinan el volumen del cubo utilizando la arista del cubo $a+2$.</td>
<td>A.1) Para determinar el volumen del cubo utilizando la estrategia A, una de los posibles procedimientos de los y las estudiantes, es que distingan que son 4 cuerpos geométricos distintos los que conforman el cubo de lado $a+2$. Por lo que calculan el volumen de estos y luego los que se repitan se multiplican por 3 según correspondan.
$$V_{Cubo} = a^3 + 3\cdot(2a^2) + 3\cdot(2^2a) + 2^3$$ $$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$ A.2) El otro posible procedimiento que podrían realizar los y las estudiantes utilizando la estrategia A, es que determinen el volumen de cada cuerpo geométrico, sin identificar que algunos son los iguales.
$$V_{Cubo} = a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 + 2^2a + 2^2a + 2^2a + 2^3$$ $$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$ B) Al utilizar esta estrategia, los y las estudiantes, determinan el volumen utilizando un desarrollo directo al elevar a 3 la arista del cubo $a+2$.
$$V_{Cubo} = (a+2)^3 = (a+2)^2\cdot(a+2)$$ $$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$</td>
<td rowspan="2">20 min</td>
</tr>
<tr>
<td>POSIBLES DIFICULTADES:
• No logran identificar las dos estrategias.
• No se acuerdan como calcular el volumen de prismas y cubos.
• Estudiantes no identifican términos semejantes.
• Estudiantes no aplican propiedad distributiva.</td>
</tr>
</table>

3. <u>Reflexiones grupales</u> Docente expone las siguientes preguntas para que los y las estudiantes relacionen sus dos estrategias, junto con esto se intenciona a que analicen la relación existente entre las representaciones geométrica y algebraica del cubo de binomio. a) ¿Qué relación existe entre el exponente al calcular el volumen de un cubo y el volumen? b) ¿Qué relación existe entre el volumen del cubo de arista $a+2$ y el volumen de cada uno de los cuerpos geométricos? c) ¿Cuál de los procedimientos utilizados es más eficiente al determinar el volumen del cubo?	Docente monitorea el trabajo realizados por los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento, para que logren una reflexión entre lo geométrico y algebraico en los procedimientos utilizados.	Respuestas que se espera de los y las estudiantes: a) Cuando se determina el volumen de cuerpo geométrico, es en un plano tridimensional, ya que se determina el espacio que ocupa este cuerpo, por lo tanto el exponente 3 corresponde a la dimensión en la cual se trabaja. b) El resultado de las aristas al cubo, corresponde al volumen de un cubo, es por esto que se eleva a 3. En cuanto a los paralelepípedos restantes, que son 6, se dividen en 2 ya que serían de aristas distintas, correspondientes a prismas de bases cuadradas, es por esto que una de las medidas de las aristas se eleva a dos por el área de su base y se multiplica por su altura correspondiente. c) Determinar el volumen de los distintos cuerpos geométricos, que en este caso son cuatro, para luego sumar sus volúmenes, multiplicando por 3 los dos prismas de base cuadrada.	10 min
4. <u>Plenario</u> Los y las estudiantes presentan los resultados obtenidos en la tarea 1, argumentando según las reflexiones a las que llegaron.	Según lo observado por el o la docente, selecciona a los grupos que salen a la pizarra. Se expone en la pizarra los procedimientos utilizados por los y las estudiantes.	Estudiantes exponen y argumentos sobre los procedimientos utilizados y la relación que existe entre la geometría y el desarrollo algebraico que realizaron.	15 min

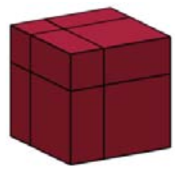
5. <u>Mostrar tarea 3</u> Ahora vamos a retomar la medida de la arista del cubo que fue presentado al inicio de la clase, de $a + b$. Utilizando los mismos procedimientos anteriores determinen el volumen de este cubo. 	 Docente monitorea el trabajo de los y las estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los y las estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos. Es importante que el o la docente identifique las estrategias que utilizan los y las estudiantes, según lo trabajado en la tarea anterior. Estrategias que deberían de realizar: **A) Los y las estudiantes logran determinar el volumen como la suma de los volúmenes de cada uno de los cuerpos geométricos.** **B) Determinan el volumen del cubo utilizando la arista del cubo $a + b$.**	Estudiantes trabajan con los mismos cuerpos geométricos de la tarea 2. A.1) Para determinar el volumen del cubo utilizando la estrategia A, una de los posibles procedimientos de los y las estudiantes, es que distingan que son 4 cuerpos geométricos distintos los que conforman el cubo de lado $a + b$. Por lo que calculan el volumen de estos y luego los que se repitan se multiplican por 3 según correspondan. $V_{Cubo} = a^3 + 3 \cdot (a^2b) + 3 \cdot (ab^2) + b^3$ $\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ A.2) El otro posible procedimiento que podrían realizar los y las estudiantes utilizando la estrategia A, es que determinen el volumen de cada cuerpo geométrico, sin identificar que algunos son los iguales. $V_{Cubo} = a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$ $\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ B) Al utilizar esta estrategia, los y las estudiantes, determinan el volumen utilizando un desarrollo directo al elevar a 3 la arista del cubo $a + b$. $V_{Cubo} = (a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b)$ $\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ **POSIBLE DIFICULTAD**: • No establecen relación de actividad anterior (alfanumérico) a esta nueva tarea (algebraica).	20 min

Cierre de la clase			
6. <u>Institucionalización</u> Docente nuevamente muestra a los y las estudiantes el cubo del inicio de la clase.  	Docente les pregunta, ¿cuál es el volumen del cubo de arista $a+b$? Docente escribe en la pizarra los resultados obtenidos por los y las estudiantes sobre la tarea 2 y 3, para realizar una tabla comparativa (en la pizarra es una tabla de 2 columnas). $V_{Cubo} = a^3 + 3 \cdot (2a^2) + 3 \cdot (2^2 a) + 2^3$ $\boxed{V_{Cubo} = (a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$ $V_{Cubo} = a^3 + 3 \cdot (a^2 b) + 3 \cdot (ab^2) + b^3$ $\boxed{V_{Cubo} = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$ a) ¿A qué corresponde cada término del volumen de este cubo de arista $(a+b)^3$? b) Entonces, ¿a qué corresponde cada término del volumen de este cubo de arista $(a+2)^3$? c) En este caso, ¿qué regularidad podemos encontrar? Una vez que los y las estudiantes logran determinar la regularidad, se les explicita que esta recibe el nombre de cubo de binomio. Para corroborar que los y las estudiantes entienden igualdad. Docente plantea el siguiente cubo de binomio: $(b+3)^3$.	 Estudiantes en conjunto con el o la docente realizan tabla comparativa de las tareas 2 y 3. a) $\mathbf{a^3}$ corresponde al volumen del cubo de arista a, $\mathbf{a^2 b}$ corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado a, por la altura b, $\mathbf{b^2 a}$ corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado b, por la altura a, $\mathbf{b^3}$ corresponde al volumen del cubo de arista a y **3** corresponde a que son 3 primas de base cuadrada iguales. b) $\boldsymbol{a^3}$ corresponde al volumen del cubo de arista a, $\boldsymbol{2a^2}$ corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado a, por la altura 2, $\boldsymbol{2^2 a}$ corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado 2, por la altura a, $\mathbf{2^3}$ corresponde al volumen del cubo de arista 2 y **3** corresponde a que son 3 primas de base cuadrada iguales. c) Estudiantes dan la regularidad del cubo de binomio, pero haciendo la relación con los cuerpos geométricos que estuvieron en juego en las tareas de la clase. **POSIBLE DIFICULTAD:** • No relacionan el volumen de cada cuerpo geométrico con cada término de la regularidad del cuadrado de binomio.	15 min

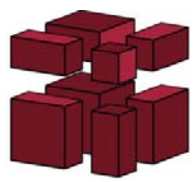
Análisis a priori del plan de clase de la clase 3 de la secuencia didáctica

<u>**Tarea 1:**</u>

Antes de entregarles los cuerpos geométricos con los que trabajaremos, quiero que discutan en sus grupos correspondientes, cuantas piezas tiene este cubo, de arista $a + b$. Junto con esto deben argumentar su respuesta.



Respuesta: tiene 8 cuerpos geométricos, dos cubos de distintas aristas y seis paralelepípedos.



<u>Posibles dificultades y errores:</u>

- No logran visualizar cuantos cuerpos geométricos se forman al dividir de esta forma un cubo.

- Identifican cuantos cuerpos geométricos conforman el cubo, pero no distinguen los distintos cuerpos entre sí.

<u>Devoluciones:</u>

Si los y las estudiantes no logran visualizar cuantos cuerpos geométricos se forman al dividir el cubo.

- Si dibujaran el cubo en sus cuadernos, ¿Cuántos cuerpos geométricos observan?
- Si eliminan uno dos de los cuerpos que se observan, ¿pueden visualizar otro aparte de los anteriores?
- Por lo tanto, ¿cuántos cuerpos geométricos componen el cubo?

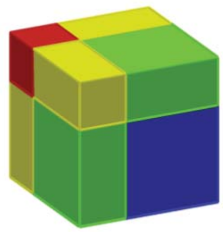
Si los y las estudiantes identifican cuántos cuerpos geométricos componen el cubo, pero distinguen sus nombres.

- ¿Cómo son las medidas de cada uno de los cuerpos geométricos que se visualizan?
- ¿Cómo se llaman los cuerpos geométricos que cumplen con estas características?

Tarea 2:

Ahora imaginemos que este cubo tiene aristas de medida $a + 2$.

Utilizando las dos estrategias de las clases anteriores, sobre la descomposición de las figuras y el cálculo total, determinen el volumen de este cubo.



Estrategias utilizadas por los y las estudiantes:

A) Los y las estudiantes logran determinar el volumen como la suma de los volúmenes de cada uno de los cuerpos geométricos.

B) Determinan el volumen del cubo utilizando la arista del cubo $a + 2$.

A.1) Para determinar el volumen del cubo utilizando la estrategia A, una de los posibles procedimientos de los y las estudiantes, es que distingan que son 4 cuerpos geométricos distintos los que conforman el cubo de lado $a + 2$. Por lo que calculan el volumen de estos y luego los que se repitan se multiplican por 3 según correspondan.

$$V_{Cubo} = a^3 + 3 \cdot (2a^2) + 3 \cdot (2^2 a) + 2^3$$
$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$

A.2) El otro posible procedimiento que podrían realizar los y las estudiantes utilizando la estrategia A, es que determinen el volumen de cada cuerpo geométrico, sin identificar que algunos son los iguales.

$$V_{Cubo} = a^3 + 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 + 2^2 a + 2^2 a + 2^2 a + 2^3$$
$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$

B) Al utilizar esta estrategia, los y las estudiantes, determinan el volumen utilizando un desarrollo directo al elevar a 3 la arista del cubo $a + 2$.

$$V_{Cubo} = (a + 2)^3 = (a + 2)^2 \cdot (a + 2)$$
$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 6a^2 + 12a + 8}$$

Posibles dificultades y errores:

- No logran identificar las dos estrategias.
- No se acuerdan como calcular el volumen de prismas y cubos.
- Estudiantes no identifican términos semejantes.
- Estudiantes no aplican propiedad distributiva.

Devoluciones:

Si los y las estudiantes calculan el volumen del cubo utilizando solo una de las estrategias.

- ¿Existe otra estrategia para determinar el volumen de un cubo?
- De acuerdo con las distintas estrategias utilizadas en las clases anteriores, ¿podrías calcular el volumen del cubo de otra manera?

Si los y las estudiantes no se acuerdan cómo calcular el volumen de un cubo.

- ¿Qué es el volumen de un cuerpo geométrico?
- ¿En cuántas dimensiones trabajamos?
- Por lo tanto, ¿cómo podemos determinar el volumen de un paralelepípedo? Y de ¡un cubo?

Si los y las estudiantes no identifican los términos semejantes.

- Docente da ejemplos de la vida cotidiana donde los elementos son iguales, por ejemplo, las frutas.
- Por lo tanto, si tenemos a y $2a$, ¿son términos semejantes?

Si los y las estudiantes no aplican la propiedad distributiva.

- Docente da ejemplos numéricos y los desarrollan, por ejemplo, ¿es lo mismo $(2+3)\cdot(2+3)=2\cdot 2+3\cdot 3$ que $(2+3)\cdot(2+3)=2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 3$?. Comprobemos nuestros resultados para ver si es correcto sumando antes de multiplicar, $(2+3)\cdot(2+3)=5\cdot 5$.

Reflexiones grupales de Tarea 1 y 2

Docente expone las siguientes preguntas para que los y las estudiantes relacionen sus dos estrategias, junto con esto se intenciona a que analicen la relación existente entre las representaciones geométrica y algebraica del cubo de binomio.

a) ¿Qué relación existe entre el exponente al calcular el volumen de un cubo y el volumen?

Respuesta: Cuando se determina el volumen de cuerpo geométrico, es en un plano tridimensional, ya que se determina el espacio que ocupa este cuerpo, por lo tanto, el exponente 3 corresponde a la dimensión en la cual se trabaja.

b) ¿Qué relación existe entre el volumen del cubo de arista $a + 2$ y el volumen de cada uno de los cuerpos geométricos?

Respuesta: El resultado de las aristas al cubo, corresponde al volumen de un cubo, es por esto que se eleva a 3. En cuanto a los paralelepípedos restantes, que son 6, se dividen en 2 ya que serían de aristas distintas, correspondientes a prismas de bases cuadradas, es por esto que una de las medidas de las aristas se eleva a dos por el área de su base y se multiplica por su altura correspondiente.

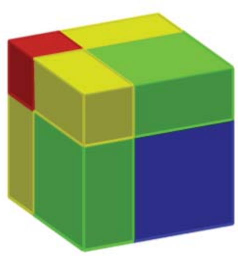
c) ¿Cuál de los procedimientos utilizados es más eficiente al determinar el volumen del cubo?

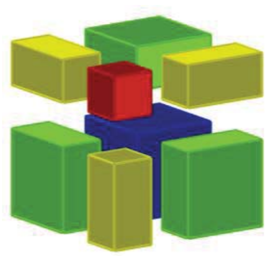
Respuesta: Determinar el volumen de los distintos cuerpos geométricos, que en este caso son cuatro, para luego sumar sus volúmenes, multiplicando por 3 los dos prismas de base cuadrada.

<u>Tarea 3:</u>

Ahora vamos a retomar la medida de la arista del cubo que fue presentado al inicio de la clase, de $a + b$.

Utilizando los mismos procedimientos anteriores determinen el volumen de este cubo.





<u>Estrategias que deberían de realizar:</u>

A) Los y las estudiantes logran determinar el volumen como la suma de los volúmenes de cada uno de los cuerpos geométricos.

B) Determinan el volumen del cubo utilizando la arista del cubo $a + b$.

A.1) Para determinar el volumen del cubo utilizando la estrategia A, una de los posibles procedimientos de los y las estudiantes, es que distingan que son 4 cuerpos geométricos distintos los que conforman el cubo de lado $a+b$. Por lo que calculan el volumen de estos y luego los que se repitan se multiplican por 3 según correspondan.

$$V_{Cubo} = a^3 + 3\cdot(a^2b) + 3\cdot(ab^2) + b^3$$

$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

A.2) El otro posible procedimiento que podrían realizar los y las estudiantes utilizando la estrategia A, es que determinen el volumen de cada cuerpo geométrico, sin identificar que algunos son los iguales.

$$V_{Cubo} = a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

B) Al utilizar esta estrategia, los y las estudiantes, determinan el volumen utilizando un desarrollo directo al elevar a 3 la arista del cubo $a+b$.

$$V_{Cubo} = (a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b)$$

$$\boxed{V_{Cubo} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

<u>Dificultad:</u>

- No establecen relación de actividad anterior (alfanumérico) a esta nueva tarea (algebraica).

<u>Devoluciones:</u>

- Docente solicita a los y las estudiantes que realicen contraste entre los que se realizó en la actividad anterior, desde las dos estrategias implementadas y la relación entre el volumen de cada cuerpo geométrico y cada término de sus resultados.

a) ¿A qué corresponde cada término del volumen de este cubo de arista $(a+b)^3$?

Respuesta: a^3 corresponde al volumen del cubo de arista a, a^2b corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado a, por la altura b, b^2a corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado b, por la altura a, b^3 corresponde al volumen del cubo de arista a y 3 corresponde a que son 3 primas de base cuadrada iguales.

b) Entonces, ¿a qué corresponde cada término del volumen de este cubo de arista $(a+2)^3$?

Respuesta: a^3 corresponde al volumen del cubo de arista a, $2a^2$ corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado a, por la altura 2, 2^2a corresponde al área basal del prisma de base cuadrada de lado 2, por la altura a, 2^3 corresponde al volumen del cubo de arista 2 y 3 corresponde a que son 3 primas de base cuadrada iguales.

c) En este caso, ¿qué regularidad podemos encontrar?

Respuesta: Estudiantes dan la regularidad del cubo de binomio, pero haciendo la relación con los cuerpos geométricos que estuvieron en juego en las tareas de la clase.

Una vez que los y las estudiantes logran determinar la regularidad, se les explicita que esta recibe el nombre de cubo de binomio.

Para corroborar que los y las estudiantes entienden igualdad. Docente plantea el siguiente cubo de binomio: $(b+3)^3$.

Respuesta: $(b+3)^3 = b^3 + 9b^2 + 27b + 27$

<u>Dificultad:</u>

- No relacionan el volumen de cada cuerpo geométrico con cada término de la regularidad del cuadrado de binomio.

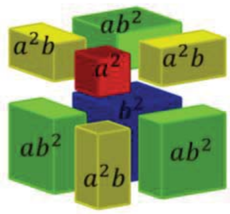
<u>Devoluciones:</u>

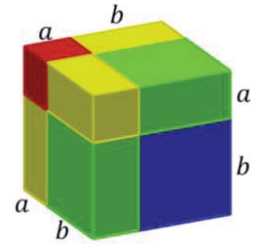
- ➢ En el plenario intencionar a que los y las estudiantes comparen las estrategias utilizadas y analizar a través de preguntas a que corresponde cada término. Se relaciona con preguntas tales como: ¿qué representa b^3?

MATEMÁTICA EN JUEGO

- ➢ Realizar una conexión entre las representaciones tanto algebraica como geométrica del cubo de binomio.
- ➢ Identificar términos semejantes en el producto de binomio o bien, en la reducción de términos semejantes al sumar los volúmenes.
- ➢ Determinar la regularidad del cubo de binomio.
- ➢ Determinar posibles estrategias para calcular el volumen en la composición y/o descomposición de cuerpos geométricos (en este caso).

Los y las estudiantes tienen que establecer la congruencia entre los registros evidenciando lo siguiente:



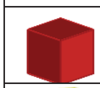
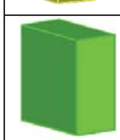
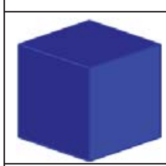
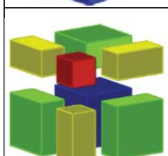


Al relacionar cada volumen de la descomposición de los cuerpos geométricos del cubo cuyos lados miden $a + b$ con respecto a cada término del cubo de binomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, se tiene:

- El volumen del cubo cuya medida de lados es a, corresponde al primer término del cubo de binomio.
- El volumen de los tres paralelepípedos cuyas medidas de lados es a, a y b, corresponde al segundo término del cubo de binomio.
- El volumen de los tres paralelepípedos cuyas medidas de lados es a, b y b, corresponde al segundo término del cubo de binomio.
- El volumen del cubo cuyas medidas de lados es b, corresponde al cuarto término del cubo de binomio.

A continuación, se presenta una tabla que describe lo mencionado anteriormente, haciendo alusión a la congruencia entre estas dos representaciones que deberían de realizar los y las estudiantes en base al marco teórico:

Tabla 7: Congruencia de las representaciones algebraica y geométrica de la regularidad del cubo de binomio.

Representación geométrica	**Representación algebraica**
 Espacio tridimensional del cubo de medida de lado a	Volumen del cubo de lado a. $V_1 = a^3$
 Espacio tridimensional del paralelepípedo de medidas de lados a, a y b.	Volumen del paralelepípedo de lados a, a y b. $V_2 = a^2b$
 Espacio tridimensional del paralelepípedo de medidas de lados a, b y b.	Volumen del paralelepípedo de lados a, b y b. $V_3 = ab^2$
 Espacio tridimensional del cubo de medida de lado b	Volumen del cubo de lado b. $V_4 = b^3$
 Espacio tridimensional del cubo de medida de lado $a + b$	Volumen del cubo de lado $a + b$. $V_T = V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4$ $V_T = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CONCLUSIONES

A partir de un Estudio de Clase realizado por cuatro docentes surge esta secuencia didáctica, para favorecer la relación que establecen los y las estudiantes entre las representaciones geométrica y algebraica en la deducción de las regularidades del cuadrado de binomio y cubo de binomio. Junto con esto, se puede evidenciar el crecimiento profesional de las docentes participantes de esta implementación en relación a este objeto matemático. Enriqueciendo su labor docente en cuanto se es observador, actor, e investigador de su propia clase.

Luego de las implementaciones del plan de clase de la clase 2, se establecieron que los y las estudiantes no tienen adquiridos todos los conocimientos previos en relación con la multiplicación de expresiones algebraicas y la reducción de expresiones algebraicas, por lo que se consideró que debiese de existir una clase abarcando estos conocimientos previos. Se agrega una clase 3 para trabajar con la representación geométrica y algebraica del cubo de binomio, siguiendo en la línea de multiplicaciones de binomios.

Para realizar esta secuencia tuve que realizar un análisis epistemológico para comprender como surgen los productos notables, específicamente el cuadrado y cubo de binomio, para adquirir nuevos conocimientos sobre este objeto. Esta investigación no tan solo colaboró con el diseño de la secuencia didáctica, ya que en mis clases he transmitido estos conocimientos para complementar el aprendizaje de mis estudiantes.

Este trabajo ha favorecido mi labor docente, mejorando propuestas de tareas dentro del aula anticipando las posibles dificultades y errores de los y las estudiantes, para abarcar de mejor forma las devoluciones, realizando preguntas mejor elaboradas y que los y las estudiantes puedan lograr un aprendizaje significativo.

Es importante recalcar, la importancia que tiene este tipo de tareas con material concreto en las clases de matemáticas, en el sentido de como los y las estudiantes se motivan a participar. Se evidenció que estudiantes con necesidades educativas especiales estaban motivados en la participación de la clase, en específico un estudiante que en clases anteriores se mostraba reacio a opinar y argumentar en clases, en esta y en las siguientes si lo realizó.

Junto con esto, he reafirmado la importancia que tiene que los y las estudiantes distingan las diversas representaciones de un objeto matemático para lograr una mejor comprensión, aunque el principal desafío en adelante es que generen por si mismos la congruencia entre los distintos registros, sin que queden aislados unos de otros.

La principal contribución a la comunidad educativa de este trabajo es la innovación que se realizó con respecto a la vinculación de las actividades con el marco teórico de Duval, Teoría de registros de representaciones semióticas. Si bien, se pueden encontrar en internet actividades sobre los productos notables utilizando material concreto, en ninguna de ellas se observa la relación entre las representaciones algebraica y geométrica de los productos notables, recalcando que el foco de cada clase es que el o la estudiante logre una congruencia entre los registros utilizados y así comprenda este objeto matemático.

REFERENCIAS

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica*. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas, 71,* 57-74.

Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente* (tesis doctoral n.p). Universidad Complutense de Madrid, España.

Euclides. (300 a.C./1991). *Los Elementos,* Libro II. Traducción de Puertas, M. Madrid, España: Editorial Gredos.

García, F. (2007). *Pascal y la teoría de números*. ACTA. Recuperado de http://www.acta.es/medios/articulos/matematicas/044043.pdf, 11 de Noviembre del 2017.

Gritti, M. *Isaac Newton*. Lugar de publicación: Solo ciencia. Recuperado de http://www.solociencia.com/cientificos/isaac-newton.htm, 30 de Junio del 2017.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2012). El estudio de clase japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). El enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clase. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Méndez, T. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física*, *11* (15), 59-69.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2017a). *Programa de estudio para primer año medio*. Santiago, Chile. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2011). *Programa de estudio para primer año medio*. Santiago, Chile. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2017b). *Texto del estudiante primero medio*. Santiago, Chile: Santillana.

Muñoz, V. y Pérez, B. (2017). *Texto matemática Primero Medio* Proyecto SÉ Protagonista. Santiago, Chile: SM.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (1999a). *Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Al-Khwarizmi.html, 27 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (1999b). *Abu Bekr ibn Muhammad Ibn al-Husain Al-Karaji*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Al-Karaji.html, 27 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (1996). *Blaise Pascal*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Pascal.html, 29 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (1999c). *Diofanto de Alejandría*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Diophantus.html, 17 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (1999d). *Omar Khayyam*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Khayyam.html, 27 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (2000). *Sir Isaac Newton*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Newton.html, 29 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (2003). *Zhu Shijie*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Zhu_Shijie.html, 29 de Junio del 2017.

O'Connor, JJ. y Robertson, EF. (2005). *Nicolo Tartaglia*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Printonly/Tartaglia.html, 29 de Junio del 2017.

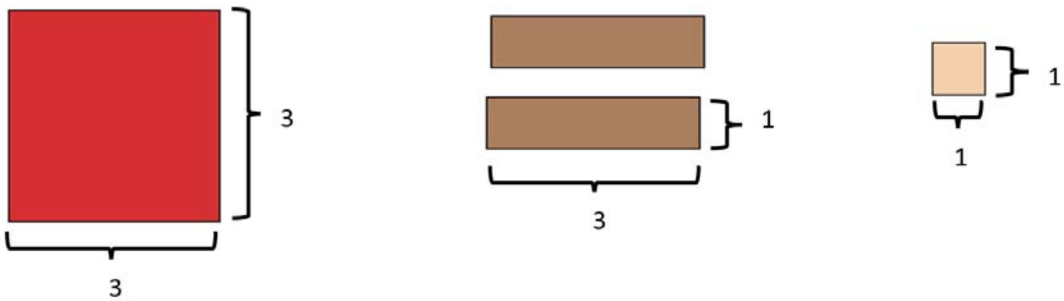
Tangarife, D. (2013). *Transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico a través de la estrategia didáctica-algeblocks* (tesis de maestría, n.p). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

ANEXOS

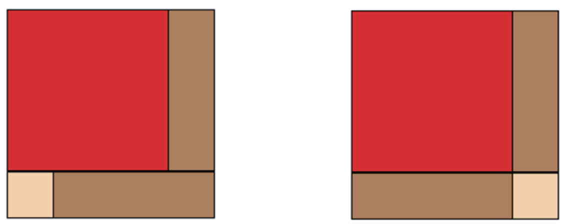
1. Análisis a priori del plan de clase implementado

Tarea 1:

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área.



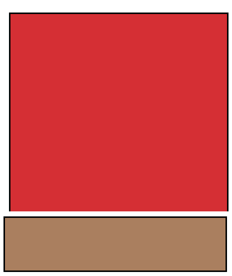
Posibles construcciones de los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

1° Desarrollo (estrategia1):

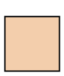


El área de este cuadrado de lado 3, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ 3} = 3 \cdot 3 = 9$$

El área del rectángulo de lado 3 y 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = 3 \cdot 1 = 3$$



El área del cuadrado de lado 1, lo calculan de la siguiente forma:

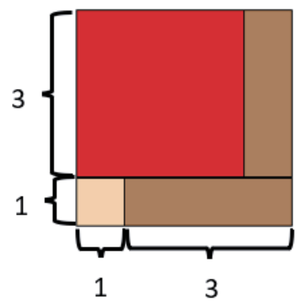
$$A_{cuadrado\ lado\ 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Recordar que para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado 3, un cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lado 3 y 1. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ 3} + 2\ A_{rectangulo}\ + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = 9 + 2 \cdot 3 + 1$$
$$A_{Total}\ = 9 + 6 + 1$$
$$A_{Total}\ = 16$$

<u>2° Desarrollo (estrategia 2):</u>

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman 1 y 3.

$$Medida\ del\ lado = 3 + 1 = 4$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = 4 \cdot 4 = 16$$

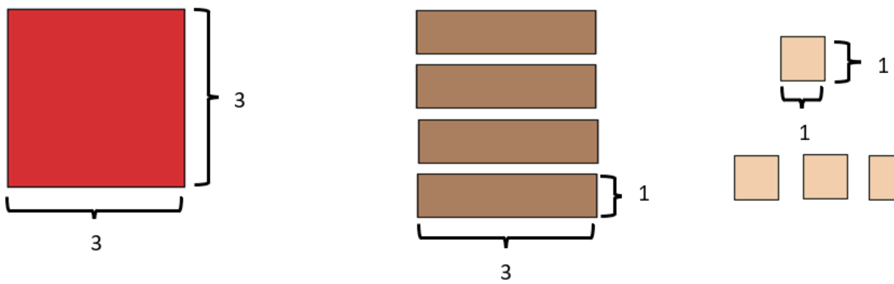
Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

<u>Dificultades:</u>

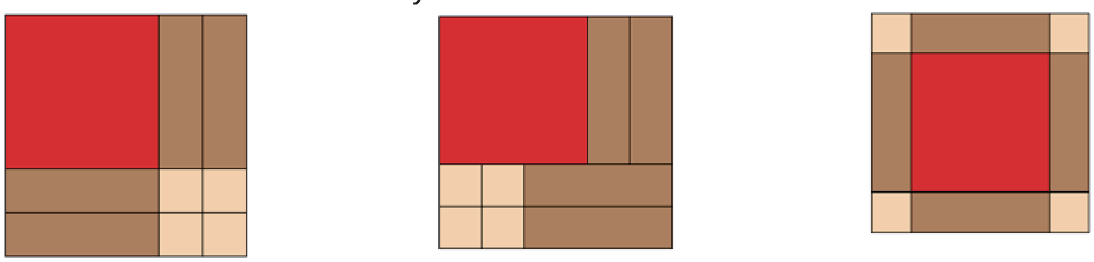
- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Los y las estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.

Tarea 2:

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área. En este caso se tiene: 1 cuadrado rojo de lado 3, cuatro rectángulos de lados 3 y 1 y cuatro cuadrados de lado 1.



Posibles construcciones de los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

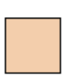
<u>1° Desarrollo (estrategia1):</u>

El área de este cuadrado de lado 3, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ 3} = 3 \cdot 3 = 9$$

El área del rectángulo de lado 3 y 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = 3 \cdot 1 = 3$$



El área del cuadrado de lado 1, lo calculan de la siguiente forma:

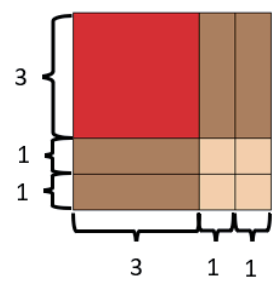
$$A_{cuadrado\ lado\ 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Recordar que para formar el cuadrado con las nueve fichas, se tiene un cuadrado de lado 3, cuatro cuadrados de lado 1 y cuatro rectángulos de lado 3 y 1. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ 3} + 4\ A_{rectangulo} + 4\ A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = 9 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$$
$$A_{Total} = 9 + 12 + 4$$
$$A_{Total} = 25$$

<u>2° Desarrollo (estrategia 2):</u>

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman 1, 1 y 3.

$$Medida\ del\ lado = 3 + 1 + 1 = 5$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = 5 \cdot 5 = 25$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

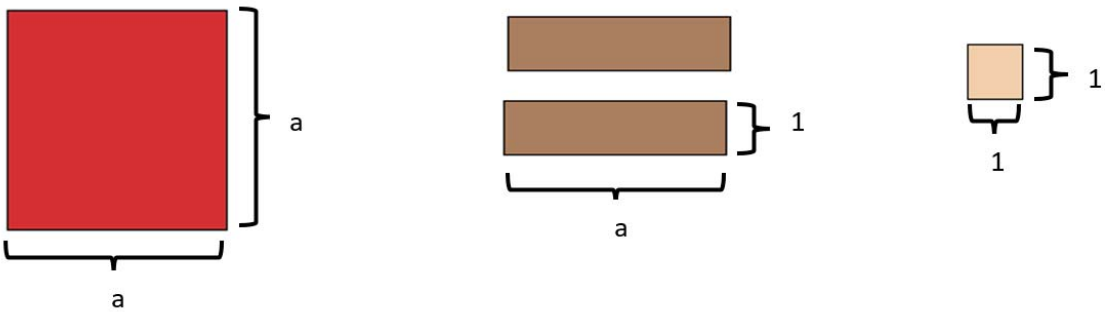
<u>Dificultades:</u>

- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Los y las estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la tarea.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.

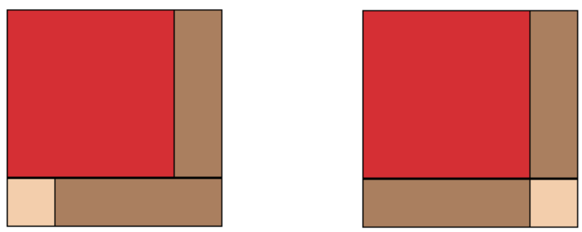
<u>Tarea 3:</u>

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área.

En la tercera tarea ya se desarrolla el cálculo del área del cuadrado con valores algebraicos y numéricos.



Posibles construcciones de los y las estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

1) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
2) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

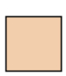
<u>1° Desarrollo (estrategia1):</u>

El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo de lado **a** y 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = a \cdot 1 = a$$



El área del cuadrado de lado 1, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Recordar que para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado 1 y dos rectángulos de lado **a** y 1. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

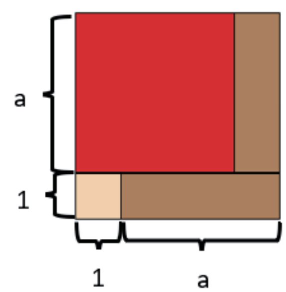
$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 2\ A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + 1$$

O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ 1}$$
$$A_{Total} = a^2 + a + a + 1$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + 1$$

<u>2° Desarrollo (estrategia 2):</u>

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman 1 y a.

$$Medida\ del\ lado = a + 1$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a + 1)(a + 1)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican término por término, obteniendo el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + a + a + 1$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + 1$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

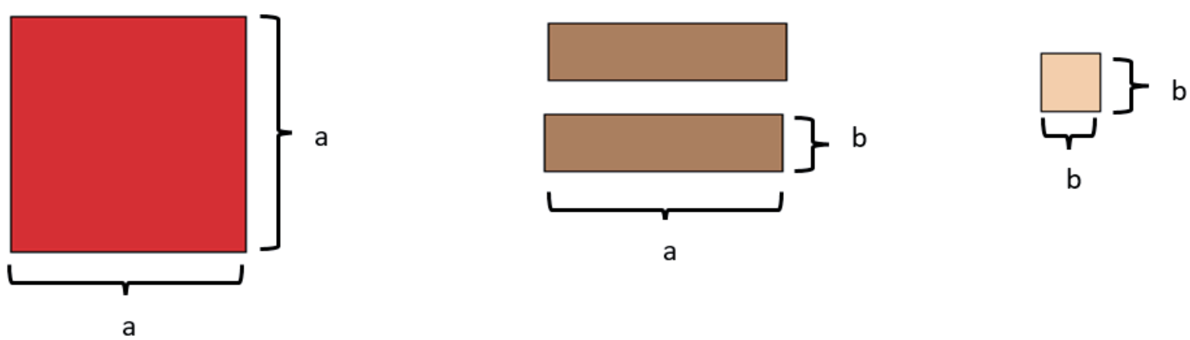
<u>Dificultades:</u>

- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Los y las estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.
- No identifican los términos semejantes, por lo que no reducen correctamente la expresión que da como resultado un trinomio.
- No logran multiplicar término por término.

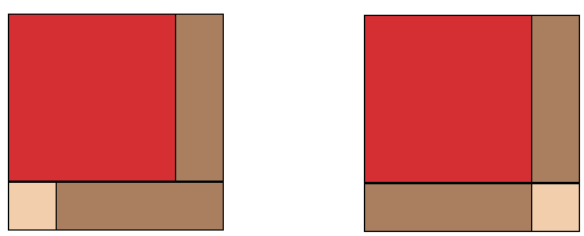
<u>Actividad 4:</u>

Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área.

En la cuarta actividad ya se desarrolla el cálculo del área del cuadrado con valores algebraicos



Posibles construcciones de los estudiantes:



Estrategias para desarrollar el problema:

3) Calcular el área de cada cuadrilátero y luego sumarlas para determinar el área total.
4) Determinar cuánto mide el lado del cuadrado formado por las piezas y luego calcular el área.

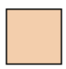
1° Desarrollo (estrategia1):

El área de este cuadrado de lado **a**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ a} = a \cdot a = a^2$$

El área del rectángulo de lado **a** y **b**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{rectangulo} = a \cdot b = ab$$



El área del cuadrado de lado **b**, lo calculan de la siguiente forma:

$$A_{cuadrado\ lado\ b} = b \cdot b = b^2$$

Recordar que para formar el cuadrado con las 4 fichas, se tiene un cuadrado de lado **a**, un cuadrado de lado **b** y dos rectángulos de lado **a** y **b**. Calculan el área total sumando todas las áreas de los cuadriláteros entregados, como se muestra a continuación:

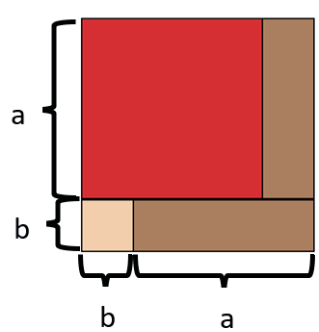
$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + 2\ A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + 2a + b^2$$

O bien,

$$A_{Total} = A_{cuadrado\ lado\ a} + A_{rectangulo} + A_{rectangulo} + A_{cuadrado\ lado\ b}$$
$$A_{Total} = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$A_{Total} = a^2 + 2ab + b^2$$

2° Desarrollo (estrategia 2):

Los y las estudiantes forman el cuadrado con las cuatro fichas entregadas, determinando la medida de cada lado del cuadrado, como se observa a continuación:



Para determinar el lado del cuadrado formado suman b y a.

$$Medida\ del\ lado = a + b$$

Para determinar el área del cuadrado formado, multiplican largo por ancho, como se muestra a continuación:

$$A_{cuadrado\ formado} = (a+1)(a+b)$$

Luego, los y las estudiantes multiplican término por término, obteniendo el siguiente resultado:

$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + a + a + b^2$$
$$A_{cuadrado\ formado} = a^2 + 2a + b^2$$

Como se puede evidenciar, utilizando las dos estrategias se obtiene el mismo resultado. Se espera que durante la clase surja de los y las estudiantes el desarrollo ambas estrategias para determinar el área del cuadrado formado por las cuatro fichas.

Dificultades:

- En la clase solo se desarrolla una de las estrategias, lo que no beneficia a que puedan hacer una primera aproximación a la regularidad del cuadrado de binomio.
- Los y las estudiantes no recuerdan cómo se calcula el área de los cuadriláteros presentes en la actividad.
- Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas.
- No identifican los términos semejantes, por lo que no reducen correctamente la expresión que da como resultado un trinomio.
- No logran multiplicar término por término.

POSIBLES DEVOLUCIONES A LOS ERRORES Y DIFICULTADES

Error en reconocer los términos semejantes:

- ¿Cuándo dos términos son semejantes?
- ¿Qué tienen en común dos términos semejantes?
- Por lo tanto, ¿cuáles son los términos que se pueden reducir?

No logran multiplicar término por término:

- ¿Cómo multiplicábamos un monomio por un binomio?
- Ahora, ¿cómo podrías determinar el producto entre dos binomios?
- Si el o la estudiante aun no lo visualiza, con el dedo se tapa uno de los términos de un binomio para que determine como multiplicaría y luego se taparía el otro, luego se pregunta ¿qué operatoria realizas para unir estos dos resultados.

Calculo del área de cuadriláteros:

- ¿Cómo se determina el área de un cuadrado?
- ¿Cuánto miden los lados de un cuadrado?

- ¿Son distintos?
- Nuevamente se pregunta al estudiante: ¿Cómo se determina el área de un cuadrado?, en el caso que se respondiera inicialmente.
- ¿Cómo se determina el área de un rectángulo?
- ¿Cómo podrías determinar el área del piso de la sala? (en este caso es rectangular), la idea es ejemplificar.

Estudiantes no logran formar el cuadrado con las fichas:

- Si mantienes una fija, y mueves el resto, ¿podrías formar el cuadrado?, ¡inténtalo!

Si es que los y las estudiantes solo realizan una de las estrategias:

C) Si de las dos estrategias esperadas, los y las estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:

Docente realiza las siguientes preguntas, luego que los y las estudiantes exponen sus resultados y estrategias en el plenario:

- ¿Existe otra estrategia para determinar el área del cuadrado mayor?
- ¿Qué ocurre si unimos todas las fichas, formando los cuadrados?
- ¿Se podría determinar un dato para generar otra estrategia para calcular la superficie del cuadrado?

D) Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:

Docente realiza las siguientes preguntas, luego que los y las estudiantes exponen sus resultados y estrategias en el plenario:

- ¿Existe otra estrategia para determinar el área del cuadrado mayor?
- ¿Podríamos determinar la superficie total del cuadrado si lo descomponemos?
- ¿Qué realizarían en este caso?

MATEMÁTICA EN JUEGO

- ➢ Realizar una conexión entre las representaciones tanto algebraica como geométrica del cuadrado de binomio.
- ➢ Identificar términos semejantes en el producto de binomio o bien, en la reducción de términos semejantes al sumar las superficies.
- ➢ Determinar la regularidad del cuadrado de binomio.
- ➢ Analizar cada una de las situaciones.
- ➢ Determinar posibles estrategias para determinar el área en la composición y/