Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

# UNA PROPUESTA DE INNOVACIÓN PARA EL TRATAMIENTO DE PRODUCTOS NOTABLES SEGÚN LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

## TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: Viviana Cisternas Quinteros

PROFESORES GUÍA:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

SANTIAGO, DICIEMBRE 2017

## *Agradecimientos*

*Lograr con gran satisfacción el término de este magíster no es solo el fruto de un trabajo personal, sino también de aquellas personas que han estado junto a mí en este proceso.*

*Agradecer al Instituto O´Higgins de Rancagua, y su rector Pedro Díaz Cuevas, quienes me dieron la oportunidad de estudiar y escoger este programa.*

*A los profesores que me acompañaron en todo el proceso, en especial Patricia Vásquez y Arturo Mena, quienes no solo son excelentes profesores sino también personas cercanas y preocupadas por sus alumnos.*

*A mi familia, mi marido Antonio, sin él no estaría terminando este ciclo, gracias a sus consejos, paciencia, apoyo y por sobre todo amor.*

*A mis padres y mi hermana, que desde siempre me han enseñado la importancia de estudiar y desarrollarme profesionalmente.*

*A mis compañer@s de estudio, por los buenos momentos vividos y por el grato trabajo en torno a la educación matemática.*

**Índice**

## Introducción

Desde la historia de la matemática, el origen del álgebra deviene del estudio de magnitudes y sus representaciones. La visualización de cantidades representadas por símbolos permitió a las antiguas civilizaciones manejar temas asociados a la división de terrenos, al estudio de los astros, etc.

Los griegos formalizan las secciones de las matemáticas y publican escritos que sirven para las generaciones posteriores de matemáticos. Árabes y persas son quienes desprenden lo que por años los griegos trabajan como algebra y geometría a la vez, publicando libros puramente algebraicos. A través de los años el álgebra se especializa y se construye lo que conocemos hoy y enseñamos en nuestras aulas.

Este recorrido, nos hace pensar en cómo distribuimos los objetos matemáticos en el curriculum nacional. Los productos notables están muy bien desarrollados desde el álgebra, es más, podemos observar que coinciden los hitos históricos con los niveles en los cuales se encuentran, pero no así la primera parte de este recorrido, la geometría.

Desde el año 2017, los planes y programas del Ministerio de Educación chileno (MINEDUC) otorgan un enfoque distinto al objeto matemático Productos Notables en el nivel de Primero medio en comparación con años anteriores. Se plantea como propósito “Comenzar con sus representaciones pictóricas, relacionadas con área de figuras 2D y con el volumen de figuras 3D, para continuar con su representación simbólica y con su manejo para reducir expresiones algebraicas” (MINEDUC, 2017, p. 66). El nuevo propósito y sus objetivos evidencian una relación entre las representaciones algebraicas y geométricas (en el sentido de Duval, 1999), que será de gran utilidad para los estudiantes en segundo y tercero medio.

Pese a lo mencionado, existen textos escolares que no realizan una conexión entre la representación geométrica y la algebraica. Textos como “Sé protagonista” de Editorial SM y Texto Ministerial de Editorial Santillana, evidencian un tratamiento de los productos notables, esto se ve reflejado en multiplicaciones algebraicas que presentan regularidades, definición y propiedades que se utilizan en el desarrollo del producto para llegar a esta regularidad; si bien se muestra la representación geométrica atribuida a los productos notables, no se da un mayor énfasis. Moreno (2013) aborda este tema con respecto a los textos escolares, menciona que se privilegia el tipo de representación algebraica para establecer las relaciones que pueden presentar entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, así, “entre más representaciones el niño pueda establecer sobre un mismo objeto mejor será su comprensión del mismo” (Moreno 2013, p.149).

Por otra parte, la dificultad en el aprendizaje de los Productos Notables tiene que ver con la comprensión de la regularidad. Así, por ejemplo, Méndez (2008) concluye en su investigación con estudiantes de Curicó que “las producciones de los alumnos dejan ver que los modelos espontáneos y persistentes de algunos tiene relación, en el caso del cuadrado de binomio, con el doble producto del primero por el segundo" (p.67), plantea que la dificultad aumenta cuando los términos son raíces, decimales o fracciones. A medida que en la regularidad cambian los términos algebraicos a un coeficiente numérico o literal distintos *a* y *b*, los estudiantes no reconocen que se trata de un cuadrado de binomio, o una suma por diferencia y caen en la expresión $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

La idea es hacer matemática, comprender como se originan los productos notables desde su representación geométrica, según Penalva y Torregrosa (2001) "cuando profesores y estudiantes utilizamos distintos tipos de representación, se facilita la construcción del conocimiento matemático en el aula", aseveración fundamentada en la Teoría de Registros Semióticos (Duval, 1999). Plantean la importancia de la coordinación de los diferentes sistemas de representación más que en la automatización de ciertas operatorias.

Para hacernos cargo de las dificultades en algebra que poseen nuestros estudiantes debemos buscar métodos que los sitúen desde distintos registros en el planteamiento del problema. Para Torregrosa y Quesada (2007) es relevante coordinar los procesos de visualización y razonamiento, procesos cognitivos que intervienen en geometría.

Barreto (2014), plantea que, para lograr un aprendizaje de los productos notables sobre el espacio tridimensional, es conveniente partir de conceptos y proposiciones de la geometría plana, en donde se parte de figuras geométricas básicas como son algunos polígonos regulares o irregulares (por ejemplo: cuadrados y rectángulos). El trabajo de los productos notables desde el álgebra convendría entonces no solo para dar inicio al estudio del objeto sino también para prolongar y dar continuidad en los objetos matemáticos posteriores como en el cubo de binomio.

De acuerdo al trabajo de los estudiantes, el objeto matemático comienza desde lo concreto, de esta forma para el desarrollo de un aprendizaje, el material que es manipulable permite contextualizar el quehacer matemático, hacerlo más cercano desde el punto de vista práctico, y da lugar al quehacer más abstracto una vez que se ha encapsulado el concepto.
Así como en la historia de las matemáticas, los estudiantes desde temprana edad se enfrentan a problemas concretos, de donde surgen los aprendizajes necesarios para desenvolverse en una situación abstracta. Estas representaciones dan origen al enfoque CPA (concreto, pictórico y abstracto), que en las Bases Curriculares de Matemática (2017) de MINEDUC, se denomina COPISI (concreto, pictórico y simbólico).

Desde las Orientaciones para el Docente que sugiere MINEDUC, COPISI ayuda a construir imágenes mentales para desarrollar la capacidad de hacer matemática. Su desarrollo "favorece la comprensión de conceptos matemáticos y no la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas" (MINEDUC, 2017).

Vemos que existe desde el Ministerio un modelo pedagógico que da lineamientos hacia un mayor nivel que los estudiantes deben llegar, un nivel en que pueda afrontar distintos desafíos matemáticos, a partir de un material concreto o el uso de tecnologías.

Por último, dentro del contexto nacional, se han detectado falencias en algunas materias, entre ellas, matemática. En 2004 la OCDE entrega un estudio encargado por el Gobierno de Chile, que revela falencias en la formación de profesores, inadecuada formación en matemática, entre otras (Isoda, Arcavi y Mena, 2013).
Desde 2006, después de firmar un acuerdo los Gobiernos de Chile y Japón, se atiende a esta necesidad por desarrollar mejores prácticas en los docentes, y se da marcha a la formación de docentes universitarios mediante pasantías a Japón.
Así también, docentes de Japón comienzan a mostrarnos, mediante clases demostrativas, el análisis que se puede hacer bajo el Estudio de Clase. Esta metodología, permite avanzar en forma colaborativa con profesores del país, por lo que, el CPEIP y la Universidad Católica de Valparaíso realizan entre 2008-2009, talleres que convocan a profesores a experimentar nuevas formas de trabajo, analizándolas, reformulándolas y así ir construyendo y reconstruyendo un conocimiento didáctico de las matemáticas.

A partir de los antecedentes expuestos, surge la inquietud si los recursos que se presentan a los estudiantes de primer año medio favorecen el cambio de registro (en el sentido de Duval) de lo geométrico a lo algebraico en el aprendizaje de los Productos Notables. Parece relevante retomar el surgimiento de este objeto y reflejarlo en nuestras aulas, lograr habilidades no solo de aplicación sino también de comprensión y análisis de los productos notables, desde su significado y su razón de ser en la matemática.

Así, en este monográfico, se describe el objeto matemático Productos Notables, en particular el Cuadrado de Binomio y su barrido histórico. Además, se describe la forma en que está inserto en el curriculum nacional.

Luego, se presenta el Plan de Clase diseñado bajo Estudio de Clase, junto a su análisis a priori, para después analizar la implementación de la clase bajo la mirada de la Teoría de Situaciones Didácticas. Esto, para diseñar una secuencia didáctica de tres clases para mejorar el aprendizaje de los Productos Notables.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la monografía, y se sugieren algunas proyecciones de la investigación a partir de los resultados obtenidos.

## Objeto matemático

### Objeto matemático en el curriculum

Al igual como vimos desde el saber erudito, el objeto matemático Productos Notables se sitúa en los Planes y Programas del MINEDUC (2017) en la Unidad de Álgebra. Es por ello que primeramente se hará un recorrido de esta unidad desde el Mapa de Progreso de Álgebra (MINEDUC, 2009), entendiendo este mapa de progreso como el que "… describe el progreso de la capacidad para utilizar símbolos en la representación de generalidades…" (p. 3). Aunque el nombre de la unidad como tal figura desde 5° año básico, desde temprana edad se desarrollan distintas capacidades que se trabajan desde los números y la geometría pero que son transversales a la unidad de álgebra, como lo es el reconocer un símbolo como valor desconocido, la interpretación de relaciones y propiedades conocidas de los números descritas en lenguaje simbólico y la justificación de procedimientos.

En el Mapa de Progreso, de una escala del 1 al 7, el objeto matemático Productos Notables se sitúa en el nivel 4, allí se encontraría el estudiante que es capaz de utilizar propiedades y convenciones del algebra para reducir expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado entre otros. En el siguiente nivel se encontrarían aquellos estudiantes que son capaces de modelar funciones.
Entonces, ¿qué debería saber un estudiante que ha logrado llegar a este nivel? Como ya dijimos necesita reconocer que existe un valor desconocido que puede ser representado por un símbolo, reconocer signo de igualdad e identificar la continuidad de patrones numéricos y geométricos. Lo anterior corresponde al nivel 1.

Y en el nivel dos es capaz de agregar al nivel anterior la explicación y justificación de los procedimientos utilizando propiedades y reglas en las secuencias numéricas. Desde el nivel se agrega un contexto a los problemas, y es capaz de reconocer expresiones algebraicas. Es en este nivel donde las primeras actividades que apuntan a expresiones algebraicas como las usadas en los productos notables ($2x, x+1, x+y$ entre otras), operando estas expresiones en diversos contextos, como en el cálculo de área de triángulos y cuadriláteros, de manera pictórica y simbólica (ver imagen 1).

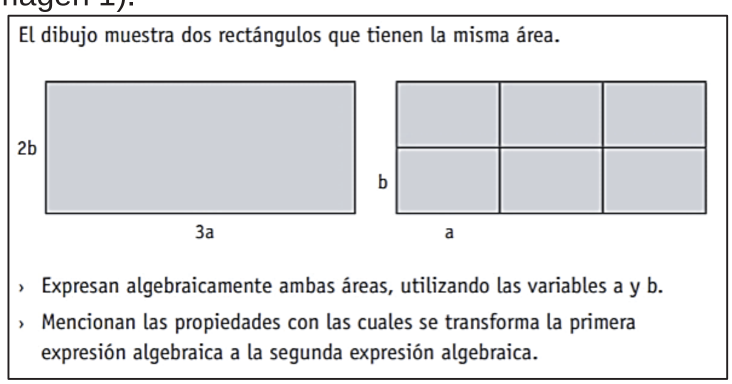



*Imagen 1*. Actividad sugerida en Programa de Estudio 8° básico (MINEDUC, 2016, p.103)

La actividad propuesta apunta a un objetivo de aprendizaje que está directamente relacionado a nuestro objeto matemático (ver anexo 1, OA 3)

Podemos observar en este objetivo una primera aproximación a la factorización, es decir, se comienza la relacionar el cálculo del área como el resultado de un producto y el cálculo de los lados de una figura como resultado de una factorización.

Con respecto a 1° año medio, los objetivos que apuntan al objeto matemático (ver anexo 1, OA 6), el primer punto indica la acción de calcular el área de figuras compuestas por cuadriláteros aplicando propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Sobre las situaciones concretas se refiere a crear un problema real que apunte al mismo objetivo pero contextualizado, por ejemplo, mediante un problema de terreno.
Se sugiere completar un cuadrado de manera de abordar el desarrollo del Cuadrado de Binomio geométricamente, así mismo para el Producto Notable: Suma por Diferencia (ver imagen 2):

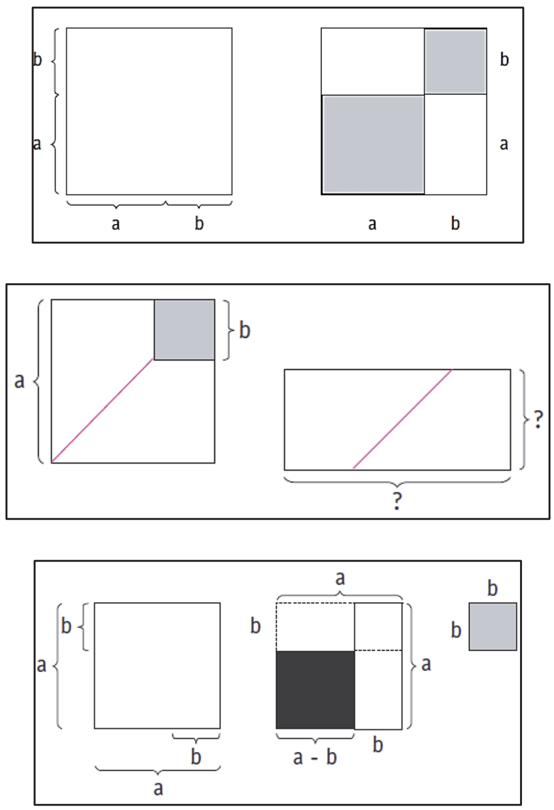


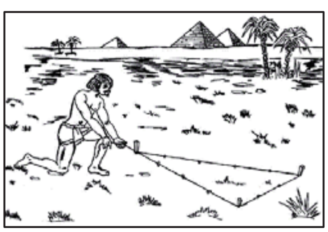

*Imagen 2*. Propuesta de actividades para el descubrimiento desde la representación geométrica de $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}, (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2} \boldsymbol{y}\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ respectivamente

## Aspectos epistemológicos

La línea de tiempo muestra los hitos que construyeron lo que conocemos hoy como Productos Notables.

3000 a.C.

*Tensadores de cuerdas.*
*Antiguo Egipto*



Según la razón 3:4:5

2000 a.C.

Ahmes, 1650

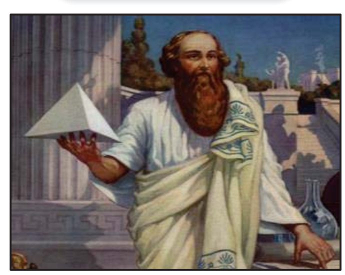
*Papiro de Rhind*

Evidencia área de triángulos y rectángulos.

1000 a.C.

569 – 470 a.C.

*Escuela Pitagórica formaliza la geometría*



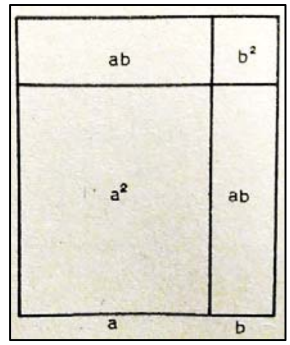
*Escuela Ateniense organiza el estudio de la geometría*

429 – 348 a.C.

*Euclides escribe "Los Elementos"*

*Euclides escribe "Los Elementos"*

**Proposición 4, libro 2:**
*"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos"*




Diofanto de Alejandría, 250

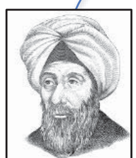
*Introduce notación Algebraica en "Arithmética"*

Al-Khwarizmi
780 - 850

*Escribe "Al-mukhtasar fi al-jabr wa'l-muqabala" (compendio sobre el cálculo por medio de la transposición y reducción)*

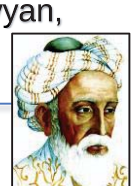
1000

Al-Karaji, 953-1029



*Calcula*
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$
$(a+b)^5$

Omar Khayyan, 1070



*Escribe "On demostration of problema of Algebra"*

Genera la potencia de $(a+b)$ en cualquier valor

Cardano, 1545

*Escribe soluciones de ec. cúbicas y de cuarto grado en "Ars Magna"*

Blaise Pascal, 1654

*Triángulo de Pascal*

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
```

Newton, 1685

*Teorema de Newton*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2000

## Secuencia didáctica

Con la intención de lograr un aprendizaje en productos notables, se construye, la pertinencia de realizar una Secuencia Didáctica bajo el marco del Estudio de Clase. Esta secuencia aborda el tema desde una mirada geométrica, lo que aporta a la visualización de expresiones algebraicas mediante la composición de cuadrados, rectángulos y poliedros (cuyas caras sean cuadrados y rectángulos). Esta secuencia, compuesta de 3 clases, supondrá que, como parte de la organización del Plan de clase, se estudien las implicaciones al abordar temas matemáticos para efectos del diseño de la clase de parte de nuestros estudiantes, es decir, describir cómo pueden construir el objeto matemático cuando se enfrenten a las tareas de la secuencia.

Cada una de las clases posee tareas matemáticas que centran su trabajo solo en un objeto matemático: producto notable de la clase. Se presentan al comienzo de las clases desafiando a los estudiantes a un problema que no han trabajado antes y que incentivan la participación. Al cumplir con el desarrollo de la tarea inicial, se presentan nuevas tareas en la misma línea, pero con distintas variables; aumenta la cantidad de variables o se cambia a otro registro. Estas tareas guían el avance de cada una de las clases, será difícil para el profesor presentar la tarea 2 si no se ha logrado la tarea1, es por esto que a pesar de ser tareas sencillas y darles la capacidad de usar los conocimientos ya adquiridos, será necesario incluir evaluaciones de proceso para tener conocimiento del estado de avance ante las tareas.

En la primera clase se espera que los estudiantes desarrollen habilidades que refuercen la idea de la representación geométrica de expresiones algebraicas. Descubren cómo la suma y resta de expresiones algebraicas representa agregar o quitar segmentos, utilizan la multiplicación algebraica de dos factores para representar el área de un cuadrado y rectángulo, suman áreas menores para representar el área que se compone de ellas. Estas habilidades permitirían concluir que el álgebra es la representación de elementos en geometría, lo que nos permitiría trabajar en las próximas clases con mayor efectividad el aprendizaje de Productos Notables.

A partir de la clase mencionada, la multiplicación algebraica y la adición de expresiones algebraicas cobran sentido geométricamente.

La segunda clase está preparada para dar comienzo al aprendizaje del cuadrado de binomio utilizando material concreto.

Como ya han estudiado el área de cuadrados y rectángulos transitando de la representación algebraica a la geométrica, trabajaran, en una tercera clase, con cuerpos geométricos como cubos y prismas, en material concreto, para construir un cubo.

## Marco teórico en el diseño de la secuencia

### Necesidad de crear un espacio con base a la Teoría de Situaciones Didácticas, TSD.

Para diseñar y analizar una clase en la cual el objeto matemático sea el protagonista de la problemática, podemos respaldarnos en una herramienta teórica que oriente a la construcción de la problemática desde el enfoque planteado por Brousseau (1998), cuya idea consiste en poner al estudiante en una situación que evoluciona hacia la construcción del saber dependiendo de la interacción con el medio, donde intervienen los tres elementos fundamentales; estudiante, profesor y medio didáctico. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento (ver figura 1).

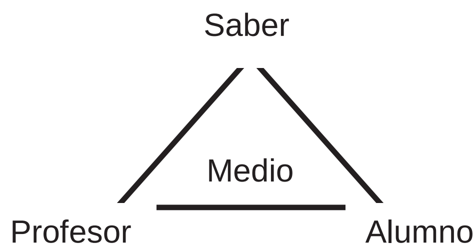



*Figura 1.* Terna TSD (Brousseau, 1998)

Este enfoque de Brousseau, es de gran utilidad para comprender las interacciones sociales entre estudiantes, docentes y saberes matemáticas que se den en la implementación del Plan de Clase, porque permite observar la evolución del estudiante a medida que aprende del medio.

Por otra parte, la TSD permite visualizar el plan de clase basado en un juego específico, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje. En cada clase de la Secuencia Didáctica, se presenta un problema, tipo desafío, pero accesible para todos los alumnos del nivel, de manera que las instrucciones de la tarea no sean un obstáculo en el inicio de la clase.

El problema se manifiesta en la elección de un “juego”, el cual se basa en el conocimiento que el docente espera que logren sus estudiantes. En el origen de la teoría de las situaciones, Brousseau como profesor de primaria se preguntaba *“¿qué juego debe jugar el sujeto para necesitar un conocimiento determinado? ¿qué aventura (sucesión de juegos) puede llevarlo a concebirlo o adoptarlo?”* (Brousseau, 1988, p.15). Estas preguntas nos sirven de guía en el diseño de cada Plan de Clase, donde el enfoque será el estudiante y la información que se da para orientar sus elecciones, situándolo hacia el conocimiento de Productos Notables y no otro. Así, Para no caer en dificultades como construir cualquier tipo de figura con las fichas manipulables, o construir un cuadrado con algunas piezas, es necesario que en el “juego” se establezcan las reglas, o indicaciones bien definidas que conduzca a todo el grupo curso hacia un mismo objetivo.

La situación será a-didáctica (en el sentido de Brousseau) en el Plan de Clase porque el problema a abordar le permitirá al estudiante utilizar sus concepciones previas, además de generar conjeturas y presentarlas como argumentos que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica, sin la intervención directa del docente (su actividad es mínima). De esta manera, los estudiantes tendrán una continuidad en la forma en que trabajan en estas tres clases, entendiendo que son ellos los protagonistas de mejor manera en las clases 2 y 3 donde se apunta directamente a dos de los productos notables.

**El Papel que desempeña profesor y estudiante en el marco de la TSD.**

Cuando los estudiantes interactúan en una situación didáctica manifiestan de distintas formas sus conocimientos. En la TSD, los estudiantes manifiestan sus conocimientos y la situación evoluciona como un instrumento de control.

En un principio, las acciones tienen un carácter exploratorio ante el problema, y son capaces de recurrir a sus conocimientos previos, luego formulan sus ideas y las intercambian con sus compañeros, hasta que prueban estas ideas y validan el saber que venían construyendo para dar solución al problema. Esta evolución da cuenta de un proceso que vive el estudiante y que conlleva a decisiones sobre sus estrategias en distintos momentos de la clase, al cual Brousseau denomina *fases*.

Como una manera de revelar los conocimientos de los estudiantes en los tipos de situaciones que contenga el Plan de Clase, se presentan las fases de una situación didáctica:

Fase Acción:

Momento en el cual profesor propone un problema que se puede resolver con los conocimientos previos de los estudiantes, para el caso de los productos notables, por ejemplo, el área de cuadriláteros, pero al cual nunca se han enfrentado antes. Es una fase de experimentación, en la que se apropian del desafío y manipulan un material concreto (de ser parte de la situación). Son capaces de repetir los procedimientos para llegar a sus resultados y tomar decisiones sin tener conciencia de ellas (lo que Brousseau llama *Modelo Implícito)*, para luego formularlas.

Fase Formulación:

El problema debe conducir al grupo de trabajo hacia la necesidad de comunicarse entre ellos, a probar, formular y reformular sus estrategias, de manera que estas sean aprobadas por el equipo. Así, la regularidad de un producto notable podría estar en construcción, no necesariamente correcta y probada.

Puede que estén de acuerdo o no (interacción entre compañeros) y puede que al jugar resulte o no ganadora (interacción con el medio).
La formulación será evidente cuando el medio que propicie el profesor permita que el grupo intercambie información, y esto le conduzca a cada integrante a determinar una solución para el problema. Siendo capaces de comunicar y explicar sus estrategias, consensuadas previamente por el grupo.

Fase Validación:

Cuando el docente introduce en el medio las variables del problema, los estudiantes comprueban sus estrategias formuladas al inicio de la situación, es decir, la propia situación le ayuda al grupo a decidir si son válidas, sin necesidad de que el profesor apruebe o desapruebe. Los productos notables podrían probarse por sí mismo, cuando el estudiante comprenda que independiente de los coeficientes que tenga la forma de la expresión siempre será la misma.

En esta situación es importante cómo expresan la información, es decir, son capaces de convencer a otros estudiantes demostrando con propiedades u otras tareas matemáticas que sean conocidas por el grupo curso, sin caer en la burla, en la ofensa u otros argumentos que carezcan de sustento ante la problemática.

Una forma de comunicar la información puede ser mediante un plenario. Allí debe evidenciarse comunicación entre los estudiantes que explican y los que atienden, siendo capaces de defender sus ideas.

El profesor por su parte tiene el papel fundamental del diseño y organización del Plan de Clase, para provocar las situaciones a-didácticas adecuadas a los objetivos. Además, durante toda la situación, es importante su intervención como devolución a las acciones del estudiante, devolviendo la responsabilidad a este.

Dentro de las fases también existe responsabilidad del docente, lo que Brousseau denomina "*institucionalización*".

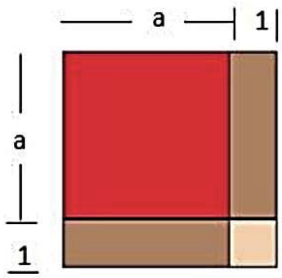
Fase Institucionalización:

El profesor, con la intención de institucionalizar el saber matemático, formaliza las estrategias comunicadas en la fase de validación y aclara la intensión con la cual se hizo la situación. En la primera parte de la clase los estudiantes no conocen la intención con que el medio les hace determinar áreas, pero en esta fase la expresión cobra sentido. El saber, que en un principio fue personal y luego grupal, es ahora, institucional.

**Limitaciones en el aprendizaje por falta de representaciones**

Dentro del enfoque de la TSD, la Teoría de Registros de Representación de Raymond Duval (1988) nos permitirá observar las estrategias que formulen los estudiantes en las fases de acción y formulación, momentos en los cuáles los estudiantes ponen de manifiesto sus conocimientos previos e ideas de forma oral o escrita.

Si observamos nuestro objeto matemático según los Planes y Programas que MINEDUC (2017) propone, tendríamos lo siguiente:




Suma de las áreas menores: $a^2 + 2a + 1$

Base por altura del cuadrado $(a + 1)^2$

Ambas representaciones del cuadrado de binomio, permiten que haya una aprehensión del objeto, por transitar en más de una representación (Duval, 1999). Es decir, si se logra una aprehensión de cada una de las representaciones y se hace un tratamiento con ellas, se genera una congruencia entre los objetos matemáticos. A partir de esto, se el estudiante es capaz de desprenderse de las representaciones y comprende el objeto matemático como un todo. Este sistema de representación tiene su propia estructura, caracterizada en función de las actividades cognitivas que proporcione el plan de clase.

De acuerdo con Duval (1998, p.177-178), la formación de esta representación geométrica debe ser identificable por todos los alumnos. La transformación de la representación dentro del mismo registro algebraico, permitirá al estudiante identificar el producto notable como una igualdad entre dos estrategias que determinan el área de un cuadrado. El convertir representaciones de registro geométrico al algebraico, logrará conservar el significado, y así no caer en errores a futuro como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

El tratamiento geométrico pondrá a disposición del estudiante una herramienta con la cual puede justificar y retomar otros productos notables; como cuadrado de trinomio, binomio con un término en común, suma por su diferencia, y cubo de binomio; para este último caso la figura sería en 3D.

**Clase 1**

SOBRE EL TEMA

Como parte de las prácticas docentes en las escuelas de Japón, el Plan de Clase se realiza con base al Estudio de Clases[1].

Durante el transcurso de la tarea se espera que los estudiantes desarrollen habilidades que refuercen la idea de sumar áreas menores para representar el área que se compone de ellas. Habilidad que daría pie para el logro de futuras tareas matemáticas asociadas al descubrimiento de productos notables mediante su representación geométrica.

Para el desarrollo del tema, será necesario que los estudiantes estén en conocimiento del cálculo de superficies en cuadriláteros y operaciones básicas algebraicas (como reducción de términos semejantes).
Importante: Para la actividad estará preestablecida la medida de **a** y **b**.

A continuación, se presenta la planificación previa, el plan de clase y su análisis a priori, el que contempla las posibles estrategias y dificultades de los estudiantes, junto a las devoluciones de profesor ante esas dificultades.

OBJETIVO DE LA CLASE

El objetivo es: *Expresar algebraicamente la medida de la superficie de figuras geométricas en función de ciertas longitudes*. (Cámara, s/f)

Para la presentación del objetivo en clase, y mantener la expectación ante la tarea, el objetivo será planteado como:
*Expresar la medida de la superficie de figuras geométricas.*

DESARROLLO DE LA CLASE

Con respecto a los símbolos:

- ○ Será estrategia del estudiante
- • Será dificultad del estudiante
- ✓ Será devolución del profesor

Materiales complementarios:

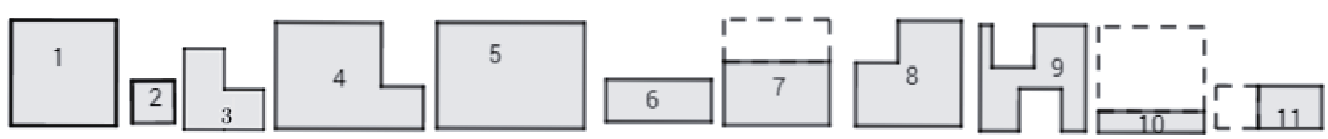
Rectángulo de cartulina.
Guía de trabajo.
Compás.
Tijeras y pegamento (para validación).

[1] Modalidad que mejora las prácticas docentes y la enseñanza de la matemática (Isoda y Olfos, 2009).

**Plan de Clase 1.**

| Momentos de la clase | Rol del profesor | Rol estudiante | Tiempo |
|---|---|---|---|
| **1.** Se da a conocer el objetivo de la clase. | Escribir en pizarra según organización:<br>"*Expresar la medida de la superficie de figuras geométricas.*" | Se disponen en grupos de 4 personas. | 5 min. |
| **2.** Exponer tarea matemática . | Pedir que posean sobre el banco: Lápiz, goma, compás.<br>Repartir set 1 de fichas (ver anexo 2) con figuras (las hojas no se unen, se entregan de forma desordenada a los integrantes del grupo).<br><br>Pegar en pizarra rectángulo de área $10a^2 + 5ab$.<br><br>- "Tomando en cuenta las medidas de ***a*** y ***b*** que poseen en su ficha; la tarea consiste en usar al menos una vez cada una de las figuras para cubrir la superficie del rectángulo que se muestra en pizarra cuyos lados son ***5a*** y ***2a+b***, sin que falte espacio por cubrir o sobre parte de la superficie de alguna figura". | Escuchan atentamente la indicación, consultan dudas de la actividad.<br><br>Tener en cuenta dos consideraciones:<br><br>1) Posible pregunta: - ¿Las figuras tendrán que armarse como un rompecabezas sobre el rectángulo?<br>- "Las figuras pueden perder su forma con tal de cubrir los espacios que falten".<br><br>2) Posible pregunta: - ¿Se pueden recortar las figuras?<br><br>- "Las figuras no se pueden recortar, el único material extra a su lápiz y cuaderno será un compás. | 15 min. |

Para referirse a las figuras durante el Plan de Clase se nombrarán del 1 al 11:




| Momentos de la clase | Rol del profesor | Rol estudiante | Tiempo |
|---|---|---|---|
| | | | |
| **3.** Desarrollo tarea | Guiar el trabajo observando al menos unos 3 minutos por grupo:<br><br>- Cautelar que solo ocupen compás.<br>- Apoyar a aquellos grupos que no toman acciones; ¿por dónde podemos empezar? ¿qué podríamos hacer en primer lugar? | Discuten los pasos a seguir, poniendo en juego sus conocimientos previos, se establecen dos posibles estrategias:<br><br>○ Primero identifican el área a cubrir recordando el cálculo de área de cuadrilátero. Multiplicando lado por lado obtienen:<br>$5a \cdot (2a + b) = 10a^2 + 5ab$ | 40 min. |

- ✓ Observar si continúan calcando las figuras cuando se den cuenta que no poseen el suficiente espacio en el cuaderno como para dibujar el rectángulo (ya que aún no poseen el rectángulo de cartulina).

- ✓ La profesora incentiva a los estudiantes a verbalizar sus estrategias con el grupo de trabajo.

En caso de observar que no registran apuntes, incentivarlos a escribir sus cálculos. Así, por ejemplo, si determinan las áreas de las figuras, pedirles que registren estos resultados en sus cuadernos.

Evaluar el proceso:
En caso de que procedan a reducir términos semejantes, preguntar:

- ¿Por qué realizar esas operaciones?
- ¿Por qué crees que te ayudaría a cubrir el área del rectángulo?
- ¿Qué significa la reducción de términos semejantes para este problema?

✓ Si los estudiantes no comprenden lo que hacen, entonces es mejor devolverse al principio del problema y guiarles hacia el significado de las operaciones: - ¿Por qué es necesario primero determinar las áreas? ¿con qué fin comenzamos por esto?

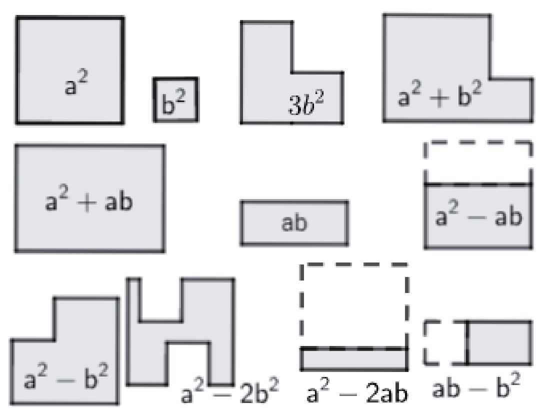
✓ En caso de que lleguen hasta este punto y no sepan cómo seguir recordar que el objetivo es cubrir el rectángulo: -Si la suma no es igual al área del rectángulo, ¿significa que está mal el procedimiento utilizado, o falta hacer algo más?

- Comienzan a dibujar o calcar en su cuaderno las figuras para ver si coinciden sus formas y así cubrir el rectángulo.

- Con ayuda del compás, identifican las medidas de los lados involucrados en cada figura de la ficha. Por ser figuras con distintas formas podrían existir las siguientes estrategias:

Estrategia 1: multiplicar lado por lado.
Estrategia 2: sumar las áreas que conforman la figura.
Estrategia 3: Completar el área de una figura mayor y restar áreas menores.
Estrategia 5: Determinar las dimensiones de cada figura.

Una vez determinadas todas áreas de las figuras, reducen términos semejantes:

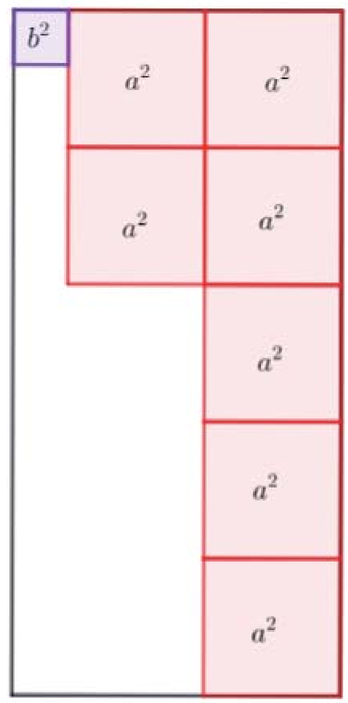



Suma de las áreas de cada una de las figuras:

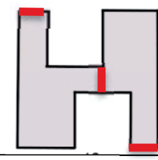
$$\begin{aligned} a^2+b^2+3b^2+a^2+b^2+a^2+ab+ab+a^2 \\ -ab+a^2-b^2+a^2-2b^2 \\ +a^2-2ab+ab-b^2 \\ = \boldsymbol{7a^2+b^2} \end{aligned}$$

Reconocen las expresiones de áreas que permitirían reducirse junto con $7a^2+b^2$ para cubrir el rectángulo de área $10a^2+5ab$. Estas son:

$$3a^2-b^2+5ab$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<u>Evaluar el proceso:</u><br><br>
- ¿Qué significa $3a^2$ ? ¿qué diferencia tiene la operación de la multiplicación con la adición en cuanto a su significado?<br>
- ¿Cómo reconocen las áreas que faltan?<br><br>
✓ Recordar el objetivo de la tarea. No se está trabajando con medidas exactas, sino que nos ayudamos del compás para comprobar y comparar medidas de la figura con las presentadas al comienzo de la guía como a y b.
</td>
<td>
Para seleccionar las figuras que faltan tienen dos opciones:<br><br>
1. figura 11, 3 figuras 5 y figura 6<br>
Es decir:<br>
$(ab - b^2) + 3(a^2 + ab) + (ab)$.<br><br>
2. 3 figuras 1, figura 11 y 4 figuras 6<br>
Es decir:<br>
$3(a^2) + (ab - b^2) + 4(ab)$.<br><br>
○ Otra estrategia podría ser dibujar las figuras en el cuaderno de manera de hacer “calzar” como en un<br>


rompecabezas las 11 figuras en un rectángulo cuyos lados sean los mismos que se mostraron en pizarra:<br><br>
El estudiante podría tomar parte de cada figura para crear cuadrados de área $a^2$.<br><br>
Luego, podría identificar geométricamente los cuadrados y rectángulo que faltan, determinar su área e identificar las fichas que posean esas áreas.<br><br>
• Pensar que b es la mitad o la tercera parte de a.<br>
• Establecer relaciones entre las medidas dependiendo de la figura. Ejemplo:
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | De esta forma se puede comprobar que no existe una razón 1:2 o 1:3 entre **b** y **a**. | <br>Se podría tomar la medida marcada en rojo como la mitad de **b.** | |
| **4.** Comprobar desarrollo | Se le entrega a cada grupo un rectángulo de cartulina con las medidas ***5a*** y ***2a+b***.<br><br>Profesora: - Ahora, recorten solo las fichas que escogieron y peguen en la cartulina. Pueden recortar las formas que no coincidan.<br><br>✓ ¿Existe una figura que posea la misma forma que les falta cubrir?, en caso de que no; ¿pueden identificar la expresión que representa la medida de la superficie? ¿qué figura o que figuras poseen esta misma expresión?<br><br>✓ No pueden simplemente recortar la parte de la figura que sobra, ¿qué ficha podrían modificar para que no sobre?<br><br><u>Evaluación del proceso</u><br>- ¿Cómo explican que las áreas de las figuras hayan cubierto todo el rectángulo?<br>- ¿Si las medidas de ***a*** y ***b*** cambiaran, podrían ocupar las mismas figuras y la misma cantidad?<br>- ¿Por qué usamos compas y no regla?<br><br>✓ Comprobar este supuesto con otra medida de a y b (tomar un área de rectángulo de menor medida). | Los grupos recortan sus figuras y cubren la superficie del rectángulo, sin que sobre o falten figuras.<br><br>• Los grupos se percatan que les falta superficie por cubrir.<br>○ Identifican las fichas que faltan.<br><br>• Los grupos se percatan que les sobra parte de una ficha.<br>○ Modifican la forma en que disponen las figuras sobre el rectángulo e identifican la ficha a modificar.<br><br>○ Los estudiantes podrían ser capaces de explicar que las sumas de las áreas menores resultan la misma expresión del rectángulo aun cuando cambien las medidas (porque ***a*** y ***b*** representan cualquier medida)<br><br>• Piensan que a medida que aumentan las medidas necesitarán menos fichas, y si las medidas disminuyen necesitarán más fichas. | 20 min. |
| **5.** Cierre | Retomar objetivo de clase, y tareas desarrolladas.<br>Todo se visualiza en pizarra.<br><br>Preguntar: ¿Qué operaciones hemos utilizado a lo largo de la clase? | - Suma, resta y multiplicación. | 10 min. |

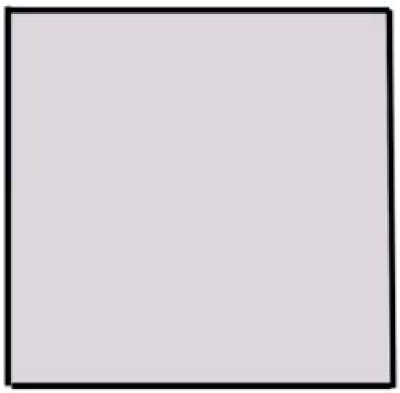
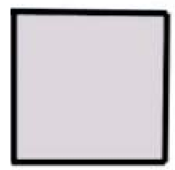
| | | | |
|---|---|---|---|
| | ¿Qué significan cada una de estas operaciones en las figuras? | - Suma: Un segmento a continuación de otro.<br>Resta: A un segmento le quitamos la longitud del otro.<br>- Multiplicación: Área de un cuadrilátero cuyos factores representan sus lados. | |
| | Pedirle a cada grupo que invente un valor natural (solo por efectos del cálculo) para la medida del segmento ***a*** y ***b***.<br>Mostrar que con todos los valores que escoge cada grupo de cumple la igualdad de áreas. | Son capaces de explicar que las expresiones algebraicas representan medidas que pueden tomar cualquier valor, incluso reales (es contenido visto en la primera unidad del año). | |
| | Multiplicación de expresiones algebraicas:<br>- Preguntar: - ¿Cuántos factores tienen las multiplicaciones realizadas? En todos los casos fueron 2 factores, ¿es coincidencia o representan algo más?<br><br>Igualdad entre áreas:<br>- Podríamos concluir que todas las expresiones algebraicas y sus operaciones representan elementos de geometría. | Dos factores se utilizan en todos los casos, representan la base y la altura, que nos permite determinar el área. | |

**Análisis a priori plan de clases 1.**

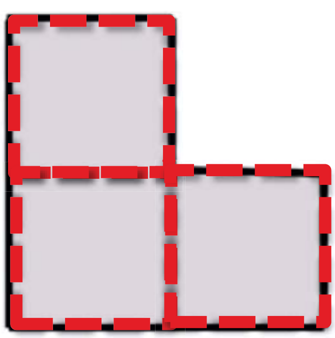
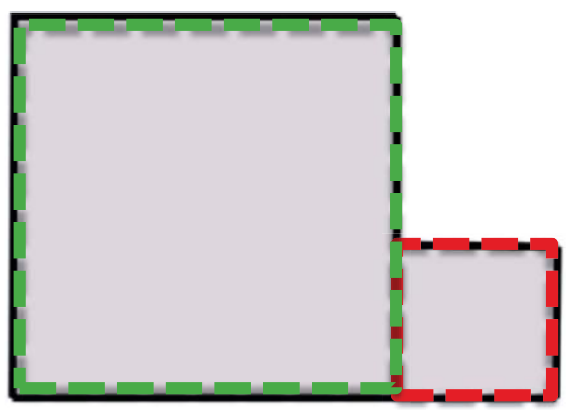
***Respuesta experta.***

Se espera que los estudiantes, ayudados de compás utilicen 4 distintas estrategias para el cálculo del área de las figuras de la ficha.

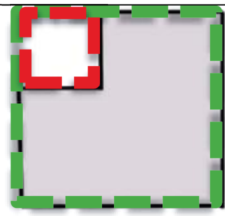
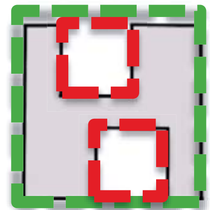
- Multiplicar lado por lado

| | |
|---|---|
| <br>El cuadrilátero tiene lado a<br>Su área es $a^2$ | <br>El cuadrilátero tiene lado b<br>Su área es $b^2$ |

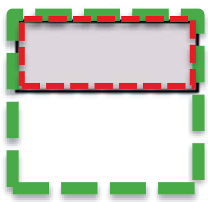
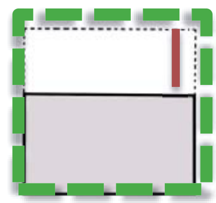
- Sumar las áreas que conforman la figura (cuadrados lado a y cuadrados de lado b).

| | |
|---|---|
| <br>La figura está compuesta de tres cuadrados de área $b^2$.<br>Su área es $3b^2$. | <br>La figura está compuesta de un cuadrado de área $b^2$ y un cuadrado de lado $a^2$.<br>Su área es $a^2 + b^2$. |

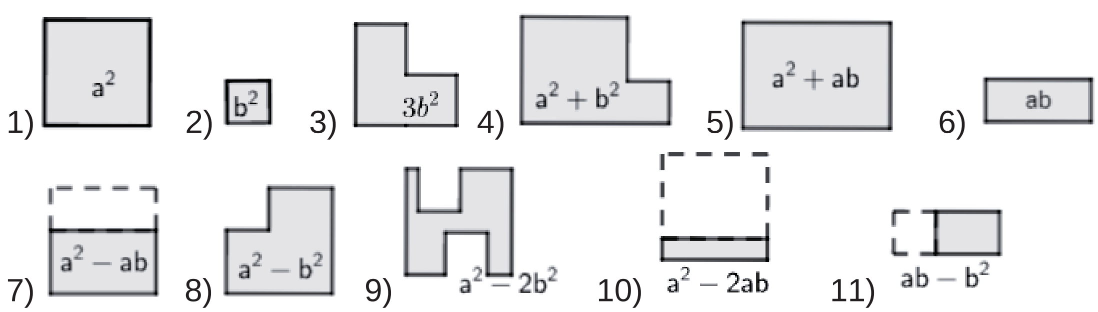
- Completar el área de una figura mayor y restar áreas menores.

| | |
|---|---|
|  Su área es $a^2 - b^2$ |  Su área es $a^2 - 2b^2$ |

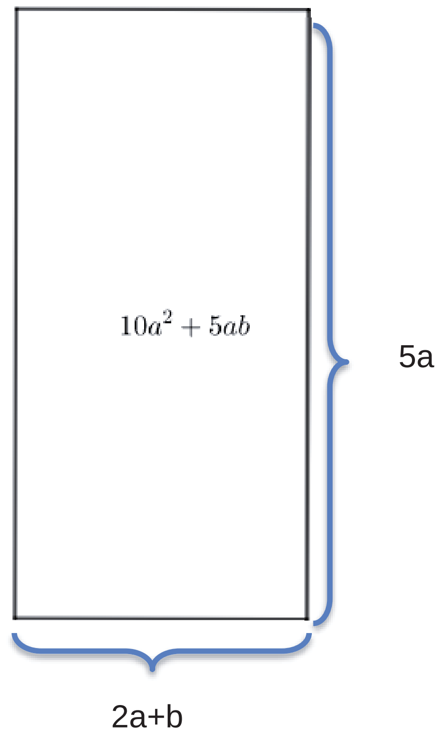
- Determinar las dimensiones de cada figura.

| | |
|---|---|
|  La figura tiene como uno de sus lados **a** y el otro **b**<br>Su área es $\boldsymbol{ab}$ |  Uno de sus lados es **a** y el otro es $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$**.**<br>Su área es $\boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{ab}$ |

De esta forma las áreas de todas las figuras de la ficha son las siguientes:

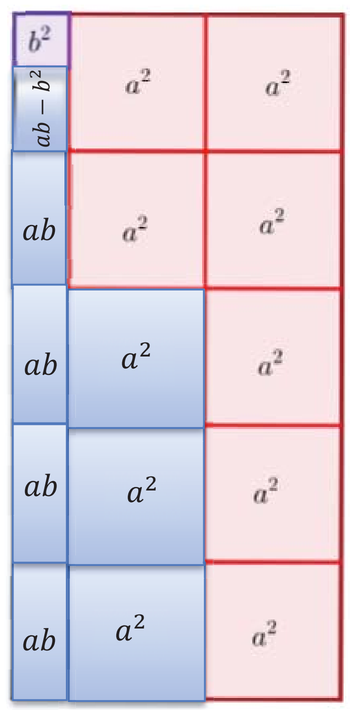



La tarea nos dice que debemos ocupar al menos una vez cada ficha, por lo que se sumarán las áreas de las figuras anteriores y se comparará con el área del rectángulo que se debe cubrir:

| | |
|---|---|
| Suma de las áreas de cada una de las figuras:<br>$a^2+b^2+3b^2+a^2+b^2+a^2+ab+a$<br>$+a^2-ab+a^2-b^2+a^2-2b^2+a^2$<br>$-2ab+ab-b^2$=<br><br>$\boldsymbol{7a^2+b^2}$ | Área del rectángulo:<br> |

La expresión que representa el área faltante es:

$3a^2-b^2+5ab$ *




Para seleccionar las figuras que faltan tienen dos opciones:

1. Figura 11, 3 figuras 5 y figura 6 Es decir: $(ab-b^2)+3(a^2+ab)+(ab)$
2. 3 figuras 1, figura 11 y 4 figuras 6 Es decir: $3(a^2)+(ab-b^2)+4(ab)$

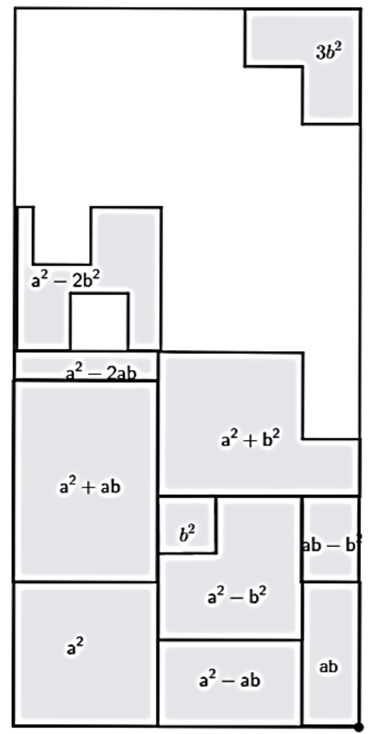
Efectivamente, al comprobar representar el resultado de la suma de las áreas menores sobre el rectángulo (en colores rojo y morado), el área faltante corresponde a $3a^2-b^2+5ab$ (azul).

***Posibles estrategias.***

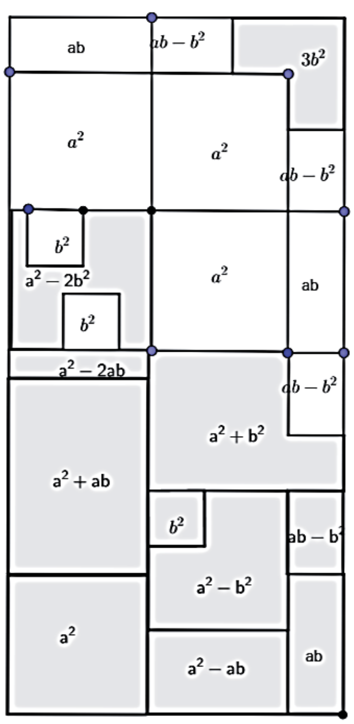
- Determinan el área de cada figura con las estrategias señaladas y luego identifican el área que les falta.

- Sin necesidad de determinar las áreas de cada figura, podrían dibujar el rectángulo en la mesa u hoja de mayor tamaño que el cuaderno para ordenar las figuras. Una combinación podría ser la que muestra en imagen derecha.

  Se observa que existen espacios en blanco por cubrir, por lo que se podría continuar dibujando hasta cubrir todo el rectángulo.




Una de las posibles combinaciones de trazos que pueden hacer en el espacio en blanco sería:




Las figuras resultantes de los espacios son:

- 3 de figura 1
- 2 de figura 2
- 2 de figura 6
- 3 de figura 11

Si se reducen los términos de las expresiones algebraicas:

$$3(a^2) + 2(b^2) + 2(ab) + 3(ab - b^2)$$
$$3a^2 - b^2 + 5ab$$

Mismo resultado obtenido en *

Vale decir, que dependiendo de la posición en la que se muevan las figuras, los espacios en blancos darían lugar a otras fichas para completar, de cualquier modo el área que se necesita siempre será $3a^2 - b^2 + 5ab$.

**Dificultades y errores, devoluciones.**

*Dificultades en el desarrollo de la tarea.*

No avanzan hacia la comprobación en el rectángulo por dificultades en el cálculo del área de las figuras de la ficha. Específicamente:

a) No comprenden la tarea a realizar.

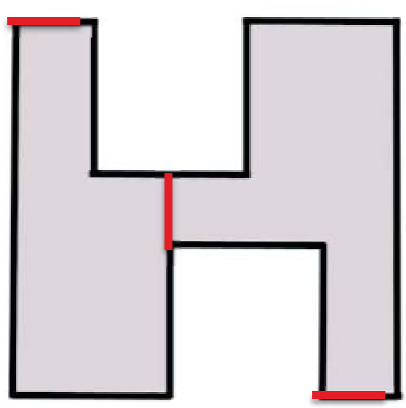
Por ser una actividad distinta a las tareas que comúnmente se realiza en la asignatura de matemática, no comprenden la tarea. Se disponen a observar a otros grupos perdiendo el sentido de la Acción.

b) Como parte de la fase de Acción, la herramienta compas entorpece el cálculo del área asociando medidas del cual no conocemos su valor.

Dado que en niveles anteriores han aprendido como utilizar el compás, podrían medir con el compás y comparar la medida en regla de medir. Repiten con todos los lados de la figura, incluyendo las figuras irregulares, para determinar un valor exacto no algebraico.

c) Pensar que **b** es la mitad de **a**. Llevaría a un error en todas las figuras de la tarea.

También se podría pensar que *b* es la tercera parte de *a.*
Por ejemplo:



Se podría tomar la medida marcada en rojo como a mitad de *b*.

d) Dan valores en centímetros a *b* midiéndolo con regla, lo que dificultaría el desarrollo algebraico de la tarea.

e) Como parte de la fase de formulación, multiplicar las áreas menores que componen la figura mayor. Como una forma de responder a la mayor área, los estudiantes no reconocen la adición como una operación que agrega valores, distinto a la multiplicación que repite el valor una cierta cantidad de veces.

f) No logran visualizar todas estrategias planteadas en Respuesta Experta, por el hecho de ser figuras irregulares. Tienden a descomponer todas las figuras en áreas menores (no resulta este método para figura 7, 10 y 11).

*Devoluciones en el desarrollo de la tarea.*

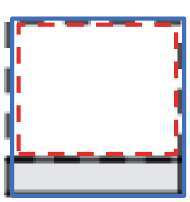
- La dificultad a) podría manifestarse en un grupo, pero podría ser parte también del resto del curso. Ante esto, verificar comprensión de la tarea, pedirle a algún estudiante (en especial alguno que no sea destacado en Matemáticas) que explique con sus propias palabras la tarea sobre la cual van a trabajar. En caso de que no pueda explicar, complementar con el apoyo de otro estudiante.

- Ante la dificultad b), recordar el objetivo de la tarea. No se está trabajando con medidas exactas, sino que nos ayudamos del compás para comprobar y comparar medidas de la figura con las presentadas al comienzo de la guía como ***a*** y ***b***.

- Sobre c) y d), insistir en la herramienta compás para comprobar las medidas de a y b. Comprobando que no existe una razón 1:2 o 1:3 entre b y a.

- Sobre la dificultad e), referirse a ejemplos de la vida cotidiana, como embaldosar el piso de la sala, “si quiero determinar cuántos metros cuadrado tiene en total el colegio, ¿cómo debo operar entre sí el suelo de las salas, gimnasio, pasillos, etc.?”. Este tipo de preguntas se han trabajado en años anteriores, especialmente en enseñanza básica. La repuesta se puede comparar con el trabajo de la guía.

- Ante la dificultad f), dibujar las figuras en pizarra y marcar con línea punteada (de otro color) los espacios en blanco y determinar el área. Por ejemplo:



$a^2 - 2ab$

- ¿Cuál es el área de la figura que se ha marcado en azul?
- ¿Cuál es el área de la figura que se ha marcado en rojo?
- Sabiendo lo anterior, ¿cómo determino el área pintada?

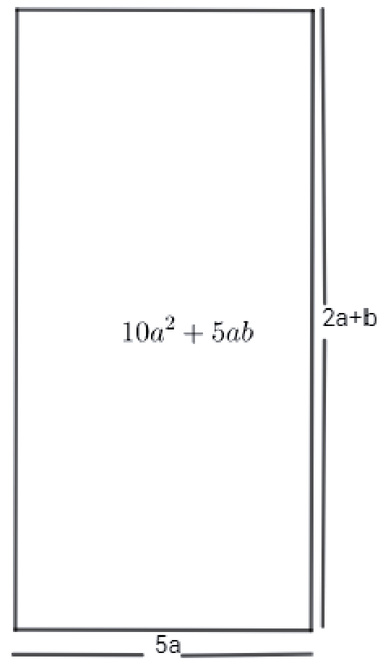
*Dificultades en la comprobación de la tarea.*

Una vez que han determinado el área de las figuras, podrían surgir dificultades al tener que identificar cuáles fichas tendrán que repetir para completar el rectángulo:

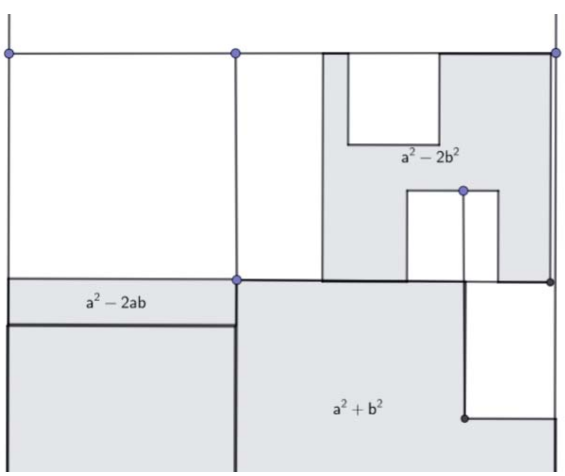
a) No visualizan cómo la forma de las fichas podría cubrir el rectángulo.
Son capaces de determinar el área de cada ficha, pero no visualizan el armado que tendrían las fichas entre sí antes de ponerlas sobre el rectángulo.

b) Como parte de la fase de formulación, los estudiantes podrían etiquetar en forma errónea los lados del rectángulo suponiendo que $5a$(por ser una expresión que contiene solo un término), representa menor medida que $2a + b$.

Sabemos que de cualquier modo el área para efectos de cálculo resultaría igual, pero sería una dificultad si se trabaja con la estrategia de dibujar las figuras dentro del rectángulo.

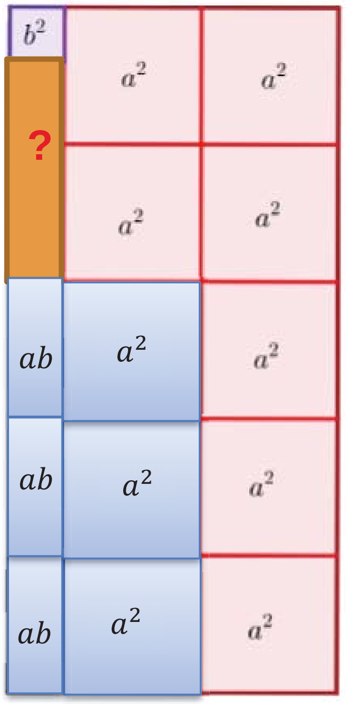



c) Cuando cubren el rectángulo con las fichas recortadas, surgen figuras de las cuales no se conoce la medida. Podría suceder con la figura 9:




Haciendo zoom en el rectángulo, se observan dos áreas de las cuáles no conocemos su ancho.

d) Como parte de la fase de validación, rellenan los espacios con fichas que no existen. Por ejemplo:




Identifican que existe un espacio por cubrir, incluso podrían determinar su área, pero no son capaces de relacionarlo con la composición de dos figuras. Por ejemplo, el rectángulo en naranjo que se muestra a la izquierda.

e) Como parte de la fase de validación, los estudiantes piensan que, si se cambian las medidas de ***a*** y ***b***, entonces la tarea tendría que comenzar de nuevo. Es decir, podrían decir que los procedimientos no serían los mismos, menos la cantidad de fichas encontradas para cubrir el rectángulo.

*Devoluciones en la comprobación de la tarea.*

- Ante la dificultad b), Pedirles que reemplacen ***a*** y ***b*** con cualquier valor (preferentemente natural mayor que 0 por efectos del tiempo) y comprobar que no se cumplen las dimensiones de largo y ancho que han etiquetado.
  En el caso de que hayan escogido valores en los que se cumple que $a > b$, pedirles que propongan un ejemplo numérico en donde $a < b$, de esta forma comprobaran que, independiente de los valores de ***a*** y ***b*** siempre se cumple que $5a > 2a + b$.

- Si surgen algunas figuras de las cuales no se conocen sus dimensiones, pedirles primero que determinen esas dimensiones. Si comienzan a relacionar las medidas de ***a*** y ***b*** hacer la misma devolución que la dificultad c) en Desarrollo de la Tarea.

- Ante la dificultad d) pedirles que determinen las dimensiones de la figura con la cual tienen dificultad. A partir del área preguntar: - ¿Qué figuras podrían igualar la medida de la misma superficie que falta por cubrir?

- Como parte de la institucionalización, la profesora le pide a cada grupo que inventen un valor para ***a*** y ***b.*** Los valores no pueden ser negativos o cero, pero admiten valores Reales.

  Los estudiantes han trabajado la unidad de números reales a comienzo de año, pero no la operatoria de estos, por lo que los valores podrían ser números naturales o racionales.

  Con uno de los ejemplos numéricos, desarrollar en pizarra la valorización de cada una de las áreas de las figuras menores y comparar esta suma con el área del rectángulo mayor. Pedirles a los grupos que comprueben con los valores que han inventado.

**Matemática en juego.**

Para el desarrollo del tema, será necesario que los estudiantes estén en conocimiento del cálculo de superficies en cuadrilátero y operaciones básicas algebraicas (como multiplicación de polinomios y reducción de términos semejantes).
Las tareas propuestas pondrán al estudiante en una situación donde tendrán que trabajar con la geometría y el álgebra al mismo tiempo. Relacionar la prolongación de segmentos con la suma de términos algebraicos, la multiplicación (de dos factores) de polinomios con el área de un cuadrilátero, y la igualdad entre la suma de áreas menores que conforman un área mayor. Habilidad que les permitirá trabajar en las siguientes clases asociadas a Productos notables.
En particular, la matemática en juego de esta clase, está directamente asociada a lo que plantea Kline (1994); una lista que compara lo que se ilustra en los textos escolares y el saber sabio de los matemáticos sobre el álgebra:

*“Los números, son sustituidos por segmentos de rectas, las operaciones por construcciones geométricas. El producto de los números, se convierte en el área del rectángulo. El producto de tres segmentos es un volumen. La suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro. La resta es recortar de un segmento la longitud del segundo. La división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan*.”

**Clase 2**

El diseño de la clase va dirigido a un profesor de aula, de esta manera el énfasis son las actividades de la clase que se verán implementadas en el aula. Considera 3 tareas distintas que se conectan, esto porque encontrar la regularidad del cuadrado de binomio requiere activar en los estudiantes los conocimientos previos como área de cuadriláteros y multiplicación de expresiones algebraicas. De este modo, para mantener los problemas matemáticos como desafíos, las tareas 1 y 2 apuntarán a recordar el trabajo con cuadriláteros y medidas de superficies y la tarea 3 específicamente al cuadrado de binomio como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

A continuación, se presenta la planificación previa, el plan de clase y su análisis a priori, el que contempla las posibles estrategias y dificultades de los estudiantes, junto a las devoluciones de profesor ante esas dificultades.

SOBRE EL TEMA

Con las actividades propuestas, la multiplicación algebraica y la adición de expresiones algebraicas cobran sentido geométricamente.
La clase está preparada para dar comienzo al aprendizaje del cuadrado de binomio.
Para la construcción por parte del profesor para las fichas, considerar las siguientes medidas:

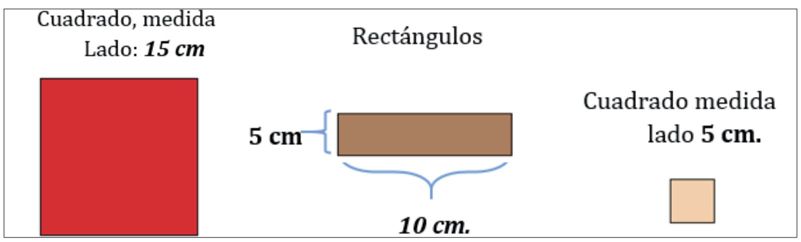



*Figura 2.* Material concreto y sus medidas de longitud

OBJETIVO DE LA CLASE

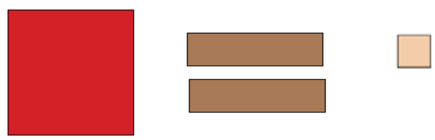
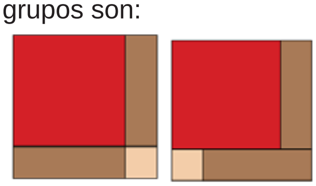
El objetivo es: Determinar la regularidad del cuadrado de binomio.

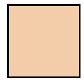
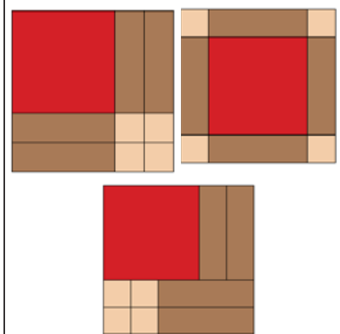
Para la presentación del objetivo en clase: Calcular la medida de la superficie de distintos cuadrados.

DESARROLLO DE LA CLASE

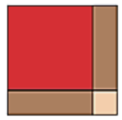
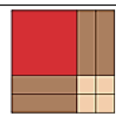
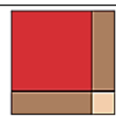
Con respecto a los símbolos que se indican en el Plan de clase:
- ○ Será estrategia del estudiante
- • Será dificultad del estudiante
- ✓ Será devolución del profesor

## Plan de clase 2.

| Tarea matemática | Rol del profesor | Rol estudiante | Tiempo |
|---|---|---|---|
| 1. Se da a conocer el objetivo de la clase: Determinar la medida de la superficie de distintos cuadrados. | Mostrar tarea 1<br>- Con las siguientes fichas: un cuadrado color rojo con medida de lado $a$, un cuadrado rosado con medida de lado $1$ y dos rectángulos cafés de lados con medida de lado $a$ y $1$. | Se disponen en grupos de 4. | 8 min |
| 2. Utilizando todos los cuadriláteros formen un cuadrado y luego determinen su área. | Profesora muestra las fichas que se les entregará a las parejas.<br> | | 5 min |
| 3. Manipular las 4 fichas haciendo ensayo y error. | Profesora monitorea el trabajo, siendo un facilitador del conocimiento, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos. | Los posibles cuadrados construidos por los grupos son:<br><br>El área del cuadrado es $a^2 + 2a + 1$<br>○ Los estudiantes no logran construir un cuadrado dadas las fichas.<br>○ Estudiantes no logran determinar el lado.<br>○ Estudiantes no aplican propiedad distributiva. | 10 min |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. Mostrar tarea 2.<br><br>Profesora entrega a cada grupo un cuadrado de color rojo con medida de lado *a* cuatro cuadrados rosados de lado 1 y cuatro rectángulos cafés de lados $a$ y $1$.<br><br>Nuevamente utilizando todas las piezas, se les indica que formen un cuadrado y luego determinen su área. | Profesora muestra las fichas que se agregarán a las ya entregadas en tarea parte 1.<br><br>Se agregan 4 fichas de: <br><br>Y 4 fichas de: <br><br>Profesora monitorea el trabajo de los estudiantes, siendo un facilitador del conocimiento. Realiza contra preguntas para que los estudiantes puedan desarrollar la tarea matemática, observando las estrategias y resultados que surgen de los grupos.<br><br>Es importante que la docente identifique las posibles estrategias que utilizan los estudiantes, para luego exponerlas en el plenario.<br><br>✓ **Si de las dos estrategias esperadas, los estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:**<br>La profesora hace explícito en la pizarra los lados de los cuadriláteros menores, de manera que el estudiante identifique la suma de los lados menores como el lado mayor del cuadrado.<br><br>✓ **Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:**<br>Profesora: - ¿Cómo establecieron que el área es $a^2 + 4a + 4$?.<br>Profesora pide a los estudiantes que indiquen cómo obtuvieron el lado $a + 2$. | En esta actividad, los posibles cuadrados construidos son:<br><br><br>Estudiantes: - El área del cuadrado es $a^2 + 4a + 4$<br><br>○ Los estudiantes no logran construir un cuadrado dadas las fichas.<br><br>○ No logran identificar más de una estrategia.<br><br>○ Estudiantes no logran determinar el lado.<br><br>○ Estudiantes no aplican propiedad distributiva.<br><br>Estudiante: - Por el producto de $(a + 2)$ por $(a + 2)$<br><br>Estudiante: Identifica la operación de adición para obtener el lado y así, aplicando propiedad distributiva, determinar el área del cuadrado. | 20 min. |
| 5. Plenario<br><br>Los estudiantes presentan los cuadrados que construyeron y las estrategias que utilizaron para determinar el área de cada uno de ellos. | Profesora según lo que observó, selecciona a los grupos que salen a la pizarra.<br><br>Se expone en la pizarra las estrategias y cuadrados que formaron los estudiantes en la actividad.<br><br>Profesora: - Encontraron más de una forma de construir el cuadrado usando las 4 y 9 fichas. ¿Qué tiene en común todos estos cuadrados? | Estudiantes: - Es la misma área. | 20 min |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ¿Qué estrategias utilizaron para determinar el área?<br><br>Profesora: - ¿Qué ocurre con las estrategias utilizadas? | Estudiantes: - Lado mayor al cuadrado y suma de las áreas menores.<br>Estudiantes: - Dan el mismo resultado. | |
| 6. Concluir igualdades en los procedimientos. | Profesora realiza lo siguiente en la pizarra:<br><br>$(a+2)^2$ / $(a+2)\cdot(a+2)$ / $a^2+2a+2a+4$ / $a^2+4a+4$ \| $a^2+2a+2a+4$ / $a^2+4a+4$<br><br>Luego concluyen que:<br>$(a+2)^2 = a^2+4a+4$<br><br>Es decir, el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadriláteros que lo componen.<br><br>Escribir en pizarra los nuevos datos de las fichas. | | 5min. |
| 7. Mostrar tarea 3<br><br>Con los mismos cuadriláteros de la tarea 1, se pide que determinen el área del cuadrado formado por ellos, pero ahora con nuevas medidas: cuadrado color rojo de lado $\boldsymbol{a}$, cuadrado color rosado de lado $\boldsymbol{b}$ y rectángulos cafés de lados $\boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{b}$. | Retomar los cuadriláteros por grupo y determinar el área del cuadrado que se puede formar con 4 cuadriláteros (un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$ y dos rectángulos de lado $\boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{b}$)<br><br>Observar si utilizan las estrategias utilizadas anteriormente.<br><br>Se expone en la pizarra las estrategias y resultados de los estudiantes.<br><br>Profesora: - Según lo trabajado anteriormente ¿qué ocurre con estos resultados?<br><br>Se concluye que:<br>$(a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ab+b^2$ | Posibles respuestas<br><br>$(a+b)\cdot(a+b)$<br>y/o<br>$a^2+ab+ab+b^2$<br><br>**Posible dificultad**: no establecen relación de actividad anterior a esta nueva tarea (algebraica).<br><br>Estudiantes: - Son iguales. | 12 min |
| 8. Institucionalización<br><br>Docente muestra en la pizarra cuatro cuadriláteros como en la tarea 1.<br><br>Un cuadrado rojo de lado $\boldsymbol{a}$, un cuadrado rosado de lado $\boldsymbol{b}$ y dos | Profesora vuelve a escribir en la pizarra los resultados de las tareas anteriores en una tabla comparativa: | Estudiantes: - Todos tienen un $a^2$. | 10 min. |

<table>
<tr>
<td>rectángulos cafés de lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.</td>
<td>
<table>
<tr><td>Tarea 1</td><td></td><td>$a^2$</td><td>$a \cdot 1 + a \cdot 1$<br>= 2(a)</td><td>$1^2$</td></tr>
<tr><td>Tarea 2</td><td></td><td>$a^2$</td><td>$a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1$<br>= 2(2a)</td><td>$2^2$</td></tr>
<tr><td>Tarea 3</td><td></td><td>$a^2$</td><td>$ab + ab$<br>= 2(ab)</td><td>$b^2$</td></tr>
</table>
Una vez que los estudiantes logran determinar la regularidad, se les explicita que esta recibe el nombre de cuadrado de binomio y la relación que tiene con geometría.<br><br>
Para corroborar que alumnos entienden igualdad, profesora plantea el siguiente cuadrado de binomio: $(3 + b)^2$.<br><br>
Profesora: - ¿Cuál es el desarrollo de este cuadrado de binomio?
</td>
<td>Estudiantes: - Tres al cuadrado más seis $b$ más $b^2$. El tres al cuadrado es nueve.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

**Análisis a priori plan de clases 2.**

Como parte de la organización en la instrucción matemática, Gómez (2007) plantea un procedimiento ideal para lo que denomina el análisis didáctico, entendiendo esto último como una forma en que el profesor estudia las implicaciones al abordar temas matemáticos para efectos del diseño y desarrollo curricular.

Dentro del análisis didáctico, se tomarán elementos y procedimientos del análisis cognitivo. En este análisis "*el profesor describe su hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje."* (Gómez, 2007), así, con el fin de detectar las estrategias que surjan de los estudiantes ante la tarea propuesta, se desarrolla un Análisis a Priori.

Para el Análisis a Priori se describen los siguientes puntos por cada una de las tres tareas:

- Respuesta experta: Lo que el estudiante debería responder, teniendo en cuenta sus conocimientos previos.

- Posibles estrategias de los estudiantes: Lo que el estudiante podría responder desde su experiencia. No necesariamente coincide con la respuesta experta.

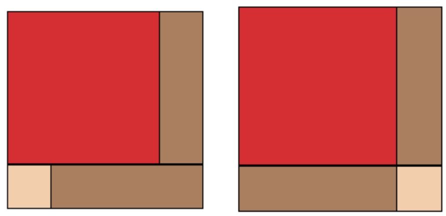
- Posibles dificultades: Frente al desarrollo de la tarea, las dificultades del conocimiento matemático que lleven a estudiante a una respuesta errónea.

- Devoluciones: A partir de cada una de las dificultades, describir las devoluciones que el docente plantearía para volver a integrar al estudiante al grupo de trabajo.

***Tarea parte 1.***

*Utilizando todos los cuadriláteros (un cuadrado color rojo de lado a, un cuadrado rosado de lado 1 y dos rectángulos cafés de lados a y 1) formar un cuadrado y luego determinen su área.*

<u>Respuesta experta</u>
El cuadrado se puede construir de las siguientes dos maneras:



En cualquiera de los dos casos el área del cuadrilátero se puede determinar como

- Suma de las áreas menores: $a^2 + 2a + 1$.
- Base por altura del cuadrado $(a+1)^2$.

<u>Posibles estrategias de los estudiantes</u>

- Con una regla de medir, determinar el lado de cada figura numéricamente para luego calcular su área. Aun cuando se les haya indicado las medidas de las fichas.
- No considerar el área 1 como parte de la solución, y responder que el área del cuadrado es $a^2 + 2ab$.
- Considerar solo uno de los rectángulos para la suma de las áreas menores, o no reducir términos semejantes: $a^2 + ab + 1$.

<u>Posibles dificultades</u>
a) Confundir el concepto de área con el de perímetro.
b) No recordar operatoria de multiplicación de monomios. Suelen decir $a \cdot a = 2a$.
c) No recordar operatoria de multiplicación de binomios, en este caso para $(a+1) \cdot (a+1)$.
d) Que no se logre deducir el área mediante dos estrategias.

<u>Devoluciones</u>
a) Ante la dificultad a), explicitar lo pedido como la superficie del cuadrado formado por las fichas.
b) Ante la dificultad b), retomar propiedades de potencias de en la unidad anterior: multiplicación de potencias de igual base o igual exponente $a \cdot a = a^{1+1} = a^2$.
c) Ante la dificultad c), retomar propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición $a(b+c) = ab + bc$ para luego recordar multiplicación de binomios.
d) Ante la dificultad d), en plenario, En caso de que no logren trabajar con ambas estrategias:

Si de las dos estrategias esperadas, los estudiantes sólo logran determinar el área como la suma de las áreas menores:

> El profesor hace explícito en pizarra los lados de los cuadriláteros menores, de manera que el alumno identifique la suma de los lados menores como el lado mayor del cuadrado.

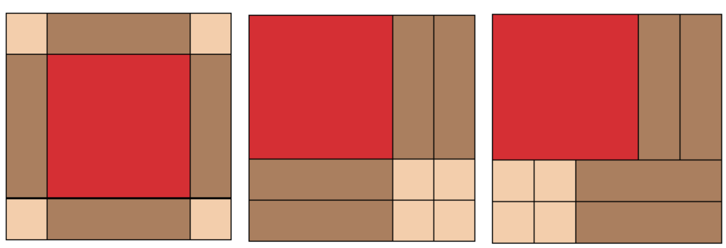
Sí de las dos estrategias esperadas sólo logran determinar el área como el lado (del cuadrado mayor) al cuadrado:

> Profesora: “¿Cómo establecieron que el área es $(a+1)^2$?”.
> Estudiantes responden que por el producto de $(a+1)$ por $(a+1)$.
> Al mismo tiempo que pregunta por los lados menores a y 1, la profesora manipula las fichas de cuadriláteros en pizarra para separarlos entre sí y explicitar el área de cada uno de estos cuadriláteros.

***Tarea parte 2.***

*Utilizando todos los cuadriláteros (un cuadrado color rojo de lado a, 4 cuadrados rosados de lado 1 y 4 rectángulos cafés de lados a y 1) formar un cuadrado y luego determinen su área.*

<u>Respuesta experta</u>
El cuadrado se puede construir de las siguientes maneras:



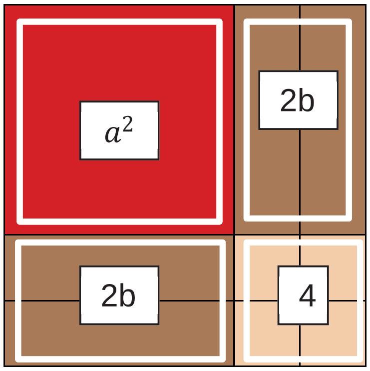
En cualquiera de los casos el área del cuadrilátero se puede determinar como

- Suma de las áreas menores: $a^2+4a+4$.
- Base por altura del cuadrado $(a+2)^2$.

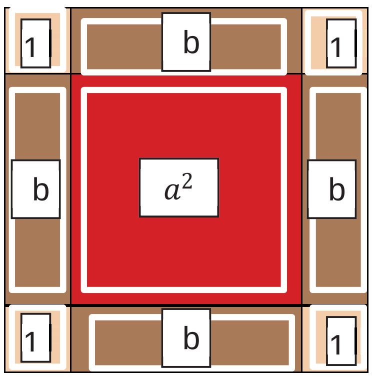
<u>Posibles estrategias de los estudiantes</u>

- Dado que la tarea 1 tenía 5 fichas menos, determinan el área de estas 5 fichas y se las agregan al área obtenida en la tarea 1.
- Con una regla de medir, determinar el lado de cada figura numéricamente para luego calcular su área. Aun cuando se les haya indicado las medidas de las fichas.
- Considerar en el cálculo de las áreas de los cuadriláteros agrupados según se observe en su construcción:

En este caso, determinando el área de los cuatro cuadrados de lado 1 a la vez, y los rectángulos de dos en dos como se muestra en la figura:




En el siguiente caso, la construcción no permite a simple vista agrupar, y podrían determinar todas las áreas por separado:




<u>Posibles dificultades</u>

- Considerando que las posibles dificultades que podrían presentarse en la tarea 1, no debiesen repetirse en la tarea 2 luego de la devolución de la profesora, la nueva dificultad que podría surgir de la tarea 2 es la imposibilidad de conectar lo logrado en la tarea 1, es decir, mirar este ejercicio como algo nuevo y no hacer una conexión entre las estrategias ya trabajadas.

<u>Devolución</u>

- Ante la dificultad, trabajar con los grupos que no conecten lo aprendido en la tarea 1 de manera más personal. Retomando la tarea 1 y agregando al cuadrado $(a+1)^2$ una a una las fichas que completan el cuadrado de la tarea 2. Así, a medida que se van agregando fichas preguntar: ¿cuál es el área de esta nueva pregunta?

***Plenario.***

*Los estudiantes presentan los cuadrados que construyeron y las estrategias que utilizaron para determinar el área de cada uno de ellos.*

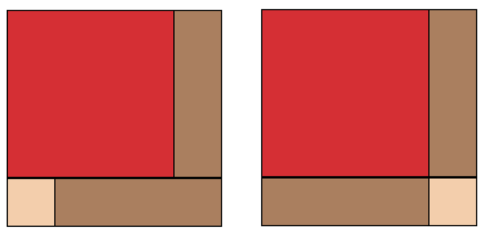
- Posibles respuestas, dificultades y devoluciones corresponden a las ya mencionadas según la tarea 1 y 2.

***Tarea parte 3.***

*Con los mismos cuadriláteros de la tarea 1, se pide que determinen el área del cuadrado formado por ellos, pero ahora con nuevas medidas: cuadrado color rojo de lado a, cuadrado color rosado de lado b y rectángulos cafés de lados a y b.*

Respuesta experta

El cuadrado se puede construir de las siguientes dos maneras:



En cualquiera de los dos casos el área del cuadrilátero se puede determinar como

- Suma de las áreas menores: $a^2 + 2ab + b^2$.
- Base por altura del cuadrado $(a + b)^2$.

Posibles estrategias de los estudiantes

- Para determinar el área cambian el valor de 1 de la tarea 1 por b, obteniendo $(a + b)^2$.
- Al igual que en la tarea 1 determinan el valor de cada área, suman estas áreas y reducen términos semejantes.
- Como ya se han compartido las estrategias en el plenario, utilizan los dos métodos para obtener el área.

***INSTITUCIONALIZACIÓN.***

Dificultades

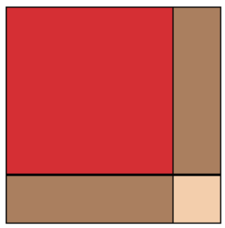
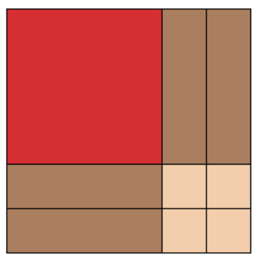
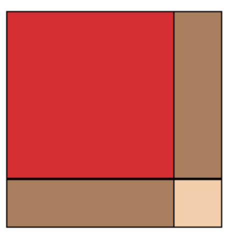
Para formalizar el concepto de cuadrado de binomio es necesario que los estudiantes comprendan que ambas estrategias llegan al mismo resultado de área. Una posible dificultad podría surgir al momento de hacer la igualdad entre estas dos estrategias, donde a pesar de que se demostró que ambos caminos resultan lo mismo, no logren generalizar a través del algebra.

Devolución

Ante la dificultad, y durante la institucionalización es importante conectar las tres tareas trabajadas mediante un cuadro comparativo, dando énfasis a la forma algebraica de las áreas obtenidas, es decir, la misma cantidad de términos, dos cantidades al cuadrado y términos semejantes.

Tabla 1

Cuadro comparativo para Institucionalización

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tarea 1 |  | $a^2$ | $a \cdot 1 + a \cdot 1$ = 2(a) | $1^2$ |
| Tarea 2 |  | $a^2$ | $a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1$ = 2(2a) | $2^2$ |
| Tarea 3 |  | $a^2$ | $ab + ab$ = 2(ab) | $b^2$ |

**Clase 3**

SOBRE EL TEMA

Durante el transcurso de la tarea se espera que los estudiantes trabajen el mismo tipo de problema, pero ahora en tres dimensiones.

Ya han estudiado el área de cuadrados y rectángulos como una forma de transitar de la representación algebraica a la geométrica, ahora, trabajaran con cuerpos geométricos como cubos y prismas para construir un cubo. Este cubo, compuesto por cuerpos más pequeños darán forma al cubo de binomio, uno de los productos notables que se estudia en primer año medio.
En las clases anteriores, el tema de productos notables se trabajaba en el plano y con relación al área, en esta clase el tema introduce la relación del volumen con las operaciones algebraicas, lo que situará al estudiante en un medio que lo obliga a pensar espacialmente para dar solución al problema.

OBJETIVO DE LA CLASE

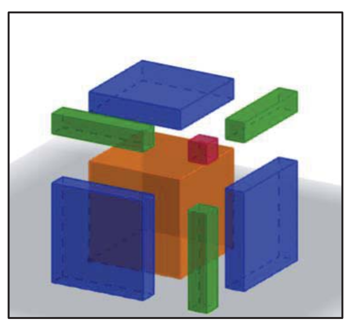
El objetivo es: Determinar la regularidad del desarrollo del cubo de binomio.

Para la presentación del objetivo en clase, y mantener la expectación ante la tarea, el objetivo será planteado como:
*Construir un cubo y determinar su volumen.*

DESARROLLO DE LA CLASE
Con respecto a los símbolos:

- ○ Será estrategia del estudiante
- • Será dificultad del estudiante
- ✓ Será devolución del profesor

Materiales complementarios:

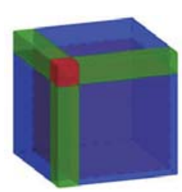


Set por grupos con cuerpos geométricos que componen el cubo de binomio (dos tamaños distintos)
1) Cuyos lados de los cuadrados sean 4 y 5 cm.
2) Cuyos lados de los cuadrados sean 5 y 8 cm.

## Plan de clase 3.

| Tarea matemática | Rol del profesor | Rol estudiante | Tiempo |
|---|---|---|---|
| **0**. Se da a conocer el objetivo de la clase. | Escribir en pizarra según organización.<br><br>Construir un cubo y determinar su volumen. | Se disponen en grupos de 4. | 5min. |
| **1.** Exponer tarea matemática 1. | Repartir set 1 de cuerpos por grupo indicando solo dos medidas:<br><br>Lado del cuadrado más grande es 5 cm y el lado del cuadrado pequeño es 4 cm.<br>Explicar tarea: Construir un cubo con todos los cuerpos geométricos y luego determinar su volumen. | Atienden a las instrucciones que expone la profesora. | 5min. |

Para referirse a los cuerpos durante la clase, se referirá a su color:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2.** Desarrollo tarea 1. | Guiar el trabajo observando al menos unos 3 minutos por grupo:<br><br>- Cautelar que no ocupen regla de medir (la idea es que determinen las dimensiones de los cuerpos azueles y verdes).<br>- Si determinan rápidamente la construcción del cubo, incentivar a resolver la tarea: Determinar el volumen de esta figura.<br><br>✓ Sin intervenir en el desarrollo de la tarea, evaluar el proceso observando los apuntes que hagan en sus cuadernos. En caso de que no tengan apuntes, pedirles que expliquen lo que han trabajado. | ○ Construyen el cubo calzando medidas entre los cuerpos. Por ejemplo:<br><br><br><br>○ Determinan el área de cada figura:<br>Estrategia 1: determinan el lado del cubo, el resultado lo elevan a 3.<br><br>Lado del cubo: $5+4=9\ cm.$<br><br>$9^3 = \mathbf{729}cm^3$ | 20 min. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ✓ Preguntar: - ¿Qué diferencia tienen estas figuras con las trabajadas en clases anteriores? ¿podríamos determinar el volumen de una figura plana? ¿por qué podemos determinar el volumen en esta tarea?, ¿qué es el volumen? | Estrategia 2: sumar los volúmenes que conforman la figura.<br>Volumen cuerpo naranjo: $5^3 = 125\ cm^3$<br>3 volúmenes cuerpo azul: $3 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 4) = 300\ cm^3$<br>3 volúmenes cuerpo verde: $3 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 4) = 240 cm^3$<br>Volumen cuerpo rosa: $4^3 = 64\ cm^3$<br>Suma de los volúmenes: $125 + 300 + 240 + 64 = \mathbf{279} cm^3$<br>• No logran aplicar conocimientos previos sobre volumen.<br>Se espera que los estudiantes recuerden el concepto de volumen identificando las tres variables en el espacio. | |
| **3.** Explicación tarea 2 | Repartir set 2 de cuerpos por grupo indicando solo dos medidas:<br>Lado del cuadrado más grande es 8 cm y del cuadrado pequeño es 5 cm. (mismos colores).<br>Explicar tarea: Construir un cubo con todos los cuerpos geométricos y luego determinar su volumen. | Atienden a la explicación de la tarea 2 y reciben set 2 de cuerpos. | 5 min |
| **4.** Desarrollo tarea 2. | Se evalúa el proceso de esta tarea identificando cuáles son las estrategias que más se repiten entre los grupos, qué procedimientos consideran más rápido para llegar al resultado, y como intercambian información. | ○ Construyen cubo con todas las fichas, se espera que estas oportunidades sean más rápidos, dada la similitud con la tarea anterior.<br>○ Continúan trabajando la misma estrategia que en tarea 1, esta vez con distintas medidas (y mayores a tarea 1).<br>Determinan el área de cada figura:<br>Estrategia 1: determinan el lado del cubo, el resultado lo elevan a 3.<br>Lado del cubo: $5 + 8 = 13\ cm.$<br>$13^3 = \mathbf{2.197}\ cm^3$ | 20 min |

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

<u>Estrategia 2:</u> sumar los volúmenes que conforman la figura.

| | |
|---|---|
| Volumen cuerpo naranjo: | $8^3 = 512\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo azul: | $3 \cdot (8 \cdot 8 \cdot 5) = 960\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo verde: | $3 \cdot (8 \cdot 5 \cdot 5) = 600\ cm^3$ |
| Volumen cuerpo rosa: | $5^3 = 125\ cm^3$ |
| Suma de los volúmenes: | $512 + 960 + 600 + 125 = \mathbf{2197} cm^3$ |

</td><td></td></tr>
<tr><td>

**5.** Comprobación

</td><td>

✓ Se les pide que determinen el volumen total de los tres prismas azules, si los lados de los cubos son 10 y 12.

✓ Se les pide que indiquen la medida del lado del cubo que conforman todos los cuerpos.

✓ ¿Cuál es el volumen de un cubo mayor si el prisma verde posee dimensiones 7 y 1?

✓ Cuál es el volumen del cuadrado si las dimensiones del prisma azul son ***a*** y ***b.***
En caso de no surgir las dos estrategias, retomar en institucionalización.

</td><td>

- En caso que los grupos estén utilizando la segunda estrategia obtendrían inmediatamente el volumen pedido, pero a aquellos que usaron la estrategia 1 estarán obligados a sacar el volumen del prisma por sí solo.
- En caso que los grupos estén utilizando la primera estrategia, obtendrán inmediatamente el lado como la suma 10+12, sin embargo, los que usaron estrategia 2, estarán obligados a repensar la tarea.
- Los grupos tendrán que validar sus estrategias para comprobar que:

  Se pueden sumar las dimensiones y elevar a 3. Esto porque identifican que las medidas de los cubos coinciden con una cada una con las dimensiones del prisma.
- Los estudiantes repiten las estrategias y concluyen que el volumen sería $(a + b)^3$.
  También podrían responder $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

- En el volumen de los prismas para dimensiones ***a*** y ***b***, no encuentran diferencia en la expresión.

</td><td>25 min</td></tr>
</table>

✓ Dibujar en pizarra los dos prismas y preguntar sobre las diferencias que poseen, la cantidad de aristas correspondientes a uno u otra dimensión hace que el cuerpo tenga otra forma.

✓ Mostrar algebraica y numéricamente que en cualquiera de los casos $(a+b)^3$ o $(b+a)^3$ resultan los mismos cuerpos geométricos con los mismo volúmenes. Mostrar que se cumple la conmutatividad de la suma.

Pedirles que construyan a modo de resumen una tabla con la siguiente información

- Consideran que su cálculo es erróneo si se considera como primer término el mayor.

| Lados de cubos | Lado del cuadrado mayor | Volumen total del cubo | Volúmenes de los cuerpos que conforman el cubo  |
|---|---|---|---|
| 4 y 5 cm | 9 cm | 729 cm$^3$ | 64 100 100 100 80 80 80 125 |
| 5 y 8 cm | 13 cm | 2197 cm$^3$ | 25 320 320 320 200 200 200 512 |
| a y b | $a+b$ | $(a+b)^3$ | $a^3$ $a^2b$ $a^2b$ $a^2b$ $ab^2$ $ab^2$ $ab^2$ $b^3$ |

✓ Preguntar a los grupos: ¿cómo determinarían los volúmenes de cada cuerpo que conforma un cuadrado de lado $2+b$?.

**6.** Institucionalización

Preguntar:

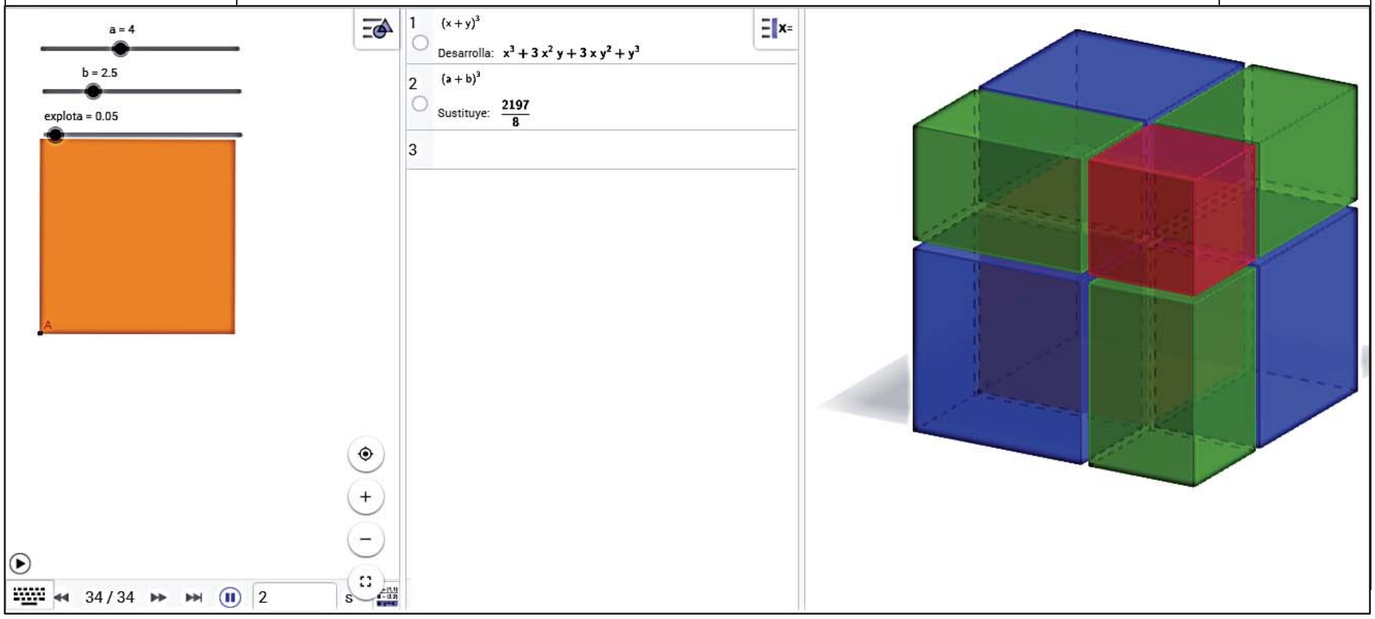
- ¿De cuantas formas podemos determinar el volumen del cubo?
- En la segunda columna ¿qué tienen en común los cuatro ejemplos?
- En la tercera columna ¿qué tienen en común los cuatro ejemplos?

Presentar el producto notable como una regularidad que se cumple en todos los ejemplos numéricos vistos.

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2.$$

10 min

| | | |
|---|---|---|
| | Para finalidad utilizar Geogebra, y proyectar un cuadrado binomio desde el cuál se puede observar como varían las dimensiones de los cuerpos, pero no la regularidad: | |



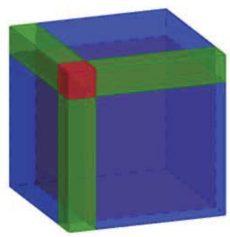

[2] https://www.geogebra.org/m/pfJCrGnc

**Análisis a priori plan de clases 3.**

***Respuesta experta.***

En Tarea 1:

Construyen el cubo calzando medidas entre los cuerpos. Por ejemplo:



<u>Estrategia 1:</u> determinan el lado del cubo, el resultado lo elevan a 3.

Lado del cubo: $5+4=9\ cm$.

$$9^3=\mathbf{729}cm^3$$

<u>Estrategia 2:</u> sumar los volúmenes que conforman la figura.

| | |
|---|---|
| Volumen cuerpo naranjo: | $5^3=125\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo azul: | $3\cdot(5\cdot 5\cdot 4)=300\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo verde: | $3\cdot(5\cdot 4\cdot 4)=240cm^3$ |
| Volumen  cuerpo rosa: | $4^3=64\ cm^3$ |
| Suma de los volúmenes: | $125+300+240+64=\mathbf{279}cm^3$ |

En Tarea 2:

<u>Estrategia 1:</u> determinan el lado del cubo, el resultado lo elevan a 3.

Lado del cubo: $5+8=13\ cm$.

$$13^3 = \mathbf{2.197}\ cm^3$$

<u>Estrategia 2:</u> sumar los volúmenes que conforman la figura.

| | |
|---|---|
| Volumen cuerpo naranjo: | $8^3 = 512\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo azul: | $3\cdot(8\cdot 8\cdot 5) = 960\ cm^3$ |
| 3 volúmenes cuerpo verde: | $3\cdot(8\cdot 5\cdot 5) = 600\ cm^3$ |
| Volumen  cuerpo rosa: | $5^3 = 125\ cm^3$ |
| Suma de los volúmenes: | $512+960+600+125 = \mathbf{2197} cm^3$ |

En tabla resumen:

| Lados de cubos | Lado del cuadrado mayor | Volumen total del cubo | Volúmenes de los cuerpos que conforman el cubo  |
|---|---|---|---|
| 4 y 5 cm | 9 cm | 729 cm$^3$ | 64 100 100 100 80 80 80 125 |
| 5 y 8 cm | 13 cm | 2197 cm$^3$ | 25 320 320 320 200 200 200 512 |
| a y b | $a+b$ | $(a+b)^3$ | $a^3$ $a^2b$ $a^2b$ $a^2b$ $ab^2$ $ab^2$ $ab^2$ $b^3$ |

***Posibles estrategias.***

- Determinan el área de cada figura con las estrategias señaladas en respuesta experta y completan la tabla según se indicó.
- Con una regla de medir, determinar el lado de cada prisma para luego calcular su volumen, sin manipular los cuerpos de modo de descubrir que poseen algunas dimensiones con la misma medida de los cuadrados.
- Son capaces de responder a la tarea 2 sin el apoyo de los cuerpos geométricos, sino que basándose en el procedimiento de la tarea 1.
- Considerar inmediatamente la suma de los tres prismas en la tabla resumen.
- En la tabla identifican una regularidad entre los números y las letras al cubo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{4^3}$ | 100 | 100 | 100 | 80 | 80 | 80 | $\mathbf{5^3}$ |
| $\mathbf{5^3}$ | 320 | 320 | 320 | 200 | 200 | 200 | $\mathbf{8^3}$ |
| $\boldsymbol{a^3}$ | $a^2b$ | $a^2b$ | $a^2b$ | $ab^2$ | $ab^2$ | $ab^2$ | $\boldsymbol{b^3}$ |

***Dificultades.***

a) Para el cálculo del volumen utilizan dos y no tres factores, confundiendo con área.
b) En el volumen de los prismas para dimensiones **a** y **b**, no encuentran diferencia en la expresión.
c) Consideran que su cálculo es erróneo si se considera como primero término el mayor.

***Devoluciones.***

a) Ante la dificultad sobre la concepción del volumen, preguntar: ¿qué diferencia tienen estas figuras con las trabajadas en clases anteriores? ¿podríamos determinar el volumen de una figura plana? ¿por qué podemos determinar el volumen en esta tarea?, entonces, ¿qué es el volumen?

b) Dibujar en pizarra los dos prismas y preguntar sobre las diferencias que poseen, la cantidad de aristas correspondientes a uno u otra dimensión hace que el cuerpo tenga otra forma:

$ab^2$

$a^2b$

c) Mostrar algebraica y numéricamente que en cualquiera de los casos $(a+b)^3$ o $(b+a)^3$ resultan los mismos cuerpos geométricos con los mismos volúmenes. Mostrar que se cumple la conmutatividad de la suma.

**Matemática en juego.**

Se espera que los estudiantes, una posible implementación, apliquen sus conocimientos previos asociados al concepto y cálculo del volumen, así como la experiencia de las clases anteriores. La línea de la presente secuencia didáctica sitúa al estudiante en medios similares para distintas tareas. Las regularidades le hacen transitar de una representación geométrica a una algebraica, por lo que la operatoria básica es un conocimiento precio, solo que ahora sobra sentido.

El cubo de binomio, se entiende desde el saber sabio como parte de lo que Al-Karaji (953-1029**)** refiere a producto de monomio sin ninguna referencia a la geometría. Punto de partida que conocemos actualmente en nuestras escuelas.

La representación geométrica toma sentido cuando multiplicamos dos o tres factores, pero al momento de calcular $(a+b)^4$ o $(a+b)^5$ no tiene sentido utilizar un material concreto. El cubo de binomio, como su nombre lo indica, nos permitiría trabajar con un cubo, pero no sí un binomio a la cuarta o a la quinta. Estas expresiones cobrarán sentido cuando se asocien, en el nivel de cuarto medio, a una probabilidad binomial.

## Análisis a posteriori

Con la información recolectada de la grabación de la clase, la transcripción de esta (ver anexo 3), y los registros en los cuadernos de los estudiantes, se realiza el análisis del Plan de Clase 2 implementado.

Atendiendo al objetivo específico en relación al análisis, se comienza por detectar y describir las interacciones de los estudiantes con el medio y el profesor durante el desarrollo de la clase, en la que se diferenciarán la Acción, Formulación, Validación e Institucionalización bajo el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas. Esto nos permitirá, en una primera fase, construir una categorización que nos dé luces de momentos que se viven en la clase.

Para atender a las dificultades y modificaciones planteadas en el objetivo. Se agregan otras 2 fases, donde se analizan cada uno de estos aspectos.
Así, el proceso de análisis se clasifica en tres fases consecutivas con respecto al plan de clases y análisis a priori, cada una de ellas con su categorización.

### FASE I

Analizar por interacciones con el medio según TSD facilitará la detección de distintos tipos de dificultades en los estudiantes por la interacción que muestren en las fases de Acción, formulación y validación. Se categoriza según el tipo de interacción a modo de indicadores que nos permita identificar las fases en los distintos momentos del Plan de Clase.

Tabla 2

*Categorización de interacciones con el medio según TSD*

| Categorías | Subcategorías |
|---|---|
| $C_{1:}$ Acción | $C_{1.1}$ Manipulan material concreto<br>$C_{1.2}$ Utilizan conocimientos previos como área de cuadriláteros y operatoria algebraica |
| $C_2$: Formulación | $C_{2.1}$ Formulan y reformulan estrategias<br>$C_{2.2}$ El grupo intercambia información y aprueban sus estrategias |
| $C_3$: Validación | $C_{3.1}$ Comprueban la estrategia formulada<br>$C_{3.2}$ Son capaces de defender sus ideas |

FASE II

Localizar dificultades en el proceso del plan de clases y sus devoluciones basándonos en algunos elementos de los Registros de Representación descritos en el Marco Teórico. Se categoriza según las dificultades detectadas (para comunicar, para comprender el problema, obstáculos epistemológicos) en los distintos momentos de la clase, describiendo las devoluciones que permitieron al estudiante continuar con la actividad.

FASE III

Evaluar el plan de clases y su desarrollo. Los resultados permitirán evaluar el desarrollo del plan de clases para una nueva implementación, determinando las sugerencias, mejoras y todos los cambios que surjan de análisis anterior. Se consideran las siguientes categorías:

1) Cambios a partir de la primera implementación que surgieron efecto positivo en la clase.

- Recolección de la Información
- Material concreto
- Agrupamiento de estudiantes
- Temporalidad

2) Modificación del Plan de Clase.

- Herramientas del profesor
- Material concreto
- Interacciones

**Análisis de la implementación de la clase**

El análisis tiene por objetivo describir la clase implementada poniendo énfasis en las interacciones de los estudiantes al experimentar los momentos de cada tarea, se pretende identificar fases de la TSD en el aprendizaje del cuadrado de binomio, así como los distintos tipos de dificultades que surjan de su aprendizaje.

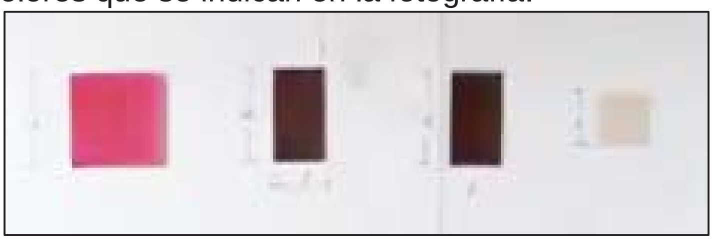
Además, se evaluará el Plan de Clase, considerando sus aportaciones al proceso de enseñanza, como sus posibles modificaciones para una posterior implementación.

**FASE I: Analizar por interacciones con el medio según TSD.**

***$C_1$ ACCIÓN.***

$C_{1.1}$ Manipulan material concreto

Existe material concreto a utilizar en las tareas, estos son cuatro fichas de goma eva, según los colores que se indican en la fotografía.



*Fotografía 1*. Fichas en pizarra.

En esta fase, los estudiantes reciben las instrucciones y materiales con los que van a trabajar, e inmediatamente comienzan a manipular las fichas para construir un cuadrado. La instrucción se da de la siguiente forma:

Profesora: - *"Primero les voy a entregar las siguientes fichas por grupo. Una ficha corresponde a un cuadrado, este cuadrado tiene lado **a**, luego les entregaré dos rectángulos de color café. Cada uno de estos rectángulos tiene como medida: largo **a** y ancho **1**, y finalmente les entregaré un cuadrado visiblemente más pequeño, y este cuadrado tiene lado 1. Todos los grupos ocuparán la misma medida."*
Dos ayudantes entregan a todos los grupos un cuadrado grande, dos rectángulos, y un cuadrado pequeño.
*"La tarea consiste en: Construir un cuadrado utilizando todas las fichas. Una vez que haya construido el cuadrado calcule el área de la figura que ha construido".*

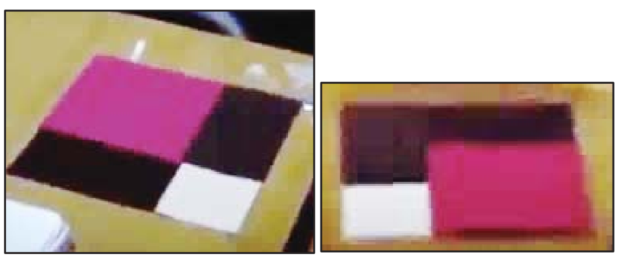
La instrucción muestra una situación donde las acciones emprendidas se efectúan bajo ciertos parámetros, las medidas de las fichas están pre establecidas y solo se puede armar un tipo figura, por lo que puede observarse un contrato sobre la acción, los estudiantes calculan el área de un cuadrado en la resolución de un problema, pero en este caso es el cálculo del área el que determina las acciones a seguir.

Por otro lado, y como los indica COPISI, el material favorece la comprensión de la suma de áreas, y se desarrolla la capacidad de hacer matemática porque la manipulación de las fichas tiene un protagonismo en la fase que fundamenta la comprensión del objeto matemático al término de la clase.

Se evidencia que el rol de acción no se ejerce forzosamente en la manipulación de las fichas, sino que, con una finalidad problematizada, esto supone un pensamiento de acción muy diferente a una manipulación guiada por el profesor. Existe una estrategia a seguir en el armado, guiado por la situación problema.
En las tareas 1 y 3, se observan dos construcciones para el cuadrado (ver fotografía 3), así también en la tarea 2, dos tipos de construcciones (fotografía 4).

Del registro audiovisual que se posee, un grupo construye el cuadrado de la tarea 2 sin desarmar el cuadrado ya hecho en tarea 1, solo agrega las fichas por alrededor, lo que manifiesta una comprensión instrumental de la situación.

*Fotografía 2*. Grupo de alumnas manipulando material concreto



*Fotografía 3*. Construcciones tarea 1 y 3

*Fotografía 4*. Construcciones tarea 2

C1.2 Utilizan conocimientos previos como área de cuadriláteros y operatoria algebraica

Los estudiantes poseen conocimientos previos sobre área de cuadriláteros y suma de segmentos, lo que los sitúa en el juego, haciendo uso de ellos.

- Antes de repartir las fichas para que comiencen a trabajar, la docente se asegura de que todos hallan entendido la tarea, de esta forma no habría interrupciones posteriores. Por ejemplo:

  Profesora: - *“¿Qué significa la medida de una superficie?”*
  Varios alumnos contestan, uno de ellos levanta la mano y dice: - *“El área”.*
  Profesora: - *“Entonces cuando me refiera a calcular la medida de la superficie estoy hablando del área”.*

  Extracto transcripción clase (anexo 3)

- Reconocen que un cuadrado es un cuadrilátero de ángulo interiores rectos y cuyos lados son iguales. Se evidencia en la construcción del cuadrado en tarea 1, 2 y 3.

- Aplican el procedimiento para determinar el área del cuadrado: lado por lado.

- Utilizan la multiplicación de polinomios para determinar el resultado de lado por lado. Por ejemplo, dentro de la tarea 1:

  Alumno: - *“Vamos a multiplicar binomio por binomio, el primero con el primero, el primero con el segundo, el segundo con el primero y el segundo con el segundo”*
  Profesora: “¿A qué correspondería este resultado?”
  Alumno: - *“Al área del cuadrado”.*

  Grupo 3; Extracto transcripción clase (anexo 3)

Se observa que la descripción de la multiplicación la posee memorizada, sin embargo, identifica los términos a multiplicar a medida que los nombra. Los conocimientos previos en operatoria algebraica hacen que la significancia del problema se desligue de lo geométrico.

## *C2 FORMULACIÓN.*

C2.1 Formulan y reformulan estrategias

Las tareas matemáticas 1 y 2, permite que los estudiantes determinen el área de dos figuras que parecieran no tener nada en común. Durante la implementación no se observa que algún alumno logre llegar inmediatamente al área total, es decir, repite los procedimientos de la tarea 1 en la tarea 2, pero no logra identificar que el fin es descubrir una regularidad. Así, por ejemplo, al preguntar en uno de los grupos:

Profesora: - “*¿Qué hiciste tú?”*

Alumno : - “*Saque las medidas de cada lado a+1 y a+1, y ahora voy a multiplicar.”*

Ya en la tarea 3, los estudiantes formulan rápidamente (en comparación al tiempo de las otras tareas) sus estrategias, evidenciándose en las interacciones como grupo; repiten procedimientos y actúan sin titubear.

De los 10 grupos, 9 dibujan las fichas en sus cuadernos y calculan. Un grupo toma un plumón y escribe en la mesa junto a las fichas:

*Fotografía 5*. Alumnos formulando estrategias

Todos los grupos logran obtener el área del cuadrado determinando el lado $(a+1)$ y multiplicando “binomio por binomio”:

$$(a+1)(a+1) = a^2 + a + a + 1$$

Luego, reduciendo términos semejantes:

$$a^2 + 2a + 1$$

Es importante destacar, que, hasta este punto, los estudiantes no logran formular una estrategia utilizando solo sus conocimientos previos en geometría.
Sus formulaciones terminan justificándose en una representación algebraica como es la multiplicación de polinomios.

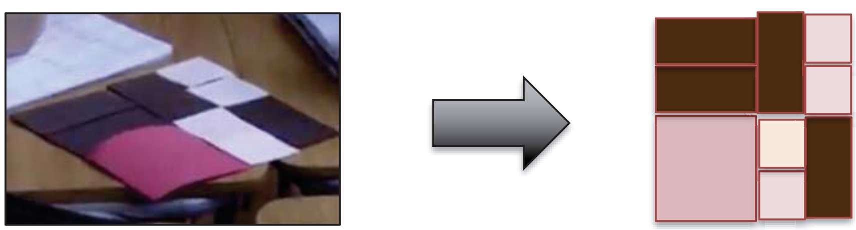
De los grupos de trabajo, se observa que uno tuvo que reformular sus estrategias para la tarea 1;

> Alumno: - “A*rmamos las fichas y nos dimos cuenta que el lado del cuadrado que se formo tiene medida $a^2$, porque es 1a por 1a.”*
>
> Profesora: - “*¿Cuánto dices tú que mide el lado?”*
>
> Alumno: - “*1a”*

Grupo 3; Extracto transcripción clase (anexo 3)

Este grupo, en particular, había formulado una estrategia en la que se utilizaba la multiplicación de polinomios, ahora, se observa que cambian el lado del cuadrado de $\mathbf{1+\boldsymbol{a}}$ a $\mathbf{1\boldsymbol{a}}$*.*

Durante la primera parte de la tarea, se evidencia un desarrollo igual a la tarea 1 en el cálculo del área, aun cuando, en el armado del cuadrado, uno de los grupos tiene la siguiente construcción en tarea 2:



*Fotografía 6.* Formulación

Si bien es cierto la construcción no es posible (porque nos queda la igualdad $a = 2$), los lados del cuadrado mayor de igual manera son $a+2$. El medio no le entrega información de su error, porque aun con ese orden de las fichas, pueden determinar el área sin problema. Sin embargo, como profesora, se observa este error cerca del medio de los estudiantes, no para corregirlos, sino para aprenderlos e identificarlos en una siguiente fase de validación. En este medio, a didáctico, el rol de la profesora ha sido incitar a los estudiantes a elaborar formulaciones, a través del lenguaje oral o escrito, que ponga de manifiesto la comprensión intuitiva de la situación planteada.

$C_{2.2}$ El grupo intercambia información y aprueban sus estrategias

Los estudiantes trabajan colaborativamente en el armado del cuadrado, intercambian las ideas que van surgiendo y se explican unos a otros los procedimientos que les lleva a un resultado del área.
En el registro audiovisual se observa que todos los grupos trabajan colaborativamente, pero que naturalmente hay un líder que guía el intercambio de estrategias al resto, proponiendo la suya en primer lugar. Cuando me acerco a hacer alguna pregunta al grupo, los integrantes del grupo dirigen su mirada al líder para que este responda, sin embargo, para comprobar que han intercambiado información se le pregunta a otro estudiante.

Se evidencia que aprueban sus estrategias, porque presentan su resultado final en nombre del parte del equipo, por ejemplo, en la siguiente situación, se pregunta explícitamente:

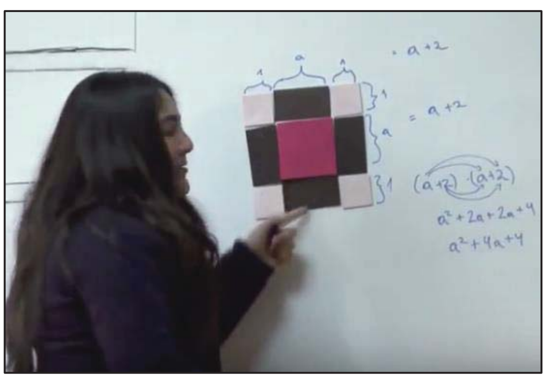
> Alumna: - *"Saqué el lado del cuadrado y después calculé el área, quedaría **a** al cuadrado más **b** al cuadrado más **ab"***
>
> Profesora*: - "¿Están de acuerdo todos los del grupo?"*
>
> Alumnos del grupo*: - "Sí".*

### *C2 VALIDACIÓN.*

<u>$C_{3.1}$ Comprueban la estrategia formulada</u>

En esta fase, las interacciones explicitan los conocimientos matemáticos de los estudiantes, y los procedimientos que los llevan a determinar el área, la organización de la clase permite que el estudiante se relacione con el medio justificando sus estrategias, conforme han sido formuladas en la fase anterior.

La validación se desarrolla en argumentos expresados por 4 estudiantes (1 para tarea 1, 2 para tarea 2 y 1 para tarea 3) previamente observados en la fase de formulación, y que en pizarra pegan sus fichas mostrando la construcción del cuadrado, para luego calcular el área de este cuadrado.
Vale decir, que la selección de los estudiantes es un tema profundizado en las siguientes categorías.




*Fotografía 6.* Plenario

Una vez en pizarra, el estudiante valida sus acciones en un medio que actúa como plenario. El resto del curso, interviene cuando un procedimiento no le convence. Así, por ejemplo, uno de los alumnos expectantes interviene para explicar su estrategia, está convencido que es distinta al de su compañera por tener una forma distinta de construcción:

Profesora: - “E*xplícanos qué fue lo que hiciste”*

Alumno: - *“Me di cuenta que la figura me quedo distinta pero que el área se va a calcular igual que mi compañera”*

Profesora: - *“¿Está de acuerdo el curso que es lo mismo?”*

Alumnos del curso: - *“sí…”*

Profesora: - *“¿Por qué dice que es lo mismo?”*

Alumno: - “*Porque la superficie es la misma”.*

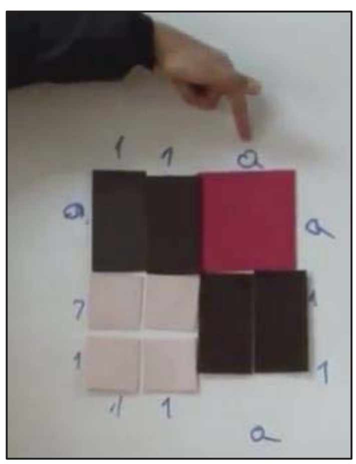
Así también, el resto de los estudiantes que escucha, aprovecha la circunstancia para validar sus propias acciones; es el caso del grupo que construye el cuadrado en forma errónea, se observa que mejoran la construcción, cuando en el plenario un alumno de otro grupo interviene por el tema de la posición de las fichas:

Alumno: - *“Y si los rectángulos se pusieran en forma vertical, no daría lo mismo”*

Profesora: - *“¿Qué pasaría si se pusieran vertical?”*

(Se mueven las fichas en forma vertical como se muestra en la fotografía).

Alumno: - *“No da”.*



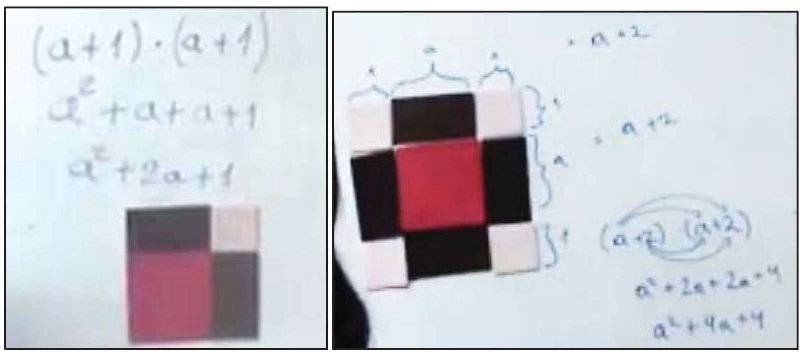

*Fotografía 7.* Fase de validación, posición de las fichas

En el caso de la tarea 3, no se observa una corrección de los procedimientos a partir del plenario, todos los grupos escriben en sus cuadernos $a^2 + 2ab + b^2$ . No presenta una dificultad para ellos porque antes, han validado las estrategias de la tarea 1 y 2.

C3.2 Son capaces de defender sus ideas

Como se había mencionado anteriormente, la única estrategia que surge desde la Formulación y que se evidencia en la Validación, es determinar el lado del cuadrado, sumando los segmentos que la componen, y luego multiplicando el lado por sí mismo.

En las fotografías que se muestran, se evidencia que el resultado es el mismo, pero que la forma de expresarse es distinta. En el caso de la derecha, la alumna defiende su idea por sustentarse en medidas que poseen las fichas (indicando con una llave a cuál corresponde cada una), y en la multiplicación de polinomios, agregando un dibujo que interpreta como la organización de la multiplicación, quiere mostrar que no falta ningún término.




*Fotografía 8.* Estrategia; lado por lado del cuadrado mayor.

Los estudiantes no solo pegan sus fichas en pizarra y escriben sus cálculos, sino que también defienden sus procedimientos, así, quien explica en pizarra se convierte en el emisor y el resto del curso es el que escucha e interviene en el emisor.

El curso toma el rol de oponente, ya que discute el procedimiento cuando este no consiste en:

1) Determinar el lado del cuadrado formado por las fichas.
2) Escribir los lados como una multiplicación que representa el área.
3) Multiplicar los binomios.
4) Reducir términos semejantes.

En este momento, se tiene especial cuidado para que el estudiante que esta adelante no se sienta atacado, manejando los turnos de habla de aquellos que desean dar su opinión.

La estrategia que no surge de la formulación es aquella en donde se determina el área de cada figura menor y luego se suman para representan el área de la figura mayor.

Ante esto, surge la siguiente situación:

Profesora: - “*Piense en una estrategia que sea distinta a polinomio por polinomio”*

Alumna levanta la mano: - “*Sacando el área de cada uno”*

Profesora: - “*Pase adelante a explicar, puede ser con las figuras de la actividad 1.*

Alumna: - “*Vamos a sacar el área de cada uno” (*comienza a llenar en pizarra los lados de todas las fichas)

Profesora: “¿E*stamos de acuerdo con todas las medidas de las áreas?”*

Alumnos del curso: - *“¡No!”* (compañeras del grupo le indican que hay un error en una de las medidas)

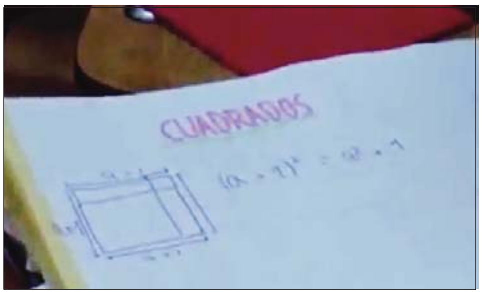
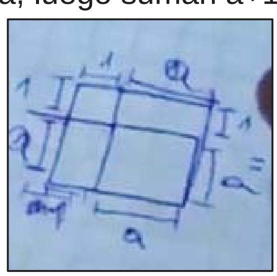
Alumna, soluciona el error y prosigue: - *“Sacamos el área de cada una, a por 1, a por a, 1 por 1.”*

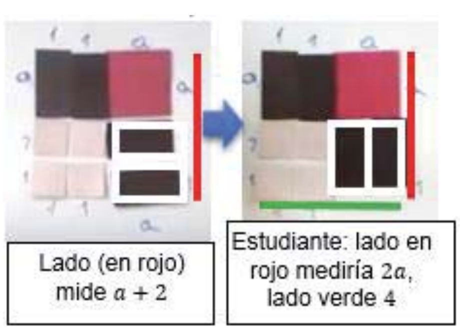
Se evidencia el proceso de adaptación, en el que los estudiantes son capaces de defender ideas que están en proceso de formación. La estudiante menciona una estrategia que acaba de formular y es capaz de validarla indicando cada una de las áreas que componen el cuadrado.

Por otro lado, cómo esta situación de validación pone en juego los conocimientos consolidados, el curso ya conoce como se determinan las medidas de cada ficha, y son capaces de identificar el error de su compañera.

Y, por último, cómo la docente enfrenta a los estudiantes con situaciones que no pasen inadvertidas dentro de una validación. Esta fase da pie a la institucionalización del cuadrado de binomio, por lo tanto, se aclaran los problemas planteados entre todos los participantes.

**FASE II: Localizar dificultades en el proceso del plan de clases y sus devoluciones.**

| **Momento de la clase** | **Dificultades** | **Devoluciones** |
|---|---|---|
| Tarea parte 1 | 1) Alumna escribe<br>$(a+1)^2 = a^2 + 1$<br> | Durante plenario, estudiante que anteriormente mostró esta dificultad, ahora explica a sus compañeros otra estrategia, calcula el área de cada cuadrilátero, reconoce que es un procedimiento distinto, pero con el cual se llega al mismo resultado. |
| | 2) Uno de los grupos escribe el lado como **1a** no **1+a**. | **Devolución**:<br>¿Qué área tiene la ficha en rojo?<br><br>Alumno: “$a^2$”<br>Profesora: *“Y ¿qué área tiene la figura mayor?”*<br>Alumno: “*También* $a^2$*, pero no puede ser lo mismo”.*<br><br>Se espera hasta llegar a plenario para corroborar sus estrategias. |
| | 3) Los estudiantes solo identifican el área como lado por lado.<br>El dibujo demuestra el manejo de la información.<br>Ubican los datos de los lados en la figura, luego suman a+1.<br> | Profesora: “*¿Existe una estrategia distinta?*”<br><br>Estudiantes responden segunda estrategia según lo expuesto en la primera dificultad de esta tabla. |

| | | |
|---|---|---|
| Tarea parte 2 | 4) Al igual que en dificultad anterior, los estudiantes logran determinar solo una de las dos estrategias; lado por lado:<br>$(a+2)(a+2)$<br>$= a^2 + 2a + 2a + 4$<br><br>Luego, reduciendo términos semejantes:<br>$a^2 + 4a + 4$ | Ídem para devolución de dificultad número 3.<br><br>Al finalizar la institucionalización, y con la finalidad de comprobar la devolución del plenario, se pregunta:<br><br>- “*¿Cómo desarrollamos* $(3+b)^2$*?”.*<br><br>La respuesta de los alumnos apunta a lo esperado:<br>$9 + 6b + b^2$. |
| Plenario | 5) Las fichas no representan la relación entre las medidas de sus lados.<br><br>Durante el plenario, estudiante pregunta:<br><br>- “Si las fichas de la tarea 2 se giran, el lado ya no sería el mismo”<br><br> | Se utilizan las fichas en pizarra para explicar.<br><br>1.- Las fichas que se disponen como en la figura de la derecha no calzan exactamente en la figura (por lo que no formaría un cuadrado).<br><br>2.- La instrucción es construir un cuadrado, por lo tanto, no podemos trabajar con una figura así al no tener todos sus lados de igual medida. |

**FASE III: Evaluar el plan de clases y su desarrollo.**

A partir de la primera implementación de esta clase, y considerando que este trabajo se hace a partir de la segunda implementación, se profundiza a continuación algunos aspectos a mejorar a partir de esa primera clase.

- Se observa que la disposición de los alumnos fue colaborativa aun cuando la indicación no incluía trabajar en equipo. Se modifica la disposición con que los estudiantes trabajan; grupos de 4.

- Se observa escaza información sobre las notas o escritos que hacen los estudiantes. Se agrega a la recolección de la información tomar fotografías o hacer más primeros planos en la grabación a las creaciones de los estudiantes en sus cuadernos.

- Se observa que la institucionalización es demasiado extensa, debido al no logro de las dos estrategias esperadas.
  En el plan de clase implementado en el primer establecimiento, existía una tarea que incluía solo valores numéricos para los lados de las fichas. Se elimina esta tarea porque no permite que los estudiantes logren visualizar la segunda estrategia (suma de las partes) y se modifican los datos de los lados de las fichas en las tareas parte 1 y 2, por datos que combinen el álgebra y los números, de manera de hacer más evidente la forma en la que se construye el cuadrado de binomio.

1) Cambios a partir de la primera implementación que surgieron efecto positivo en la clase:

- Recolección de la Información

Fue de gran ayuda en el análisis tener acercamiento a las construcciones de los estudiantes, por lo que se sugiere mantener esta forma.

- Material concreto: modificación de las medidas de las fichas; de numéricas a algebraicas

Sin duda ayuda a los estudiantes a acercarse sin obstáculos numéricos a la regularidad del cuadrado de binomio. Los números no permitían visualizar la representación (en el sentido de Duval) del desarrollo algebraico del cuadrado de binomio.

- Agrupamiento: trabajo en grupo de cuatro estudiantes

Durante el desarrollo de la clase, el tiempo esperado para cada momento fue más corto que el previsto. Los estudiantes entendieron rápidamente las instrucciones, y la disposición en grupos de 4 les ayudó a trabajar colaborativamente por sacar adelante su equipo en la construcción de los cuadrados. Si bien en el grupo el cálculo del área se hacía individualmente, rápidamente los estudiantes se disponían a compartir sus resultados y estrategias.

- <u>Temporalidad</u>

Las devoluciones en la fase de Institucionalización de tarea 2 permite una Institucionalización final que no requiere de mayor tiempo. Se logra cerrar la actividad sin necesidad de retomar nuevamente el problema con su desarrollo.

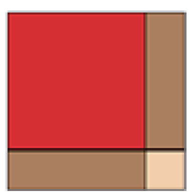
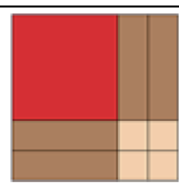
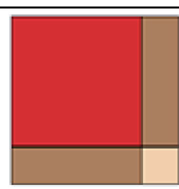
2) Modificación del Plan de Clase

- <u>Herramientas del profesor: Nueva herramienta para la Institucionalización</u>

Se sugiere en los siguientes planes de clase tomar como recurso de institucionalización la tabla comparativa propuesta de las tres tareas trabajadas. Obligó a los estudiantes a pensar sobre lo que han trabajado, a descubrir por qué hacen esta actividad, cuál es el fin de sus estrategias.

La tabla permite identificar aquellos términos que poseen algo en común.

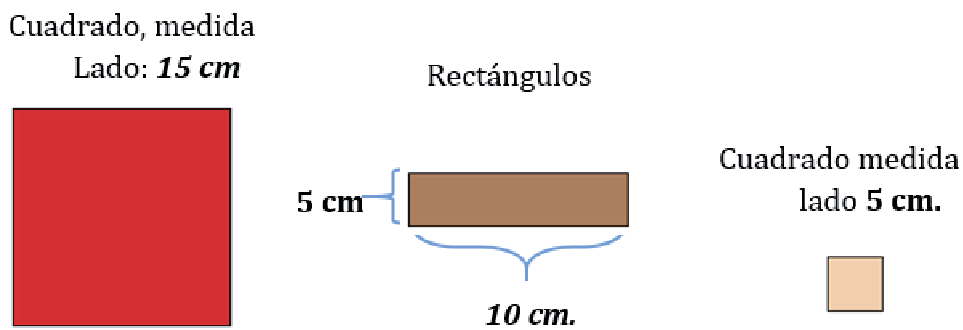
- El primer término identificado es el primero al cuadrado. En las tres tareas ocurría lo mismo.
- Les fue fácil, a partir de lo anterior, identificar el segundo término al cuadrado.
- $2ab$, es el término que demora en aparecer. Un estudiante dice: "*La multiplicación del primero con el segundo dos veces".*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tarea 1 |  | $a^2$ | $a \cdot 1 + a \cdot 1$ <br> = 2(a) | $1^2$ |
| Tarea 2 |  | $a^2$ | $a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1$ <br> = 2(2a) | $2^2$ |
| Tarea 3 |  | $a^2$ | $ab + ab$ <br> = 2(ab) | $b^2$ |

- <u>Material concreto: tamaño de las fichas</u>

Una de las mejoras que se pueden proponer a partir de esta implementación, es la modificación en el tamaño de las fichas. A pesar de que hubo una devolución a la dificultad n°5, podríamos evitar este tipo de obstáculos si hacemos más evidente la diferencia entre las medidas de las fichas. Asegurarnos que, en este plan, solo puedan calzar las fichas para construir un cuadrado perfecto.

Para reformular el tamaño de las fichas, se proponen las siguientes medidas:




- <u>Interacciones: estudiantes escogidos para el plenario</u>

Si bien los alumnos escogidos para esta clase no eran los más destacados en la asignatura, tenían una estrategia formulada con su equipo de trabajo. Se sugiere escoger a estudiantes que no tengan una estrategia correcta, en primer lugar, para abrir la discusión entre sus compañeros.

## Contraste entre análisis

Con el fin de dar cuenta sobre las posibles dificultades que se prevén y si estas efectivamente se visualizaron durante la clase, se desarrolla un contraste entre análisis a priori y a posteriori. Para ello se revisan los puntos expuestos a priori y se clasifican según su aparición en la clase.

Repuestas previstas en análisis a priori

- Se observan ambas formas de construir el cuadrado. Los estudiantes hacen calzar las figuras y en distintos grupos se obtienen las dos construcciones.
- Base por altura del cuadrado $(a+1)^2$, es la única estrategia que evidencian los estudiantes en la fase de formulación. Así mismo en tarea 2: Base por altura del cuadrado $(a+2)^2$.

Respuestas no previstas en análisis a priori

- Indican que el lado del cuadrado mayor es 1a y no 1+a. Como se explica en Análisis a Posteriori las devoluciones (resueltas en el mismo momento) apuntan a dar significado a un lado y un área.
- La forma en que se construye el cuadrado (ver fotografía 6). En la construcción de las fichas no fue previsto este caso por lo que se sugiere modificar las medidas.

Respuestas previstas en análisis a priori que no se visualizan en la clase

- No se observan estudiantes que determinen el lado de cada figura numéricamente para luego calcular su área. Siguen las indicaciones sin ocupar regla de medir.
- A pesar que solo formulan una estrategia, identifican que su respuesta es resultado de la figura completa. Por lo que no se observan estudiantes que no identifiquen el cuadrado de área 1 o que consideren solo uno de los rectángulos para la suma de las áreas menores.
- Todos los estudiantes comprenden el concepto de área, por lo que no se observa una confusión con otro objeto matemático como el perímetro.
- Se identificó como una dificultad, pero fue la estrategia más utilizada; multiplicación de binomios.

Devoluciones previstas y que fueron utilizadas en la clase

La única dificultad prevista fue el trabajo de una estrategia, para ello, la devolución planificada surte efecto en el plenario (como se explica en análisis a posteriori), evidenciándose ya dos estrategias en tarea 2.

## Conclusiones

Al iniciar este trabajo, me propuse, desde Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), proponer un Plan de Clase. Este plan de clase surgiría del análisis de una sesión implementada en el marco del Estudio de Clase asociado al Cuadrado de binomio, lo que posibilitaría el aprendizaje de los Productos notables.

Desde el curriculum nacional, los objetivos de aprendizajes apuntan a demostrar la significancia de expresiones algebraicas desde el área de cuadriláteros y volúmenes de cuerpos geométricos, para luego continuar, en la misma línea con los Productos Notables. Por otra parte, las problemáticas asociadas al aprendizaje de los productos notables sustentan los objetivos del Programa de Estudio porque existe la necesidad de crear situaciones para el estudiante que lo enfrenten a problemas visuales y concretos desde la representación del algebra, el material concreto es parte de esto, y es fundamental para la acción dentro de una clase que busca un aprendizaje significativo del cuadrado de binomio. Su inclusión en el aula supone un fin directamente relacionado al objeto matemático, tiene un propósito asociado a la concretización y luego abstracción de expresiones algebraicas.
Dadas las razones anteriores, se diseña e implementa una clase con base al Estudio de Clase (EC), lo que nos permitió, como docentes, diseñar un Plan de clase acorde al currículum y a las problemáticas detectadas. Como parte del EC, la planificación consideró un análisis a priori, necesario para formular hipótesis respecto a las posibles estrategias y dificultades que puedan tener nuestros estudiantes ante el Plan de Clase.
Además, como parte de la planificación, el plan de clase incluye las devoluciones y tiempos de clase, de modo que no se pierda el objetivo de clase y podamos, en conjunto con nuestros estudiantes, anteponernos a las posibles problemáticas que surgen de la no visualización de los Productos Notables.

A partir de la implementación de la clase, se registran las interacciones de los estudiantes para analizar, bajo el marco de la TSD, las situaciones que surgen en cada momento de la clase.
La clase invita al estudiante a interactuar con el medio sin la necesidad de la intervención de la profesora. Se facilita un medio en el cual todos tienen la posibilidad de entrar en el “juego”, dado que poseen los mismos conocimientos previos. Así, transcurre una clase en donde se identificaron categorías de análisis, que las fases de acción, formulación y validación nos facilitaron para poder observar cómo los estudiantes interactúan con el medio, y cómo, a partir de este análisis evaluamos el Plan de Clase.
La fase de acción nos permite concluir que el problema es interesante de resolver por sí mismo para los estudiantes, por trabajar con fichas que representan las áreas menores que conforman el cuadrado de binomio y porque ponen en juego sus conocimientos previos (elementos que facilitaron el aprendizaje, por estar directamente relacionados con el objetivo de la clase). La fase de formulación nos permite identificar que los estudiantes desarrollaron una estrategia (expresar oralmente las estrategias facilitó el concretar ideas); determinar el lado del cuadrado mayor y multiplicar lado por lado utilizando multiplicación de polinomios. Además,

que fueron capaces de comunicarse entre compañeros y hacia la docente, apoyándose en todos los casos del material concreto entregado. La fase de validación, nos mostró cómo los estudiantes defienden su estrategia en un plenario, y a la vez cómo el resto de los compañeros valida la construcción del cuadrado con las fichas. Se observó solo un caso en el cuál la validación probó que el procedimiento estuvo mal hecho. Vale decir, que elementos como el plenario y la intervención de los estudiantes fueron elementos que facilitaron el aprendizaje del objeto, ya que pudieron probar lo que sabían comparando estrategias con el resto de los grupos.

Así también, la institucionalización, una fase exclusiva del profesor, nos muestra que es necesario formalizar el saber trabajado durante toda la clase de manera intuitiva por los estudiantes, se le da nombre a la regularidad como cuadrado de binomio y se comprueba (de manera general con el curso) que identifican tres términos en la expresión, “el primero y el último al cuadrado, y la multiplicación de los dos al cuadrado” (en palabras de los estudiantes al final de la clase).

Del análisis de la clase, se concluye que la disposición de los estudiantes supera las expectativas, en cuanto a motivación y trabajo en clases. Aunque algunos estudiantes se muestran como líderes de sus grupos y participan activamente de la clase, se observa que todos los estudiantes están involucrados con el problema, son capaces de llevar a cabo los elementos mejorados de la implementación anterior, y logran por sobre todo trabajar en equipo.

Desde el análisis de la clase implementada, se identifica la necesidad de abordar el significado de expresiones algébricas. Así, con la intención de lograr un aprendizaje en productos notables, se construye, una Secuencia Didáctica bajo el marco del Estudio de Clase, porque además de ser un marco que prevé estrategias o dificultades, enriquece la labor del profesor, y le hace reflexión a partir de sus propias prácticas en clases de matemáticas.

La secuencia didáctica es diseñada alrededor de una clase de Cuadrado Binomio, se analizan posibles estrategias y posibles dificultades de los estudiantes. Como profesores, y con base al Estudio de Clase, nuestro análisis a priori recoge las situaciones que podrían vivir nuestros estudiantes si se implementaran las clases.

No todos los estudiantes logran comprender la representación geométrica del Cuadrado de Binomio porque no visualizan una expresión algebraica como resultado de un área, por lo que se trabaja desde su descubrimiento en la geometría y su relación con el álgebra, lo que podría facilitar el aprendizaje de los estudiantes en productos notables. El trabajo se hace mediante clases que activen los conocimientos previos de los estudiantes y los sitúe en un medio sobre el cual deben actuar sin intervención del profesor para dar solución a un problema. Las estrategias son fundamentales en las tres clases, ya que sustentan el saber que luego se institucionaliza en el sentido de Brousseau (1998).

En las tres clases de la secuencia, el estudiante debiese desprenderse poco a poco de las dificultades ligadas a la no interpretación de expresiones algebraicas. Parece que desde la geometría al algebra, son capaces de explicar sus estrategias, pero si interpretan en el otro sentido surgen las dificultades, es decir, falta comprender que el trinomio que resulta del cuadrado de binomio es una lectura de las áreas que conforman el cuadrado.

En todos los casos, las devoluciones en su mayoría tienen que ver con la comprobación numérica de las tareas, es decir, la valorización de las expresiones algebraicas involucradas. Se utiliza como comprobación y no como iniciación de la clase por seguir el objetivo planteado, la idea es que los estudiantes logren trabajar productos notables desde la geometría entendiendo que los términos algebraicos son la representación de variados números que cumplen la misma condición.
Distinto es el caso de la clase tres, ya que las tareas propuestas comienzan con expresiones numéricas de las dimensiones en cuerpos geométricos, esto, para afirmar la idea de una representación.

## Limitaciones del estudio

En la recogida de datos, el material audiovisual ha sido el instrumente más importante, porque además de los dichos de los estudiantes, las imágenes facilitan la interpretación que como investigadores le damos a los dichos. Pero a pesar de esto, una limitante en la información que entregó el video fue el tiempo en que la cámara se quedaba con un grupo. Es decir, durante la clase el video muestra el trabajo de grupos, pero no se muestra el trabajo de un grupo de principio a fin. El estudio se hubiera enriquecido observando la interacción con el medio de cada miembro del equipo a lo largo de la clase.

Sería interesante, tener una entrevista con aquellos alumnos que reformularon sus estrategias para saber cómo y en qué momento se dan cuenta del error que cometen y cómo la clase los pone en esta situación. La entrevista se haría en forma individual con el sujeto. Las preguntas tendrían la intención de recoger información del estudiante con respecto a su punto de vista ante las formulaciones y reformulaciones de las estrategias utilizadas.

- ¿Qué errores identificaste en tus procedimientos al comienzo de la clase?
- ¿En qué momento de la clase comenzaste a dudar de tu estrategia?
- ¿Cómo te diste cuenta que estaba mal formulada tu estrategia?
- ¿Qué elementos de la clase te ayudaron formular otra estrategia?
- ¿Cómo comprobaste que esta nueva estrategia si estaba correcta?

Por último, para recoger datos que den cuenta que la representación meramente geométrica de esta clase, sería interesante implementarla a inicio de año escolar. Los estudiantes ya poseían conocimientos previos en operatoria algebraica, lo que de algún modo condicionó a que todos los grupos lograran formular solo una estrategia.

## Proyecciones del estudio

Con el fin de estudiar el aprendizaje de los productos notables, se podría realizar un seguimiento a los estudiantes del curso en el cual se ha implementado la clase, para ver cómo se han afianzado los aprendizajes de la clase con los siguientes contenidos, especialmente en aquellos donde vuelven a trabajar productos notables; operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias, operatoria con números complejos, distribución binomial. La idea sería identificar los elementos de la clase que repercuten como sus futuros conocimientos previos, y qué elementos se olvidan con el tiempo, para diseñar nuevos Planes de Clase que busquen atender a las causas que no permiten el aprendizaje.

## Referencias


Barreto, J. (2014). Dinamización matemática: Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 38*, 115-118.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard y. (1985) *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*, Paris: La Pensée Sauvage

Development Sciences Network Presence, *Proposiciones Libro II*, extraído el 18 de marzo de 2017 dehttp://www.euclides.org/menu/elements_esp/02/proposicioneslibro2.htm

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Euclides, (300 a.C./1991). *Los Elementos,* Libro II. Traducción de Puertas. Madrid, España: Gredos.

Guerrero, D. Moreno, Á. (2013). Un análisis del tratamiento didáctico del producto notable (cuadrado de la suma de dos términos) en el libro de texto hipertexto de matemáticas 8. *Revista científica Universidad de los Andes, Colombia, Ed. Especial,* 154-158

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada, España: Universidad de Granada.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial Madrid.

Méndez, T. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física, 11(15),* 59-69.

Mercado, C. (1972). *Historia de las matemáticas.* Santiago, Chile: Ed. Universitaria.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2011). *Matemática. Programa de Estudio para Primer Año Medio*. Santiago: Autor.

Ministerio de Educación de Chile(MINEDUC) (2012). *Bases Curriculares, Matemática Educación Básica*. Santiago: Autor.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2017). *Programa de estudio para primer año medio*. Santiago: Autor.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (2017). *Texto del estudiante primero medio*. Santiago: Editorial Santillana.

Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) (Recuperado el 1 de noviembre de 2017). *Matemática, Orientaciones didácticas.* Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-article-20853.html.

Muñoz, V. y Pérez, B. (2017). *Texto matemática Primero Medio Proyecto sé protagonista.* Santiago, Chile: editorial SM.

O´Connor, JJ. Robertson, EF (1999). *Diofanto de Alejandría*. Lugar de publicación: MacTutor. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Diophantus.html

O´Connor, JJ. Robertson, EF (1999). *Euclides de Alejandría*. Lugar de publicación: MacTutor. Recuperado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html

O´Connor, JJ. Robertson, EF (1999). *Abu Bekr ibn Muhammad Ibn al-Husain Al-Karaji*. Lugar de publicación: MacTutor. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html

O´Connor, JJ. Robertson, EF (1999). Abu Yafar Al-Juarismi. Lugar de publicación: MacTutor. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html

O´Connor, JJ. Robertson, EF (1999). Omar Khayyam. Lugar de publicación: MacTutor. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Khayyam.html

Penalva, C. y Torregrosa, G. (2001). *Representación y aprendizaje de las matemáticas*. En E. Tonda y A. Mula (Eds.), Scripta in Memoria (pp. 649-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Pickover, C. (2009*). El libro de las matemáticas*. Kerkdriel: Librero b.v.

SERNAC, 2013*. ‘’Diferencias de más de $4 mil en el mismo texto escolar’’*. Lugar de publicación: SERNAC. Estudios y Precios. Recuperado de http://www.sernac.cl/diferencias-de-mas-de-4-mil-en-un-mismo-texto-escolar/

Stigler, J. W. y Hiebert, J. (1999). T*he Teaching Gap* [El gap en la enseñanza]. New York, NY: The Free Press.

Torregrosa, Germán, Quesada, Humberto, Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] 2007, 10 (julio): [Fecha de consulta: 19 de agosto de 2017] Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500205> ISSN 1665-2436

Vera, F. (1960). *Diccionario de Matemática.* Buenos Aires: Ed. Kapelusz.

## Anexo

### Anexo 1: objetivos de aprendizaje

**Objetivo de Aprendizaje**

**OA 6**

Mostrar que comprenden las operaciones de expresiones algebraicas:

› Representándolas de manera pictórica y simbólica.

› Relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos.

› Determinando formas factorizadas.

(MINEDUC, 2016, p.56)

**Objetivos de Aprendizaje**

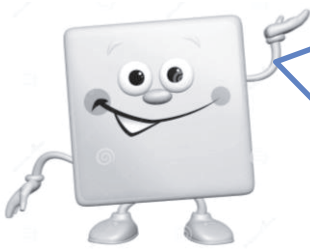
**OA 3**

Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica:

- Transformando productos en sumas y viceversa.
- Aplicándolos a situaciones concretas.
- Completando cuadrado del binomio.
- Utilizándolos en la reducción y el desarrollo de expresiones algebraicas.

(MINEDUC, 2017, p.84)

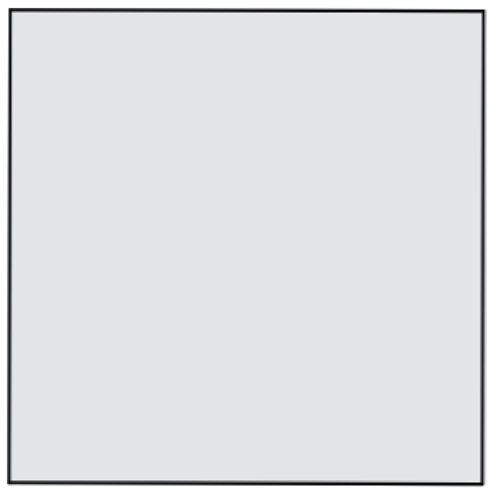
**Anexo 2:** plan de Clase 1 Set fichas tarea 1

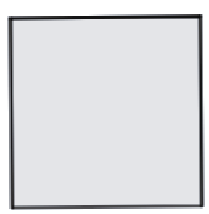


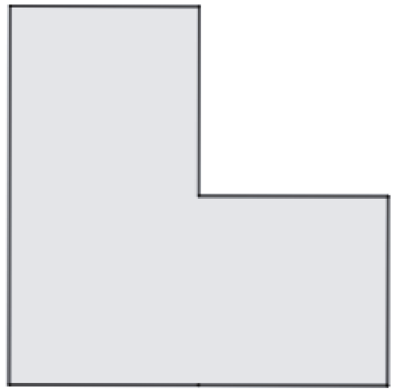
Calcula la superficie de las figuras que se encuentran coloreadas en función de las longitudes **a** y **b** que se presentan a continuación.
Escribe dentro de cada figura su área en forma algebraica.
Para medir y comparar los lados puedes utilizar compás

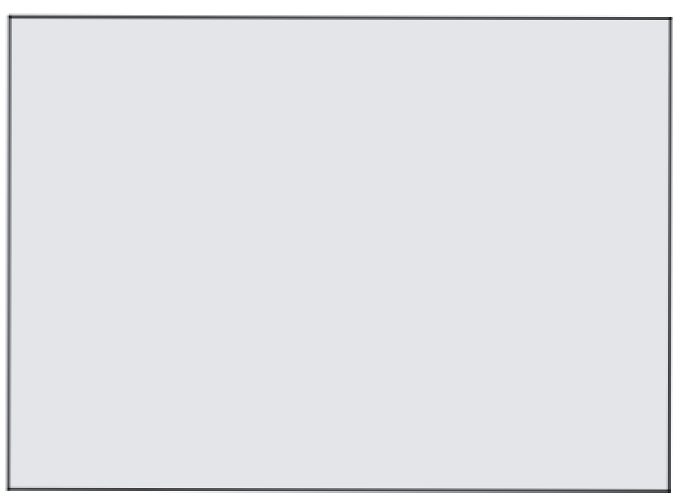
a

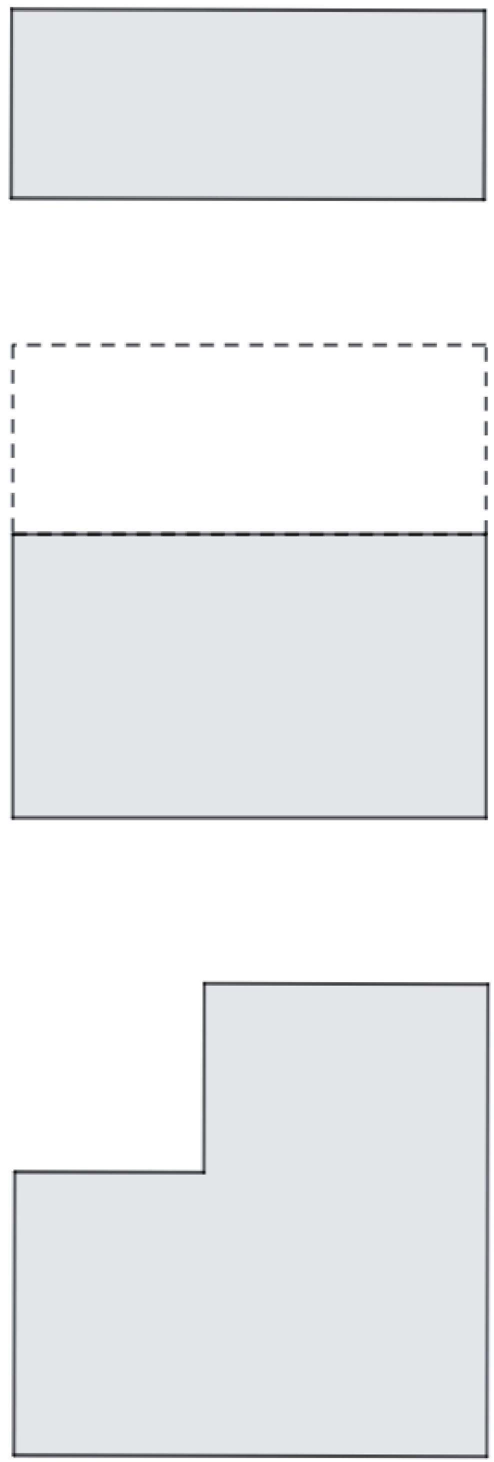
b

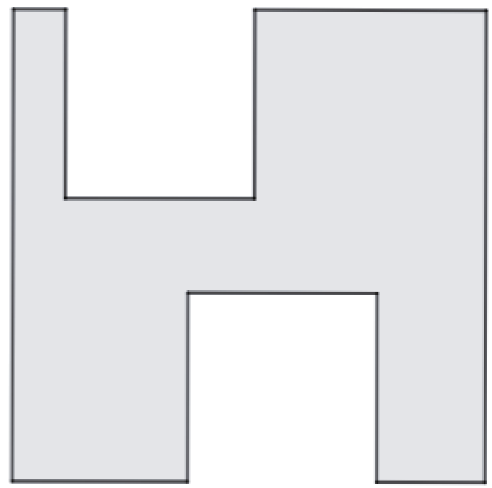


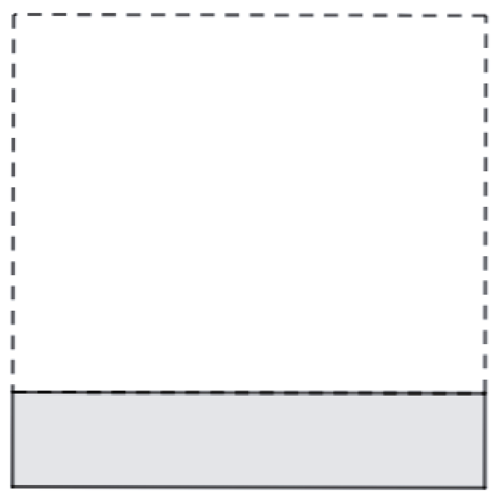


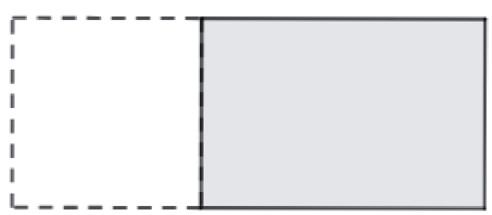












**Anexo 3: transcripción del video**

## TAREA 1

Profesora: - "El objetivo es construir cuadrados de distintas medidas y calcular sus superficies, esto es lo que haremos hoy…
…Ustedes hoy se han dispuesto en grupos de cuatro o cinco personas, la idea de disponerse de esta forma es que trabajemos en equipo."

Se repite objetivo, más una pregunta hacia el curso: - "¿qué es la medida de una superficie?"

Alumno: - "El área"

Profesora: - "Entones cuando me refiera a calcular la medida de la superficie estoy hablando del área"

Profesora: - "Qué vamos a hacer? Primero les voy a entregar las siguientes fichas por grupo. Una ficha corresponde a un cuadrado, este cuadrado tiene lado *a*, luego les entregaré dos rectángulos de color café. Cada uno de estos rectángulos tiene como medida: largo *a* y ancho *1,* y finalmente les entregaré un cuadrado visiblemente más pequeño, y este cuadrado tiene lado *1*. Todos los grupos ocuparán la misma medida.

Dos ayudantes entregan a todos los grupos 1 cuadrado grande, dos rectángulos, y un cuadrado pequeño.

Profesora: - "La tarea consiste en: construir un cuadrado utilizando todas las fichas
Una vez que haya construido el cuadrado calcule el área de la figura
¿Existe alguna duda con respecto a la tarea?"

Se observa cómo trabajan los distintos grupos;

Profesora: - "Está lista la primera tarea, ahora a calcular el área de este cuadrado."

En grupo 1:

Profesora: - "¿Qué hiciste tú?"

Alumno: - "Saque las medidas de cada lado a+1 y a+1, y ahora voy a multiplicar."

En grupo 2:

Alumna: - "Saqué el lado del cuadrado y después calcule el área, quedaría a al cuadrado más b al cuadrado más ab"

Profesora: - "¿Están de acuerdo todos los del grupo?"

Alumnos grupo 2: - "Sí"

En grupo 3:
Alumno: - "Vamos a multiplicar binomio por binomio, el primero con el primero, el primero con el segundo, el segundo con el primero y el segundo con el segundo"
Profesora: - "¿A qué correspondería este resultado?"
Alumno: - "Al área del cuadrado"

Se espera un momento a que los grupos avancen en su tarea
En grupo 4:
Profesora: - "Explícame cómo llegaste a este resultado."

Alumno: - "Multiplico lado por lado"

Profesora: - "¿Existe alguna otra forma de llegar al resultado?"
Se deja la interrogante y se sigue observando los grupos
Profesora: - "¿Están listos todos?"

## TAREA 2

Profesora: - "Les voy a entregar dos fichas más por grupo" (se muestra cuadrado de lado b) "y tres rectángulos más. La tarea sigue siendo la misma: Construir un cuadrado con las fichas y calcular su área"
Se comienza a repartir las fichas.
Los grupos comienzan a trabajar.
En grupo 3, la profesora se detiene a preguntar por tarea 1:
Profesora: - "¿Cómo determinaron el área?"
Alumno: - "Armamos las fichas y nos dimos cuenta que el lado del cuadrado que se formo tiene medida a, porque es 1a por 1a."
Profesora: - "¿Cuánto dices tú que mide el lado?"
Alumno: - "1a"
En grupo 5:
Alumno: - "Vimos que los lados son a+2 y a+2, y multiplicamos."
En grupo 6:
Profesora: - "Expliquen lo que hicieron, ¿por qué llegaron a este resultado?"
Alumno: - "Porque multiplicamos el lado por el lado"
Profesora: - "¿qué significa este resultado?"
Alumnas: - "El área"
Profesora: - "En el resultado te dio *a* cuadrado, ¿cuál es *a* cuadrado?" (refiriéndose a las fichas)"
Alumnas indican cual es
Profesora: - "¿Cuál es *b* al cuadrado?"
Alumnas indican
Profesora: - "¿Que representan los otros términos?"
No responden, se les deja la interrogante
En grupo 7:
Profesora: - "¿Cómo sabes que el resultado está bien?"
Alumna: - "Porque la multiplicación me dio este resultado"

Profesora: - "¿Cómo podríamos identificar desde el resultado, el área del cuadrado?"
Alumna observa dudosa
Profesora: - "¿Qué representa tu resultado? ¿qué representa el primer, segundo y tercer término?
se deja la interrogante
Profesora hacia el curso: - "¿Están listos?
Dos grupos responden que no
Pasado un momento
Profesora: - "Vamos a invitar a alguien que pase adelante a comentar lo que hizo"
Profesora hacia alumno escogido: - "Pase adelante a explicar cómo realizo la tarea 1, traiga sus fichas para pegar aquí adelante su cuadrado y así explicar."
Profesora: - "Escuchemos, qué hiciste para determinar el área"
Alumno: - "Como el cuadrado café tiene lado a y el cuadrado pequeño lado 1, entonces el lado será *a+1*, luego multiplicamos binomio por binomio, y reducimos términos semejantes. Entonces nos da el área"
Profesora: - "Pase adelante alumna grupo 7"
Alumna: - "Esto vale *1*, esto *a*, y lo mismo al otro lado, y esto sería lo mismo que *a+2*"
Entonces *a+2* por *a+2*, (comienza a multiplicar binomio por binomio), se reduce y queda $a^2 + 4a + 4$"
Profesora: - "¿A qué corresponde?"
Alumna: - "Esto al cuadrado grande, esto a los rectángulos, y esto al cuadrado más chico.
Profesora: - "¿Alguno tiene otra construcción del mismo cuadrado?"
Alumno se ofrece para salir a pizarra
Profesora: - "Explícanos qué fue lo que hiciste"
Alumno voluntario: - "Me di cuenta que la figura me quedo distinta pero que el área se va a calcular igual que compañera"
Profesora: "¿Está de acuerdo el curso que es lo mismo?"
Alumnos del curso: - "Sí…"
Se pregunta a alumno al azar: - "¿Por qué dice que es lo mismo?"
Alumno: - "Porque la superficie es la misma"
Alumno levanta la mano y comenta: - "Si los rectángulos se pusieran en forma vertical, no daría lo mismo"
Profesora: - "¿Qué pasaría si se pusieran vertical?"
Alumno: - "No da"
Se ponen en forma vertical,
Profesora: - "Pero sobra un poquito ¿cierto?, no son exactamente iguales, no hay una línea continua, además, yo les pedí que hicieran un cuadrado, por lo tanto, si se pusiera en forma vertical los lados no darían iguales, y no sería un cuadrado.
Si se dan cuenta las tres estrategias dan el mismo resultado, ¿quién me podría decir en una frase como están estas tres personas determinando el área?"

Alumna: - “Polinomio por polinomio”
Profesora: - “Piense en una estrategia que sea distinta a polinomio por polinomio”
Alumna grupo 2, levanta la mano: - “Sacando el área de cada uno”
Profesora: - “Pase adelante a explicar, puede ser con las figuras de la actividad 1.”
Alumna: - “Vamos a sacar el área de cada uno”
comienza a llenar en pizarra los lados de todas las fichas
Profesora: - “Estamos de acuerdo con todas las medidas de las áreas”
Grupo curso: - “No…”
Compañeras del grupo indica que hay un error en una medida
Alumna: - “Sacamos el área de cada una, *a* por *1*, *a* por *a*, *1* por *1*.”
Profesora: - “Redactemos una frase para cada estrategia. Volvamos al primer alumno que sale a pizarra, explícanos que hiciste”
Alumno: - “Primero saque *a+1*”
Profesora: - “¿Qué es *a +1*?”
Alumno: - “Un lado del cuadro”
Profesora: - “¿Cuál es la otra estrategia?”
Alumna grupo 2: - “Sacar el área de cada uno”
Profesora: - “El área del cuadrado es *a+1* por *a+1*, y con la otra estrategia tenemos el cuadrado más grande más los dos rectángulos y el cuadrado menos. Tenemos, entonces, dos estrategias”

Las personas que salieron adelante van a buscar las fichas que le falten para reponer en sus grupos, las que pegaron en pizarra quedaran ahí hasta el final de la clase.

## TAREA 3

Profesora: - “En la siguiente tarea, pero se cambiarán las medidas de las fichas, el cuadrado menor tendrá medida de lado *b*, y los rectángulos tendrán lado *a* y *b.*

Recuerde que solo ocupamos las primeras fichas”
Momento de trabajo por grupos
Grupo 5:
Alumno: - “Nos dio $a$ cuadrado más $2ab$ más $b$ al cuadrado”
Profesora: - “¿Que grupo ya determino el área? 6 grupos”
Se espera un momento mas

Vamos a invitar a alguien de un grupo distinto que pegue sus fichas en pizarra y explique su desarrollo
Alumna voluntaria grupo 6:
- “Como este media $b$ y este media $a$, hicimos $a + b$ por $a + b$ y eso nos da $a$ cuadrado más $ab$ más $ab$ más $b$ cuadrado, y nos queda $a$ cuadrado las $2ab$ mas $b$ cuadrado.”
Profesora: - “Antes dijimos que había dos estrategias, ¿cuál utilizaste tú?”
Alumna: - “Lado por lado”
Profesora: - “Sirve la otra estrategia para la actividad”

Alumna: - "Sí, porque este es el cuadrado de $a$ cuadrado, este es el de $ab$ y este es el de $b$ cuadrado"
Profesora: - "¿Solo hay un rectángulo?"
Alumna: - "No, 2, son dos rectángulos"
Profesora: - "Haremos un resumen de las actividades que hemos hecho.
Al comienzo ustedes multiplicaron a+1 por a+1, esto es lo mismo que decir $a + 1$ al cuadrado"
Luego encontraron que se podía hacer también como suma de las partes
En la tarea dos tenían como lado *a+2* por *a+2*, que es lo mismo que *a+2* al cuadrado
¿Cómo sería con la estrategia de suma de las áreas? ¿qué tienen en común los tres resultados?"
Alumna G6: - "Que se pueden hacer de la misma forma"
Que todos están elevados a 2
Profesora - "¿Qué tienen en común las tres expresiones de la estrategia: suma de las áreas"
Alumno G5: - "Todos tienen algo al cuadrado"
Profesora: - "¿Qué más?"
Alumnos en general – "El primero al cuadrado, el primero por el segundo y el segundo al cuadrado"
Alumna: - "Es la multiplicación del primero por el segundo"
Alumno mismo grupo: - "No, es la multiplicación de segundo por el primero"
Alumno grupo 3: - "Pero es lo mismo"
Alumno grupo 5: - "Es la multiplicación del primero por el segundo 2 veces"
Profesora: "Comprobemos esto, ¿por qué el resultado del primero con el segundo 2 veces nos da *2a* para la primera tarea?"
Alumno: - ¡Al área de un rectángulo es *a* y dos veces a es *2a"*
Alumno grupo 5
- "Este resultado (en la segunda tarea) corresponde a la multiplicación del primero con el segundo dos veces
Profesora; - "¿Cuál es el área de un rectángulo?"
Alumnos: - "2a"
Profesora: - "¿Y dos veces 2a?"
Alumnos: - "4a"
Profesora: - "¿Cuál es el área del rectángulo?" (refiriéndose a la tarea 3)
Alumnos: - "ab"
Profesora: - "¿Y dos veces ab?"
Alumnas: - "2ab"
Profesora: - "A esto le llamamos binomio al cuadrado o cuadrado de binomio, porque justamente como dijeron tengo un cuadrado (apunta a cuadrado mayor), de binomio (apuntando al lado binomio *a+b*"
Para llegar inmediatamente al resultado podría poner por ejemplo: $6 + b$.
Veamos juntos como se podría desarrollar,
Profesora y alumnos:
-"Primero daría $9 + 12ab + b^2$"

Profesora:

- “Un cuadrado de binomio tiene la misa forma”

Ustedes acaban de descubrir el cuadrado de binomio, que siempre va a tener la misma forma. Herramienta matemática al que llamamos producto notable.