PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO-CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico

TRABAJO FINAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAGISTER
EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

MAUREEN CARRASCO

PROFESORES GUÍA:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

SANTIAGO, DICIEMBRE 2017

ÍNDICE

RESUMEN

La multiplicación de números complejos suele presentarse, en los textos eruditos y textos escolares, haciendo énfasis solo en la representación algebraica, implicando una mirada deficiente e incompleta de la operación en cuestión, provocando a su vez un aprendizaje parcial en los estudiantes respecto al objeto matemático. A partir de lo anterior, en el presente trabajo se busca subsanar tal deficiencia, planteando situaciones de aprendizaje que propician la multiplicación de los números complejos desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), con el objetivo de que los estudiantes comprendan y analicen la representación geométrica del producto de números complejos.

Según Martínez (2006) la enseñanza de la multiplicación de números complejos, vinculada con las dos representaciones - algebraica y geométrica- proporciona en los alumnos mejoras en el concepto del objeto matemático. Es a propósito de esta idea que formulamos una propuesta didáctica a partir de un Estudio de Clases, cuya investigación se encuentra enmarcada en un paradigma cualitativo de tipo exploratorio, en el cual se narran situaciones y fenómenos que se darán en un escenario, y un contexto estructurado, en torno a la TSD. Se implementa una propuesta de aprendizaje a 22 estudiantes pertenecientes a un curso de tercer año medio de un colegio de Santiago. A partir de los resultados extraídos, se evidencia que los alumnos tienen dificultades en resolver operaciones algebraicas, lo que causó un retraso en el tránsito entre la representación algebraica y la geométrica de los números complejos.

INTRODUCCIÓN

Los últimos años han representado un escenario de cambios profundos en la enseñanza de la matemática, tanto en el currículum a nivel general, como en la propia práctica docente. Las investigaciones recientes intentan atender a las problemáticas que se suscitan en la educación y en el aula, como la mecanización del álgebra, desinterés por aprender matemática, entre otras. Es aquí donde se enmarca este estudio y propuesta pedagógica, con el objetivo de elaborar una situación de aprendizaje que propicie la multiplicación de los números complejos desde la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, TSD, privilegiando la representación geométrica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Es por ello que se elabora un plan de clase, que contempla el análisis a priori para la anticipación de posibles comportamientos, respuestas de los alumnos y la evaluación interna de la clase.

Las actividades planteadas permitirán que los alumnos desplieguen procedimientos de resolución, desarrollen distintas estrategias y verbalicen conclusiones al interior de los grupos. En este sentido, el trabajo colaborativo permitirá a los alumnos argumentar, analizar, concluir y validar las respuestas que se van suscitando en el desarrollo de las clases. La elección y pertinencia de la TSD, se debe a que este marco teórico de tipo epistemológico contribuye a la enseñanza y aprendizaje de la matemática colaborativamente, involucrando diversas interacciones sociales entre los estudiantes, docente y saber matemático, lo que condiciona y propicia la construcción del conocimiento matemático. Esta teoría sustenta el plan de clase elaborado y se enmarca desde las preguntas que propone el profesor a los alumnos, recuperando nociones, respuestas, relacionando y demostrando matemáticamente, siendo el alumno su propio gestor del aprendizaje. El alumno aprende por lo que realiza en clases, por el significado que le entrega la actividad llevada a cabo y la posibilidad que se puedan integrar nociones, concepciones, por la capacidad de poder expresar ante sus pares la construcción de su propio conocimiento matemático. El plan de clases, es aplicado a un colegio de la comuna de Santiago, en el cual se realiza un registro de la información recabada, siendo analizada en base a una categoría de análisis para luego poner de relieve las conclusiones más relevantes de este estudio.

PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN

La propuesta didáctica es relevante para dar respuesta a la problemática que se suscita respecto a la multiplicación de números complejos, y pone de relieve diversos antecedentes que permitirán relacionarlo con este estudio, para luego configurar una propuesta integradora, que propicie el tránsito entre las representaciones algebraica y geométrica, identificando las dificultades que tienen los alumnos en el tránsito de los registros.

Por los trabajos de Chevallard (1985) sobre la Transposición Didáctica en los textos escolares, se realiza una transformación entre el *saber sabio* y el *saber enseñado*, un quiebre en el saber que se enseña y el conocimiento específico de la disciplina en el ámbito académico. Es así, que respecto a varias investigaciones y artículos sobre el saber sabio y saber enseñado, se estudia la relación y la distancia que existe entre ambos saberes. Para ello, se analizan los textos de estudio, específicamente el texto de matemática 3° Medio Santillana, y el que otorga el Ministerio de Educación. Según Barrantes y Zapata (2015), los textos representan una serie de problemas que dicen relación con su aplicabilidad y coherencia, tanto didáctica como metodológica, en el área de la matemática. Se generan errores de enseñanza-aprendizaje de los conceptos geométricos, específicamente en la representación geométrica, que pueden ser causados por una utilización exclusiva de los textos escolares. Es en este sentido que se formulan una serie de interrogantes, a partir tanto de los textos de estudio, como de fuentes de investigación asociadas, de las que se desprende una desarticulación del producto de números complejos y su representación geométrica, como señalan Artigue, Douday y Moreno (1995).

Según Flores (2016) existe un privilegio por la representación algebraica en el proceso de aprendizaje de la multiplicación de números complejos, lo que provoca una comprensión superficial del objeto matemático. Es así como el registro gráfico es relegado y el tránsito entre el registro algebraico y geométrico se desarticula. De igual manera, Artigue et al. (1995) hace énfasis en la desarticulación entre el registro gráfico y algebraico, lo que genera en los alumnos variados obstáculos respecto al objeto matemático estudiado. Así mismo, se evidencia en el estudio de Flores y Montoya (2016), desde la mirada del currículum, que el proceso de enseñanza se ha basado en la mecanización, convirtiéndose el álgebra en algo sin significado para los alumnos. De ahí la importancia de la representación geométrica para la comprensión del significado del producto de los números complejos, y el tránsito entre las dos representaciones. En Chile es un tema reciente, por lo que hay pocas referencias nacionales al respecto.

En primer lugar, Ercilla (2010) presenta una propuesta para alumnos de octavo grado, con el objetivo de desarrollar las habilidades en la apropiación del concepto y significado de expresiones algebraicas y sus operaciones, utilizando como herramienta las representaciones geométricas. Las actividades a través de las representaciones geométricas dentro del aula, facilitan el aprendizaje y comprensión algebraica ya que desarrolla habilidades de generalizar, reconocer, visualizar, representar y describir, donde los estudiantes comprenden rápidamente los conceptos. Los resultados arrojan que el uso de actividades con representaciones geométricas facilita la comprensión de contenidos algebraicos, capacidad para manipular de manera efectiva los números y lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Otro estudio que ha interesado como referencia es la investigación de Mangili y Sánchez (2015), la que presentan una propuesta pedagógica basada en la enseñanza de las transformaciones isométricas, en base a la operatoria de los números complejos, con el objetivo de integrar los ejes importantes del marco curricular a partir de la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1976). Los resultados muestran que los estudiantes después de la implementación del diseño didáctico y el trabajo desde la representación geométrica, poseen herramientas para realizar cualquier transformación isométrica ocupando la operatoria de los números complejos, siendo la representación geométrica una herramienta eficaz para perfeccionar la enseñanza de las transformaciones isométricas. Esta investigación guarda relación con el estudio de clase realizado, da cuenta de la importancia de contemplar la representación geométrica en los distintos objetos matemáticos, ya que otorga al alumno un mayor aprendizaje.

Si bien, los objetivos de aprendizajes planificados no aparecen en el Programa de Estudio de Tercero Medio (MINEDUC, 2017), parece necesario y pertinente incorporarlos, para propiciar la articulación entre la representación algebraica y geométrica de la multiplicación de los números complejos.

Uno de los objetivos de este proyecto de innovación es proponer un sistema de aprendizaje que vincule la representación algebraica y geométrica de la multiplicación de los números complejos desde la TSD; razón por la que se buscó apoyo en la propuesta de Flores y Montoya (2016), quienes proponen investigar sobre el proceso de aprendizaje de la multiplicación de números complejos, con el objetivo de enseñar este contenido haciendo énfasis en la representación geométrica desde la Teoría de Espacio de Trabajo Matemático. Los resultados de esta propuesta fueron significativos, ya que al realizar tratamientos y conversiones entre los distintos registros semióticos, se generó mayor comprensión del concepto y los estudiantes lograron apropiarse y construir el significado de la multiplicación de números complejos.

Finalmente, un estudio bastante revelador para el desarrollo del proyecto de innovación corresponde a Bitencourt, A; Vargas, P; Feliccety, V (2014), quienes presentan una propuesta pedagógica para los estudiantes de tercer grado, donde relacionen el sentido de las operaciones de los números complejos a través de la representación geométrica. Los conocimientos involucrados son los números complejos y su representación geométrica en el plano de Argand, específicamente en la rotación de vectores en el plano. Esta propuesta pone de relieve y saca la luz la relevancia de la geometría en la matemática y la importancia de las distintas representaciones en el objeto matemático. Estas investigaciones permitieron orientar mejor este estudio, ya que hacen especial énfasis en la importancia del tránsito entre la representación algebraica y geométrica, dando a conocer las problemáticas que se suscitan en el aula y cómo mejorar el aprendizaje de los alumnos en base a una propuesta de enseñanza que optimice esta conversión.

OBJETO MATEMÁTICO

El desafío de innovar implica la administración de contenidos matemáticos -expresados en estructuras conceptuales- a partir de propuestas de enseñanza que permitan representar relaciones significativas entre conceptos y procedimientos, para la apropiación del objeto matemático. La posibilidad de que los profesores tengan herramientas, como el análisis de los textos desde el saber erudito y saber escolar, análisis curricular y análisis epistemológico, permite a los docentes su posicionamiento como constructores e investigadores de sus propias innovaciones, haciendo que su experiencia y conocimiento pedagógico juegue un rol relevante en la implementación de la clase.

Desde el saber erudito no todo este conocimiento es apto para transferirse directamente, es por ello que se realiza un proceso de transformación al saber enseñado, proceso que se denomina *Transposición Didáctica*. A continuación, se presentará el saber erudito, tomado desde el texto escrito por Spiegel, The McGraw-Hill, 2009 y el saber escolar extraído del texto Santillana, 2014, para dar a conocer la distancia entre los dos saberes respecto al objeto matemático multiplicación de números complejos.

Definir objeto desde el saber escolar y erudito. DISTANCIA ENTRE SABERES.

SABER ERUDITO

Se ha considerado como la conceptualización experta de números complejos de acuerdo a Spiegel (2009).

Números Complejos
En los números reales la ecuación $x^2+1=0 \leftrightarrow x^2=-1$ no tiene solución, para construir el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, se realiza una relación binaria,$\mathbb{R}x\mathbb{R}$ correspondiendo a la igualdad de elementos de este conjunto.

$$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

Podemos ver que esta relación es de equivalencia y cada clase de equivalencia está formada por un solo elemento, el representante de la clase.

El cuerpo de los números complejos, en base a las siguientes definiciones de adición y multiplicación
Se define respectivamente por:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$
$$\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}$$

Notar que hay una función inyectiva F desde los números reales al de los números complejos $\mathbb{C}$, donde F(a)=(a,0)
Para cada número complejo $z=(a,b)$ se define el complejo $\bar{z}=\overline{(a,b)}=(a,-b)$ que se llama conjugado de z.
Observaciones

- Al sumar o multiplicar el número complejo con su conjugado el resultado es un número real.
- El cuadrado de todo número imaginario es un número real negativo.
  Así $(0{,}1)^2=(0{,}1)\cdot(0{,}1)=(-1{,}0)\rightarrow -1$ siendo así $(0{,}1)$ una solución para $x^2=-1$.
  Se define $(0{,}1)$ como *unidad imaginaria* y se denota por i, se tiene que $i^2=-1$ y para todo $(x,y)\in\mathbb{C}$,
  $(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0{,}1)=x+yi$, donde x se llama *parte real* e y *parte imaginaria del número complejo.*

Se define el **módulo**, $mod(z)$ o $|z|$ así $r=|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ y que representa la distancia del origen al punto que representa el complejo z en el plano Argand.
Si θ es el ángulo positivo (amplitud o argumento) que hace el segmento del origen al punto que representa el complejo z en el plano Argand con el eje positivo de las x, se tiene:

$x=r\,cos\theta;\ y=r\,sen\theta$, donde

$z=x+yi=r(cos\theta+i\,sen\theta)$, se llama forma polar del número complejo.

- El módulo del producto de los números complejos z_1 y z_2 es igual al producto de los módulos, mientras que el argumento del producto es igual a la suma de aquellos argumentos. Es decir: $z_1\cdot z_2\rightarrow|z_1\ z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\ \vee\ arg\,(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2$

Números Complejos:
Los números complejos se componen de una parte real e imaginaria, entonces el número complejo tiene la forma $a + bi$.
Un número complejo puede ser representado por tres formas:

a. Forma canónica o binómica: $z = a + bi \; con \; a, b,$ pertenecen a $\mathbb{R}$
b. Forma de par ordenado: $(a, b) con \; a, b$ pertenecientes a $\mathbb{R}$
c. Forma gráfica

Adición y Multiplicación sobre $\mathbb{C}$

Para operar entre números complejos, es necesario considerar sus partes reales y sus partes imaginarias por separado, y efectuar la operación indicada entre ellos, por ejemplo sumemos los números complejos $2 + 3i \; y \; 7 - 9i$

$$2 + 31 - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = -3 + 10i$$

Consideremos los números complejos

$$z_1 = 1 + 2i \; y \; z_2 = 3 + 4i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i)(3 + 4i) \\ &= 3 + 4i + 6i + 8i^2 \\ &= 3 + 10i - 8 \\ &= -5 + 10i \end{aligned}$$

El conjugado de un número complejo y el módulo de un número complejo z
El conjugado de un número complejo $z,$ se denota por $\bar{z}$, siendo el reflejo del complejo z con respecto al eje real. Algebraicamente, el conjugado de z solo difiere de este en el signo de su parte imaginaria, es decir, si $z = a + bi, entonces \; \bar{z} = a - bi$
El módulo de un complejo es la medida de la longitud del vector que este complejo representa

$$z = a + bi \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

MAPA CONCEPTUAL DISTANCIA ENTRE SABERES

Saber erudito

Spiegel, The McGraw-Hill, 2009

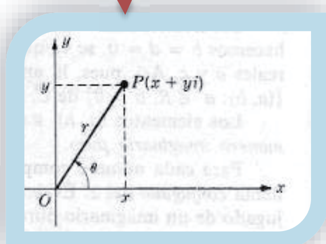
R.A

multipliquémoslos usando la forma binómica:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (1+2i)(3+4i) \\
&= 3+4i+6i+8i^2 \\
&= 3+10i-8 \\
&= -5+10i
\end{aligned}
$$

Se privilegia la representación algebraica

R.G



Si θ es el ángulo positivo que OP hace con el eje positivo de las x, se tiene:

$$x = r\,cos\theta;\; y = r\,sen\theta$$

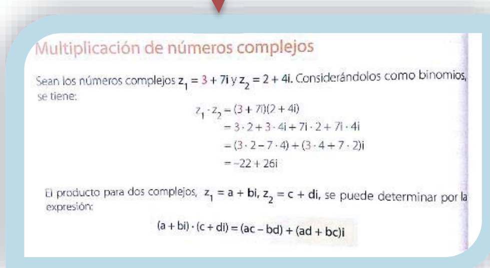
de donde:

$$z = x + yi = r(cos\theta + i\,sen\theta)$$

Saber escolar

Santillana, 2014

R.A



Multiplicación de números complejos

Sean los números complejos $z_1 = 3 + 7i$ y $z_2 = 2 + 4i$. Considerándolos como binomios, se tiene:

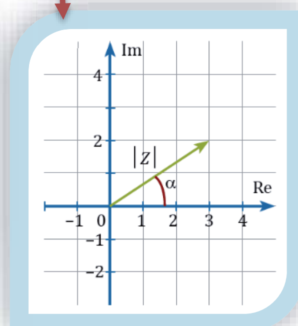
$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (3+7i)(2+4i) \\
&= 3\cdot 2 + 3\cdot 4i + 7i\cdot 2 + 7i \cdot 4i \\
&= (3\cdot 2 - 7\cdot 4) + (3\cdot 4 + 7\cdot 2)i \\
&= -22 + 26i
\end{aligned}
$$

El producto para dos complejos, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, se puede determinar por la expresión:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

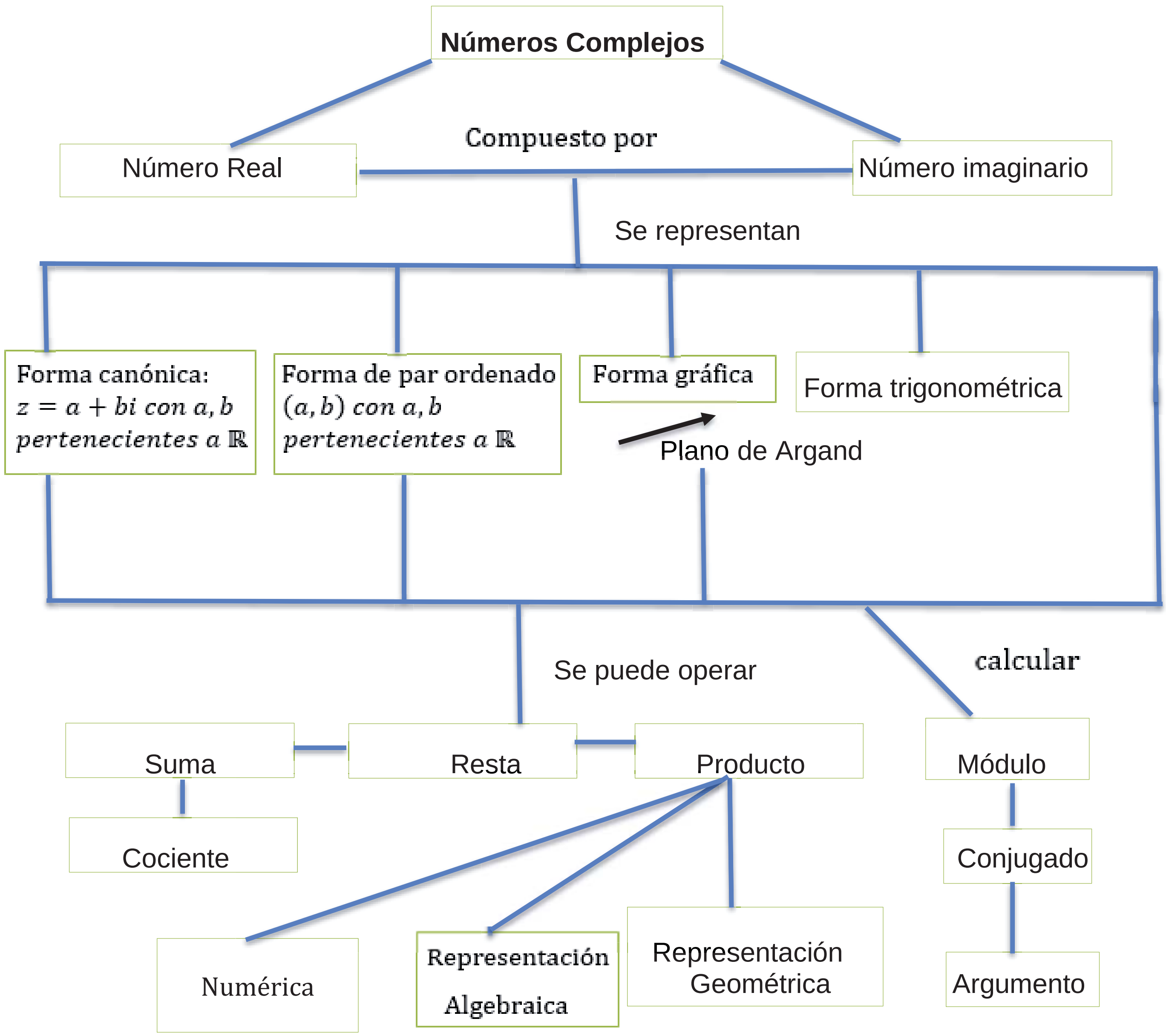
Se privilegia la representación algebraica

R.G



Aparece como anexo en el texto de estudio

MAPA CONCEPTUAL OBJETO MATEMÁTICO



ANÁLISIS CURRICULAR

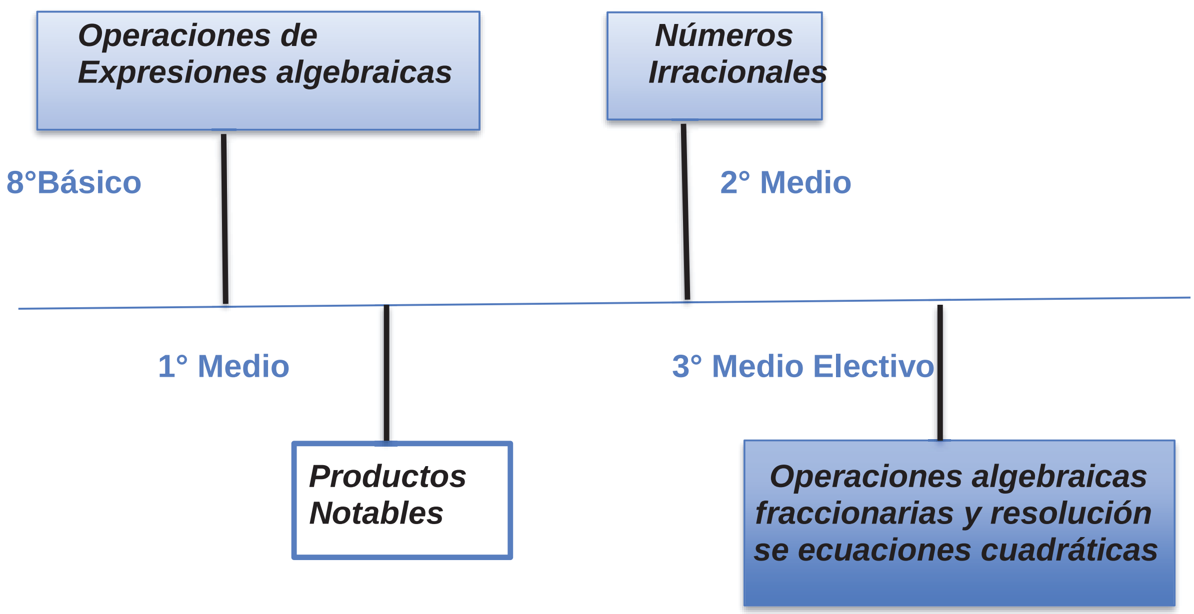
Una mirada desde el Currículum da cuenta de las nociones del concepto de la multiplicación de los números complejos, a partir del nivel de séptimo año básico a tercer año medio. En séptimo básico el aprendizaje esperado se centra en comprender las raíces cuadradas de números naturales, aplicándolas en la vida cotidiana y en situaciones geométricas. Este aprendizaje permite a los alumnos de enseñanza media entender que el módulo de un complejo z es igual a la raíz de la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del complejo z, y que el módulo de un complejo representa una longitud, siempre será positivo, salvo que el complejo sea $z = 0 + 0i,$ en este caso el módulo es 0. Así también, identificar puntos en el plano cartesiano y vectores. Los estudiantes necesitan estos conocimientos y aprendizajes previos para poder comprender que el número complejo representa un vector que parte desde el origen del sistema coordenado hasta el punto. Desde este instante, empiezan a trabajar con raíces y comprenden el significado de ellas, ya que el ubicar un par ordenado en el plano cartesiano es el inicio o el despliegue para representar geométricamente la multiplicación de números complejos en el plano de Argand.

En octavo año básico el aprendizaje esperado se centra de comprender las operaciones de expresiones algebraicas, éstas se aplican en la multiplicación de números complejos y son relevantes para comprender el procedimiento de cada multiplicación mediante su representación algebraica. En primer año medio se trabaja con la habilidad de desarrollar productos notables de manera concreta y simbólica. En el conjunto de los números complejos se puede trabajar usando la forma binómica resolviendo operaciones, específicamente multiplicando dos números complejos. En segundo año medio se analiza con profundidad los números irracionales y la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales, donde utilizan la definición $\sqrt{x^2} = |x|$ para deducir que las raíces cuadradas son números ≥ 0. Deben surgir preguntas e interrogantes de parte de los estudiantes ¿A qué conjunto numérico pertenecen las raíces donde la cantidad subradical es negativa? Se les entrega una visión de este nuevo conjunto numérico y algunas de sus características.

En el nivel de tercer año medio, plan electivo “Álgebra y Modelos Analíticos”, el objetivo es transformar expresiones algebraicas racionales, operar con ellas y resolver ecuaciones. Así también, conocer el significado de raíces n-ésimas. Enfocándose en ejercicios que deben resolver a partir de productos notables, incluyendo raíces, dando una noción y centrándose con mayor fuerza en la multiplicación de números complejos.

Desde la enseñanza básica hasta la enseñanza media, el Currículum otorga a los estudiantes luces de la multiplicación de números complejos a partir de la compresión de conceptos previos como plano cartesiano, par ordenado, vector, productos notables, entre otros, que encaminan hacia el aprendizaje y el descubrimiento de este nuevo conjunto numérico.

LÍNEA DE TIEMPO ANÁLISIS CURRICULAR



ANÁLISIS DE TEXTOS

En el texto de matemática de tercer año medio, que otorga el Ministerio de Educación (2015), se visualiza la multiplicación de números complejos desde la representación algebraica como un complemento a las operaciones de adición, sin considerarla como una operación más de gran importancia dentro de la unidad. Al finalizar el capítulo de números complejos, se muestra como anexo la utilización del Software Geogebra para realizar la representación geométrica del producto de los números complejos, relacionando el módulo y el argumento del vector en la operación. Sin embargo, está considerado como una opción a abordar, que desarticula la representación algebraica y geométrica de la multiplicación de los números complejos.
En el texto de matemática de tercer año medio Santillana (2012), se encuentra una definición y explicación mucho más completa respecto a la representación algebraica de un número complejo, donde se define a partir de un ejemplo la operación de multiplicación, luego las propiedades que la operación cumple y la representación en el plano de un número complejo. Sin embargo, no aborda la representación geométrica

del producto de números complejos, y en menor medida la relación existente entre vector y el ángulo que lo comprende.
Desde el texto del *saber sabio* Spiegel (2009), se desarrolla en profundidad la representación geométrica del producto de los números complejos, de tal forma que pone de relieve la trigonometría para poder abordar el producto. Un texto más completo referente al objeto matemático, ya que articula las distintas representaciones, otorgando más sustento teórico a los números complejos.
Existe una distancia en los textos eruditos y escolares, desde definiciones, conceptos y las distintas representaciones que se presentan, específicamente en los textos escolares, no articulan el tránsito entre la representación algebraica y geométrica, haciendo de éstas elementos anexos y sin coherencia.

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

En este estudio epistemológico se dará a conocer los procesos de descubrimiento respecto al objeto matemático multiplicación de números complejos, específicamente la historia de los primeros indicios de la matemática, concepto de error, las afirmaciones y criterios de validez respecto al objeto analizado. El análisis que se dará a conocer transita desde los siglos XVIII y XIX da cuenta de la importancia de los matemáticos que ocuparon un lugar predominante en la evolución histórica del análisis. El énfasis está en el siglo XIX, ya que desde varios estudios e investigaciones sale a luz el concepto de número complejo y la representación geométrica de la multiplicación de números complejos.
El inicio de los números complejos se remonta a la Grecia Antigua, con el intento de resolver ecuaciones de segundo grado. La geometría en aquellos tiempos era muy relevante y los griegos resolvían problemas por medio de longitudes y áreas; en este contexto las raíces negativas eran irresolubles y los griegos no conocían métodos geométricos de resolución. Los matemáticos de aquellos tiempos no estaban interesados en ello, y la motivación mayor se da recién con la aparición del álgebra y el intento de resolver ecuaciones de tercer grado, saliendo a luz las investigaciones asociadas a los números complejos.
En el año 1539 el médico y matemático Cardano conoce a Niccolo Fontana (Tartaglia), según Rivero (2001) Tartaglia fue crucial en la vida de Cardano, ya que desde ese momento comienza a interesarse en las ecuaciones cúbicas. Aquel era un experto en el estudio de las trayectorias de proyectiles, y fue quien descubrió que la máxima trayectoria se obtiene cuando el ángulo de disparo es igual a 45°; además hizo la primera traducción a los elementos de Euclides. Es por ello que fue un matemático con gran prestigio, ganando concursos por sobre la resolución de ecuaciones ocupando métodos secretos. Tartaglia le enseñó todos sus métodos secretos a Cardano, haciendo un juramento de ello. En el año 1545 Cardano publica su obra *"Ars Magna",* donde presenta los métodos para resolver ecuaciones cúbicas; Tartaglia queda abismado con la noticia, porque según él habían hecho un juramento donde Cardano

prometía no exponer su secreto. La obra del método Cardano, se basa en eliminar x^2 en una ecuación cúbica, además del método de las proporcionalidades para resolver ecuaciones diferenciales, hizo por primera vez las raíces cuadradas de números negativos y con mucha mesura consideró usar los números imaginarios. Es en el año 1570 cuando Cardano profundiza en los números complejos y hace énfasis en los métodos para manipularlos.

"Fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de Cardano donde se dio el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación." (Rivero, 2001, p. 6).

$$x^3 = 3px + 2q$$

Cardano nos da la fórmula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Conocida como Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano

¿Cuánto podríamos avanzar en ello?
30 años más tarde, el protagonismo fue del matemático Rafael Bombelli quien conocía bien los trabajos y obra de Cardano, pensó que había cosas confusas y que podía investigar más allá. Este fue el primero en trabajar álgebra formal, según Rivero (2001) expresiones de la forma

$$a + b\sqrt{-1}.$$

El propósito de Bombelli era reducir la fórmula de Cardano $\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$ a $a + b\sqrt{-1}$ la solución era elevar esta fórmula al cubo y luego se obtendrá lo que desea.

El gran aporte que realizó Bombelli fue aceptar el $\sqrt{-1}$ como un número.
Bombelli brinda las siguientes reglas $\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n} = -n$

$$\sqrt{-n} \cdot -\sqrt{-n} = n$$

A pesar del trabajo expuesto por Bombelli los matemáticos de ese tiempo no se interesaban mucho en los números complejos. Es más, en el siglo XVII los números complejos fueron ignorados completamente. Matemáticos como Newton, Leibnitz y Descartes nunca comprendieron estos números. En este mismo siglo sale a luz algunos aportes al surgimiento de los números complejos, Albert Girard sugiere la ecuación polinómica y René Descartes es el primero que nombra estas raíces que no son reales como "números imaginarios".

La contribución de los estudios que se ha desarrollado hasta el momento de los números complejos ha desencadenado una serie de investigaciones más, así a finales del siglo XVIII Leonhard Euler y Jean Le Rond D´Alembert fueron los primeros en utilizar la notación i para una raíz cuadrada $\sqrt{-1}$ y que cada expresión contiene magnitudes imaginarias de la forma $\propto -\beta i$ siendo $\propto y\, \beta$ números reales. Y a comienzos del siglo XIX Johann Carl Friedrich Gauss introdujo y fundamentó las operaciones de los números complejos y propuso el término de "número complejo" de la forma $a \pm bi$. Así también, tras una serie de estudios sale a relieve su trabajo "Teorema fundamental del álgebra", en este estudio retoma la cuarta demostración respecto a la existencia de estos números como una solución de un polinomio. Mencionando que las raíces complejas $a + bi$ corresponden a puntos (a, b) en el plano.

$$P(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Los estudios siguen su curso y en el año 1821 el matemático Agustín Louis Cauchy realiza un descubrimiento importante sobre el "módulo" de un número complejo y Gauss en 1828 descubre la "norma" de un número complejo y en conjunto revelaron el "conjugado" de un número complejo. Para Cauchy existe un vínculo entre el análisis real con el análisis complejo, para ello estudia cada una de las propiedades de los números reales y complejos, e intenta emplear las propiedades de los números reales en los números complejos.
Según Zea (2012) en el año 1831 Gauss dio a conocer su estudio e introduce la representación de $a + bi$ que la identifica con la pareja ordenada (a, b) en el plano cartesiano. Este estudio permitió describir la adición y multiplicación geométrica de los números complejas, dando paso a utilizar el símbolo i en $\sqrt{-1}$[18].
A comienzos del siglo XIX no había claridad sobre las propiedades de los números complejos, ya que carecía de estudio y era un concepto bastante ambiguo. A final del siglo XIX Richard Dedekind y Georg Cantor, lograron caracterizar el concepto del conjunto de los números complejos. Quien logró fundamentar y sentó las bases de la definición de los números complejos y sus operaciones fue Hamilton en 1843, logrando también darle una mirada desde su representación geométrica como puntos en el plano. Es así como varios matemáticos implementaron la estructura de los números complejos a los vectores, es decir la representación geométrica de los vectores como puntos en el plano.
En el año 1973 el matemático J. Wallis en el siglo XVII expuso la primera interpretación geométrica de los números complejos y en sugerir que los números imaginarios podrían representarse en una recta perpendicular al eje de los números reales.

Figura 1. Muestra la forma como John Wallis representaba el número complejo $a + bi$, ilustra una recta horizontal en la parte real de la raíz, luego se ubica el número sobre la recta y se traza una línea perpendicular a ella, cuya prolongación es representada por el número multiplicado por $\sqrt{-1}$[14], como resultado la parte imaginaria de la raíz.

Posteriormente, Caspar Wessel realizó un trabajo con el objetivo de determinar la forma de representar la dirección analíticamente de los números complejos, sin embargo, su trabajo no fue reconocido y tomado en cuenta en aquella época. Tiempo después, publica los números complejos como entidades que pueden ser adicionadas, sustraídas, multiplicadas y dividirlas. Según Zea (2012) C. Wessel menciona que un vector puede ser representado geométricamente por un número complejo $a + \varepsilon b$, representando un segmento de línea $\overline{OA}$ y con unidades en el plano $+1$ $y + \varepsilon$.

Según la representación expuesta, C. Wessel alude que cualquier línea en el plano puede ser representada analíticamente de la forma:

$a + \epsilon b = r(\cos V + \varepsilon \operatorname{sen} V)$ Siendo r: la longitud del segmento $\overline{OA}$

Así concluyó que puede expresar la adición de dos segmentos de forma algebraica, la que representa la diagonal de un paralelogramo.
A través de sus estudios e investigaciones C. Wessel tuvo la noción de espacio vectorial ya que manifiesta que cualquier punto en el espacio podría ser representado por un vector y la multiplicación de vectores la interpretó como una rotación y extensión de un vector sobre otro. Estas rotaciones tenían un comportamiento en particular, $\sqrt{-1}$ representa una rotación de 90° y $-\sqrt{-1}$ representa una rotación de -90°.

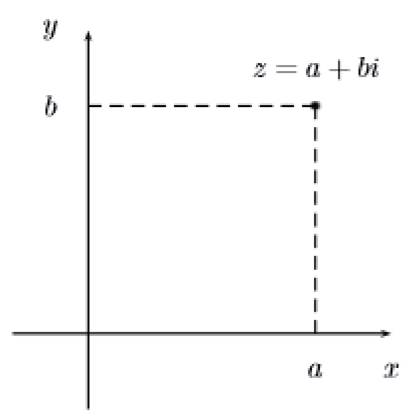


Figura 2. Los matemáticos que se acercaron más a la representación geométrica de los números complejos fueron C. Wessel y J. Argand publicada en el año1806, obra que se conoce como el Diagrama de Argand.

Los matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) y Abbé Buée (1748-1826) realizaron varios estudios y publicaciones en conjunto, este último hizo un ensayo del tratamiento aproximado sobre la representación geométrica de los números complejos.

En el año 1806 mostró una representación geométrica de la adición y multiplicación de los números complejos y desde este se desprendían varios teoremas en álgebra, trigonometría y geometría elemental.

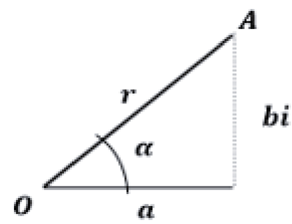


Figura 3. Muestra como J. Argand representaba el número complejo $a + bi$, por medio de un segmento de línea dirigido $\overline{OA}$ de magnitud r.

La representación geométrica analizada por Argand ya venía siendo estudiada anteriormente por otros autores, sin embargo, él pudo dar la sustentabilidad a esta representación y la que actualmente hoy se conoce y trabaja.
Varios años concurrieron para poder llegar a comprender los números complejos, gracias a los estudios e investigaciones hechos por los matemáticos en la historia. En 1831 el matemático Carl F. Gauss publica un estudio sobre las propiedades de los números complejos de la forma $a + bi$, llamados actualmente Números Gauss. Así también, Hamilton y Cayley contribuyeron a la creación de los números hipercomplejos y Cauchy quien sienta las bases del cálculo diferencial e integral de las funciones complejas. Finalmente, B. Riemann fue quien amplió más allá la matemática ya que dio paso a la topología y la compresión de este concepto.

En los últimos años de la investigación educativa matemática ha salido a la luz la importancia de los aportes de la historia y la epistemología en la enseñanza, contribuyendo y fundamentando la problemática de la enseñanza del objeto matemático.
La relevancia de analizar la historia de los números complejos radica en comprender el concepto y los aspectos clave del origen del objeto matemático. La epistemología de la matemática es una herramienta didáctica que permite que los estudiantes puedan relacionar esta disciplina con otras como la historia y el arte. Estas investigaciones y estudios proporcionan valiosos elementos para un trabajo crítico y creativo como profesor, proporcionando criterios que guíen al docente por la línea de planificación, así como también realizar un análisis *a priori* y predecir las posibles dificultades de los estudiantes. Es necesario que el profesor comprenda la historia de la matemática y que pueda llegar a explicar a los estudiantes las referencias históricas, motivarlos e intentar un aprendizaje mucho más significativo desde la epistemología, ya que esta brinda la construcción de competencias y la conciencia del propio saber matemático.

Para la formación de profesores se debe contemplar la construcción epistemológica y análisis de los textos desde el saber sabio y el saber a enseñar para dar un análisis global del objeto matemático a enseñar. Así también, los mapas conceptuales ponen de relieve los conceptos más relevantes y que dan origen a esta estructura matemática, permitiendo tener los conocimientos en su totalidad para un aprendizaje significativo de los estudiantes.

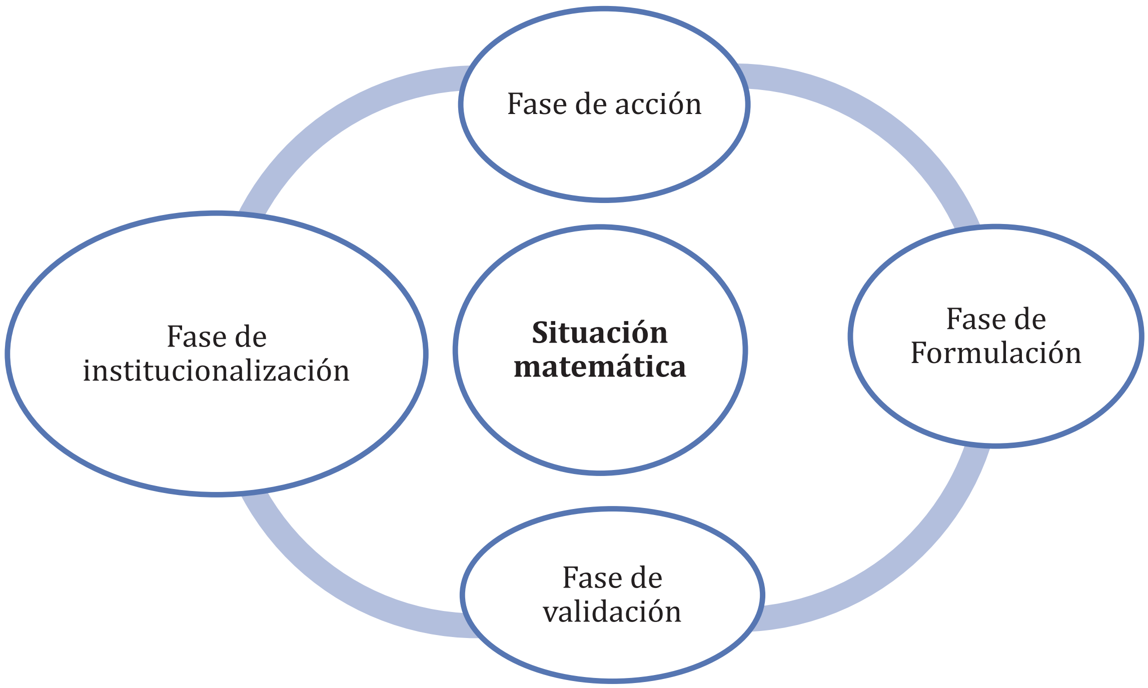
MARCO TEÓRICO

"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Sadovsky, 1986, p.2).

En esta cita se plantea la elección y pertinencia de la Teoría de las Situaciones Didácticas en el objeto matemático "multiplicación de números complejos". La concepción constructivista considera el conocimiento como la resulta de la adaptación al medio con el que interactúa, el cual contribuye a la enseñanza y aprendizaje colaborativamente, desde las interacciones sociales entre los estudiantes, docente y saber matemático, lo que condiciona y propicia la construcción del conocimiento. La teoría de situaciones es una teoría de aprendizaje constructiva, en el que el aprendizaje se produce mediante la resolución de problemas, el alumno anticipa, formula y prueba las propuestas de otros compañeros apropiándose de ellas. Es por ello que se utilizará para describir de manera precisa el efecto que tendrá el plan de clase en el aprendizaje, de tal manera que se pueda atender al objetivo de esta investigación. La elaboración de una secuencia didáctica es una tarea importante para organizar situaciones de aprendizaje intencionadas que propician la conceptualización del objeto matemático. En este sentido, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986) hace énfasis en las preguntas e interrogantes que el profesor propone a los alumnos, de manera que estos reflexionen y validen sus respuestas. Del mismo modo, aprenden por las actividades que realizan y la significatividad de llevarlas a cabo, además de la posibilidad de expresar y validar ante sus compañeros las ideas e interpretación de la información, con el objetivo de que se apropien de un saber construido o en construcción.

SITUACIONES DIDÁCTICAS DE BROUSSEAU

Brousseau (1986) identifica en una situación matemática las fases o estadios, estos son los siguientes:



FASE ACCIÓN

El alumno se hace cargo del problema, emite hipótesis, elabora procedimientos, los pone en práctica y los adapta. Organizando estrategias con el objetivo de construir una representación de la situación que funcione como modelo y les ayude a tomar decisiones.

FASE DE FORMULACIÓN

El medio de aprendizaje comprende un receptor y/o emisor con el cual el o los alumnos intercambiarán mensajes, esta será la base de la comunicación. La actividad matemática que los alumnos realizan es formular enunciados, construir modelos, lenguajes, conceptos y los intercambian con uno a varios de sus compañeros.

FASE DE VALIDACIÓN

El medio de aprendizaje debe ser utilizado para la comprobación de las respuestas del problema con el que se enfrentaron los alumnos. En esta comprobación los alumnos pasan de conocimientos a saberes, y el profesor tiene la responsabilidad de los conocimientos construidos mediante el desarrollo de la clase.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Todas las situaciones anteriores deben constituirse en un reconocimiento de lo aprendido, una forma de concluir los saberes de los alumnos. Donde se establecen relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural, se concluye a partir de lo producido por los alumnos, recapitulando, ordenando y vinculando lo que se mencionó en los diferentes momentos de la clase.

En la teoría se espera que las diversas fases se articulen entre ellas, para permitir la comprensión del objeto matemático por parte de los alumnos. La problemática esencial, en la cual se enmarca esta teoría es lograr propiciar el tránsito entre la representación algebraica y geométrica del producto de los números complejos, a través de la conexión de las diferentes fases de la teoría.
Según Chavarría (2006) esta teoría potencia una adecuada interrelación entre el docente, el alumno y el saber. En esta posición el objetivo del alumno es que integre, comprenda los conocimientos matemáticos respecto a la multiplicación de números complejos y aprenda a enfrentarse a estos problemas sin la intervención didáctica directa del profesor. Finalmente, realizar una innovación bajo este marco teórico posibilita la explicación de los momentos (situaciones de aula) importantes que se presentan en la clase matemática. Otorga herramientas no sólo para delimitar y explicar situaciones existentes, sino también se caracteriza por su perspectiva constructivista, por la voluntad de enfrentar al alumno en una situación de producir conocimientos con el objetivo de transformar un conocimiento a un saber

SECUENCIA DIDÁCTICA

BREVE EXPLICACIÓN, ORGANIZACIÓN DE SECUENCIA Y OBJETIVOS

Los últimos años han sido un escenario de cambios profundos en la enseñanza de la matemática, tanto en el currículum como a nivel general y en el área educativa. Éstas intentan atender a las problemáticas que se suscitan en la educación, como la mecanización del álgebra, desarticulación entre las representaciones, desarticulación entre la representación algebraica y geométrica en los textos de estudio, entre otros. Bajo este escenario se enmarca la secuencia didáctica, donde se centra en organizar situaciones y proponer secuencias de actividades sustentadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau que permitan establecer estrategias didácticas basadas en el aprendizaje, que permitan a los alumnos en forma significativa comprender el objeto matemático números complejos, privilegiando el uso de la representación geométrica en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es así, como en esta secuencia didáctica elaborada se presenta los principales elementos como los objetivos, tareas matemáticas y análisis a priori asociadas a cada clase planificada respecto al objeto matemático.

La estructura en el que está alineada la secuencia establece una serie de actividades que tienen un orden entre sí, permitiendo determinar un grado de complejidad de forma creciente. El primer plan de clase, se enfoca en deducir las relaciones que existen entre argumentos y módulos del producto de los números complejos en el plano de Argand. En el segundo plan de clase, los alumnos crean un Applet en el Software Geogebra sobre la representación geométrica del producto de los números complejos; esta representación les permite deducir, analizar e interpretar la variación de los argumentos y módulos de cada número complejo, el escenario donde los alumnos reafirman los conocimientos de la clase anterior. Finalmente, en el tercer plan de clase los alumnos trabajan la multiplicación de números complejos a través de la rotación dilatativa, combinado una rotación y dilatación con el mismo centro, permitiendo involucrar mayor complejidad y análisis a diferencia de las actividades anteriormente desarrolladas.

La elección y pertinencia de la Teoría de las Situaciones Didácticas del objeto matemático, se justifica ampliamente puesto que contribuye a la enseñanza y aprendizaje de la matemática colaborativamente, desde las interacciones sociales entre los estudiantes, docente y saber matemático, lo que condiciona y propicia la construcción del conocimiento matemático. Esta teoría sustenta las secuencias de clases elaboradas y se enmarca enfatizando en las preguntas que propone el profesor a los alumnos, recuperando nociones, respuestas, relacionando, demostrando, siendo el alumno su propio gestor del aprendizaje. El alumno aprende por lo que realiza en clases (“aprender haciendo”), por el significado que le entrega la actividad llevada a cabo y la posibilidad que se puedan integrar nociones, concepciones, por la capacidad de poder expresar ante sus pares la construcción de su propio conocimiento matemático.

CLASE 1

ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LA CLASE

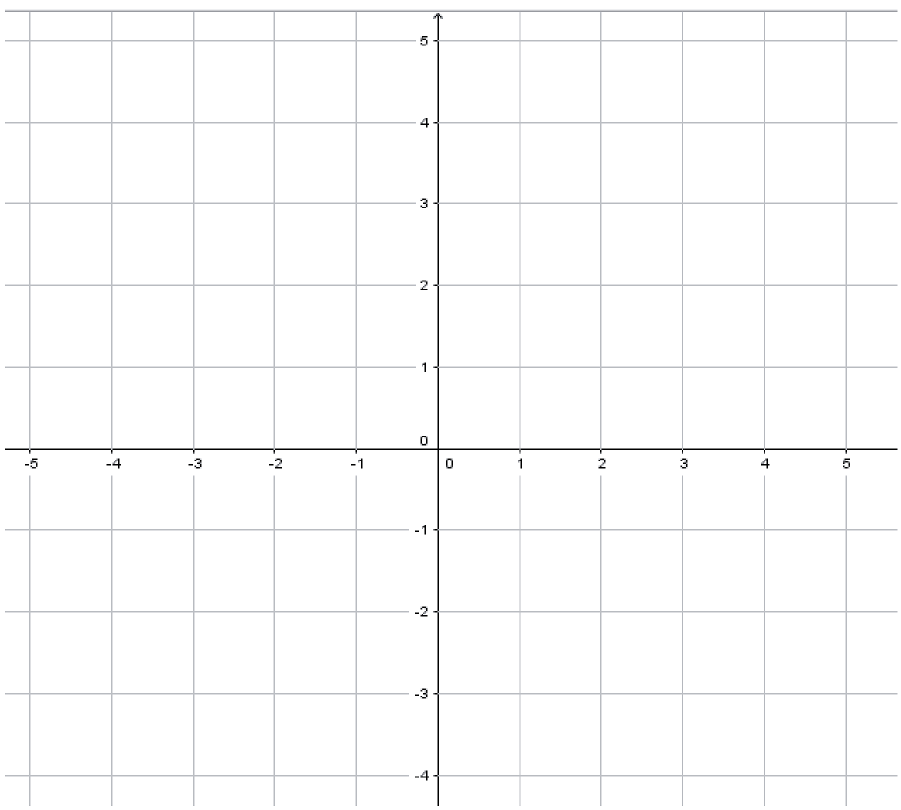
Ítem I

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

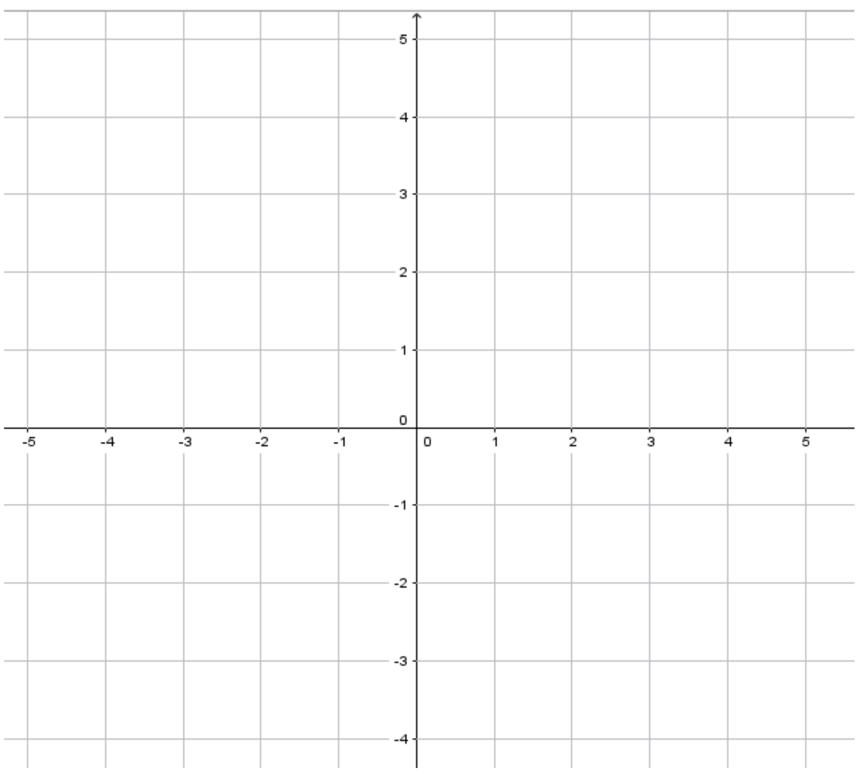
Ítem II

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + +i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$\lvert z_1 \rvert =$ $\lvert z_2 \rvert =$ $\lvert w \rvert =$

e) ¿observan alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

ANÁLISIS A PRIORI

OBJETIVO CLASE

Analizar de manera gráfica la solución del producto de los números complejos.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE LA CLASE

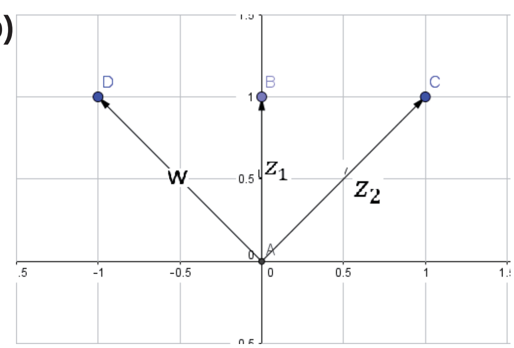
En la primera clase planificada, las actividades de la guía están enfocadas en encontrar las relaciones geométricas que existen en la multiplicación de números complejos. Para esto se empieza a trabajar con el registro algebraico, donde se grafica el producto, determinan los argumentos y módulos de los números complejos comprendidos.
Con respecto al argumento, lo primero, es inducir a los alumnos a través de preguntas orientadoras: ¿Qué ángulo posee cada número complejo? ¿Hay una relación entre los ángulos de estos números complejos? respecto a la relación que existe entre los argumentos de los dos números complejos dados y el argumento del producto, habiendo determinado el resultado previamente de manera algebraica. En el Ítem I los números complejos dados son $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$, los cuales al ser representados en el plano, determinarán sus ángulos de 90° y 45° respectivamente se decidió que fueran ángulos exactos para facilidad de la actividad propuesta. Al multiplicar los dos números complejos $z_1 = i \ y \ z_2 = 1 + i$ resulta $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = -1 + i = w$ de este encontrarán su argumento, el cual es de 135°. En esta primera parte, los alumnos encontrarán una relación entre los argumentos, en donde se espera que descubran: $\theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \theta_w$. En esta primera tarea se espera básicamente que los alumnos entren

en la fase de formulación, a través de los cálculos que ellos han desarrollado, trabajando y comparando con sus compañeros las respuestas.

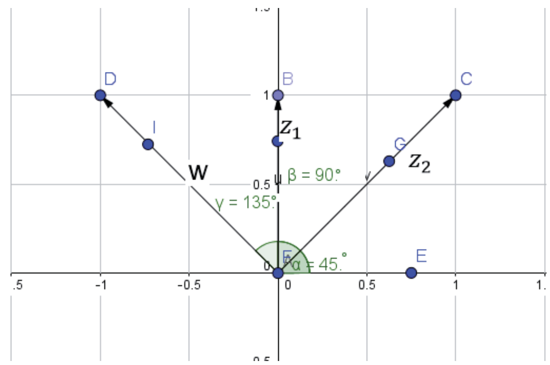
Estas relaciones anteriormente mencionadas serán validadas en la multiplicación de otro par de números complejos trabajados en el ítem II. Es aquí, donde los alumnos desarrollarán el producto de $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$ de manera algebraica, representarán los números complejos correspondientes en el plano, determinarán sus argumentos, sus módulos y darán respuestas a las preguntas planteadas en grupo dando paso la fase de validación, aceptando y rechazando los resultados obtenidos en la tarea matemática.

Al finalizar el Ítem II, vendrá la fase de institucionalización en donde se sacan conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se recapitula, se ordena y vincula lo que se produjo en los diferentes momentos en el desarrollo de la clase. Se da cuenta de las propiedades identificadas y verificadas por los alumnos respecto a la multiplicación de números complejos y se cumple en su dominio. Al realizar los alumnos las actividades anteriores deberán llegar a la conclusión que al multiplicar dos números complejos se cumplen ciertas regularidades, la suma de los ángulos del producto de dos números complejos es igual al ángulo del número complejo resultante y la multiplicación de los módulos del producto de dos números complejos es igual al módulo del complejo resultante.

RESPUESTA EXPERTA

Actividad	**Respuesta experta**
Ítem I Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w b) Representa en el plano cada número complejo y su producto. c) ¿Qué observas? Argumenta tu respuesta	**a)** $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = -1 + i = w$ **b)** 

c) Se observan 3 vectores, por ser vector poseen un ángulo.



Ítem II

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w.

b) Representa en el plano cada de los números complejos y su producto

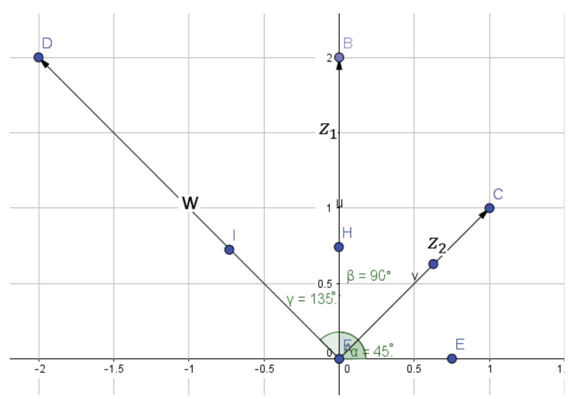
c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos
¿Hay alguna relación que observes entre los módulos?

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

a) En la multiplicación obtendremos $2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$.

b) Al representarlo como vectores y sus ángulos obtendremos:



c) Se observa que $\theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \theta_w$.

d) Al desarrollar los módulos obtenemos:

	$\lvert z_1\rvert = \sqrt{4}$, $\lvert z_2\rvert = \sqrt{2}$ y $\lvert w\rvert = \sqrt{8}$ se observa que $\lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert = \lvert w\rvert$ **e)** Se observa que el en ítem 2 el vector del producto tiene mayor longitud ya que de $z_1 = i$ pasamos a $z_1 = 2i$.

POSIBLES ESTRATEGIAS Y DIFICULTADES DE LA CLASE

Actividad	**Dificultades, errores y devoluciones**
Ítem I Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ **a)** Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w **b)** Representa en el plano cada número complejo y su producto. **c)** ¿Qué observas? Argumenta tu respuesta	**Dificultades** **a)** Se puede generar confusión al multiplicar $i \cdot i$ y no asociarlo a la unidad. **Devolución** ¿Cómo multiplicar $x \cdot (3 + x)$? ¿A cuánto equivale i^2? ¿A cuánto equivale i? **Se puede sugerir a los alumnos al principio de la clase que $i^2 = -1$** **b)** Puede generar dificultad graficar un número complejo i **Devolución** Se puede realizar una pregunta para orientar: ¿Cómo se representa en el plano las coordenadas $(2,0)$ y $(0,2)$? **c)** Está la posibilidad que el alumno no visualice la relación que cada número complejo tiene su argumento. **Devolución:** De no haber orientaciones por parte de los alumnos a la observación del gráfico entonces se les preguntará ¿Cuál es el ángulo que forma el semieje positivo x en cada uno de

los vectores? ¿Hay una relación entre los ángulos de estos números complejos

Errores

a)

- Cuando multiplica de forma correcta, pero comete un error al sumar términos que no son semejantes:
$i \cdot (1+i) = i + i^2 = \ i^3$

Devolución

Visualiza la siguiente propiedad de potencias para la multiplicación:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$¿\, Es\ el\ mismo\ procedimiento\ para\ la\ operación\ de\ adición?$

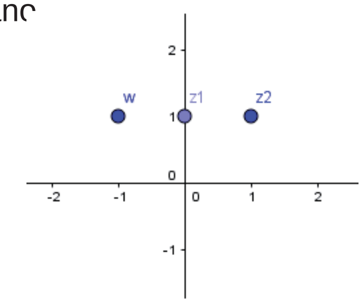
- Multiplican sin hacer uso del paréntesis y la propiedad distributiva:
$i \cdot 1 + i = i + i = 2i$

Devolución

¿Es igual $2 \cdot (1+3) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$?
¿Conoces la propiedad distributiva? Ejemplifica

Estrategias

b) Se espera que los alumnos grafiquen en el plano a través de vectores y puede que algunos sólo representen el punto en el plano



Ítem II	Estrategias
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$ **a)** Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w. **b)** Representa en el plano cada número complejo y su producto **c)** ¿Qué observas en relación con los ángulos? **d)** Determina sus módulos ¿Hay alguna relación que observes entre los módulos? **e)** ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?	**a)** Los alumnos toman como ejemplo la multiplicación de un término algebraico por un binomio para resolver la operación algébrica de números complejos. **e)** Los alumnos evidenciarán en el Ítem II a través de la representación gráfica, que el vector del producto tiene mayor longitud que el vector del producto del Ítem I **Dificultades** **a)** Los alumnos, podrían realizar la multiplicación con respecto a un solo término de z_2. **b)** Se espera que los alumnos representen en el plano el mismo ángulo para cada uno de los números complejos, asociándolos con los del primer ítem. **c)** Posiblemente expresarán que son los mismos ángulos del ítem anterior, pero no la relación de la suma, por lo que de ser así se les preguntará: **Devolución** ¿Cómo se relacionan estos ángulos? O ¿Existirá alguna relación entre los ángulos que hemos graficados 45°, 90° y 135°? Quizás aún haya alumnos que no logren ver aún la medida de los ángulos por lo que se les pedirá remarcar el ángulo asociado con su medida. **d)** Al determinar los módulos puede que algunos intenten dejar las raíces en decimales y se pierdan en el cálculo, por lo que será importantes primero revisar sus desarrollos y pedirles que lo dejen expresados como raíces. También puede que algunos alumnos no recuerden la propiedad de multiplicación de raíces. **Devolución** Si los alumnos no logran observar geométricamente lo que pasa con la longitud de sus módulos será importante preguntarles ¿qué es el módulo de un número complejo?, ¿qué representa geométricamente? **e)** Puede que no logren ver la relación entre el Ítem I y II a través de los cálculos.

	Devolución Una pregunta que ayude a relacionar este ítem con el anterior es preguntarles si estos ángulos son iguales a los del primer ítem. Se puede dar énfasis a la representación gráfica para que ayude a visualizar las longitudes que representa sus cálculos. **Errores** **d)** **-** Al momento de determinar sus módulos, consideran la parte imaginaria para su desarrollo. $\lvert z_1 \rvert = \sqrt{(2i)^2}$ **Devolución** Si tengo $\lvert z_2 \rvert = 1 + i = \sqrt{(1)^2 + (i)^2}$ ¿Puedes sumar términos semejantes?

MATEMÁTICA QUE SE PONE EN JUEGO EN LA CLASE, LOS CONOCIMEINTOS PREVIOS Y LOS QUE SE PRETENDEN DESARROLLAR

En la primera clase las actividades están enfocadas en torno a la matemática del nivel de 3 año medio, se pone de relieve la multiplicación algebraica de números complejos, graficar un número complejo, calcular argumento y módulo de un número complejo. Los conocimientos previos que necesitan los alumnos para poder desarrollar las actividades son:
-Concepto de multiplicación
-Multiplicando y multiplicador
- Multiplicar binomios
-Números irracionales

-Ecuaciones cuadráticas

-$i^2 = -1$

-$i = \sqrt{-1}$

-Multiplicar números complejos

-Comprender el concepto de vector, es relevante ya que el alumno que no comprenda el concepto no logrará identificar un número complejo con un vector en el plano de Argand.

-Comprender el concepto de módulo de número complejo, es importante ya que el alumno que no comprenda no podrá relacionar que el módulo representa la longitud del vector.

-Calcular el módulo de un número complejo

-Identificar coordenadas en el plano cartesiano

-Graficar un vector en el plano de Argand

-Graficar un número complejo en el plano de Argand

Se espera que los alumnos en el desarrollo de la actividad puedan visualizar la relación algebraica y geométrica de la multiplicación de números complejos. Específicamente, que al multiplicar dos números complejos la suma de sus argumentos es igual al argumento del producto y al multiplicar dos números complejos, la multiplicación de sus módulos es igual al módulo del número complejo resultante.

PLAN DE CLASE

Momento de la clase	Narración de la Interacción	Tareas matemáticas	Gestión de aula	Material Complementario
Inicio	El profesor da la bienvenida a los estudiantes y les señala cuál será el contenido y objetivo de aprendizaje que se trabajará en la clase. Se espera que los alumnos mantengan el orden, saquen sus materiales y se dispongan a tomar atención. Luego, se les entregará el taller para trabajar en él individualmente, con el propósito que el estudiante se responsabilice del problema. (10 min)	Exploración del alumno respecto a la guía entregada	El docente toma cierta distancia y su intervención queda orientada a algunas preguntas (sin dar respuesta al problema durante el proceso de resolución). ¿Podemos representar un número complejo en un sistema cartesiano? Se establece un contrato didáctico en donde se especifica lo que el profesor espera que realicen los alumnos y que por su parte irá guiándolos en el desarrollo de las actividades de la	Material para el alumno: -Guía Material profesor: plumón

			clase. Generando un ambiente propicio para el aprendizaje.	
Desarrollo	Los alumnos desarrollarán el ítem I de manera individual y luego se reunirán en grupos con los cuales discutirán las estrategias que permitieron desarrollar el Ítem I del taller, cuando se realizó de forma individual. Luego, seguirán trabajando con los mismos grupos conformados, pero en el Ítem II de la actividad presentada en el taller de matemática. Los alumnos, escogen a un representante de su grupo para intercambiar posibles respuestas, estrategias y formas de resolución respecto a los ejercicios propuestos en el taller, con los demás representantes de los grupos. El profesor realiza una lluvia de ideas en la pizarra de las conclusiones que realizan los estudiantes. (65 min)	**Ítem I** Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ **a)** Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w **b)** Representa en el plano cada número complejo y su producto. **c)** ¿Qué observas? Tiempo estimado: 20 minutos **Ítem II** Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$ **a)** Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w. **b)** Representa en el plano cada número complejo y su producto	En este momento de la clase los alumnos entrarán en una fase de acción en donde trabajan individualmente desarrollando y aplicando los conocimientos previos. El profesor adquiere la responsabilidad que la etapa de acción sea posible. Así también abordarán etapa de formulación.	Material para el alumno: -Guía

		c) ¿Qué observas en relación con los ángulos? **d)** Determina sus módulos ¿Hay alguna relación que observes entre los módulos? **e)** ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior? Tiempo estimado: 45 minutos.	En este momento de la clase los alumnos entrarán en una fase de formulación en donde trabajarán de forma grupal. Formulando y reflexionando respecto al ítem II.	
Cierre	Para este momento de la clase los alumnos entrarán en una fase de institucionalización donde se explica de manera formal lo que sucedió con sus desarrollos y se establecen las propiedades geométricas que posee el producto de números complejos. (15 min)	Deberán comentar las conclusiones a las que llegaron en la pizarra ante todos sus compañeros. Tiempo estimado: 15 minutos	El profesor crea el clima adecuado para que los alumnos contribuyan ideas y conclusiones a la fase de institucionalización.	

CLASE 2

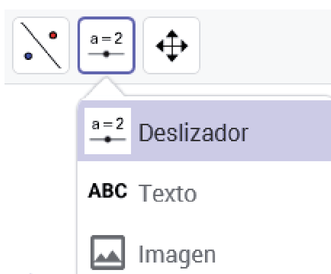
ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LA CLASE

Representación geométrica del producto de los números complejos

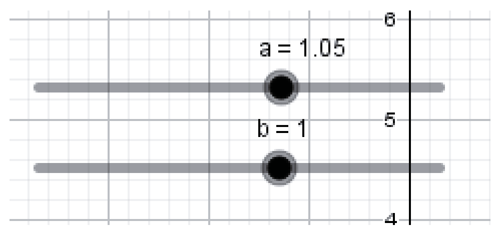
Trabajemos con Geogebra…

✓ **Crear 2 deslizadores a y b** (Figura 1 y 2) **con las siguientes características:**

Mínimo= -5
Máximo= 5
Incremento= 0.01

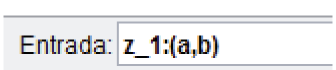


(Figura 1)

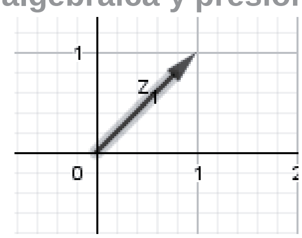


(Figura 2)

✓ **Ingrese z_1:=**(a, b) (Figura3 y 4) **a la entrada algebraica y presione enter.**

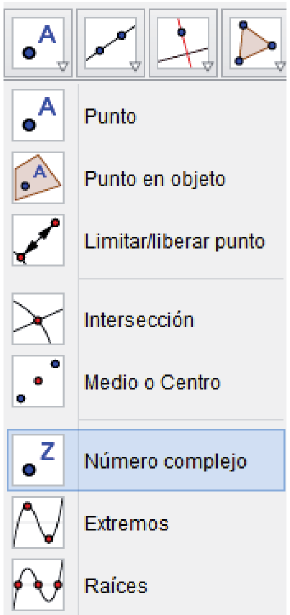


(Figura 3)

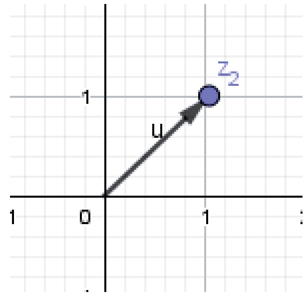


(Figura 4)

✓ **Ir a Punto y seleccionar número complejo,** (Figura5) **luego posicionarse en el extremo del vector y hacer clic para obtener z_2** (Figura 6).

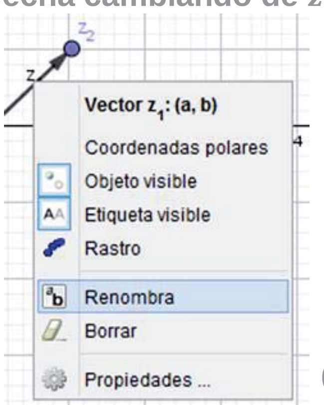


(Figura 5)

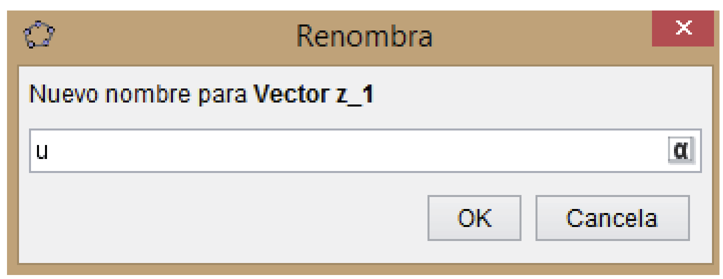


(Figura 6)

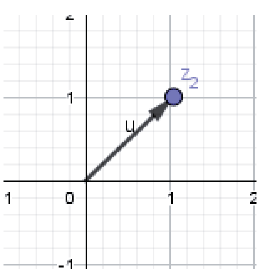
✓ **Posicionarse en el vector z_1, has clik en botón derecho y selecciona "renombra" para cambiar el nombre del vector a "u"** (Figura 7 y 8). **Así mismo, con el extremo de la flecha cambiando de z_2 a** "z_1" (Figura 9).



(Figura 7)

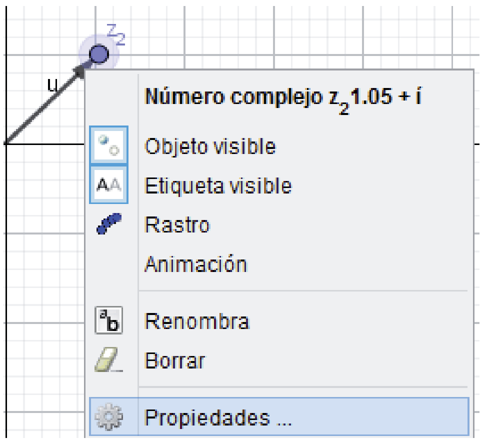


(Figura 8)



(Figura 9)

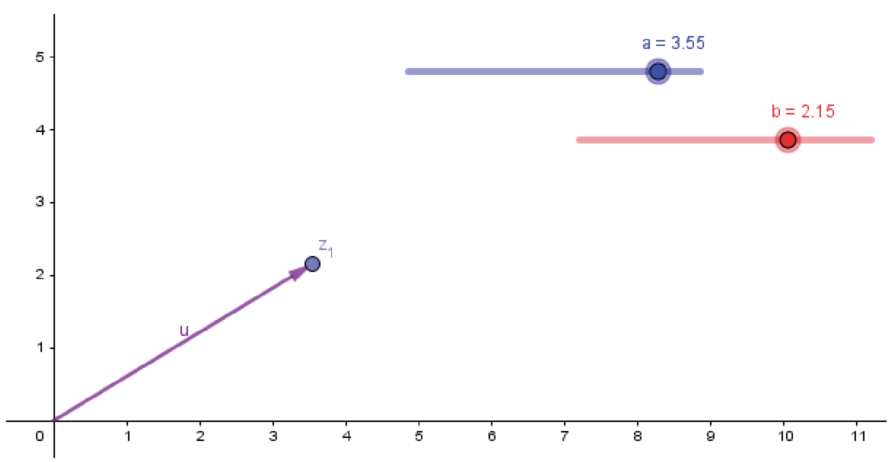
✓ **Posiciónese en el vector y seleccione propiedades para cambiar color y estilo al vector** (Figura 10 y 11). **De la misma forma con los deslizadores a y b.**



(Figura 10)

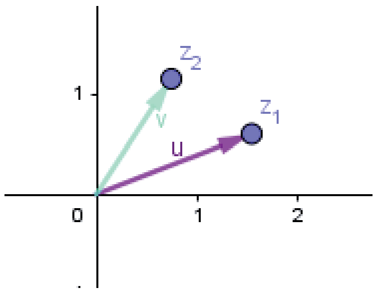
(Figura 11)

✓ **Al mover los deslizadores, puedes ver como la gráfica va variando de acuerdo a distintos valores de a y b originados anteriormente** (Figura 12).

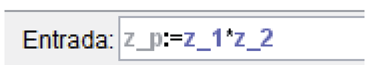


(Figura 12).

✓ **Sigue de la misma forma los pasos para representar el número complejo** z_2 $(\boldsymbol{vector\ v})$, **ver** (Figura 13).

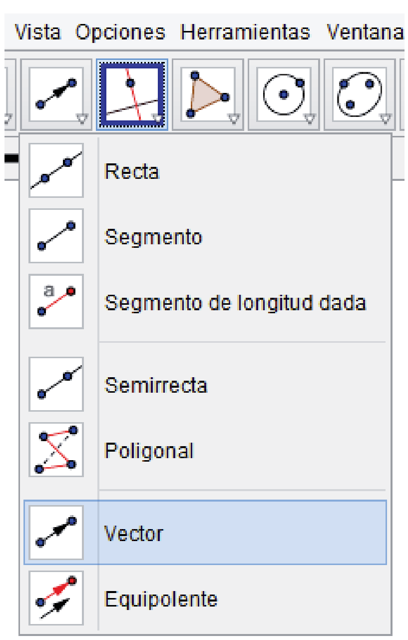


✓ **Ingrese z_p:=z_ ∗ z_2** (Figura14) **a la entrada algebraica y presione enter.**

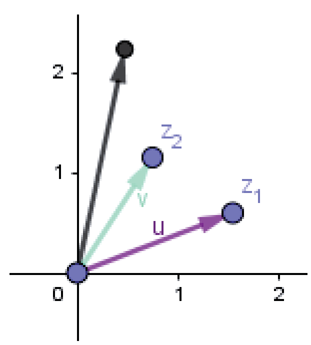


(Figura14)

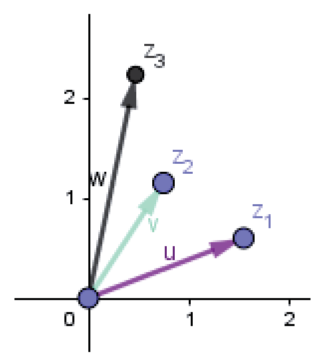
✓ **Mueva los deslizadores para que aparezca la coordenada del producto de los números complejos en la gráfica. Selecciona en opciones <u>Vector</u> y crea el punto de origen y el de la punta (coordenada resultante del producto de $z_1 \cdot z_2$) y grafica el vector. Renombra el número complejo como z_3 $(\boldsymbol{vector\ w})$ y sigue los mismos pasos indicados anteriormente** (ver figura 15, 16 y 17).



(Figura15)

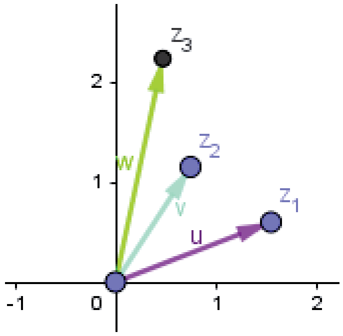


(Figura 16)



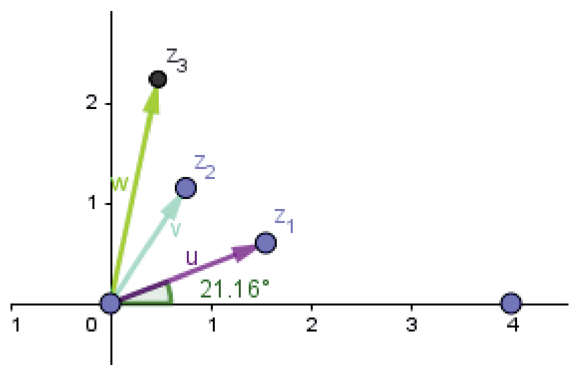
(Figura 17)

✓ **Posiciónese en el vector y seleccione propiedades para cambiar color y estilo del vector z_3** (Figura 18).



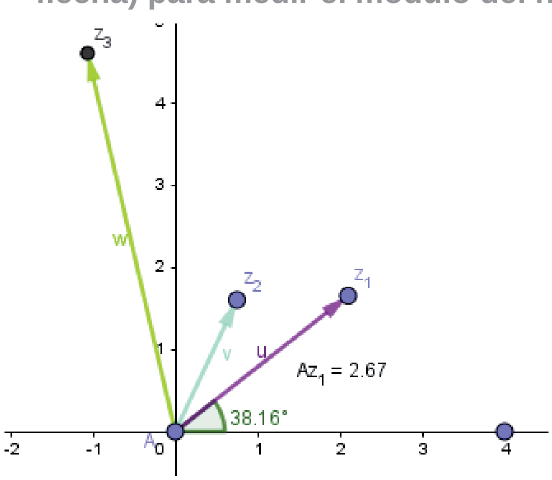
(Figura 18)

✓ **Elija un**  **externo al gráfico en el eje x. Escoja**  **en opciones y crea un ángulo para el número complejo z_1 seleccionando tres puntos en sentido anti horario (punto externo, en el origen y punta de la flecha) como aparece en la** (Figura 19).



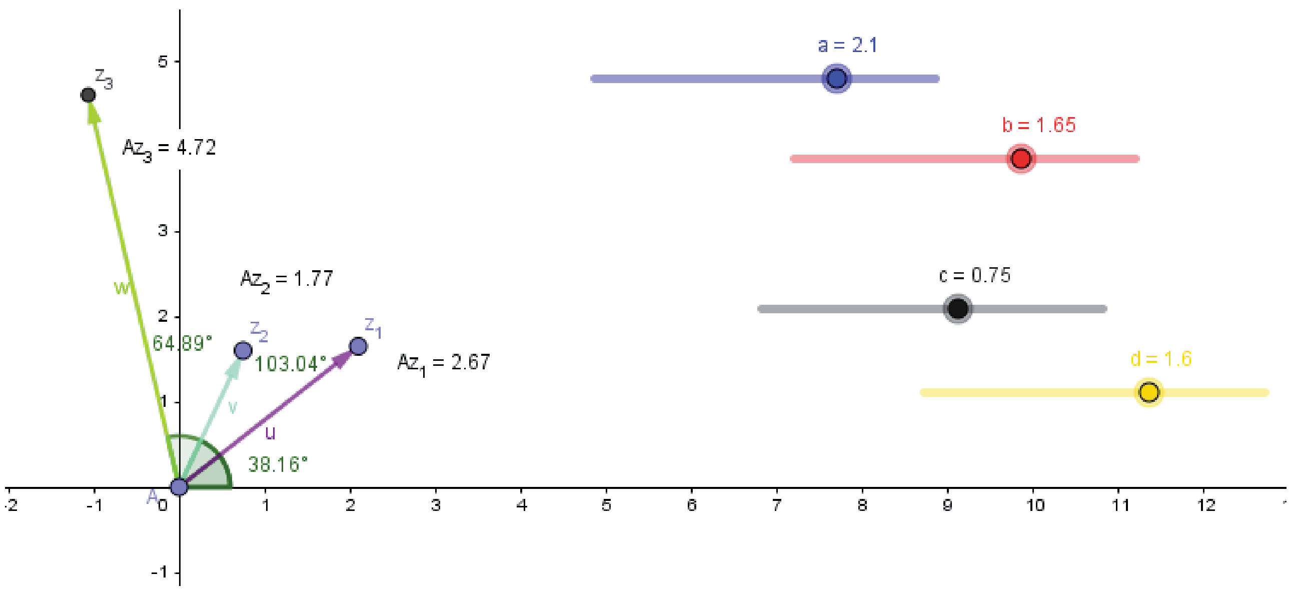
(Figura 19)

✓ **Escoja la herramienta**  **y seleccione dos puntos (origen y punta de la flecha) para medir el módulo del número complejo z_1** (Figura 20).



✓ **Realiza el mismo procedimiento para los números complejos z_2 y z_3. Realiza clic derecho en el punto externo creado y oculta objeto.**

Producto final en el software Geogebra



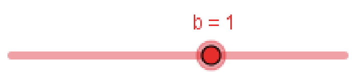
Propuesta… Analicemos el recurso digital Geogebra

1. ¿Qué puedes observar a medida que se mueven los parámetros a, b, c y d?

2. Sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0$ y mueve el parámetro del deslizador c. ¿Qué sucede con el vector resultante z_3 cuando se multiplica por un número real?

3. Si se mantienen los parámetros a y b, con $c = 0$. ¿Qué sucede con el vector z_2 cuando el deslizador d va variando?

4. Utilizando el recurso digital fija los



$a = 2 \quad b = 1$
$c = -1 \quad d = 3$

a) Según la gráfica ¿Cuáles son los números complejos $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?

b) ¿Cuánto miden los argumentos para cada número complejo $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?

c) Expresa en una o dos frases la relación entre los argumentos

d) ¿Cuánto miden los módulos para $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?

¿Puedes observar alguna relación entre los módulos de los números complejos? Argumenta tu respuesta.

ANÁLISIS A PRIORI

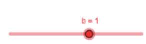
OBJETIVO CLASE

Explorar y representar la multiplicación de números complejos mediante el recurso digital.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE LA CLASE

En la segunda clase planificada, las actividades están enfocadas en el análisis de la construcción de un applet sobre la multiplicación de números complejos. Se escogió trabajar con el recurso digital Geogebra ya que es manipulado con más libertad y dinamismo por los alumnos, favoreciendo la enseñanza de la matemática en el aula. Específicamente, en el caso del objeto matemático elegido el manipular un applet con sus respectivos parámetros facilita la conexión entre la representación algebraica y geométrica, induce elementos visuales como movimientos, variación de tamaño de vectores para ilustrar ideas o conceptos. Además, por sus características y fácil manejo enriquece el ambiente de aprendizaje, aumentando las habilidades de los alumnos para explorar, construir y comunicar ideas matemáticas, adquiriendo el alumno un rol relevante en la construcción de su conocimiento matemático.
Es por ello, que se les pide a los alumnos que descarguen una guía desde la web, donde la primera acción que los alumnos realizan en la clase es construir el applet sobre la multiplicación de los números complejos. Esta guía tiene un instructivo sobre la construcción, desde cómo ingresar en la bandeja de entrada un número complejo, cómo graficar en el plano los números complejos, cómo medir el módulo y argumento de cada número complejo, entre otros. Luego que los alumnos realicen la construcción de la guía, surge una propuesta donde deben analizar el applet, las primeras tres preguntas de la actividad se centran en que los alumnos muevan la herramienta deslizador, seleccionando el botón derecho de mouse y arrastrar los deslizadores a, b, c y d y analizar qué sucede con los números complejos z_2 y z_3, esta actividad induce al análisis de la dilatación y contracción de números complejos en el plano de Argand. Luego, en la actividad 4 se les pide utilizar el recurso digital y fijar ciertos valores en los parámetros para los deslizadores a, b, c y d, a partir de esta nueva representación geométrica identificar los números complejos z_1, z_2 y z_3, identificar los argumentos de cada número complejo, expresar en una frase muestre la relación entre los argumentos y calcular los módulos para cada número complejo. Finalmente, como reflexión final se les pregunta si existe alguna relación entre los módulos de cada número complejo recientemente fijados.

RESPUESTA EXPERTA

Actividad	Respuesta experta
1. ¿Qué puedes observar a medida que se mueven los parámetros $a, b, c\ y\ d$?	**1.** Se puede observar que a medida que se mueven los parámetros va variando la gráfica.
2. Sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0\ y$ mueve el parámetro del deslizador c. ¿Qué sucede con el vector resultante z_3 cuando se multiplica por un número real?	**2.** Sea $x\ un\ número\ real$, x > 1 se produce una dilatación del vector resultante. 1 < x < 0 se produce una contracción del vector resultante. -1 < x < 0 se produce una contracción del vector resultante, pero en sentido contrario. x < -1 se produce una dilatación del vector, pero en sentido contrario.
3. Si se mantienen los parámetros a y b, con $c = 0$. ¿Qué sucede con el vector z_2 cuando el deslizador d va variando?	**3.** El vector z_2 se mantiene en el eje imaginario independiente de la variación del parámetro. Así mismo, el módulo del vector aumenta a medida que $d > 0$ y el módulo disminuye a medida que $d < 0$.
4. Utilizando el recurso digital fija los  $a = 2 \quad b = 1$ $c = -1 \quad d = 3$ **a)** Según la gráfica ¿Cuáles son los números complejos $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$? **b)** ¿Cuánto miden los argumentos para cada número complejo $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$? **c)** Expresa en una o dos frases la relación entre los argumentos **d)** ¿Cuánto miden los módulos para $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?	**4.** **a)** z_1=1,98 + 0,99 i z_2= -1 + 3,05i z_3= -5,01 + 5,06i **b)** z_1= 26,57° z_2= 108,15° z_3= 134,72° **c)** El argumento del vector resultante de $(a + bi) \cdot (c + di)$ es igual a la suma de los argumentos de los números complejos iniciales.

¿Puedes observar alguna relación entre los módulos de los números complejos? Argumenta tu respuesta.	**d)** $\lvert z_1 \rvert = 2.24$ $\lvert z_2 \rvert = 3.16$ $\lvert z_3 \rvert = 7.07$ Sí, ya que el módulo del vector resultante es igual a la multiplicación de los módulos de los números complejos iniciales.

POSIBLES ESTRATEGIAS Y DIFICULTADES DE LA CLASE

Actividad	Dificultades, errores y devoluciones
	Etapa de exploración recurso digital **Preguntas orientadoras por parte del profesor (previo al momento de resolver la guía):** - ¿Qué opciones de la barra de herramientas permite graficar un número complejo? - ¿Es posible ingresar en la barra de entrada un número complejo? **Posibles actitudes de los alumnos:** Se espera que los alumnos, se interesen aún más por explorar el Software, ya que en el inicio de la clase se motivaron por descubrir cómo graficar un número complejo, ahora se motivarán aún más en graficar el producto de números complejos. Se tiene la expectativa que los alumnos den luces de las herramientas a utilizar para lograr el objetivo.
1. ¿Qué puedes observar a medida que se mueven los parámetros $a, b, c \ y \ d$?	**1. Posibles respuestas de los alumnos:** -La gráfica varía dependiendo de los valores de los deslizadores. **Estrategias** Se esperaría que los alumnos dejaran fijo un parámetro en los deslizadores construidos, para

	evidenciar si la gráfica sigue variando o hay alguna diferencia al mover todos los deslizadores. **Dificultades** El alumno podría tener la dificultad en construir los deslizadores. **Error** Que el alumno no haya construido los deslizadores para cada número complejo, si esto sucede el profesor tendrá que guiar el proceso. **Devolución** ¿Cuáles son las instrucciones que indica la guía para construir los deslizadores? Menciona los pasos.
2. Sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0$ y mueve el parámetro del deslizador c. ¿Qué sucede con el vector resultante z_3 cuando se multiplica por un número real?	**2. Posibles respuestas de los alumnos:** -Cuando c =0 se visualiza solo el número complejo z_1 -Cuando c>0 los números complejos z_2 y z_3 aumentan. -Cuando c<0 los números complejos z_2 y z_3 disminuyen. **Estrategias** El alumno puede analizar qué sucede si sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0$ y mueve el parámetro del deslizador $c,$ pero ahora analizar los números complejos z_1 y z_2 para luego comparar esta variación con $z_{3.}$ **Dificultades** Se considera que la dificultad está en el enunciado, cabe la posibilidad que el alumno no recuerde cuáles son los números reales. Además, dificultad en las representaciones, como por ejemplo puntos en la recta real que pueden ser decimales, raíces o fracciones.

3. Si se mantienen los parámetros a y b, con $c = 0$. ¿Qué sucede con el vector z_2 cuando el deslizador d va variando?	**3. Estrategias** Si d varía no sólo observarán en el número complejo z_2 *que varía*, sino también en el número complejo z_3. Si $d > 0$ el z_3 se ubica en el cuadrante II Si $d < 0$ el z_3 se ubica en el cuadrante IV. **Dificultades** Está la posibilidad que el alumno no visualice que al variar d en la gráfica, z_2 también va variando. **Error** El alumno podría mencionar que no sucede nada con el vector z^2 cuando d varía. El profesor debería proceder a orientar al alumno. **Devolución** ¿Varía el módulo del vector z^2?
4. Utilizando el recurso digital fija los  $a = 2 \quad b = 1$ $c = -1 \quad d = 3$ **a)** Según la gráfica ¿Cuáles son los números complejos $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?	**4.** **a) Estrategias** Si les complica visualizar los números complejos en la gráfica, pueden observar la pantalla anexa donde aparece la vista algebraica y entrega detalle de lo elaborado. Se considera que los alumnos no tendrán problema en identificar cada número complejo. En la vista algebraica se pueden ingresar directamente expresiones algebraicas usando la ventana de entrada o barra de entrada al pie de la ventana en el Software Geogebra.
b) ¿Cuánto miden los argumentos para cada número complejo $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$?	**b) Estrategias** Si se les dificulta visualizar en la gráfica los argumentos de cada número complejo, pueden acudir a la venta algebraica. Se considera que los alumnos no tendrán problema en identificar el argumento de cada número complejo, ya que el recurso digital da cuenta de cada procedimiento con detalle.

c) Expresa en una o dos frases la relación entre los argumentos **d)** ¿Cuánto miden los módulos para $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$? ¿Puedes observar alguna relación entre los módulos de los números complejos? Argumenta tu respuesta.	**c) Estrategias** -Una de las estrategias sería posicionarse en el vector z_1 , $z_2\ y\ w$ para analizar los ángulos y expresar la relación entre ellos. -Los alumnos ya tienen conocimientos previos respecto a la generalidad que hay en relación a los argumentos de los números complejos. Por ello, el trabajar con Geogebra, será un proceso para reafirmar sus conocimientos. No habrá dificultades que se puedan vislumbrar. **d) Estrategias** Los alumnos pueden acudir a la ventana algebraica para verificar el módulo para cada número complejo o más bien posicionarse en el vector donde aparecerá el módulo de $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$. **Dificultades** El recurso digital orientará a los alumnos a reafirmar sus conocimientos, si algún alumno no pudo determinar el módulo puede recurrir a la guía donde explica detalladamente como calcular el módulo para cada número complejo. **Errores** Los alumnos pueden confundir argumento con módulo de un vector. **Devolución** ¿La distancia se mide en grados? **Estrategias** Los alumnos podrían explorar el applet y mover los parámetros de los deslizadores, para evidenciar si encuentran una regularidad en los módulos de cada número complejo.

MATEMÁTICA QUE SE PONE EN JUEGO EN LA CLASE, LOS CONOCIMEINTOS PREVIOS Y LOS QUE SE PRETENDEN DESARROLLAR

Las actividades de la segunda clase están enfocadas en trabajar con el recurso digital Geogebra, la matemática que se pone en juego es el módulo de un número complejo, argumento de un número complejo y dilatación de un vector.
Respecto a los conocimientos previos que se espera que pongan en juego los alumnos para abordar y desarrollar la guía son:

-Multiplicar números complejos

-Comprender el concepto de vector

-Significado de un número complejo como vector

-Comprender el concepto de módulo de número complejo

-Calcular el módulo de un número complejo

-Concepto de transformación geométrica

-Concepto de dilatación y contracción

Se pretende desarrollar en esta clase que los alumnos puedan manipular y explorar el recurso digital, con el objetivo de construir un applet sobre "la representación geométrica de la multiplicación de los números complejos" y crear deslizadores correspondientes para a, b, c y d. Así también, mostrar ámbitos de aplicación donde deban analizar el comportamiento de cada número complejo $z_1, z_2\ y\ z_3$ respecto a la variación de los deslizadores, e identificar si los vectores se dilatan o contraen respecto a los diferentes valores que puedan tomar los parámetros de cada uno de los números complejos.

PLAN DE CLASE

Momento de la clase	Narración de la Interacción	Tareas matemáticas	Gestión de aula	Material Complementario
Inicio	El profesor comienza por mencionar el objetivo de la clase y las actividades que trabajarán en ella, específicamente la representación gráfica del producto de los números complejos y el análisis del gráfico. Se les pide a los alumnos que se enfrenten a explorar y descubrir el recurso digital Software Geogebra (estos ya tienen conocimientos previos del recurso, han graficado la función lineal, afín y cuadrática con sus respectivos deslizadores). Los alumnos individualmente deben formular y argumentar cómo se puede graficar un número complejo en el plano desde el descubrimiento. Estas conclusiones se darán a conocer al curso y contrastarán respuestas entre los compañeros. (15 min)	-Explorar e investigar el Software Geogebra.	-La intervención del profesor queda relegada a preguntas orientadoras. **Preguntas orientadoras:** - ¿Qué opciones de la barra de herramientas permite graficar un número complejo? - ¿Es posible ingresar en la barra de entrada un número complejo?	Material para el profesor: -Proyector -Software Geogebra Material para el alumno: -Software Geogebra
Desarrollo	Seguirán individualmente en esta exploración, pero ahora indicando de qué manera se pueden multiplicar números	- Explorar e investigar el Software Geogebra.	-En el momento de la exploración del recurso digital, el profesor toma distancia y los orienta para que los alumnos	Material para el profesor: -Proyector -Software Geogebra

	complejos en el recurso digital, dando a conocer a sus compañeros las diferentes perspectivas sobre los descubrimientos realizados respecto a las herramientas que proporciona el Software. Esta actividad será compartida antes todos sus compañeros, para así quien no tenga tan claro el funcionamiento del Software pueda tener luces de él. Luego, descargarán la guía de trabajo desde el mail que se les otorgó (la cual indica cómo realizar la construcción) realizando individualmente paso a paso la representación geométrica del producto de los números complejos, con sus respectivos deslizadores para $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$. Después de esta construcción, comienzan un trabajo grupal, para ello deben distribuirse entre sus compañeros 4 a 5 alumnos, para poder llevar acabo la propuesta de la guía. Los desafíos están enfocados en interpretar el producto de números complejos, para tener una mirada más sólida respecto a la representación geométrica y no enfocarse en la	**-Propuesta de la guía:** **1.** ¿Qué puedes observar a medida que se mueven los parámetros $a, b, c\ y\ d$? **2.** Sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0\ y$ mueve el parámetro del deslizador c. ¿Qué sucede con el vector resultante z_3 cuando se multiplica por un número real? **3.** Si se mantienen los parámetros a y b, con $c = 0$. ¿Qué sucede con el vector z_2 cuando el deslizador d va variando? **4.** Utilizando el recurso digital fija los deslizadores: $a = 2 \quad b = 1$ $c = -1 \quad d = 3$	puedan analizar este Software. -El profesor da inicio al trabajo en grupo, motivando a que se distribuyan entre los compañeros. Favoreciendo y propiciando en ellos la búsqueda de soluciones autónomas y creativas frente a las preguntas planteadas en la guía. Preguntas orientadoras: ¿Qué es dilatación? ¿Qué es contracción? ¿Qué significa dilación de un vector? -El profesor adquiere el rol de mediador frente a la discusión entre grupos, controlando los tiempos y aportando con preguntas para dar énfasis a ciertos conceptos relevantes. Preguntas orientadoras: ¿Quién piensa algo distinto de lo que concluye su compañero? ¿Están todos de acuerdo? ¿Lo comprobaron? ¿Cómo?	Material para el alumno: -Software Geogebra -Guía Didáctica

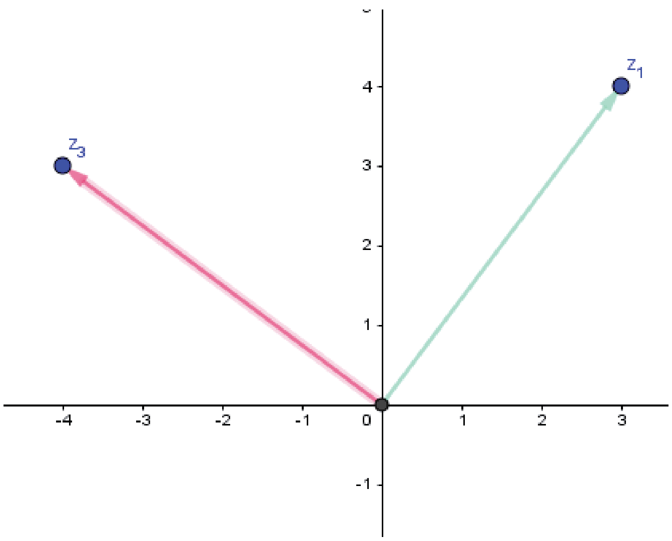
	mecanización del álgebra. El objetivo de trabajar en grupo es la comunicación de informaciones que se genera entre los alumnos. Luego, que los alumnos hayan interactuado de forma grupal, discutirán junto con el profesor acerca del trabajo realizado para cerciorarse si realmente están en lo correcto o en lo incorrecto. Estos deben ponerse de acuerdo sobre las afirmaciones que se hacen y demostrarlas. (50 min)	**a)** Según la gráfica ¿Cuáles son los números complejos $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$? **b)** ¿Cuánto miden los argumentos para cada número complejo $z_{1,}\ z_2\ y\ z_3$? **c)** Expresa en una o dos frases la relación entre los argumentos ¿Puedes observar alguna relación entre los módulos de los números complejos? Argumenta tu respuesta.		
Cierre	El profesor presenta mediante un power point los resultados obtenidos por cada grupo. Y en conjunto realizan una lluvia de las ideas, de los conceptos y conclusiones más relevantes de la clase. (25 min)		El rol del profesor en el cierre de la clase es clave para realizar una síntesis del trabajo desarrollado por parte de los alumnos. Realiza preguntas orientadoras para reafirmar los conceptos tratados en clase.	Material para el profesor: -Proyector -Software Geogebra -Power Point Material para el alumno: -Software Geogebra -Guía Didáctica

CLASE 3

ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LA CLASE

I. Observa las siguientes imágenes y responde las preguntas que están a continuación:

1.

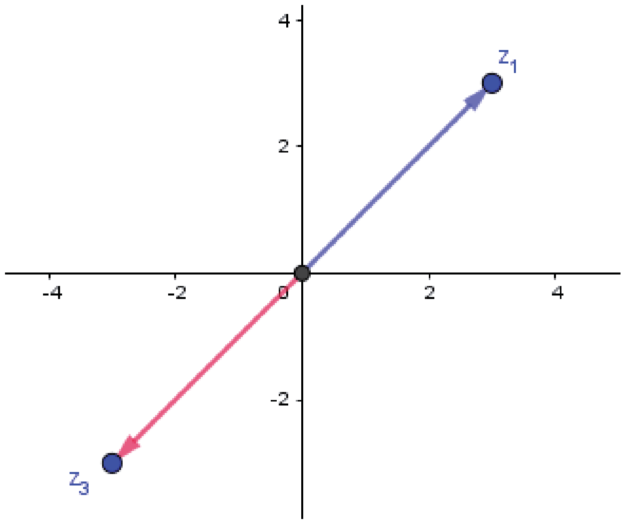


a) ¿Cuál es la coordenada del número complejo z_2, sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = z_3$?

b) ¿Qué tipo de transformación geométrica se realizó al cambiar de posición $z_1 a\ z_3$?

c) ¿Cuál es el argumento de cada número complejo $z_1, z_2\ y\ z_3$?

2.



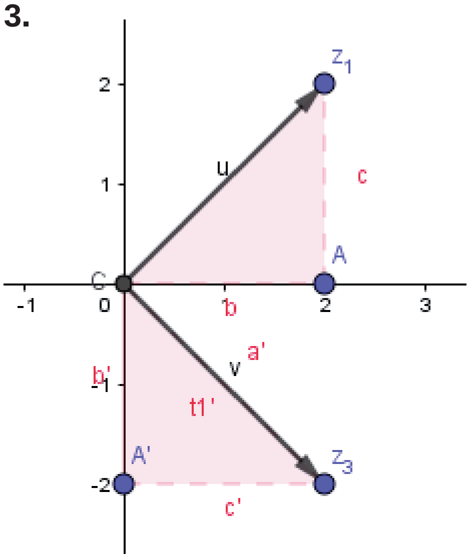
a) ¿Cuál es el número complejo z_2?

b) ¿Corresponde a una rotación de $180°$? ¿Por qué? Argumenta

c) ¿Qué puedes inferir respecto al módulo de z_2?

d) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

3.

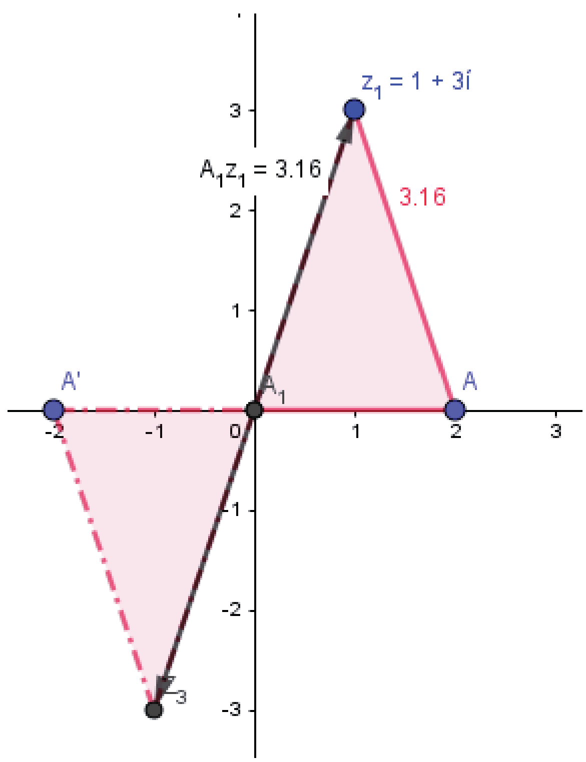


a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación en sentido horario en 90° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué operación describe este cambio de posición? ¿Cuál es el número complejo z_2?

c) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

4.

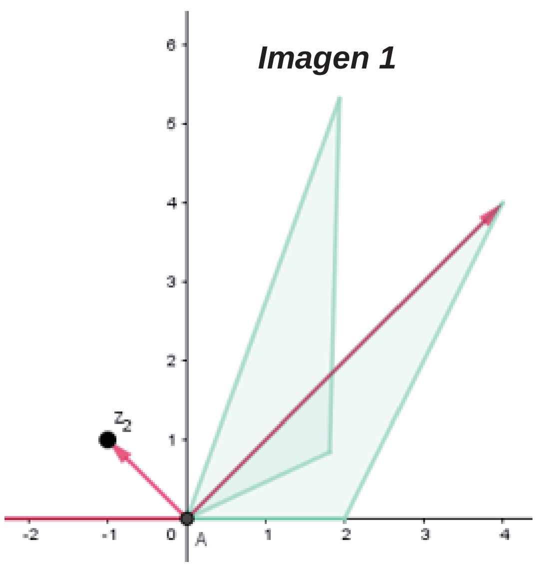


a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación anti horario en 180° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué relación existe entre el módulo de z_1, z_2 y z_3?

c) Expresa en una o dos frases lo que has visualizado

II. Observa la siguiente secuencia de imágenes:



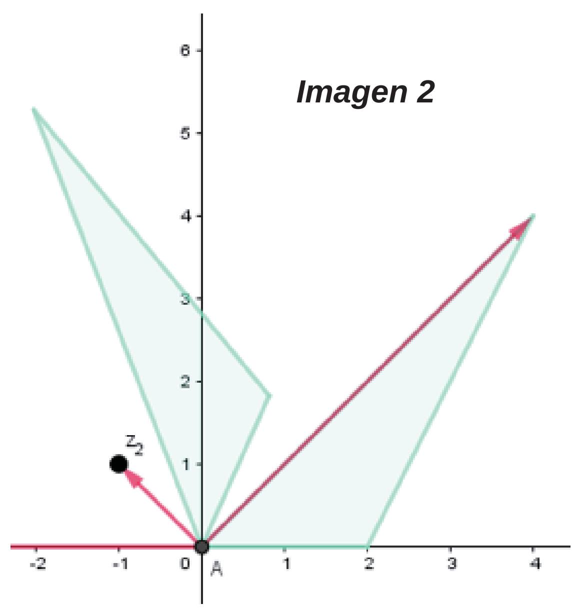


Imagen 3

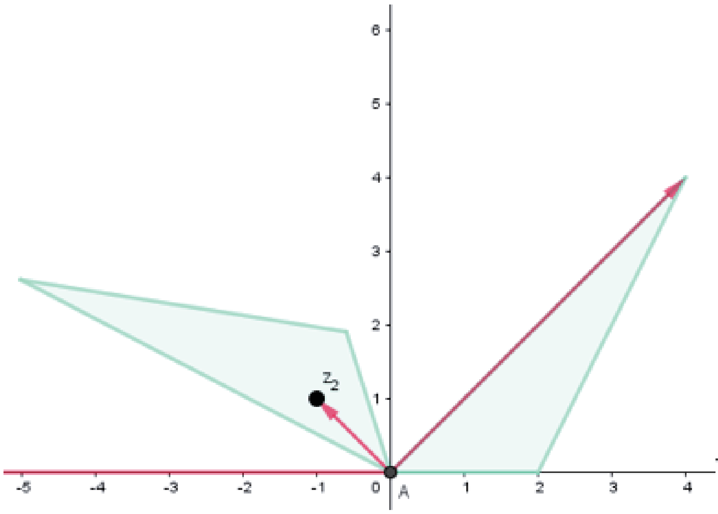
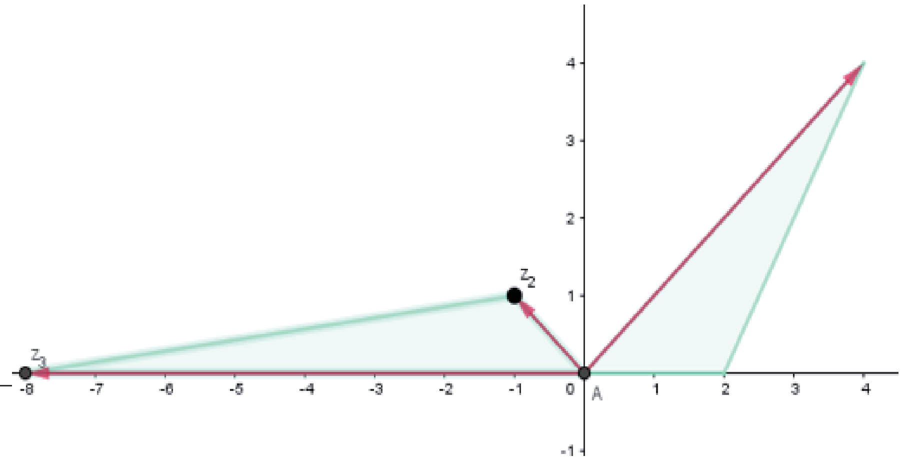


Imagen 4



- ✓ Expresa en una frase las características de la imagen anteriormente entregada.

- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre el primer triángulo rotado y el resultante? ¿Es el mismo? Argumenta.

Para concluir…

1. ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$? ¿Qué rotación existe entre un punto y su opuesto?
a) ¿Cuál es el módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar el vector z_1 al realizar la rotación?

2. Si se quisiera rotar un número complejo $a + bi$ en $180°$
a) ¿Qué operación es la que se realiza en esta rotación? Argumenta
b) ¿Cuál es el número complejo resultante en esta rotación?
c) ¿Qué módulo tiene el número complejo resultante y que ángulo genera en el eje real?

ANÁLISIS A PRIORI

OBJETIVO CLASE

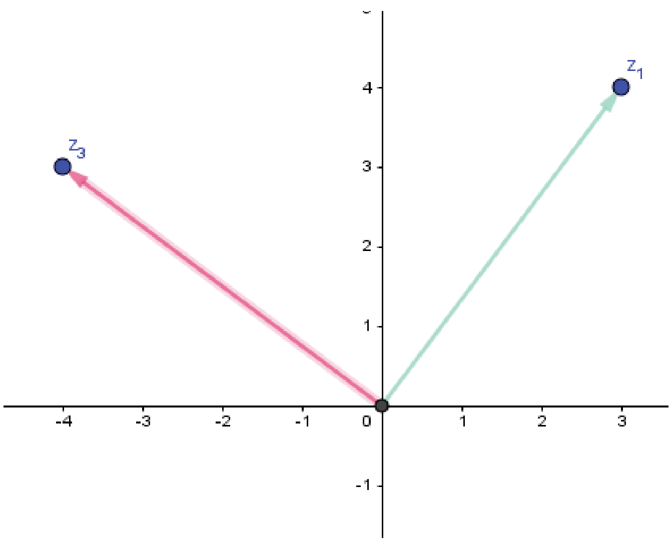
Formular conjeturas respecto a los movimientos o transformaciones geométricas del producto de números complejos.

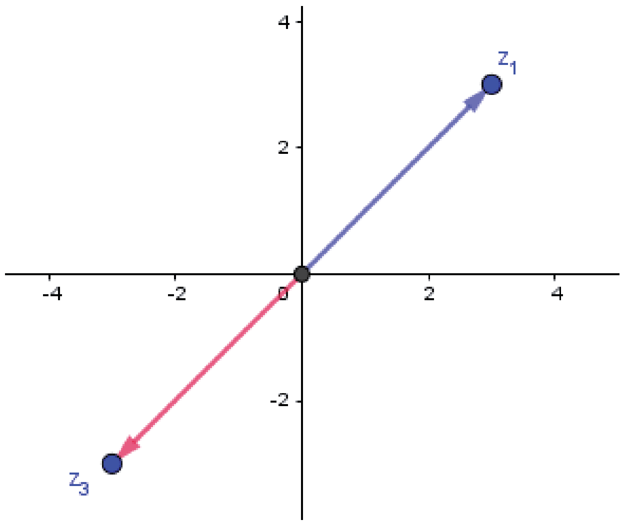
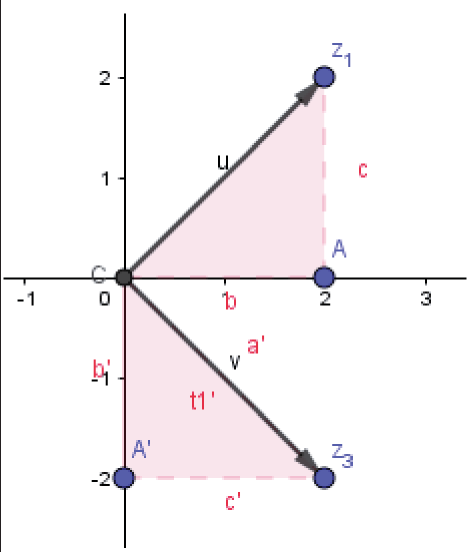
DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE LA CLASE

En la tercera clase planificada, las actividades propuestas de la guía están enfocadas a la rotación dilatativa de vectores y figuras geométricas planas. En el ítem I, las actividades 1 y 2 están centradas en que los alumnos visualicen dos imágenes (rotación de vectores) y puedan ser analizadas. En la actividad 1 deben identificar las coordenadas de los números complejos representados, la transformación geométrica que se realiza al cambiar de posición $z_1\ a\ z_3$ y determinar el argumento para cada número complejo expuesto en la imagen. La actividad 2 se enfatiza más en el análisis, ya que los alumnos deben identificar el número complejo $z_2\ dado\ un\ z_1\ \ y\ z_3$ luego, se les pregunta ¿si los vectores representan una rotación en 180°?, donde deberán argumentar su respuesta. Además, deben inferir respecto al módulo de z_2 y formular a través de un ejemplo lo que se visualizó. Se espera que los alumnos se den cuenta que la actividad propuesta se cumple para todos los casos, ya que cada vez que rote un vector z_1 a z_3 en 180° el módulo de z_2 será 1. Una pregunta adicional que puede distinguir que el alumno es capaz de ello sería, si $z_1 = 3 + 2i\ \ y\ \ z_2 = \ -1 + oi$ ¿cuál es su producto y su representación geométrica? Y si $z_1 = 5 - i$ y z_2 se mantiene ¿sucederá lo mismo? En las actividades 3 y 4 se presentan imágenes de la rotación de triángulos donde la base de cada uno de ellos es un vector. En la actividad 3, se menciona en el enunciado que se realiza una rotación en sentido anti-horario en 90°, se les pide identificar cuál es el número como z_2 y z_3 y cuál es la operación que describe este cambio. Se les invita a crear un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado ¿Se cumple para todos los casos? Es fundamental que los alumnos puedan darse cuenta que al multiplicar un número complejo $z_1 = a + bi$ por $z_2 = i$ siempre se realizará una rotación de 90°, por lo tanto se cumple para todos los casos. La actividad 4 se presenta en una imagen la rotación de un triángulo en sentido anti-horario en 180°, dados los números complejos $z_1\ y\ z_3$, se les pide identificar en la representación geométrica el número complejo z_3 y la relación entre los módulos de $z_1, z_2\ y\ z_3.$
Finalmente, en el ítem II se les propone una actividad relacionada con una secuencia de imágenes sobre la rotación de un triángulo y se les solicita que expresen en una frase las características de lo visualizado. Es importante que los alumnos puedan evidenciar que en la secuencia del primer triángulo en comparación con la del último triángulo se produce una rotación dilatativa en la figura resultante. A modo de conclusión, se les pide que formulen lo aprendido dando respuesta a preguntas

orientadoras que aparecen en la guía, respecto a la rotación de 90° y 180° de vectores y figuras planas.

RESPUESTA EXPERTA

Actividad	**Respuesta experta**
I. Visualiza las siguientes imágenes y responde las preguntas que están a continuación: **1.**  **a)** ¿Cuál es la coordenada del número complejo z_2, sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = z_3$? **b)** ¿Qué tipo de transformación geométrica se realizó al cambiar de posición $z_1 a\ z_3$? **c)** ¿Cuál es el argumento de cada número complejo $z_1, z_2\ y\ z_3$?	**1.** **a)** z_2= (0 + i) **b)** Se realizó una rotación en 90° **c)** El argumento para z_2 = 45° z_1 = 90° z_3 = 135°

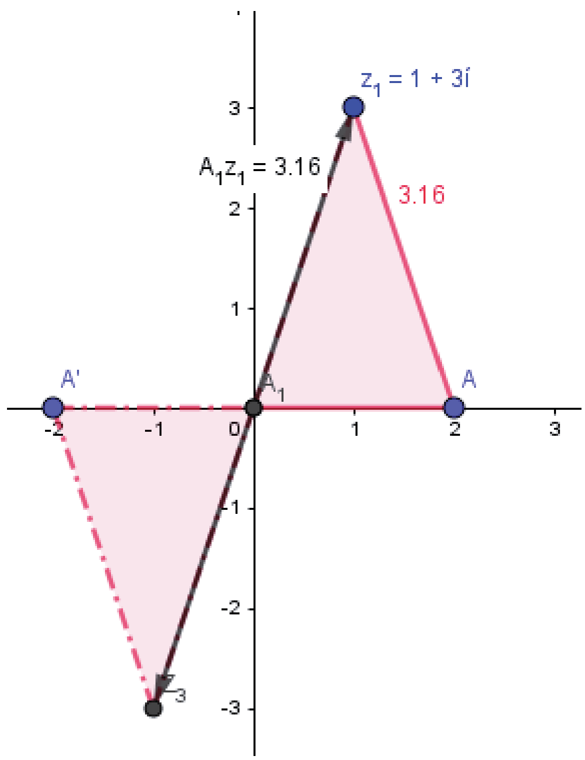
2.  **a)** ¿Cuál es el número complejo z_2? **b)** ¿Corresponde a una rotación de $180°$? ¿Por qué? Argumenta **c)** ¿Qué puedes inferir respecto al módulo de z_2? **d)** Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?	**2.** **a)** z_2= (-1+ 0i) **b)** Sí corresponde a una rotación de 180°, porque z_3 es el número complejo opuesto a z_1. **c)** Se puede inferir que el $\|z_2\| = 1$ **d)** Sí se cumple para todos los casos y queda demostrado en el ejemplo que darán los alumnos.
3.  	**3.** **a)** z_3= (2i - 2) **b)** La operación algebraica que se realiza es el producto entre dos números complejos. z_2 = (0 + i) **c)** Sí se cumple para todos los casos y queda demostrado en el ejemplo que darán los alumnos.

a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación en sentido horario en 90° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué operación describe este cambio de posición? ¿Cuál es el número complejo z_2?

C) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

4.



a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación anti horario en 180° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué relación existe entre el módulo de $z_1, z_2 \ y \ z_3$?

c) Expresa en una o dos frases lo que has visualizado

4.

a) $\boldsymbol{El\ n\acute{u}mero\ complejo}$ z_3 = (-3 – 3i)

b) $|z_1| = \sqrt{10}$

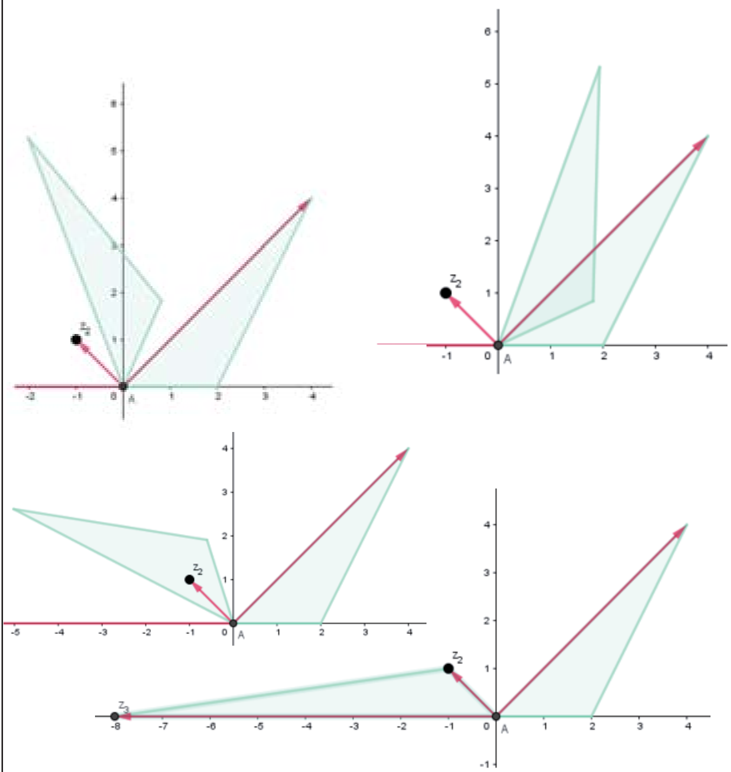
$|z_2| = 1$

$|z_3| = \sqrt{10}$

Al multiplicar el módulo del número complejo z_1 por el módulo de z_2 es igual al resultado del módulo de z_3.

c) El módulo del número complejo de $z_2 = |i| = 1.$

II. Observa la siguiente secuencia de imágenes:



Expresa en una frase las características de la imagen anteriormente entregada.

¿Cuál es la diferencia entre el primer triángulo rotado y el resultante? ¿Es el mismo? Argumenta

Para concluir…

1. ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$? ¿Qué rotación existe entre un punto y su opuesto?

a) ¿Cuál es el módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar el vector z_1 al realizar una de rotación 90° o 180°?

II.

- La rotación del triángulo rotado es de 135°.

- En el triángulo resultante se produce una dilatación de la figura respecto a l triángulo original.

1. Las coordenadas que debería tener un punto cualquiera al ser rotado en 90° es (a, b).

Una rotación de 180°es la que existe entre un punto y su opuesto.

a)

$$|z_2| = 1$$

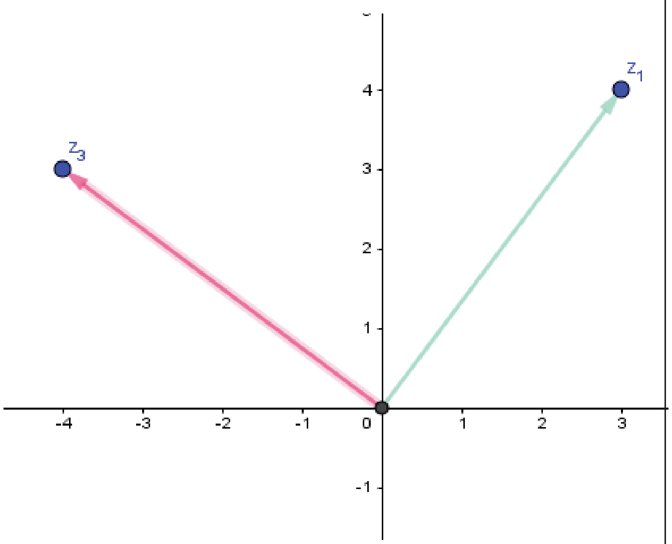
2. Si se quisiera rotar un número complejo $a + bi$ en $180°$ **a)** ¿Qué operación es la que se realiza en esta rotación? Argumenta **b)** ¿Cuál es el número complejo resultante en esta rotación? **c)** ¿Qué módulo tiene el número complejo resultante y que ángulo genera en el eje real?	**2.** **a)** La operación que se realiza en la rotación señalada es la multiplicación entre z_1 y z_2. **b)** $\boldsymbol{El\ n}$ú$\boldsymbol{mero\ complejo\ resultante\ es}$ $(a + bi) \cdot (-1 + 0i) = (-a - bi)$ **c)** El módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar al rotar debe ser $\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$ y la amplitud que genera con el eje real es 90°.

POSIBLES ESTRATEGIAS Y DIFICULTADES DE LA CLASE

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Dificultades, errores y devoluciones</th></tr>
<tr><td>

I. Observa las siguientes imágenes y responde las preguntas que están a continuación:

1.



a) ¿Cuál es la coordenada del número complejo z_2, sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = z_3$?

b) ¿Qué tipo de transformación geométrica se realizó al cambiar de posición $z_1 a\ z_3$?

c) ¿Cuál es el argumento de cada número complejo $z_1, z_2\ y\ z_3$?

</td><td>

1.

a) Dificultades
Los alumnos podrían pensar en que el vector z_3 es el número complejo opuesto a z_1
Devolución
Si el número complejo opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$
¿Cuál será el número complejo opuesto de $3 + 4i$?

b) Estrategia
Los alumnos elegirán un triángulo y realizarán una rotación en 45° y 90° en el plano, para luego comparar la rotación de vectores expuesta en la guía.

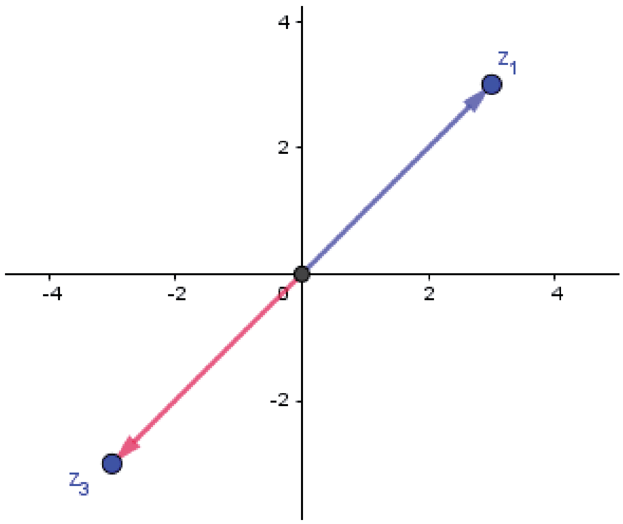
Dificultades
-Algunos alumnos podrían tener confusión en no recordar las diversas transformaciones geométricas y no responder correctamente.
-Se podría pensar que los alumnos confunden una rotación de 90° con una de 45°, según la posición presentada en la imagen.

Devolución
Si un tres se desplaza en línea recta por el andén de San Antonio ¿El movimiento geométrico es una traslación o una rotación?

c) Estrategia
Los alumnos podrán suponer que los ángulos de z_1 y z_2, ya que los visualizarán en la gráfica en las coordenadas.

</td></tr>
</table>

2.



a) ¿Cuál es el número complejo z_2?

b) ¿Corresponde a una rotación de $180°$? ¿Por qué? Argumenta

c) ¿Qué puedes inferir respecto al módulo de z_2?

d) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

2.

a) Estrategia

El número complejo z_2 se puede visualizar como una coordenada en el plano de Argand.

Se considera que no habría problema en identificar el número complejo z_2.

Se piensa que los alumnos podrían confundirse en calcular el módulo ya que la parte imaginaria es 0i.

b) Estrategia

-Los alumnos evidenciarán que al ser z_3 el número complejo opuesto de $z_{1,}$ se realiza una rotación de 180°

-Los alumnos mencionarán que los vectores $z_1\ y\ z_3$ forman un ángulo extendido, por lo tanto corresponde a un ángulo de 180°.

c) Dificultades

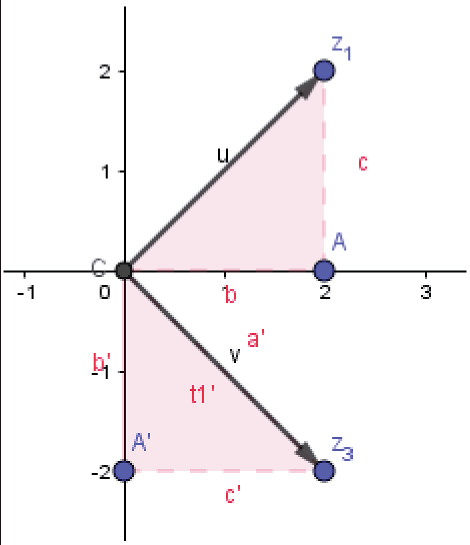
Se considera que a los alumnos se les dificultará verificar que el número complejo z_2 es $-1 + 0i$ e identificar que la parte imaginaria del número complejo es 0.

Devolución

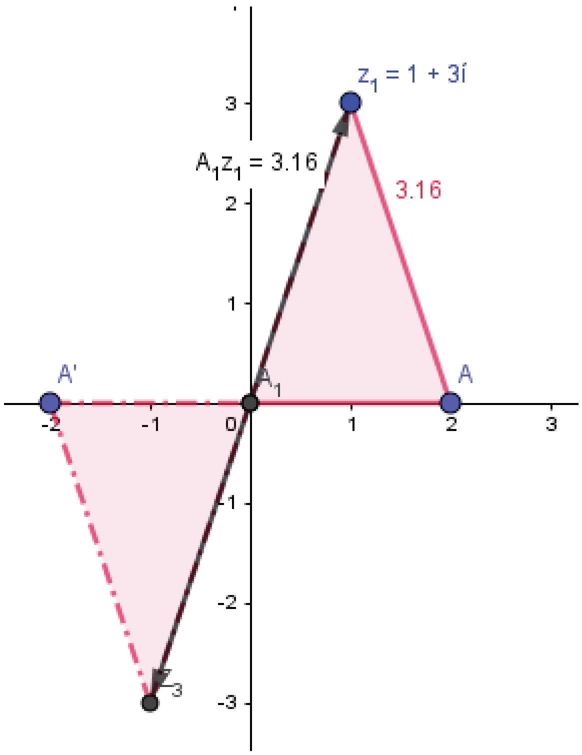
¿Es IR un subconjunto de C? ¿Debiera ser IR U $\{0\}$?

d) Dificultad

Se cree que puede haber ciertos alumnos que se compliquen en ejemplificar y tengan la tendencia de realizar un ejemplo casi igual al presentado.

3.  **a)** Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación en sentido horario en 90° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante? **b)** ¿Qué operación describe este cambio de posición? ¿Cuál es el número complejo z_2? **C)** Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos.	**3.** **a) Estrategia** Los alumnos para no confundirse reflexionan respecto al concepto de rotar una figura en sentido “horario” y “anti horario” y ejemplifican para no tener confusión. **b) Dificultades** Se considera que los alumnos tendrán dificultad en identificar el número complejo, ya que este no contempla la parte real. **Devolución** ¿La parte real de un número complejo puede ser 0?

4.



a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se observa una rotación anti horario en 180° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué relación existe entre el módulo de $z_1, z_2\ y\ z_3$?

c) Expresa en una o dos frases lo que has visualizado

4.

a) Estrategias

Identificarán la coordenada en el plano de z_1 y sabrán el número complejo pedido.

b) Estrategias

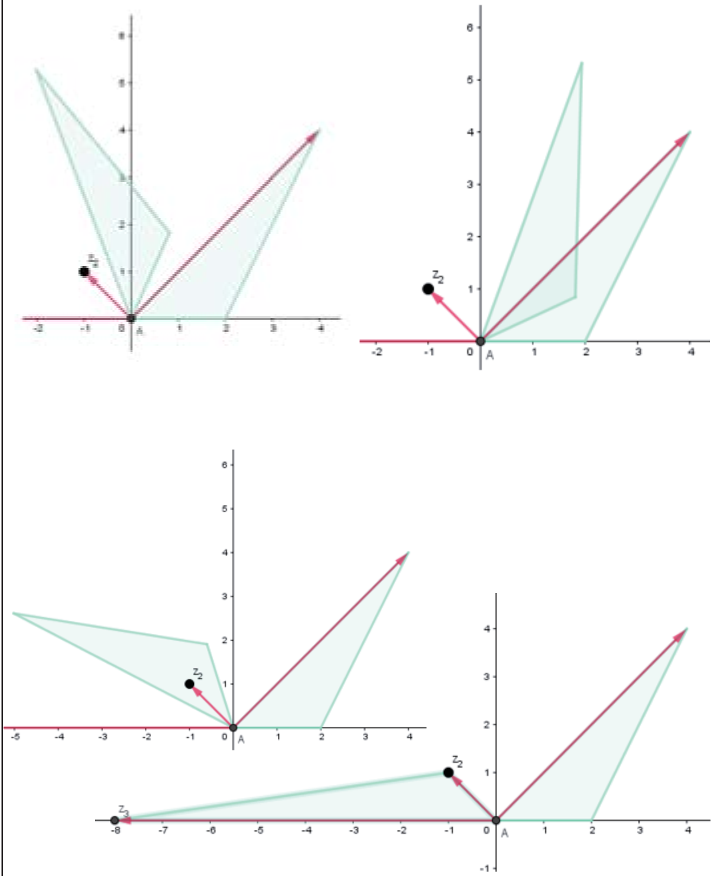
Los alumnos ya tienen nociones respecto a la relación entre los módulos de los complejos. Además, como ya identificaron el número complejo para cada $z_1, z_2\ y\ z_3$ simplemente, ahora calculan el módulo con la fórmula de la distancia.

c) Estrategias

Los alumnos podrían inferir respecto a los argumentos de los números complejos enunciados, ya que no aluden en las preguntas planteadas.

<table>
<tr>
<td>

II. Observa la siguiente secuencia de imágenes:



Expresa en una frase las características de la imagen anteriormente entregada.

¿Cuál es la diferencia entre el primer triángulo rotado y el resultante? ¿Es el mismo? Argumenta

</td>
<td>

ITEM II

Dificultades

Se considera que algunos alumnos tendrán dificultad en identificar los argumentos para cada número complejo, ya que es primera vez que han trabajado con una secuencia de rotación de un triángulo.

Dificultades

Puede haber el caso en que los alumnos no evidencien que el último triángulo, tuvo una dilatación respecto al triángulo original.

Devolución

¿Puedes visualizar y comparar los módulos del triángulo original con el triángulo resultante? ¿Son triángulos equivalentes?

</td>
</tr>
</table>

Para concluir… **1.** ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$? ¿Qué rotación existe entre un punto y su opuesto? **a)** ¿Cuál es el módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar el vector z_1 al realizar una de rotación 90° o 180°? **2.** Si se quisiera rotar un número complejo $a + bi$ en $180°$ **a)** ¿Qué operación es la que se realiza en esta rotación? Argumenta **b)** ¿Cuál es el número complejo resultante en esta rotación? **c)** ¿Qué módulo tiene el número complejo resultante y que ángulo genera en el eje real?	Actividad a modo de cierre, exposición grupal en papelógrafo. Luego de haber validado sus conocimientos y transitar hacia un saber, se concluye que la multiplicación se puede pensar como si fuera una rotación, cuando ello se piensa así, permite modelar movimientos de la realidad a partir de la multiplicación de números complejos.

MATEMÁTICA QUE SE PONE EN JUEGO EN LA CLASE, LOS CONOCIMEINTOS PREVIOS Y LOS QUE SE PRETENDEN DESARROLLAR

En esta última clase, la matemática que se pone de relieve es la rotación dilatativa de los números complejos. Para poder desarrollar las actividades los alumnos necesitan ciertos conocimientos previos, estos son las siguientes:
-Multiplicar números complejos

-Comprender el concepto de módulo de número complejo

-Calcular el módulo de un número complejo

-Transformaciones isométricas (rotación)

-Significado de un giro y una dilatación

-Significado de un giro y una contracción

-Significado de una contracción y dilatación en términos geométricos

-Graficar un número complejo en el plano de Argand

El objetivo de esta actividad está centrado en que los alumnos puedan concluir que las coordenadas que tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$ es (a + bi)· $(0+i)$. Y la rotación que existe entre un punto y su opuesto es de 180°, la operación que se realiza en la rotación señalada es la multiplicación entre z_1 y z_2, ya que al multiplicar es: $(a+bi)\cdot(-1+0i)=(-a-bi)$

PLAN DE CLASE

Momento de la clase	Narración de la Interacción	Tareas matemáticas	Gestión de aula	Material Complementario
Inicio	Se inicia dando a conocer el objetivo de la clase, luego se les comenta que trabajarán con una guía "rotación de números complejos". Se les pide que individualmente realicen Item I ejercicio 1 (algunos minutos), el alumno formula y explica cada situación del problema y se enfrenta a las preguntas planteadas. Este trabajo realizado se presenta a sus compañeros, donde cada alumno da cuenta de sus resultados. (15 min)	I. Visualiza las siguientes imágenes y responde las preguntas que están a continuación: **1.** Imagen **a)** ¿Cuál es la coordenada del número complejo z_2, sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = z_3$? **b)** ¿Qué tipo de transformación geométrica se realizó al cambiar de posición $z_1 a\ z_3$?	El profesor es el encargado de crear la intención en el alumno y preparar correctamente el medio para que pueda interactuar. Se abstiene de comunicar el saber a los alumnos y los anima a resolver el problema.	Material para el alumno: -Guía

		c) ¿Cuál es el argumento de cada número complejo $z_1, z_2 \ y \ z_3$?		
Desarrollo	Se les pide que se distribuyan en grupos de trabajo de no más de 5 alumnos, se recomienda sean conformados al azar por el profesor esta vez para evitar que se conformen siempre los mismos grupos. Estos se deben constituir en una oportunidad para aprender trabajar colaborativamente en ambientes con personas diversas. Después que los alumnos se agrupen, se les planteará el desafío de realizar y terminar Ítem I y II de la guía. Mientras los alumnos trabajan, estos intercambian opiniones sobre las diferentes formas de realizar los ejercicios y los diversos conceptos que se suscitan en los problemas planteados. Luego de unos minutos, se elegirá un representante por grupo quien expondrá los resultados y en conjunto con el profesor analizarán las características de los datos y relaciones	**-Propuesta de la guía:** **2.** Imagen **a)** ¿Cuál es el número complejo z_2? **b)** ¿Corresponde a una rotación de $180°$? ¿Por qué? Argumenta **c)** ¿Qué puedes inferir respecto al módulo de z_2? **d)** Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos? **3.** Imagen **a)** Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le	A partir de los resultados expuestos, ayuda a los alumnos a formalizar el conocimiento construido, planteándoles preguntas que permitan precisar tanto los conceptos como los procedimientos matemáticos obtenidos. Orienta las discusiones generadas entre los grupos. Es importante generar, con anticipación, algunas preguntas a partir de los datos entregados. De modo que en esta fase puede mediar (dando pistas) a los grupos que tienen mayores dificultades para visualizar situaciones problemáticas. Hacer que los alumnos interpreten los resultados y le den significados en el contexto desde el	Material para el alumno: -Guía

	obtenidas. Los alumnos deben dar declaraciones, protestar o rechazar la justificación que consideren necesaria para así poder llegar a un consenso de las respuestas correctas. (50 min)	realiza una rotación en sentido horario en 90° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante? **b)** ¿Qué operación describe este cambio de posición? ¿Cuál es el número complejo z_2? **c)** Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos? **4.** Imagen **a)** Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación anti horario en 180° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante? **b)** ¿Qué relación existe entre el módulo de $z_1, z_2\ y\ z_3$?	que ha sido expuesto. Preguntas orientadoras: ¿Qué es el módulo? ¿Cómo se calcula el módulo de un número complejo? ¿Qué es el argumento?	

		c) Expresa en una o dos frases lo que has visualizado		
		II. Observa la siguiente secuencia de imágenes: -Expresa en una frase las características de la imagen anteriormente entregada. - ¿Cuál es la diferencia entre el primer triángulo rotado y el resultante? ¿Es el mismo? Argumenta	En este proceso el profesor retoma la responsabilidad de enseñar, explicando las relaciones entre el conocimiento construido y el que se desea comunicar.	Material para el alumno: -Guía
Cierre	Para dar un cierre a la clase, se les pide que dispongan de nuevos grupos de trabajo y respondan la parte final de la guía "Para concluir". Deberán realizar una tabla en un papelógrafo respondiendo las preguntas planteadas, describiendo las principales características las que luego serán compartidas con sus compañeros. Inconscientemente, realizando junto con el profesor un	**1.** ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$? ¿Qué rotación existe entre un punto y su opuesto? **a)** ¿Cuál es el módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar el vector z_1 al realizar la rotación?	El profesor toma la responsabilidad de llevar la institucionalización de la clase, transformando los conocimientos a saberes.	Material para el alumno: -Guía -Papelógrafo

	reconocimiento de lo aprendido. (15 min)	**2.** Si se quisiera rotar un número complejo $a + bi$ en $180°$ **a)** ¿Qué operación es la que se realiza en esta rotación? Argumenta **b)** ¿Cuál es el número complejo resultante en esta rotación? **c)** ¿Qué módulo tiene el número complejo resultante y que ángulo genera en el eje real?		

CONCLUSIONES

En virtud de los nuevos tiempos y sobre todo por la emergencia de las nuevas tecnologías de la información, es que se hace conveniente la innovación en la enseñanza de la matemática, en el sentido de proponer y desarrollar nuevas formas de enseñar. Es en este contexto que se presenta la secuencia didáctica con el propósito de planear y ejecutar varias sesiones de clase, donde las actividades están basadas en la perspectiva de la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, que ponen de relieve las fases de acción, formulación, validación e institucionalización. Se trata de secuencias didácticas que facilitan al docente trabajar de forma reflexiva, enriqueciendo sus conocimientos didácticos del contenido matemático, y donde los alumnos encuentran un sentido y significado a lo aprendido. Es por ello, que la investigación del alumno se enmarca en las fases desde la resolución de problemas prácticos, hasta la construcción de conceptos, procedimientos y actitudes, permitiendo comprobar la eficacia del proceso y evoluciones alcanzadas por el alumno. En este sentido, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986) hace énfasis en las preguntas e interrogantes que el profesor propone a los alumnos, de manera que estos reflexionen y validen sus respuestas. Del mismo modo, aprenden por las actividades que realizan y la significatividad de llevarlas a cabo, por la posibilidad de expresar y validar ante sus compañeros las ideas e interpretación de la información, con el objetivo que los alumnos se apropien de un saber construido o en construcción.

La secuencia didáctica propone una forma distinta de abordar los contenidos, bajo esta perspectiva se utilizan estrategias didácticas basadas en la obtención de aprendizajes significativos, permitiendo a los alumnos, de forma creativa y estimulante, integren el conocimiento en variadas secuencias. Las tareas matemáticas que están relacionadas en las tres secuencias brindan la oportunidad de explorar los procedimientos, la necesidad de perfeccionarlos y mejorar la comprensión del concepto sobre la representación geométrica de la multiplicación de números complejos. Las actividades realizadas permiten a los docentes determinar los conocimientos previos y las supuestas preguntas que realizarían los alumnos. En cada una de las clases estos irán explorando e incorporando herramientas que les permitirán dar una respuesta a las problemáticas, adquiriendo la habilidad de tratar el tema en otros contextos y relacionándolos con otros contenidos, como por ejemplo la relación de la multiplicación de números complejos con el recurso digital Geogebra o también con la rotación dilatativa.

La experiencia de crear secuencias de actividades, desde las fases que ponen de relieve el marco teórico, enriquece el trabajo formativo de los docentes participantes en el estudio del plan de clases, ya que brinda la oportunidad real para analizar en profundidad el objeto matemático en cuestión. Una situación que otorga experiencia sobre la realidad escolar es la diversidad de espacios educativos, la interacción entre el alumno, docente y medio y la importancia del rol docente en el aula.

Como docentes no debemos dejar que los alumnos pierdan el espíritu investigador, ya que gran parte del aprendizaje se centra en la observación y experimentación. Si modificamos la metodología de enseñar, la mayor parte de los alumnos estarán motivados por aprender y se les facilitará adquirir el aprendizaje, desarrollarán habilidades relevantes como resolver problemas, modelar matemáticamente, entre otros. Desde nuestro rol tenemos el desafío innovar e introducir la teoría en las clases para cumplir una labor que va más allá de ser un mero expositor, invitando a los alumnos a experimentar, formular, comunicar y validar sus respuestas. La innovación contribuye a la comunidad educativa, ya que promueve transformaciones curriculares flexibles, estimula la investigación matemática en los docentes a partir de su propia práctica educativa así también las de los alumnos, permite compartir y transmitir experiencias educativas. Además, promueve actitudes positivas hacia el cambio y la comprensión de los conceptos desarrollando el interés, creatividad y el descubrimiento por la por la matemática.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

A partir de las preguntas y objetivos planteados, el estudio se enmarca en una metodología de tipo cualitativa, permitiendo enfocar el modo en que se enfrentan los problemas y se busca respuesta por medio de la producción de escritos.
Este estudio de clase se centra dentro de la realidad educativa, desde el rol del profesor y el alumno, de las intenciones, motivaciones e incluyendo la importancia de comprender la realidad desde la perspectiva de los participantes de cada situación, considerados los alumnos como agentes activos en la construcción de su conocimiento matemático. Se estudia en profundidad la comprensión del objeto matemático “multiplicación de números complejos” desde la mirada de una situación de aprendizaje poniendo de relieve el rol del alumno, el medio y el docente.

PRODUCTO DE LA CLASE

La clase realizada está diseñada con el objetivo de presentar una propuesta de enseñanza de la multiplicación de números complejos, que integre las representaciones algebraicas y geométricas. Para esto se realizó una preparación del tema y elaboración de un plan de clase, detallando los conceptos, material pedagógico y características de los alumnos de acuerdo a cada momento y fase de la clase; así también, los propósitos de cada actividad planteada en ella. El producto de la clase diseñada se aplicó previamente en dos establecimientos educaciones, uno en Santiago y el otro en Valdivia. El colegio ubicado en Santiago tiene un nivel socio económico más alto respecto al colegio de Valdivia y los alumnos están orientados en la disciplina y en formular normas de grupo que inciden favorablemente en la calidad del clima en aula, trabajo cooperativo y respeto, por lo que les fue fácil abordar las actividades planteadas en la clase, más aún con los conocimientos previos bastante claros al respecto. Luego, la segunda aplicación se realizó en Valdivia, un colegio de escasos recursos y alumnos vulnerables, sin embargo, bastante interesados en la realización de la clase y pocos problemas relacionados con los conocimientos previos que se necesitan para desarrollar las actividades. En este curso, se evidenciaron problemas con el número complejo i y su gráfica, los alumnos se desconcertaban donde no veían la parte real del número complejo.
Después de haber aplicado el taller de matemática en los dos establecimientos mencionados, se decidió hacer un análisis y mejora respecto a las actividades que se había construido. Es por ello, que se diseñaron cambios respecto a las preguntas planteadas, ya que estas eran bastantes amplias y perdían el foco de lo que se esperaba como respuesta por parte de los alumnos.

Después de la implementación, se realizaron los siguientes cambios: En el Ítem I se les proporcionaba en la actividad un $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$, se les pedía multiplicar de manera algebraica los número complejos, y a este producto llamarlo w. Luego, representar cada número complejo y su producto en el plano de Argand. Desde esta tarea matemática, se les pregunta Qué observas, la modificación se centró en la pregunta ya que estaba poco dirigida y los alumnos daban respuestas sin justificar.

Ítem I:

-c) Qué observas $\longrightarrow$ Modificación: c) ¿Qué observas?

Ítem II:

En el Ítem II se les da un $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + +i$ y se les pide Multiplicar de manera algebraica los números complejos y a este producto llamarlo w. Luego, representar en el plano de Argand los números complejos z_1, z_2 y w. Desde la tarea matemática antes descrita, se les plantean dos preguntas, las cuales se rediseñan porque estaban deficientemente planteadas y poco orientadas a la respuesta correcta.

-c) Qué observas $\longrightarrow$ Modificación: c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

-d) Determina sus módulos $\longrightarrow$ Modificación: d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

En la primera clase planificada, las actividades de la guía están enfocadas en encontrar las relaciones geométricas que existen en la multiplicación de números complejos. Para esto se empieza a trabajar con el registro algebraico, donde se grafica el producto, determinan los argumentos y módulos de los números complejos comprendidos.
Con respecto al argumento, lo primero, es inducir a los alumnos a través de preguntas orientadoras ¿Qué ángulo posee cada número complejo?, ¿Hay una relación entre los ángulos de estos números complejos? Respecto a la relación que existe entre los argumentos de los dos números complejos dados y el argumento del producto, habiendo determinado el resultado previamente de manera algebraica. En el Ítem I los números complejos dados son $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$, los cuales al ser representados en el plano, determinarán sus ángulos de 90° y 45° respectivamente. Se decidió que fueran ángulos exactos para facilidad de la actividad propuesta, ya que existen números reales que dada su representación en la recta numérica, esta representación no coincide con ninguna subdivisión de la unidad de medida. Al multiplicar los dos números complejos $z_1 = i\ y\ \ z_2 = 1 + i$ resulta $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = -1 + i = w$ de este encontrarán su argumento, el cual es de 135°. En esta primera parte, los alumnos encontrarán una relación entre los argumentos, en donde se espera que descubran: $\theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \theta_w$. En esta primera tarea se espera básicamente que los alumnos entren en la fase de formulación, a través de los cálculos que ellos han desarrollado, trabajando y comparando con sus compañeros las respuestas.
Estas relaciones anteriormente mencionadas serán validadas en la multiplicación de otro par de números complejos trabajados en el ítem II. Es aquí, donde los alumnos desarrollarán el producto de $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$ de manera algebraica, representarán los números complejos correspondientes en el plano, determinarán sus argumentos, sus módulos y darán respuestas a las preguntas planteadas en grupo dando paso la fase de validación, aceptando y rechazando los resultados obtenidos en la tarea matemática.
Al finalizar el Ítem II, vendrá la fase de institucionalización en donde se sacan conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, se recapitula, se ordena y vincula lo que se produjo en los diferentes momentos en el desarrollo de la clase. Dar cuenta de las propiedades identificadas y verificadas por los alumnos respecto a la multiplicación de números complejos y se cumple en su dominio. Al realizar los alumnos las actividades anteriores deberán llegar a la conclusión que al multiplicar dos números complejos se cumplen ciertas regularidades, la suma de los ángulos del producto de dos números complejos es igual al ángulo del número complejo

resultante y la multiplicación de los módulos del producto de dos números complejos es igual al módulo del complejo resultante.

CONTEXTO Y SUJETOS

La implementación del plan de clase fue desarrollada en el Colegio Cristóbal Colón a un grupo de 20 alumnos del electivo Físico-Matemático tercer año medio. Este establecimiento está ubicado en la Población Juanita Aguirre en la comuna de Conchalí, es un liceo científico humanista de 700 alumnos desde pre-kinder hasta cuarto año medio. Tiene un proyecto educativo institucional GAE (Gran Aventura Educativa) que permite emplear e internalizar las vivencias, valores y actitudes de la comunidad, con acciones basadas en un estilo democrático y participativo, con la finalidad de que cada miembro de la comunidad participe activamente dentro de ella. Respecto al nivel socioeconómico del colegio, los tres tercios representantes de la población es de clase media, un 35% de los alumnos son prioritarios, un 25% son preferentes y la deserción escolar en enseñanza media es del 1%, este último dato da a entender que un 34% de los alumnos prioritarios termina la enseñanza media.
Académicamente los puntajes Simce y PSU no son alentadores, ya que el promedio Simce enseñanza básica es de 250 puntos y en la enseñanza media corresponde a 220 puntos. Importante mencionar que el año 2014 el establecimiento perdió la excelencia académica. Sin embargo, el proyecto educativo del Colegio Cristóbal Colón propicia la motivación y compromiso de los alumnos frente a su propio aprendizaje, reflejado en la participación en clases y compromiso con el proyecto con el objetivo de potenciar en los alumnos las habilidades y construcción de su propio conocimiento matemático. Este estudio de clase al enmarcase bajo la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, ofrece al establecimiento la explicación de momentos importantes que se dan en la clase de matemática. Estos momentos son definidos como situaciones en los que el alumno trabaja sin intervención directa del profesor; estos se enfrentan a la interacción y estudio de una tarea matemática mediante la interacción de sus pares y un medio. Este tipo de interacción llamada situación didáctica es primordial para la construcción del conocimiento matemático y que sea significativo. La Teoría de las situaciones didácticas están en sintonía con el enfoque de aprendizaje que el colegio desea brindar a sus alumnos, el año 2017 el establecimiento adhirió al método enseñanza-aprendizaje ABP donde el uso de problemas es un punto de partida para la adquisición de nuevos conocimientos y concepción del alumno como gestor de su propio aprendizaje, por ende, en completa correspondencia con el enfoque que se desea proponer.
Las profesoras que realizan los cursos del plan común matemático y del electivo Físico-Matemático son distintas. Es por ello, que según lo verbalizado con la profesora del plan común los alumnos anteriormente habían representado los números complejos geométricamente en el plano de Argand, pero no se abordó en

el curso las operaciones (adición, sustracción y multiplicación) de los números complejos en el plano.
El registro de la información de la clase realizada se obtuvo mediante la grabación de un video en la clase de matemática, donde se pudo evidenciar con precisión las opiniones de los alumnos sobre los resultados que se generaban al realizar las tareas matemáticas y las devoluciones que el profesor a cargo les planteaba, se capturarán fotografías y se transcribirán los comentarios e intercambio de opiniones de los alumnos. Así también, fotografías de las actividades desarrolladas por los alumnos en el instrumento "taller de matemática" y fotografías que se capturaron mientras los alumnos trabajaban en la clase. El registro de la información recabada es pertinente con los objetivos del estudio, ya que permitirá identificar las dificultades que los alumnos tienen al transitar entre las representaciones algebraica y geométrica, por medio de las evidencias de la grabación del video o en el registro realizado en el taller de matemática. A partir de los registros obtenidos se puedo evidenciar un escenario donde los alumnos no manejaban los conocimientos previos para poder enfrentarse a las tareas matemáticas planteadas, desde representar un número complejo en el plano hasta multiplicar algebraicamente estos números. Es por ello, que se pone a luz la siguiente categoría de análisis que permitirá identificar a partir de los indicadores, las dificultades que tienen los alumnos al transitar entre la representación algebraica y geométrica desde las distintas fases de la TSD, así también abordarlas de tal manera que se propicie la conversión entre registros.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE DATOS

Se presenta la siguiente tabla, para analizar de manera precisa el registro de la información obtenida.

Fase de acción	-El alumno aborda la problemática de forma individual. -El alumno establece estrategias iniciales para multiplicar números complejos. - El alumno realiza conversión entre el registro algebraico y geométrico.
Fase de formulación	-Los alumnos propician la reflexión sobre la multiplicación de números complejos respecto a las respuestas de las actividades. -Comparten resultados respecto al cálculo del módulo de cada número complejo.

	-Los alumnos son capaces de verbalizar el tránsito de la representación algebraica a la geométrica. -Los alumnos son capaces de comunicar qué observaciones encuentran respecto a los ángulos y módulos de los números complejos dados.
Fase de validación	-Los alumnos discuten sobre las soluciones presentadas respecto a la relación del Ítem I e Ítem II. -Los alumnos son capaces de rechazar o aceptar las relaciones encontradas respecto a los argumentos y módulos de los números complejos.

ANÁLISIS

Según la categoría de análisis elaborada y el registro de la información recabada, se dará comienzo al análisis de los resultados obtenidos en la clase.

Fase de acción

El alumno aborda la problemática de forma individual.

Se puede constatar de modo empírico que los alumnos se enfrentan individualmente al Ítem I del taller de matemática, a juzgar por la casi nula comunicación entre ellos, y por el monitoreo personalizado de la docente (P*roducción 1*).

El alumno establece estrategias iniciales para multiplicar números complejos.

-En este indicador los alumnos establecen escasas estrategias, más bien se ven confusos respecto al multiplicar dos números complejos, así también el representarlos geométricamente en el plano en el plano de Argand.
-Uno de los alumnos establece como estrategia que al multiplicar dos números complejos $\boldsymbol{i} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{i}) = \mathbf{1} - \mathbf{1}$, se puede evidenciar que se representa erróneamente el número complejo resultante como una sustracción de $\mathbf{1} - \mathbf{1}$. *(Producción 2).*
-A los alumnos se les dificulta la multiplicación de $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}$, ya que no recuerdan si el resultado es $-\mathbf{1}\ \boldsymbol{o}\ \sqrt{-\mathbf{1}}$, lo que impide obtener el número complejo resultante. Entre compañeros se comunican e intercambian resultados y argumentan frente a esta problemática. *(Producción 3).*
-El alumno representa el número complejo $-\mathbf{1} + \boldsymbol{i}$ resultante como un par coordenado $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$. Para mayor facilidad y estrategia en la producción se registró un número complejo como un par coordenado al igual que en el plano cartesiano, utilizando los conocimientos previos de las clases anteriores. *(Producción 4).*

El alumno realiza conversión entre el registro algebraico y geométrico.

-En la *producción 4 y 5*, se puede visualizar que los alumnos confunden graficar dos números complejos con la representación de un rectángulo en el plano, el número complejo resultante no está presente en el registro.
-En la *producción 6*, el alumno graficó los tres números complejos $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{w}$ representandolos como coordenadas en el plano de Argand, con bastante claridad respecto a la representación geométrica del producto de números complejos.
- En el trabajo realizado por los alumnos *producción 7y 8* se puede evidenciar que transitan desde la representación algebraica a la geométrica, ya que

representan la multiplicación de números complejos como vectores en el plano de Argand.

Fase de formulación

Los alumnos propician la reflexión sobre la multiplicación de números complejos respecto a las respuestas de las actividades.

-Los alumnos reflexionan en conjunto respecto al Ítem I, realizándose preguntas que orientan la reflexión y el trabajo en aula ¿Cómo se grafican los números complejos? ¿Se pueden graficar los números complejos como un par coordenado? Dos de los integrantes de un grupo mencionan que les facilita graficarlos como un punto en el plano, y los demás opinan que como vectores. Uno de los grupos tiene un integrante que propicia la reflexión entre compañeros y también los orienta en las dudas que tienen, las que se pueden expresar a modo de las siguientes preguntas: ¿La parte real puede ser 0? O ¿La parte imaginaria puede ser 0? Finalmente, la última producción aborda reflexiones respecto a los ángulos de los números complejos, preguntándose por ejemplo ¿Cómo saber el ángulo que le corresponde a cada número complejo? ¿Qué observamos?
(Producciones 9, 10 y 11).

Comparten resultados respecto al cálculo del módulo de cada número complejo.

-Los alumnos demuestran no tener dificultad en calcular el módulo para cada número complejo. Cada uno comparte sus resultados con entusiasmo, deliberan, discuten y hay refuerzos positivos mutuos cuando había coincidencias. Se puede concluir que dentro de las actividades que contenía el taller de matemática, esta fue una de las que concitó más interés, sobre todo por la posibilidad de constatar en conjunto validez de los procesos y veracidad en los resultados. *(Producción 12 y 13)*

Los alumnos son capaces de verbalizar el tránsito de la representación algebraica a la geométrica.

-Los alumnos explican los resultados de las actividades desarrolladas en grupos de cuatro a cinco integrantes; algunos mencionan además que la multiplicación de dos números complejos y su producto se pueden representar como vectores y puntos en el plano de Argand y erróneamente mencionan que se puede representar como un cuadrado. Hay un alumno que demuestra tener una concepción errónea sobre la representación geométrica de la multiplicación de los números complejos, lo que se expresa en el hecho de que representaban el número complejo $\boldsymbol{i}$ como un rectángulo sin mayor argumentación. Los alumnos son capaces de verbalizar los resultados obtenidos, establecen deducciones y proyecciones sobre las representaciones. (*Producción 14).*

Los alumnos son capaces de comunicar qué observaciones encuentran respecto a los ángulos y módulos de los números complejos dados.

-Un alumno en particular transita entre los grupos comunicando lo que él ha observado respecto a las regularidades de los ángulos y módulos sobre la representación geométrica de la multiplicación de números complejos. Sus compañeros son capaces de consultar dudas y reafirmar sus conocimientos. (P*roducción 15).*

-Se visualiza un grupo de alumnos que fue el primero en concluir y comunicar al resto del curso que la suma de los ángulos del producto de dos números complejos es igual al ángulo del número complejo resultante, la multiplicación de los módulos del producto de dos números complejos es igual al módulo del complejo resultante. (Importante mencionar que al momento de comunicar a sus compañeros de la regularidad encontrada estaban bastante entusiasmados). (P*roducción 15 y 16).*

Fase de validación

Los alumnos discuten sobre las soluciones presentadas respecto a la relación del Ítem I e Ítem II.

Se evidencia que los alumnos del curso discuten las soluciones presentadas, específicamente respecto a la relación que se genera entre ángulos y módulos del producto de los números complejos. En esta instancia, después de varias reflexiones es que se evidencia que los alumnos llegan a un consenso de los resultados obtenidos en las actividades. (P*roducción 17).*

Los alumnos son capaces de rechazar o aceptar las relaciones encontradas respecto a los argumentos y módulos de los números complejos.

-Un alumno expone y explica ante sus compañeros el resultado de la siguiente multiplicación $\boldsymbol{2i\cdot(1+i)=2i-2=0}$. La profesora escribe el ejercicio en la pizarra y les pregunta a los compañeros ¿cómo harían ustedes este ejercicio? ¿Está correcto cómo está desarrollado? Algunos levantaron la mano, y respondieron que no se puede restar $\boldsymbol{2i-2}$ ya que no son términos semejantes. La mayor parte del curso rechaza la postura y argumenta el por qué está erróneo el resultado, la profesora realiza una devolución. (P*roducción 18 y 19).*

La clase aplicada al tercer año medio del Colegio Cristóbal Colón, obtuvo resultados que se habían contemplado en el análisis a priori, ya que la mayoría de los alumnos se detuvieron más tiempo en el desarrollo del Ítem I, precisamente en la resolución algebraica. Una gran cantidad de ellos tuvieron dificultades que no les permitía avanzar en la actividad, específicamente multiplicar $i \cdot (1+i)$ y en multiplicar $i \cdot i$, ya que no recordaban con exactitud cuál era su resultado de i^2. Otra de las dificultades originadas en la clase fue representar en el plano de Argand el número complejo $z = i$, el problema radicado en que la parte real es 0 y por lo tanto dificultaba a los alumnos evidenciar que se identifica con el par coordenado $(0,1)$.
El objetivo de la actividad era analizar de manera gráfica la solución del producto de los números complejos, pero la clase se posicionó en la resolución algebraica más que en lo geométrico, debido a las dificultades y escasos conocimientos previos de los alumnos. En el Ítem I estuvieron detenidos alrededor de 30 minutos, siendo los conocimientos previos el obstáculo que extendió el tiempo de desarrollo en la primera actividad. A pesar de las dificultades mencionadas, los alumnos pudieron entrar en la fase de acción y relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos previos.
Luego, que los alumnos estuvieran reflexionando y realizando puestas en común, inmediatamente el representar un número complejo en el plano les dificultó la tarea para poder avanzar en el taller de matemática. Sin embargo, la fase de formulación favoreció el aprendizaje cuando se produjo una reflexión de cada grupo y sus representantes, intercambiaron estrategias y aclararon dudas respecto a las respuestas de las actividades. Los alumnos formularon mensajes respecto a cómo multiplicar los números complejos término a término, mencionando que $i^2 = -1$, graficar números complejos e identificar su ángulo, estos mensajes fueron recepcionados y comprendidos en su totalidad por los alumnos de la clase. Posteriormente, la profesora explicó y aclaró varias dudas que los alumnos tenían en relación a la multiplicación de $i \cdot i$ y como representar $z = i$ en el plano de Argand. Aclarando estas dificultades, los alumnos pudieron resolver sin mayor problema las actividades del Ítem II.
El trabajo del Ítem II también fue fortalecido por la fase de formulación, en la cual formularon enunciados e intercambiaron respuestas con sus compañeros. Los alumnos explicaron las estrategias que propusieron, poniéndolas en discusión con los demás, donde su único medio de acción era explicar estas estrategias entre los integrantes de su grupo. En este último Ítem del taller de matemática, uno de los alumnos adquirió el rol implícitamente de monitor, compartió y reflexionó sus observaciones con sus compañeros, transitando grupo a grupo, explicándoles la resolución de los problemas que le causaron mayor dificultad.
Por último, se evidencia la instancia donde el representante de cada grupo comparte las respuestas y discusiones con todos sus compañeros, cada alumno valida o

rechaza las declaraciones formuladas. Los alumnos lograron deducir la propiedad de los números complejos respecto a los ángulos y módulos en la representación geométrica. Concluyendo, que la suma de los argumentos del producto de dos números complejos es igual al argumento del número complejo resultante y la multiplicación de los módulos del producto de dos números complejos es igual al módulo del número complejo resultante. Los alumnos al haber pasado por las fases de acción, formación y validación el profesor retoma las conclusiones finales, con el objetivo de formalizar los saberes adquiridos.

La clase aplicada permitió tener una visión del tránsito desde el registro algebraico al geométrico. En las actividades desarrolladas en aula, a algunos alumnos les dificultó la conversión entre los registros algebraico y geométrico, ya que no manejaban a cabalidad los conocimientos previos y conceptos del objeto matemático dificultándoles el desarrollo del taller de matemática.

Es por ello, que este análisis nos invita a promover un cambio en el rediseño del instrumento el "taller de matemática", ya que no es necesario indicar en la actividad que multipliquen dos números complejos. Sino más bien, otorgar el $z_1, z_2\ y\ w$ y desde ahí lograr que los alumnos comprendan, analicen y conjeturen respecto al objeto matemático, para así, evitar que los alumnos se detengan en la resolución algebraica. Así también, verificar anticipadamente que los alumnos dominen los conocimientos previos respecto al objeto matemático a desarrollar, para que no se presenten dificultades mientras los alumnos trabajan en aula.

CONCLUSIONES

El Estudio de Clase como metodología, brinda al docente la experiencia de aprender en torno a la búsqueda de soluciones o alternativas, en relación a la necesidad de la problemática planteada. Esta investigación contribuye a la formación y el desarrollo de competencias de los docentes, ya que permite realizar un análisis exhaustivo respecto a la reflexión de las prácticas en aula y diseñar propuestas innovadoras. El plan de clase se elaboró bajo la línea del marco teórico de las situaciones didácticas de Brousseau, ya que condiciona y propicia la construcción del conocimiento matemático. Además, se aborda el objeto matemático “multiplicación de números complejos”, que permite analizar los conocimientos previos, dificultades de los alumnos, sustentado en un marco teórico que es la base en el estudio de clase y análisis de cada uno de los procesos. Según Martínez (2012), la utilización de la historia es una herramienta didáctica que permite presentar la matemática como una asignatura más cercana a los alumnos, el aprendizaje bajo la contextualización motiva y genera la iniciativa de investigar y descubrir, lo que propicia un aprendizaje más significativo en aula.

El Estudio de Clases impacta positivamente en mejorar el desarrollo profesional de los docentes y el aprendizaje de los estudiantes, en la calidad de enseñanza que se quiere brindar. La idea es que el estudio de clases no se limite solamente a analizar algunos planes de clases específicos, sino que sea una práctica habitual y aplicada en otras instituciones de Chile. Según Isoda y Mena (2010), aprender de la experiencia colectiva, con las preguntas que ellos mismos o el medio les plantea, provoca conocimiento entre sus pares, así el proceso de investigación e innovación es conducido por los propios actores del sistema. La experiencia sin duda enriquece el trabajo formativo de los docentes participantes en el estudio del plan de clases, ya que brinda la oportunidad real para analizar en profundidad el objeto matemático en cuestión. Una situación que otorga experiencia sobre la realidad escolar, la diversidad de espacios educativos y la importancia del rol como docente en el aula.

Según Flores y Montoya (2016) hacen mención del proceso de aprendizaje de la multiplicación de números complejos y el tránsito entre los registros mejora la comprensión del objeto matemático. Es por ello, que el tránsito entre registros algebraico y geométrico es una competencia necesaria para la resolución de problemas y para comprender la conceptualización del objeto matemático, enmarcándose a este estudio.

Las dificultades observadas hacen concluir que el plan de clases tuvo efectos favorables, el desarrollo de las tareas matemáticas contribuyó no sólo en el tránsito del registro algebraico al geométrico sino también, potenció y re fortaleció los momentos didácticos que se proporcionaron en aula. La categorización elaborada sobre las producciones escritas, pone a la luz la presencia de dificultades en los conocimientos previos y pone de relieve algunos errores que cometen los alumnos al operar con los números complejos algébricamente.

El estudio realizado, logra dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas en un comienzo, desde la categoría de análisis se permitió evidenciar las dificultades que tienen los alumnos al transitar entre los registros algebraico y geométrico. Poniendo en evidencia que los mayores obstáculos están presentes en multiplicar dos números complejos algebraicamente, conocer el valor y comprender el concepto de i^2, representar un número complejo en el plano de Argand. En definitiva, los conocimientos previos deben ser imprescindibles al momento que los alumnos se enfrenten a tareas matemáticas en una clase.

Las proyecciones de este estudio, nos llevarían a un escenario idóneo para elaborar una secuencia didáctica, abordando actividades secuenciales relacionadas con la construcción de applet (Software Geogebra), contextualizadas y significativas para los alumnos, propiciando el tránsito entre los registros algebraicos y geométricos.

Las actividades realizadas permiten a los docentes determinar los conocimientos previos y las supuestas preguntas que realizarían los alumnos. En cada una de las clases estos irán explorando e incorporando herramientas que les permitirán dar una respuesta a las problemáticas. La experiencia de este estudio sin duda enriquece el trabajo formativo de los docentes participantes del plan de clases, ya que brinda la oportunidad real para analizar en profundidad el objeto matemático en cuestión. Una situación que otorga experiencia sobre la realidad escolar, la diversidad de espacios educativos y la importancia del rol docente en el aula.

REFERENCIAS

Artigue M. Douday, R y Moreno, L. (1995). Ingeniería en Didáctica de la Matemática. *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. México. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf.

Ausubel, D.P (1976) Psicología Educativa. Una perspectiva cognitiva. Ed. Trillas. México.

Barrantes M. López, M. y Fernández, M. A. (2015). *Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto.* PNA, 9(2), 107-127.

Bitencourt, A., Vargas, P; Felicceti, Vera. (2014). *Una propuesta pedagógica: utilizando el software Geogebra en la rotación de vectores complejos.* Revista de educación en ciencias y matemática. p. 05-15.

Brousseau G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas.* 7(2). pp. 33-115.

Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique du savoir savant au savoir ensigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ercilla, Y. (2010). *Las representaciones geométricas como herramienta para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollando con alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal".* (Tesis en Maestría Educativa). Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán". Tegucigalpa M.D.C.

Flores, M. Montoya, E. (2016). *Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos*. Educación Matemática, *28* (2).

Mangili, G y Sánchez, A. (2015). *Propuesta de un diseño didáctico que complete la enseñanza de las transformaciones isométricas a través del uso de los números complejos. Basado en la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.* (Tesis de pregrado). Universidad Católica Silva Henríquez. Chile.
Recuperado de www.bdigital.unal.edu.co/55888/1/39325373.2016.pdf

Martínez, I. (2012). *La enseñanza de los números complejos en el Bachillerato.* (Tesis en Master de Formación de Profesorado de Secundaria). Universidad de Cantabria, Santander, España.

Ministerio de Educación de Chile MINEDUC, (2015). *Programa de Estudio Tercero Medio. Santiago, Chile.*

Pérez, F. (2004). *Curso de análisis complejos*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada.

Proyecto Bicentenario (2012). *Texto de matemática, 3° medio.* Santillana.

Rivero, F. (2001). *Una introducción a los números complejos. Universidad de los Andes. Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias*. Recuperado de: www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf

Sadovsky, P. (1986). La Teoría de las Situaciones Didácticas*: Un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática*. p. 2-25.

Saiz, O. Blumenthal V. (2017). *Texto del estudiante, Matemática 3° medio. Chile. Cal y Canto.*

Spiegel, M. (2009). Variable Compleja. Segunda Edición. Editorial Mexicana, Reg, Núm.736. Recuperado de: http://www.academia.edu/22101325/Variable_Compleja__Serie_Schaum_-_Murray_Spiegel

Tomaso, G. (2011). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* [Resumen]. RIME, pp. 45-61.

Isoda, M; Olfos, R. (2011). Enseñanza de la Multiplicación: Desde el Estudio de Clases Japonés a las Propuestas Iberoamericanas. Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Recuperado de: http://www.euv.cl/archivos_pdf/matematicas2011.pdf

Zea, C. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.* (Maestría en Educación). Universidad del Valle, Cauca, Colombia.

ANEXOS

PRODUCCIONES

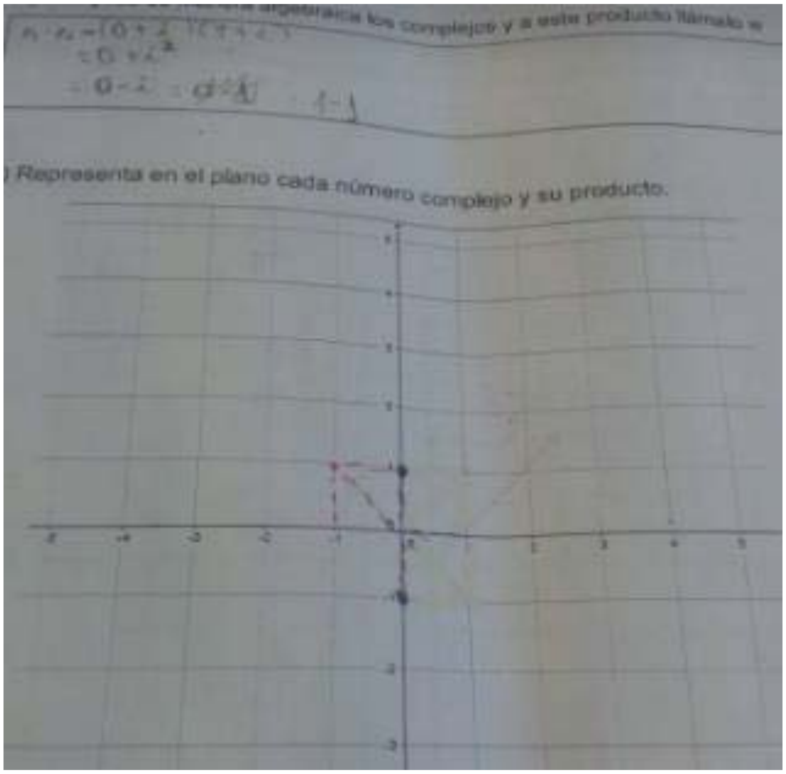
Producción 1

Producción 2

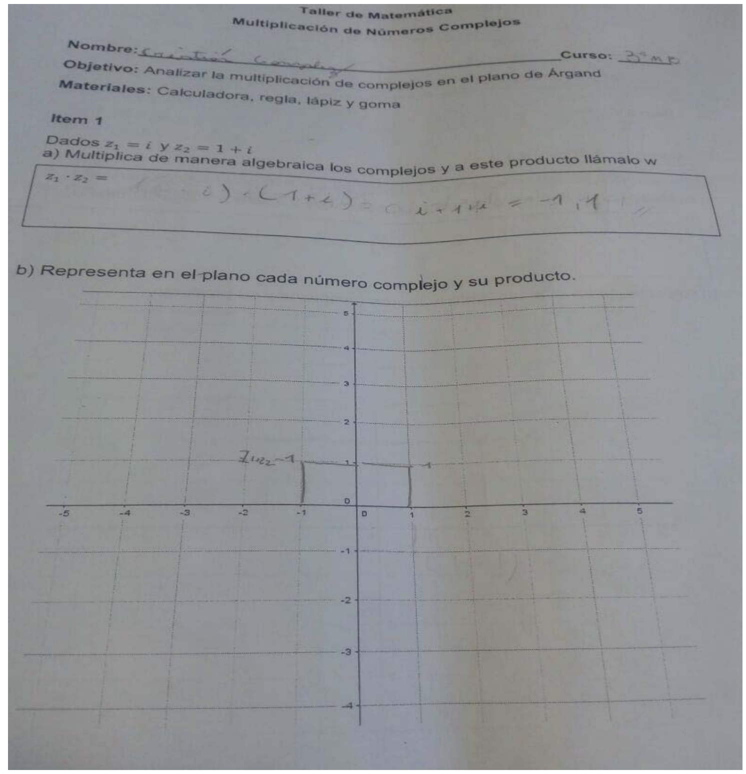
Registro del video: Al menos 15 de un total de 22 alumnos mientras trabajan individualmente, preguntan a la profesora;

Alumno 1 (Vicente Bustos): "Profe ¿Cuánto es $i \cdot i$? Y ¿Cómo podría multiplicar el número complejo i sino tiene parte del real? Además ¿Los paréntesis influyen al multiplicar $i \cdot (1 + i)$?

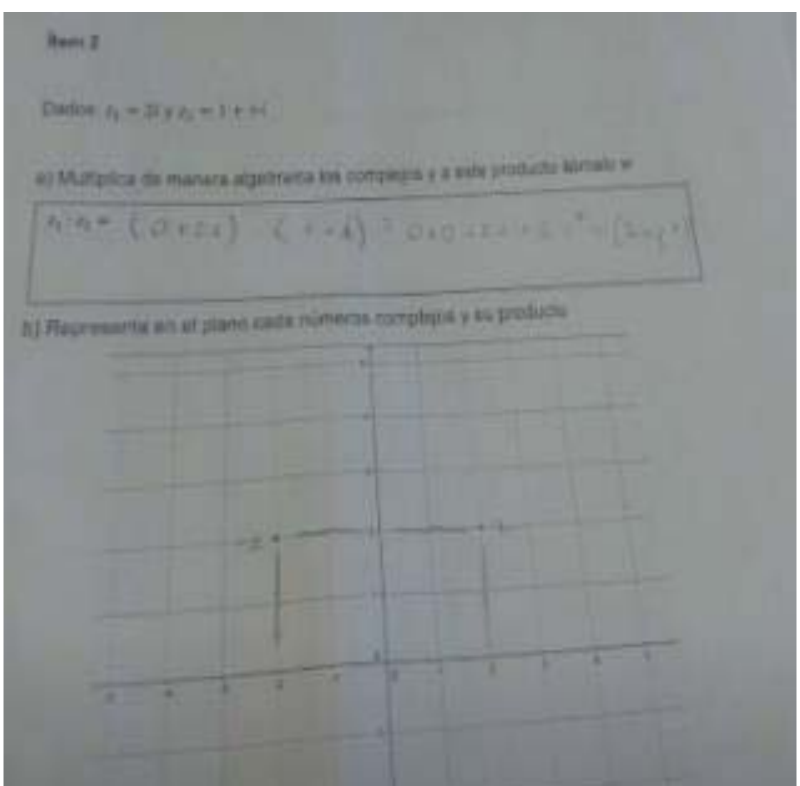
Producción 3 alumno



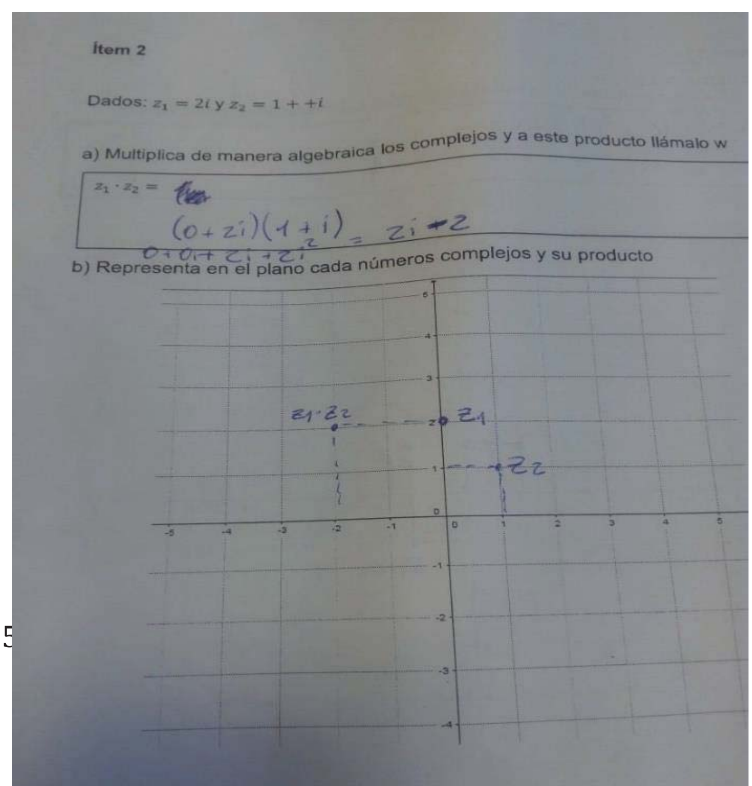
Producción 4 alumno



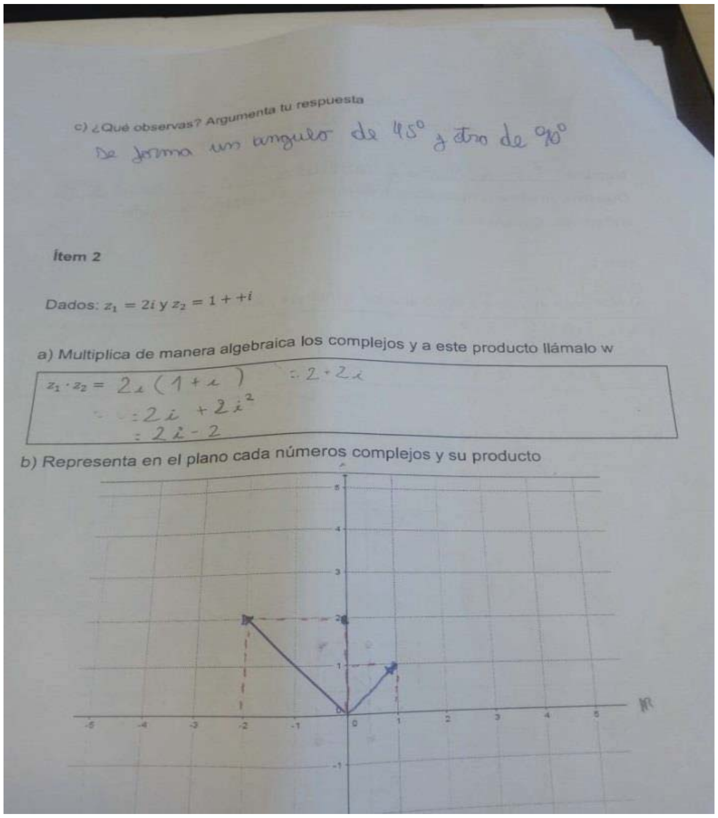
Producción 5 alumno



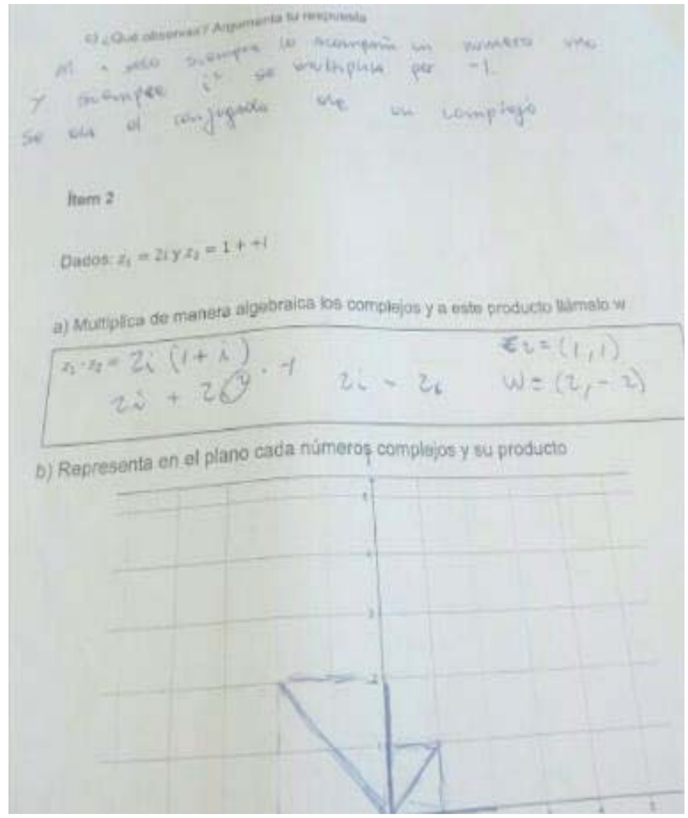
Producción 6 alumno



Producción 7 alumno



Producción 8 alumno



Producción 9

En esta producción los alumnos reflexionan respecto a la actividad del Ítem I, preguntando a la profesora;

Alumno 1: profe ¿Cómo se grafican los números complejos?

Alumno 2: oiga profe ¿Se pueden graficar los números complejos como un par coordenado?

Grupo de alumnos: Profesora que es más fácil graficarlos como un punto en el plano o como vectores, ¿cómo lo hacemos entonces?

Producción 10

Alumno 1: Les explica a sus compañeros por qué el número complejo i corresponde al par coordenado $(0,1)$, ya que su parte real es 0.

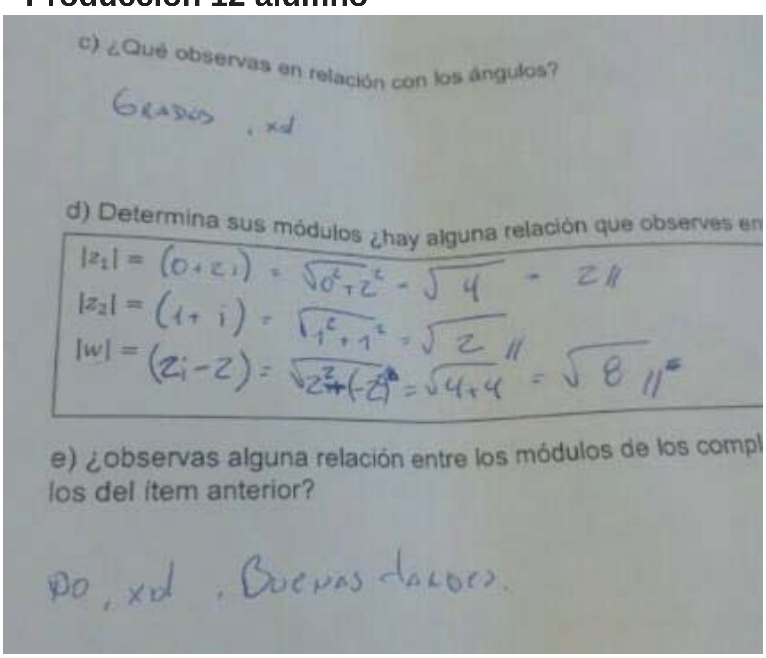
Alumno 2: ¿Estás seguro Vicente? ¿La parte real puede ser 0? Luego…
Alumno 3: profe una pregunta ¿Y la parte imaginaria puede ser 0?

Producción 11

“Se entabla una discusión entre los alumnos” debaten sobre la última pregunta del Ítem I; ¿Qué observa?

Alumna 4: observa que a cada uno de los vectores le correspondía un ángulo
Alumno 5: una pregunta profe ¿Cómo saber el ángulo que le corresponde?
Alumno 6: son ángulos exactos para cada número complejo.

Producción 12 alumno



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

GRADOS , xd

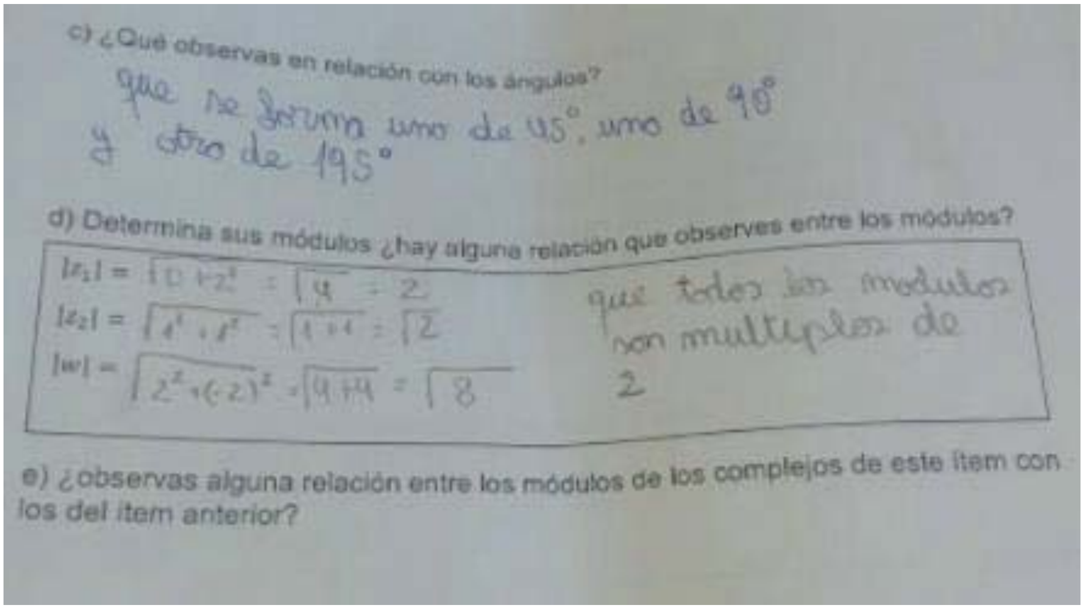
d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes en

$|z_1| = (0+2i) = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$ //
$|z_2| = (1+i) = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ //
$|w| = (2i-2) = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ //

e) ¿observas alguna relación entre los módulos de los compl
los del ítem anterior?

No, xd . Buenas tardes.

Producción 13 alumno



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

que se forman uno de 45°, uno de 90° y otro de 195°

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0+2^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

que todos los modulos son multiplos de 2

e) ¿observas alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

Producción 14

En esta producción El alumno verbaliza la representación geométrica de la multiplicación de números complejos, menciona que siempre se identifica con un cuadrado o un rectángulo en el plano de Argand.
Alumno 7: profe…mmm este número complejo se grafica cómo un cuadrado. ¿Sí?

Producción 15

En este registro se evidencia que el alumno va comunicando por grupo de trabajo las observaciones que va encontrando, respecto a los ángulos y módulos de los números complejos dados.

Producción 16

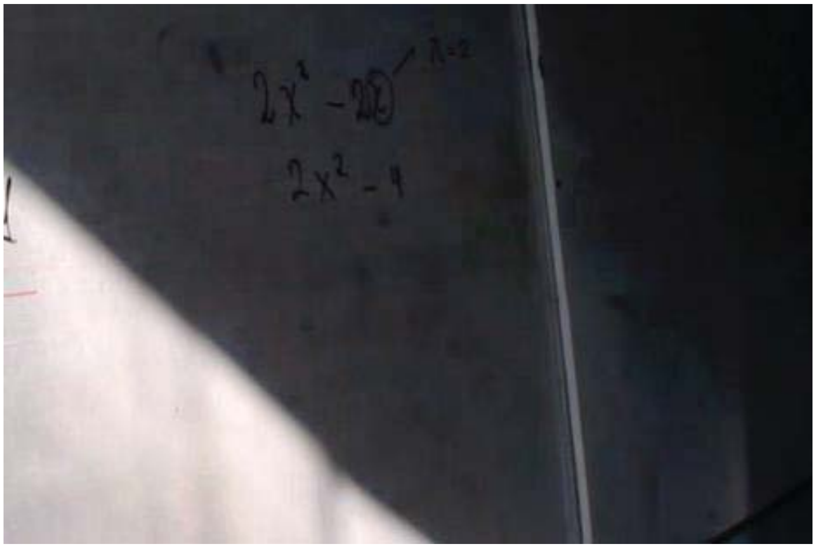
Este grupo de estudiantes fue el primero en concluir que la suma de los ángulos del producto de dos números complejos es igual al ángulo del número complejo resultante, y la multiplicación de los módulos del producto de dos números complejos es igual al módulo del complejo resultante.

Producción 17

Producción 18

Alumno 8: profe tengo este resultado $\mathbf{2i \cdot (1 + i) = 2i - 2 = 0,}$ yo les explico a los demás compañeros como se realiza no es tan terrible

Producción 19



Se les pregunta a los alumnos ¿se puede sumar $2x^2 - 2$? ¿$2x^2 - 4$?

GUÍA DIDÁCTICA 1

Taller de Matemática
Multiplicación de Números Complejos

Nombre:____**Curso:** ______

Objetivo: Analizar de manera gráfica la solución del producto de los números complejos.

Materiales: Calculadora, regla, lápiz y goma

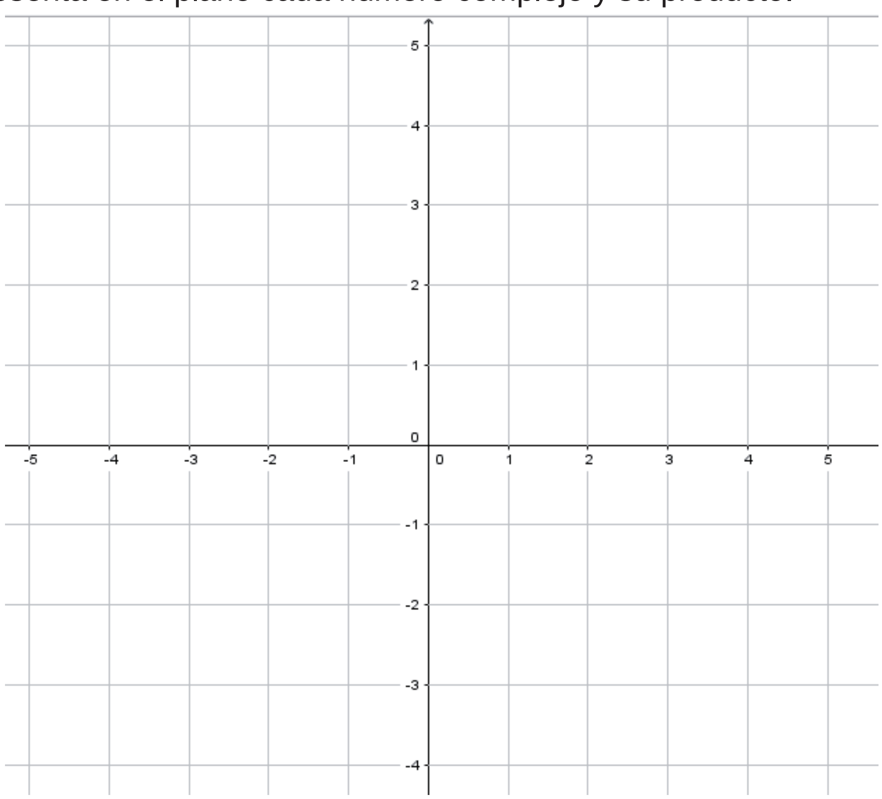
Ítem I

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

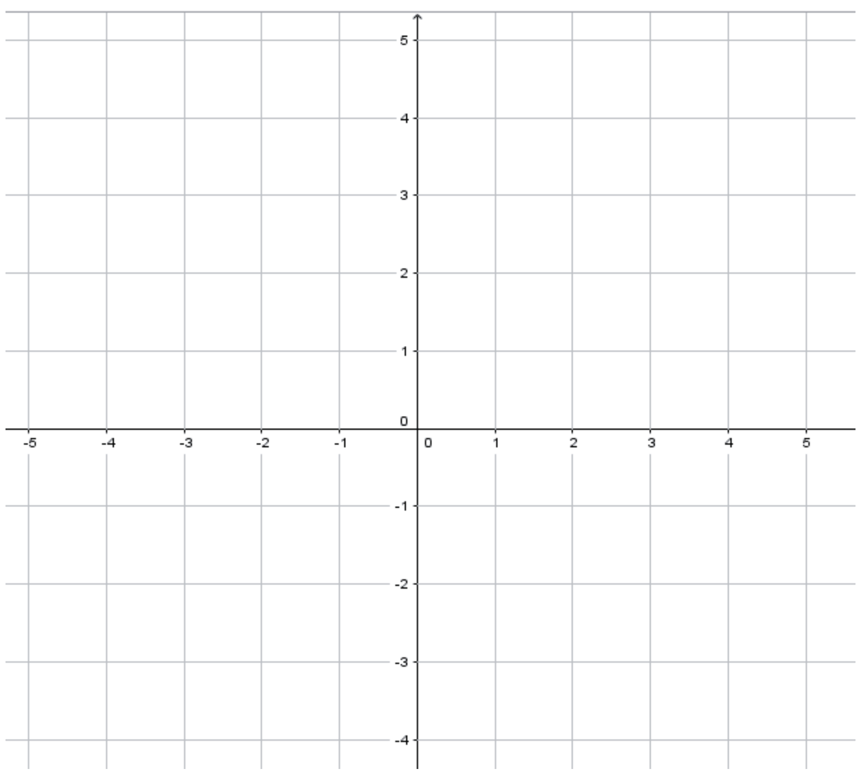
Ítem II

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + +i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto



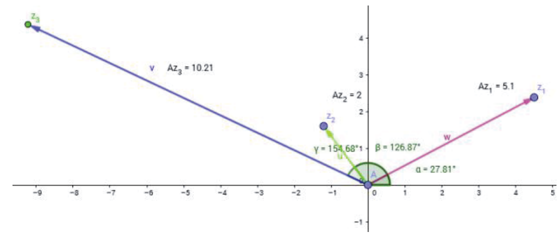
c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| =$
$|z_2| =$
$|w| =$

e) ¿observan alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

GUÍA DIDÁCTICA 2



Guía producto de números complejos

Nombre:____**Curso:** ______

Contenido: Multiplicación de números complejos

Objetivo: Explorar y representar la multiplicación de números complejos mediante el recurso digital.

- Lee atentamente la siguiente guía.
- Comenta con tus compañeros (as) lo que logras y lo que no logras entender de la lectura, aclarando tus dudas hasta el final de ella.

Recuerda que….

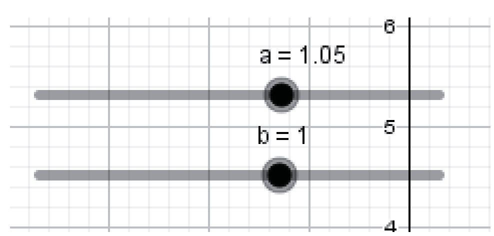
Un número complejo puede ser representado de forma binómica $z = a + bi$ con $a, b \in IR$ y a cada número complejo le corresponde un par ordenado (a, b) en el plano, dependiendo de su forma y ubicación de los coeficientes(a, b).

Representación geométrica del producto de los números complejos

Trabajemos con Geogebra…

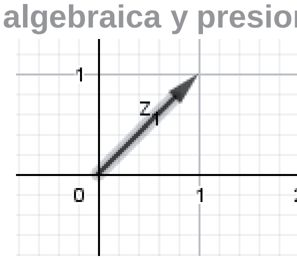
✓ **Crear 2 deslizadores a y b** (Figura 1 y 2) **con las siguientes características:**
Mínimo= -5
Máximo= 5
Incremento= 0.01

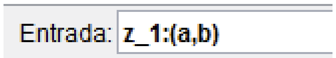
(Figura 1)



(Figura 2)

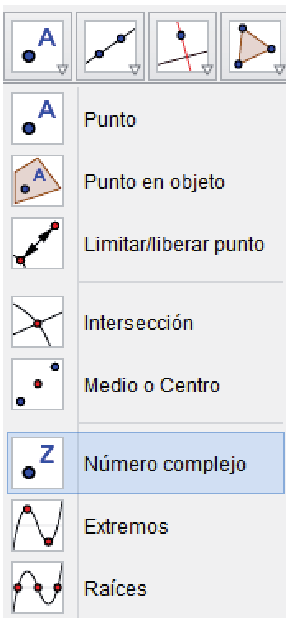
✓ **Ingrese z_1:=**(a, b) (Figura3 y 4) **a la entrada algebraica y presione enter.**



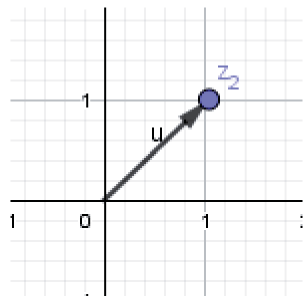


(Figura 3) (Figura 4)

✓ **Ir a Punto y seleccionar número complejo,** (Figura5) **luego posicionarse en el extremo del vector y hacer clic para obtener** z_2 (Figura 6).

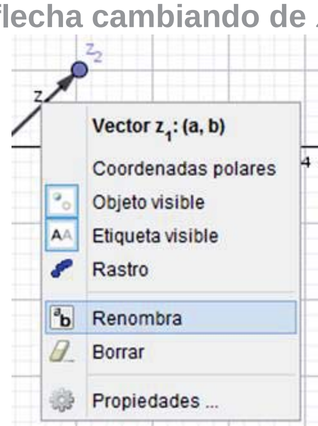


(Figura 5)

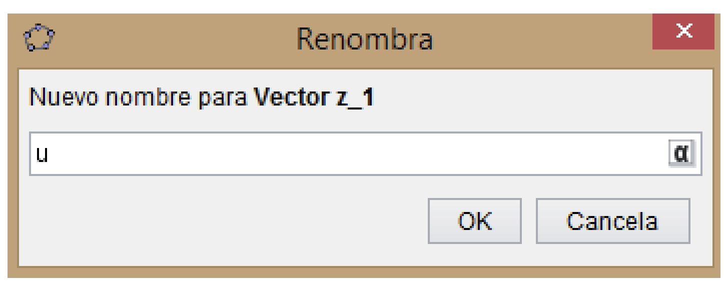


(Figura 6)

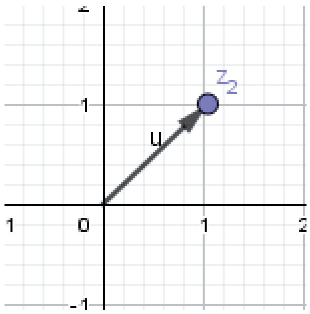
✓ **Posicionarse en el vector** z_1, **has clik en botón derecho y selecciona “renombra” para cambiar el nombre del vector a “u”** (Figura 7 y 8). **Así mismo, con el extremo de la flecha cambiando de** z_2 **a** “z_1” (Figura 9).



(Figura 7)

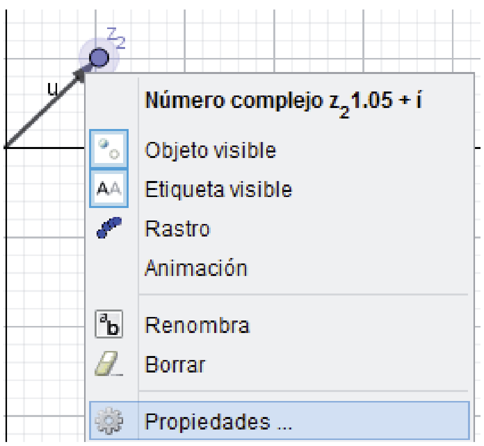


(Figura 8)



(Figura 9)

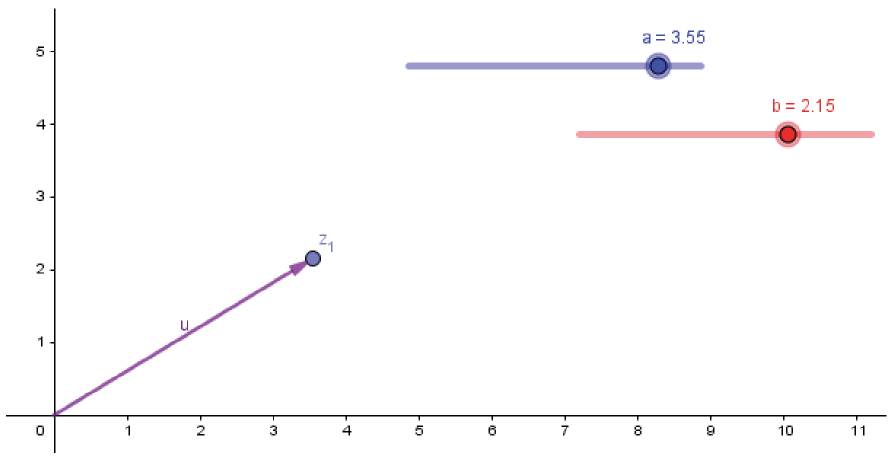
✓ **Posiciónese en el vector y seleccione propiedades para cambiar color y estilo al vector** (Figura 10 y 11). **De la misma forma con los deslizadores a y b.**



(Figura 10)

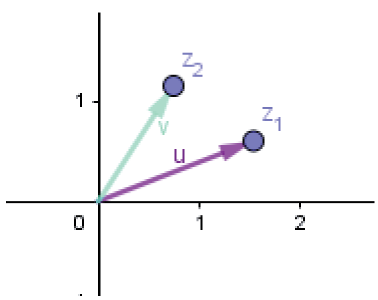
(Figura 11)

✓ **Al mover los deslizadores, puedes ver como la gráfica va variando de acuerdo a distintos valores de a y b originados anteriormente** (Figura 12).



(Figura 12).

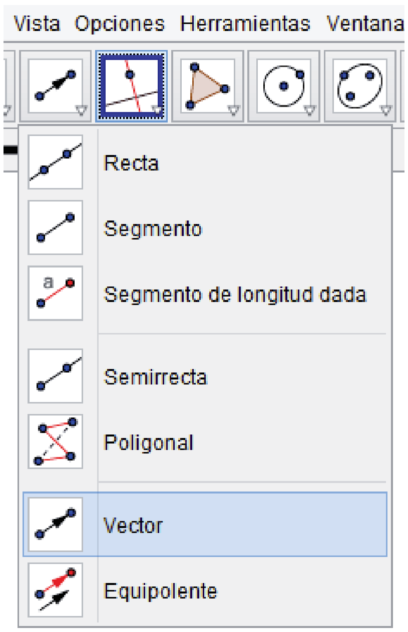
✓ **Sigue de la misma forma los pasos para representar el número complejo** z_2 ($\boldsymbol{vector\ v}$), **ver** (Figura 13).



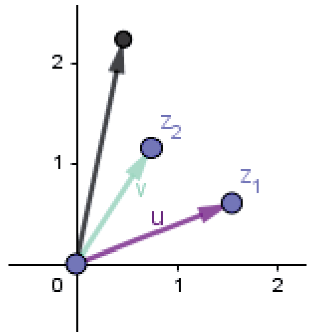
✓ **Ingrese z_p:=z_ ∗ z_2** (Figura14) **a la entrada algebraica y presione enter.**

(Figura14)

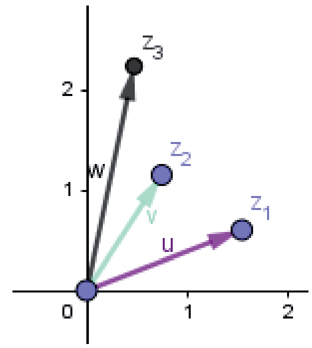
✓ **Mueva los deslizadores para que aparezca la coordenada del producto de los números complejos en la gráfica. Selecciona en opciones** **<u>Vector</u> y crea el punto de origen y el de la punta (coordenada resultante del producto de $z_1 \cdot z_2$) y grafica el vector. Renombra el número complejo como z_3 ($vector\ w$) y sigue los mismos pasos indicados anteriormente** (ver figura 15, 16 y 17).



(Figura15)

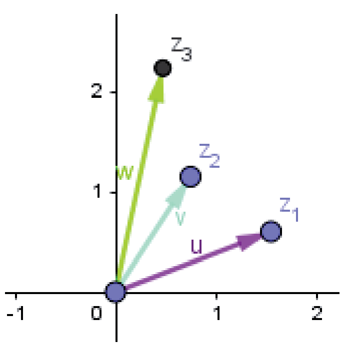


(Figura 16)



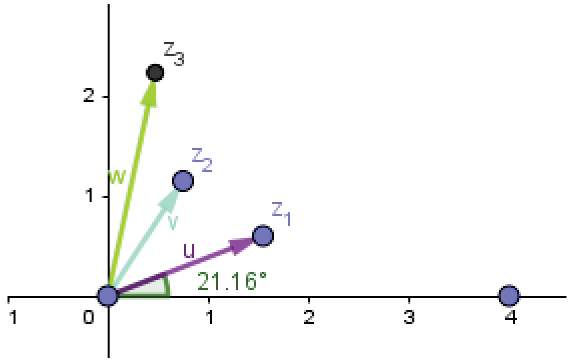
(Figura 17)

✓ **Posiciónese en el vector y seleccione propiedades para cambiar color y estilo del vector z_3** (Figura 18).



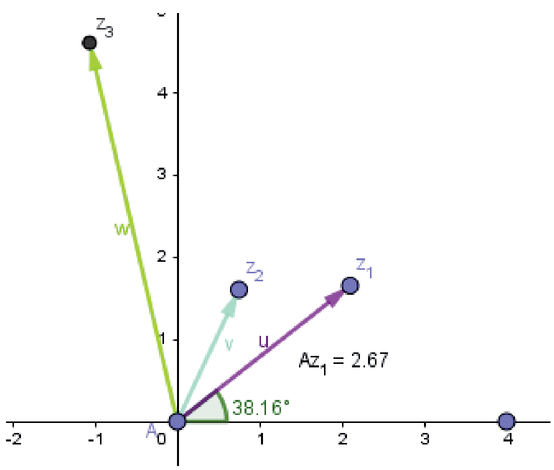
(Figura 18)

✓ **Elija un**  **externo al gráfico en el eje x. Escoja**  **en opciones y crea un ángulo para el número complejo z_1 seleccionando tres puntos en sentido anti horario (punto externo, en el origen y punta de la flecha) como aparece en la** (Figura 19).



(Figura 19)

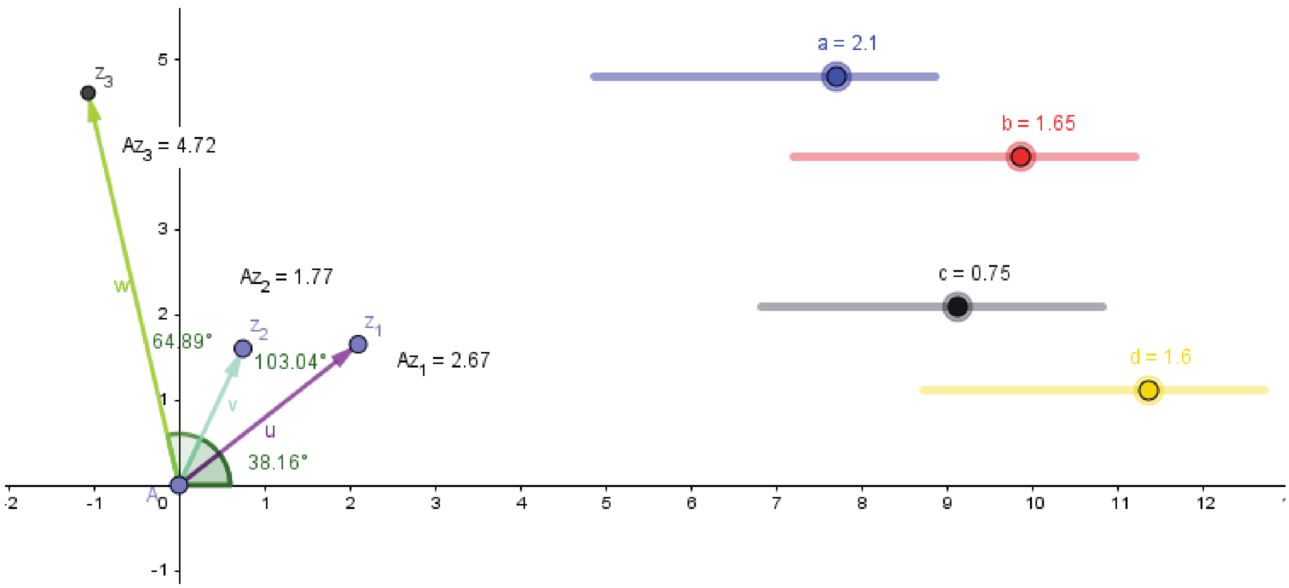
✓ **Escoja la herramienta**  **y seleccione dos puntos (origen y punta de la flecha) para medir el módulo del número complejo z_1** (Figura 20).



(Figura 20)

✓ **Realiza el mismo procedimiento para los números complejos z_2 y z_3. Realiza clic derecho en el punto externo creado y oculta objeto.**

Producto final en el software Geogebra



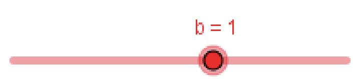
Propuesta… Analicemos el recurso digital Geogebra

1. ¿Qué puedes observar a medida que se mueven los parámetros a, b, c y d?

2. Sitúa los deslizadores $a = 2, b = 1, d = 0$ y mueve el parámetro del deslizador c. ¿Qué sucede con el vector resultante z_3 cuando se multiplica por un número real?

3. Si se mantienen los parámetros a y b, con $c = 0$. ¿Qué sucede con el vector z_2 cuando el deslizador d va variando?

4. Utilizando el recurso digital fija los



$a = 2 \quad b = 1$

$c = -1 \quad d = 3$

a) Según la gráfica ¿Cuáles son los números complejos z_1, z_2 y z_3?

b) ¿Cuánto miden los argumentos para cada número complejo $z_{1,}$ z_2 y z_3 ?

c) Expresa en una o dos frases la relación entre los argumentos

d) ¿Cuánto miden los módulos para $z_{1,}$ z_2 y z_3 ?

¿Puedes observar alguna relación entre los módulos de los números complejos? Argumenta tu respuesta.

"Recuerda: Al terminar la actividad coméntala con tus compañeros y así podrás realizar un mejor aprendizaje matemático, enfocado en el procesador geométrico Geogebra"

GUÍA DIDÁCTICA 3

Guía rotación de números complejos en el plano

Nombre:____**Curso:** ______

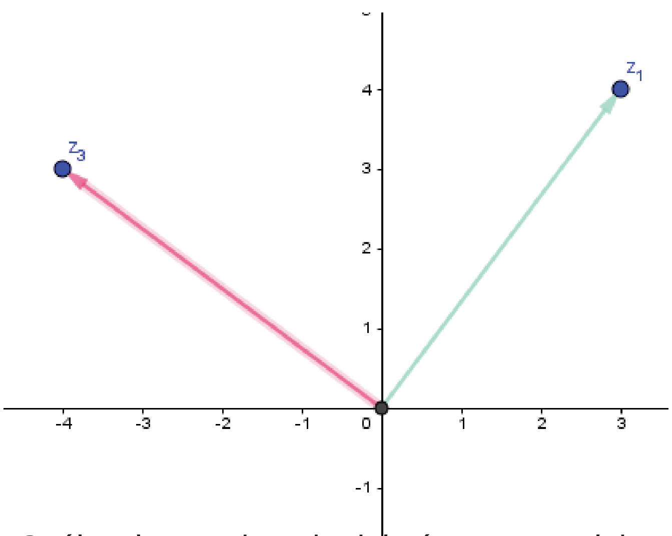
Contenido: Multiplicación de números complejos
Objetivo: Comprender y analizar la representación geométrica del producto de números complejos

- Lee atentamente la siguiente guía.
- Comenta con tus compañeros (as) lo que logras y lo que no logras entender de la lectura, aclarando tus dudas hasta el final de ella.

¿Cuál es el significado geométrico de la rotación del producto de los números complejos?

I. Observa las siguientes imágenes y responde las preguntas que están a continuación:

1.

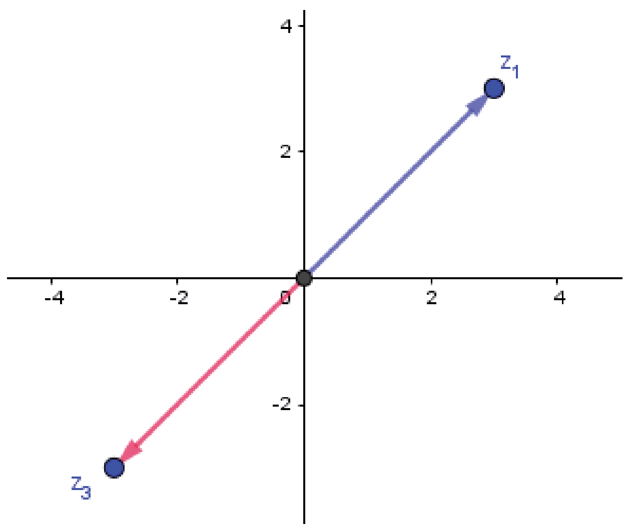


a) ¿Cuál es la coordenada del número complejo z_2, sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = z_3$?

b) ¿Qué tipo de transformación geométrica se realizó al cambiar de posición $z_1 a \ z_3$?

c) ¿Cuál es el argumento de cada número complejo $z_1, z_2 \ y \ z_3$?

2.



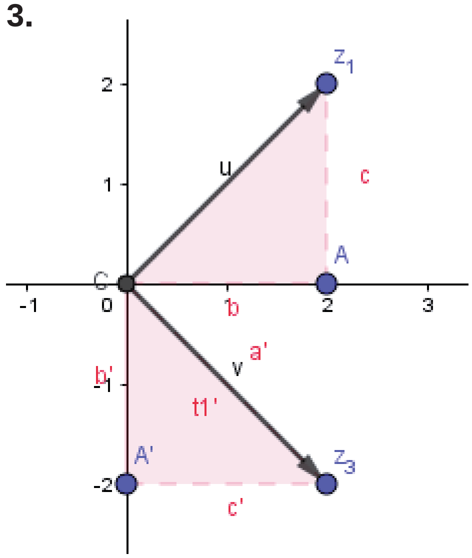
a) ¿Cuál es el número complejo z_2?

b) ¿Corresponde a una rotación de $180°$? ¿Por qué? Argumenta

c) ¿Qué puedes inferir respecto al módulo de z_2?

d) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

3.

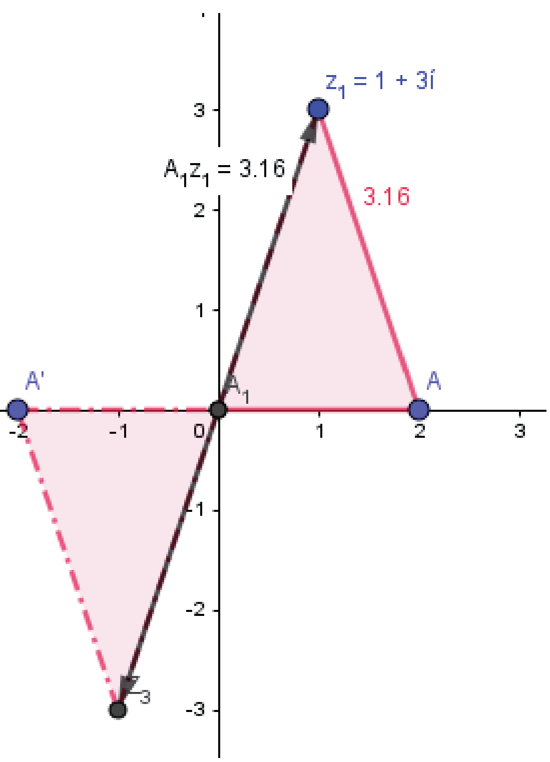


a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación en sentido horario en 90° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué operación describe este cambio de posición? ¿Cuál es el número complejo z_2?

c) Crea un ejemplo donde se cumpla lo anteriormente visualizado. ¿Se cumple para todos los casos?

4.

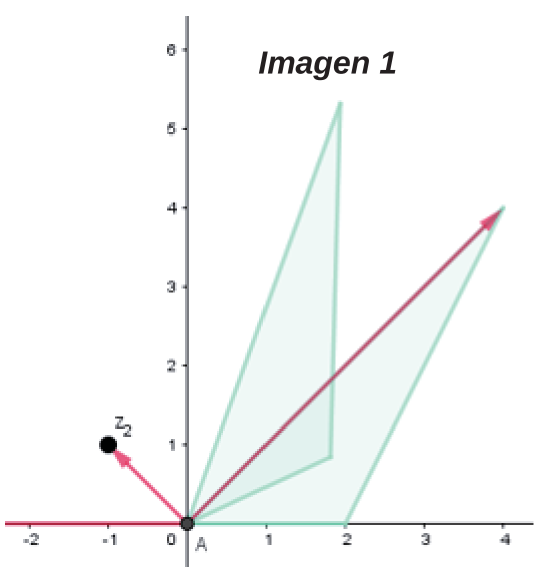


a) Si al triángulo que aparece en la gráfica con base z_1, se le realiza una rotación anti horario en 180° ¿Cuál es el número complejo z_3 resultante?

b) ¿Qué relación existe entre el módulo de $z_1, z_2\ y\ z_3$?

c) Expresa en una o dos frases lo que has visualizado

II. Observa la siguiente secuencia de imágenes:



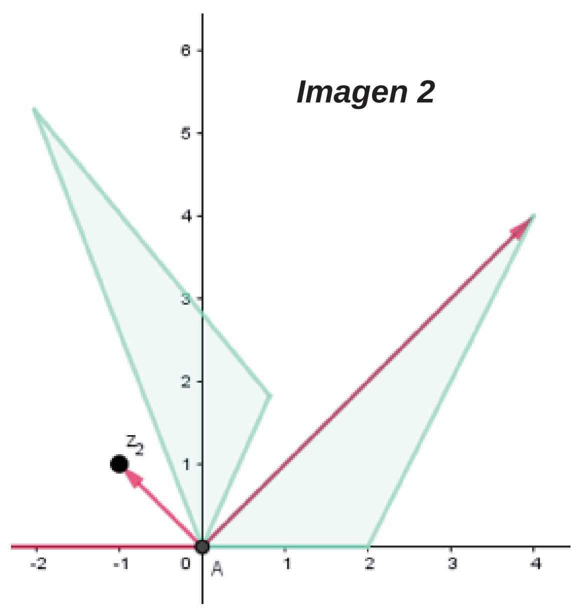
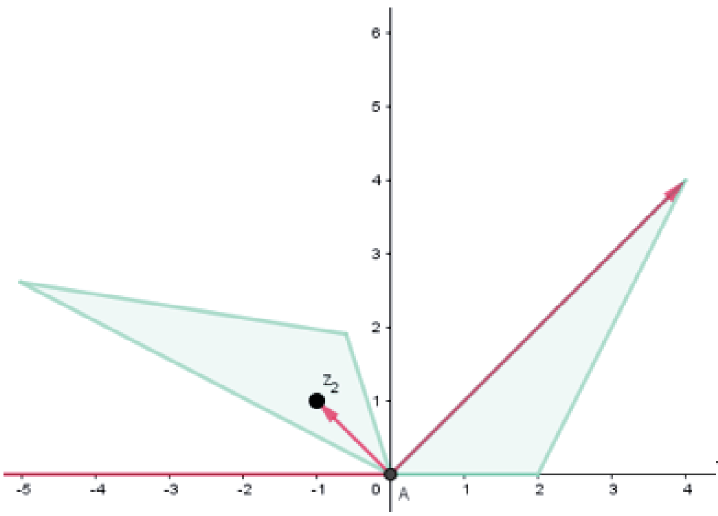
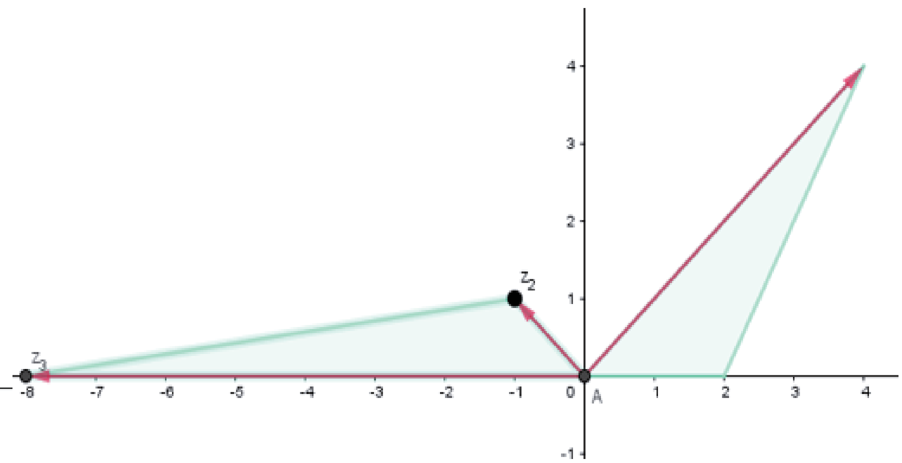


Imagen 3 ***Imagen 4***





- ✓ Expresa en una frase las características de la imagen anteriormente entregada.

- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre el primer triángulo rotado y el resultante? ¿Es el mismo? Argumenta

Para concluir…

1. ¿Qué coordenadas tendría un punto cualquiera al ser rotado en $90°$? ¿Qué rotación existe entre un punto y su opuesto?
a) ¿Cuál es el módulo del número complejo por el cual se debe multiplicar el vector z_1 al realizar la rotación?

2. Si se quisiera rotar un número complejo $a + bi$ en $180°$
a) ¿Qué operación es la que se realiza en esta rotación? Argumenta
b) ¿Cuál es el número complejo resultante en esta rotación?
c) ¿Qué módulo tiene el número complejo resultante y que ángulo genera en el eje real?