Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: GABRIELA CONSTANZA ANDRADES FERNÁNDEZ

Profesores Guía: Sr. Arturo Mena Lorca

Sr. Raimundo Olfos Ayarza

Sra. Patricia Vásquez Saldías

2017

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo describe una propuesta didáctica para el aprendizaje de la multiplicación de números complejos, diversas investigaciones dan cuenta que este sistema numérico genera conflictos desde las primeras veces que los alumnos toman contacto con él, puesto que se trata de una nueva estructura donde las operaciones pueden volverse engorrosas y confusas si solo se quedan en las fórmulas y procedimientos.

Se propone una secuencia didáctica formada por 3 clases consecutivas, las cuales fueron analizadas bajo el marco teórico de la Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval (TRRS) y mejoradas, donde una de ellas fue aplicada empíricamente y se tomaron evidencias sobre las producciones de los alumnos. Esto dentro de un sistema de evolución de la enseñanza, desde cómo se planifica cada sesión en el aula y cómo se evalúa, las herramientas, etc., teniendo como centro al alumno. Se analizaron las producciones de los alumnos desde un enfoque descriptivo bajo categorías de análisis abarcando las representaciones semióticas y el tránsito de estas.

A partir de la clase implementada se desarrolló una investigación que sentó las bases de la secuencia didáctica bajo el marco teórico TRRS, enfocada al tratamiento de esta operación desde sus diferentes registros para abordar otras perspectivas al aprendizaje de este contenido

La secuencia didáctica consiste en 3 clases articuladas, de la cual se realizó un estudio de clase para la segunda. Considerando los conocimientos previos necesarios para esta, se elaboró una primera clase que los abarque. Finalmente, se desarrolla la tercera clase con el objetivo de aplicar los conceptos de la segunda y dar las primeras nociones de la división de complejos.

En la primera y tercera clase se busca fomentar el uso del software geométrico, GeoGebra, para acercar las tecnologías educativas con el aprendizaje de los alumnos, los cuales necesitan herramientas de preparación a los requerimientos del siglo XXI.

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES, OBJETO MATEMÁTICO

En tercer año de Enseñanza Media los alumnos conocen un nuevo sistema numérico, los números complejos, del cual muchos muestran confusión al enfrentarlo con sus conocimientos previos. Por ejemplo, Bagni (2001, p.3.) declara

> "*En los cursos de matemáticas de secundaria y del primer año de preparatoria, los alumnos han confirmado con frecuencia la imposibilidad de extraer la raíz cuadrada a los números negativos; además, cuando a estos mismos alumnos se le pide luego aceptar la presencia de un nuevo objeto, el símbolo "$\sqrt{-1}$" al cual se le asigna la denominación i, esta situación no pudo dejar de causar perplejidad.*"

Así es como comienza la presentación de los complejos para ellos, con elemento no real i que juega un papel importante en la estructura del sistema, entonces las operaciones pueden volverse aún más confusas para los alumnos, esta situación evidencia la importancia de fundamentar y reforzar los aprendizajes este conjunto de números, una de las características relacionada con los obstáculos epistemológicos del espíritu científico que propone Bachelard (1988) es que siempre se conoce en contra de un conocimiento anterior.

Las representaciones algebraicas y geométricas, se presentan de forma separada en las unidades de estudio de la matemática escolar, ya que geometría y álgebra se dan como tópicos desalineados en el programa de estudio. En él encontramos al tercer aprendizaje esperado: *Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos*, apuntando al indicador de evaluación: *Ponderan o multiplican números complejos, según corresponda*. (MINEDUC, 2009)

El registro algebraico suele ser el predominante en la resolución de problemas y las operaciones de los elementos de los sistemas numéricos en la matemática escolar. *"La enseñanza tradicional de la matemática ha privilegiado el uso del registro algebraico en la resolución de problemas y, como afirma Artigue (1995), le ha dado al* *registro gráfico un status inframatemático*.” (Aznar, Distéfano, Prieto, Moler, 2010, p.13.)

La Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval, propone el tránsito de registros para lograr el aprendizaje de un concepto, logrando la comprensión del objeto matemático, por lo que fomentar esta transformación desde el registro algebraico al geométrico y viceversa, podrían asegurarnos de que se está tomando la dirección correcta.

En los diferentes textos escolares investigados se observa que existe una relación entre registros. Duval (2004) afirma que la conceptualización de un objeto matemático requiere de esta conversión de registros y el traspaso entre ellos con fluidez y claridad. Por lo que se vuelve una herramienta enriquecedora el aplicar la geometría y el álgebra como representaciones para la comprensión de la operación de números complejos, que es lo que busca esta propuesta.

La diversidad de conocimientos involucrados en este contenido hablan de su complejidad y a la vez enriquecedor saber matemático, Aznar, Moler y Pesa (2017) afirman que la multiplicación de los números complejos posee una estructura que incorpora una variedad de conceptos matemáticos en sus operaciones, así en la multiplicación encontramos raíces cuadradas de números negativos, la unidad imaginaria, el producto de binomios, las potencias imaginarias, etc. Por lo que a la hora del estudio de esta los alumnos requieren claridad de todos los conceptos previos que la componen. Así también encontramos que los números complejos poseen un gran abanico de representaciones semióticas como puntos o vectores en el plano, pares ordenados, su forma binómica, polar, trigonométrica y exponencial.

También Rojas (2015, p.13) desarrolló un estudio sobre la articulación entre los diferentes registros a través de la transformación de los tratamientos de las representaciones semióticas, en donde concluyó *“las transformaciones de tratamiento no solo son fundamentales, sino que, pueden ser fuente de diversas dificultades en la construcción y comprensión de los objetos matemáticos”.*

Específicamente de números complejos encontramos a Bagni (2001), quien a través del ejercicio histórico de la construcción matemática de los números imaginarios, descubre que este tipo de investigaciones promueve el interés en los alumnos, pero no así la comprensión del concepto como un aprendizaje para ellos.

También Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) presentaron, bajo el marco de las representaciones semióticas de Duval, un análisis de las conversiones de los registros algebraicos y geométricos de los números complejos, aplicado a estudiantes de universidad, asegurando que esta conversión beneficia la conceptualización del objeto, a través de los objetos matemáticos que intervienen en una tarea de conversión de representaciones de curvas y regiones del plano complejo, transitando desde el registro gráfico al algebraico.

Distefano, Aznar y Pochulu (2012, p.77) investigaron las dificultades y errores que generan los alumnos de la enseñanza superior al usar las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de los números complejos y observaron que la mayoría de las dificultades se presentaron en la representación geométrica-vectorial, afirmando que "*una gran proporción de alumnos sólo pudo hacer un uso correcto de la representación aritmético-algebraica, mientras que el uso de la representación geométrica-vectorial fue deficiente o nulo*."

Con estos antecedentes la propuesta de innovación se enfoca en el aprendizaje de los números complejos bajo las representaciones algebraica y geométrica, para observar y mejorar de ahí los errores y dificultades. De tal manera de asegurar la conceptualización del objeto, multiplicación de números complejos, Así lo afirma Duval (1999, p.186): *"la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión"*. Por lo que la propuesta busca la coordinación y coherencia de ambos registros, los cuales precisan una conversión y tratamiento que apunten a la visualización de estos de forma clara sin que el álgebra obstaculice lo geométrico, por lo que el enfoque es dar solución a los obstáculos de conceptualización del objeto.

En tercero medio plan común encontramos la primera unidad “números” en donde se presentan el sistema de los números complejos y su estructura, abarcándolo desde lo aritmético-algebraico. Su representación geométrica está enfocada al vector y sus componentes como una forma de presentación en el plano, sin embargo, en el programa escolar (MINEDUC, 2009) la relación entre la representación aritmética-algebraica y la representación geométrica-vectorial parecen desvincularse a la hora de proponer actividades y situaciones didáctica en los textos escolares de Blanco, Bozt, Calderón, Romero, Jiménez (2012) y Saiz, Blumenthal (2016).

Objeto matemático

Nuestro estudio se centra en la multiplicación de los números complejos, por lo que se presentan las definiciones consideradas en esta propuesta, su análisis desde el saber sabio tomado desde el texto de Levinson y Redheffer (2003), y el saber escolar, además de la distancia que existe entre estos. También se considera su concepción epistemológica e histórica de la construcción de este sistema numérico.

a. Saber erudito

Definición

La construcción de los números complejos, se origina a partir de las soluciones no reales de la ecuación polinómica:

$$x^2 + 1 = 0$$

Para construir al conjunto$\mathbb{C}$, se considera la relación de equivalencia R, la igualdad en $\mathbb{R}x\mathbb{R}$, dada por:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ } y \text{ } b = d.$$

En esta relación cada clase de equivalencia tiene solo un elemento.

Consideremos a $\mathbb{R}x\mathbb{R}/_R = \mathbb{C}$, identificando $[(a, b)] = \{(a, b)\}$ y definiendo las operaciones de suma y de multiplicación sobre $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Observación

Al considerar los elementos de $\mathbb{C}$ de la forma (0,b) notamos que:

$$(0, b) \cdot (0, b) = (-bb, 0)$$

El cuadrado de todo número imaginario es un número real negativo. En particular:

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) \rightarrow -1$$

Por lo cual $(0,1)$ es una solución para $x^2 = -1$.

Se define $(0,1)$ como *unidad imaginaria* y se denota por i, se tiene que $i^2 = -1$ y para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0,1) \sim x + yi,$$

Donde x se llama *parte real* e y *parte imaginaria del número complejo.*

Se define por r al **módulo** de $z = x + yi$, denotándolo por $mod(z)$ o $|z|$ como $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ y que representa la distancia del origen al punto que representa el complejo z en el plano Argand.

Si θ es el ángulo positivo (amplitud o argumento) que hace el segmento del origen al punto que representa el complejo z en el plano Argand con el eje positivo de las x, se tiene: $x = r\, cos\theta$; $y = r\, sen\theta$, de donde: $z = x + yi = r\big(cos\theta + i\, sen\theta\big)$ se llama forma polar del número complejo.

El módulo de un producto de números complejos z_1 y z_2 es igual al producto de los módulos mientras que el argumento del producto es igual a la suma de aquellos argumentos. Es decir: $z_1 \cdot z_2 \rightarrow |z_1\, z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \vee arg\,(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

Con la suma y multiplicación definida en los números complejos

$$a + bi + c + di = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Se tiene que $(\mathbb{C}, +, .)$ **es un cuerpo.**

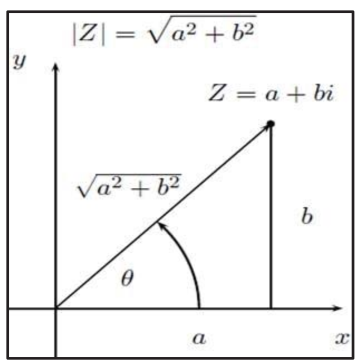


Figura 1. Representación geométrica de un complejo y sus elementos

b. Saber escolar

A continuación extraemos el contenido que aborda esta monografía del texto: "Matemática tercero educación media" de Bozt, Calderón, Romero, Jiménez (2012). Y del "Texto de matemática 3° medio" de Saiz, Blumenthal V. (2016).

Debemos indicar que estos contenidos matemáticos no son abarcados en totalidad en el programa de tercero medio, aunque existen definiciones que son abarcadas desde ejemplos, como lo hacen en la construcción de la unidad imaginaria, con una ecuación que no tiene una raíz exacta y además es negativa, por lo que formalizan al imaginario como: "*todo número de la forma bi, donde b es un número real*" Con el cual pueden realizar operación con la implicación: $i = \sqrt{-1} \Longrightarrow i^2 = -1$, luego institucionalizan: "cualquier número de la forma $\sqrt{-b} = \sqrt{b}i$, con $b > 0$, se llama número imaginario.

En Blanco, et al. (2012) encontramos la definición de un complejo en tres formas diferentes:

a) Forma canónica: $z = a + bi$ con $a, b,$ pertenecen $\mathbb{R}$

b) Forma de par ordenado: (a, b) con a, b pertenecientes a $\mathbb{R}$. La primera coordenada corresponde a la parte real del complejo y la segunda coordenada corresponde a la parte imaginaria.

c) Forma gráfica: el complejo representa un vector que parte desde el origen del sistema coordenado hasta el punto (a, b), pero es diferente en su concepción sus ejes son el eje real y el eje imaginario, pero funcionan parecidos.

Operaciones con complejos:

Para sumar, restar o multiplica entre complejos, es necesario considerar sus partes real e imaginaria por separado y operar de manera independiente entre ellas.

Si podemos representar un número complejo como par ordenado, también podemos escribir como par ordenado la suma y la multiplicación de dos números complejos. Así, se tendrá que:

Si $z = a + bi = (a, b)$ y $z' = c + di = (c, d)$, entonces: $z + z' = (a + c, b + d)$ y $z \cdot z' = (ac - bd,\ ad + bc)$ y el conjugado de un complejo z, se denomina por $\bar{z}$, siendo el reflejo del complejo z con respecto al eje real. Algebraicamente, el conjugado de z solo difiere de este en el signo de su parte imaginaria, es decir, si $z = a + bi$, entonces $\bar{z} = a - bi$.

El módulo de un complejo es la medida de la longitud del vector que este complejo representa. Si $z = a + bi \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El argumento es definido como el ángulo de amplitud del vector el cual puede ser medido por un transportador. Saiz, Blumenthal (2016)

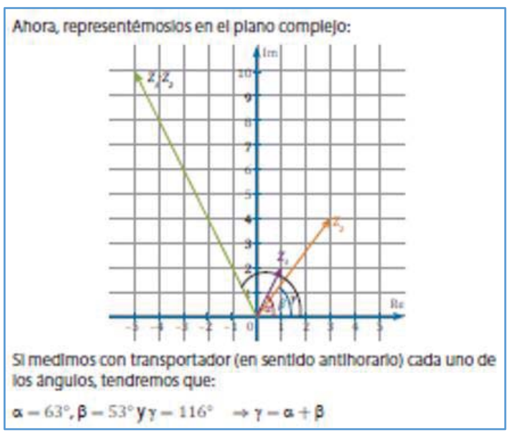


Figura 2. Representación de la multiplicación de números complejos en el plano del texto escolar

c. Conclusiones respecto a la distancia de los saberes

Aunque existen varios elementos que están vinculados entre el saber sabio y el saber enseñado, la representación geométrica es de una forma más básica y utilizando elementos que no aseguran exactitud, como el transportador, esto es porque los alumnos por curriculum no manejan el contenido de trigonometría, a menos que se encuentre en un plan lectivo de matemática.

La mayor distancia entre saberes está en la representación geométrica, aunque en el programa de estudio del nivel existe un aprendizaje esperado de la representación polar de un objeto, no está acompañado este contenido en el texto de estudio. Esta representación tampoco está ligada a la operación de los números complejos y en el aprendizaje esperado encontramos: “resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos”, sin mencionar su representación geométrica, así tampoco en los indicadores de evaluación sugeridos.

d. Algunos aspectos históricos –epistemológicos de los números complejos

En los inicios de la formación de los números complejos, se halla una necesidad de resolver ecuaciones cuadráticas que no tenían solución en los números reales por tener raíces negativas. Así, los griegos se negaban a aceptar este tipo de soluciones, ya que no podían trabajarlas con la geometría que hasta ese entonces existía. Hasta alrededor del siglo XVI encontramos matemáticos que hacen referencia a las raíces negativas como “*ficticias, absurdas o falsas*” (Nahim, 1998, p.30).

Recorriendo la historia de la construcción de los números complejos, encontramos que en sus inicios a Girolamo Cardano, un médico italiano que fue conocido por dar soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado, aunque en 1545 publicó:

> *“Divide el número 10 en dos partes de manera que su producto sea 40. La solución la da la resolución de la ecuación: $(10-x)x=40$. Las soluciones de la ecuación serían: $5+\sqrt{-5}$ y $5-\sqrt{-5}$, de lo que expresó: Dejando de lado las toruturas mentales que esto involucra… su producto es 40”*. (Arenzana, 1997, p.65).

Así, se presentan las primeras ideas de un número imaginario, como una tortura, ya que las raíces negativas hasta ese entonces no eran consideradas como una posible solución.

Luego, Raffaele Bombelli, ingeniero hidráulico italiano, es quien se presenta trabajando con los números complejos en su libro Álgebra, Bolonia en 1572, decolándolos como cantidades salvajes. Sin embargo, estas incursiones en el nuevo sistema numérico fueron quebrando esquemas y se llevaron grandes impresiones como la que destaca D'amore (2015, p.11):

> *"¿Qué habría sucedido con la raíz de un número negativo si Rafael Bombelli no hubiera decidido aceptarlas como quantità silvestri (cantidades salvajes), introduciendo las unidades complejas più di meno y meno di meno (más de menos, menos de menos), que más tarde René Descartes las introduciría con la expresión números imaginarios? Hubiéramos pasado a descartar las raíces de los radicandos negativos considerándolos objetos sin sentido. Debemos al coraje fantasioso e innovador de Bombelli la creación de los números imaginarios primero y de los números complejos después".*

Pero el francés René Descartes (1596-1650), padre de la geometría como muchos lo consideran, no podía quedar fuera de esta innovación en los sistemas numéricos, y utilizaba los números imaginarios para dar soluciones a las ecuaciones; así lo encontramos en Nahin (1998, p.63): *Descartes declaró: "A pesar de que podemos pensar que la ecuación* $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ *tiene tres raíces, únicamente una de ellas es real, la cual es 2, y las otras dos son simplemente imaginarias".*

Así, estos números que antes se han descrito como salvajes e imposibles, Descartes los acoge como imaginarios y en un pasaje de La Geometric que fue traducido por Robles (1982, p.166) revela:

> *"Se podría preguntar para que sirven estas soluciones que son imposibles; la respuesta que doy es que sirven para tres cosas: para la certeza de la regla general, porque no hay ninguna otra solución y por su utilidad. Por lo demás, tanto las raíces verdaderas como las falsas, no son siempre reales. Sino, en ocasiones, tan sólo imaginarias; es decir, que muy bien se puede siempre, en cada ecuación, imaginar todo lo que yo he dicho pero que, en ocasiones, no hay ninguna cantidad que corresponda con lo que uno imagina".*

Pero de todas las denominaciones en las que han caído los números complejos, nada se compara a lo que encontramos a principios del siglo XVII, con el alemán Gottfried Leibniz, quien expresó de los números complejos "*Itaque [Divina Mens] elegans & mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens & nonEns Amphibia, quod radicem imaginariam appellamus*" que significa según Robles (1982, p.167): "*Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser*". No se puede esperar menos de Leibniz si consideramos que era un teólogo de religión luterana.

Finalmente, luego de todas las denominaciones que podrían encasillar a estos números, el alemán Leonhard Euler en 1777 definió $i = \sqrt{-1}$, introduciendo en concepto de "imaginarios" al mundo de la matemática, de los cuales expresó: "*Estos números no son nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles".* Guerrero (2015, p.7). También demostró que los números imaginarios eran cerrados por las cuatro operaciones básicas, así como para la potenciación y la radicación.

> Euler en su libro "Vollstiindige Anleitung zur" Algebra, traducido por Robles (1982, p.167), declara: *"Puesto que todos los números concebibles son o bien mayores que cero, menores que cero o iguales a cero es claro, entonces, que las raíces cuadradas de los números negativos no pueden incluirse entre los números posibles (los números reales). En consecuencia, debemos decir que estos son números imposibles. Y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números que, por su naturaleza, son imposibles y, de ordinario, se les denomina imaginarios o de la fantasía, porque existen sólo en la imaginación".*

Luego encontramos al noruego Caspar Wessel en 1797 quien escribe un ensayo llamado "La representación analítica de la dirección; un intento", en donde introdujo una forma de representar los complejos a través de vectores. Esto fue complementado por Jean Argand quien publicó un libro en 1806 llamado: "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions* *géométriques”* (Ensayo sobre una forma de representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas). Allí entrega otro intento de representar geométricamente los números imaginarios.

Wessel contribuyó a la multiplicación de complejos como productos de segmentos. Así lo declara Nahin (1998, p.71):

> *“Descubrió como multiplicarlos haciendo una ingeniosa generalización del comportamiento de los números reales. Se dio cuenta de que el producto de dos números tenía la misma razón a cada factor como el otro factor lo tenía lo tenía con él. Por lo tanto, asumiendo que existe un segmento unitario dirigido, Wessel argumentó que el producto de dos segmentos dirigidos debía tener dos propiedades. Primero, y por analogía directa con los números reales, la longitud del producto debía ser el producto de las longitudes de cada segmento. ¿Pero qué ocurre con la dirección del producto? Esta segunda propiedad es la contribución seminal de Wessel: por analogía con todo lo que había hecho, dijo que el segmento producto debía diferir en la dirección de cada segmento factor por la misma cantidad angular que el otro segmento factor difería en dirección al compararlo con el segmento unidad…Entonces, si queremos multiplicar dos segmentos, uno que forma un ángulo θ y el otro un ángulo α con el eje x, el ángulo del producto debe ser la suma $\theta + \alpha$, porque $\theta + \alpha$ difiere de θ exactamente en un ángulo α”.*

Con este gran aporte, hoy podemos comprender la relación algebraica y geométrica que une a este sistema numérico.

Mencionamos anteriormente que Euler definió los “imaginarios” en 1777 mismo año en el que nace el alemán Johann Carl Friedrich Gauss, quien parece vino a unir conceptos e ideas de los números complejos. Así en 1831 declaró:

> *“Nuestra aritmética (...), constituye la creación de los tiempos modernos, (...). A los números enteros se han agregado las fracciones; a las cantidades racionales, las irracionales; a las positivas, las negativas; y a*

las reales, las imaginarias… ¿Qué es un número complejo?" Gauss dio la respuesta satisfactoria definitiva en 1831 al establecer la interpretación geométrica: x+iy → (x,y)." Guerrero (2015, p.7).

De esta manera, Gauss deja establecido el término "número complejo", el que usa en sus diversas demostraciones del teorema fundamental del algebra, pero:

"han de pasar algunos años, hasta 1831, para que Gauss, de manera explícita y pública, describa la representación geométrica de los números imaginarios. Según Gauss, en la representación geométrica de los imaginarios uno encuentra el significado intuitivo de los números complejos completamente establecido y no se necesita más para admitir estas cantidades en el dominio de la aritmética". Robles (1982, p.170).

Luego encontramos al irlandés William Hamilton quien definió en 1833:

"los números complejos como pares ordenados de números reales con las operaciones suma y producto habituales, que se pueden resumir así: $(a,b)+(x,y)=(a+x,b+y)$ y $(a,b)\cdot(x,y)=(ax-by,ay+bx)$. *Siguiendo un camino análogo al realizado en el plano, Hamilton pensó en la posibilidad de que en el espacio de podrían definir unos números parecidos a los números complejos con análogas propiedades algebraicas y geométricas".* (Arenzana 1997, p.66).

Finalmente, el francés Augustin Louis Cauchy quien trabajó junto con los anteriores matemáticos mencionados creando:

"*La teoría leibniziana de los "pensamientos ciegos" es, de acuerdo con la afortunada fórmula de Gardies, una especie de prótesis filosófica que permite manejar una dificultad de naturaleza estrictamente matemática, de la única manera en que podía hacerlo el algebrista dadas las condiciones de su momento histórico. No será difícil reconocer la libertad del matemático para inventar signos y operar con ellos combinando números reales e imaginarios, en los procedimientos operatorios empleados sin ningún prejuicio por Euler en álgebra y cálculo infinitesimal,* *o en los trabajos de Argand, Gauss y Cauchy sobre la representación geométrica de las entidades x+iy. Esta libertad se limita a medida que los matemáticos, se habitúan a tratar las entidades x+iy como pares ordenados de números reales(x,y), y se reconocen en la tradición de Hamilton de formalizar las operaciones de adición y multiplicación entre los elementos del nuevo dominio, en términos de propiedades estrictamente lógicas de la estructura de un cuerpo algebraico C"*

Alboreada (2007, p.4)

e. Línea de tiempo de la construcción de los números complejos

La siguiente línea de tiempo muestra los elementos más relevantes del recorrido de la construcción de los números complejos:

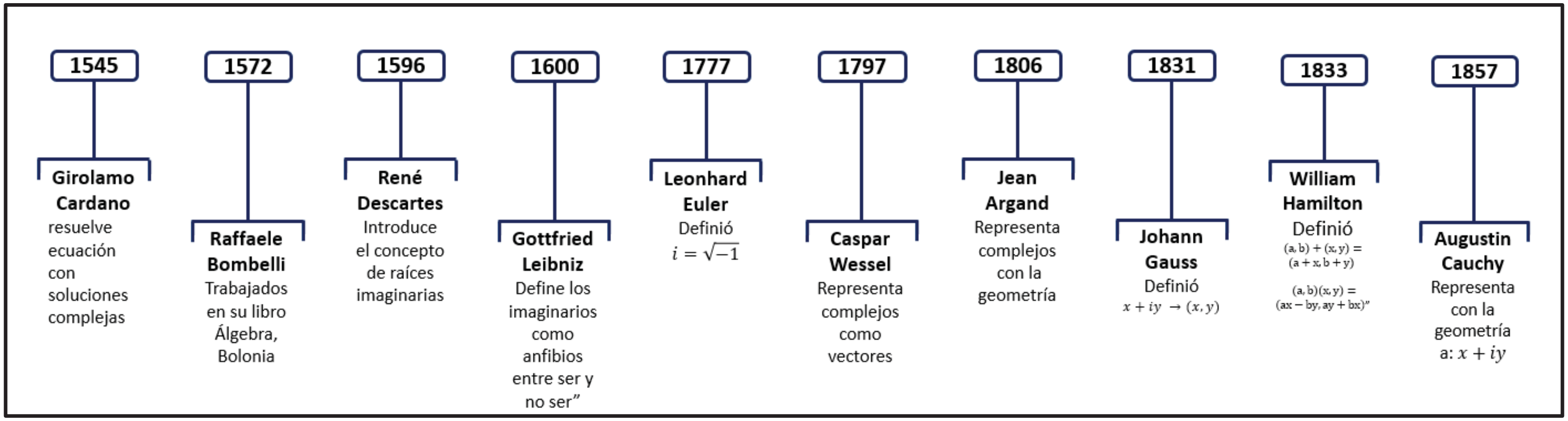


Figura 3. Elementos históricos en la construcción de los números complejos.

f. Mapa conceptual

Los elementos que compoenen este sistema numérico se relacionan de la siguiente manera:

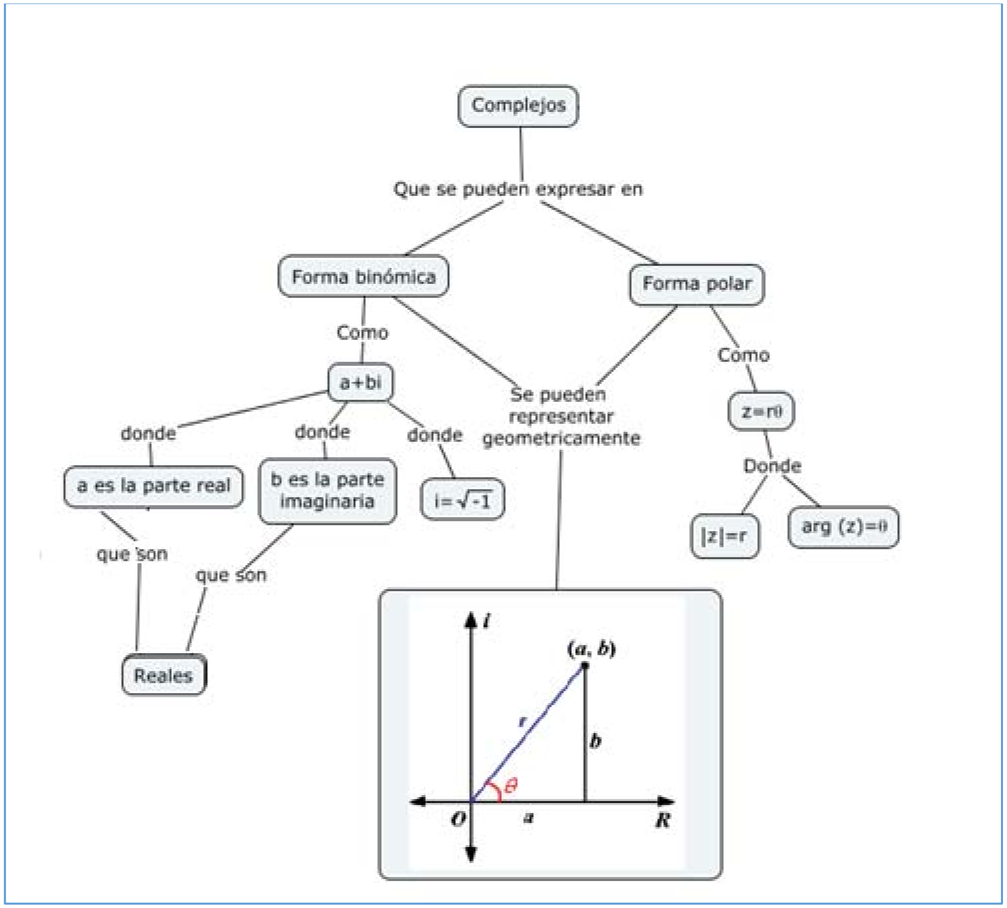


Figura 4. Mapa conceptual de los números complejos.

g. Los números complejos en el currículum

Una mirada desde el Currículum que da cuenta de las nociones del concepto de la multiplicación de los números complejos es a partir del nivel de 7° básico, el aprendizaje esperado se centra en comprender las raíces cuadradas de números naturales, aplicándolas en la vida diaria y en situaciones geométricas. La comprensión de este aprendizaje acerca a los estudiantes en enseñanza media a razonar que el módulo de un complejo z es igual a la raíz de la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del complejo z y que este representa una longitud que siempre es positiva, salvo que el complejo sea $z = 0 + 0i$, en este caso el módulo es 0, si el número complejo es un número real: $z = a + 0i$, su módulo corresponde a la distancia del número real al cero, correspondiente al valor absoluto del número, $\sqrt{a^2} = |a|$, lo que representa en el plano de Argand la distancia del complejo al origen.

Así también, los alumnos identifican puntos y vectores en el plano cartesiano. Ellos necesitan estos conocimientos y aprendizajes previos para poder comprender que el número complejo representa un vector que parte desde el origen del sistema coordenado hasta el punto. Desde este instante, ya empiezan a trabajar con raíces y comprenden el significado de ellas, ya que el ubicar un par ordenado en el plano cartesiano es el inicio o el despliegue para representar geométricamente la multiplicación de números complejos en el plano de Argand.

En octavo básico el aprendizaje esperado se centra de comprender las operaciones de expresiones algebraicas, éstas se aplican en la multiplicación de números complejos y son relevantes para comprender el procedimiento de cada multiplicación mediante su representación algebraica.

En primero medio se trabaja con la habilidad de desarrollar productos notables de manera concreta y simbólica. En el conjunto de los números complejos se puede trabajar con binomios resolviendo operaciones, específicamente multiplicando dos números complejos.

En segundo año medio se analiza con profundidad los números irracionales y la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales, donde utilizan la definición $\sqrt{x^2} = |x|$ para deducir que las raíces cuadradas son números ≥ 0. Deben surgir preguntas e interrogantes de parte de los estudiantes ¿a qué conjunto numérico pertenecen las raíces donde la cantidad subradical es negativa? Se les entrega una visión de este nuevo sistema numérico y algunas de sus características.

En el nivel de tercero medio, en el plan electivo "Álgebra y Modelos Analíticos" el objetivo es transformar expresiones algebraicas racionales, operar con ellas y resolver ecuaciones. Además, conocen el significado de raíces n-ésimas. Enfocándose a ejercicios que deben resolver productos notables incluyendo raíces, dando una noción y centrándose con mayor fuerza en la multiplicación de números complejos.

Desde la enseñanza básica hasta la enseñanza media, el Currículum otorga a los estudiantes nociones de la multiplicación de números complejos enfocándose en la compresión de conceptos previos como plano cartesiano, par ordenado, vector, productos notables, entre otros, que encaminan hacia el aprendizaje y el descubrimiento de este nuevo sistema numérico.

h. Tratamiento de los números complejos en los textos

En este apartado, hemos analizado el contenido que abordan los texto escolares vigentes para el nivel: "Matemática tercero educación media" de Bozt, Calderón, Romero, Jiménez (2012). Y del "Texto de matemática 3° medio" de Saiz, Blumenthal V. (2016).

En los textos de matemática de tercero medio que entrega el Ministerio de Educación (2016) encontramos la multiplicación de manera algebraica como una información para “saber más”, sin considerarlo como una operación de gran importancia dentro de la unidad (Saiz, Blumenthal. 2016). Luego, al final de la unidad, encontramos la multiplicación de complejos como “otra manera de representar un complejo”, en donde se explica a través de la representación de un complejo en vectores relacionando en modulo y el argumento del vector en la operación, sin embargo, esto está aparte de la sección destinada a la multiplicación de complejos desconectando el contenido algebraico del geométrico y mostrando una desvinculación entre estos registros (Blanco, et al. 2012).

En los textos de matemática de tercero medio (Blanco, et al. 2012). Encontramos una definición mucho más completa en la parte algebraica en donde se define a partir de un ejemplo la multiplicación de números complejos y luego las propiedades que la operación cumple y la representación en el plano de un número complejo, sin embargo, no así el producto de números complejos en el plano de Argand, relacionándolo con el vector que este representa y el ángulo que comprende.

En esta distancia que existe entre lo algebraico y geométricos de los números complejos, se desea trabajar para construir un aprendizaje a través de cambios de registros para que así sea intrínseco de la multiplicación de números complejos y proyectar para una futura investigación las demás operaciones.

MARCO TEÓRICO

En el diseño de esta monografía hemos considerado la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas, propuesta por Raymond Duval (Duval, 2004) quien afirma que existen representaciones mentales, las que están constituidas por las imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, llamadas representaciones semióticas que son las producciones constituidas por diferentes signos como el lenguaje natural, una fórmula algebraica, gráfico o figuras geométricos, las cuales permiten exteriorizar sus representaciones mentales, como forma de comunicación. Las representaciones semióticas son las producciones establecidas por la aplicación de signos (lenguaje natural, expresión algebraica, gráfico, etc.). Estas representaciones deben distinguirse del objeto matemático para su comprensión, esto porque un objeto matemático puede tener varias representaciones. (Duval, 2004).

La noción de registros semióticos que plantea Duval se utilizará para analizar los elementos que algebraicos y geométricos involucrados en la multiplicación de números complejos que permiten determinar si las actividades propuestas apuntan a la comprensión del objeto a través de la conversión de los registros algebraicos al geométrico como el tratamiento en cada uno de ellos, Duval (2004, p.25) afirma: "*No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación*".

Se llamará semiosis a la producción de un signo a través de su representación semiótica, o sea una representación consciente y externa, y noesis al proceso cognitivo de aprehensión conceptual del objeto. *"No hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis"*, por eso las representaciones mentales nunca pueden considerarse independiente de las representaciones semióticas. (Duval 2004, p.16).

Se llamará tratamiento a la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), como una transformación de la representación interna a un registro de representación donde no se moviliza más que un solo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación de las representaciones de un objeto que hace pasar de un registro a otro. (Duval 2004). Si un alumno desarrolla una multiplicación de números complejos de forma algebraica, aplicando propiedades y operatoria matemática, estará creando un tratamiento de un registro algebraico, si este tratamiento es llevado a un plano donde registra cada factor como un vector, con sus respectivos elementos geométricos y ubica su producto en el plano, entonces estará transformando el registro, pasando por una conversión.

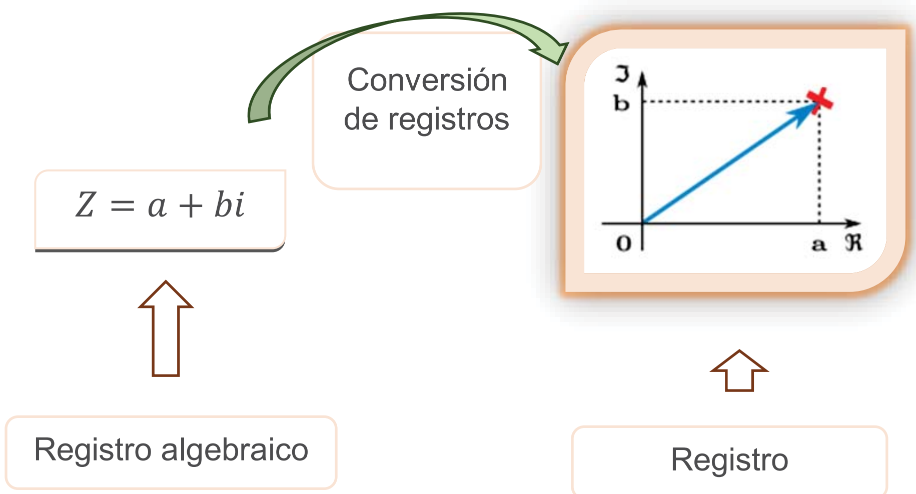


Figura 5. Representaciones semióticas de un número complejo.

El desarrollo de la actividad matemática depende directamente de las representaciones semióticas y el tratamiento de éstas. El tránsito entre sistemas de representaciones no es evidente para un alumno, por lo que la relación entre un número complejo escrito de la forma algebraica $z = a + bi$, su representación geométrica en el plano de Árgand y su escritura en lenguaje natural: “primer elemento a se define como parte real de z y el segundo elemento b se define como parte imaginaria de z”, cada uno de estos significantes tienen una operatoria diferente, y sin embargo, representan el mismo número.

El logro del aprendizaje de un objeto matemático es definido por Duval como encapsulamiento del objeto, el cual es alcanzado cuando existe una congruencia y se cumplen tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significativas[1] que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y convertir una unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada. Duval (1999, p.186) declara: *"la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión"*.

Existen diversos conceptos y conocimientos previos que se ven involucrados en los registros semióticos de la multiplicación de números complejos. Sin embargo, existen quiebres, como el concepto de "unidad cuadrada" que los alumnos suelen adherir a un positivo, por lo que al enfrentar a $i^2 = -1$, crea una confusión que puede ser aclarada a través del registro gráfico ya que, en el plano el argumento de $i = 90°$ lo que al multiplicar por i el producto tendrá el ángulo de la suma de los factores por lo tanto será 180°, reposando sobre el eje de los reales negativos. Este tipo de situaciones asegura la congruencia del concepto, ya que a cada unidad significante se le asigna otra en un diferente registro, lo cual permite el encapsulamiento del objeto.

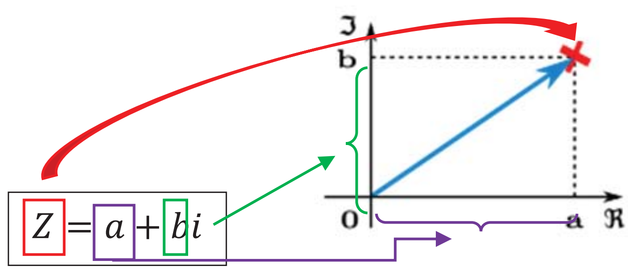


Figura 6. Correspondencia de las unidades significantes.

---

[1] "Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del 'léxico' de un registro" (Duval, 1999, p. 50). considera como unidades significantes aquellas componentes de la representación cuya variación (dejando el resto de las variables fijas) produce variaciones observables en la representación del objeto en otro registro.

Duval (2004) declara que la actividad cognitiva que permite la geometría es más exigente, ya que para llegar a un resultado no basta con generar tratamientos dentro de un mismo registro, sino que es necesario que se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. También existen variaciones visuales del tipo dimensionales (variación ligada al número 0: punto, 1: una línea o 2: un área) y cualitativos (variaciones de forma: línea; recta o línea curva; de tamaño; de orientación: plano o paralelas) las cuales están presentes como una combinación que generan un registro geométrico.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Se presenta una secuencia didáctica de clases complementarias al Estudio de Clase. Luego del análisis se evidenciaron los conocimientos necesarios en una clase que refuerce los conocimientos previos y una consecutiva al estudio de clase para aplicar los aprendizajes logrados.

La secuencia didáctica busca el aprendizaje del objeto matemático desde lo exploratorio, para identificar y relacionar los elementos algebraicos con los geométricos que se observarán en el procesador geométrico, hasta lo aplicable, donde transitarán entre los diferentes registros que se presentan y argumentando su tránsito a través de propiedades geométricas y algebraicas.

A continuación, se muestra un esquema con los objetivos de cada clase y una breve descripción de la articulación entre ellas:

	Objetivo	**Articulación**
Clase 1	Relacionar elementos geométricos presentes en la multiplicación de números complejos en el plano.	Exploración y manipulación del comportamiento geométrico de los números complejos y cómo esta representación se manifiesta de forma algebraica.
Clase 2	Analizar la multiplicación de complejos en el plano de Árgand.	Tránsito entre los registros algebraicos y geométricos, conceptualización de propiedades geométricas. Multiplican complejos para encontrar un producto con sus elementos geométricos.
Clase 3	Identificar los elementos geométricos involucrados en la multiplicación de complejos.	Tránsito entre los registros geométricos y algebraicos, conceptualización de propiedades geométricas. Se entrega producto y uno de los factores, encuentran factor faltante identificando los elementos que este posee.

El diseño de esta propuesta está basado en la Teoría de Registros Semióticos de Duval, con el fin de asegurar la comprensión del objeto a través de la conversión del registro algebraico al geométrico como el tratamiento en cada uno de ellos.

Como la propuesta está enfocada a la representación de la multiplicación de números complejos se vuelve indispensable el análisis de las representaciones semióticas que plantea Duval, ya que así se abordan los elementos algebraicos y geométricos que aseguren el tránsito de estos registros.

Duval (1999, p.186) declara: *"La comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión"*. Así la propuesta busca la coordinación y congruencia de ambos registros los cuales precisan una conversión y tratamiento que apunten a la visualización de estos de forma clara sin que el álgebra obstaculice lo geométrico, ya que los alumnos se encuentran muy enfocados en el trabajo algebraico cuando se trata de operar números.

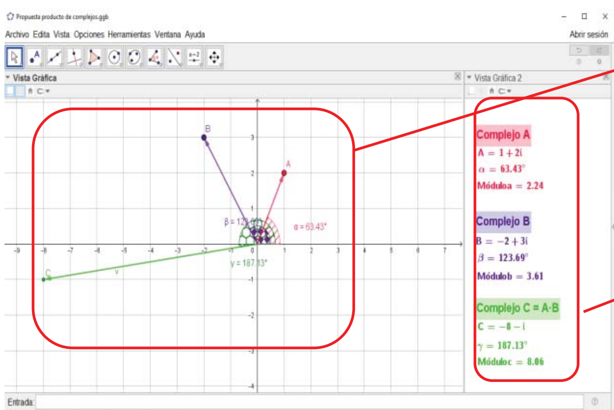
En la unidad "Números" de tercero medio plan común, encontramos a las operaciones de números complejos apartadas de la representación geométrica de estas y la trigonometría no es un contenido presente en el programa, con el cual los alumnos puedan encontrar los argumentos de los complejos, por lo que la propuesta busca dar opciones que complementen estas falencias, sin ser un obstáculo en su representación, como utilizar ángulos de 90° y 45° que sean identificables de forma visual. Así también se buscó dar opciones de números complejos como i, i+1, etc. para facilitar el tratamiento y que no sea un obstáculo al objetivo de la propuesta.

A continuación se muestran las diferentes clases que componen la secuencia de clase

Tarea matemática de la clase 1

Los alumnos entran en una fase exploratoria y de manipulación del material digital entregado, así contar con la libertad de conocer la actividad y la representación de los complejos con el software geométrico, sin ninguna indicación que sesgue su indagación.

En el software encontrarán lo siguiente:



Representación geométrica, complejos A, B y C son manipulables con el cursor

Representación algebraica de los complejos A, B y C, con sus respectivos ángulos y módulos, los cuales varían según el movimiento geométrico en el plano.

Los alumnos registraran, manipulando el software, los productos encontrados con sus respectivos módulos y argumentos. Así comienzan a relacionar los elementos geométricos y algebraicos que irán descubriendo a medida que los complejos varíen. Luego redactarán estas conjeturas con su compañero en donde se espera que encuentren la relación de los ángulos y módulos de los complejos.

En la guía entregada se presentan diferentes ejercicios:

Cantidad de ejercicios	Característica
3	Complejos con ángulos de 45°
3	Complejos con ángulos de 90°
2	La parte imaginaria es 0
2	La parte real es 0
1	Sólo se entrega el producto y deben buscar un posible par de factores

Los dos primeros tipos de ejercicios, en donde hay ángulos intencionados, se busca que observen la propiedad de los ángulos; los dos siguientes tipos de ejercicios, donde no hay unidad imaginaria o real, buscan que logren observar lo que ocurre con los módulos y el último tipo de ejercicio pretende que los alumnos busquen los factores manipulando los vectores que tengan las características del producto, este último tipo de ejercicio permite diferentes respuestas.

Algunos ejercicios representativos, con sus respectivas respuestas:

	Complejo de la forma $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A	$1 + 0i$	45°	1,41
Complejo B	$0 + i$	90°	1
Complejo C	$-1 + i$	135°	1,41
Complejo A	$-1 + 0i$	180°	1
Complejo B	$0 + i$	90°	1
Complejo C	$0 - i$	270°	1
Complejo A	$-3 + 0i$	180°	3
Complejo B	$2 + 0i$	0°	2
Complejo C	$-6 + 0i$	180°	6
Complejo A	$0 + 3i$	90°	3
Complejo B	$0 - 2i$	270°	2
Complejo C	$6 + 0i$	0°	6
Complejo A	$-1 + 0i$	180°	1
Complejo B	$3 + i$	18,43°	3,16
Complejo C	$-3 - i$	198,43°	3,16

Luego los alumnos responderán a la pregunta:

¿Encontraste alguna relación entre los elementos algebraicos o geométricos de los factores con respecto a su producto? Nombre mínimo 3 relaciones que puedas concluir con tu pareja.

Esta pregunta busca que los alumnos reflexionen con los datos registrados y encuentren regularidades en ellas.

Para el término de la clase los alumnos al compartir sus respuestas, estarán buscando las diferentes características ya sean geométricas o algebraicas que han observado en el producto en donde se espera que logren afinar sus ideas entre pares, así ellos descubren las propiedades comprendidas en el producto de complejos: la suma de los ángulos de los factores corresponden al ángulo del producto y el producto de los módulos de los factores corresponden al módulo del producto.

Análisis a priori de la Clase 1

A continuación se muestra el análisis a priori de las actividades propuestas en la clase, con las posibles respuestas de los alumnos y las respectivas devoluciones:

En la primera actividad en donde se les pide que determinen los factores de un producto de complejos, su producto y los elementos geométricos de estos, se analizaron las posibles dificultades y errores, con sus respectivas devoluciones de la actividad.

La primera dificultad que se puede presentar en la actividad es el manejo errado del software o poco entendimiento en el área de la computación, para esto se sugiere asignarle una pareja de trabajo que tenga mayor dominio computacional, para que complementen los conocimientos. También la confusión en las correspondencias de los factores y el producto, para esto será importante recordar y dejar estipulado en pizarra que los factores corresponden a los complejos A y B y el producto al complejo C.

Algunos errores disciplinares que pueden cometer los alumnos es confundir los ejes entre el eje real y el imaginario a la hora de formar las coordenadas para ubicar el vector, para esto será importante preguntarles ¿cuál es el eje real? Y ¿cuál el imaginario? También pueden considerar como 0 al real que acompaña a la parte imaginaria cuando este sea 1, considerando a $-1+i$ como $(-1,0)$, por lo que será importante preguntarles ¿cuántas unidades imaginarias se le asigna al valor de i? El último ejercicio puede crear confusiones en por tener múltiples respuestas, entonces se necesitará ayudar a comprender que no existe una única respuesta, puede ser llevándolo a los reales: ¿Qué factores tiene 12? Reflexionando que al igual que los complejos no tienen solamente dos factores únicos.

En la pregunta de reflexión final donde se les pregunta si encuentran alguna relación entre los elementos algebraicos o geométricos de los factores con respecto a su producto, las dificultades que se detectaron se relacionan con la discrepancia entre qué elementos son algebraicos o geométricos, por se necesitará generar una discusión a nivel curso de qué elementos detectados por ellos son geométricos o algebraicos.

Alguno de los errores que pueden cometer los alumnos con respecto a las observaciones, es que solo se enfoquen en un ejercicio en particular y no revisar si sus relaciones se cumplen para todos los demás también, por lo que se necesitará motivación por parte del docente para invitarlos a revisar si es una regularidad que se cumple con los demás ejercicios. Es posible que algunos alumnos encuentren a la propiedad de la suma de los ángulos de los factores para obtener el argumento del producto, pero descartarlo como relación en los casos cuando es superior a 360 °, en tal caso se les necesitará explicar que el argumento es el ángulo que forma el vector con respecto al eje x. Con respecto a la propiedad del producto de los módulos de los factores para encontrar el módulo del producto, también podría ser descartada por el uso de decimales, en los alumnos que tengan dificultades con este tipo de presentación, por lo que necesitarán motivarlos a hacer estos cálculos que en general son simples porque en todos uno de los factores es 1.

Plan de clase de la clase 1

CLASE 1- Objetivo de la clase: Relacionar elementos geométricos presentes en la multiplicación de números complejos en el plano.		
Material complementario: Laboratorio de computación, donde cada computador debe contener a un archivo elaborado en el software GeoGebra. Guía: Representación geométrica de los números complejos (ver anexo 1).		
Momentos de la clase	**Marco teórico**	**Gestión de aula**
Inicio (10 minutos) Se presenta el objetivo de la clase y se entregan las instrucciones previas a ingresar al computador. Instrucciones: alumnos formaran parejas e ingresaran a un archivo llamado "multiplicación de números complejos" que se encuentra en el escritorio de los computadores. Luego de abrirlo, las parejas contarán con un tiempo de exploración, donde ellos manipularan el archivo libremente.	En el inicio los alumnos manipulan los complejos y observan sus características geométricas, efectuando un tratamiento dentro del registro geométrico, al variar los factores representados por vectores irá automáticamente cambiando el producto.	Alumnos son trasladados a laboratorio de computación, en donde se agrupan en parejas de trabajo.
Desarrollo (25 minutos) Se entrega guía en donde registran algunas multiplicaciones con sus respectivos elementos geométricos. Luego con estos datos responden a algunas preguntas respecto a lo observado	Los alumnos desarrollan un trabajo de conversión de registros, del algebraico al geométrico, ya que están multiplicando complejos pero utilizando su representación geométrica en el plano.	Profesor entrega el material para trabajar, supervisa las parejas y resuelve dudas de forma personal con cada grupo.
Cierre (10 minutos) Las parejas presentan frente al curso una de las observaciones encontradas de forma que cada pareja describa una diferente a las ya expuestas.	Al cierre se espera que los alumnos hayan logrado la conceptualización del objeto matemático y comprendan las propiedades geométricas de la multiplicación de complejos registrando sus resultados de forma algebraica.	Profesor pide que alumnos apaguen monitores, pongan atención a las parejas que se presentan y actúa de moderador buscando nuevas respuestas o explicadas de diferentes maneras.

Tarea matemática de la clase 2

En este inicio los alumnos revisan la guía de trabajo junto con su compañero y activan sus conocimientos previos con respecto al producto de complejos y sus elementos geométricos. Para esto consideraron:

Producto algebraico de dos números complejos:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Módulo de un complejo:

Sea $z=a+bi$, entonces su módulo es $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

El argumento será medido de forma visual ya que no manejan el contenido de trigonometría, por lo que se utilizaron ángulos de 45°, 90° y 135°.

Los alumnos desarrollan el primer ítem donde se entregan dos complejos $z_1=i$ y $z_2=1+i$, los cuales multiplicarán de manera algebraica y lo llamarán w, a través del cálculo algebraico de producto de binomios.

Luego graficarán y destacarán los elementos: el vector que estará involucrado y su argumento.

Determinarán los módulos de los factores y el producto: $|z_1|=\sqrt{1}$, $|z_2|=\sqrt{2}$ **y** $|w|=\sqrt{2}$. Terminado esto el profesor realizará las preguntas del tipo ¿qué observas? Se espera que respondan: $|z_1|\cdot|z_2|=|w|$

Medirán los ángulos comprendidos de manera visual ya que los ángulos involucrados son $\theta_{z_1}=90°, \theta_{z_2}=45°, \theta_w=135.$

Una vez terminado estos cálculos el profesor

preguntará ¿qué observas? Esperando que respondan: $\theta_{z_1}+\theta_{z_2}=\theta_w$.

Luego, continuaron con un segundo ítem en donde se les entregaban los complejos: $z_1=2i$ y $z_2=1+i$ y en una primera instancia se les pedía que los multiplicaran de manera algebraica y a este producto lo llamaran w, los cuales graficarán en el plano de Árgand, con sus respectivos ángulos, para luego preguntarles: ¿Qué observas en relación con los ángulos? Esperando que relacionen las observaciones del primer ítem, para reafirmar sus observaciones donde $\theta_{z_1} = 90°, \theta_{z_2} = 45°, \theta_w = 135$.

Determinaron los módulos de los complejos trabajados en este segundo ítem resultando: $|z_1| = \sqrt{4}$, $|z_2| = \sqrt{2}$ y $|w| = \sqrt{8}$ y se les preguntó: ¿hay alguna relación que observes entre los módulos? donde se observa que $|z_1| \cdot |z_2| = |w|$.

Finalmente se les pregunta: ¿observas alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior? Donde se espera que los alumnos respondan:

Se observa que en el ítem 2 el vector del producto tiene mayor longitud ya que de $z_1 = i$ pasamos a $z_1 = 2i$, o sea, el doble del primer ítem obteniendo que el producto w sea también el doble: $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

Cuando se realiza la multiplicación de números complejos, se cumplen ciertas regularidades en el plano como: el módulo del producto de complejos es la multiplicación de los módulos de los factores. A su vez, los ángulos que forma cada número complejo se suman entre sí para obtener el ángulo del producto.

Para este momento de la clase los alumnos entrarán en una fase de conceptualización del objeto, donde se explica de manera formal lo que sucedió con sus desarrollos

y se establecen las propiedades geométricas que posee el producto de números complejos

Análisis a priori: Clase 2

A continuación se muestra la actividad que fue presentada a los alumnos con su análisis a priori, presentando todas las posibles respuestas que se consideraron antes de aplicar la clase, un análisis a posteriori:

En la primer actividad donde se les pide que multipliquen dos complejos algebraicamente se identificó que una de las dificultades que podrían surgir es que los alumnos Intenten aplicar la fórmula de la multiplicación y no considerar la parte real como 0 en z_1, lo cual puede complicar y llevar a errores en los cálculos, para esto se les preguntará ¿de dónde viene la fórmula? Y ¿qué propiedades se utilizan en esta operación?
Los errores que esta actividad pueden presentarse en el desarrollo de los alumnos es que dejen expresado con las unidades imaginarias $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = w$, para este tipo de respuestas se les preguntará a los alumnos ¿cuál es el valor de i^2?, para que recuerden que $i^2 = -1$. También podrían omitir los paréntesis de z_2 desarrollando: $i \cdot 1 + i = i + i = 2i$, entonces les preguntaremos ¿2·(1+3)=2·1+3?, llevándolo a los reales. Si al desarrollar la operación resuelven $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = i + 1$, se les preguntará por las potencias canónicas de la unidad imaginaria, para recordar las equivalencias. Y si aplican propiedades de potencias a la adición: $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = i^3$, llevaremos la operación a los reales ¿$3 + 3^2 = 3^3$?

En la segunda actividad se les pide representar en el plano cada número complejo y su producto, al analizar la actividad se detectó que una dificultad que podrían presentar los alumnos es que no tengan un conocimiento acabado de la representación gráfica de los complejos, por lo que será importante recordarles qué representa cada componente, real e imaginaria, en el plano.

Algunos posibles gráficos errados que podrían producir los alumnos son:

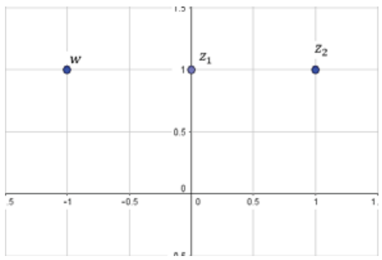


Figura 7. Representación a través de puntos.

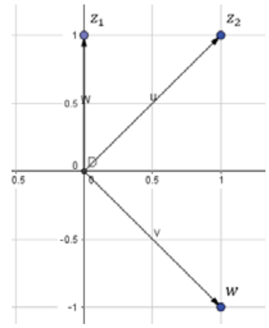


Figura 8. Representación errada del complejo w.

Se espera que los alumnos grafiquen en el plano a través de vectores, sin embargo puede que algunos sólo representen el punto en el plano, como muestra la figura 6, para que asocie al complejos con el vector correspondiente preguntarles ¿con qué otros elementos podemos graficar los complejos? En la figura 7 se muestra la posible confusión con respecto al gráfico de w con el conjugado de z_2, frente a la confusión preguntarles ¿qué representa el conjugado de un número complejos? O ¿Qué par ordenado tiene asociado el complejo w?

Al final del primer ítem se les pregunta ¿qué observas?, esta pregunta al ser tan amplia y poco dirigida con el fin de ayudarlos a pensar sin parámetros, puede que cree cierto rechazo a responder de forma incorrecta, por lo que será importante ayudarlos a revisar las actividades que desarrollaron junto con un ¿qué hemos hecho con los complejos? Para esta pregunta podrían surgir algunas ideas erradas como decir que: z_2 es simétrico con w respecto al eje imaginario, $z_2$es el opuesto de w o viceversa, $z_2$es el conjugado de w o viceversa, todos los vectores tiene igual longitud o módulo, z_2 tiene igual longitud o módulo que w o viceversa, z_2 posee el mismo ángulo que w, el valor de los ángulos es $\theta_{z_1} = 90°$, $\theta_{z_2} = 45°, \theta_w = 135$ o que la suma de los ángulos de los factores es igual al ángulo del producto. Para estos errores se les devolverá una pregunta que los permita a ellos darse cuenta de su error como: ¿existen otros elementos de los vectores que también sean simétricos?, ¿qué representa el opuesto de un complejo?, ¿qué representa el conjugado de un complejo?, ¿cómo medirías la longitud de un complejo?, ¿cómo podríamos asegurarnos que son iguales?, ¿desde dónde comenzamos a medir un ángulo?, ¿existe alguna relación entre esto ángulos? Y si no logran contestar, invitarlo a llevar esta relación en el próximo ejercicio para verificar si también se cumple.

En la segunda parte de la clase se les entrega dos complejos y se les pide que los multiplique de manera algebraica, lo cual puede crear dificultades al intentar aplicar la fórmula de la multiplicación y no considerar la parte real como 0 en z_1 por lo que le preguntaremos ¿de dónde viene la fórmula? Y ¿qué propiedades se utilizan en esta operación?

Los posibles errores que puede causar esta multiplicación muy similar a la del primer ítem pero con un factor 2, puede provocar que los alumnos dejen expresado el producto con las unidades imaginarias $2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 = w$, puede que no aplique propiedad distributiva, omitir los paréntesis de z_2 desarrollando: $2i \cdot 1 + i = 2i + i = 3i = w$, asociar que un término al cuadrado siempre es positivo, caso que pasa en los reales, desarrollando: $2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 = 2i + 2$ o aplicar propiedades de potencias a la adición: $2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 = 4i^3$. Por lo que Para esta respuesta se les preguntará ¿cuál es el valor de i^2? para que recuerden que $i^2 = -1$, ¿cuáles son los factores de la multiplicación?, llevarlo a los reales ¿$2 \cdot (1+3) = 2 \cdot 1 + 3$?, ¿cuáles eran las potencias canónicas de la unidad imaginaria?, ¿cuánto es i, i^2, i^3, i^4?, llevándolo a los reales y ¿$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^3$?

Luego se les pide que representen en el plano los complejos, tanto los factores como el producto. Esta representación puede causar dificultad en los alu,nos que no tengan claridad en la representación gráfica del complejo, por lo que se les preguntará ¿cómo representamos los complejos en el plano? Y ¿qué diferencias tiene el plano cartesiano con los números complejos?

Algunos posibles gráficos errados que pueden presentar los alumnos son:

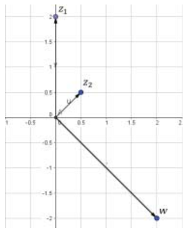


Figura 9. Confusión con respecto al cuadrante de w.

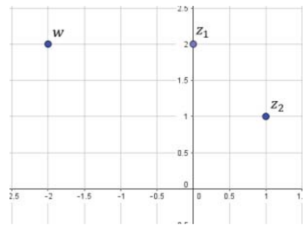


Figura 10. Representación a través de puntos.

Para evitar este tipo de errores se les puede preguntar ¿hay otros elementos geométricos que se puedan agregar a los complejos?, ¿qué elementos pueden complementar la gráfica? o ¿cuál es el par ordenado asociado al complejo w?

Luego se les pregunta ¿qué observas en relación con los ángulos?, lo cual puede crear dificultades al considerar el ángulo tomando de referencia el eje real negativo y desde ahí medir la amplitud y no desde el eje real positivo, por lo que será importante explicarle la forma de considerar el ángulo correspondiente a cada vector. En cuanto a los errores que pueden generar los alumnos al generar una idea es que posiblemente relacionen los ángulos con los del ítem anterior $\theta_{z_1} = 90°, \theta_{z_2} = 45°, \theta_w = 135$, relacionar el ángulo de z_2 con el de w y afirmen: $w = \theta_{z_2} = 45°$ o que al observar que w se encuentra en el segundo cuadrante, creer que hay una pendiente negativa y afirmen que: $\theta_w = -45°$, por lo se recomienda preguntarles: ¿qué relación tienen estos ángulos?, ¿cuánto vale θ_{z_1}? En caso de responder que es 90°, entonces ¿ θ_{z_2} es un ángulo menor a 90°?, ¿desde dónde comienza el ángulo? O ¿Si tuvieras que expresarlo con un ángulo positivo cuál sería este?

También se les pide que determinen los módulos de los factores y el producto pregunta con respecto a las propiedades de los módulos, de tal forma que ellos encuentren alguna relación, esta pregunta puede crear dificultad si no existe un dominio de la forma en que pueden determinar el módulo de un complejo o no asociarlo con el concepto de distancia para esta situación se les necesitará recordar que el módulo es la longitud de un vector y que esta proviene del concepto de distancia entre el origen y el par ordenado que obtienen con el complejo.

En esta pregunta se presentan módulos que son raíces y podrían determinar el valor de la raíz, complejizando la observación para el alumno que presenta dificultades con los números decimales, al enfrentarse a: $|z_1| = \sqrt{4} = 2$, $|z_2| = \sqrt{2} = 1{,}41$ ... y $|w| = \sqrt{8} = 2{,}82$ ... o podrían considerar erróneamente la parte imaginaria con la unidad imaginaria y resolver los módulos como: $|z_1| = \sqrt{0 + 4i^2} = \sqrt{-4} = 2i$, $|z_2| = \sqrt{1 + i^2} = \sqrt{1 - 1} = 0$ y $|w| = \sqrt{4 + 4i^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$, también generar las equivalencias de que $|z_2| = |w|$. Para esto será importante orientarlos y ayudarlos a observar si con los decimales obtenidos existe una relación, de no encontrarla entonces ¿con las raíces antes de calcularlas existe alguna relación? O ¿qué representa el módulo de un vector? Seguido de ¿la longitud de z_2 y w es 0?, o sea, ¿no poseen longitud?

Finalmente se les pregunta si observa alguna relación con los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior, lo cual puede llevarlos solo a determinen los módulos del primer ejercicio y no hagan un referente de comparación para encontrar relaciones, necesitando la motivación a determinar los módulos del primer ejercicio como pauta para encontrar relaciones.

Algunos errores que pueden presentar en las posibles relaciones que encuentren puede que relacionen el hecho que en ambos ítem hay raíces inexactas o relacionar que la longitud de los complejos del ítem 2 es mayores o iguales que los del ítem. Se les preguntará en estos casos: ¿todas las raíces son inexactas? O ¿si trabajáramos con el valor de estas raíces usando 2 decimales que puedes observar?, ¿todos tienen mayor longitud? O ¿qué tan mayores son esas longitudes?

Plan de clase de la clase 2

Se presenta a continuación el plan de clase del estudio de clase, con las actividades propuestas y las respectivas descripciones:

<table>
<tr><td colspan="3">CLASE 2- Objetivo de la clase: Analizar la multiplicación de complejos en el plano de Árgand.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Material complementario: Guía: Taller de matemática de multiplicación de números complejos. (ver anexo 2)</td></tr>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Marco teórico</th><th>Gestión de aula</th></tr>
<tr><td>Inicio (10 minutos)

Se presenta el objetivo de la clase y se entregan las instrucciones:
Cada alumno recibe una guía de trabajo, se les explica lo que deben hacer en ella:
La guía cuenta de 2 ítems en donde deben primero calcular el producto de complejos, sus ángulos y módulos, luego graficar en el plano de Árgand, finalmente responderán unas preguntas respecto a los datos que obtenidos.
Para esto pueden trabajar en parejas y juntos complementar respuestas</td><td>Las actividades pedidas en la guía forman parte de una representación de forma literal y del lenguaje cotidiano los cuales convertirán a operaciones algebraicas y representaciones geométricas.</td><td>Los alumnos se agrupan en parejas, las cuales deben atender a las indicaciones del profesor quien se posiciona frente al curso para que todos logren entender y resuelve dudas previas que puedan surgir.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo (60 minutos)

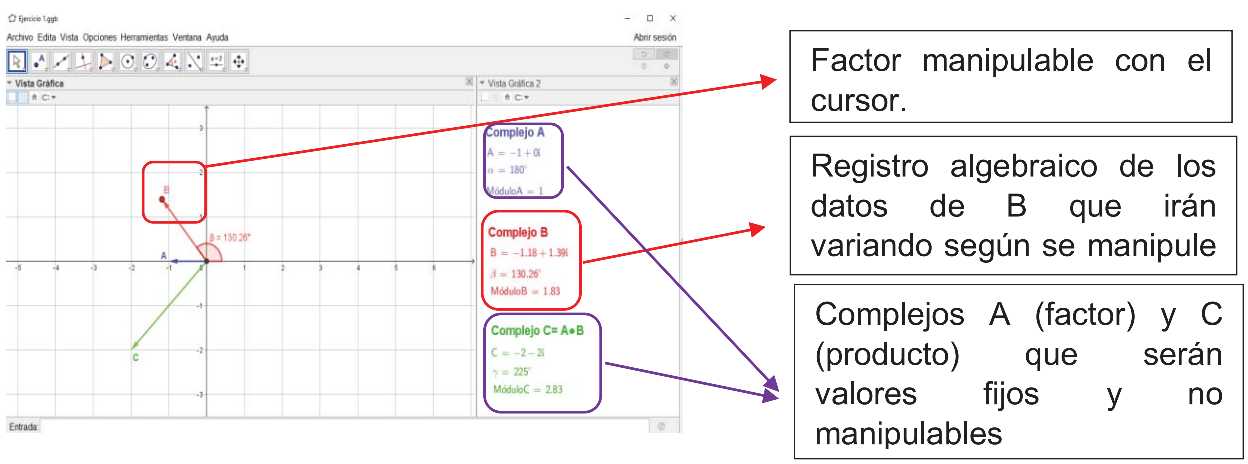
Los alumnos comienzan a trabajar en la guía, desarrollándola en parejas, luego estas respuestas son expuestas en la pizarra por cada grupo, sin cambios, las cuales servirán para un posterior análisis con el curso.</td><td>Los alumnos realizarán una representación algebraica de los números complejos, los cuales operarán y utilizarán fórmulas y algoritmos, aplicando un tratamiento de éstos.
Luego traspasarán estos datos al plano realizando una conversión de registros al</td><td>Profesor entrega el material para trabajar, en este caso la guía, supervisa las parejas y resuelve las dudas de forma personal con cada grupo.
También recordará que el módulo representa la longitud de cada vector, si es necesario destacar la fórmula para determinar el módulo.
Puede que algunos alumnos</td></tr>
</table>

	geométrico, con el cual observarán el ángulo de los complejos. Finalmente, a través de las preguntas reflexivas lograrán relacionar esta conversión de registros en una propiedad.	determinen los decimales de las raíces obtenidas y puedan perderse en ese cálculo, por eso será importante destacar la propiedad de multiplicación de raíces de igual índice.
Cierre (20 minutos)	Para el cierre se espera que los alumnos hayan logrado la comprensión de las conversiones algebraicas y geométricas que evidenciaron en la multiplicación de complejos. Así dominar este traspaso como sus tratamientos en cada registro de los cuales puedan inferir y reflexionar las relaciones que permiten el tránsito entre ellas.	El profesor modera las respuestas que los alumnos obtuvieron en la actividad, resaltando los resultados que ellos registraron en la pizarra orientada al cambio de registro algebraico al geométrico.
Los alumnos observan los registros algebraicos y geométricos que sus compañeros han realizado en la pizarra y compartirán frente al curso las respuestas de las preguntas reflexivas: ¿Qué observas en relación con los ángulos?, ¿hay alguna relación que observes entre los módulos? Y ¿observas alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?		

Tarea matemática de la clase 3

Los alumnos entran en una fase exploratoria y de manipulación del material digital entregado, así contar con la libertad de conocer la actividad y la representación de los complejos con el software geométrico, sin ninguna indicación que sesgue su indagación.

Se espera que los alumnos descubran que en esta actividad ellos solamente podrán manipular uno de los factores B del producto C, por lo tanto existe un factor fijo A.

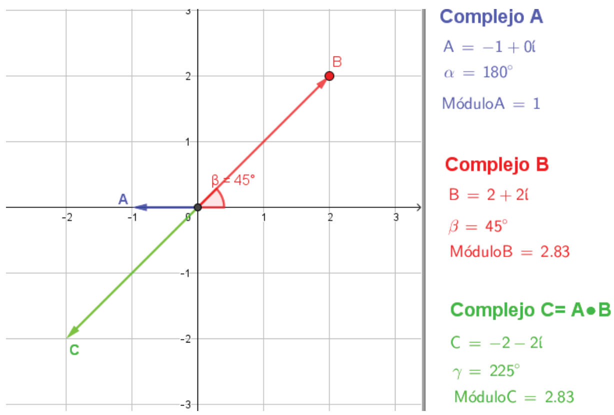


Los alumnos reciben su guía de trabajo, en donde deben realizar 3 ejercicios, más preguntas reflexivas con respecto al traspaso de registro.

En el primer ejercicio, abrirán en la carpeta “clase 3” el archivo llamado “ejercicio 1”, con el cuál desarrollarán en la guía de trabajo las siguientes actividades con el software:

	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A	$-1 + 0i$	180°	1
Complejo B	$2 + 2i$	45°	2,83
Complejo C	$-2 - 2i$	225°	2,83

En el plano observarían:



Luego responderán a la pregunta:

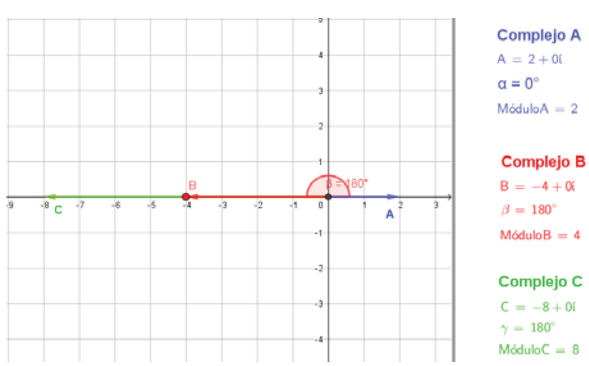
¿Qué característica geométrica cumple B con respecto al producto C?

Se espera que los alumnos visualicen la simetría central que cumple al complejo B con C, también que el producto C es el opuesto del factor B.

En el ejercicio 2 abrirán el archivo “ejercicio 2” en GeoGebra con el que responderán lo pedido en la guía de trabajo:

	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A	$2 + 0i$	0°	2
Complejo B	$-4 + 0i$	180°	4
Complejo C	$-8 + 0i$	180°	8

En el plano observarán:



Luego responderán a la pregunta:

1. ¿Qué característica tienen los ángulos de B y C? Justifica
2. ¿Qué característica tienen los sentidos de los vectores B y C?

En estas preguntas se espera que los alumnos respondan:

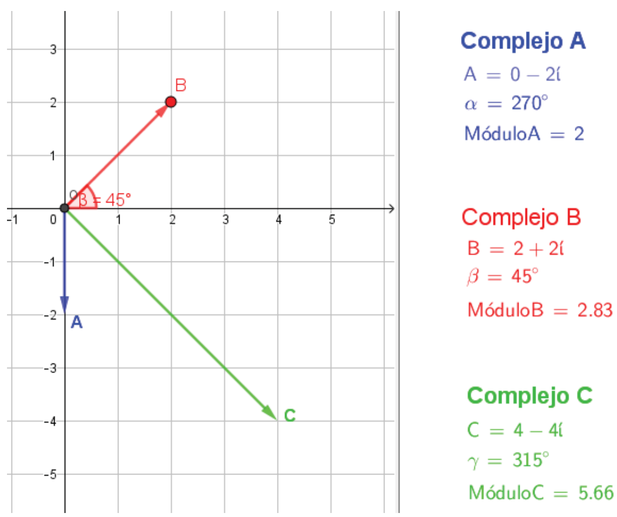
1. Los ángulos son iguales, ya que uno de los factores tiene como ángulo 0° por lo tanto el ángulo que determine el otro factor será el del producto.

2. Ambos vectores tienen el mismo sentido.

Finalmente en el ejercicio 3 abrirán el archivo “ejercicio 3” en GeoGebra con el que responderán en la guía de trabajo:

	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A	$0 - 2i$	270°	2
Complejo B	$2 + 2i$	45°	2,83
Complejo C	$4 - 4i$	315°	5,66

Gráficamente observarán:



Luego responderán a las preguntas:

1. ¿Cómo calculaste B? justifica

2. ¿Qué características debe cumplir B para ser un factor del producto C? justifica

Se espera que los alumnos respondan:

Buscando las condiciones geométricas que debe poseer B, como su ángulo: restando al ángulo del producto el ángulo del factor A, o su módulo: dividiendo el módulo del producto en el módulo del factor A.

Los alumnos muestran sus respuestas y sus representaciones frente al curso, explicando cómo fueron encontrando el factor B, guiados de preguntas por parte del profesor como ¿qué características cumplieron los ángulos y los módulos?, ¿cómo variaba la parte real con la imaginaria del producto con respecto a los factores? Estas preguntas buscan que los alumnos argumenten y fundamente matemáticamente las relaciones geométricas y algebraicas que involucran la multiplicación de complejos.

Análisis a priori de la clase 3

A continuación se muestra el análisis a priori de las actividades propuestas en la clase, con las posibles respuestas de los alumnos y las respectivas devoluciones.

En la primera actividad de la clase los alumnos deberán registrar los factores y producto de la multiplicación que muestra el software, lo cual puede generar dificultades en el manejo errado del software o poco entendimiento en el área de la computación o confusión en las correspondencias de los factores y el producto, por lo que si es posible Asignarle una pareja de trabajo que tenga mayor dominio computacional, para que complementen los conocimientos, recordar y dejar estipulado en pizarra que los factores corresponden a los complejos A y B y el producto al complejo C.

Los alumnos pueden intentar erróneamente "calzar" el factor B con el producto C, buscar un valor para el complejo B de tal forma que se relacione la multiplicación con A de la forma: parte real multiplicado con parte real y parte imaginaria multiplicado con parte imaginaria para obtener C o buscar un complejo B que los módulos se sumen y se obtenga el módulo de C y no lo relacione con la multiplicación. Para estos errores se les puede preguntar ¿qué características geométricas tiene que tener B para que al multiplicarlo por A obtengamos C?, ¿cómo se multiplican algebraicamente los complejos?, motivarlos a revisar si con el complejo B encontrado en la operación de módulos, también se cumplen las otras relaciones como las del ángulo o la multiplicación algebraica.

Finalmente se les pregunta ¿qué característica geométrica cumple B con respecto al producto C?, con respecto a los datos obtenidos, pregunta que puede generar confusiones de comprensión de la pregunta y enfocarlo a la descripción del complejo B y no vinculándolo a la relación directa del producto, necesitando motivación a leer de nuevo la pregunta y preguntarles ¿qué rol cumple B con respecto al valor de C?

Algunas posibles respuestas erradas pueden enfocarse en afirmar que el módulo de uno de los factores tiene que ser igual al del producto sin asociarlo a la multiplicación de los módulos de los factores o considerar que los factores solo difieren en una multiplicidad 2, por lo tanto, el producto será un vector con el doble de longitud que uno de los factores, por lo que se les puede preguntar ¿crees que siempre se cumplirá esa relación? Y ¿si lo intentas con otros complejos para revisarlo?, también invitarlos a realizar la operación de forma algebraica para revisar si efectivamente uno de los factores es el doble del otro.

Plan de clase de la clase 3

<table>
<tr><td colspan="3">CLASE 3- Objetivo de la clase: Identificar los elementos geométricos involucrados en la multiplicación de complejos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Material complementario: Laboratorio de computación, donde cada computador debe contener a un archivo elaborado en el software GeoGebra.
Guía: Elementos geométricos de la multiplicación de complejos (ver anexo 3).</td></tr>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Marco teórico</th><th>Gestión de aula</th></tr>
<tr><td>Inicio (15 minutos)</td><td rowspan="2">En el inicio los alumnos manipulan los complejos y observan sus características geométricas, efectuando un tratamiento dentro del registro geométrico.</td><td rowspan="2">Alumnos son trasladados a laboratorio de computación, en donde se agrupan en parejas de trabajo.</td></tr>
<tr><td>Se presenta el objetivo de la clase y se entregan las instrucciones previas a ingresar al computador.
Instrucciones: alumnos formaran parejas e ingresaran a la carpeta “clase 3”, que se encuentra en el escritorio de los computadores. Luego de abrirlo, las parejas encontrarán 3 archivos los cuales utilizarán para realizar los 3 ejercicios que desarrollarán en una guía, se les pide que primero los abran y exploren las características que tendrán estas representaciones.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo (60 minutos)</td><td rowspan="2">Los alumnos desarrollan un trabajo de conversión de registros, del geométrico al algebraico, en donde manipulan elementos geométricos para encontrar el representante algebraico que cumpla con lo pedido.</td><td rowspan="2">Profesor entrega el material para trabajar, supervisa las parejas y resuelve dudas de forma personal con cada grupo.</td></tr>
<tr><td>Se entrega guía en donde registran algunas multiplicaciones con sus respectivos elementos geométricos. Luego con estos datos responden a algunas preguntas respecto a lo observado y a sus conversiones.</td></tr>
</table>

Cierre (15 minutos)	Al cierre se espera que los alumnos hayan logrado la conceptualización del objeto matemático a través del tránsito de registros geométrico al algebraico.	Profesor pide que alumnos apaguen monitores, pongan atención a las parejas que se presentan y actúa de moderador buscando nuevas respuestas o explicadas de diferentes maneras.
Las parejas presentan frente al curso las respuestas de las preguntas reflexivas, proyectando los ejercicios, para que ellos puedan manipularlos y así mostrar geométricamente el producto frente a sus compañeros.		

ESTUDIO DE CLASE

Se llevó a cabo el diseño, análisis y reformulación de un plan de clase, en donde se consideraron todos los aspectos pedagógicos y recursos necesarios para lograr el objetivo de la clase, así también destacar que este:

> "*Consta de tres aspectos bien definidos, que se realizan de manera reiterada, de manera de mejorar progresivamente su diseño y ejecución: un grupo de profesores prepara una clase (o conjunto de clases), luego uno de ellos la enseña públicamente –asisten no sólo quienes la prepararon– y finalmente se hace una sesión de revisión y crítica*." (Mena, 2009, p.1).

El paradigma de la investigación del estudio de clase se desarrolló bajo un diseño cualitativo enfocado en el tránsito de registros algebraico-geométrico. Se busca en este estudio describir, comprender e interpretar las dificultades y errores que presentan los alumnos al crear las representaciones semióticas y los intercambios de registros en el tratamiento de la multiplicación de complejos. De carácter descriptiva de corte principalmente cualitativo y orientado a identificar y describir ciertas características o fenómenos para generar o inducir el conocimiento.

En este plan el objetivo fue: analizar la multiplicación de números complejos en el plano de Argand. Para ello se llevaron a cabo tres etapas .La primera etapa fue crear un plan de clase que abarcara el objeto matemático considerando llevar el producto de complejos del registro algebraico al geométrico. La segunda parte fue la aplicación del plan de clase a un primer grupo de alumnos, donde se recogieron evidencias escritas y audiovisuales. Posteriormente se analizaron estos registros para el mejoramiento de las devoluciones y los tiempos de las diferentes actividades. La tercera etapa fue la aplicación de estas mejoras a un nuevo grupo de alumnos, recogiendo evidencias escritas y audiovisuales para un posterior análisis (ver anexo 1).

La propuesta fue aplicada en alumnos de un colegio de situación económica alta y en donde se trabaja en gran parte la ejercitación reiterativa en actividades enfocadas en las pruebas estandarizadas, por lo que generó extrañeza a los alumnos la libertad y aceptación de sus respuestas, independiente de si estas estuvieras erradas o correctas. El nivel trabajado fue tercero medio con alumnos de edad promedio 16 años. En una primera implementación se aplicó a un curso de 30 alumnos y en una segunda implementación, que abarco las mejoras de la primera, se aplicó a 10 alumnos, los cuales ya habían aprendido la unidad; sin embargo, se tomaron los de menor rendimiento, para así llevarlos a mostrarles el tratamiento y conversión de registros como refuerzo a los contenidos no logrados.

Tabla 1. Observaciones y justificaciones que se generaron entre la primera y segunda aplicación

Primera aplicación	**Segunda aplicación**
En el estudio de clase, donde se aplicó el plan de clase, constó de una primera aplicación que consistía en una actividad de 3 ítems, programando 90 minutos en total. Comenzó con una activación de conocimientos previos, donde se les preguntó: • ¿Cómo se grafica un número complejo en el plano? • ¿Qué es el módulo de un número complejo? • ¿Cómo se calcula el módulo de un número complejo? • ¿Qué o cómo se representa el argumento de un número complejo en el plano? • ¿Cuáles son las razones trigonométricas que hemos utilizado?	Por lo que en una segunda aplicación se eliminó esta activación de conocimientos previos y las dudas que surjan en los alumnos serían reemplazadas por las correspondientes devoluciones.

• ¿Cómo se multiplican números complejos? Esta seguidilla de preguntas buscaba que, al comenzar la actividad, los alumnos tuvieran mayor seguridad en sus desarrollos, sin embargo, ocupó más del tiempo estimado y no permitió realizar el último ítem,	
La primera actividad, consistía en que los alumnos determinaran algunos elementos dados dos números complejos: *Ítem I:* Ubica los siguientes números complejos en el plano de Argand, representando el vector, determinando el argumento y su módulo. $z_1 = 2i, \quad z_2 = 2 + 2i$ En esta parte los alumnos desarrollaron lo pedido y posteriormente en un ítem II se les pidió que multiplicaran los complejos, obtenido su producto y se les preguntó: ¿Qué pasará con el módulo y argumento de esta multiplicación con respecto a los ya calculados en el Ítem I? Realiza el grafico y justifica. Los alumnos lograron desarrollar el ítem I y II completo, pero el tiempo que tardaron en hacerlo fue 45 minutos, dejando 45 minutos para los 2 ítems que faltaban.	Se hizo un cambio el orden de lo pedido y se juntó estos 2 ítems en uno solo: ***Ítem I:*** Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w. b) Representa en el plano cada número complejo y su producto. c) ¿Qué observas? Con esta mejora del ítem I los alumnos lograron realizarlo en 20 minutos, pues los números complejos trabajados no tenían mayor complejidad, ya que tanto la parte real e imaginaria fue 1 o 0, simplificando los cálculos, para que no tardaran en la parte algebraica y se enfocaran en la parte geométrica. En cuanto a las preguntas de observación de los resultados, se dejó mucho más abierta, para no sesgar sus opiniones y realmente dieran cuenta de todos los aspectos geométricos que puedan apreciar en la gráfica.
El último ítem de la primera aplicación se enunció: "Realiza la multiplicación de estos números complejos y valida tu justificación realizada anteriormente:$z_3 = -2 + 2i, \; z_4 =$	Al final está actividad, quedaron 70 minutos de trabajo para el segundo ítem, los alumnos lo desarrollaron correctamente y en el tiempo estimado, dejando los espacios para realizar una

$1+i$.” Luego se les pedía que determinaran los módulos y los argumentos de los complejos trabajados. En esto, los alumnos tardaron el resto del tiempo, dejando muy poco espacio para hacer la puesta en común.	puesta en común. Este ítem al ser modificado se planteó: ***Ítem II:*** Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1+i$ a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w. b) Representa en el plano cada número complejo y su producto. c) ¿Qué observas en relación con los ángulos? d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos? e) ¿Observa alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior? Los alumnos lograron terminar este ítem en el tiempo destinado y con ellos permitió el espacio para realizar una puesta en común.

La forma de trabajo de todas las actividades fue en parejas y finalizando con una puesta en común. Aunque el trabajo de los alumnos fue de duplas, cada uno constó con una guía de trabajo, para generar el espacio de producciones personales que pudieron ser complementadas con el compañero. Estas producciones ayudaron al análisis, ya que las producciones no eran idénticas, aunque formaron un mismo grupo.

Categorías de análisis

La investigación se enfoca en las representaciones semióticas que generan los alumnos en las actividades propuestas, para esto se categorizó según los registros realizados como algebraicos, geométricos y de lenguaje natural, así también el tránsito de estos según las unidades significantes.

Lo más significativo dentro de las producciones de los alumnos son los diferentes registros que presentan, tanto algebraico, geométrico y/o lenguaje natural, dentro de los cuales existen varios elementos que juegan papeles importantes dentro del encapsulamiento del objeto.

En esta primera categoría se analizarán. En un registro algebraico la forma de escribir los complejos, la operatoria que desarrolla al multiplicarlos, las propiedades algebraicas como el producto de binomios o quizás algunos desarrollen aplicando la fórmula, la aplicación de $i^2 = -1$, intercambio de signos, reducción de términos, agrupación de las unidades reales y las imaginarias.

En un registro geométrico estarán presentes la ubicación del punto en el plano que representa cada complejo, el vector asociado, su ángulo, su módulo, la ubicación espacial y variaciones dimensionales y cualitativas.

En un registro de lenguaje natural estarán todas las reflexiones y observaciones que los alumnos escriban a las preguntas abiertas, las cuales podrían ser complementadas también con registros algebraicos y geométricos.

Dentro de cada registro existen diferentes tratamientos para cada uno, en donde se espera que en un registro algebraico generen los desarrollos correspondientes a la multiplicación de números complejos aplicando todo los conocimientos algebraicos que están en juego, en un registro geométrico, identificar y desarrollar todos los elementos que se presentan en el plano al graficar un complejo y un registro de lenguaje natural se espera que desarrollen sus ideas explicando y fundamentando sus observaciones.

Para analizar si existe un tránsito entre los diferentes registros será necesario observar la congruencia de las unidades significantes entre registros, si hay una relación visiblemente establecida entre ellas, las cuales sean observables desde las producciones, o las reflexiones expuestas por los alumnos en clases. En esta categoría estarán presentes los registros que estén vinculados a otro registro y exista una coordinación entre ellos, así si en un registro geométrico tiene unidades significantes del registro algebraico que los vinculen uno con otro, podríamos asegurar la congruencia. A continuación, se muestran las congruencias entre los registros geométricos y algebraicos:

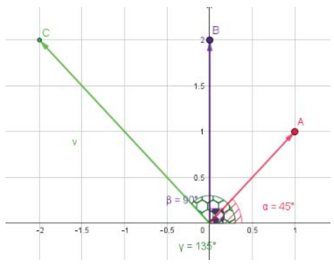
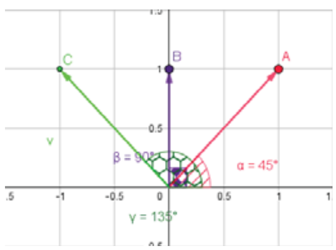
Registro geométrico	**Registro algebraico**	**Congruencia entre registros**
Registro geométrico ítem I:  **Registro geométrico ítem II:**  	Del ítem 1: $A = 1 + i$ $B = i$ $C = -1 + i$	Identifica la unidad imaginaria y real en sus respectivos ejes.
	$A \cdot B = (1 + i)i = C$	Grafica el producto en el plano.
	$\alpha + \beta = \gamma$	Relaciona suma de ángulos de los factores como el ángulo del producto.
	$\lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert = \lvert C\rvert$	Relaciona la longitud de los vectores con la longitud del producto, luego compara cómo esto cambia en el ítem II, donde uno de los factores aumenta con un escalar.

Tabla 2. Congruencia entre los registros geométricos y algebraicos

En síntesis, las categorías de análisis empleadas se ilustran a continuación:

Categorías	**Descripción**
Categoría I:	*Uso de diferentes tipos de registros: algebraico, geométrico y/o lenguaje natural*
Categoría II:	*Tránsito entre registros y existencia de una coordinación entre ellos*

Tabla 3. Categorías de análisis

ANÁLISIS

A partir de los análisis de las producciones de los alumnos en el cuestionario y de cada elemento considerado dentro de las categorías, se encontró que todos los alumnos registraron representaciones del objeto matemático de forma algebraica y geométrica, pero no todos lograron argumentar las relaciones que se establecieron entre los registros.

De los 10 alumnos a los que se les aplicó el plan de clase todos lograron realizar la multiplicación de complejos de forma algebraica, como lo muestra la figura XXX.

Agregar un ejemplo de las producciones de los alumnos.

En el registro algebraico la mayoría lo hizo correctamente, sin embargo, hubo algunos que representaron segmentos en vez de vectores o un punto solamente, un ejemplo de ello se ilustra a continuación:

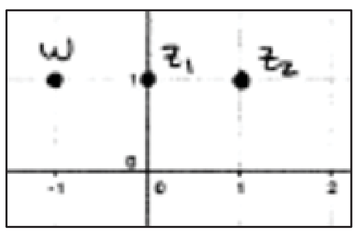


Figura 11: representación de números complejos de un alumno

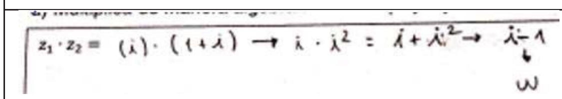
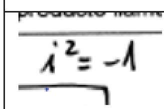
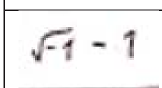
Al determinar los ángulos y los módulos todos lograron encontrarlos correctamente, pero a la hora de justificar y relacionar las unidades significantes de lo algebraico a lo geométrico se evidenciaron errores y confusiones, aunque todos registraron registros en lenguaje natural.

Tipos de respuestas que se presentaron en los registros por actividad

Ítem 1:

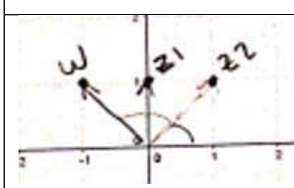
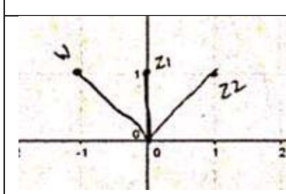
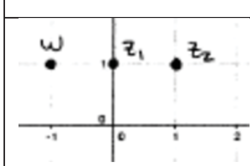
Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este llámalo w.

Tipos de Registros	Descripción
	Los 10 alumnos registraron este tipo de registro y obtuvieron correcta su respuesta
	3 alumnos registraron este tipo igualdad dentro del tratamiento
	1 alumno respondió el producto de esta forma además de la forma $-1 + i$

Se evidencia que el registro algebraico es dominado por los alumnos, siendo el fuerte de las representaciones de la operación.

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.

Tipos de registros	Descripción
	7 alumnos registraron este tipo de registros, representando al complejo como un vector, de los cuales 5 marcaron su ángulo.
	2 alumnos registraron el complejo como un segmento.
	1 alumno presentó este tipo de representación de cada complejo como un punto.

Se evidencia que la mayoría de los alumnos tienen un aprendizaje de la representación geométrica de la multiplicación de números complejos, sin embargo no de una manera acabada y se pone de relieve la importancia de reforzar esta representación como un conocimiento previo.

c) ¿Qué observas?

Esta pregunta género diversas preguntas casi en su totalidad diferente, sin embargo se muestran las que tienen elementos en común:

Tipos de registros	Descripción
• Todos tienen la misma parte imaginaria	7 alumnos registraron respuestas enfocadas a la parte imaginaria del número complejo
$\theta z_1 = 90^\circ$ $\theta z_2 = 45^\circ$ $\theta w = 45^\circ$	8 alumnos mencionan los ángulos en sus respuestas

Esta actividad pesquisó una respuesta no considerada previamente, referente a la parte imaginaria de los complejos involucrados en la operación, sin embargo sí se evidenció que los ángulos fueron, en su mayoría, determinados por los alumnos, pero sin relación alguna entre ellos.

Ítem 2:

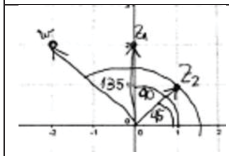
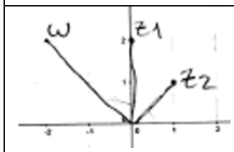
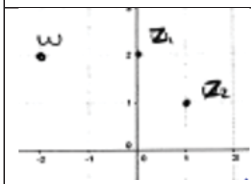
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

Tipos de registros	Observaciones
$z_1 \cdot z_2 = 2i \cdot (1+i) \to 2i + 2i^2 = 2i + 2 \cdot -1 = 2i - 2$ $\downarrow$ $w = -2 + 2i$	9 alumnos hicieron este tipo de registro algebraico, en donde se evidencia un tratamiento en el desarrollo correcto de la multiplicación.
$2i \cdot (1+i) = 2i + i^2$	1 alumno aplicó un tratamiento incorrecto en la distributividad.

Se evidencia que el registro algebraico logra un tratamiento completo y correcto en las producciones de los alumnos.

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto

Tipo de registros	Observaciones
	5 alumnos registraron los complejos como un vector de los cuales 3 marcaron su argumento.
	4 alumnos registraron los complejos como un segmento.
	1 alumno represento a través de un punto a los complejos.

Se evidencia una baja en la representación geométrica de los complejos, puede que el hecho de que la representación a través de un segmento, al no ser pesquisado previamente y analizar su respectiva devolución, sea una posible respuesta que requiere de un análisis.

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

Tipos de registros	Observaciones
lA SUMA DE los ÁNgulos DE z_1 y z_2 ES el ÁNgulo DE w	7 alumnos representaron en lenguaje natural la propiedad de la suma de los ángulos de los factores.
$\theta z_1: 90°$ $\theta = 135°$ $\theta z_2 = 45°$	2 alumnos solamente registraron el valor de los ángulos de los complejos, en un registro algebraico.

Se evidencia que existe una coordinación entre registro, evidenciando una congruencia entre los ángulos determinados geométricamente con una propiedad algebraica.

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

Tipos de registros	Observaciones
$\lvert z_1\rvert = \sqrt{0+4} = \sqrt{4}$ $\lvert z_2\rvert = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\lvert w\rvert = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$	Los 10 alumnos registraron solamente el valor de los módulos en un registro algebraico, pero ninguno respondió la pregunta argumentativa en lenguaje natural.

Se evidencia una debilidad en el registro del lenguaje natural. En esta pregunta se puede pesquisar que quizás los alumnos se quedan sólo con la primera indicación y no lo llevan a la pregunta.

e) ¿Observa alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

En esta pregunta en general las repuestas fueron bastante diferentes, pero se muestran los tipos de respuestas que tienen elementos repetitivos en los registros

Tipos de registros	Observaciones
• si se multiplica $\lvert z_1 \rvert$ y $\lvert z_2 \rvert$ da $\lvert w \rvert$	3 alumnos registraron la propiedad de la multiplicación de los módulos de los factores con respecto al producto, usando una representación en lenguaje natural y algebraico.
en el primero es lo mismo pero este es por 2 Porque es $2i$ y el primero es i sin 2	4 alumnos nombran de diferentes formas la existencia de una multiplicidad 2 con respecto al primer ítem, usando una representación en lenguaje natural y algebraico.
el resultado de $\lvert z_1 \rvert (2) + \lvert z_2 \rvert (\sqrt{2})$ da el $\lvert w \rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	2 alumnos mencionaron la suma de los módulos de los factores como el resultado del módulo del producto, usando una representación en lenguaje natural y algebraico.

En esta pregunta se utilizó un lenguaje natural y registro algebraico para formular la propiedad encontrada. Destacar que esta pregunta, al igual que la anterior, busca que de un registro algebraico exista coordinación con un registro en lenguaje natural, sin embargo aquí se plantea desde un principio con la pregunta y fue respondida con más argumentos que la anterior.

Análisis desde las categorías de análisis

En los diferentes registros se evidencias en general según las categorías de análisis:

Categoría I: Uso de diferentes tipos de registros: algebraico, geométrico y/o lenguaje natural

La totalidad de los alumnos lograron representar de forma algebraica la multiplicación de números complejos, este registro también se utilizó al determinar los módulos, los tratamientos en estos registros fueron en su totalidad correctos.

En un registro geométrico, la totalidad fue capaz de ubicar las coordenadas de un complejo, con uso de vector, segmento y sólo el punto de las coordenadas, evidenciando que no existe una claridad con respecto a su representación.

El uso del lenguaje natural estuvo presente en todas las producciones de los alumnos, complementados con un registro algebraico, este registro fue más frecuente al momento de responder a las preguntas abiertas.

Categoría II: Tránsito entre registros y existencia de una coordinación entre ellos

El primer tránsito que enfrentaron fue del lenguaje natural de las indicaciones al registro algebraico: “Multiplica de manera algebraica los complejos y a este llámalo w.”, ahí se evidenció que los alumnos asignaron el “multiplicar” a una operación desarrollada en un registro algebraico.

Luego transitaron de los números complejos obtenidos en la multiplicación a la representación geométrica, en donde ubicaron en el plano a cada componente de los complejos con su unidad significante, así distingüendo el eje real e imaginario correctamente, pero el elemento geométrico que lo acompañó fue discrepante entre vector, segmento y punto.

Finalmente, cuando respondieron a las preguntas de argumentación, hicieron un tránsito entre lo geométrico, algebraico y lenguaje natural, registros que utilizaron para expresar sus argumentos los cuales asignaban a las unidades significantes geométricas, como el ángulo que marcaron en el gráfico, a un registro algebraico y lenguaje natural para explicar que la suma de los argumentos de los factores correspondía al producto.

A partir de este análisis el plan de clases se reformuló, su versión final ilustrada a continuación:

Tabla 4. Comparación entre las actividades del plan de clase y su mejora

<table>
<tr>
<th>Primera versión del plan de clase que fue aplicada al primer grupo de alumnos.</th>
<th>Segunda versión del plan de clase aplicada al segundo grupo de alumnos.</th>
</tr>
<tr>
<td>

Conocimientos Previos:

- ¿Cómo se grafica un número complejo en el plano?
- ¿Qué es el módulo de un número complejo? ¿Cómo se calcula el módulo de un número complejo?
- ¿Qué o cómo se representa el argumento de un número complejo en el plano?
- ¿Cuáles son las razones trigonométricas que hemos utilizado?
- ¿Cómo se multiplica números complejos?

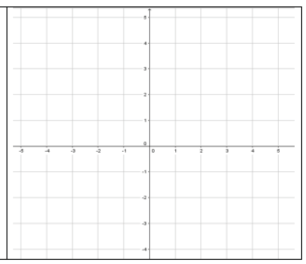
Ítem I Ubica los siguientes números complejos en el plano de Argand, representando el vector, determinando el argumento y su módulo.

$z_1 = 2i, \quad z_2 = 2 + 2i$

$z_1 = 2i$

Módulo:

Argumento:



</td>
<td>

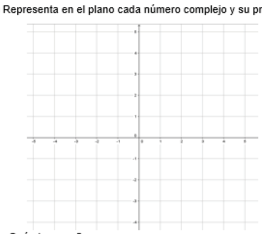
Ítem 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

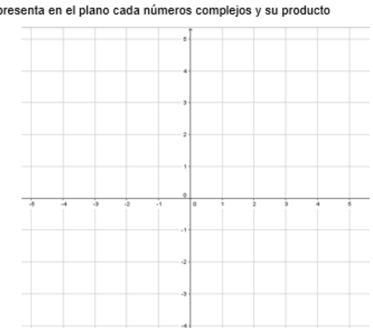
Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_3| =$

$|z_4| =$

$|w| =$

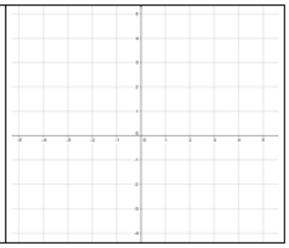
e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

</td>
</tr>
</table>

$z_2 = 2 + 2i$

Módulo:

Argumento:



Item II Realiza la siguiente multiplicación, considerando los números del ejercicio anterior:

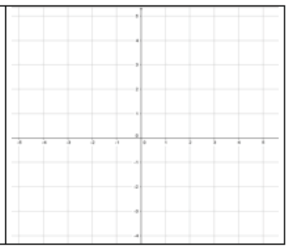
$z_1 \cdot z_2$

¿Qué pasará con el módulo y argumento de esta multiplicación con respecto a los ya calculados en el Item I? Realiza el grafico y justifica.

$z_1 \cdot z_2$

Módulo:

Argumento:



Justificación:

....

....

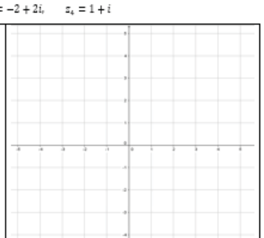
III Realiza la multiplicación de estos números complejos y valida tu justificación realizada anteriormente.

$$z_3 = -2 + 2i, \quad z_4 = 1 + i$$

$z_3 \cdot z_4$

Módulo:

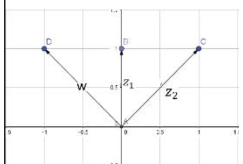
Argumento:



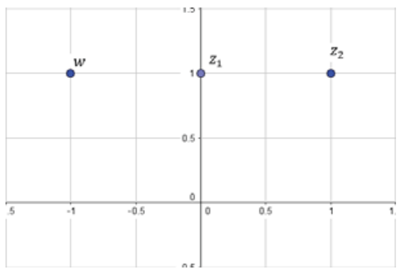
Análisis a priori, a posteriori y contraste

Actividad	Análisis a priori	Análisis a posteriori	Contraste
Ítem 1 Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$ a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w Respuesta Experta: $i \cdot (1 + i)$ $= i + i^2$ $= -1 + i = w$	• Dejarlo expresado con las unidades imaginarias $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = w$ • Puede que no aplique propiedad distributiva, al omitir los paréntesis de z_2 desarrollando: $i \cdot 1 + i = i + i = 2i$ • Asociar que un término al cuadrado siempre es positivo, caso que pasa en los reales, desarrollando: $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = i + 1$ • Aplicar propiedades de potencias a la adición: $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = i^3$	• La totalidad de los alumnos desarrollaron: $i \cdot (1 + i)$ $= i + i^2$ $= -1 + i = w$ • Hubo 3 alumnos que registraron la igualdad: $i^2 = -1$, dentro del tratamiento. • Un alumno respondió a continuación del resultado correcto, la igualdad: $w = -1 + i = \sqrt{-1} - 1$	Se esperaba mayor dificultad en el tratamiento de esta representación y fue por esta percepción que se utilizaron números complejos con coeficientes 1 y 0, sin embargo, los alumnos demostraron un buen dominio algebraico de la multiplicación.

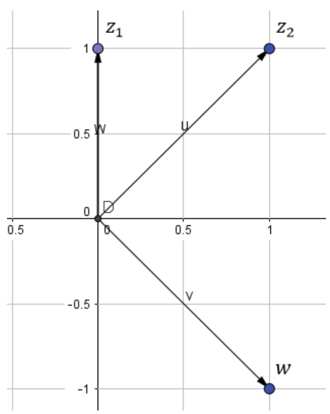
<table>
<tr>
<td>b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.

Respuesta experta:

</td>
<td>

- Se espera que los alumnos grafiquen en el plano a través de vectores y puede que algunos sólo representen el punto en el plano.



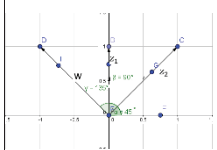
- Posiblemente algún alumno confunda a w con el conjugado de z_2 y grafique.



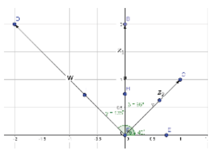
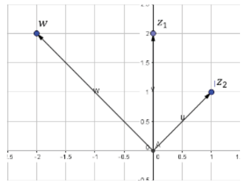
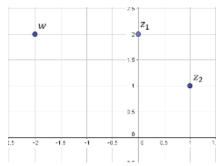
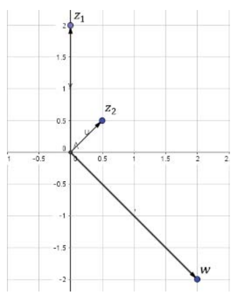
</td>
<td>

- 7 alumnos representaron al complejo como un vector, de los cuales 5 marcaron su ángulo.
- 2 alumnos registraron el complejo como un segmento.
- 1 alumno registró los complejos como un punto en el plano.

</td>
<td>La mayoría de los alumnos registraron de la forma más completa cada complejo, involucrado en la multiplicación, en el plano, sin embargo, el registro de representación como un segmento fue una respuesta que no fue previsto, demostrando que existe una debilidad que puede ser en la representación propia del complejo o de los vectores en general.</td>
</tr>
</table>

c) ¿Qué observas? Respuesta experta: se observan 3 vectores con sus respectivos ángulo 	• Observar que z_2 es simétrico con w respecto al eje imaginario. • Observar que $z_2$es el opuesto de w o viceversa. • Observar que $z_2$es el conjugado de w o viceversa. • Observar que todos los vectores tiene igual longitud o módulo. • Observar que z_2 tiene igual longitud o módulo que w o viceversa. • Observar que z_2 posee el mismo ángulo que w. • Observar que $\theta_{z_1} = 90°,\ \theta_{z_2} = 45°, \theta_w = 135.$ • Observar que la suma de los ángulos de los factores es igual al ángulo del producto.	• 7 alumnos registraron respuestas escritas en lenguaje natural enfocadas sobre la parte imaginaria, indicando que todos los complejos, involucrados en la multiplicación, tienen la misma parte imaginaria. • También 8 alumnos mencionaron la medida de los ángulos, pero sin dar argumentos ni mostrar relación alguna.	Esta pregunta al ser abierta y dar cabida a diferentes tipos de respuestas, se esperaba una mayor heterogeneidad de las respuestas, sin embargo los alumnos identificaron un elemento que no se previó, que es la parte imaginaria de los factores y el producto, esto puede ser por el hecho que visualmente es identificable. Sin embargo, la mayoría mencionó la medida de los ángulos, que puede relacionarse al hecho de que es un elemento que dominan de la representación geométrica del complejo, pero no mostraron relación entre las medidas.

Ítem 2 Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$ a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w. Respuesta experta: $2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i = w$	• Dejarlo expresado con las unidades imaginarias $2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = w$ • Puede que no aplique propiedad distributiva, al omitir los paréntesis de z_2 desarrollando: $2i \cdot 1 + i = 2i + i = 3i = w$ • Asociar que un término al cuadrado siempre es positivo, caso que pasa en los reales, desarrollando: $2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = 2i + 2$ • Aplicar propiedades de potencias a la adición: $2i \cdot (1 + i) = 2i + 2i^2 = 4i^3$	• 9 alumnos aplicaron el tratamiento correcto de la multiplicación de complejos en el registro algebraico. • 1 alumno cometió un error distributivo en el tratamiento algebraico, al cual se le hicieron las respectivas devoluciones.	Casi la totalidad de los alumnos aplicaron el tratamiento correcto del registro algebraico, mostrando un dominio acabado de la multiplicación de complejos en este registro. Se logró pesquisar el error presentado en un alumno, por lo que se pudo entregar una devolución oportuna.

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto. Respuesta experta: Al representarlo como vectores y sus ángulos obtendremos: 	• Puede que realicen el gráfico sin destacar sus ángulos:  • Puede que grafiquen sólo los puntos de cada complejo sin su vectore asociado:  • Representar a w en el cuarto cuadrante por confundir los ejes: 	• 5 alumnos registraron los complejos como un vector de los cuales 3 marcaron su argumento. • 4 alumnos registraron los complejos como un segmento. • 1 alumno representó a través de un punto a los complejos.	En este ítem se evidenció una baja con respecto a la representación de un complejo como un vector, así también aumentaron los alumnos que registraron al complejo como un segmento, posiblemente las devoluciones de este error no fueron completamente abarcadas en el primer ítem, por lo que será importante destacar el uso del vector como un representarte del complejos en clases previas a esta.

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos? Respuesta experta: Se observa que $\theta_{z_1} + \theta_{z_2} = \theta_w$.	• Posiblemente relacionen los ángulos con los del ítem anterior $\theta_{z_1} = 90°, \theta_{z_2} = 45°, \theta_w = 135.$ • Puede que relacionen el ángulo de z_2 con el de w y afirmen: $w = \theta_{z_2} = 45°$ • Al observar que w se encuentra en el segundo cuadrante, creer que hay una pendiente negativa y afirmen: $\theta_w = -45.$	• 7 alumnos representaron en lenguaje natural la propiedad de la suma de los ángulos de los factores. • 2 alumnos solamente registraron el valor de los ángulos de los complejos, en un registro algebraico.	La mayoría logró identificar el valor de los ángulos de los complejos y encontrar una relación entre ellos, identificando la propiedad de los ángulos, logrando el objetivo de la pregunta.

d) Determina sus módulos ¿Hay alguna relación que observes entre los módulos? Respuesta experta: Al desarrollar los módulos obtenemos: $\|z_1\| = \sqrt{4}$ $\|z_2\| = \sqrt{2}$ $\|w\| = \sqrt{8}$ se observa que $\|z_1\| \cdot \|z_2\| = \|w\|$	• Calcular las raíces y obtener resultados con los se puedan confundir $\|z_1\| = \sqrt{4} = 2$ $\|z_2\| = \sqrt{2} = 1{,}41 \ldots$ $\|w\| = \sqrt{8} = 2{,}82 \ldots$ • Tomar de la parte imaginaria con la unidad imaginaria $\|z_1\| = \sqrt{0 + 4i^2} = \sqrt{-4} = 2i$ $\|z_2\| = \sqrt{1 + i^2} = \sqrt{1 - 1} = 0$ $\|w\| = \sqrt{4 + 4i^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$ Observar que $\|z_2\| = \|w\|$	Los 10 alumnos registraron solamente el valor de los módulos en un registro algebraico, pero ninguno respondió la pregunta argumentativa en lenguaje natural.	Esta pregunta fue de alto impacto para identificar posibles conclusiones: Los alumnos no lograron comprender el enunciado de la pregunta, se presenta una distracción del alumno que sólo vio la primera indicación “determina sus módulos”, la pregunta resultó ambigua o se debió plantar de otra manera.
e) ¿observas alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior? Respuesta experta: Respuesta	• Relacionar con multiplicidad 2 a los módulos. • Relacionar el hecho que en ambos ítem hay raíces inexactas. • Relacionar que la longitud de los complejos del ítem 2 son mayores o iguales que los del ítem 1.	Esta pregunta obtuvo mayor diversificación en las respuestas, por lo que se enuncian aquellas que agruparon un mismo concepto: • 3 alumnos registraron la propiedad de la multiplicación de los módulos de los factores con respecto al producto, usando una representación en lenguaje natural y algebraico.	En esta pregunta está intrínsecamente ligada a la pregunta anterior, tanto en las respuestas como en el contraste de los análisis. Los alumnos utilizaron la información de la pregunta anterior para responder, sin embargo la minoría logró observar la propiedad de los módulos.

experta: Los módulos del ítem 1 son: $\|z_1\| = \sqrt{1}$ $\|z_2\| = \sqrt{2}$ $\|w\| = \sqrt{2}$ Los módulos del ítem 2 son: $\|z_1\| = \sqrt{4}$ $\|z_2\| = \sqrt{2}$ $\|w\| = \sqrt{8}$ Se observa que en el ítem 2 el vector del producto tiene mayor longitud ya que de $z_1 = i$ pasamos a $z_1 = 2i$, o sea, el doble del primer ítem obteniendo que el producto w sea también el doble: $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$		• 4 alumnos nombran de diferentes formas la existencia de una multiplicidad 2 con respecto al primer ítem, usando una representación en lenguaje natural y algebraico. • 2 alumnos mencionaron la suma de los módulos de los factores como el resultado del módulo del producto, usando una representación en lenguaje natural y algebraico.	Algunos identificar la diferencia numérica entre los complejos del ítem 1 y el 2, relacionando la multiplicidad de los factores con la multiplicidad de los módulos. Se evidenció la presencia de una idea de la propiedad con los alumnos que indicaron la suma de los módulos de los factores como el resultado del módulo del producto, esto podría sugerir que los números utilizados no son convenientes para esta propiedad, porque existe un falso positivo.

CONCLUSIONES

Esta propuesta se enfocó en la búsqueda de actividades que ayuden a la conceptualización del objeto matemático "multiplicación de números complejos". En la investigación se hizo un plan de clase con el fin de mejorar la conceptualización del objeto matemático. A través del análisis de las actividades que se propusieron a los alumnos y sus respectivas reproducciones, se comprobó que en el único registro que lograron su tratamiento correcto es el registro algebraico, mientras que el uso de las representaciones geométricas fue débil y las representaciones en lenguaje natural carecía de fundamentos para responder acabadamente las preguntas. Estas observaciones ayudaron a identificar los elementos que se necesitarían en una clase previa, la clase 1, y asentó la base de una clase que buscó reforzar las propiedades encontradas y dar las primeras nociones de la división de complejos, en la clase 3.

La mayoría de los errores se manifestaron en el desarrollo matemático de la multiplicación de números complejos desde la representación geométrica y a en encontrar regularidades con respecto a los módulos, ya que quizás no es tan visible para los alumnos que la multiplicación de la medida de la longitud de los factores es la longitud del producto, como lo hizo el ángulo que fue determinado en su totalidad correctamente y sin uso de trigonometría ni instrumento de medición. Se evidenció un gran déficit en el uso de registro en lenguaje natural en la argumentación, las cuales fueron en su mayoría demasiado escuetas y orientadas al álgebra, ya que la mayoría hizo uso de ella para explicar las propiedades.

El trabajo matemático fue exploratorio de las propiedades encontradas que dan el sentido geométrico de la multiplicación de números complejo, por lo que es muy importante que conciban la representación de sólo un número complejo en el plano y sus elementos geométricos para luego hacerlo parte de una operación.

Se destaca que el uso de un software geométrico favorece a la exactitud de las representaciones y facilita el trabajo geométrico de los alumnos, logrando evidenciar sus registros de forma inmediata y evitando errores que se puedan producir en el gráfico manual, los que igual se pesquisaron en la clase 2. Los alumnos enfrentan una realidad en donde la tecnología los acompaña de forma cotidiana, por lo que este tipo de herramientas favorece el acercamiento a las habilidades que pueden desarrollar en la manipulación de un software.

Se busca contribuir a la comunidad educativa, con una propuesta que abarque diferentes registros de un objeto que reposa en la unidad de números, utilizando las herramientas tecnológicas que permitan facilitar la construcción de los registros y la congruencia entre estos. Las clases se planificaron en función de las necesidades de un profesor entregando los insumos necesarios, los registros en GeoGebra, las descripciones de cada momento y las respectivas devoluciones a las eventuales respuestas de los alumnos.

Se extiende la invitación a hacer uso de esta secuencia como una herramienta de alto impacto por innovación al curriculum escolar, ya que se proponen actividades completamente diferentes a las encontradas en los textos escolares, utilizando los mismos aprendizajes esperados, pero desde el análisis y el cambio de registros que permiten una visión más global del concepto y a la vez más intrínseca en el rol de cada elemento que está presente en la multiplicación de complejos.

REFERENCIAS

Arboleada L. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de Historia da Matemática. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Número Especial (1)*, 1-16. Recuperado de *https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents.*

Arenzana V. (1997). El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Gunther Gassmann. *Suma, 25,* 61-70. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/7609/

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Premisa 12(47)*, 13-22. Recuperado de http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2021.pdf

Aznar, M., Moler, E. y Pesa, M. (2017). Conversiones de representaciones de números complejos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. México: siglo XXI editores.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 4(1)*, 45-62. Recuperado de http://www.syllogismos.it/history/Relime.PDF

Blanco M., Bozt J., Calderón F., Romero L., Jiménez L., (2012). *Matemática tercero educación media*, *proyecto bicentenario*, Chile: Santillana.

D'amore, B. (2015). *Didáctica de la matemática una mirada internacional empírica y teórica*. Paper Recuperado de http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/27856/F.%20DIDACTICA%20DE%20LA%20MATEMATICA.pdf?sequence=5&isAllowed=y

Distefano, M, Aznar, M., Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *Unión iberoamericana de educación matemática, (30)*, 61-80. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_9_de_volumen_30.pdf

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento humano registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Gatica, N. y Maz Machado, A. (2012). Estudio de inecuaciones de dos variables. En actas de *XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Diversidad y Matemáticas*. España: CEAM. Recuperado en http://thales.cica.es/xivceam/actas/pdf/com05.pdf

Guerrero D. (2015). Números complejos (i). *Geometría fundamental y trigonometría clases.* Facultad de ingeniería Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas: Universidad de Piura, Perú. Recuperado de: https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/2215/Cap.%2020%20I.pdf?sequence=1

Levinson, N. Redheffer, R. (2003). *Curso de variable compleja*, España: Reverté S.A.

Nahim, P. (1998). *Esto no es real la historia de i*. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick; P. Gómez y L. Rico Luis (Eds.), *Educación Matemática*, 69-108. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Robles, J. (1982). ¿Qué son los números? En Instituto de investigaciones filosóficas*. Matemática hasta el siglo xviii* (155-171). México. Universidad Nacional Autónoma México. Recuperado de http://www.filosoficas.unam.mx/~ojsdianoia/index.php/dianoia/article/download/829/810.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias, 33(1),* 151-165. Recuperado de https://ddd.uab.cat/record/131239

Saiz 0., Blumenthal V. (2016) Texto de matemática 3° medio, Chile: Cal y Canto.

ANEXOS

Anexo 1: Producciones de los alumnos

Item 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

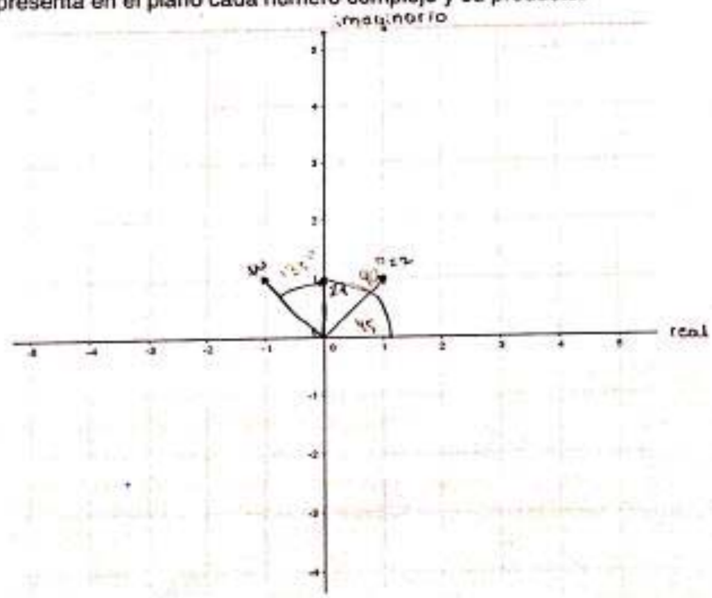
a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = (i) \cdot (1+i) \to i \cdot i^2 = i + i^2 \to i - 1$

$\downarrow$

w

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



$z_1 = (0, 1)$

$z_2 = (1, 1)$

$w = (-1, 1)$

c) ¿Qué observas?

- todas tienen la misma parte imaginaria
- $\theta_{z_1} = 90°$
- $\theta_{z_2} = 45°$
- $\theta_w = 135°$

Item 1

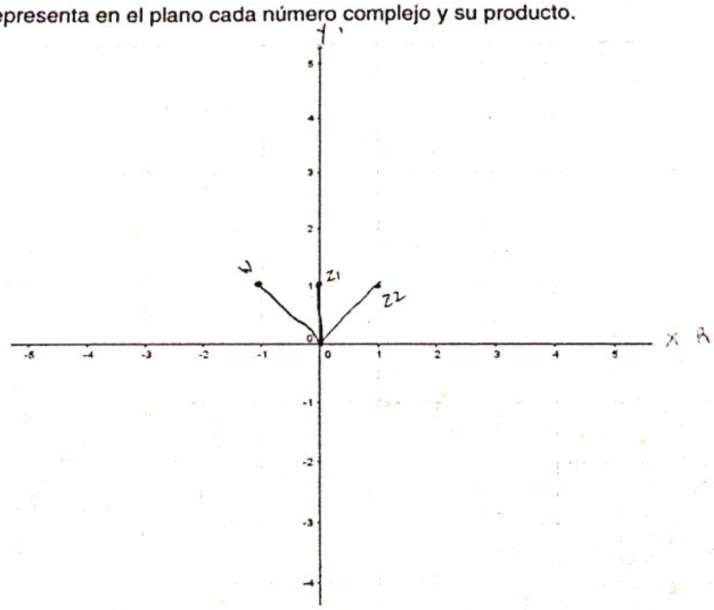
Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i + i^2$ $\quad i - 1$

$w = -1 + i$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

$\theta z1 = 90°$

$\theta z2 = 45°$

$\theta zw = 45°$

Ítem 1

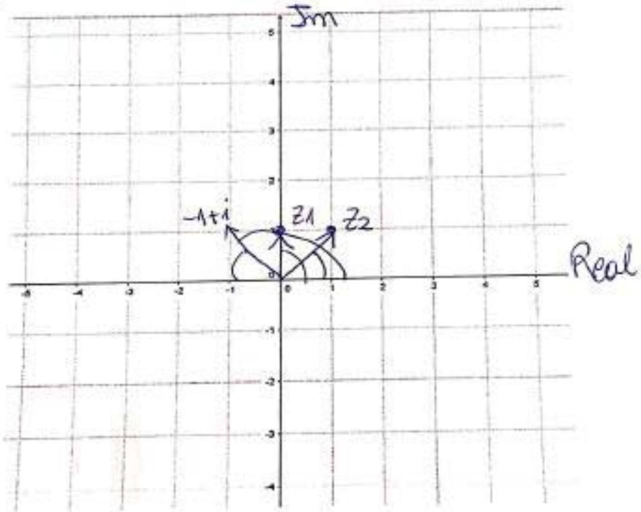
Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i \cdot (1 + i) = i + i^2 = i - 1$

$-1 + i = w$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

Los vectores de Z1, Z2 y w
tienen parte imaginaria positiva
Los angulos 45, 90 y 135

Item 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i \cdot (1+i)$ $\quad i - 1 \quad -1 + i$

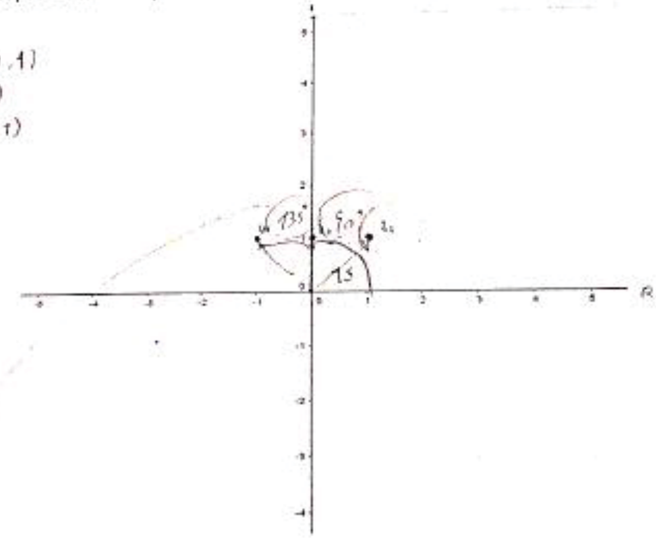
$1i + i^2 \quad = \sqrt{-1} - 1$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.

$w: -1+i = (-1, 1)$

$z_1 = i = (0, 1)$

$z_2 = 1+i = (1, 1)$



c) ¿Qué observas?

Todos tienen el mismo imaginario

$\theta_w = 135°$

$\theta_{z_1} = 90°$

$\theta_{z_2} = 45°$

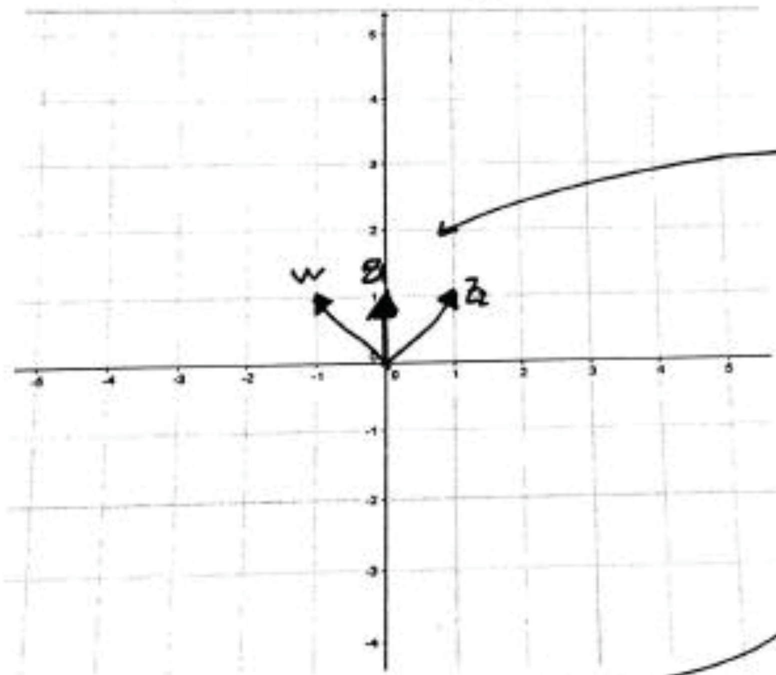
Ítem 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $\left.\begin{array}{l} Z_1 = \overset{R}{0} + \overset{I}{i} \\ Z_2 = 1 + i \end{array}\right\}$ $i \cdot (1 + i) = i + i^2 \quad i^2 = -1 \quad R \quad I$ $= \boxed{i - 1 = w} = -1 + i$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



$Z_1 = 0 + i = (0, 1)$

$Z_2 = 1 + i = (1, 1)$

$w = -1 + i = (-1, 1)$

¿Qué observas?

Todos son iguales los imaginarios son 1

Item 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $(i) \cdot (1 + i) \rightarrow i \cdot i^2$ $\quad w = i - 1$

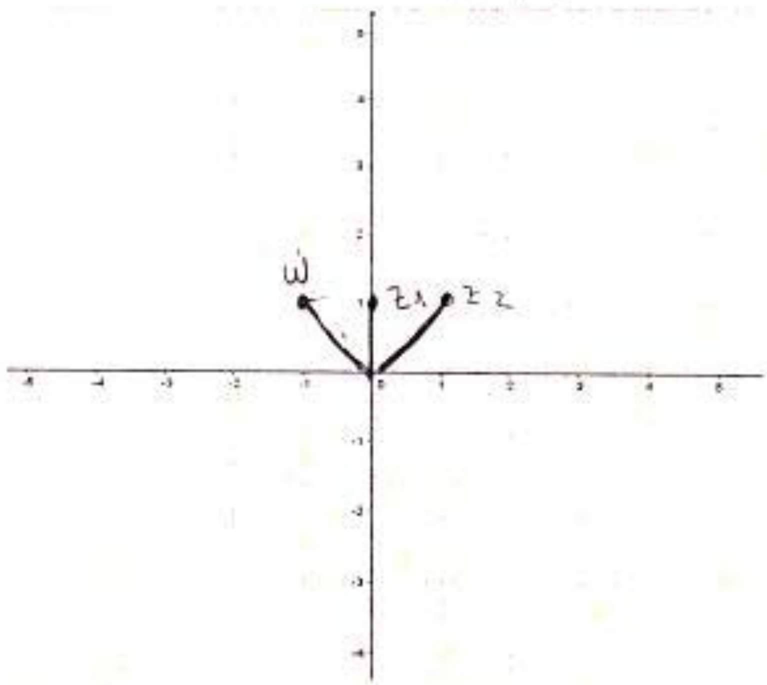
$i \cdot i^2 \rightarrow i \cdot -1$ $\quad -1$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.

$z_1 = (0,1)$

$w = (\quad)$

$z_2 = (1,1)$



c) ¿Qué observas?

$\theta z_1 = 90°$

$\theta z_1 : 45°$

$\theta w = 135°$

Item 1

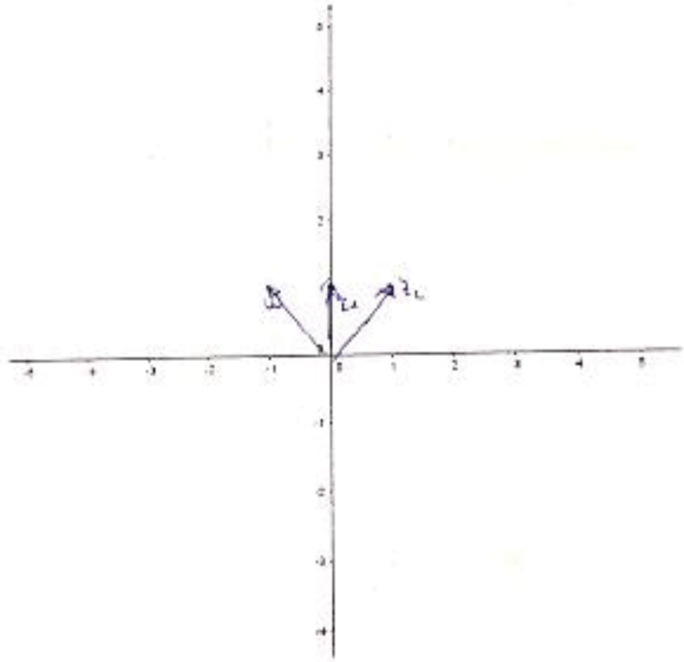
Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i(1+i)$

$i + i^2$ $i - 1$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



$z_1 = 0,1$

$z_2 = 1,1$

$w = -1,1$

c) ¿Qué observas?

Que todos tienen un igual imaginario

los angulos presentados Son

$z_1 = 90$

$z_2 = 45$

$w = 135$

Ítem 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

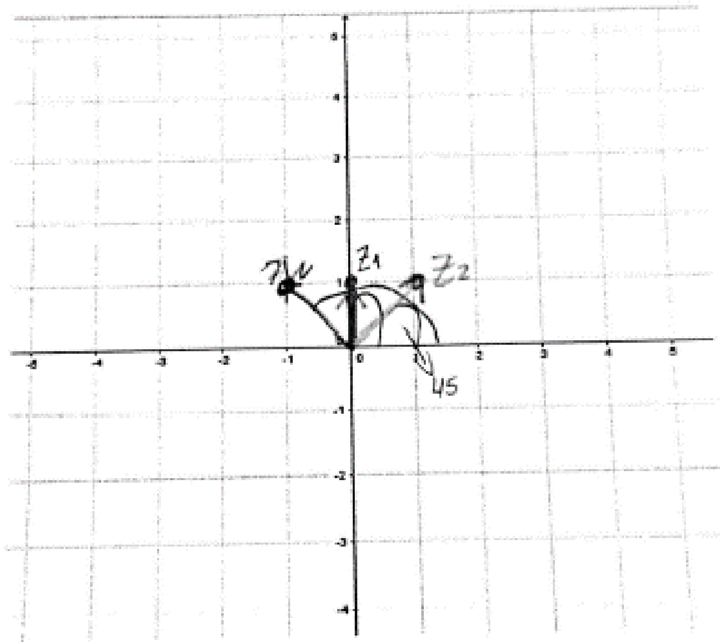
a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = i \cdot (1 + i) = i + i^2 = -1$

$= i - 1$

$\boxed{w = i - 1}$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

— Los vectores estan todos arriba del eje Real

— Van de 45 en 45 se van sumando

Ítem 1

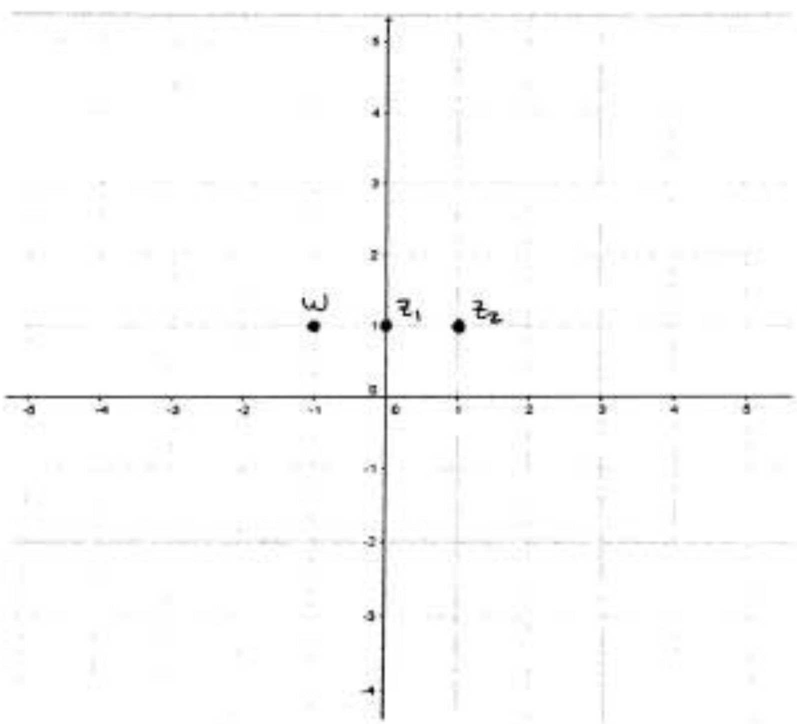
Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1+i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i\,(1+i) = i + i^2 = i - 1$

$w = -1 + i$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

Los 3 puntos son colineales (tienen la misma parte imaginaria)

Item 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $i \cdot (1+i) = i + i^2 = i + (-1) = i - 1$

$w = i - 1$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.

$z_1 = (0,1)$

$z_2 = (1,1)$

$w = (-1,1)$

c) ¿Qué observas?

- todos tienen parte imaginaria

El ángulo de z2 es 45°

z1 es 90° (45°+45°)

w es 135° (90°+45°)

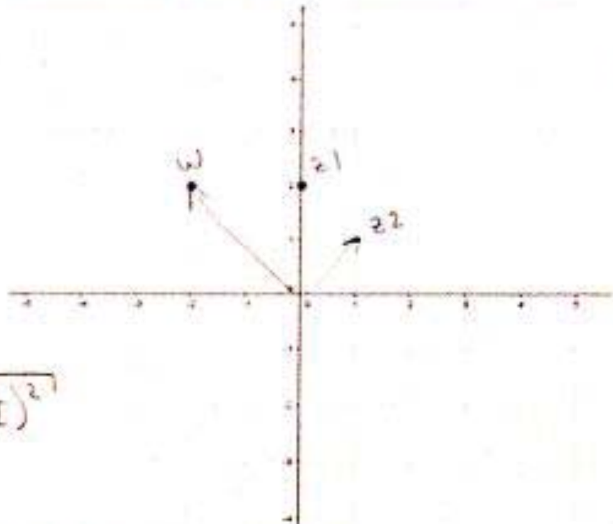
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i + 2\cdot(-1)$

$2i - 2 = -2+2i$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



x y

$z_1 = (0,2)$

$z_2 = (1,1)$

$w = (-2,2)$

$|z| = \sqrt{(R)^2+(I)^2}$

$|z|$

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DE z_1 Y z_2 ES EL ÁNGULO DE W

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2+(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

El RESULTADO DE $|z_1|$ (2) + $|z_2|$ ($\sqrt{2}$) DA EL $|w| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

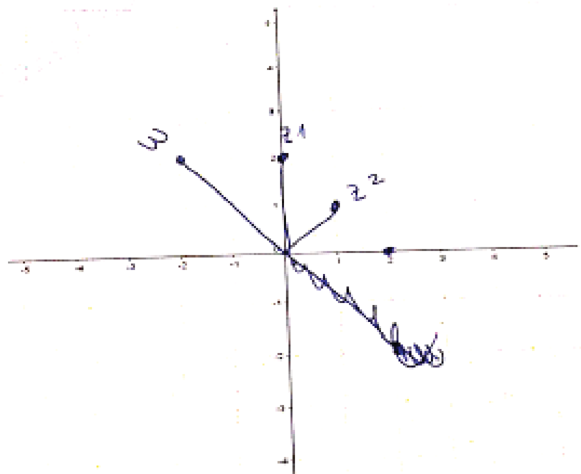
Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = (2i) \cdot (1 + i)$
$2i + 2i^2 \rightarrow 2i + 2 \cdot -1$
$2i - 2$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



~~(2,1)~~
~~(2,1)~~

$z_1 = (0, 2)$
$z_2 = (1, 1)$
$W = (-2, 2)$
$\theta z_1 = 90°$
$\theta z_2 = 45°$
$W = 135°$

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} \rightarrow \sqrt{4} \rightarrow 2$
$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} \rightarrow \sqrt{2}$
$|w| = \sqrt{-2^2 + 2^2} \rightarrow \sqrt{-4 + 4} \rightarrow \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

que al multiplicar $|z1|$ por el $|z2|$ es W

Ítem 2

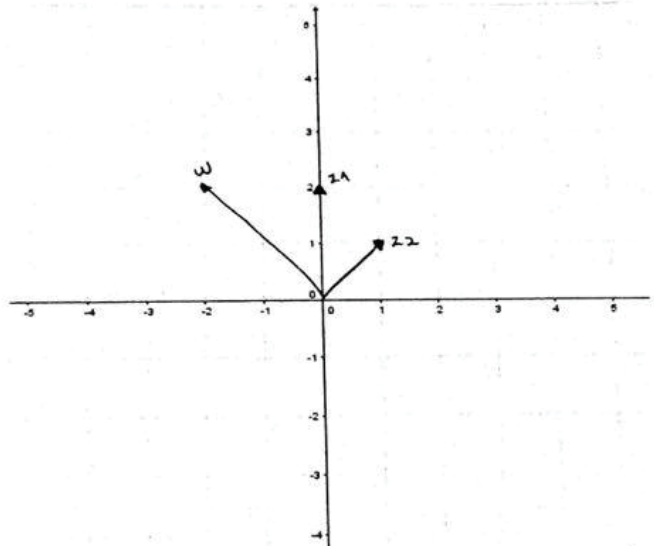
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $2i \cdot (1+i) \rightarrow 2i + 2i^2 = 2i + 2 \cdot -1 = 2i - 2$

$w = -2 + 2i$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



$z_1 = (0, 2)$
$z_2 = (1, 1)$
$w = (-2, 2)$

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

- Que son los mismos que el gráfico anterior → $\theta z_1 = 90°$, $\theta z_2 = 45°$, $\theta w = 135°$
- si se suman los θ de los factores da el Producto

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$
$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

- todos son múltiplos de 2.
- si se multiplica $|z_1|$ y $|z_2|$ da $|w|$

Ítem 2

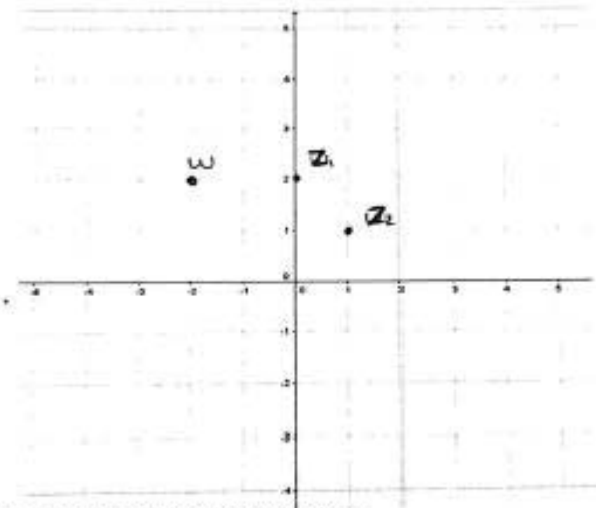
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = 2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2$

$w = -2 + 2i$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

El ángulo de la multiplicación es la suma del ángulo de los factores

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0+2^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

Al aumentar el módulo del complejo z_1, aumentó el módulo de w (el producto)

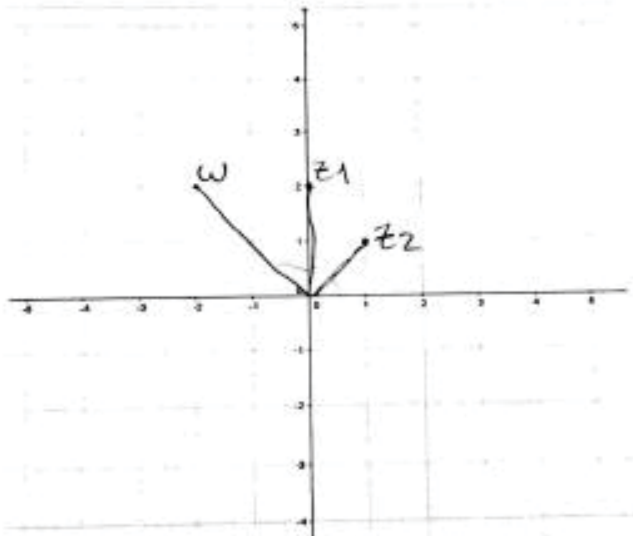
Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2$
$= 2i + 2 \cdot -1 = 2i - 2 = w$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

El angulo w es la suma de los de z_1 y z_2

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$
$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
$|w| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

El modulo de w es el doble porque z_1 es el doble

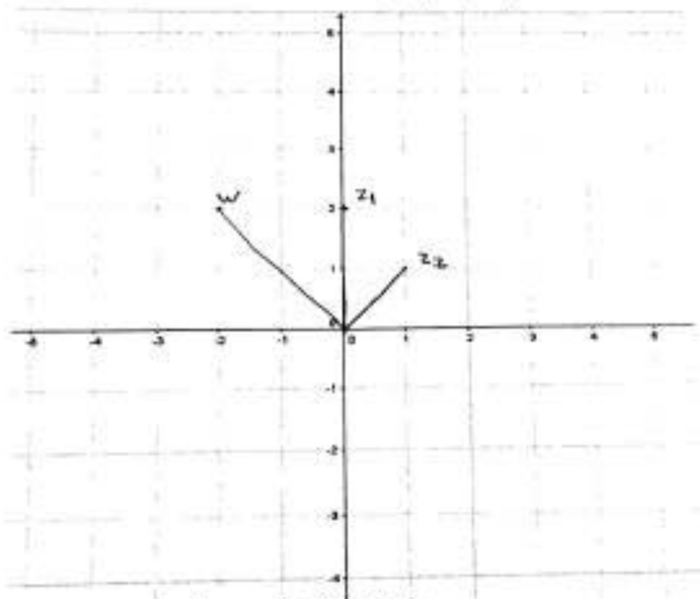
Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $2i + 2i^2 = 2i + 2 \cdot -1 = 2i - 2 = w$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

parece que el angulo de w es la suma de los angulos de z1 y z2

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0+4} = \sqrt{4}$

$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

son mas grandes

Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 = 2i + 2 \cdot -1 = 2i + -2$
$= -2 + 2i = w$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

El $w = 135$ es la suma de $90 + 45$
$\theta_w = \theta_{z_1} + \theta_{z_2}$

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{2^2} = \sqrt{4}$ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$
$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ se multiplican
$|w| = \sqrt{-2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

Es lo mismo pero por 2

Ítem 2

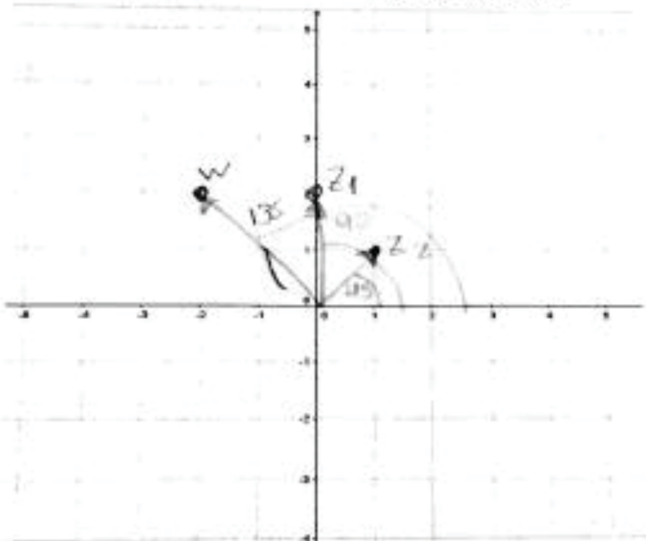
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = 2i \cdot (1+i) = 2i + 2i^2 \quad i^2 = -1$

$= 2i + -2 = -2 + 2i = w$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

Se van sumando de 45 en 45 porque ... 135 = 45 + 90 es la suma de los otros

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{-2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

Se multiplican $\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$

en el primero es lo mismo pero este es por 2

Porque es $2i$ y el primero es i sin 2

Ítem 2

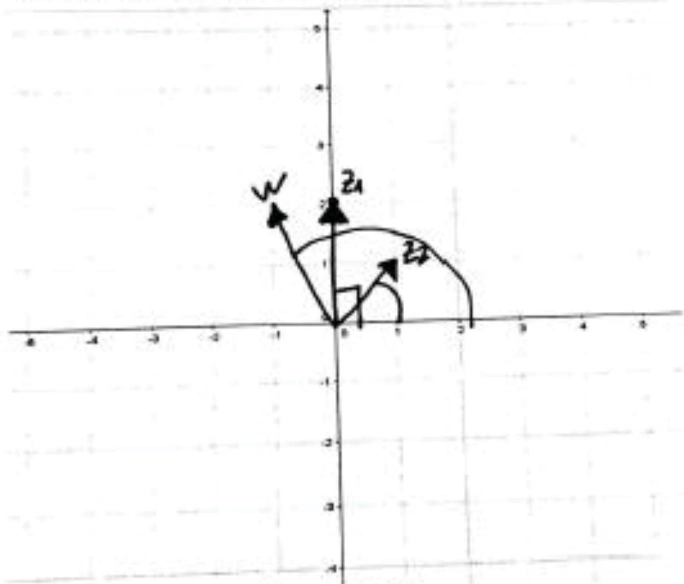
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$ $\left.\begin{array}{l} z_1 = \overset{R}{0} + \overset{I}{2i} \\ z_2 = 1 + i \end{array}\right\} 2i \cdot (1+i) = 2i + i^2$

$2i - 1 = w = \overset{R}{-1} + \overset{I}{2i}$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



$z_1 = 0 + 2i = (0, 2)$
$z_2 = 1 + i = (1, 1)$
$w = -1 + 2i = (-1, 2)$

c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

$z_1 = 90°$ $z_2 = 45°$ ~~z_3~~ $w =$

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0+4} = \sqrt{4}$
$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Son toda raices
$|w| = \sqrt{1+4} = \sqrt{3}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

Son Iguales

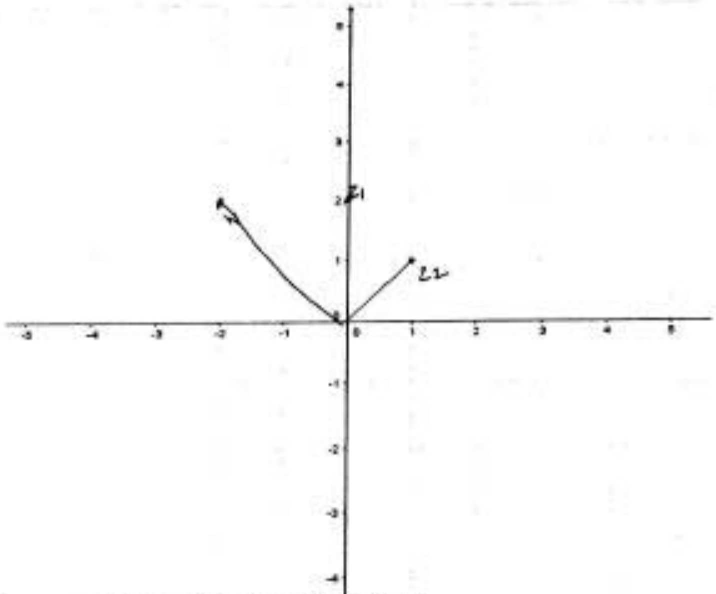
Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 = (2i)(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i + 1$

$\rightarrow 2i - 2$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

$\theta z_1 = 90°$ $\theta = 135°$

$\theta z_2 = 45°$

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$|z_1| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{-2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 4$

$\sqrt{R^2 + i^2}$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

La suma de Z1 y Z2 es W

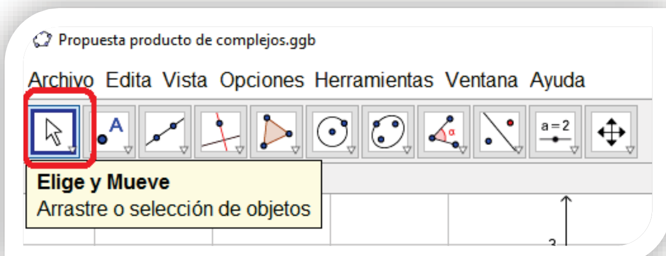
Anexo 2: Guía de trabajo de la clase 1

Guía de trabajo

Objetivo: Relacionar elementos geométricos presentes en la multiplicación de números complejos en el plano.

Actividades:

1. Selecciona la flecha que se encuentra en la esquina superior izquierda del procesador:



Con esta herramienta **selecciona el punto A o B** para ir cambiando los complejos que serán los factores del producto C.

Luego, completa la siguiente tabla con la información pedida:

	Complejo de la forma a+bi	**Módulo**	**Argumento**
Complejo A	$1+i$		
Complejo B	$0+i$		
Complejo C			

Complejo A	$1+i$		
Complejo B	$-1+i$		

Complejo C			
Complejo A	$1+i$		
Complejo B	$1-i$		
Complejo C			

Complejo A	$0+i$		
Complejo B	$1+0i$		
Complejo C			

Complejo A	$-1+0i$		
Complejo B	$0+i$		
Complejo C			

Complejo A	$0-i$		
Complejo B	$0+0i$		
Complejo C			

Complejo A	$2+0i$		
Complejo B	$3+0i$		
Complejo C			

Complejo A	$-3+0i$		
Complejo B	$2+0i$		

Complejo C			

Complejo A	$0 + i$		
Complejo B	$0 + 2i$		
Complejo C			

Complejo A	$0 + 3i$		
Complejo B	$0 - 2i$		
Complejo C			

Complejo A			
Complejo B			
Complejo C	$-3 - i$		

2. ¿Encontraste alguna relación entre los elementos algebraicos o geométricos de los factores con respecto a su producto? Nombre mínimo 3 relaciones que puedas concluir con tu pareja.

Anexo 3: Guía de trabajo de la clase 2

Taller de Matemática

Multiplicación de Números Complejos

Nombre:____**Curso:** ______

Objetivo: Analizar la multiplicación de complejos en el plano de Árgand

Materiales: Calculadora, regla, lápiz y goma

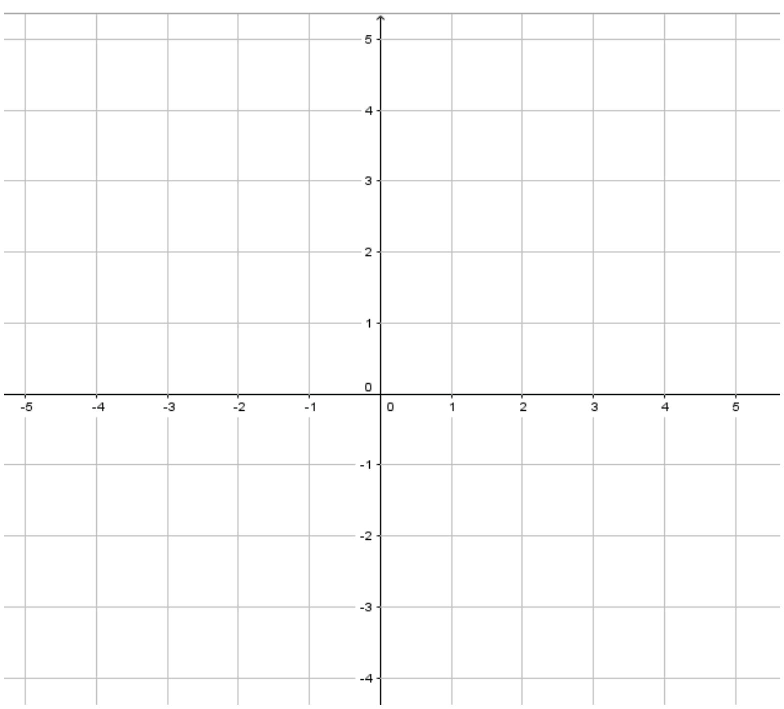
Ítem 1

Dados $z_1 = i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada número complejo y su producto.



c) ¿Qué observas?

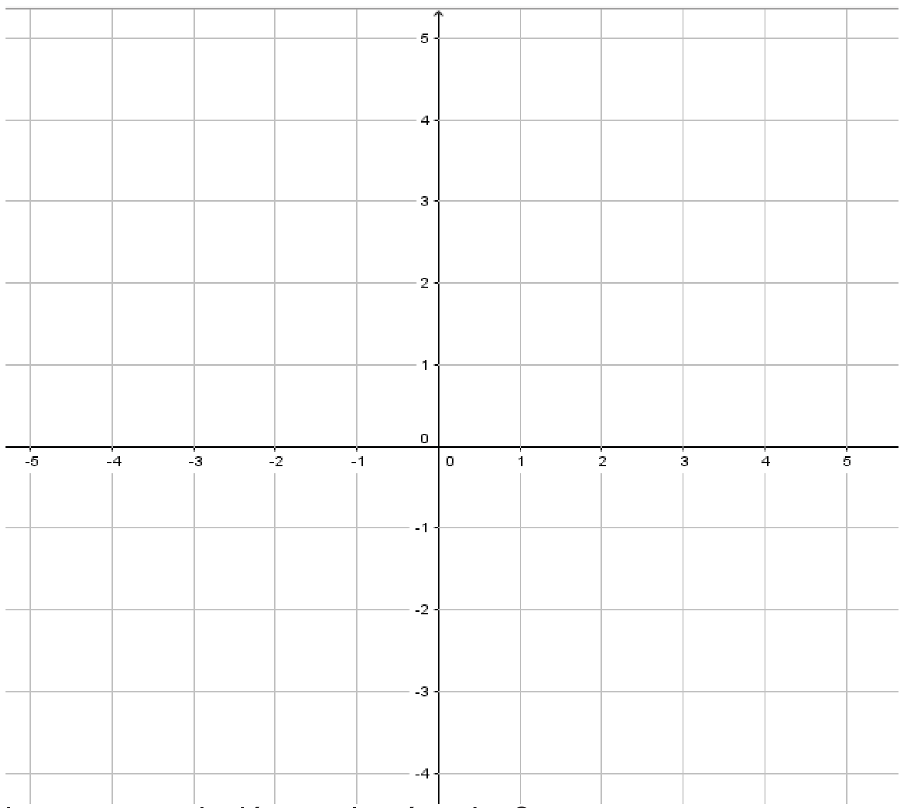
Ítem 2

Dados: $z_1 = 2i$ y $z_2 = 1 + i$

a) Multiplica de manera algebraica los complejos y a este producto llámalo w

$z_1 \cdot z_2 =$

b) Representa en el plano cada números complejos y su producto



c) ¿Qué observas en relación con los ángulos?

d) Determina sus módulos ¿hay alguna relación que observes entre los módulos?

$\lvert z_3 \rvert =$
$\lvert z_4 \rvert =$
$\lvert w \rvert =$

e) ¿observar alguna relación entre los módulos de los complejos de este ítem con los del ítem anterior?

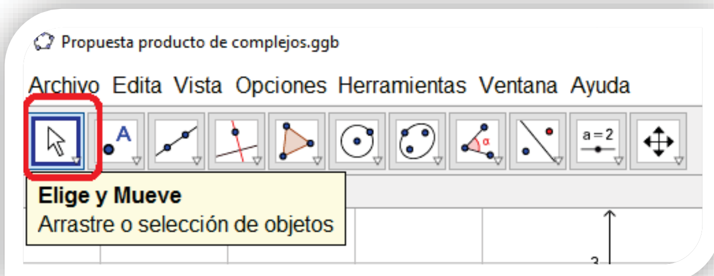
Anexo 4: Guía de trabajo de la clase 3

Guía de trabajo clase 3

Objetivo: Identificar los elementos geométricos involucrados en la multiplicación de complejos

Actividades:

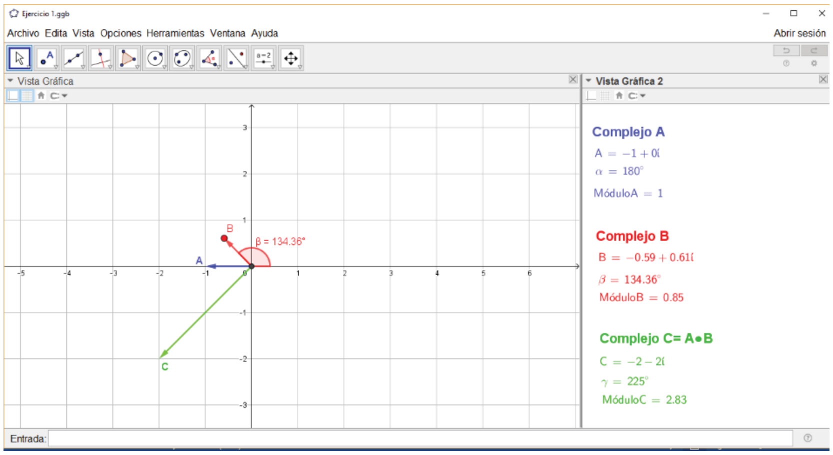
Ingresa a la carpeta “clase 3” que se encuentra en el escritorio del computador para disponer de los ejercicios en los cuales selecciona la flecha que se encuentra en la esquina superior izquierda del procesador:



Con esta herramienta **selecciona B** para ir cambiando el valor del complejo B para desarrollar los ejercicios.

Ejercicio 1:

Abre el archivo “ejercicio 1” en donde encontrarás 3 números complejos y sus representaciones: A, B y C, donde A y B corresponden a los factores y C al producto:



Descubrirás que el único complejo que puedes manipular es B, el cual tendrá que cumplir con ciertas características para ser uno de los factores que compongan al producto C, para esto completa la siguiente tabla:

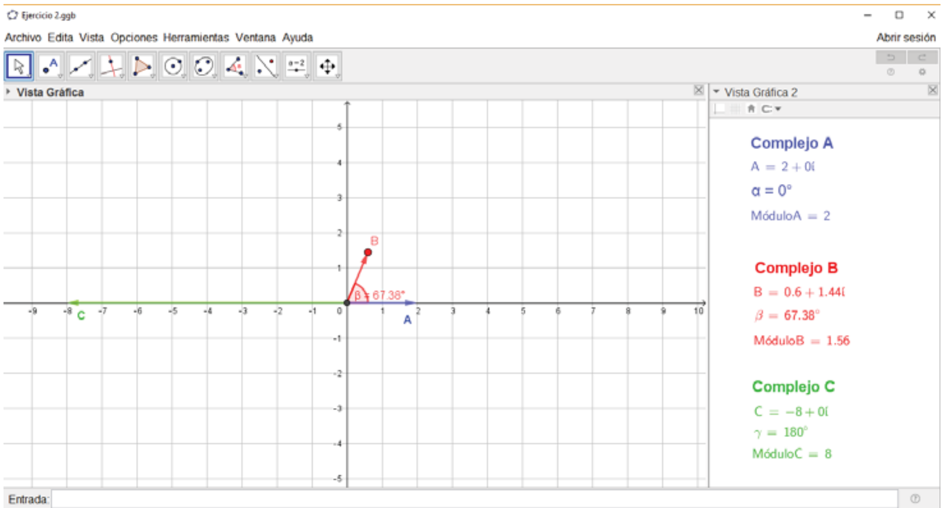
	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A			
Complejo B			
Complejo C			

Con los datos obtenidos, responde:

¿Qué característica geométrica cumple B con respecto al producto C?

Ejercicio 2:

Abre el archivo “ejercicio 2” en donde encontrarás 3 números complejos y sus representaciones: A, B y C, donde A y B corresponden a los factores y C al producto:



Descubrirás que el único complejo que puedes manipular es B, el cual tendrá que cumplir con ciertas características para ser uno de los factores que compongan al producto C, para esto completa la siguiente tabla:

	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A			
Complejo B			
Complejo C			

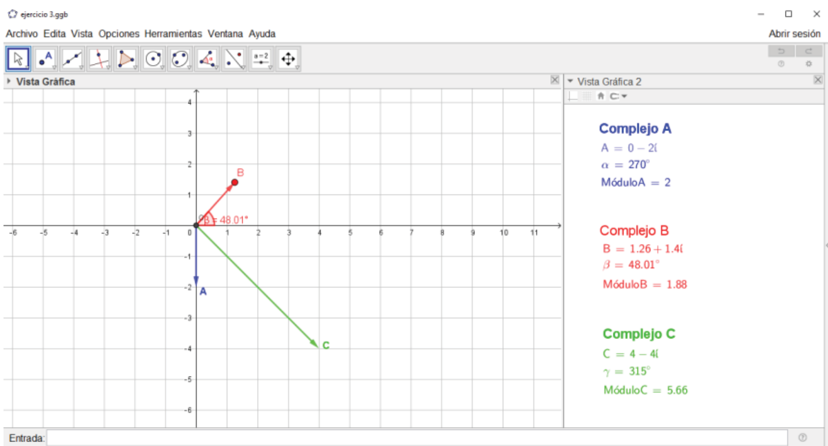
Con los datos obtenidos, responde:

¿Qué característica tienen los ángulos de B y C? Justifica

¿Qué característica tienen los sentidos de los vectores B y C?

Ejercicio 3:

Abre el archivo “ejercicio 3” en donde encontrarás 3 números complejos y sus representaciones: A, B y C, donde A y B corresponden a los factores y C al producto:



Descubrirás que el único complejo que puedes manipular es B, el cual tendrá que cumplir con ciertas características para ser uno de los factores que compongan al producto C, para esto completa la siguiente tabla:

	Forma: $a + bi$	Ángulo	Módulo
Complejo A			
Complejo B			
Complejo C			

Con los datos obtenidos, responde:

¿Cómo calculaste B?

¿Qué características debe cumplir B para ser un factor del producto C?