

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Facultad de Ciencias  
Instituto de Matemáticas



**Medidas de posición y gráfico de caja y bigote:  
una propuesta didáctica**

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA**

De: Ximena Videla Cabello.

Profesor Guía: Romina Menares Espinoza

2017

Resumen .....	3
Introducción .....	4
Problemática .....	6
Objetivo General.....	8
Objetivos específicos .....	8
Antecedentes .....	8
Objeto matemático .....	12
Definición experta .....	12
Definición escolar.....	14
Mapa conceptual.....	16
Barrido curricular .....	17
Análisis de textos.....	19
Análisis histórico epistemológico .....	20
Marco teórico .....	23
Diseño de la investigación .....	27
Clase de estudio .....	29
Descripción de la actividad .....	29
Respuesta experta .....	30
Matemática involucrada .....	31
Posibles estrategias.....	31
Dificultades, errores y devoluciones .....	32
Análisis .....	33
Resultados.....	37
Actividad clase 1 .....	40
Descripción de la actividad .....	41
Respuesta experta .....	42
Matemática involucrada .....	42
Posibles estrategias.....	42
Dificultades errores y devoluciones .....	43
Actividad clase 3 .....	44
Descripción de la actividad .....	45

Respuesta experta .....	45
Matemática involucrada .....	46
Posibles estrategias.....	46
Dificultades, errores y devoluciones .....	46
Discusión.....	47
Conclusión .....	48
Referencias.....	49
Anexos.....	53

## **Resumen**

En este trabajo se presenta una secuencia de tres clases sobre las medidas de posición y el uso del gráfico de caja y bigote como herramienta de trabajo. Se analiza una de las clases bajo el enfoque teórico del espacio de trabajo matemático (ETM), dando cuenta con ello del discurso generado por los estudiantes.

Los principales resultados dan cuenta de que la secuencia didáctica diseñada permite a los estudiantes generar un discurso de validación sobre la concentración y dispersión de los cuartiles en el gráfico de caja y bigote.

El uso de la herramienta de trabajo en situaciones no rutinarias permite que la secuencia diseñada se posicione como una propuesta innovadora para el trabajo de los docentes y estudiantes al momento de enfrentarse al estudio de las medidas de posición y el gráfico de caja y bigote.

**Palabras clave:** Medidas de posición, gráfico de caja y bigote, concentración, variabilidad y dispersión.

## **Introducción**

En la actualidad los medios de comunicación masivo utilizan gráficos para informar a los ciudadanos, lo cual requiere de una población con formación y cultura estadística; la interpretación y construcción de gráficos estadísticos forma parte de esta cultura (Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras, 2009).

En Chile la formación estadística de los ciudadanos se aborda desde los primeros niveles escolares en el currículum de matemáticas, en el eje temático de datos y azar. Las bases curriculares de la enseñanza básica declaran que la formación estadística responde a la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos, también se espera formar alumnos críticos que utilicen la información de gráficos discriminando la veracidad de estos (Mineduc, 2013).

Para Pino y Estrella (2012), la estadística es una disciplina metodológica que pone a disposición de otras disciplinas un conjunto adecuado de ideas y herramientas, la cual se podría ver como una aplicación científica de principios matemáticos en contextos de incerteza, variabilidad, recolección y análisis de datos, lo que justificaría en parte la inserción de la estadística en el currículum matemático escolar.

Una persona es alfabetizada estadísticamente si es capaz de leer e interpretar datos, analizar y evaluar sobre las afirmaciones, encuestas y estudios estadísticos presentes en medios de comunicación, leer e interpretar tablas, gráficos, medidas de resumen, comunicar y evaluar información estadística. (Pino, Estrella, 2012).

La estadística es considerada multidisciplinar debido a la necesidad del desarrollo de la capacidad de análisis, interpretación, lectura de datos, lectura entre los datos y argumentación de la información obtenida de cualquier estudio estadístico, sumado a eso el hecho de que otras disciplinas de alguna u otra manera se valen de la estadística para comunicar los resultados de sus investigaciones.

Los gráficos estadísticos pueden ser utilizados para fomentar en los estudiantes la capacidad de realizar análisis e inferencias respecto a la concentración, dispersión y variabilidad de un conjunto de datos, el gráfico de caja y bigote y las medidas de posición que en él se utilizan, pueden ser útiles al momento de realizar esta actividad con los estudiantes. El uso de material concreto para llevar a cabo este objetivo se presenta en este estudio como una herramienta útil al momento de introducir este contenido abstracto en la enseñanza general básica, específicamente en octavo básico.

En este contexto, esta investigación expone la problemática que se suscita con las medidas de posición y su interpretación en el gráfico de caja y bigote

en los estudiantes de octavo año básico cuando se enfrentan al estudio de estas medidas con el gráfico.

Se exponen antecedentes relativos a las dificultades y errores que presenta el uso de las gráficas y las medidas de posición en la escuela, así como también antecedentes respecto al tratamiento que se da del tema en los textos escolares vigentes, un barrido curricular que permite posicionar el gráfico de caja y bigote en el transcurso escolar, la definición experta de las medidas de posición y el gráfico de caja y bigote, una aproximación histórico epistemológico de la estadística.

Al finalizar la etapa de planificación y ejecución del ciclo de clases que contempla el estudio de clases, se realizó un estudio con base en el modelo teórico Espacio de Trabajo Matemático, puesto que es quien nos permite dar otra mirada respecto al uso de material concreto para contribuir al aprendizaje de los estudiantes. Con base en ETM se definieron categorías a priori, las que nos permitieron analizar el discurso de los estudiantes en dos momentos claves de su trabajo con el material concreto. El primero de ellos al momento de iniciar la situación problemática planteada y el segundo después de la manipulación del material concreto y la discusión grupal.

## **Problemática**

Los estudiantes chilenos de octavo año básico son evaluados con pruebas internacionales, estas evaluaciones permiten observar los resultados de Chile en comparación a otros países en iguales condiciones socioeconómicas, y de la misma región. Proporcionan información de países cuyos sistemas educativos han tenido éxito, sirviendo de referentes para el sistema educativo chileno, y finalmente sirven de monitoreo externo de nuestro propio sistema educativo.

Una de estas pruebas es la Timms, la cual es aplicada cada cuatro años a estudiantes de octavo y cuarto año básico, la prueba busca entregar información acerca de los logros de aprendizaje en matemática y los contextos en que los estudiantes aprenden. Sus resultados se entregan en una escala de puntajes de 0 a 1000 puntos con centro en 500 y desviación estándar de 100 puntos, además de establecer niveles de desempeño los cuales describen el logro asociado a cada puntaje; Avanzado sobre 650 puntos, Alto sobre 550 puntos, Intermedio sobre 475 puntos y bajo sobre 400 puntos.

El ente encargado de la evaluación es La Agencia de Calidad de la Educación un servicio público descentralizado cuyo objetivo es evaluar y orientar el sistema educativo para contribuir al mejoramiento de la calidad de oportunidades educativas. La agencia entiende la evaluación como un medio para mejorar los aprendizajes a través del uso pedagógico de sus resultados, y para orientar la toma de decisiones en la política pública.

Los estudiantes de octavo básico de Chile han rendido la prueba en cuatro oportunidades (1999, 2003, 2011 y 2015) y desde la primera evaluación en donde el resultado fue de 392 puntos, a la del 2015 cuyo resultado fue de 427 puntos, lo que representa una mejora significativa en matemáticas. Aunque los estudiantes chilenos todavía se encuentran en un nivel de desempeño bajo, dependiendo el nivel entre un 15% y un 37% no alcanza el mínimo de 400 puntos para ser considerado en un nivel de desempeño básico, lo que quiere decir que uno de cada tres estudiantes no alcanza los 400 puntos.

El estudio muestra los avances que han tenido los estudiantes en cuatro ejes temáticos; números, álgebra, geometría y datos y azar, para este último eje el año 2011 los estudiantes alcanzaron un promedio de 426 puntos y el 2015 en promedio lograron 429 puntos lo que no representa una diferencia significativa. El desempeño de los estudiantes de octavo en datos y azar se encuentra en un nivel de desempeño bajo.

En el currículum chileno de octavo año básico para el eje de datos y azar, en la unidad de estadística los estudiantes trabajan con las medidas de posición (cuartiles, mediana, rango), con las cuales deben interpretar,

concluir y realizar inferencias sobre la concentración, variabilidad y simetría de un conjunto de datos, representados en un gráfico de caja y bigote o boxplot, (Mineduc, 2016).

Según Gal (2002) las competencias necesarias para la interpretación y construcción de gráficos estadísticos son:

Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p.2).

Leer un gráfico requiere que cada estudiante sea capaz de traducir lo que se representa en él y relacionarlo con la realidad, para lo cual se necesita de conocimientos sobre lo que todo gráfico estadístico debe contener. Curcio (1987; 1989) agrupa estos conocimientos en tres áreas:

- Las palabras del gráfico; el título, las etiquetas de los ejes, las escalas, que permiten comprender las relaciones que se representan en todo gráfico.
- El contenido; los conjuntos numéricos, y los elementos matemáticos presentes en todo gráfico.
- Los convenios específicos utilizados en los distintos tipos de gráficos, los cuales son necesarios para leer y construir correctamente un gráfico.

Batanero (2001) afirma que el uso de diagramas de tallo y hoja o gráficos de caja surgen como una herramienta de mucha utilidad en el análisis exploratorio de datos y mas aun en los estudios comparativos.

El uso de estos cinco estadísticos por si solos pueden no presentar dificultades, pero en su conjunto generan mas de un error en el trabajo de los estudiantes, tal es el caso de las medidas de orden las cuales según Batanero (2001), presentan dificultades tanto a nivel procedimental como conceptual, para la autora la forma de enseñar el cálculo de los cuantiles ya implica una dificultad al tener que utilizar distintos algoritmos en caso de que los datos estén agrupados o no.

Algunos investigadores afirman que "La riqueza del gráfico de caja y bigote está en que vincula los conceptos de mediana, cuantiles, valor mínimo y máximo permitiendo comparar, por yuxtaposición, una secuencia de varias cajas para una variable que discrimine entre ellas" (Espinel, González, Bruno y Pinto, 2009, p 139).

## **Objetivo General**

Proponer una secuencia didáctica para el estudio e interpretación de las medidas de posición, mediante el uso de material concreto con el diagrama de caja y bigote.

## **Objetivos específicos**

Diseñar una secuencia didáctica de tres clases para trabajar la interpretación presentada en el gráfico de caja y bigote.

Diseñar material concreto para trabajar la interpretación presentada en el gráfico de caja y bigote.

Implementar una situación didáctica con el uso de material concreto en la interpretación de la información presentada en el gráfico de caja y bigote.

Analizar una situación didáctica aplicada con el uso de material concreto en el gráfico de caja y bigote.

## **Antecedentes**

En relación con el gráfico de caja y bigote diversas investigaciones dan cuenta de su uso y las ventajas que este presenta en la enseñanza de la estadística y la comprensión de las medidas de posición, variabilidad y concentración de datos en una muestra, así como la utilidad del mismo en la comparación de dos o más grupos de datos. Otros estudios discuten sobre las ventajas y desventajas de posicionar el estudio del gráfico a los 15 años.

Conde, Rull y Vegas (1986) mostraron el avance en la matematización de la biología y como los estudios que se publicaban en esta materia incluían algún análisis matemático o estadístico, los investigadores creían que las gráficas jugaban un papel preponderante y que no solo era importante buscar patrones a partir de los datos, sino que también lo era que la información fuera traspasada al lector de manera más eficiente.

Ellos concluyeron que en la enseñanza del análisis exploratorio de datos el gráfico de caja permite al estudiante resolver sus problemas de datos y le ayudan en la comprensión de aspectos teóricos relacionados con las formas de las distribuciones, percentiles e intervalos de confianza (Ibíd).

Minnaard, Rabino, García, Moro y Minnaard plantearon el objetivo de "analizar si existe una forma de secuenciar el aprendizaje de los distintos tipos de gráficas; describir cuáles son los más adecuados de acuerdo a la edad de los educando y sugerir el tipo de preguntas que se debe formular para una mejor comprensión de las gráficas." (Ibid). Las autoras secuencian

la introducción de los gráficos a partir de la complejidad de los datos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, partiendo en el primer ciclo con los gráficos de barra, en el segundo ciclo se introduce el gráfico circular y en el tercer ciclo el de tallo y hojas y caja y bigote.

En específico respecto al gráfico de caja y bigote los autores lo presentan como muy útil en el análisis de datos y para hacer comparaciones. Aportan algunas sugerencias didácticas para trabajar con el gráfico comenzando con preguntas que llevan a los estudiantes a ordenar datos, calcular cuartiles, dibujar el gráfico y leer información presente en un gráfico.

Concluyen que utilizar gráficas ayuda a los estudiantes en el aprendizaje de contenidos conceptuales y procesos que les permiten acercarse a la cultura, la finalidad de estas es aclarar o facilitar la comprensión del texto que lo acompaña, teniendo en cuenta de que las gráficas no son elementos decorativos.

Minnaard, Condesse, Minnaard y Rabino (2005) realizaron un estudio cuyo objetivo era mostrar la construcción e interpretación de los gráficos de caja, además de mostrar las propuestas didácticas presentadas en la clase.

En el estudio los autores proponen preguntas que se pueden realizar una vez construida la caja, luego presentan dos actividades, las cuales desarrollan para finalmente concluir. Respecto a los gráficos de caja llegan a la conclusión de que los conceptos de mediana, cuartiles, valor mínimo y máximo pueden ser manejados individualmente por los estudiantes, pero no en forma global.

Bakker, Biehler, & Konold, C. (2004) exploran los desafíos de aprender acerca de las gráficas de caja y bigote en la escuela a los 14 años. Para ellos los diagramas de caja son herramientas muy valiosas para el análisis de datos y para los que saben cómo interpretarlas. "La investigación ha demostrado, sin embargo, que algunas de sus características los hacen particularmente difícil para los jóvenes estudiantes a utilizar en contextos auténticos". (Ibid).

Estas dificultades son:

- a) Los diagramas de caja por lo general no permiten percibir los casos individuales.
- b) Los diagramas de caja funcionan de manera diferente que otros gráficos que los estudiantes han estudiado.
- c) La mediana no es tan intuitiva para los estudiantes como se cree.
- d) Los cuartiles dividen los datos en grupos de maneras que pocos estudiantes (o incluso profesores) realmente entienden.

El uso de gráficos en la enseñanza escolar está presente desde los primeros niveles, lo que nos llevaría a suponer que no se presentan dificultades en su enseñanza y aprendizaje, pero la literatura muestra que su estudio presenta dificultades y errores que los docentes deberían tener presentes al momento de abordar el tema. Según Batanero (2001) los profesores suponen que para los estudiantes construir gráficos y tablas es relativamente sencillo, por lo que dedican poco tiempo a su enseñanza, pero conceptos como población o muestra ya son complejos según la autora.

Para los estudiantes comprender propiedades referentes a características de personas individuales, color de ojos, deporte favorito, peso o altura, es menos complejo que la idea de distribuciones de altura de un grupo de personas (Batanero, 2001).

Un gráfico, su construcción e interpretación también pueden presentar dificultades para los estudiantes, según Monroy (2008), citado en Medina (2011), algunas de las principales dificultades en la comprensión de gráficos son:

- Confunden los ejes.
- No identifican las unidades de medida de cada eje.
- No relacionan los ejes.
- No realizan predicciones e inferencias a partir de los datos.
- Gran parte de los estudiantes se quedan en la lectura de datos, en vez de leer entre datos realizando inferencias y predicciones a partir de los datos.

Para Batanero (2001) los gráficos estadísticos son sofisticados y el manejo de estos no debe suponer un simple cambio de representación de un concepto a otro, lo cual podría significar una dificultad al momento de que un estudiante se enfrente a ellos. Batanero afirma que cada gráfico representa una serie de conceptos que varían según el tipo de gráfico a utilizar, como lo es el caso del de caja y bigote en el que se representan los valores atípicos, mediana y cuartiles.

Batanero (2001) declara que "Los gráficos estadísticos presentan convenios de construcción que el alumno debe reconocer y recordar". (p.152). Según la autora para los estudiantes es fácil cometer errores al momento de producir un gráfico o interpretarlo, distorsionando de esta manera la información del mismo. Un elemento para tener en cuenta son los distintos tipos de frecuencia que pueden aparecer en un gráfico.

Otra de las dificultades que presentan los estudiantes es la correcta elección del gráfico, el cual debe estar relacionado con el tipo de variable involucrada en el problema. Li y Shen (1992) realizaron un análisis de los gráficos en los proyectos estadísticos, encontrándose con estudiantes que utilizan un

polígono de frecuencias con variables cualitativas, los mismos autores encontraron problemas en las escalas de los gráficos construidos por los estudiantes, ya sea por la mala elección de esta o por la omisión de alguna de ellas, entre otras.

Según Lee y Meletiou (2003) existen dificultades con el histograma puesto que los estudiantes perciben los rectángulos como representaciones de datos aislados y no como intervalos. Bakker, Biehler y Konold (2004) indican que el gráfico de caja y bigote al ser un gráfico muy diferente al usado comúnmente por los estudiantes, basado en cuartiles y mediana, no permite que se perciban los valores individuales de los datos.

Los gráficos de caja son representaciones muy distintas de otros gráficos, la interpretación de ellos puede llevar a los estudiantes a pensar que mientras mas grande sea la caja esta contendría un porcentaje mayor de datos (Espinel, et al. 2009).

Para Pfannkuch (como se citó en Espinel, et al. 2009) las dificultades que presenta el gráfico de caja en los estudiantes y lo observado en docentes le han llevado a sugerir el retraso en el ingreso al currículum, utilizándolo en el inicio de la inferencia estadística.

Friel, Curcio y brillante (2001) afirman que la enseñanza de la estadística se centra en la construcción de gráficos, pero los estudiantes no entienden el por qué la construcción de estos, consideran que es necesario investigar sobre las dificultades que representa la comparación y el razonamiento de datos y lo difícil que es esta tarea para los estudiantes. Este razonamiento es complejo y podría depender de la capacidad de decodificar las representaciones, considerando la multiplicidad de elementos representados en y entre los gráficos de caja.

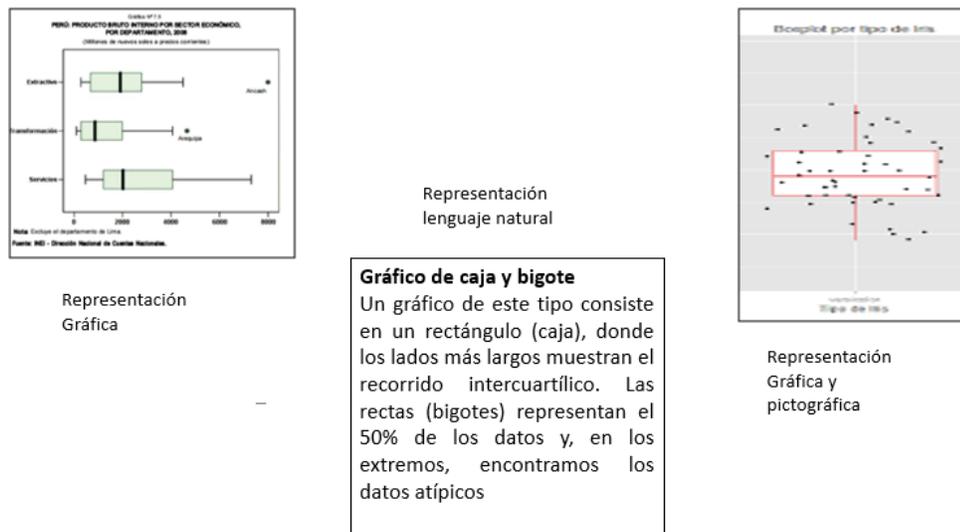
El gráfico de caja y bigote proporciona el rango intercuartílico (RIC), que es una medida del grado de difusión de los datos. Pfannkuch (2006) afirma que como estos gráficos representan de manera pictórica la dispersión y el centro, son una manera poderosa de comparar rápidamente varios grupos de datos a la vez. Sin embargo, como Konold y Higgins (2003) sugieren que muchos estudiantes tienden a ver la mediana o la media como una característica de un individuo en el centro de un grupo, más que como una caracterización de todo el grupo.

Los cuartiles presentan complicaciones particulares, por un lado, existen distintas maneras de calcularlos, y por otro está el hecho de que no todos los números enteros se pueden dividir en 4 y qué sucede en el caso de que dos cuartiles tienen el mismo valor.

## Objeto matemático

El objeto matemático de la investigación es el gráfico de caja y bigote, el que se puede encontrar como representación en lenguaje natural, representación gráfica y representación gráfica y pictórica, tal y como lo ilustra la figura 1.

Figura 1. Representaciones del gráfico de caja y bigote.



## Definición experta

Según Canavos (1998) el saber erudito de las medidas de posición queda definido como sigue:

Para cualquier variable aleatoria  $X$ , el valor cuantil,  $x_q$  de orden  $q$ ,  $0 < q < 1$ , es el valor de  $X$  tal que:  $P(X < x_q) \leq q$  y  $P(X \leq x_q) \geq q$  si  $X$  es discreta, o  $P(X \leq x_q) = q$  si  $X$  es continua.

Los cuantiles usados comúnmente son los percentiles, deciles y cuartiles. Los percentiles son los puntos que dividen a la distribución de probabilidad en 100 intervalos, cada uno con probabilidad 0.01; los deciles y cuartiles son los puntos que dividen a la distribución de probabilidad en 10 y cuatro intervalos, cada uno con probabilidad de 0.1 y 0.25, respectivamente, nótese que la mediana es también el cincuentavo percentil, el quinto decil y el segundo cuartil. (Ibíd, 1988, p. 77).

El recorrido R de las observaciones en un conjunto de datos es la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño del conjunto. (Ibíd, 1998, p.20).

La mediana de un conjunto de observaciones es el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de éstas es menor que este valor y la otra mitad mayor.

Si el número de observaciones del conjunto es impar, la mediana es el valor de la observación que se encuentra a la mitad del conjunto ordenado. Si el número es par se considera la mediana como el promedio aritmético de los valores de las dos observaciones que se encuentren a la mitad del conjunto ordenado. Alternativamente, la mediana puede determinarse a partir de la distribución acumulativa, es decir, la mediana es el percentil cincuenta. (Canavos, 1998 p.12).

Los gráficos de caja visualizan las medias y medianas, cuartiles, recorrido intercuartílico y, en caso de haberlos, los valores atípicos. (Batanero, 2001, p.167).

Un gráfico de este tipo consiste en un rectángulo (caja), donde los lados más largos muestran el recorrido intercuartílico (RIC). Este rectángulo está dividido por un segmento vertical que indica donde se posiciona la mediana y por lo tanto su relación con los cuartiles primero y tercero (recordemos que el segundo cuartil coincide con la mediana). (Minnaard, Condesse, Minnaard, Rabino, 2005)

Por otra parte, este tipo de gráfico nos proporciona información con respecto a la simetría o asimetría de la distribución. Se utilizan los siguientes criterios: si la mediana está en el centro de la caja o cerca de él, constituye un indicio de simetría de los datos, si la mediana está considerablemente más cerca del primer cuartil indica que los datos son positivamente asimétricos y si está más cerca del tercer cuartil, señala que los datos son negativamente asimétricos. Asimismo, la longitud relativa de los bigotes se puede emplear como un indicio de su asimetría. (Minnaard, et al., 2005).

## Definición escolar

Los textos de estudio de octavo año básico que entrega el ministerio de educación de Chile introducen las medidas de posición en la unidad 4 estadística y probabilidad las cuales son definidas de la siguiente manera:

El percentil es una medida de posición que asume 99 valores que dividen en 100 partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Está íntimamente relacionado con los porcentajes, ya que se puede interpretar como el valor que acumula por debajo de él un determinado porcentaje de valores iguales o inferiores a él. (Catalán, Pérez, Prieto, Rupin, 2016, p. 314).

El cuartil es una medida de posición que asume tres valores que dividen en cuatro partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Cada uno de sus valores se puede interpretar como el valor que acumula por debajo de él el 25%, el 50% y el 75% de valores iguales o inferiores a él. (Catalán, et al., 2016, p. 316).

Para representar gráficamente los cuartiles de una distribución de datos se utiliza un diagrama de cajón que consiste en un rectángulo, llamado cajón, y sus prolongaciones, llamadas bigotes, tales que:

- En el cajón se puede identificar el valor de los cuartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ .
- En los bigotes se pueden identificar los valores extremos de la distribución de datos. (Catalán, et al., 2016, p. 319).

Por otra parte, en algunas escuelas particulares de Chile los estudiantes utilizan textos de licitación privada, en ellos las medidas de posición también se encuentran en la unidad de probabilidad y estadística a continuación presentamos la definición de las medidas de posición contenida en el texto Se Protagonista de editorial SM.

Las medidas de posición son valores que dividen una muestra ordenada, de forma creciente o decreciente, en subgrupos de igual cantidad de elementos.

- Percentiles (P): son 99 valores que dividen la muestra en 100 subgrupos. Para datos agrupados, se puede calcular el percentil  $k$  ( $P_k$ ) identificando el intervalo  $i$  al que pertenece el valor  $\frac{k \cdot n}{100}$  en las frecuencias acumuladas y, luego, aplicar la fórmula:

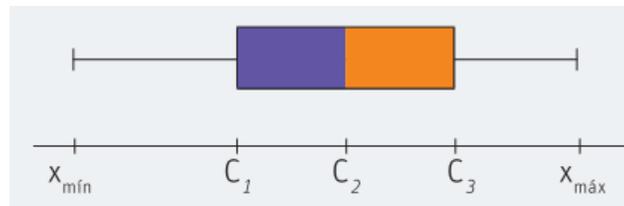
$$P_k = L + a \cdot \frac{\frac{k \cdot n}{100} - F_{ant}}{f}$$

- $L$  es el límite inferior del intervalo  $i$ ;  $a$  es la amplitud del intervalo  $i$ ;  $k$  es el número del percentil;  $n$  es el total de los datos de la muestra;  $f$  es la frecuencia absoluta del intervalo  $i$ ; y  $F_{ant}$  es la frecuencia acumulada anterior al intervalo  $i$ .

Cuartiles (C): son 3 valores ( $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ) que dividen la muestra en 4 subgrupos y corresponden a los percentiles 25, 50 y 75, es decir:

$C_1 = P_{25}$ ,  $C_2 = P_{50}$ ,  $C_3 = P_{75}$  (Castro, Curiche y Vega, 2014, p. 222).

Un diagrama de cajón es un resumen gráfico de una distribución. Su importancia radica en que utiliza la mediana (medida de tendencia central), el primer y tercer cuartil (medidas de posición) y el rango (medida de dispersión). Su representación gráfica es:



Con  $x_{mín}$ : valor mínimo de la muestra;  $x_{máx}$ : valor máximo de la muestra;  $C_1$ : primer cuartil;  $C_2$ : segundo cuartil (mediana); y  $C_3$ : tercer cuartil. (Castro, et al., 2014, p. 226).

Un diagrama de cajón permite realizar inferencia estadística con respecto a la simetría y dispersión de una distribución. Otra utilidad de este tipo de diagramas es la comparación de dos o más muestras. (Castro, et al., 2014, p. 228).

La definición erudita de las medidas de posición y del diagrama de caja y bigote difieren entre sí primero que todo en el nombre de los conceptos, el saber erudito define las medidas de posición y orden nombrándolas como cuantiles y dentro de ellos están los percentiles, cuartiles, deciles entre otros, el saber escolar sin embargo, los define como medidas de posición y dos conceptos: percentil y cuartil, aparentemente sin relación entre ellos, solo el texto privado relaciona la mediana con el segundo cuartil.

Un segundo punto en el que difieren tiene relación con que la definición erudita posiciona los cuantiles, como el caso de la mediana o segundo cuartil, quien una vez ordenados los datos de manera creciente se ubica la mitad menor que este valor o la mitad mayor, y si bien es cierto se pueden relacionar con porcentajes, estas medidas no son porcentajes como tal. La definición escolar por su parte relaciona el cuartil y la mediana con

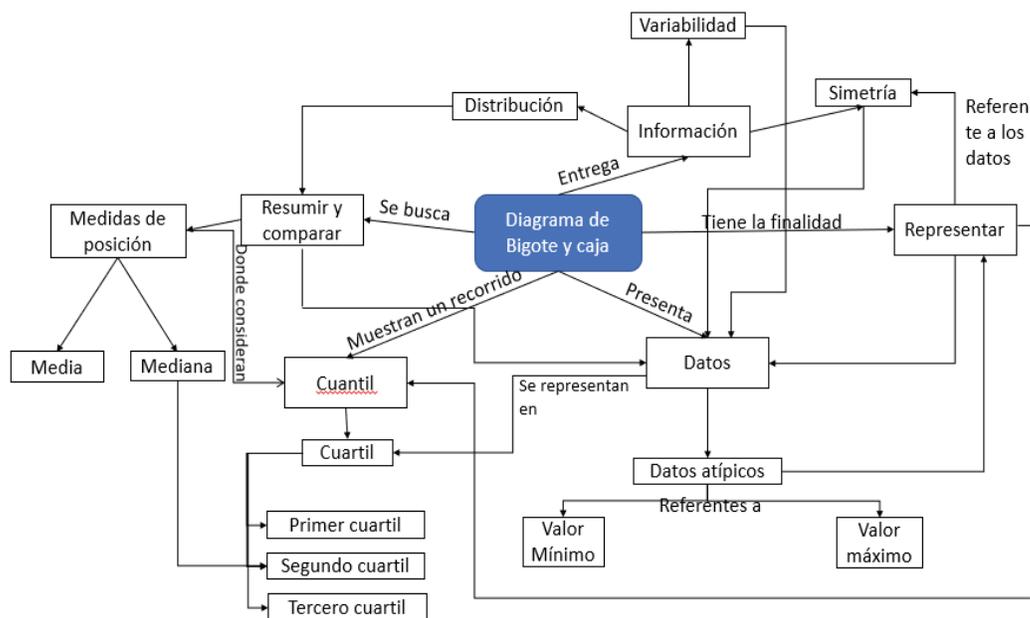
porcentajes que están bajo esa posición entendiéndose que solo existen valores que están, bajo esa posición, sin referirse a los que se ubican sobre esa posición.

Respecto al gráfico de caja y bigote la definición erudita difiere de la definición escolar, por su parte la definición erudita establece relaciones de simetría y asimetría, recorrido intercuartílico, relación de la mediana con primer y tercer cuartil, los valores atípicos y por último los bigotes y su relación con la simetría y asimetría. Por otro lado, la definición escolar del texto ministerial se limita a decir que el gráfico se utiliza para representar los cuartiles y los bigotes son valores extremos, el texto privado presenta lo mismo y declara que sirve para realizar inferencias estadísticas respecto a simetría y dispersión y que son muy útiles en la comparación de dos o más muestras, sin establecer a que se refiere con simetría o dispersión.

### Mapa conceptual

Para una mejor comprensión del gráfico de caja y bigote y su relación con los conceptos que lo componen hemos diseñado el mapa conceptual que se ilustra en la figura 2.

Figura 2. Mapa conceptual diagrama de caja y bigote



## **Barrido curricular**

El estudio de la estadística se inicia desde los primeros cursos en la escuela. Los objetivos de aprendizaje del currículum (Mineduc, 2012) avanzan gradualmente desde el primer ciclo básico hasta la enseñanza media, las medidas de posición y el diagrama de caja y bigote son presentadas a los estudiantes en octavo año básico. Para que este contenido sea asimilado por los alumnos, se requieren de conocimientos previos tanto en el área de la estadística como de la matemática.

En primer año básico comienzan con la recolección y registro de datos (OA 19) para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y en el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas, además de (OA 20) construir, leer e interpretar pictogramas. (Mineduc, 2012, p.129).

En segundo año básico los estudiantes pasan de la recolección y registro de datos, al registro en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas (OA 21), además con el (OA 22) de la lectura de pictogramas y la interpretación pasan también a la construcción de estos gráficos y los de barra simple. (Mineduc, 2012, p.136-137).

En tercer año básico además de los objetivos de recolección, registro y de datos, los estudiantes comienzan a realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas, visualizándolos en gráficos de barras (OA 23), la representación se realiza mediante el gráfico de puntos (OA 26). Continúan construyendo pictogramas y gráficos de barra simple, pero se introduce el uso de escalas y con la información que recolectan (OA 25). El registro de los datos obtenidos en los juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, mayor valor y estimando el punto medio (OA 24), nos muestra que desde este curso están entregando a los estudiantes nociones de las medidas de posición. (Mineduc, 2012, p.117-118).

Los estudiantes de cuarto básico ya han trabajado con pictogramas y gráficos de barra simple con escala. En este curso además deben comunicar conclusiones respecto a estos (OA 27), en cursos anteriores ya han realizado experimentos aleatorios, en este curso continúan con este trabajo sumando el uso de software educativo (OA 26), las encuestas a diferencia del año anterior se utilizan en la comparación de los resultados de muestras aleatorias usando tablas y gráficos (OA 25). (Mineduc, 2012, p.129).

A medida que los estudiantes avanzan en los cursos escolares los estudiantes van aumentando su red de contenidos, es así como en quinto básico se espera que sean capaces de leer, interpretar y completar tablas y gráficos de barra y líneas además de comunicar sus conclusiones (OA 26), en este curso comienzan a calcular el promedio de datos e interpretarlos en contexto (OA 23), utilizar el gráfico de tallos y hojas para representar datos

de muestras aleatorias (OA 27). (Mineduc, 2012, p.142-143). Se agrega a las habilidades que se espera desarrollen los estudiantes.

Los estudiantes de sexto básico pasan de trabajar con gráficos barra simple a los de doble barra y circular comunicando sus conclusiones (OA 24), el uso del diagrama de puntos y de tallos y hojas para comparar dos distribuciones (OA 22) es lo que se espera realicen los alumnos. (Mineduc, 2012, p.132).

En séptimo básico los objetivos de aprendizaje buscan que los estudiantes avancen con el trabajo de las tablas incluyendo en ellas la frecuencia absoluta y relativa usando gráficos apropiados de manera manual o con software educativo (OA 16), se relacionan por primera vez con las medidas de tendencia central mostrando que las comprenden al igual que el rango (OA 17). El uso de diagramas de árbol y tallo y hojas se presenta en el contexto de comparación de las frecuencias relativas (OA 19), la estimación de porcentajes de algunas características de una población desconocida por medio del muestreo (OA 15). (Mineduc, 2016), introduce a los estudiantes en la relación de los datos estadístico con los porcentajes.

En cursos anteriores los estudiantes trabajaron con tablas, frecuencia, gráficos de barra, puntos, líneas, tallos y hojas leyendo e interpretando su información, en octavo básico todos estos conocimientos previos les permitirán enfrentarse al trabajo con los percentiles, mostrando que comprenden las medidas de posición y cuartiles identificando la muestra que está sobre o bajo el percentil, representándolos en diagramas, incluido el de cajón de manera manual y/o con software educativo para comparar poblaciones (OA 15). (Mineduc, 2016, p.169).

## **Análisis de textos**

Para el análisis de texto utilizamos el libro "Matemática 8°" de licitación pública, entregado por el ministerio de educación a los colegios municipales, subvencionados y particulares subvencionados de Chile y el texto "Matemática sé protagonista 8" de licitación privada que utilizan algunos colegios particulares y particulares subvencionados de Chile.

En estos textos los estudios de las medidas de posición se abordan de dos maneras distintas, por una parte, el texto ministerial parte con la "activación de conocimientos previos" (Catalán, Pérez, Prieto, Rupin, 2016, p. 310), ver figura 7, necesarios para el aprendizaje de estas por medio del recuerdo de conceptos tales como frecuencia y tablas de frecuencia, media, moda, mediana. (Catalán, et.al, 2016, p. 310, 312). El texto de licitación privada parte inmediatamente con la definición del concepto.

Ambos textos abordan primero las medidas de posición percentiles y cuartiles, en el texto ministerial (Catalán, Pérez, Prieto, Rupin, 2016, p. 314) presentan los percentiles por medio de un ejercicio y terminan con la definición de ellos, del mismo modo se presentan los cuartiles, al contrario del texto de licitación privada en donde se presenta primero la definición de las medidas de posición para luego realizar ejercicios (Castro, Curiche y Vega, 2014, p. 222).

Una gran diferencia entre ambos textos radica en que el texto ministerial aborda las medidas de posición para datos no agrupados, en el caso de los percentiles los define como una medida de posición que asume 99 valores que dividen en 100 partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, y los relaciona con los porcentajes, de la misma forma aborda los cuartiles destacando que en este caso que asume tres valores y divide el conjunto de datos en 4 partes y cada valor es la acumulación de lo que hay bajo de él.

El texto de licitación privada define las medidas de posición tanto para datos agrupados como para datos no agrupados, afirma que los percentiles son 99 valores que dividen la muestra en 100 subgrupos e inmediatamente presenta los algoritmos para su cálculo matemático, del mismo modo procede con los cuartiles.

Otra diferencia encontrada entre ambos textos se presenta en la relación que se realiza entre el segundo cuartil, percentil cincuenta y mediana, el texto ministerial presenta la relación por medio de preguntas buscando que el estudiante llegue a la conclusión de que tanto el segundo cuartil, el percentil cincuenta y la mediana corresponden al mismo dato, en tanto el texto privado lo explicita y relaciona tan solo con el segundo cuartil solamente. Figura 3

Figura 3. Diferencias entre textos respecto a mediana.

**Sé más**

La mediana de una muestra de datos agrupados corresponde al percentil 50 y al segundo cuartil, es decir:

$$M_e = P_{50} = C_2$$

Otras medidas de posición utilizadas son:

- **Deciles (D):** son 9 valores que dividen la muestra en 10 subgrupos y corresponden a:  
 $D_1 = P_{10}; D_2 = P_{20}; D_3 = P_{30}; \dots; D_9 = P_{90}$ .
- **Quintiles (Q):** son 4 valores que dividen la muestra en 5 subgrupos y corresponden a:

**Paso 3** Calcula el 50% del total de los datos.

$$0,5 \cdot 21 = 10,5$$

Responde la pregunta, ¿qué valor se encuentra en la posición 11?

El valor que se ubica en la posición 11 es \_\_\_\_\_, por lo tanto,  $Q_2 =$  \_\_\_\_\_.

**Paso 4** Calcula el 75% del total de los datos.

$$0,75 \cdot 21 = 15,75$$

Responde la pregunta, ¿qué valor se encuentra en la posición 16?

El valor que se ubica en la posición 16 es \_\_\_\_\_, por lo tanto,  $Q_3 =$  \_\_\_\_\_.

¿A qué medida de tendencia central corresponde  $Q_2$ ?

Respecto a la representación de las medidas de posición, específicamente los cuartiles, ambos textos hacen la relación de estas con el diagrama de caja y bigote. En el texto ministerial explican cómo construir el diagrama de caja para luego pasar a una serie de preguntas respecto a la homogeneidad y heterogeneidad de la distribución representada, por otro lado, el texto privado presenta el gráfico de caja y bigote, lo explica y realizan ejercicios para finalmente presentar la relación del gráfico con la inferencia que se puede realizar respecto a la distribución y dispersión de los datos, además de la utilización de este en la comparación de dos o más muestras.

### Análisis histórico epistemológico

El estudio de los datos de la población se remonta a épocas muy antiguas. Existen indicios que indicarían que desde la caída del imperio romano se elaboraban censos de población y tierras, cuyo objetivo era obtener el número de personas que podrían servir en el ejército, determinar el reparto de bienes y tierras, así como también determinar los tributos, al igual que en Egipto el año 3050 a. C. en donde se analizaban los datos de la población y renta del país antes de construir las pirámides. (Anónimo, 2008).

En Grecia se realizaban censos para cuantificar la distribución y posesión de las tierras, organizar el servicio militar y determinar el derecho a voto de los ciudadanos, el historiador Heródoto relataba que los censos de riqueza y población se realizaban para planificar la construcción de pirámides. Ramsés II ordenó elaborar un censo para determinar un nuevo reparto de tierras.

En china el emperador Yao en el año 2238 a.C. recogió información general sobre la actividad comercial agrícola e industrial (Ghilardi, 2014).

En roma el rey Servio Tulio (578 – 535 a.C.) elaboró un catastro de todos los dominios de roma, creo un registro en el que los propietarios debían inscribir sus posesiones tales como tierras, servidumbre, esclavos y animales de tiro. En el imperio era importante la estadística, es en este lugar donde se establecieron registros de nacimiento, defunciones, estudios sobre ciudadanos (riquezas y tierras), realizando censos cada cinco años.

Durante la edad media Isidoro de Sevilla recopiló y clasificó datos de diversa naturaleza, los resultados los publicó en su obra *Originum sive etymologiarum*, en esta misma época Carlomagno en el 762 realizó un censo para conocer la extensión de tierras que poseía la Iglesia. En 1805 Guillermo I ordenó que se preparara un registro de propiedades, extensión y valor de las tierras de la Iglesia. En México el año 1116 el rey Xólotl ordenó censar a todos sus súbditos, proceso en el cuál se contaron 3.200.000 personas (Ghilardi, 2014).

En la época moderna se le da a la estadística una base científica matemática, lo que fue un gran aporte al permitir que los datos pudieran utilizarse en otras cosas. En España se realizaron una serie de censos, como por ejemplo el de los obispos en 1587, de los millones en 1591 y el de Aranda en 1768.

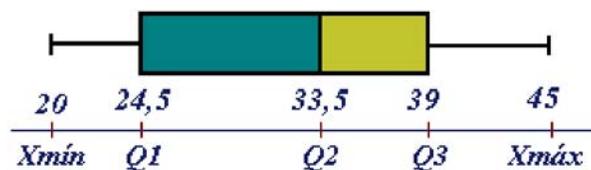
Cáceres (2012) dice que John Graunt, comerciante inglés, es considerado como uno de los fundadores de la estadística moderna, realizó un análisis de datos que recogió de tablas de mortalidad publicadas durante la época de la peste, haciendo predicciones sobre los fallecimientos y nacimientos del futuro, quedando plasmado en su obra *Natural and political observations* en 1662. Este hecho y otros de la época muestra que la estadística comienza a tomar un rumbo que va mas allá del conteo, se utiliza para realizar predicciones y conclusiones.

El término estadística fue acuñado por el profesor alemán Gottfried Achenwall, quien pensaba que la estadística era una herramienta muy útil y poderosa para los políticos y gobernantes de una nación (Cáceres, 2012).

En la época moderna los estudios demográficos, económicos y sociales cobraron cada vez más importancia, sumado a eso el uso de técnicas analíticas permitieron establecer relaciones entre variables, el grado de influencia entre ellas y realizar predicciones. El avance en el muestreo y la inferencia estadística permitiendo el estudio de la población por medio de una parte de ella, facilitó y abarató la recogida y el procesamiento de la información.

El desarrollo de la estadística y la teoría de la probabilidad continuo, es así como destacan los trabajos de Chebyshev y Liapunov en probabilidades y de Fisher y Tukey en estadística.

Jhon W. Tukey (1915 – 2000) científico estadounidense quien colaboro en el desarrollo del cálculo de la transformadora rápida de Fourier y en el desarrollo de la estimación JackKnife. Tukey fue el creador del diagrama de caja y bigote el cual aparece por primera vez en su obra Exploratory data analysis en 1977, en él se utilizan cinco medidas estadísticas el valor mínimo, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el valor máximo, el gráfico consiste en un rectángulo (caja) dividido por un segmento vertical que indica la posición de la mediana y su relación con el primer y tercer cuartil y una línea o bigote que se extiende de las aristas izquierda y derecha o superior e inferior del rectángulo que representa los valores máximos y mínimos. Este diagrama es una representación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos como son la dispersión, asimetría y simetría, el centro y valores atípicos.



Las medidas estadísticas mediana, cuartiles, percentiles y rango, son llamadas medidas de orden o posición, estas indican una posición particular de un elemento dentro de un conjunto de datos. Según Batanero (2001) su estudio es muy importante por dos razones, primero es que el análisis exploratorio de datos se basa en estos estadísticos debido a que son menos sensibles a valores atípicos y pequeñas variaciones en los datos y segundo que a pesar de ser menos potentes son la base de los métodos no paramétricos que necesitan un menor número de hipótesis y se pueden aplicar con mayor generalidad.

## **Marco teórico**

Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) señalan que los objetos y los resultados producidos por el trabajo matemático se dividen en áreas de conocimiento (aritmética, álgebra, análisis, geometría, probabilidad y estadística) que estructuran la investigación matemática y permiten dar cuenta de la diversidad de la actividad matemática. Cada una de ellas según los autores, se conectaría a temáticas no matemáticas como contar, la simbolización, la generalización, el espacio, el cambio, el azar, la decisión, etc. Así, cada dominio de las matemáticas es objeto de diferentes interpretaciones y depende de la adaptación para ser enseñado en una institución concreta.

Kuzniak (2015), define Espacio de Trabajo Matemático como un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo, en dicho espacio, se distinguen dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorece su coordinación, y se concibe además, la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraicos, etc.), en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista, etc.) (Henríquez, Menares, Montoya y Verdugo, 2015).

Según Henríquez y Montoya (2014), en cada plano hay tres componentes; en el cognitivo estarían presentes los procesos de visualización, construcción y prueba y, en el epistemológico, el de representante, artefactos y referencial.

En el Plano Cognitivo por un lado, se llevan a cabo tres procesos: uno de visualización relativo a la estructuración de las informaciones aportadas por los signos, un proceso de construcción que depende de los instrumentos usados, y un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas. Y por otro lado, en el Plano Epistemológico conviven tres componentes: un conjunto de objetos concretos y tangibles (representamen), un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo, software, calculadora, etc. y un sistema teórico de referencia basado en definiciones teoremas y propiedades (referencial teórico).

Montoya, Mena y Mena (2013), señalan que actualmente la teoría del ETM considera un ETM global, el cual dependería del dominio matemático y de esta manera, se concebiría en él la reflexión, como el resultado de la interacción entre un individuo y las situaciones problemáticas del tipo matemático. Todo en un ambiente organizado por y para el matemático mediante el vínculo entre un plano epistemológico y uno cognitivo (Kuzniak, 2011), los cuales se relacionan directamente con los contenidos matemáticos del dominio en juego (Henríquez y Montoya, 2015), cada uno

de estos planos a su vez constan de tres componentes y tres planos verticales articulados mediante tres génesis.

Montoya y Flores (2016), señalan que la Génesis Discursiva da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático, sería entonces la articulación entre el referencial teórico y la prueba. La Génesis Semiótica, basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional, articula el representamen con la visualización. La Génesis Instrumental es la que permite hacer operatorios los artefactos con el proceso de construcción. De esta manera, entre el objeto y el sujeto, existe una entidad llamada instrumento, mediante la cual se dirige la acción, quien además de mediar, tiene la característica de ser mixta, pues considera al artefacto y la componente en el plano cognitivo. Rabardel (1995) señala que los artefactos pueden ser de índole material o pueden ser un sistema simbólico que se emplea como un medio para la acción determinada generada por un sujeto.

Un artefacto es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del hombre en la ejecución de un cierto tipo de tarea; un instrumento es lo que un sujeto construye a partir del artefacto; y una herramienta sirve potencialmente para algo. Por otra parte, la instrumentalización sería un reconocimiento de las funciones del artefacto y la instrumentación corresponde a una idea, a una construcción mental invariante cuando el usuario usa la tecnología. Esta lo lleva a desarrollar y entender su actividad matemática (Trouche, 2004).

El plano semiótico discursivo articula las génesis semiótica y discursiva. El ingreso desde lo semiótico implica describir transformaciones y descomposiciones de manera perceptiva en diagramas y conjuntos de signos. Desde lo discursivo se trata de una interpretación con base en un discurso de prueba en donde la visualización y los diagramas juegan un papel de descubrimiento (Nechache, 2014).

El plano instrumental discursivo articula las génesis instrumental y discursiva, el ingreso desde lo instrumental permite generar discurso de validación con base en la experiencia. Desde lo discursivo, basado en el marco teórico de referencia, se valida el discurso y se justifican las técnicas de construcción y el uso de los artefactos (Nechache, 2014).

El plano semiótico instrumental articula las génesis semiótica e instrumental, destacando la interacción de signos y herramientas en la fase de descubrimiento y exploración. El tránsito desde lo semiótico favorece la construcción de los objetos teniendo en cuenta las imposiciones de los signos matemáticos, desde lo instrumental requiere del uso visual y semiótico de los datos (Nechache, 2014).

Pino y Estrella (2012) afirman que la estadística se podría ver como la aplicación científica de principios matemáticos en situaciones donde se presenta variabilidad e incerteza, específicamente en la recolección y análisis de datos. Para los autores la investigación en estadística está en sus albores, por lo cual se debe ver como una disciplina nueva y emergente. Según ellos "...se puede afirmar que la estadística es una disciplina metodológica que ofrece a otras áreas del saber un conjunto coherente de ideas y herramientas" (Pino, Estrella, 2012, p. 54). Continúan afirmando que, "Relacionado con esto está el hecho de que un modelo estadístico se puede formalizar como un caso particular de modelo matemático" (Pino, Estrella, 2012, p. 57).

Las imágenes 4 y 5 ilustran la relación entre el marco teórico elegido y la problemática presentada.

Figura 4 Los planos, polos y génesis del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Richard, 2014).

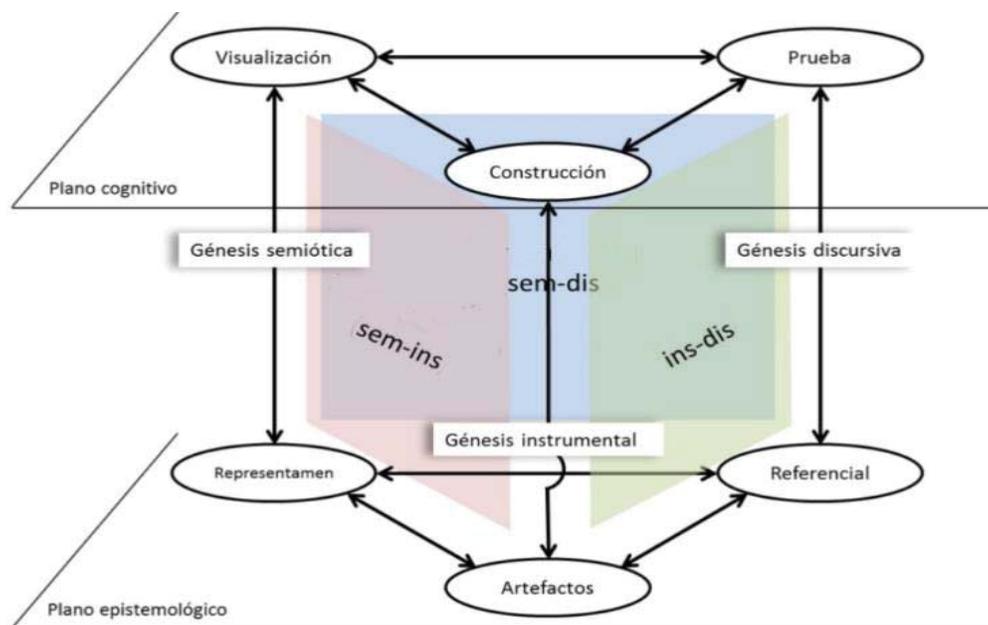
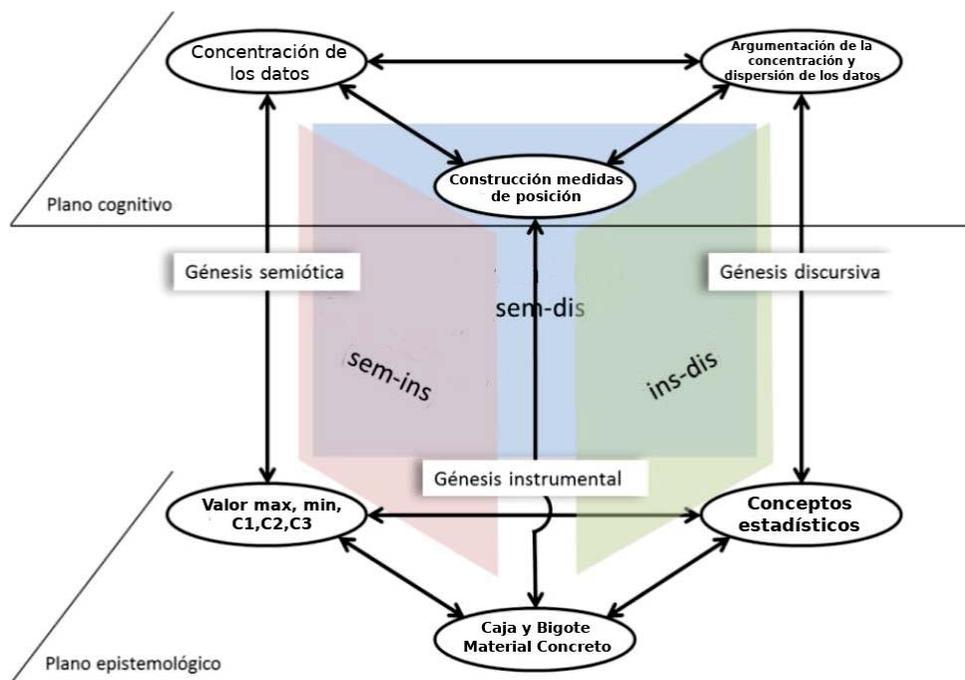


Figura 5 Los planos, polos y génesis del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, Richard, 2014).



En este contexto y en el marco de la clase implementada con el uso de material concreto diseñado para esto, entendiéndose que el material concreto adquiere un estatus de artefacto puesto que su manipulación permite visualizar las medidas de posición de manera concreta inicialmente, para realizar inferencias, sacar conclusiones y argumentar sobre la concentración y dispersión de un conjunto de datos, además de comparar en este caso tres conjuntos de datos y concluir a partir de ello.

Cabe destacar que para este estudio se ha decidido trabajar con los planos verticales del modelo, esto porque el uso del material concreto de la caja con categoría de artefacto en el ETM busca que el estudiante por medio de la instrumentalización de la caja genere un discurso y argumente sobre la concentración y variabilidad de los datos presentes en esta.

### **Diseño de la investigación**

Este trabajo de investigación es de corte cualitativo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), en tanto se busca identificar los argumentos que los estudiantes ponen de relieve con la manipulación del material concreto en el contexto de la comprensión de las medidas de posición.

La investigación se lleva a cabo en el programa de magister en didáctica de la matemática, en el marco de estudio de clases, el cual es un proceso cíclico centrado en la reflexión y la acción, podemos distinguir el proceso de preparación de la clase, el momento de implementación y el de la discusión evaluativa inmediata, para dar paso a un eventual siguiente ciclo. cita

La preparación de la clase se inicia con un trabajo colaborativo por parte de los docentes integrantes del grupo, los cuales asumen roles diferenciados y complementarios. La segunda etapa consiste en la implementación de la clase por parte de uno de los docentes, el resto del grupo participa como observador de la clase. Se cierra el ciclo con el análisis de la clase, buscando momentos críticos y mejoras para un nuevo ciclo de implementación. En este contexto este trabajo analizará una de las clases implementadas.

### **Sujetos informantes**

Los sujetos informantes son 10 estudiantes de octavo básico, entre 13 y 15 años de distintos colegios de la comuna de Maipú, que no han trabajado la unidad de estadística en sus respectivos colegios, los que asisten voluntariamente a la clase implementada para efectos de este estudio.

### **Técnicas de recogida de datos**

La técnica de recogida de datos correspondió al registro audiovisual de los diálogos surgidos entre los estudiantes, respecto al trabajo con el material concreto, en el transcurso de la clase. El foco está en el desempeño individual inicial de los estudiantes y la transformación de sus argumentaciones en la medida que acontece la interacción en el trabajo grupal.

### **Técnica de análisis de datos**

Las dimensiones del estudio se establecen a través de las producciones argumentativas de los estudiantes, mediante el análisis del contenido de las afirmaciones y sus respectivas justificaciones, expresadas en la situación problemática planteada.

Con base en el análisis de errores, dificultades, estrategias y el marco teórico ETM hemos establecido los siguientes criterios de análisis, con sus respectivas categorías.

Tabla 1. Categorías de análisis a priori.

Plano	Descripción	Categoría
Plano Semiótico discursivo	Describir transformaciones y descomposiciones e interpretar con base en la visualización.	Ca <sub>1</sub> : cualquier manifestación que indique con palabras o gestos que uno de los cuartiles tiene mayor cantidad de datos que otro. Ca <sub>2</sub> : cualquier manifestación que indique que cada cuartil tiene la misma cantidad de datos, lo que cambia es la concentración de los datos.
Plano Instrumental discursivo	Generar discurso de validación basado en la experiencia y en el marco teórico de referencia, justificando el uso de la caja.	Ca <sub>3</sub> : cualquier manifestación que indique que cada cuartil representa la misma cantidad de datos o el 25%. Ca <sub>4</sub> : cualquier manifestación que indique la existencia de mayor variabilidad entre los datos en el cuartil donde están menos concentrados.
Plano Semiótico Instrumental	Descubrir las relaciones del artefacto (caja) con las medidas estadísticas de posición.	Ca <sub>5</sub> : a través de la manipulación de la caja no existe ningún tipo de manifestación que la caja permite ver y comprender la concentración de los datos. Ca <sub>6</sub> : cualquier manifestación de que la manipulación de la caja ayuda a comprender las medidas de posición (mediana, cuartiles) y su rol en el gráfico de caja y bigote.

## Clase de estudio

En el colegio Tabancura de Valparaíso los estudiantes tienen acceso a internet para realizar sus tareas escolares, los directivos decidieron ver las horas que los estudiantes estaban conectados a la red.

El profesor de matemáticas tomo la información de los tres octavos del colegio y decidió usarla en la clase, para que los estudiantes trabajaran en la unidad de estadística que les ha costado mucho.

A partir de esta información el profesor realizo los siguientes cálculos.

Datos (tiempo en minutos)					
1	Mín.: 1670	Máx.: 1970	$C_1$ : 1750	$C_2$ : 1830	$C_2$ : 1850
2	Mín.: 1690	Máx.: 1940	$C_1$ : 1740	$C_2$ : 1800	$C_2$ : 1850
3	Mín.: 1640	Máx.: 1930	$C_1$ : 1710	$C_2$ : 1740	$C_2$ : 1830

Utilizando el material entregado, ¿qué puedes concluir a partir de los datos entregados por el profesor?



### Descripción de la actividad

Para el inicio de la clase que considera un tiempo de 10 minutos, los estudiantes se reúnen en grupos de cuatro a seis personas. El docente proyecta la situación problemática, la leen de manera individual y luego en conjunto para después discutir entre ellos sobre la situación.

Una vez terminada la lectura el profesor entrega a cada grupo la situación problemática impresa y el material concreto (3 cajas por cada grupo) con el que trabajaran. Comenzando de esta manera con el desarrollo de la clase, lo que considera un tiempo de 40 minutos.

Los estudiantes deben representar en cada una de las cajas las situaciones 1, 2 y 3 con los datos mínimo, máximo y cada uno de los cuartiles, luego

discutir sobre la información que está representada en cada una de ellas, para finalmente compararlas y sacar conclusiones, con el fin de exponer en las paredes de la sala los grupos escriben en cartulinas las conclusiones a las cuales llegaron luego de la discusión. El docente debe monitorear el trabajo de cada grupo de esta manera puede ir resolviendo las dificultades o errores que se presenten, realizando las preguntas de devolución pertinentes a cada caso que se pueda presentar.

Dos grupos exponen al plenario las conclusiones obtenidas, los grupos son seleccionados por el profesor de tal manera que uno de ellos haya concluido correctamente o lo mas cercano y el otro no, el objetivo en este momento es generar una discusión a nivel general y que finalmente como grupo curso logren un consenso y una puesta en común sobre la información presente en cada uno de los gráficos. Esta actividad considera un tiempo de 30 minutos.

Para cerrar la clase el profesor con base en las conclusiones a las que llegaron los estudiantes institucionaliza respecto al gráfico de caja y bigote, la información que de él se puede extraer, el significado de cada una de las medidas de posición presentes en el gráfico y de qué manera estas ayudan en la comparación de dos o mas grupos de datos. Para esta última sección se considera un tiempo de 10 minutos.

### **Respuesta experta**

Los diagramas de caja y bigotes son una representación visual ilustrativa de un conjunto de datos, en él se describen una serie de características importantes que por sí solas no significan nada, pero que en conjunto describen la dispersión y simetría de un conjunto de datos.

En este caso cada una de las cajas muestra distinta concentración de los datos y como se distribuyen en cada caso, la caja 1 tiene mayor concentración entre la median y el tercer cuartil, la caja 2 tiene concentraciones similares y la caja 3 tiene mayor concentración entre el primer cuartil y la mediana.

Para su construcción se utilizan los valores mínimos, máximo y los cuartiles de los datos, estos se ubican en un rectángulo, el cual se puede presentar en forma vertical u horizontal.

Los elementos constituyentes del gráfico son:

**La caja:** rectángulo que contiene el recorrido intercuartílico (RIC) de la distribución, va desde el primer cuartil ( $C_1$ ) al tercer cuartil ( $C_3$ ), lo que equivale al 50% de las observaciones centrales.

**Mediana:** es una línea que se dibuja dentro de la caja y se ubica en la escala en el valor que corresponde a esa medida (también es el segundo cuartil ( $C_2$ ))

**Bigotes:** líneas que sobresalen de los costados de la caja y se ocupan como referencia de los valores extremos, que son aquellos que están fuera del 50% central de la distribución.

### **Matemática involucrada**

La estadística es parte de la matemática y como tal involucra contenidos que los estudiantes deben conocer antes de enfrentarse a una actividad como la planteada anteriormente. De esta manera los estudiantes se enfrentarán en la actividad con las medidas de posición y orden, cuartiles, rango, mediana, valor máximo y valor mínimo.

Antes de comenzar a trabajar con esta actividad los estudiantes necesitan previamente conceptos como Media, medidas de posición, medidas de orden, cuartiles, porcentajes.

la actividad se diseñó con el objetivo de que emerjan conceptos de concentración, dispersión, variabilidad y simetría de un conjunto de datos.

### **Posibles estrategias**

La actividad planteada puede ser enfrentada por los estudiantes de distintas maneras, a continuación, se presentan algunas de esas estrategias.

Un grupo de estudiantes puede tomar las cajas representar en cada una de ellas la situación y luego dibujarlas en un papel por separado sacando conclusiones respecto a la concentración y dispersión de los datos a partir del dibujo.

Un grupo de estudiantes puede tomar las cajas representar los datos y luego ponerlas una al lado de la otra para concluir respecto a la concentración y dispersión de los datos.

En una tercera estrategia los estudiantes pueden representar las situaciones en cada una de las cajas y luego ponerlas una sobre otra para concluir respecto a la concentración, dispersión y posición de la mediana.

## Dificultades, errores y devoluciones

Dificultad	Error	Devolución
Los estudiantes presentan dificultad en el contenido; los conjuntos numéricos, y los elementos matemáticos presentes en todo gráfico (Batanero, 2001).	Los estudiantes no relacionan el título del gráfico con conocimientos previos de base para la interpretación de los datos del gráfico.	¿leíste el título que aparece en la tabla? ¿el título se asemeja a algo que conoces?
Los estudiantes tienden a ver la mediana como una característica de un individuo en el centro de un grupo, más que como una caracterización de todo el grupo (Konold y Higgins, 2003)	Los estudiantes no comparan las medianas de cada grupo de datos y la ven como un dato aislado en el gráfico.	¿las medidas estadísticas de cada caja actúan separadamente una de otra?
	Los estudiantes no identifican las unidades de medida de cada eje. Los estudiantes no ubican correctamente la edad con la estatura.	¿qué variables debes ubicar en la tabla? ¿en las abscisas que variable debes ubicar?
Los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de un gráfico estadístico (Monroy en Medina 2011).	Los estudiantes no realizan predicciones e inferencias a partir del gráfico, Los estudiantes confunden los ejes.	¿qué cosas aparte de las que ya están escritas, puedes ver en el gráfico ¿los zapatos se ponen en los pies o en la cabeza?

## **Análisis**

A continuación se presenta un análisis detallado del discurso de los estudiantes y la transformación de los argumentos una vez realizada la discusión grupal. Para ello, se consideraron los argumentos de los estudiantes identificando específicamente en ellos las categorías establecidas a priori.

El instrumento de captura y registro de datos es la grabación audiovisual de los diálogos surgidos entre los estudiantes, respecto al trabajo con el material concreto, en el transcurso de la clase. El foco está en el desempeño individual inicial de los estudiantes y la transformación de sus argumentaciones en la medida que acontece la interacción en el trabajo grupal.

A partir del instrumento se obtuvieron los datos de las interacciones de 10 estudiantes de octavo básico, entre 13 y 15 años de distintos colegios de la comuna de Maipú, que no han trabajado la unidad de estadística en sus respectivos colegios, los que asisten voluntariamente a la clase implementada para efectos de este estudio.

Cabe mencionar que las categorías a priori se establecieron con base en el marco teórico ETM, del cual se toman los planos semiótico-discursivo, instrumental-discursivo y semiótico-instrumental, consideramos que ellos nos permiten visualizar de mejor forma el desempeño de los estudiantes y la transformación en el discurso argumentativo con el uso del material concreto.

Específicamente se espera que el estudiante al manipular la caja recurra a sus conocimientos formales de las medidas de posición, concretando el paso de lo epistemológico a lo cognitivo, de esta manera transitará por el plano [sem-dis] generando un discurso de validación respecto a las medidas de posición, la concentración y la variabilidad de los datos en cada cuartil.

Al trabajar con el artefacto (material concreto), el estudiante debería evocar sus conocimientos matemáticos, operacionalizar la caja con esos conocimientos y visualizar en ella la concentración de los datos, pasando desde lo epistemológico a lo cognitivo y transitando por el plano [sem-ins] manifestando que la visualización concreta de la caja permite comprender de mejor forma como se concentran los datos.

El tránsito por el plano [ins-dis] debiera manifestarse al momento en que el estudiante es capaz de expresar que cada uno de los cuartiles que tiene la caja tiene la misma cantidad de datos o bien cada cuartil representa el mismo porcentaje 25%, lo que varía en cada cuartil es la concentración o dispersión de los datos.

Este análisis fue realizado en dos momentos, el primero de ellos cuando los estudiantes se enfrentan a la situación problemática y comienzan a utilizar el material concreto de la caja, esto porque es ese el momento en que se puede evidenciar las concepciones que los estudiantes tienen respecto a las medidas de posición y la concentración en el diagrama de caja y bigote.

Con el fin de una mejor comprensión de los análisis se presenta un cuadro resumen de las categorías y los estudiantes que cumplen con los criterios establecidos previamente en ellas. Los estudiantes fueron clasificados con número desde el 1 al 10.

La tabla resumen número 2 presenta los estudiantes clasificados en las distintas categorías en el primer momento de la clase, cuando se enfrentaron por primera vez a la situación con el material concreto del gráfico de caja y bigote.

Tabla 2. Primer momento de análisis

Plano	Categorías	
Plano [sem-dis]	Ca <sub>1</sub> : E2, E3, E5, E8, E7, E9, E10	Ca <sub>2</sub> : E1, E4, E6
Plano [ins-dis]	Ca <sub>3</sub> : E2, E3, E5, E8, E7, E9, E10	Ca <sub>4</sub> : E1, E4, E6
Plano [sem-ins]	Ca <sub>5</sub> : E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10	Ca <sub>6</sub> : E1

Plano [sem-dis]	Plano [ins-dis]	Plano [sem-ins]
Ca <sub>1</sub> E1: "ien este lado de la caja hay mas datos po!"	Ca <sub>3</sub> E4: "ino po, cada uno de los cuartiles representa el mismo porcentaje, el 25% o un cuarto!"	C <sub>5</sub> E2: "ino entiendo nada, no veo lo que tu deci!"
		

Para la categoría Ca<sub>1</sub> el estudiante E1 declara que en un lado de la caja hay más datos porque hay mas espacio entre el primer cuartil y el segundo, lo que nos permite evidenciar que al manipular la caja (artefacto) su

referencial teórico adolece de los conceptos estadísticos necesarios para llegar a la prueba y construir el concepto de concentración en cada cuartil.

El estudiante E4 rebate esta declaración y le dice que un cuartil corresponde al 25%, entonces no puede ser que haya más datos si cada uno es el mismo porcentaje, esto evidencia que el estudiante reconoce que los cuartiles se relacionan con los porcentajes, pero no da seguridad de que el estudiante comprende que ese porcentaje es un acumulado y posiciona los datos sobre o bajo un porcentaje.

El estudiante E2 observa la discusión del grupo, mira la caja, la manipula y luego expresa que no entiende lo que dicen sus compañeros y que no ve nada de lo que hablan, en este caso el estudiante da cuenta que no es capaz recurrir a su referencial teórico, o bien carece del referencial teórico necesario para generar un discurso argumentativo respecto a la información que la caja entrega.

El segundo momento de análisis se realiza luego de la discusión grupal cuando los estudiantes han confrontado sus ideas y manipulado el material concreto, esto con el objetivo de evidenciar que el material concreto les permitió cambiar su discurso, construcción y concepción respecto a las medidas de posición y la concentración en el diagrama de caja y bigote.

La tabla resumen número 3 presenta los estudiantes clasificados en las distintas categorías en el segundo momento de análisis, después de trabajar con el material concreto y de la discusión grupal.

Tabla 3, Segundo momento de análisis.

Plano	Categorías	
Plano [sem-dis]	Ca <sub>1</sub> : E2	Ca <sub>2</sub> : E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10
Plano [ins-dis]	Ca <sub>3</sub> : E2, E5, E7, E9, E10, E1 E8, E4, E6; E3	Ca <sub>4</sub> : E1, E8, E4, E6, E3
Plano [sem-ins]	Ca <sub>5</sub> : E2, E10	Ca <sub>6</sub> : E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9

Plano [sem-dis]	Plano [ins-dis]	Plano [sem-ins]
<p>Ca<sub>2</sub></p> <p>E6: "iambos lados tienen la misma cantidad de datos, lo que cambia es la concentración!"</p> 	<p>Ca<sub>4</sub></p> <p>E8: "isi comparamos los datos del C1 donde están mas juntos los datos, con los del C2 vemos que hay mayor variabilidad en el C2!"</p> 	<p>Ca<sub>6</sub></p> <p>E3: "ila caja nos ayudó a ver y entender mejor que los cuartiles tienen la misma cantidad de datos, lo que cambia es como se concentran los datos en cada cuartil!"</p> 

En la categoría Ca<sub>2</sub> el estudiante E6 que inicialmente afirmaba que ambos lados de la caja tenían la misma cantidad de datos lo que variaba era la concentración y dispersión de ellos en el cuartil, da cuenta de que su referencial teórico base le permitieron argumentar de manera precisa sobre la concentración y dispersión de los datos ayudando además a cambiar el discurso de varios de sus compañeros, ayudándolos a transitar por el plano semiótico discursivo.

Para el estudiante E8, la manipulación de la caja, le permitió transitar por el plano instrumental discursivo y argumentar que se podía apreciar la variabilidad de los datos en cada uno de los conjuntos de datos representados.

El objetivo de la clase buscaba poner de relieve el discurso de los estudiantes al momento de manipular material concreto, el diseño por otro lado analizaba si el material era capaz de propiciar la activación de los planos verticales del ETM, en categoría Ca<sub>6</sub> el estudiante E3 afirmó que el material les había ayudado a entender mejor que los cuartiles tiene la misma cantidad de datos, lo que cambia es la concentración de ellos en cada cuartil.

## Resultados

Al enfrentarse por primera vez al material concreto 7 de los 10 estudiantes no fueron capaces de identificar que cada cuartil tiene el mismo porcentaje, 25%, y lo que varía es la concentración y dispersión de los datos. Luego de la discusión grupal, 9 de los 10 estudiantes cambiaron su discurso, afirmando que cada cuartil representa el mismo porcentaje, lo que pone de manifiesto que el instrumento permite que los estudiantes generen un discurso de validación respecto a la concentración de los datos representados en el gráfico de caja y bigote, evidenciando de esta manera el tránsito desde lo instrumental a lo discursivo.

La activación del plano [ins-dis] da cuenta de que los estudiantes comprenden que cada cuartil representa el 25% de los datos, pero no así el concepto de variabilidad, cabe destacar que en este plano las categorías presentadas no eran excluyentes puesto que se buscaba descubrir el nivel del discurso que podrían lograr los estudiantes, es decir, qué tan profundo era el cambio en el discurso desde lo epistemológico a los discursivo y su nivel de abstracción, entendiendo que la variabilidad se puede interpretar de distintas maneras.

La observación y el análisis de los argumentos de los estudiantes dan cuenta que las características de la operacionalización de la caja y la concentración que se puede ver en ella en conjunto con el referencial teórico de los conceptos estadísticos involucrados, les permite transitar por el plano semiótico-discursivo, probando que cada cuartil presenta diferencias en la concentración y variabilidad de los datos, pero no en cuanto a la cantidad que ellos contienen.

Durante la puesta en común de los resultados de la actividad los estudiantes manifestaron que la manipulación y visualización del material concreto les permitió comprender que lo que cambia en cada uno de los cuartiles es la concentración de los datos, lo que da cuenta de que ellos pudieron activar el plano semiótico-instrumental.

Tabla 4 Articulación de la secuencia didáctica

Clase de la secuencia	Articulación de las clases	Articulación del ETM	Objetivo de la clase	Tiempo
Clase 1	Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles, cuartiles.	La clase de la secuencia busca activar el plano semiótico discursivo, partiendo del referencial teórico de los conceptos estadísticos que los estudiantes tienen de base, y el representamen de los percentiles 97, 90, posicionando así el percentil, para finalmente concluir mediante la prueba que el percentil indica una posición del dato respecto a un porcentaje acumulado.	Comprender las medidas de posición (percentiles, cuartiles)	90 min.
Clase 2 Implementada	Representar las medidas de posición con diagramas, incluyendo el de cajón.	El uso de un artefacto (material concreto), con base en el referencial teórico (conceptos estadísticos) para construir las medidas de posición generando un discurso de prueba que argumente sobre la concentración y dispersión de los datos en el gráfico de caja y bigote, permitiría la activación del plano instrumental discursivo.	Aplicar medidas de posición, cuartiles, mediante el uso de material concreto con el diagrama de caja y bigote.	90 min.

---

Clase 3	<p>Evaluar la forma en que los datos están presentados, comparando la información de los mismos datos representada en distintos tipos de gráficos</p>	<p>Esta última actividad busca activar el plano semiótico instrumental, a pesar de que no tenemos un artefacto presente, el uso en clase anteriores permitiría ponerlo de relieve en la ocasión, por medio del representamen de los cuartiles, valor máximo y mínimo, pudiendo visualizar la concentración de los datos, argumentando sobre la pertinencia del uso de promedios para comparar la concentración en grupos de datos.</p>	<p>Analizar las medidas de posición en el diagrama de caja y bigote.</p>	90 min.
---------	---	--	--	---------

---

## Actividad clase 1

Juan navegaba en Internet buscando información para una tarea de la escuela cuando una noticia le llamó mucho la atención.

### ¿Es mi bebé demasiado grande?

Redacción  
BBC Mundo

© 21 mayo 2017

Compartir



Quando los médicos dijeron a Tom y Elizabeth Flight que Arlo, su hijo de 7 meses, estaba en el percentil 90 de altura, en el 97 de peso y en el 99 de circunferencia de la cabeza -también conocido como perímetro cefálico-, se preocuparon.

Y es que, ¿cuán grande puede llegar a ser un niño y ser considerado normal?

*Jordan Dunbar de la BBC lo investigó.*

"Estoy preocupado de que sea el bebé más grande de Estados Unidos", dice Tom, un británico de 1,91 metros de altura quien se mudó a Texas para casarse con Elizabeth.

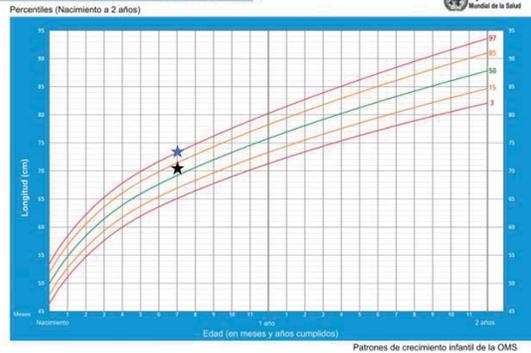
Juan le mostro la noticia a la mamá y le preguntó si sabía cómo estaba su hermanito. La mamá busco la libreta donde el doctor de su hermano hace anotaciones y llena unas tablas con las medidas del niño.

Juan las comparó, pero seguía sin entender así que llevó la noticia y una copia de la libreta al colegio para ver si su profesora de matemáticas le podía ayudar a entenderlo.

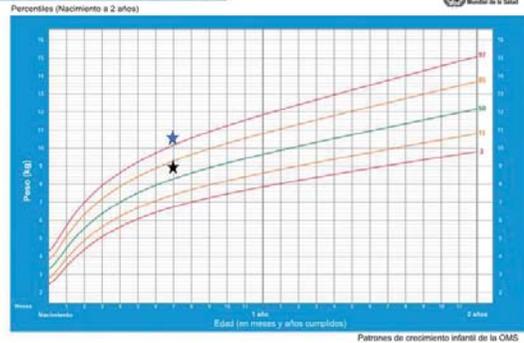
La profesora tomó las cosas y las expuso a la clase, para que todos los compañeros de Juan dieran sus opiniones respecto al tema.

Les pidió se reunieran en grupos de cuatro para que discutieran el tema, a cada grupo le entregó las tablas con la ubicación de Arlo y el hermano de Juan, además les entregó una cartulina en donde debían escribir sus conclusiones.

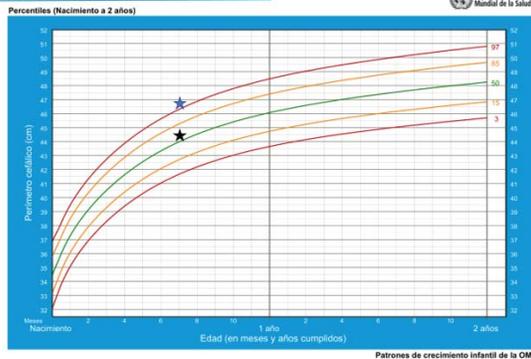
### Longitud para la edad Niños



### Peso para la edad Niños



### Perímetro cefálico para la edad Niños



## Preguntas

- 1.- ¿Qué significa la posición de Arlo?
- 2.- ¿En qué percentil está el hermano de Juan?
- 3.- ¿qué significa que esté en ese percentil?

## Descripción de la actividad

Para el inicio de la clase que considera un tiempo de 15 minutos. Los estudiantes se dividen en grupos de cuatro, la profesora lee la noticia y situación al grupo curso, luego les entrega el material, les pide que discutan sobre la situación y den sus opiniones respecto a lo que sucede con Arlo y el hermano de Juan.

Durante el desarrollo de la clase que considera un tiempo de 55 minutos, los estudiantes discuten sobre lo que ven en los gráficos, la profesora monitorea el trabajo de los grupos realizando las preguntas de devolución necesarias para que los estudiantes lleguen a la conclusión de que los gráficos muestran la posición que ocupa cada uno de los niños.

Para el cierre de la clase la profesora elige dos tres grupos para que expongan sus conclusiones, cada uno de ellos con conclusiones distintas respecto a lo que cada tabla representa, uno de los grupos tiene conclusiones erróneas, el segundo grupo tiene conclusiones que se acercan un poco a lo que las tablas representan, el tercer grupo tiene conclusiones correctas a lo que se presenta en cada tabla. Luego de la presentación los estudiantes discuten sobre las tres presentaciones, en conjunto llegan a la respuesta experta sobre lo que cada una de las tablas representa.

Finalmente, la profesora institucionaliza con base en las conclusiones de los estudiantes.

### **Respuesta experta**

Las tablas muestran la ubicación de Arlo y el hermano de Juan, esa ubicación es con base en los percentiles. Los percentiles son los puntos que dividen un grupo de datos en 100 partes iguales, en este caso Arlo se ubica en el percentil 90 de altura, esto significa que Arlo es 90% más alto que el resto de los niños de su edad y un 10% más bajo que el resto de los niños de su edad, en el caso del hermano de Juan se encuentra en el percentil 58.

Los percentiles son los puntos que dividen a la distribución de probabilidad en 100 intervalos, cada uno con probabilidad 0.01; los deciles y cuartiles son los puntos que dividen a la distribución de probabilidad en 10 y cuatro intervalos, cada uno con probabilidad de 0.1 y 0.25, respectivamente, nótese que la mediana es también el cincuentavo percentil, el quinto decil y el segundo cuartil. (Canavos, 1988, p. 77).

### **Matemática involucrada**

Ante la tarea asignada los estudiantes deben recurrir a contenidos previos como porcentaje, mayor que, menor que, plano cartesiano. Una vez terminada la actividad los estudiantes debieran comprender el concepto matemático de percentil y los relacionados cuartiles, deciles.

### **Posibles estrategias**

La actividad planteada a los estudiantes puede ser resuelta con distintas estrategias, algunas de ellas pueden llevar al éxito en la solución de la

situación, otras pueden ser erradas lo que no implica que los estudiantes no sean capaces de aprender.

Un grupo de estudiantes puede tomar una regla y lápiz para trazar rectas que les permitan encontrar la diferencia entre los percentiles de Arlo y el hermano de Juan y después comentan sus apreciaciones respecto a lo que es el percentil.

Otra posible estrategia es mirar cada una de las tablas y con el dedo guiarse hasta encontrar el percentil en el cual se encuentra el hermano de Juan y hacer una resta para comparar la diferencia en los percentiles, luego concluir y responder a las preguntas planteadas

Una tercera estrategia es dibujar una curva similar a las de los percentiles establecidos en la tabla para ver la posición del hermano de Juan y luego responder la pregunta sobre el percentil

### Dificultades errores y devoluciones

Dificultad	Error	Devolución
Dificultades en la comprensión de los gráficos. (Monroy, 2008 en Medina, 2011).	Los estudiantes no relacionan el título del gráfico con conocimientos previos de base para la interpretación de los datos del gráfico.	¿leíste el título que aparece en la tabla? ¿el título se asemeja a algo que conoces?
Dificultades en la comprensión de los gráficos. (Monroy, 2008 en Medina, 2011).	No ubican correctamente la edad con la estatura.	¿qué variables debes ubicar en la tabla? ¿en las abscisas que variable debes ubicar?
Las medidas de orden presentan dificultades para los estudiantes tanto a nivel procedimental como conceptual (Batanero, 2001)	Los estudiantes dicen que el percentil corresponde a un porcentaje de la población.	¿el porcentaje qué es lo que mide?

### Actividad clase 3

## Chile es la selección de menor estatura y de mayor edad de toda la Copa América

Los jugadores de la "Roja" tienen un promedio de 1,76 metros y en cuanto a años la media llega a los 28. Además, el plantel nacional es el que registra menos peso, con 73 kilos de cociente.

09 de Junio de 2015 | 15:46 | Emol



Díaz se repite como el más bajo y más flaco, mientras que Pizarro es el más experimentado.

Emol

Paulina, Sebastián, Marcela y Pedro comentan la noticia de la selección chilena, Pedro dice que a pesar de ser los más bajos igual habían ganado la copa, sin embargo, Paulina y Sebastián no estaban tan seguros de que fuera correcto lo afirmado en el diario, Marcela dijo que en su opinión hacer comparaciones con promedios no era muy correcto. Los amigos se propusieron investigar las alturas de las otras selecciones participantes para verificar la noticia.

Y tú ¿crees que lo que afirma la noticia está correcto?, ¿conoces una manera de ayudar a los chicos?

Acá están los datos que Marcela, Sebastián, Paulina y Pedro reunieron, ¿los puedes ayudar a verificar?

## Datos de las selecciones participantes en la Copa América

País	Datos				
Argentina	Mín.: 169	Máx.: 194	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 185
Brasil	Mín.: 169	Máx.: 191	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 187
Bolivia	Mín.: 157	Máx.: 187	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 181
Chile	Mín.: 162	Máx.: 187	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 177	Q <sub>3</sub> : 180
México	Mín.: 165	Máx.: 190	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 185
Perú	Mín.: 167	Máx.: 197	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188
Jamaica	Mín.: 174	Máx.: 199	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188
Venezuela	Mín.: 170	Máx.: 197	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 184
Paraguay	Mín.: 167	Máx.: 191	Q <sub>1</sub> : 175	Q <sub>2</sub> : 179	Q <sub>3</sub> : 184
Uruguay	Mín.: 170	Máx.: 196	Q <sub>1</sub> : 176	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 186
Ecuador	Mín.: 164	Máx.: 193	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 174	Q <sub>3</sub> : 183
Colombia	Mín.: 168	Máx.: 187	Q <sub>1</sub> : 177	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 183

### Descripción de la actividad

El inicio de la clase considera un tiempo de 10 minutos, el curso se divide en grupos de cuatro personas, el profesor proyecta la noticia, los estudiantes leen y comentan sus opiniones, luego de esto el profesor entrega a cada grupo la actividad impresa, cartulina y hojas cuadriculadas para que resuelvan la actividad.

El desarrollo de la clase considera un tiempo de 45 minutos los estudiantes ubican en una misma hoja todos los gráficos, luego de eso discuten respecto a la veracidad de la noticia. Los gráficos de caja y bigote son muy útiles para realizar comparaciones entre grupos de datos que miden el mismo tipo de variable.

Para cerrar la clase dos grupos pasan a la pizarra y presentan sus conclusiones respecto a la veracidad de la noticia, el plenario del curso discute sobre lo expuesto por los compañeros. En conjunto llegan a la conclusión respecto a la noticia.

### Respuesta experta

Al graficar todas las situaciones en la misma hoja y con la misma escala los estudiantes llegan a la conclusión que si bien es cierto el promedio de la selección chilena es más bajo, no es la selección con la mayor concentración de altura en el primer cuartil, el país que tiene mayor cantidad de jugadores con estaturas menores es Bolivia.

Si se busca comparar dos o mas grupos de datos la media aritmética o promedio no es el mejor estadístico para realizar esta comparación, en estos casos lo mejor es usar los cuartiles, mediana y el gráfico de caja y bigote,

al poner dos o más gráficos en conjunto es posible apreciar de manera rápida que conjunto presenta mayor dispersión y simetría.

### Matemática involucrada

Los estudiantes trabajaran con el diagrama de caja y bigote de manera pictórica y simbólica, para lo cual necesitan de los conceptos matemáticos de cuartiles, mediana, valor máximo, valor mínimo, concentración, dispersión.

### Posibles estrategias

La actividad planteada puede ser enfrentada por los estudiantes de distintas maneras, a continuación, se presentan algunas de esas estrategias.

La primera estrategia posible es dibujar un gráfico por hoja y luego superponerlas para comparar cuál de ellos presenta mayor concentración o dispersión en las alturas bajas.

Una segunda estrategia puede ser que en una misma hoja y con la misma escala los estudiantes dibujen los gráficos y luego realicen la comparación ubicando la selección con mayor concentración en las alturas bajas.

Una tercera estrategia a seguir es comparar los datos en la tabla sin dibujar los gráficos de caja y llegar a la conclusión de cuál es la selección con menor estatura de la copa américa

### Dificultades, errores y devoluciones

Dificultades	Errores	Devoluciones
Los estudiantes presentan dificultades que en la correcta elección del gráfico (Li y Shen, 1992).	Los estudiantes usan un gráfico de barra para representar los cuartiles y la mediana	¿leíste el título que aparece en la tabla? ¿el título se asemeja a algo que conoces?
Los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de un gráfico estadístico (Monroy en Medina 2011).	Los estudiantes se quedan en la lectura de datos, en vez de leer entre datos realizando inferencias y predicciones a partir de los datos.	¿Qué es lo que ves en los gráficos? ¿es posible realizar algún tipo de comparación?
	Los estudiantes dibujan cada gráfico con escalas distintas.	¿Es posible comparar metros con pulgadas?

## **Discusión**

El uso de gráficos de caja en el análisis de datos tiene muchas ventajas, pero algunas de las características de este gráfico son un desafío para los estudiantes y profesores.

Se debe considerar que:

- El gráfico de caja generalmente no permite percibir casos individuales.
- Funcionan de manera diferente que otras representaciones gráficas conocidas por los sujetos;
- La mediana no es tan intuitiva para los estudiantes como se cree; y
- los cuartiles dividen los datos en grupos de una manera que pocos estudiantes (o incluso profesores) realmente comprenden. (Bakker, Biehler, & Konold, 2004).

La secuencia didáctica busca superar los desafíos que se presentan a los estudiantes y docentes al momento de trabajar con las medidas de posición y el gráfico de caja. Pero concordamos en que el gráfico es un desafío tanto para los docentes como para los estudiantes, puesto que por medio del estudio histórico epistemológico y el análisis curricular pudimos evidenciar que el estudio del gráfico en contextos escolares de educación general básico, al menos en Chile lleva poco tiempo.

Por otro lado los cuartiles y la división que ellos realizan de los datos, tal y como lo evidencian los estudios previos, no son tan intuitivas como se cree.

## **Conclusión**

El uso de material concreto para el estudio de las medidas de posición con el gráfico de caja y bigote se presenta como una herramienta útil al momento de trabajar con los estudiantes. El material concreto fue un elemento coadyuvante que permitió identificar los argumentos discursivos que los estudiantes pusieron de relieve al momento de enfrentarse a situaciones problemáticas, los argumentos erróneos antes del uso del material concreto respecto a la concentración de un conjunto de datos y el cambio en estos argumentos una vez utilizado el material, dan cuenta del potencial que presenta este instrumento como lo hemos presentado en el marco teórico.

El diseño del estudio bajo el paradigma interpretativo y el marco metodológico ETM, nos llevaron a tener una visión global de las dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de trabajar con estos gráficos y las medidas que conviven en él. Por otra parte el marco metodológico nos permitió evidenciar que a través de la instrumentalización del artefacto los estudiantes generaron un discurso de validación sobre la concentración de los datos en el gráfico de caja y bigote.

Kuzniak (2015) define Espacio de Trabajo Matemático como un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo, la creación de una secuencia didáctica con base en el ETM, teniendo a la vista los estudios previos, antecedentes curriculares, epistemológicos, análisis de textos y análisis cognitivo del objeto matemático, además del trabajo colaborativo de un grupo de docentes bajo la estructura del Estudio de Clases Japonés, en pro del aprendizaje de los estudiantes ha generado buenos resultados, en el estudio de las medidas de posición y el gráfico de caja y bigote.

Desde el punto de vista del ETM, el artefacto en este caso cumplió su papel por medio de la instrumentalización dando paso a la instrumentación para que los estudiantes desarrollaran y comprendieran los conceptos de concentración, percentil, cuartil.

Con base en los resultados del estudio de la clase implementada de la secuencia didáctica, la manipulación por parte de los estudiantes del material diseñado y los argumentos puestos de relieve respecto a la utilidad de la caja, creemos pertinente realizar algunas modificaciones al material e implementar un nuevo estudio o continuar con el aquí iniciado.

## Referencias

- Anónimo. (2008). *Estadística para todos*. España.
- Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 18, 94.
- Bakker, A., Biehler, R., & Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots. *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education*, 163-173.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada, España. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España, Granada.
- Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos elementales estadísticos. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Burrill y M. Camden. IASE, 163-173. Curcio, F.R. (1987): Comprehension of mathematical relationships expressed in graph. *Journal for Research in Mathematics Education* 18, 382-393.
- Cáceres, H. (2012). Historia de los orígenes de la estadística. *Revista de negocios internacionales v1, 4,.4*
- Canavos, G. (1998). *Probabilidad y estadística aplicaciones y métodos*. D.F, México: Mc Graw Hill.
- Conde, J., Rull, V. y Vegas. T. (1986). Análisis exploratorio de datos ecológicos y biométricos: gráficos stem-and-leaf (tallos-y -hoja) y boxplot (cajas graficas). *Enseñanza de las ciencias*, 4 (2), 153-162
- Curcio, F. R. (1989): Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M.
- Espinel, M., González, A. Bruno, A. y Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed), *Tendencias actuales de la investigación estocástica* (pp 133-156). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Educación y Humanidades (Melilla).
- Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-159.
- Gal, I. (2002): Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70, 1-25.
- Ghilardi, N. (2014). *Historia de la estadística*. Recuperado de

- <http://red.infed.edu.ar/blog/wp-content/uploads/2014/11/Historia-de-la-estadistica.pdf>
- Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, 30, 54, 1-22.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la investigación*. D.F., México: Mc Graw Hill.
- Henríquez, C. y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las ciencias*, 33(2), 51-70.
- Konold, C. & Higgins, T. (2003). Reasoning about data. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 193-215). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A.; Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 17, n. 4-I, p. 5-15,
- Lee, C., Meletiou, M. (2003): Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education*. On line: <http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf>
- Li, D. Y., Shen, S. M. (1992): Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14, I: 2-8.
- Medina, L. (2011). *Dificultades en la lectura e interpretación de gráficas estadísticas en estudiantes de grado décimo*. (Tesis Licenciatura en matemáticas). Universidad Industrial de Santander.
- Minnaard, V., Rabino, C., García, M., Moro, L. y Minnaard, C. (2002). El uso de las gráficas en la escuela: otro lenguaje de las ciencias. *Revista Iberoamericana de educación*. Recuperado de [rieoei.org/experiencias34.htm](http://rieoei.org/experiencias34.htm).
- Minnaard, C., Condesse, V., Minnaard, V. y Rabino, C. (2005). Los gráficos de caja: un recurso innovador. *Revista Iberoamericana de educación*. Recuperado de [rieoei.org/experiencias93.htm](http://rieoei.org/experiencias93.htm).
- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de primero básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18976\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18976_programa.pdf)

- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de segundo básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18977\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18977_programa.pdf)
- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de tercero básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18978\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18978_programa.pdf)
- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de cuarto básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18979\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18979_programa.pdf)
- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de quinto básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18980\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18980_programa.pdf)
- Mineduc. (2012). *Programa de estudio de sexto básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18981\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18981_programa.pdf)
- Mineduc. (2016). *Programa de estudio de séptimo básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18981\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18981_programa.pdf)
- Mineduc. (2016). *Programa de estudio de octavo básico*. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983\\_programa.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf)
- Mineduc. (2013). Bases curriculares 7° básico a 4° medio. Chile. Recuperado de [http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34961\\_Bases.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34961_Bases.pdf)
- Montoya, E., Mena, A. y Mena, J. (2013). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*.
- Montoya, E. y Flores, M. (2016). Artefactos y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos. *Educación Matemática*, 28(2), 85-117.
- Nechache, A. (2014). Comparaison de la demarche de la validation dans les espaces de travail idoines en geometrie et en probabilite. En Gomez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A. y Richard, P. (Eds). *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. p.51-67. Madrid, España.
- Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 27-45.

- Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris, France: Armand Colin.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9 (3), 281-307.

## Anexos

Tabla 5. Resumen análisis

Plano	Categorías	
Plano [Sem-Dis]	Ca <sub>1</sub> : cualquier manifestación que indique con palabras o gestos que uno de los cuartiles tiene mayor cantidad de datos que otro.	Ca <sub>2</sub> : cualquier manifestación que indique que cada cuartil tiene la misma cantidad de datos, lo que cambia es la concentración de los datos.
		
	E1: "ien este lado de la caja hay mas datos po!"	E6: "iambos lados tienen la misma cantidad de datos, lo que cambia es la concentración!"
Plano [Ins-Dis]	Ca <sub>3</sub> : cualquier manifestación que indique que cada cuartil representa la misma cantidad de datos o el 25%.	Ca <sub>4</sub> : cualquier manifestación que indique la existencia de mayor variabilidad entre los datos en el cuartil donde están menos concentrados.
		

---

E1: "¡no po, cada uno de los cuartiles representa el mismo porcentaje, el 25% o un cuarto!"

E8: "¡si comparamos los datos del C1 donde están mas juntos los datos, con los del C2 vemos que hay mayor variabilidad en el C2!"

Plano  
[Sem-Ins]

Ca<sub>5</sub>: a través de la manipulación de la caja no existe ningún tipo de manifestación que la caja permite ver y comprender la concentración de los datos.

Ca<sub>6</sub>: cualquier manifestación de que la manipulación de la caja ayuda a comprender las medidas de posición (mediana, cuartiles) y su rol en el gráfico de caja y bigote.



E2: "¡no entiendo nada, no veo lo que tu deci!"

E3: "¡la caja nos ayudó a ver y entender mejor que los cuartiles tienen la misma cantidad de datos, lo que cambia es como se concentran los datos en cada cuartil!"

---

## Planificación secuencia didáctica

### Clase 1

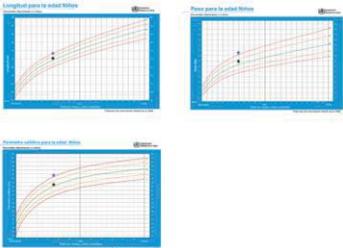
<b>Problemática:</b>	Dificultades en la comprensión del concepto medida de posición (percentil)	
<b>Objetivo:</b>	Comprender las medidas de posición (percentiles, cuartiles)	
<b>Contenidos previos</b>		<b>Materiales</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Frecuencia</li> <li>- Frecuencia acumulada</li> <li>- Variable</li> <li>- Media</li> <li>- Moda</li> <li>- Mediana</li> <li>- Gráfico</li> <li>- Datos</li> <li>- Población</li> <li>- Muestra</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Pizarra</li> <li>- Data</li> <li>- Tablas de talla de hombres y mujeres para cada grupo de estudiantes</li> <li>- Guía de trabajo de la clase</li> </ul>

### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
<b>15 minutos</b>			
<p>Indicaciones de la clase</p> <p>El profesor pide a los estudiantes que se dividan en grupos de cuatro.</p> <p>1. Actividad</p> <p><small>Juan navegaba en Internet buscando información para una tarea de la escuela cuando una noticia le llamó mucho la atención.</small></p> <p><b>¿Es mi bebé demasiado grande?</b></p> <p><small>Reportado por: BBC Mundo</small></p> <p><small>17 mayo 2017</small></p>  <p><small>Cuando los médicos dijeron a Tom y Elizabeth Flight que Ario, su hijo de 7 meses, estaba en el percentil 98 de altura, en el 97 de peso y en el 99 de circunferencia de la cabeza también conocido como perímetro cefálico, se preocuparon.</small></p>	<p>Explicitar contrato didáctico y pedagógico</p> <p>1. Se explica el objetivo de la clase.</p> <p>Los estudiantes leen la situación de Juan y el niño de la noticia.</p> <p>La profesora pregunta ¿qué opinan ellos de la noticia?</p> <p>¿creen que el bebé de la noticia es muy grande?</p>	<p>¿Los estudiantes entienden lo que leen?</p> <p>¿Los estudiantes dan alguna opinión de la noticia?</p> <p>¿Los estudiantes son capaces de discriminar que es un bebé grande para la edad?</p>	<p>Mediadas de posición y orden.</p> <p>Porcentajes.</p> <p>Percentiles, deciles, cuartiles.</p>

Respuestas esperadas de los estudiantes

Se espera que los estudiantes comenten que el bebé es muy grande, y es como anormal. Porque las guaguas no son tan grandes.

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
50 minutos			
<p>2. la profesora explica a los estudiantes que las tabla que les entrega tienen ubicadas las posiciones de Arlo y el herma no de Juan</p>  <p>Preguntas</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- ¿Qué significa la posición de Arlo?</li> <li>2.- ¿En qué percentil está el hermano de Juan?</li> <li>3.- ¿qué significa que esté en ese percentil?</li> </ol>	<p>2. La profesora monitorea el trabajo de los estudiantes</p> <p>Los estudiantes discuten en grupo cada una de las tablas.</p>	<p>¿Es suficiente el tiempo planificado?</p> <p>¿los estudiantes discuten y aportan ideas respecto a lo que significan los percentiles?</p> <p>¿Los estudiantes visualizan la posición en la tabla, realizan inferencias respecto a la estatura de los bebés comparándolos?</p>	<p>Ubicación espacial.</p> <p>Percentiles</p> <p>Medidas de posición</p> <p>Mediana</p> <p>Medidas de orden</p>
<p>Posibles preguntas ante la actividad:</p> <p>Estudiante: ¿Las estrellas me dicen la posición de los bebés?</p> <p>Profesor: ¿cuál es la duda de Juan?</p> <p>Estudiante: ¿tengo que calcular el peso del bebé?</p> <p>Profesor: ¿de alguna manera el peso te ayuda a comprender que significa que el bebé este en ese percentil?</p> <p>Posibles dificultades y errores:</p> <p>Los estudiantes pueden no comprender que cada gráfica presenta la distribución en percentiles de altura, peso y contorno de cabeza.</p> <p>Los estudiantes pueden no establecer relaciones entre los datos de las tablas y la información que se les pide.</p> <p>Los estudiantes pueden no estar leyendo entre los datos de las tablas y sacar conclusiones.</p>			

<p>Posibles estrategias de los estudiantes</p> <p>Un grupo de estudiantes puede tomar una regla y lápiz para trazar rectas que les permitan encontrar la diferencia entre los percentiles de Arlo y el hermano de Juan y después comentan sus apreciaciones respecto a lo que es el percentil.</p> <p>Otra posible estrategia es mirar cada una de las tablas y con el dedo guiarse hasta encontrar el percentil en el cual se encuentra el hermano de Juan y hacer una resta para comparar la diferencia en los percentiles, luego concluir y responder a las preguntas planteadas.</p> <p>Una tercera estrategia es dibujar una curva similar a las de los percentiles establecidos en la tabla para ver la posición del hermano de Juan y luego responder la pregunta sobre el percentil.</p>			
Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
20 minutos			
<p>Dos grupos de estudiantes exponen sus conclusiones al grupo curso.</p> <p>Institucionalización por parte del docente respecto a las medidas de posición y orden. Percentiles deciles y cuartiles.</p>	<p>El grupo curso en conjunto discuten una posible institucionalización sobre los percentiles.</p> <p>Luego de la exposición de los estudiantes el docente realiza la institucionalización de las medidas de orden y posición, tomando como base las conclusiones a las cuales llegaron los estudiantes.</p>	<p>¿La actividad logró el objetivo propuesto?</p> <p>¿Las conclusiones de los estudiantes logran el objetivo propuesto?</p> <p>¿Los estudiantes discuten sobre lo expuesto al plenario para lograr una puesta en común?</p> <p>¿La actividad fue un desafío para los estudiantes?</p>	

<p>Respuesta experta</p> <p>Las tablas muestran la ubicación de Arlo y el hermano de Juan, esa ubicación es con base en los percentiles. Los percentiles son los puntos que dividen un grupo de datos en 100 partes iguales, en este caso Arlo se ubica en el percentil 90 de altura, esto significa que Arlo es 90% más alto que el resto de los niños de su edad y un 10% mas bajo que el resto de los niños de su edad, en el caso del hermano de Juan se encuentra en el percentil 60 de altura, lo que significa que es un 60% mas alto que el resto de los niños de su edad y un 40% mas bajo que el resto de los niños.</p>
--

## Clase 2

<b>Problemática:</b>	Dificultades en la interpretación de la información entregada en un gráfico de caja y bigote.
<b>Objetivo:</b>	Aplicar medidas de posición, cuartiles, mediante el uso de material concreto con el diagrama de caja y bigote.
<b>Contenidos previos</b>	<b>Materiales</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Media</li> <li>- Medidas de posición</li> <li>- Medidas de orden</li> <li>- Cuartiles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Data</li> <li>- Cartulinas blancas</li> <li>- Cajas y bigotes de material concreto</li> <li>- Plumones</li> <li>- Guía con situación problemática</li> </ul>

### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
15 minutos			
<p>Indicaciones de la clase.</p> <p>Los estudiantes leen la problemática y discuten entre ellos sobre la situación problemática.</p> <p>Los estudiantes se agrupan (4 a 6 personas)</p>	<p>El docente proyecta la situación problemática y pide a uno de los estudiantes que lea en voz alta.</p> <p>El docente pregunta ¿alguna duda sobre la</p>	<p>¿Los estudiantes siguen la lectura?</p> <p>¿los estudiantes comprenden la situación que se les plantea?</p>	

<p><b>Actividad clase 2</b></p> <p>En el colegio Tabancura de Valparaíso los estudiantes tienen acceso a internet para realizar sus tareas escolares, los directivos decidieron ver las horas que los estudiantes estaban conectados a la red.</p> <p>El profesor de matemáticas toma la información de los tres octavos del colegio y decidió usarla en la clase, para que los estudiantes trabajaran en la unidad de estadística que les ha costado mucho.</p> <p>A partir de esta información el profesor realizó los siguientes cálculos.</p> <table border="1" data-bbox="240 296 613 348"> <thead> <tr> <th colspan="5">Datos (tiempo en minutos)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>Mín.: 1670</td> <td>Máx.: 1970</td> <td>C<sub>1</sub>: 1750</td> <td>C<sub>2</sub>: 1830</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Mín.: 1690</td> <td>Máx.: 1940</td> <td>C<sub>1</sub>: 1740</td> <td>C<sub>2</sub>: 1800</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>Mín.: 1640</td> <td>Máx.: 1930</td> <td>C<sub>1</sub>: 1710</td> <td>C<sub>2</sub>: 1830</td> </tr> </tbody> </table> <p>Utilizando el material entregado, ¿qué puedes concluir a partir de los datos entregados por el profesor?</p>	Datos (tiempo en minutos)					1	Mín.: 1670	Máx.: 1970	C <sub>1</sub> : 1750	C <sub>2</sub> : 1830	2	Mín.: 1690	Máx.: 1940	C <sub>1</sub> : 1740	C <sub>2</sub> : 1800	3	Mín.: 1640	Máx.: 1930	C <sub>1</sub> : 1710	C <sub>2</sub> : 1830	<p>situación presentada?</p>		
Datos (tiempo en minutos)																							
1	Mín.: 1670	Máx.: 1970	C <sub>1</sub> : 1750	C <sub>2</sub> : 1830																			
2	Mín.: 1690	Máx.: 1940	C <sub>1</sub> : 1740	C <sub>2</sub> : 1800																			
3	Mín.: 1640	Máx.: 1930	C <sub>1</sub> : 1710	C <sub>2</sub> : 1830																			
<p>Respuestas esperadas de los estudiantes</p> <p>Los estudiantes pueden decir que van a realizar cálculos, y que no es necesario usar el material entregado para la actividad porque se puede ver en una hoja de papel dibujada.</p> <p>los estudiantes pueden decir que es raro que un colegio tenga internet para los alumnos.</p> <p>los estudiantes pueden preguntar ¿por qué no hay que calcular nada?</p>				<p>Terminada la lectura el docente entrega a cada grupo el material didáctico (cajas y bigotes) para que comiencen a trabajar.</p>																			

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
45 minutos			
<p>Cada grupo de estudiantes trabaja con el material concreto entregado.</p> <p>Los estudiantes manipulan el material concreto, representando en cada diagrama de caja y bigote las situaciones, discutiendo sobre las representaciones.</p>	<p>El docente monitorea cada grupo, realizando las preguntas de devolución necesarias.</p> <p>Si todos los grupos presentan las mismas dudas el docente realiza una intervención al grupo curso.</p>	<p>¿Los estudiantes comprenden el uso del material concreto?</p> <p>¿los estudiantes están manipulando el material concreto de tal manera que les permite</p>	<p>Diagrama de caja y bigotes</p> <p>Medidas de posición y orden</p> <p>Cuartiles</p> <p>Rango</p> <p>Mediana</p>



Posibles preguntas ante la actividad:  
 Estudiante: ¿qué hago con las cajas?  
 Profesor: ¿cuál es la instrucción de la tarea?  
 Estudiante: ¿en la caja debo escribir los datos?  
 Profesor: ¿es posible escribir datos en la caja?  
 Estudiante: ¿en la caja se ponen los valores exactos o solo se representan?  
 Profesor: ¿es posible con ese material poner los valores exactos?

representar las situaciones?  
 Una vez lograda la representación ¿los estudiantes lograr realizar inferencias y sacar conclusiones respecto a la información que entrega el material concreto?  
 ¿El material concreto les permite visualizar la dispersión y concentración de los datos en los cuartiles?

Valor máximo  
 Valor mínimo  
 Concepto de concentración  
 Concepto de dispersión

Posibles dificultades y errores:  
 Los estudiantes pueden no comprender que cada uno de los cuartiles representa el mismo porcentaje 25%.  
 Los estudiantes pueden no establecer relaciones que muestren la concentración y dispersión de los datos.  
 Los estudiantes pueden tener dificultades para concluir que cada percentil acumula porcentajes.

Posibles estrategias de los estudiantes

Un grupo de estudiantes puede tomar las cajas representar en cada una de ellas la situación y luego dibujarlas por separado en un papel para concluir.  
 Una segunda estrategia es tomar las cajas, representar los datos y luego ponerlas una al lado de la otra para sacar conclusiones.  
 Una tercera estrategia representar en cada caja los datos y ponerla una sobre otra para diferenciar como se concentran los datos en cada una de ellas.

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
30 minutos			
<p>Dos grupos de estudiantes presentan sus resultados y conclusiones a la clase.</p> <p>La clase discute sobre los resultados y en conjunto llegan a un consenso respecto a la utilidad del diagrama de caja y bigote y su importancia en la visualización y comprensión de la variabilidad y dispersión y simetría de la información</p> 	<p>El docente observa la exposición de los estudiantes.</p> <p>El docente pregunta a los estudiantes si la manipulación del material concreto les permitió comprender la dispersión y concentración de los datos.</p>	<p>¿El material concreto fue un aporte en las conclusiones de los estudiantes?</p>	
<p><b>Respuesta experta</b></p> <p>Los diagramas de caja y bigotes son una representación visual ilustrativa de un conjunto de datos, en él se describen una serie de características importantes que por sí solas no significan nada, pero que en conjunto describen la dispersión y simetría de un conjunto de datos.</p> <p>En este caso cada una de las cajas muestra distinta concentración de los datos y como se distribuyen en cada caso, la caja 1 tiene mayor concentración entre la mediana y el tercer cuartil, la caja 2 tiene concentraciones similares y la caja 3 tiene mayor concentración entre el primer cuartil y la mediana.</p> <p>Para su construcción se utilizan los valores mínimos, máximo y los cuartiles de los datos, estos se ubican en un rectángulo, el cual se puede presentar en forma vertical u horizontal.</p>			

### Clase 3

<b>Problemática:</b>	Dificultades en la interpretación de la información entregada en el gráfico de caja y bigote.	
<b>Objetivo:</b>	Analizar las medidas de posición y orden en el diagrama da caja y bigote.	
<b>Contenidos previos</b>		<b>Materiales</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Media</li> <li>- Rango</li> <li>- Cuartiles</li> <li>- Concentración</li> <li>- Dispersión</li> <li>- Simetría</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Data</li> <li>- Guía con situación problemática</li> <li>- Plumones</li> <li>- Cartulinas</li> <li>- Regla</li> </ul>

### Desarrollo de la clase

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
<b>15 minutos</b>			
<p>Los estudiantes forman grupos de cuatro personas.</p> <p>Los estudiantes leen la noticia y responden a las preguntas del docente.</p> <p><small>Actividad clase 3 Chile es la selección de menor estatura y de mayor edad de toda la Copa América Los jugadores de la "Rojo" tienen un promedio de 1,76 metros y en cuanto a edad la media llega a los 28. Además, el plantel nacional es el que registra menos peso, con 73 kilos de cociente.</small></p> 	<p>El docente proyecta la noticia, pide a los estudiantes que la lean.</p> <p>El docente pregunta a los estudiantes que opinan ellos de la noticia, creen que es así, cómo lo pueden comprobar.</p> <p>El docente pregunta a los estudiantes cómo creen que pueden ayudar a estos amigos a solucionar el problema.</p>	<p>¿Los estudiantes comprenden lo que se les pide?</p> <p>¿los estudiantes relacionan el tema con la clase anterior?</p> <p>¿los estudiantes participan de la clase?</p> <p>¿el problema es suficientemente desafiante?</p>	<p>Diagrama de caja y bigote</p> <p>Valor máximo</p> <p>Valor mínimo</p> <p>Rango</p> <p>Cuartiles</p> <p>Mediana</p>

<p>Respuestas esperadas de los estudiantes</p> <p>La noticia está en lo cierto, la selección chilena es la más baja el promedio lo dice. Lo que dice la noticia habría que comprobarlo, para eso necesitamos la información de los promedios de todos los equipos de la copa américa.</p> <p>Yo recuerdo que en séptimo básico nos enseñaron que para comparar grupos usar el promedio no siempre era bueno.</p> <p>Creo que lo mejor sería ocupar el gráfico que aprendimos la clase pasada.</p>
---

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada																																																																														
45 minutos																																																																																	
<p>Los estudiantes reflexionan sobre la mejor manera en la que pueden solucionar el problema.</p> <p>Los estudiantes debaten sobre la noticia del diario y toman decisiones respecto a los pasos a seguir.</p> <p>Cada grupo recibe la guía en donde están los valores de las doce selecciones de la copa América.</p>	<p>El docente entrega las guías a los estudiantes.</p> <p>El docente pregunta a los estudiantes de qué manera creen ellos que pueden demostrar que lo que dice el diario es verdad.</p> <p>El docente monitorea el trabajo de los grupos</p>	<p>¿los estudiantes tendrán en cuenta en su trabajo el gráfico de caja y bigote?</p> <p>¿el tiempo planificado será suficiente?</p>	<p>Mediana</p> <p>Cuartil</p> <p>Gráfico de caja y bigote</p> <p>Dispersión y concentración</p>																																																																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>País</th> <th colspan="5">Datos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Argentina</td> <td>Mín: 169</td> <td>Máx: 194</td> <td>Q<sub>1</sub>: 174</td> <td>Q<sub>2</sub>: 180</td> <td>Q<sub>3</sub>: 185</td> </tr> <tr> <td>Brazil</td> <td>Mín: 169</td> <td>Máx: 191</td> <td>Q<sub>1</sub>: 173</td> <td>Q<sub>2</sub>: 181</td> <td>Q<sub>3</sub>: 187</td> </tr> <tr> <td>Belgica</td> <td>Mín: 157</td> <td>Máx: 185</td> <td>Q<sub>1</sub>: 171</td> <td>Q<sub>2</sub>: 178</td> <td>Q<sub>3</sub>: 183</td> </tr> <tr> <td>Chile</td> <td>Mín: 162</td> <td>Máx: 187</td> <td>Q<sub>1</sub>: 171</td> <td>Q<sub>2</sub>: 177</td> <td>Q<sub>3</sub>: 180</td> </tr> <tr> <td>México</td> <td>Mín: 165</td> <td>Máx: 190</td> <td>Q<sub>1</sub>: 173</td> <td>Q<sub>2</sub>: 178</td> <td>Q<sub>3</sub>: 185</td> </tr> <tr> <td>Perú</td> <td>Mín: 165</td> <td>Máx: 192</td> <td>Q<sub>1</sub>: 178</td> <td>Q<sub>2</sub>: 183</td> <td>Q<sub>3</sub>: 188</td> </tr> <tr> <td>Jamaica</td> <td>Mín: 174</td> <td>Máx: 199</td> <td>Q<sub>1</sub>: 178</td> <td>Q<sub>2</sub>: 183</td> <td>Q<sub>3</sub>: 188</td> </tr> <tr> <td>Venezuela</td> <td>Mín: 170</td> <td>Máx: 197</td> <td>Q<sub>1</sub>: 174</td> <td>Q<sub>2</sub>: 181</td> <td>Q<sub>3</sub>: 184</td> </tr> <tr> <td>Paraguay</td> <td>Mín: 167</td> <td>Máx: 191</td> <td>Q<sub>1</sub>: 175</td> <td>Q<sub>2</sub>: 179</td> <td>Q<sub>3</sub>: 184</td> </tr> <tr> <td>Uruguay</td> <td>Mín: 170</td> <td>Máx: 196</td> <td>Q<sub>1</sub>: 176</td> <td>Q<sub>2</sub>: 180</td> <td>Q<sub>3</sub>: 186</td> </tr> <tr> <td>Ecuador</td> <td>Mín: 164</td> <td>Máx: 193</td> <td>Q<sub>1</sub>: 171</td> <td>Q<sub>2</sub>: 174</td> <td>Q<sub>3</sub>: 183</td> </tr> <tr> <td>Colombia</td> <td>Mín: 168</td> <td>Máx: 192</td> <td>Q<sub>1</sub>: 177</td> <td>Q<sub>2</sub>: 181</td> <td>Q<sub>3</sub>: 183</td> </tr> </tbody> </table>				País	Datos					Argentina	Mín: 169	Máx: 194	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 185	Brazil	Mín: 169	Máx: 191	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 187	Belgica	Mín: 157	Máx: 185	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 183	Chile	Mín: 162	Máx: 187	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 177	Q <sub>3</sub> : 180	México	Mín: 165	Máx: 190	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 185	Perú	Mín: 165	Máx: 192	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188	Jamaica	Mín: 174	Máx: 199	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188	Venezuela	Mín: 170	Máx: 197	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 184	Paraguay	Mín: 167	Máx: 191	Q <sub>1</sub> : 175	Q <sub>2</sub> : 179	Q <sub>3</sub> : 184	Uruguay	Mín: 170	Máx: 196	Q <sub>1</sub> : 176	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 186	Ecuador	Mín: 164	Máx: 193	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 174	Q <sub>3</sub> : 183	Colombia	Mín: 168	Máx: 192	Q <sub>1</sub> : 177	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 183
País	Datos																																																																																
Argentina	Mín: 169	Máx: 194	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 185																																																																												
Brazil	Mín: 169	Máx: 191	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 187																																																																												
Belgica	Mín: 157	Máx: 185	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 183																																																																												
Chile	Mín: 162	Máx: 187	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 177	Q <sub>3</sub> : 180																																																																												
México	Mín: 165	Máx: 190	Q <sub>1</sub> : 173	Q <sub>2</sub> : 178	Q <sub>3</sub> : 185																																																																												
Perú	Mín: 165	Máx: 192	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188																																																																												
Jamaica	Mín: 174	Máx: 199	Q <sub>1</sub> : 178	Q <sub>2</sub> : 183	Q <sub>3</sub> : 188																																																																												
Venezuela	Mín: 170	Máx: 197	Q <sub>1</sub> : 174	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 184																																																																												
Paraguay	Mín: 167	Máx: 191	Q <sub>1</sub> : 175	Q <sub>2</sub> : 179	Q <sub>3</sub> : 184																																																																												
Uruguay	Mín: 170	Máx: 196	Q <sub>1</sub> : 176	Q <sub>2</sub> : 180	Q <sub>3</sub> : 186																																																																												
Ecuador	Mín: 164	Máx: 193	Q <sub>1</sub> : 171	Q <sub>2</sub> : 174	Q <sub>3</sub> : 183																																																																												
Colombia	Mín: 168	Máx: 192	Q <sub>1</sub> : 177	Q <sub>2</sub> : 181	Q <sub>3</sub> : 183																																																																												

Posibles preguntas ante la actividad:

Estudiante: ¿se puede representar la información de la tabla con un gráfico de barras?

Profesor: ¿Qué datos tienes en la tabla? ¿esos datos se pueden poner en un gráfico de barra?

Estudiante: ¿tenemos que calcular el rango con los datos de los equipos?

Profesor: ¿qué es el rango? ¿es necesario hacer su cálculo para ayudar a los chicos del problema?

Estudiante: ¿los datos que nos entregó son los cuartiles?

Profesor: ¿Cuáles fueron los temas que tratamos las dos clases anteriores?

Posibles dificultades y errores:

Los estudiantes pueden elegir un gráfico de barras para representar los datos de cada selección.

Los estudiantes pueden usar distintas escalas para cada uno de los gráficos.

Los estudiantes pueden no establecer relaciones entre los gráficos y la concentración en cada uno de los cuartiles.

Los estudiantes pueden tener dificultades en representar los cuartiles, valor mínimo y máximo.

Actividad de aprendizaje	Intervención docente	Reflexiones sobre la marcha de la clase	Matemática involucrada
20 minutos			
<p>Dos grupos exponen al resto del curso sus conclusiones respecto a la noticia y el debate de los cuatro amigos.</p> <p>El grupo curso da sus argumentos y opiniones respecto a lo que exponen sus compañeros.</p> <p>El grupo curso llegan a un consenso de las conclusiones realizando</p>	<p>El docente pide a dos grupos que expongan sus conclusiones respecto a la información que entrega la noticia.</p> <p>El docente anota en la pizarra las conclusiones de los estudiantes para luego realizar una institucionalización con las conclusiones de ellos mismos.</p>	<p>¿los estudiantes lograron ver la veracidad de la noticia?</p> <p>¿los estudiantes pudieron utilizar correctamente el gráfico para comparar?</p>	

una institucionalización en conjunto			
--------------------------------------	--	--	--

Respuesta experta

Al graficar todas las situaciones en la misma hoja y con la misma escala los estudiantes llegan a la conclusión que si bien es cierto el promedio de la selección chilena es más bajo, no es la selección con la mayor concentración de altura en el primer cuartil, el país que tiene mayor cantidad de jugadores con estaturas menores es Bolivia.

Si se busca comparar dos o mas grupos de datos la media aritmética o promedio no es el mejor estadístico para realizar esta comparación, en estos casos lo mejor es usar los cuartiles, mediana y el gráfico de caja y bigote, al poner dos o más gráficos en conjunto es posible apreciar de manera rápida que conjunto presenta mayor dispersión y simetría.