Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

# Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio según el Modelo de Blomjøh y Højgaard-Jensen

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

De: Carlos Andrés Ledezma Araya

Profesores Guía:
Romina Menares Espinoza
Elisabeth Ramos Rodríguez
Patricia Vásquez Saldías
Elizabeth Montoya Delgadillo

2017

# ÍNDICE

## Resumen

El presente estudio tiene por objetivo general proponer una secuencia didáctica para el aprendizaje de la modelación con el objeto matemático función exponencial para estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años). Para ello, se diseñó una secuencia de tres clases con el objeto declarado, estructuradas según el modelo didáctico-cognitivo de Blomhøj y Højgaard-Jensen para el proceso de modelización matemática, con el cual, en conjunto con elementos de la Teoría APOE, se analizaron los resultados de tres intervenciones que se implementaron del primer plan de clase de la secuencia. Los resultados evidenciaron los logros de los grupos de sujetos informantes con respecto al proceso de modelización, y las construcciones mentales en determinadas fases del mismo, permitiendo proyectar el estudio para futuras implementaciones y reformulaciones. Además, este informe presenta la secuencia didáctica completa que se diseñó, con sus respectivos análisis apriorísticos.

Palabras clave: función exponencial, modelación, modelización matemática, secuencia didáctica.

## Abstract

The present study has the general objective of proposing a didactical sequence for the learning of the modelling strategy with the mathematical object exponential functions for students of second grade of secondary education (15 to 16 years old). For this, a sequence of three classes with the mentioned object was designed, structured according to the didactical-cognitive Blomjøh and Højgaard-Jensen's model for the process of mathematical modelling, with which, together with elements of the APOS Theory, were analysed the results of three interventions that were implemented from the first class plan of the sequence. The results showed the achievements of the groups off informant subjects according to the modelling process, and the mental constructions in certain phases of the same, allowing to project the study for future implementations and reformulations. In addition, this report presents the complete didactical sequence that was designed with its respective a priori analysis.

Keywords: exponential function, didactical sequence, mathematical modelling, modelling strategy.

*Dedicatoria*

Este trabajo está dedicado con mucho amor a mis padres, Nora y Carlos, quienes son una de mis principales motivaciones para seguir creciendo y desarrollándome día a día.
A mi Equipo de Investigación en ℂ, el mayor soporte colaborativo de este último tiempo.
WLTIMM.

En este largo camino de transmisión de éxitos, meritocracia y selección natural.

Este estudio fue parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT nº 1171744.

# CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Abrate, Pochulu y Vargas (2006), la importancia del concepto de función en la matemática, entre otros, es su carácter de unificador, debido a su presencia en todas las ramas, desde la relación de variables de distinto tipo hasta la modelación de situaciones del mundo real. Si bien la noción de función en la matemática escolar aparece desde los primeros niveles educativos, como en el conteo, en el trabajo con patrones numéricos y geométricos, y en la proporcionalidad directa e inversa, por mencionar algunos ejemplos, el currículo chileno postula la iniciación de su estudio formal en el nivel octavo año básico (13 a 14 años), donde las Bases Curriculares vigentes centran el foco del eje Álgebra y Funciones en dicho contenido (en sus formas lineal y afín), de la mano de la habilidad de modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas (MINEDUC, 2016a).

Continuando en el currículum, es que en el curso segundo año medio se trabaja en los contenidos de tres tipos de funciones: logarítmica, raíz cuadrada y exponencial, con las que también se busca desarrollar la habilidad de modelar (MINEDUC, 2011). Respecto a dicha habilidad, Guerrero-Ortiz y Mena-Lorca (2015) declaran que, en el plano de la educación matemática, modelar tiene por objetivo representar una realidad utilizando un modelo matemático, la cual es llevada a cabo desde dos lineamientos: por una parte, construyendo conceptos matemáticos a través de la modelación; y por otra, utilizando los conceptos aprendidos para construir modelos matemáticos.

El presente estudio considera el objeto matemático función exponencial y la habilidad de modelar, para el curso segundo año medio, enmarcado en la propuesta de una secuencia didáctica bajo la metodología del Estudio de Clases japonés. En este primer capítulo, se presentan la problemática del estudio, en conjunto con los antecedentes que la sustentan; también los objetivos propuestos y las preguntas que pretenden ser respondidas con esta investigación; para finalizar con la justificación y antecedentes que respaldan el presente estudio.

## Problemática y antecedentes

No es reciente que, en la enseñanza de la matemática, se aborde la relación entre esta disciplina y el mundo real a través de conceptos como ‘modelización’ y ‘aplicaciones’, que, de acuerdo a Blum et al. (2003), permiten denotar este tipo de conexiones. Mientras que el término ‘modelización’ se enfoca en una dirección desde lo real hacia lo matemático, enfatizando en el proceso involucrado, el concepto de ‘aplicación’ lo hace en la dirección contraria, desde lo matemático hacia lo real, enfatizando en los objetos involucrados, sobre todo en aquellas partes del mundo real que son posibles de tratar de acuerdo a una correspondencia con los modelos matemáticos (Blum et al., 2003), existiendo, de este modo, una interrelación entre estos dos conceptos.

Según Blum y Borromeo-Ferri (2009), 'modelar' forma parte de una de las competencias fundamentales a desarrollar en los estudiantes, del mismo modo que el trabajo con la modelización matemática trae consigo una serie de beneficios, como por ejemplo, se pueden mencionar que:

- ayuda a los estudiantes a mejorar el entendimiento del mundo,
- da soporte al aprendizaje de las matemáticas como forma de motivación, para la formación de conceptos, y la mejora de la comprensión y la retención,
- contribuye a desarrollar varias competencias matemáticas y actitudes apropiadas, además de propiciar una imagen adecuada de esta disciplina.

Así es como la modelización matemática puede ser considerada como una herramienta significativa para el aprendizaje de la matemática, tanto por la relación que permite establecer entre lo matemático y lo real, como por los beneficios que trae a los estudiantes al momento de su implementación como estrategia de aula, en donde se le conoce como modelación.

En las Bases Curriculares vigentes para la asignatura de matemática, se enfatiza sobre la importancia de modelar como una habilidad de pensamiento matemático que se desarrolla desde séptimo año básico (MINEDUC, 2011), definiéndola como "construir un modelo físico o abstracto que captura parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla" (MINEDUC, 2016a, p. 98). Lo anterior, se relaciona con esta imperante necesidad de trabajar con problemas contextualizados para vincular la matemática con el mundo real, convirtiendo a la resolución de problemas y la modelización como claves para el desarrollo de competencias matemáticas (Aparisi y Pochulu, 2013).

Sin embargo, Biembengut y Hein (2004) plantean que existen dificultades para llevar a cabo estos procesos de modelización, los que tienen su origen en la formación de profesores y la consecuente falta de vivencias, por parte de los estudiantes, en actividades de este tipo. De este modo, la búsqueda y elección de problemas adecuados, tanto a las tendencias actuales y lineamientos curriculares, como a un determinado enfoque didáctico, termina siendo un enorme desafío para los profesores (Aparisi y Pochulu, 2013).

Si bien el currículum nacional plantea la importancia de la modelización como proceso y de la modelación como estrategia didáctica, de la mano de una evolución en el desarrollo de esta habilidad a través de los distintos niveles educativos, los textos de estudio utilizados en el nivel segundo año medio (Blanco et al., 2009; Muñoz, Jiménez y Rupin, 2013) evidencian una carencia de ejercicios de modelación con el objeto matemático función exponencial, por lo que la problemática aquí planteada es que, la poca comprensión de dicho contenido, puede radicar en esta falta de actividades que involucren la habilidad de modelar por parte de los estudiantes.

# Objetivos del estudio

A raíz de la problemática del presente estudio, es que se plantea como objetivo general:

Proponer una secuencia didáctica para el aprendizaje de la modelación con el objeto matemático función exponencial para estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años).

Para lograrlo, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una secuencia didáctica de tres clases sobre la modelación con el objeto matemático función exponencial para estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años) (OE 1).
- Implementar una clase de la secuencia didáctica (OE 2).
- Analizar los resultados obtenidos de la implementación (OE 3).

Una vez que se ha completado el diseño de la secuencia didáctica (OE 1), se lleva a cabo la implementación de la primera de las tres clases diseñadas (OE 2), en función de lo cual se procede al análisis de los resultados obtenidos de la misma (OE 3). En la figura 1 se muestra la relación entre los objetivos propuestos.

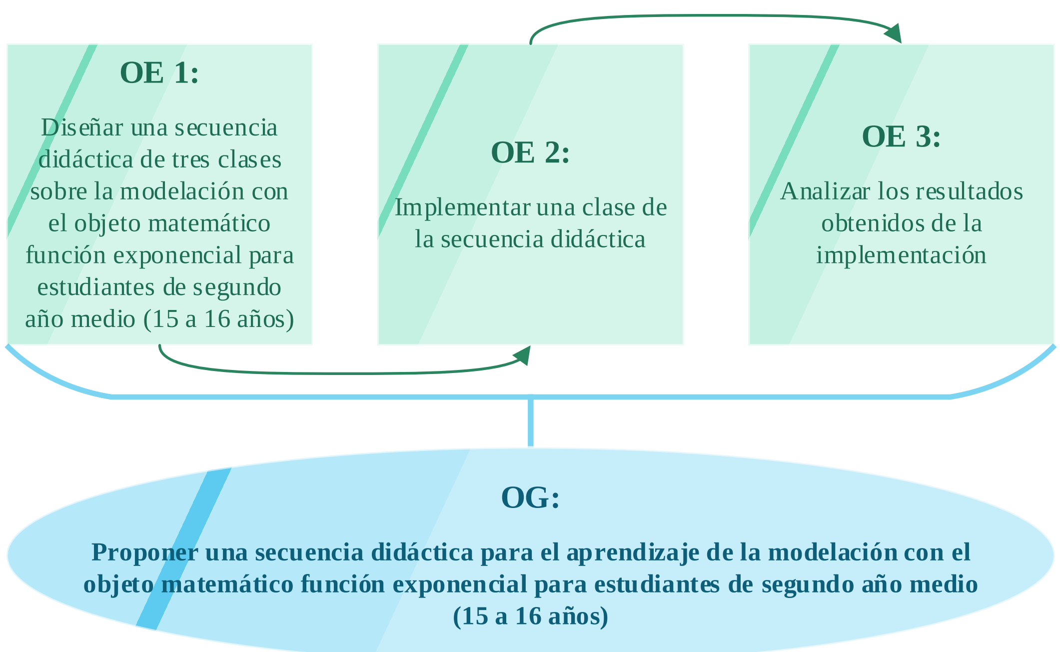



Figura 1: Esquema del objetivo general y los objetivos específicos.
Fuente: elaboración propia.

## Preguntas de investigación

Para complementar los objetivos declarados, en este estudio se plantean dos preguntas de investigación:

- ¿Qué características didácticas debe tener una clase de modelación para que los estudiantes sean capaces de alcanzar las etapas del proceso de modelización matemática? (PI 1).
- ¿Cómo aporta el proceso de modelización matemática al aprendizaje del objeto función exponencial? (PI 2).

Debido a que las preguntas de investigación deben guardar relación con los objetivos propuestos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), en la figura 2 se muestra esta conexión entre ambos elementos.

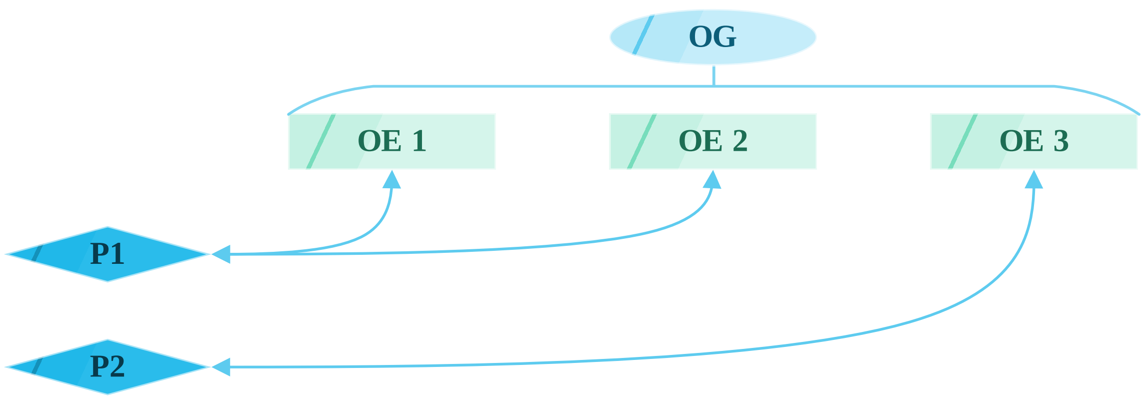



Figura 2: Esquema de la relación entre objetivos y preguntas de investigación.
Fuente: elaboración propia.

## Justificación y antecedentes del estudio

Los estudios acerca de la importancia de la modelización matemática y de la modelación como estrategia de enseñanza han sido numerosos (Bassanezi y Biembengut, 1997; Biembengut y Hein, 2004; Blomhøj, 2008; Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj y Kjeldsen, 2009; Blum et al., 2003; Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Guerrero-Ortiz y Mena-Lorca, 2015; Villa, 2007; entre otros). Si bien el entendimiento del proceso de modelización no es uno, debido a la existencia de distintos ciclos de modelización generados desde la década de 1970 (véase Borromeo-Ferri, 2006), todos convergen en la idea de que la utilidad de la modelación como estrategia de aula es un aporte significativo al proceso de aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas en todos los niveles educativos.

Por otra parte, estudios como el de Arrieta y Hernández (2005), García (2012), González, García, García, Travieso y Puldón (2015), y Ocampo (2012), son evidencias de algunas propuestas de modelación utilizando la función exponencial, o donde se presenta un trabajo con esta. Sin embargo, y como muchos otros estudios aparte de los mencionados, su enfoque es hacia el nivel universitario, para carreras relacionadas al área de la ingeniería o las ciencias.

Una de las habilidades que propone el documento curricular vigente para la asignatura de matemáticas es la de modelar, que permite a los estudiantes "aprender a usar variadas formas para representar datos, y […] seleccionar y aplicar los métodos matemáticos apropiados y las herramientas adecuadas para resolver problemas" (MINEDUC, 2016a, p. 98). Si a lo antes declarado, se adhieren las ventajas que las investigaciones han planteado acerca de esta habilidad, y de la estrategia de modelación como práctica de aula, la propuesta presente en este estudio pretende encontrarse en consonancia con el fortalecimiento de los aprendizajes de conceptos y habilidades matemáticas, tanto desde el plano de las directrices curriculares como didácticas, a través del proceso de modelización matemática.

Si bien se ha presentado en la problemática del estudio las complicaciones que tiene el llevar a cabo los procesos de modelización en el aula, en la propuesta didáctica de este estudio se considera la elaboración de una secuencia que atienda a dicha dificultad, representando una herramienta para los docentes que se desempeñen en el nivel de segundo año medio. Desde una mirada investigativa, la concatenación entre un modelo didáctico-cognitivo con los elementos de una teoría de la didáctica de las matemáticas, permite establecer un punto de vista innovador sobre cómo se evidencian ciertas construcciones mentales dentro del ciclo de la modelización, que permiten un análisis más profundo de cómo se llevan a cabo las prácticas en el aula, y los resultados que se obtienen de las mismas.

# CAPÍTULO II: LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Este capítulo aborda el concepto de función exponencial, considerado como el objeto matemático para el estudio, desde distintos puntos de vista: se comienza con la definición matemática y escolar del objeto, para continuar con un esquema de los prerrequisitos para su formación conceptual; del mismo modo, se presenta un análisis curricular y del tratamiento para la función exponencial en los textos de estudio del nivel segundo año medio; y para finalizar, se presentan los aspectos histórico-epistemológicos sobre el objeto matemático en cuestión.

## Definición matemática y escolar

Chevallard (1998) plantea que los contenidos del saber son transformados en forma adaptativa para que se vuelva un objeto de enseñanza, en un proceso que denominó transposición didáctica. Este apartado presenta la definición del concepto de función exponencial, que incluye el saber matemático y el escolar del objeto de este estudio.

### Definición matemática

Para iniciar este apartado, se presentará la noción de cota superior e inferior de un conjunto de números reales, de acuerdo a las definiciones de Bartle (1967, pp. 47-49).

1.1. DEFINICIÓN. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un elemento $u$ de $\mathbb{R}$ se dice que es una cota superior de $S$ si $s \leq u$ para todo $s$ en $S$. Del mismo modo, un elemento $w$ de $\mathbb{R}$ se dice que es una cota inferior de $S$ si $w \leq s$ para todo $s$ en $S$.

Pueda que un subconjunto $S$ de $\mathbb{R}$ no tenga una cota superior, pero si tiene una, entonces tiene infinitamente muchas.

EJEMPLO 1:

- Si el conjunto $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, entonces $S_1$ no tiene cota superior.
- Si el conjunto $S_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$, entonces $S_2$ tampoco tiene cota superior.
- Si el conjunto $S_3 = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$, entonces $1$ es una cota superior; de hecho, cualquier número real $u \geq 1$ es también una cota superior de $S_3$.
- Si el conjunto $S_4 = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$, entonces $S_4$ tiene las mismas cotas superiores que $S_3$, aunque $S_4$ contiene una de sus cotas superiores.

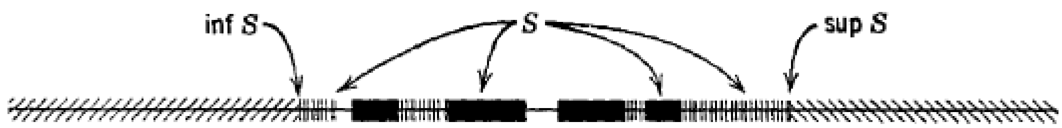
Nótese que todo número real es la cota superior para un conjunto vacío.

TERMINOLOGÍA:

- Si un conjunto $S$ tiene una cota superior, se dice que está superiormente acotado.
- Si un conjunto $S$ tiene una cota superior e inferior, se dice que está acotado.

- Si un conjunto $S$ tiene una cota inferior, se dice que está inferiormente acotado.
- Si un conjunto $S$ carece de cotas superiores e inferiores, se dice que está desacotado.

1.2. DEFINICIÓN. Sea $S$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ que está superiormente acotado. Una cota superior de $S$ se dice que es un supremo (o la menor cota superior) de $S$ si esta es menor que cualquier otra cota superior de $S$. Del mismo modo, si $S$ está inferiormente acotado, entonces una cota inferior de $S$ se dice que es el ínfimo (o la mayor cota inferior) de $S$ si esta es mayor que cualquier otra cota inferior de $S$.




cotas inferiores de $S$ cotas superiores de $S$

Figura 3: Supremo e ínfimo de un conjunto.
Fuente: extraído desde Bartle (1967, p. 48).

Se dice que un número real $u$ es el supremo de un subconjunto $S$ si satisface:

(i) $\forall s \in S$, $s \leq u$.
(ii) $\forall s \in S$, si $s \leq v$, entonces $u \leq v$.

La condición (i) hace de $u$ una cota superior de $S$; la condición (ii) hace de $u$ menor o igual que cualquier cota superior de $S$.

Un conjunto $S$ puede tener, a lo más, un supremo y un ínfimo.

PRUEBA 1:

Sea $u_1 \neq u_2$, ambos supremos de $S$, por lo tanto, ambos son cotas superiores de $S$. Si $u_1$ es un supremo de $S$ y $u_2$ una cota superior de $S$, entonces $u_1 \leq u_2$, y en sentido inverso, puede ser que $u_2$ sea un supremo de $S$ y $u_1$ una cota superior de $S$, entonces $u_2 \leq u_1$. Por lo tanto, si $u_1 \leq u_2$ y $u_2 \leq u_1$, entonces $u_1 = u_2$, lo cual es una contradicción[1].

TERMINOLOGÍA:

- El supremo de $S$ se denota por $\sup S$.
- El ínfimo de $S$ se denota por $\inf S$.

1.3. LEMA. Un número $u$ es el supremo de un conjunto no vacío $S$ de números reales si y sólo si tiene las siguientes dos propiedades:

(i) No hay elementos $s$ de $S$ con $u < s$.

[1] Un argumento similar se puede utilizar para probar que sólo se puede tener un ínfimo en un conjunto $S$.

(ii) Si $v < u$, entonces hay un elemento $s$ en $S$ tal que $v < s$.

PRUEBA 2:

Sea $u$ que satisface (i) y (ii). La primera propiedad implica que $u$ es una cota superior de $S$. Si $u$ no es el supremo de $S$, sea $v$ una cota superior de $S$ tal que $v < u$. La segunda propiedad entonces contradice la posibilidad de que $v$ sea una cota superior de $S$. Por el contrario, sea $u$ el supremo de $S$. Como $u$ es una cota superior de $S$, entonces (i) se mantiene. Si $v < u$, entonces $v$ no es una cota superior de $S$. Por lo tanto, existe al menos un elemento de $S$ que excede a $v$, verificando (ii).

Como se mostró en el ejemplo 1, el número $x = 1$ es el supremo de $S_3$ y $S_4$, donde un conjunto contiene al supremo y el otro no. Así, cuando se dice que un conjunto tiene un supremo, no se declara que el conjunto contiene o no al supremo como elemento del mismo.

TERMINOLOGÍA:

- Como el supremo de un conjunto $S$ es una cota superior especial, es evidente que sólo los conjuntos acotados superiormente tienen un supremo.
- Un conjunto vacío está acotado superiormente por cualquier número real, por lo cual no tiene un supremo.
- Es una propiedad fundamental del sistema de los números reales que todo conjunto no vacío subconjunto de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente tiene un supremo.

---

Para continuar, se definen los conceptos de supremo e ínfimo de un conjunto, también utilizando las definiciones de Bartle (1967, pp. 49-50).

2.1. PRINCIPIO DEL SUPREMO. Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior también tiene un supremo.

PRUEBA 3:

Sea $a$ un número real que no es la cota superior de un conjunto no vacío $S$, y sea $b$ una cota superior de $S$, entonces, $a < b$. Sea $I_1$ el intervalo cerrado $[a, b]$, donde el punto $(a + b)/2$ de $I_1$ es una cota superior de $S$, definiendo $I_2 = [a, (a + b)/2]$ e $I_2 = [(a + b)/2, b]$. En cualquier caso, se renombran los límites inferior y superior de $I_2$ de la forma $a_2$ y $b_2$, respectivamente. Si el punto medio $(a_2 + b_2)/2$ de $I_2$ es una cota superior de $S$, se definen $I_3 = [a_2, (a_2 + b_2)/2]$ e $I_3 = [(a_2 + b_2)/2, b_2]$. Si se renombran los extremos, estos bisecan el intervalo, y así sucesivamente. De esta manera, se obtiene una secuencia anidada $(I_n)$ de intervalos cerrados no vacíos tales que la longitud de $I_n$ es $(b - a)/2^{n-1}$, donde el límite inferior $a_n$ de $I_n$ nos es una cota superior de $S$, pero el límite superior $b_n$ de $I_n$ sí es una cota superior del conjunto $S$. De acuerdo a la completitud de los números reales, hay un número real $x$ que pertenece a todos los intervalos $I_n$. Usando el lema 1.3 se demuestra que $x$ es el supremo de $S$.

Suponiendo que existe un elemento $s$ en $S$ tal que $x < s$, entonces $s - x > 0$ y ahí existe un número natural $n$ tal que

$$\text{longitud } (I_n) = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} < s - x$$

Como $x$ pertenece a $I_n$, se tiene que $a_n \leq x \leq b_n < s$, lo que contradice el hecho de que $b_n$ es una cota superior de $S$, por lo tanto, $x$ es una cota superior de $S$.

Suponiendo que $v < x$, como $x - v > 0$, existe un número natural $m$ tal que

$$\text{longitud } (I_m) = b_m - a_m = \frac{b-a}{2^{m-1}} < x - v$$

Como $x \in I_m$, entonces $v < a_m \leq x \leq b_m$. Por construcción, $a_m$ no es una cota superior de $S$, entonces existe un elemento $s'$ en $S$ tal que $v < a_m < s'$. De acuerdo al lema 1.3, el punto $x$ es el supremo de $S$.

2.2. COROLARIO. Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota inferior, también tiene un ínfimo.

PRUEBA 4:

Sea $S$ acotado inferiormente. Para demostrar que $S$ tiene un ínfimo, se puede proceder de dos maneras: por un método que use la idea del teorema 2.1, reemplazando las cotas superiores por las inferiores, $>$ por $<$, etc.; o por un segundo método de prueba para reemplazar al conjunto $S$ con su 'reflexión'.

$$S_1 = \{-s | s \in S\}$$

Por lo tanto, un número real pertenece a $S_1$ si y sólo si su inverso aditivo está en $S$. Dado que $S$ está inferiormente acotado (por $w$), entonces $S_1$ está acotado superiormente (por $-w$). Invocando el teorema 2.1, se infiere que $S_1$ tiene un supremo $u$ y un ínfimo $-u$.

---

Habiéndose clarificado los conceptos de cota superior e inferior, supremo e ínfimo de un conjunto, a continuación, se presenta la definición de $a^x$ para $x \in \mathbb{R}$, de acuerdo a Miatello y Tirao (2005, pp. 33-36).

3.1. DEFINICIÓN. Sea $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$, entonces $a^x = \sup\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$
- Si $a < 1$, entonces $a^x = \inf\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$
- Si $a = 1$, entonces $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ambos casos, a pesar de ser distintos, resultan completamente análogos.

3.2. LEMA. Sea $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 1$, $\sup\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{a^{q'} | q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$
(ii) Si $0 < a < 1$, $\inf\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{a^{q'} | q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$

PRUEBA 5:

Es válida la desigualdad $\sup \leq \inf$ en (i) y (ii). Si en (i) se tuviese $\sup < \inf$, existiría $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} + \epsilon < a^{q'}, \forall q' \geq x \tag{1}$$

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, números racionales $q_n$, $q_n'$, tales que $q_1 < \cdots < q_n \leq x$, $q_1' > \cdots > q_n' \geq x$, y $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{q_n'\} = x$, entonces se tiene que $q_n' - q_n \to 0$, y por lo tanto, $a^{q_n'-q_n} \to 1$, por continuidad de $q \mapsto a^q$ en $q = 0$.

Ahora bien, por (1), $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a^{q_n'-q_n} = \frac{a^{q_n'}}{a_n^q} \geq \frac{a^{q_n'}}{\sup\{a^{q_n} | n \in \mathbb{N}\}} > 1 + \frac{\epsilon}{\sup\{a^{q_n} | n \in \mathbb{N}\}} = 1 + \epsilon'$$
$$(\epsilon' > 0)$$

Lo anterior es imposible, ya que $a^{q_n'-q_n} \to 1$, si $n \to \infty$.

3.3. TEOREMA. Sea $a > 0$. La función de variable real $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ es continua, estrictamente creciente si $a > 1$, idénticamente $1$ si $a = 1$, y estrictamente decreciente si $a < 1$, cuyos límites son:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1; \\ 0 & \text{si } a < 1; \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1; \\ +\infty & \text{si } a < 1. \end{cases}$$

Si $a > 0$, entonces valen las siguientes propiedades $(\forall x)(\forall y) \in \mathbb{R}$:

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{$\mathrm{e}_{\mathbb{R}}$}$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \tag{$\mathrm{p}_{\mathbb{R}}$}$$
$$(ab)^x = a^x \cdot a^y \tag{$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}$}$$
$$a^{-x} = (a^x)^{-1} \tag{$\mathrm{i}_{\mathbb{R}}$}$$

PRUEBA 6:

Dado que $a^q > 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$, se sigue de la definición que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, si $x_1 < x_2$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x_1 < q < x_2$. Por definición y la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, se cumple que $a^{x_1} < a^q < a^{x_2}$.

Para explicar la continuidad de $a^x$, se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < x$ y $a^x - a^q < \epsilon$ por el lema 3.2 existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q'$ y $a^{q'} - a^x < \epsilon$. De ello resulta que si $x' \in [q, q']$, entonces $|a^{x'} - a^x| < \epsilon$.

Si $a = 1 + \alpha$ con $\alpha > 0$, se tiene para $n \in \mathbb{N}$, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$. Luego, si $x > n$, se tiene que $a^x > a^n > 1 + n\alpha$, que es arbitrariamente grande si $n$ es suficientemente grande. Así, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Ahora bien, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x} = 0$. Si $a < 1$, entonces $1/a > 1$ y, por lo tanto, $a^x = a^{(-1)(-x)} = (a^{-1})^{-x}$; pero conforme al caso anterior, teniendo en cuenta que cuando $x \to \pm\infty$, $-x \to \mp\infty$.

---

La definición continúa con la función logarítmica como inversa de la exponencial.

### Definición escolar

En el texto escolar Matemática 2 Proyecto Bicentenario[2] (Blanco et al., 2009), se aborda el objeto matemático función exponencial en la unidad ‘Exponentes y Logaritmos’, presentando la siguiente definición, con su respectiva representación gráfica:

> Se llama **función exponencial** a toda función tal que $\boldsymbol{f(x))b^x}$, para todo $\boldsymbol{b}$ real positivo distinto de $\mathbf{1}$. $\mathrm{Dom}\left(f(x)\right) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Rec}\left(f(x)\right) = \mathbb{R}^+$. $\boldsymbol{f(x)}$ tiene como asíntota al eje **X**. Dependiendo del valor de la base $\boldsymbol{b}$, si $\boldsymbol{b > 1}$, la función $\boldsymbol{f(x)}$ es **creciente** en todo su dominio, si $\boldsymbol{0 < b < 1}$, la función $\boldsymbol{f(x)}$ es decreciente en todo su dominio. (p. 179)

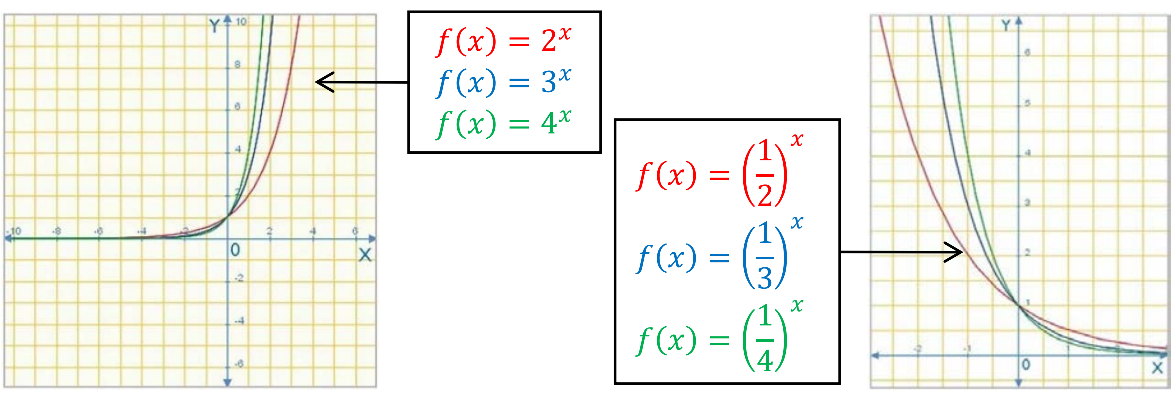



Figura 4: Gráficas de funciones exponenciales, según definición escolar del primer texto analizado. Fuente: adaptado desde Blanco et al. (2013, pp. 178-179).

En el texto escolar Matemática 2º Medio Texto del Estudiante[3] (Muñoz et al., 2013), se aborda el objeto matemático función exponencial en la unidad ‘Álgebra’, presentando la siguiente definición, con su respectiva representación gráfica:

---

[2] Texto de estudio utilizado en el sistema particular de enseñanza.

[3] Texto de estudio distribuido por el Ministerio de Educación de Chile, para establecimientos subvencionados y municipalizados.

Podemos observar que una función exponencial se puede escribir de la forma

$$\boldsymbol{f(x) = ab^x}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$ se tiene, $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}\, f(x) = \mathbb{R}^+$. La gráfica interseca con el eje Y en el punto $(0, a)$, y no se interseca con el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica. La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de $\boldsymbol{b}$. Así:

– si $b > 1$, la gráfica de la función es **creciente**, , mientras que si $0 < b < 1$, la gráfica es **decreciente**. Además, mientras mayor es el valor de $\boldsymbol{b}$, la función tiene un mayor crecimiento.

– si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una **dilatación** de $y = b^x$, mientras que si $|a| > 1$, es una **contracción**. (p. 207)

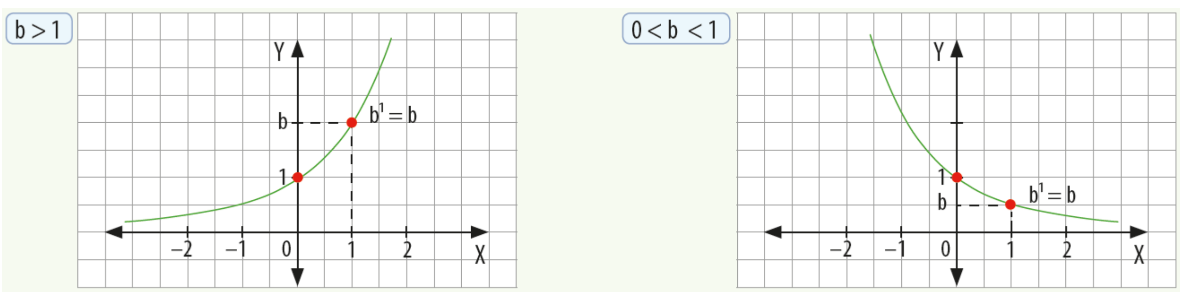


Figura 5: Gráficas de funciones exponenciales, según definición escolar del segundo texto analizado. Fuente: extraído desde Muñoz et al. (2013, p. 207).

Hacia las páginas finales del texto, se presenta un glosario que define a la función exponencial como “aquella cuya variable independiente se encuentra en el exponente de una potencia de la forma $\boldsymbol{y = ab^x + c}$” (Muñoz et al., 2013, p. 379).

**Comparación entre definiciones**

Es evidente la diferencia entre la definición desde el saber matemático y el escolar. Por una vertiente, la construcción axiomática, basada en teoremas, lemas y corolarios demostrados en los trabajos de Bartle (1967) y Miatello y Tirao (2005), que evidencian la necesidad de formar la función exponencial a partir del principio del supremo y del ínfimo, y de la completitud del sistema de los números reales ($\mathbb{R}$), con un foco netamente desde el lenguaje algebraico y simbólico, sin profundizar en el tratamiento gráfico de la función. Por otra vertiente, la presentación de la función exponencial desde la notación algebraica, y sus respectivas representaciones tabular y gráfica evidenciadas en los textos escolares de Blanco et al. (2009) y Muñoz et al. (2013), adosando a sus definiciones el análisis del comportamiento gráfico (traslaciones y reflexiones de la función en el plano) y ejercicios que implican el tratamiento y conversión de registros para el objeto estudiado.

Sin embargo, también existen puntos en común entre ambas definiciones, por ejemplo, se aclara que el dominio de la función exponencial corresponde a los números reales y que su recorrido a los reales positivos.

Tabla 1: Comparación respecto a las definiciones de dominio y recorrido de la función exponencial.

| Notación | Autores |
|---|---|
| $a^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ | Miatello y Tirao (2005, p. 34) |
| $\mathrm{Dom}\, f = \{\mathbb{R}\} \quad \mathrm{Rec}\, f = \{\mathbb{R}^+\}$ | Blanco et al. (2009, p. 179) y Muñoz et al. (2013, p. 207) |

Otro punto en común entre ambos tipos de definiciones, es para el comportamiento en los casos en que la base de la función es mayor que uno, o mayor que cero y menor que uno.

Tabla 2: Comparación respecto a los comportamientos de la base de la función exponencial.

| Notación | Autores |
|---|---|
| Si $a > 1$, $\sup\{a^q \mid a \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{a^{q'} \mid q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$<br>Si $0 < a < 1$, $\inf\{a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{a^{q'} \mid q' \in \mathbb{Q}, x \leq q'\}$ | Miatello y Tirao (2005, p.34) |
| Si $b > 1$, la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio<br>Si $0 < b < 1$, la función $f(x)$ es decreciente en todo su dominio | Blanco et al. (2009, p. 179) |
| Si $b > 1$, la gráfica de la función es creciente<br>Si $0 < b < 1$, la gráfica es decreciente | Muñoz et al. (2013, p. 207) |

## Mapa conceptual

Para sintetizar los contenidos previos para la formación del objeto matemático función exponencial, el mapa conceptual la figura 6 los organiza para su visualización, considerando los objetos trabajados en los ejes Números (en verde) y Álgebra y Funciones (en celeste) del currículum nacional vigente.

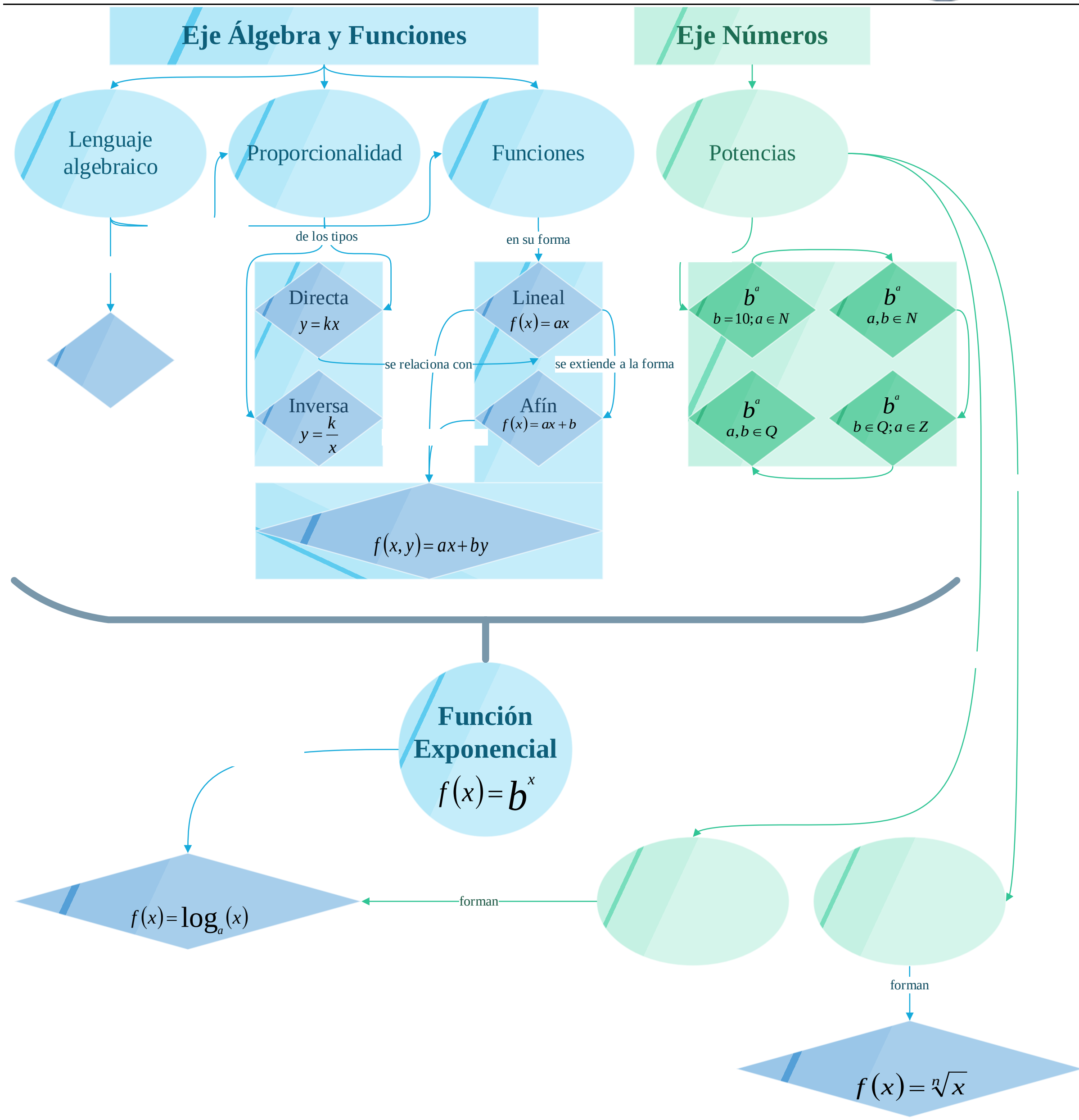



Figura 6: Mapa conceptual de la función exponencial.
Fuente: elaboración propia.

## Barrido curricular

En este apartado, se presentan tanto los contenidos tratados en los niveles previos que son necesarios para formar el concepto de función exponencial en segundo año medio, como la continuidad curricular que se le da al mismo en los cursos posteriores. Para este objeto, se consideran los contenidos de potencias (trabajadas en el eje Números) y funciones (trabajadas en el eje Álgebra y Funciones) en el intervalo comprendido entre séptimo año básico y cuarto año medio, como se muestra en la figura 7.

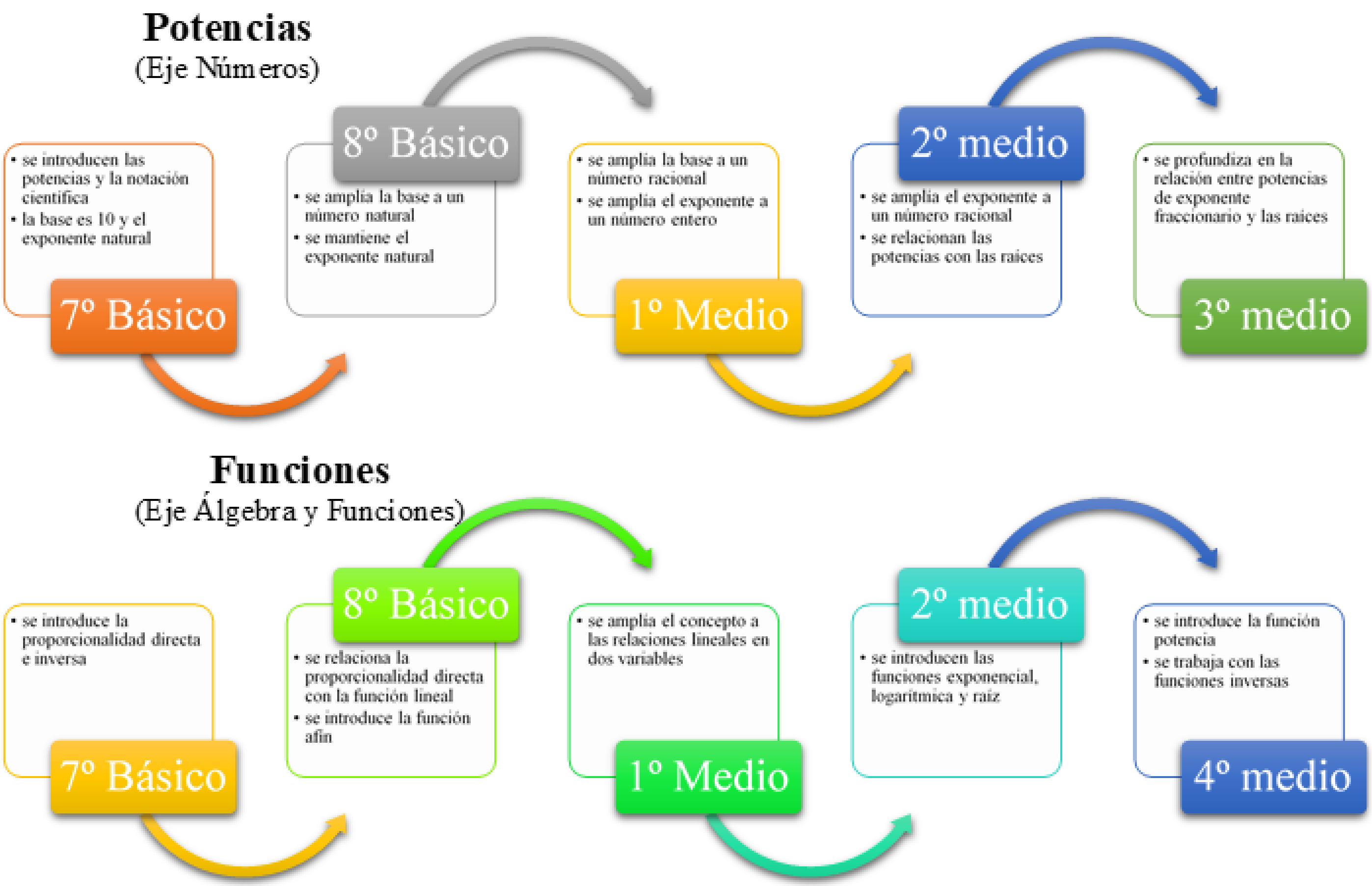



Figura 7: Esquema del barrido curricular para los conceptos de potencia y función.
Fuente: adaptado desde MINEDUC (2002, 2011, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d)

Los esquemas presentados corresponden a las Bases Curriculares y programas de estudio vigentes al 2017 para los cursos mencionados, sin embargo, la adaptación curricular para el año 2018 en segundo año medio, incluirá el trabajo con función exponencial dentro de sus objetivos de aprendizaje a través del cambio porcentual y su identificación con el interés compuesto (OA nº 6), además de incluir la función cuadrática (OA nº 3) y la inversa de una función lineal y cuadrática (OA nº 5), otrora trabajados en los niveles tercero y cuarto año medio (MINEDUC, 2016a).

## Análisis de textos escolares

Para analizar los textos escolares, se comparó el tratamiento que cada uno le da al concepto de función exponencial en lo que respecta a la habilidad de modelar. Como se mencionó anteriormente, se consideraron dos textos de estudio: Matemática 2 Proyecto Bicentenario (Blanco et al., 2009) y Matemática 2º Medio Texto del Estudiante (Muñoz et al., 2013), ambos utilizados en distintos establecimientos educacionales (de dependencia privada y subvencionada/municipal, respectivamente) para el nivel segundo año medio.

**Matemática 2 Proyecto Bicentenario (Blanco et al., 2013)**

El primer texto de estudio[4] analizado (Blanco et al., 2013) comienza el contenido definiendo a la función exponencial "al establecer la relación entre el exponente de una potencia y el valor de la misma mediante la función $\boldsymbol{f}$, con la siguiente expresión: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}$" (p. 178), para continuar con el análisis, en los registros gráfico, algebraico y tabular, para los casos en que la base $b > 1$, $0 < b < 1$. Posterior a ello, se presentan los contenidos de las funciones logarítmica y raíz cuadrada; para continuar con las traslaciones y reflexiones de las gráficas de las tres funciones ya abordadas. Luego, se prosigue con una presentación de aplicaciones de funciones exponenciales, para los casos de crecimiento exponencial e interés compuesto.

Con respecto a un modelo exponencial, el texto define lo siguiente:

> Las características estudiadas de la función exponencial permiten modelar numerosas situaciones pertenecientes a distintas áreas del conocimiento, como geología, física, biología, economía, música, sociología y otras más.
>
> Los modelos matemáticos que tienen las propiedades de la función exponencial se conocen con el nombre de modelos de **crecimiento** o **decrecimiento exponencial.** Estos modelos se pueden generalizar a través de la siguiente función:
>
> $$N(t) = N_0 A^{\lambda t} \text{ con Dom } N = \mathbb{R} \text{ y Rec } N = \mathbb{R}^+$$
>
> Donde $\mathbf{N_0}$ es la cantidad inicial de elementos en el instante cero, $\mathbf{A}$ es la razón de crecimiento y $\boldsymbol{\lambda}$ es un número real distinto de cero. Además, si $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$, la función es un modelo de crecimiento; mientras que si $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$, es un modelo de decrecimiento exponencial.

Figura 8: Definición y descripción de los modelos exponenciales en el primer texto analizado.
Fuente: extraído desde Blanco et al. (2009, p. 190).

La figura 8 evidencia que la obtención de un modelo matemático comienza con la identificación de los elementos que lo constituyen para definir una función que modele una situación. Posterior a ello, en la figura 9, se ejemplifica dicho procedimiento en un caso de crecimiento exponencial (además del interés compuesto), y en otro de decrecimiento.

[4] Para ver en extenso el tratamiento de la función exponencial en este texto, véase Anexo 1: Tratamiento de la Función Exponencial en Blanco et al. (2009).

## Crecimiento exponencial ($\lambda > 0$)

Determina la función exponencial que modela una población de bacterias que se duplica cada un minuto considerando que, al inicio, el cultivo tiene **1.000** bacterias. ¿En cuánto tiempo el cultivo tendrá **100.000** bacterias?

La siguiente tabla muestra la cantidad de bacterias hasta el minuto **5**.

| Cantidad de bacterias | 1.000 | 2.000 | 4.000 | 8.000 | 16.000 | 32.000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Minutos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

En este caso:

$$A = 2,\ \lambda = 1 \text{ y } N_0 = 1.000$$

Por lo tanto, la función que modela la situación es la siguiente:

$$N(t) = 1.000 \cdot 2^t \text{ con Dom } N = \mathbb{R} \text{ y Rec } N = \mathbb{R}^+$$

Habrá **100.000** bacterias luego de **6,645** minutos, aproximadamente, ya que:

$$\begin{aligned} N(t) &= 100.000 = 1.000 \cdot 2^t \\ 100 &= 2^t \qquad / \log \\ \log 100 &= t \cdot \log 2 \\ t &= \frac{\log 100}{\log 2} \approx \frac{2}{0{,}301} \\ t &\approx 6{,}645 \end{aligned}$$

## Decrecimiento exponencial ($\lambda < 0$)

La concentración de un medicamento en el organismo en el instante **t** (horas), responde al siguiente modelo exponencial:

$$N(t) = 10 \cdot (1{,}25)^{-t}\ \text{mg/cm}^3$$

Donde **N(t)** es la cantidad de medicamento en **mg/cm$^3$** en un instante **t**. Calcula la concentración del medicamento luego de **3** horas.

Luego de **3** horas, la concentración del medicamento será de **5,12 mg/cm$^3$**, ya que:

$$N(3) = 10 \cdot (1{,}25)^{-3} = 10 \cdot 0{,}512 = 5{,}12$$

Figura 9: Ejemplificación de situaciones de crecimiento y decrecimiento exponencial.
Fuente: extraído desde Blanco et al. (2009, p. 190-191).

De acuerdo a la estructura del texto de estudio, en general, se presentan ejercicios resueltos de los contenidos abordados, los que son replicables para el desarrollo de las actividades posteriores que, con respecto a la modelización, incluyen la presentación de un modelo prestablecido y la evaluación de sus variables, aplicaciones de interés compuesto y la generación de una función que modele una determinada situación. Dichos ejercicios, sólo consideran la representación y tratamiento en los registros algebraico y aritmético para dar respuesta a las situaciones planteadas.

**Matemática 2º Medio Texto del Estudiante (Muñoz et al., 2013)**

El segundo texto de estudio[5] analizado (Muñoz et al., 2013) comienza el contenido presentando una situación comparativa de crecimiento y decrecimiento exponencial, basado en la cantidad de bacterias de una colonia, la cual es modelizada utilizando este tipo de función. Con respecto a ello es que el texto define:

> En el primer cultivo, la cantidad de bacterias **crece** a cada minuto, triplicándose. Esto se conoce con el nombre de **crecimiento exponencial**.
> En el segundo cultivo, la cantidad de bacterias **disminuye** a cada minuto, dividiéndose por 3. Esto se conoce como **decrecimiento exponencial**. (Muñoz et al., 2013, p. 206)

Posterior a ello, el texto sugiere una actividad con GeoGebra para analizar el comportamiento gráfico-analítico de las funciones exponenciales, variando sus valores de base $(b)$ y constante $(a)$, para finalizar con una definición sobre el objeto matemático en cuestión. Luego, en la sección de práctica, se presentan ejercicios de repaso con potencias, conversión desde el lenguaje natural al algebraico, y operatoria con términos algebraicos; de análisis gráfico (gráfica en el plano, traslación) y algebraico (dominio y recorrido) de funciones exponenciales; para finalizar con un ejercicio que implica evaluar un modelo matemático prestablecido (ver la figura 10, izquierda). En una sección de síntesis de la sub-unidad de funciones, se presenta un ejercicio que implica generar una función-modelo para una situación (ver la figura 10, derecha) en conjunto con su gráfica en el plano. En la sección de síntesis de la unidad ‘Álgebra’, se presenta un ejercicio que implica evaluar un modelo matemático prestablecido (ver la figura 10, abajo).

[5] Para ver en extenso el tratamiento de la función exponencial en este texto, véase Anexo 3: Tratamiento de la Función Exponencial en Muñoz et al. (2013).

**10. Conexiones.** En epidemiología se utilizan diversos modelos matemáticos para representar el número de personas contagiadas por una enfermedad. Por ejemplo, el número de personas contagiadas por un virus esta dado por la función

$$f(t) = \frac{10000 \cdot (2,72)^t}{(2,72)^t + 9000}$$

donde t es la cantidad de días.

a) ¿Cuántos contagiados se espera que habrá luego de 1, 4 y 10 días?

b) Grafica la función. ¿Qué ocurre al cabo de mucho tiempo? Discute con tus compañeros.

**7** La cantidad de ciertas bacterias presentes en un cuerpo se reproduce exponencialmente, duplicando su población cada 3 minutos.

**a.** Completa la siguiente tabla.

Producción de la población de bacterias

| Tiempo (minutos) | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Población | 500 | | | | | | | | |

**b.** ¿Qué función f(x) modela la situación según el tiempo de reproducción?

**c.** ¿Cuál es el dominio y el recorrido de f(x)?

**d.** Esboza un gráfico de f(x).

**14** Una colonia de microorganismos presente en el ecosistema crece exponencialmente según la fórmula: $P(t) = 4 \cdot 2^{2t} \cdot 10^3$. Si t representa el tiempo en horas, ¿al cabo de cuántas horas habrá 64 000 microorganismos?

**A.** 1 **C.** 2 **E.** 8

**B.** 1,5 **D.** 4

Figura 10: Ejercicios que implican el uso de modelos matemáticos en el segundo texto de estudio analizado.
Fuente: extraído desde Muñoz et al. (2013, pp. 209, 217, 255)

De acuerdo a la estructura del texto de estudio, en general, se introduce el contenido a partir de una situación problema que se va resolviendo, para luego desarrollar actividades. Los ejercicios presentados en la figura 10 son los únicos que implican un trabajo con modelos matemáticos, en donde sólo uno permite que los estudiantes generen uno propio, con base en los valores de una tabla, mientras que los dos restantes sólo requieren la evaluación de sus variables para dar respuesta a una determinada situación.

## Aspectos histórico-epistemológicos

En este apartado, se presentan los aspectos histórico-epistemológicos, de forma descriptiva-secuencial, sobre el objeto matemático función exponencial, en el que se abordan los conceptos de potencias, logaritmos y función, los cuales se consideran basales para la formación del objeto estudiado.

### La noción de potencia

O’Connor y Robertson (2017) desarrollaron un estudio histórico sobre la etimología del término potencia y su evolución en el transcurso del tiempo, abarcando el periodo comprendido entre la Antigüedad y mediados del siglo XVI, por lo que el trabajo de dichos autores[6] será el máximo referente considerado en este punto, complementado con algunos ejemplos presentes en Ríbnikov (1987).

El primer uso dado a este término fue para el cuadrado, donde el matemático griego Euclides (325-265 a.C.) usó la frase ‘en potencia’ para referirse a que las

[6] Si bien el trabajo de O’Connor y Robertson (2017) se encuentra en inglés, se presentan las principales ideas según traducción propia.

magnitudes son conmensurables en potencia cuando sus cuadrados son conmensurables. Como la noción era netamente geométrica, en la definición incluida en su segundo libro, precisó que “la potencia de una recta es el cuadrado de la misma recta” (O’Connor y Robertson, 2017, párr. 2). En la obra ‘El Arenario’ de Arquímedes (287-212 a.C.) se encontraron registros de sucesiones de potencias de igual base “$a^0$, $a^1$, $a^2$, $a^3$, …, con motivo de lo que se expresó la afirmación equivalente: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$” (Ríbnikov, 1987, p. 141), lo cual también fue tratado por Diofanto (201/15-285/99 d.C.). Una definición muy similar a la de Euclides es la propuesta por Thomas Digges (1546-1595) en su libro ‘Pantometria’ de 1571, en donde “se dice que una recta en potencia es igual con dos o más rectas cuando su cuadrado es igual al de todas las otras” (O’Connor y Robertson, 2017, párr. 4).

Nicole Oresme (1328-1382) fue quien logró generalizar el concepto de potencia, introduciendo también los exponentes fraccionarios, las reglas de operatoria con estos y una notación para aquello, como lo muestra el siguiente ejemplo en Ríbnikov (1987):

$$\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 27} = 27^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1 \cdot p}{3 \cdot 3} = 3^{\frac{1}{3}} \quad \frac{2 \cdot p}{3 \cdot 8} = 8^{\frac{2}{3}}$$

(p. 122)

Nicolas Chuquet (1445-1488), en su obra ‘Triparty en la science des nombres’ (Tres partes en la ciencia de los números), escrita a finales del siglo XC, pero publicada en 1880 (O’Connor y Robertson, 2017), introdujo:

> los exponentes negativos y el cero, los números negativos y perfeccionó el simbolismo algebraico [en donde] no hay aún un símbolo especial para la incógnita y la mayoría de los símbolos están formados mediante las abreviaturas de las palabras (álgebra simbólica sincopada) [de este modo] $5^3\overline{m}$ designa $5x^{-3}$ ($m$ es la abreviatura de la palabra minus), y en general $a^k m$ designa $ax^{-k}$. (Ríbnikov, 1987, p. 123)

Por su parte, Heinrich Schreybet (1492/6-1525/6), en su obra ‘Ayn new Kunstlich Buech’ (Un nuevo libro de habilidades) de 1521, escribió:

> Cuando ahora un número sea escrito después de otro de acuerdo a una proporción, escriba entonces cada cantidad con el número de su orden, de modo que, en el caso de la proporción doble, el número 1 se coloque sobre 2, 2 sobre 4, …

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 16 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | ... | 65536 |

(O’Connor y Robertson, 2017, párr. 11-12)

En el mismo libro, Schreyber incluye una tabla para la división de potencias, en la cual escribe $2a$ para representar $a^2$, $3a$ para $a^3$, etc. Por ejemplo, para dividir $8a$ ($a^8$) por $5a$ ($a^5$), es resultado es $3a$ ($a^3$), aunque $5a$ ($a^5$) dividido por $8a$ ($a^8$), según su notación, daría como resultado $8a/5a$, lo que se interpretaría en la actualidad como $5a/8a$. Su notación fue cuestionada al colocar el operador a la izquierda, quizás por ser considerado como analista en vez de algebrista (O'Connor y Robertson, 2017). Sin embargo, fue Michael Stifel (1487-1567), en su obra 'Arithmetica integra' (1544), quien extendió las potencias de 2 presentes en la tabla de Schreyber hacia la izquierda, para los casos en que tenían exponentes negativos, por lo que escribió –1 sobre ½, –2 sobre ¼, etc. (O'Connor y Robertson, 2017). Una de las aportaciones de Descartes también fue la de estandarizar la notación de exponentes utilizadas en las potencias (Cantoral y Farfán, 2004).

### La noción de logaritmo

Entre las razones que justifican el descubrimiento de los logaritmos, a comienzos del siglo XVII, se encuentra la necesidad de simplificar los cálculos trigonométricos utilizados con fines astronómicos y de navegación, además del cálculo de las riquezas de acuerdo a las reglas de interés compuesto (Velásquez, 2014). Sin embargo, sus cimientos teóricos se encuentran en los trabajos de Arquímedes sobre potencias (siglos III y II a.C.), las que llevaron a Oresme al establecimiento de comparaciones entre progresiones geométricas y aritméticas (siglo XIV), y a Stifel a sistematizarlas (siglo XVI), lo que desembocó en la elaboración de tablas por Simon Stevin (1548-1620), que a comienzos del siglo XCII ya eran muy utilizadas (Ríbnikov, 1987). Estas tablas, buscaban calcular porcentajes complejos, de la forma $(1+r)^n$, con valores de $r$ (razón) cada vez más pequeños para ser aplicados en las tasas de porciento (Ríbnikov, 1987).

Fue el suizo Jost Bürgi (1552-1632) quien, en su trabajo con Kepler entre 1603 y 1611, elaboró una tabla basada en la de Stevin, con un valor de $r = 10^{-4}$, y para evitar el trabajo con fracciones, introdujo el factor $a = 10^8$, obteniendo una fórmula de progresión geométrica de la siguiente forma:

$$g_k = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

> Bürgi los puso en correspondencia con los términos de la progresión geométrica: 0, 10, 20, 30, … obtuvo dos series de valores:
>
> $$\begin{array}{ccccc} 10^8, & 10^8(1+10^{-4}), & 10^8(10+10^{-4})^2, & 10^8(1+10^{-4})^3, & \dots \\ 0, & 10, & 20, & 30 & \dots \end{array}$$
>
> (Ríbnikov, 1987, p. 141)

Esta se considera, en esencia, como la primera tabla de antilogaritmos, la cual no fue publicada hasta 1620, seis años más tarde que John Napier (1550-1617) irrumpiera con 'Coninis mirifici logarithmorum descriptio' (Descripción de las extraordinarias tablas de logaritmos), un compendio de tablas de logaritmos de funciones trigonométricas, que incluían 8 cifras para los argumentos desde 0º a 90º

(Ríbnikov, 1987). Napier comenzó a trabajar en este método alrededor de 1594, tomándole veinte años el teorizar sus ideas (Stewart, 2008).

Si bien el método de Napier facilitaba la idea, entonces ya conocida, de que la adición de exponentes de potencias de igual base era igual a multiplicarlas, aún quedaban espacios que llenar, y que su método no abarcaba. Fue así como apareció la figura de James Craig, quien le transmitió el método de 'postaferesis', que podía convertir productos en sumas, una idea que Napier tomó y mejoró (Stewart, 2008). La idea era, ahora, formar una serie geométrica cuya razón fuese muy cercana a 1, en este caso, 0,9999999, creando una serie decreciente, de la siguiente forma:

> Él empezaba por 10.000.000 y luego lo multiplicaba por potencias sucesivas de 0,9999999. Si escribimos $\text{Naplog}\, x$ para el logaritmo neperiano de $x$, este tiene la curiosa característica de que
>
> $$\text{Naplog}\, 10.000.000 = 0$$
> $$\text{Naplog}\, 9.999.999 = 1$$
>
> y así, sucesivamente. El logaritmo neperiano, $\text{Naplog}\, x$, satisface la ecuación
>
> $$\text{Naplog}(10^7 xy) = \text{Naplog}(x) + \text{Naplog}(y)$$
>
> (Stewart, 2008, p. 86)

La siguiente mejora de los logaritmos vino de la mano del inglés Henry Briggs (1561-1630), quien entabló una colaboración con Napier y sugirió simplificar su idea, en este caso, utilizando el logaritmo en base 10, de la forma "$L = \log_{10} x$, que satisface la condición $x = 10^L$. Ahora $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$ […]. Para encontrar $xy$ se suman sus logaritmos y luego se encuentra el antilogaritmo del resultado" (Stewart, 2008, p. 86). Tras la muerte de Napier, el trabajo quedó en manos de Briggs, quien en 1617 publicó 'Logarithmorum Chilias Prima' (Un millar de logaritmos), incluyendo los logaritmos enteros de 1 a 1.000, con 14 cifras decimales; y en 1624 publicó 'Arithmetic Logarithmica', con logaritmos comunes de 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000, con igual cantidad de cifras decimales (Stewart, 2008).

Esta etapa finalizó cuando en 1620, John Speidell calculó las tablas de logaritmos de base 10, y Edmond Gunter elaboró una escala logarítmica, para que, en 1628, Vlacq completase las tablas de Briggs en decimales con 10 cifras desde 1 a 100.000 (Ríbnikov, 1987).

### La noción de función

Según Kleiner (2009), la evolución del concepto de función se remonta hacia 4000 años atrás, de los cuales, 3700 consisten en sólo aproximaciones. Desde los tiempos de los egipcios y babilonios es que se cuenta con vestigios de papiros con relaciones, representando de este modo una génesis de la noción de función, sin tener idea de lo que era una variable, pues no era objeto de estudio de la época (López, 2011). Esta carencia abstractiva sobre el concepto de variable, hacía que las cantidades fueran descritas en forma verbal o a través de representaciones gráficas, y donde el conteo, al implicar una correspondencia entre i) un conjunto de objetos, ii) una secuencia de números para contar, iii) las cuatro operaciones aritméticas elementales, representase una función de dos variables, tal como las tablas babilónicas (Sastre, Boubée, Rey, Maldonado y Villacampa, 2006), apareciendo la noción de función, en forma implícita, como relaciones numéricas que dependían de las operaciones aritméticas (López, 2011).

El estudio de la geometría por las antiguas civilizaciones, en donde se realizaban ecuaciones para el cálculo de áreas y volúmenes, y –por parte de los griegos– el trabajo en una forma implícita de la idea del límite, representaron importantes aportaciones, pero no lograron una intención explícita de estudiar a la función como tal, pues la matemática de la época se centraba mayormente en lo concreto y medible por los instrumentos con los que se contaba (López, 2011). Entre los factores que produjeron este extenso letargo durante la Antigüedad destacan la falta de prerrequisitos algebraicos, como las estructuras numéricas de los números reales y el desarrollo de la notación simbólica, a lo que se adosa una desmotivación por profundizar en una noción tan abstracta (Kleiner, 2009).

La Edad Media trajo consigo un pequeño avance, pues al estudiar fenómenos naturales, las ideas fueron desarrolladas en torno a “cantidades variables independientes y dependientes sin definirlas específicamente” (Sastre et al., 2006, p. 24). Hacia el segundo cuarto del siglo XIV, un grupo de filósofos del Colegio de Merton, en Oxford, abordaron el problema de la cuantificación, derivado de una carencia del concepto de variación continua de cantidades en la matemática de los griegos, quienes sólo “manejaban cantidades numéricas y discretas o geométricas y estáticas, ocupándose […] del estudio del movimiento uniforme (linear o circular)” (López, 2011, p. 17), provocando que los conceptos de aceleración y velocidad instantánea cobrasen un sentido.

En el curso de los años 1450-1650, es que se sucedieron una serie de avances que fueron fundamentales para el concepto de función, como, por nombrar algunos, la extensión de los números hacia los reales (e incluso los complejos), la creación de un álgebra simbólica, el estudio del movimiento como un problema medular en la ciencia, y la unión del álgebra con la geometría (Kleiner, 2009). Los trabajos de René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665) lograron la emancipación de la aritmética y el álgebra de su subordinación ante la geometría, logrando la representación de curvas en sistemas de coordenadas, situación otrora limitada por los procedimientos griegos (Sastre et al., 2006).

Todo lo anterior permitió que, entre la segunda mitad del siglo XVII y la primera del XVIII, se sucediera una síntesis de varias aportaciones previamente realizadas por filósofos y matemáticos como Cavalieri, Barrow, Descartes, Fermat y Wallis, además de “la asimilación consciente del hecho de que el trazado de tangentes y la cuadratura de curvas eran procesos inversos e interrelacionados” (Cantoral y Farfán, 2004, p. 78), propiciando la construcción de una estructura algorítmica, de la mano de Isaac Newton (1642/3-1726/7) y Gottfried Leibniz (1646-1716), que en forma independiente el uno del otro, se les atribuye el título de descubridores del cálculo infinitesimal (Cantoral y Farfán, 2004). Sin embargo, el introductor formal de la palabra 'función' en 1692 fue Leibniz, para designar un objeto matemático asociado con una curva (Kleiner, 2009), es decir, "cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, como la longitud de la tangente, la normal, sub-tangente y de la ordenada" (Sastre et al., 2006, p. 24), además de introducir los conceptos de constante, variable, coordenadas y parámetro, aunque sin utilizar la definición de función conocida hoy en día (Sastre et al., 2006).

Desde el siglo XVIII, la función cobra protagonismo en el estudio de la matemática de la época, destacando la figura de Leonhard Euler (1707-1783), quien, al no aceptar los argumentos geométricos de ese entonces para el trabajo infinitesimal, desarrolló su propia teoría sobre las funciones, y en su obra 'Introductorio in analysin infinitorum' (Introducción en análisis infinito) (1748), define que "una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada arbitrariamente con esta variable y con números o cantidades constantes" (Cantoral y Farfán, 2004, p. 102). Euler se refería a que dichas operaciones podrían ser aritméticas, trascendentales o hasta números complejos, además de clasificarlas según sus tipos e, incluso, considerar a las cantidades trigonométricas como funciones, las que otrora sólo se relacionaban con la circunferencia (López, 2011). A él también se le debe la notación de función conocida en la actualidad como $f(x)$ (Leithold, 1998).

El trabajo de matemáticos posteriores fue complementando el concepto de función, y por destacar algunas aportaciones relevantes, basta con mencionar a Cauchy, que centró su idea en la dependencia entre variables; a Fourier, que le dio una utilidad práctica basado en la teoría del calor, posterior a la invención de la máquina de vapor; y a Dirichlet, que enfatizó en la correspondencia unívoca entre variables, la cual es muy similar a la actual definición, pues posteriormente se complementó con la Teoría de Números de Cantor (López, 2011).

### La función exponencial

La inconformidad de Euler ante los procedimientos de demostración geométrica de lo infinitesimal, le llevaron a crear su propia teoría, realizando también una amplia clasificación de las funciones, además de una separación entre continuas y discontinuas. Él, a su vez, estudió el comportamiento de la función exponencial $(y = a^z)$, clasificándola de la siguiente manera:

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } \begin{cases} z > 0 \\ z < 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{, entonces } \begin{matrix} y > 0 \\ y > 0 \\ y = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Si } a < 0 \text{ y } \begin{cases} z > 0 \\ z < 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{, entonces } \begin{matrix} y > 0 & & y < 0 & & y \in \not\subset \\ y > 0 & \text{o} & y < 0 & \text{o} & y \in \not\subset \\ y > 1 & & & & \end{matrix}$$

$$\text{Si } a = 0 \text{ y } \begin{cases} z > 0 & y = 0 \\ z < 0, \text{ entonces} & y > \infty \\ z = 0 & y = 1 \end{cases}$$

(Cantoral y Farfán, 2004, p. 103)

Euler, además de formalizar la notación de la exponencial como se conoce en la actualidad (Velásquez, 2014), también definió que "el logaritmo en base $a$ de $x$ es $y$, si y sólo si $x = a^y$" (Cantoral y Farfán, 2004, p. 103), lo cual representa una previa para la formación del concepto de función inversa entre la exponencial y logarítmica, las que desarrolló en series, utilizando el teorema del binomio de Newton (Cantoral y Farfán, 2004).

Fue Jacob Bernoulli (1654-1705) quien, al plantearse el problema del interés compuesto, logró obtener un valor muy cercano a lo que, años más tarde, Euler formalizaría como el número $e$ (Velásquez, 2014), el cual obtuvo del trabajo con series de funciones exponenciales, de la forma $e = 1 + 1\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ (Cantoral y Farfán, 2004), en una aproximación de 18 decimales que demostraba que es un número irracional (Velásquez, 2014).

Los trabajos de matemáticos posteriores, como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), establecieron que la función exponencial satisfacía determinadas propiedades, como "sea $f$ una función con dominio en los reales no nula, continua en el punto cero que verifica que: $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todos los reales $x$, $y$. Entonces existe un real $\alpha$ tal que $f(x) = e^{\alpha x}$, para todo real $x$" (Morales, 2011, en Velásquez, 2014, p. 26), por lo que se ha deducido que propiedades como esta son las que causan el surgimiento de la función exponencial (Velásquez, 2014).

# CAPÍTULO III: ESTUDIO DE CLASES CON FUNCIÓN EXPONENCIAL

Como parte de los objetivos específicos de este trabajo, en este capítulo se presentan el diseño de un estudio de clases llevado a cabo con el objeto matemático función exponencial, en conjunto con el análisis de los resultados obtenidos de su implementación. Para comenzar, se presenta una breve reseña sobre la metodología del Estudio de Clases japonés, para continuar con la presentación y análisis a priori del primer plan diseñado como parte de una secuencia didáctica de tres clases. El capítulo prosigue mencionando los elementos del marco conceptual que guiaron el estudio y el diseño de las clases, además de los elementos metodológicos considerados para el análisis de los resultados obtenidos de su implementación.

## El Estudio de Clases japonés

En Isoda y Olfos (2009), se define el Estudio de Clases “una actividad que favorece el mejoramiento de las capacidades de enseñar de los profesores participantes” (p. 35), cuya génesis se encuentra en Japón hacia finales del siglo XIX. En la actualidad, es entendido como una modalidad de desarrollo profesional docente que tiene entre sus objetivos mejorar la enseñanza, del mismo modo que representa tanto una forma de investigación-acción (Benavides y Calvache, 2013) como de investigación sobre la práctica (Isoda y Olfos, 2009). El Estudio de Clase se estructura como un proceso cíclico que consta de tres etapas: a) preparación de la clase; b) momento de implementación; c) discusión evaluativa inmediata; y al término de estas, se da vuelve nuevamente a reiniciar el ciclo (Isoda y Olfos, 2009).

## Plan de clase 1: «El Caso del Buzo»

En este apartado, se presenta la primera clase[7] de la secuencia didáctica diseñada, y que fue implementada para este estudio, cuyo objetivo es **modelar una situación de decrecimiento exponencial**. Se comienza describiendo los tres momentos de la misma, para continuar con los respectivos análisis apriorísticos. La clase (y la secuencia didáctica en general) se estructura de acuerdo a las fases del proceso de modelización matemática[8] de acuerdo al referente teórico considerado para su diseño (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008). Estas son:

- Formulación del problema (en adelante, FP).
- Sistematización (en adelante, SM).
- Matematización (en adelante, MT).
- Análisis del sistema matemático (realizada en paralelo con MT; en adelante, ASM).
- Interpretación/Evaluación (en adelante, IE).
- Validación (en adelante, VL).

[7] Para ver la planificación de la clase, véase Anexo 3: Plan de Clase Nº 1 – «El Caso del Buzo».
[8] Para conocer en detalle las fases del proceso de modelización matemática consideradas, véase el apartado ‘El proceso de modelización matemática’ en este capítulo (pág. 35).

### Momento de inicio

Se comienza la clase presentando el objetivo declarado a los estudiantes: **modelar una situación del mundo real**. Si previamente se ha trabajado la estrategia de modelación con los estudiantes, pregunta al curso qué es (o qué recuerdan sobre) un modelo matemático, de lo contrario, les define un modelo como una expresión que representa una situación para así estudiarla. Luego, el docente proyecta un video introductorio sobre la profundidad del mar, como motivación de la clase, pidiendo a los estudiantes que tomen atención sobre la información que aporta el mismo, realizando una breve puesta en común acerca de los elementos que les hayan llamado la atención a los alumnos.

Los estudiantes se deben organizar en grupos de tres a cinco integrantes cada uno, a los cuales se les entrega la actividad «El Caso del Buzo» en forma escrita, además de proyectarla en la pizarra frente al curso. Se realiza una lectura en conjunto de la misma y se les pide que escriban dos ideas (como grupo) de lo que observan de la tabla. Lo anterior, se encuentra estructurado dentro de la fase FP. El momento de inicio tiene una duración aproximada no mayor a 15 minutos.

### Momento de desarrollo

Con las observaciones de los estudiantes, el profesor realiza una puesta en común para formular una conjetura al respecto, determinando que, con cada metro de profundidad, el flujo luminoso disminuye a la mitad de su valor anterior. Los alumnos continúan organizados en sus respectivos grupos, a cada uno de los cuales se les entregas hojas en blanco donde deberán responder dos preguntas: ¿cuánto será el flujo luminoso a los 6 metros de profundidad?, ¿y a los 20 metros?, las que también estarán proyectadas en la pizarra. Se les pide a los estudiantes, además, que registren sus procedimientos en las hojas entregadas, aunque se les está permitido utilizar la calculadora. Lo anterior, se encuentra estructurado dentro de la fase SM.

A continuación, se formulan dos preguntas (también proyectadas ante el curso): ¿y a los $n$ metros de profundidad?, ¿cómo modelarías matemáticamente esta situación?, las que permiten, ahora, dar paso a las fases MT y ASM, que implican la traducción de las relaciones matematizables de la situación hacia el lenguaje algebraico. Es importante que el profesor supervise en todo momento los procedimientos de esta etapa en los distintos grupos, y haga las respectivas devoluciones a los estudiantes, sin guiarlos directamente hacia la respuesta esperada.

Al ser esta intervención una primera experiencia formal de modelación con función exponencial en el aula, se sugiere que la ocurrencia reiterada de dificultades y errores en los grupos sea una instancia que propicie la detención de la clase para realizar una puesta en común, en la que se puede efectuar parte de la descomposición de la tabla de valores, como una estrategia para lograr la obtención del modelo matemático (véase el apartado 'Posibles estrategias').

Una vez que los estudiantes hayan obtenido la expresión de flujo luminoso a los $n$ metros $(20 \cdot (1/2)^n \, \mathrm{lm})$ y la función que modela la situación $(f(n) = 20 \cdot$

$(1/2)^n$ $o$ $f(n) = 20/2^n$), se procede a realizar una nueva puesta en común, esta vez, para exponer las respuestas a las preguntas realizadas con anterioridad. De este modo, un representante de cada grupo escribe sus respuestas en la pizarra en el espacio designado para su grupo, y explican brevemente frente al curso cómo obtuvieron sus modelos (de ser necesario, se contrastan las respuestas en el caso de ser dispares). Ahora comienza la fase IE, en la que los estudiantes interpretan el modelo generado y lo evalúan con los valores de la tabla que contiene la situación-problema, comparando los resultados. Continuando, se procede a la restricción del dominio de la función-modelo que, de acuerdo a la información aportada por el video introductorio, se define como $\mathrm{Dom}\, f\colon \{n \in \mathbb{R} | 0 \leq n \leq 1000\}$. Se sugiere que el docente haga preguntas para instar a la reflexión de los estudiantes sobre la validez del modelo sobre el nivel del mar, o bajo los 1000 metros. El momento de desarrollo tiene una duración aproximada no mayor a 60 minutos.

### Momento de cierre

Para finalizar, se sucede la fase VL, en la que se pide a los estudiantes que grafiquen el modelo en la aplicación Desmos® de sus teléfonos (si no cuentan con ello, lo pueden hacer de igual forma en sus cuadernos), además de presentarlo proyectado en la pizarra. Una vez graficado, el profesor explica y ejemplifica la relación de invariante de la función exponencial de la forma $\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$, la cual permite obtener el valor de la base de la potencia, y que es considerada como una estrategia susceptible de evidenciarse por parte de los estudiantes durante las fases MT/ASM[9]. El momento de cierre tiene una duración aproximada no mayor a 15 minutos.

### Matemática en juego

Para el desarrollo de esta clase, se ponen en juego los siguientes elementos matemáticos:

- Potencia de base racional con exponente variable.
- Potenciación como una multiplicación iterada.
- Dominio y recorrido de una función exponencial.
- Invariante de la función exponencial $\left(\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}\right)$.

### Descripción de la actividad

Se diseñó una actividad contextualizada en la pérdida del flujo luminoso bajo el mar, en la que se busca desarrollar la modelización matemática a partir de la interpretación de los valores de una tabla. El diseño de la actividad presentada en la figura 11, es el resultado de la adaptación y modificación de una propuesta realizada por MINEDUC (2012).

[9] Para justificar la invariante de la función exponencial como construcción mental, véase el apartado 'Descomposición genética de la función exponencial' en este capítulo (pág. 39).

## El Caso del Buzo

Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede atravesar en distintas profundidades del mar. Según la Ley de Beer-Lambert, existe un modelo para este fenómeno, en el que están presentes la cantidad de luz que llega a una cierta profundidad en metros y el flujo luminoso emitido desde un foco de luz en la superficie.

En un experimento llevado a cabo en la costa viñamarina, un buzo registró el flujo luminoso conforme se sumergía a ciertos metros de profundidad del nivel del mar, utilizando un sensor que arrojó los siguientes resultados:

| Profundidad en m | Flujo luminoso en lm |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 1 | 10 |
| 2 | 5 |
| 3 | 2,5 |
| 4 | 1,25 |
| 5 | 0,625 |

lm = lúmenes

**¿Qué observas de la tabla? Escribe dos ideas:**

________________________________

________________________________

________________________________

________________________________

________________________________

Figura 11: Actividad de clase «El Caso del Buzo».
Fuente: elaboración propia con adaptaciones y modificaciones de MINEDUC (2012, p. 100).

Durante el desarrollo de la clase, se plantean cinco preguntas desprendidas de esta actividad a los estudiantes, las que permiten ir desarrollando las dos etapas del proceso de modelización matemática siguientes a la de FP, tal como serán explicadas en el análisis de la respuesta experta. Es así como, en las primeras tres fases, se formulan preguntas para lograr que los estudiantes generen un modelo matemático válido para la situación-problema propuesta como actividad central. Una vez obtenido el modelo por parte de los estudiantes, se procederá a las fases IE y VL, en cada una de las cuales hay determinadas acciones durante la puesta en común realizada en ambas etapas.

La invariante de la función exponencial, de la forma $\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$, proviene de una construcción mental esperada de ser evidenciada por parte de los estudiantes, y su formulación es considerada en esta secuencia didáctica como una estrategia para obtener el valor de la base de la función durante las fases MT y ASM. Sin embargo, de no manifestarse, al cierre de esta clase, durante la fase VL, se realizará una instancia de presentación y reflexión sobre la misma.

Esta clase tiene la particularidad de que el docente va orientando, a través de preguntas, los momentos de la misma, con el fin de que se sucedan las etapas del proceso de modelización matemática, instando a los estudiantes a que logren generar, interpretar, evaluar y validar los modelos que propongan.

### Respuesta experta

La tabla 3 muestra la respuesta experta de las preguntas y acciones de la primera clase, de acuerdo a las distintas etapas del proceso de modelización matemática.

Tabla 3: Respuesta experta de la primera clase.

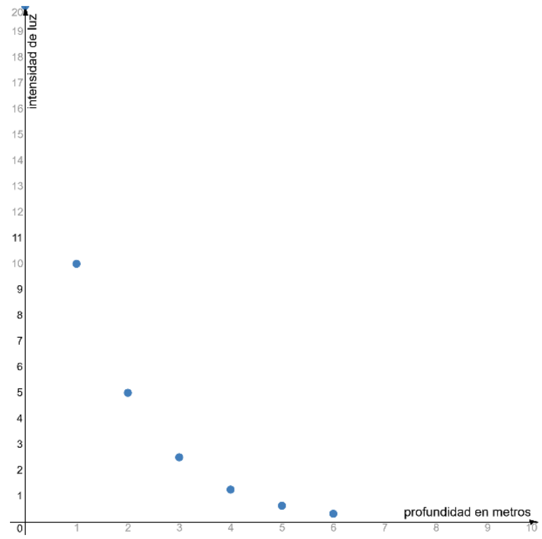
| Fases | Respuesta experta de las preguntas |
|---|---|
| MT/ASM | ¿Cómo modelarías matemáticamente esta situación?<br>R: Utilizando la función $f(n) = 20 \cdot (1/2)^n$ o $f(n) = 20/2^n$. |
| IE | Determinar para qué valores de $n$ en metros se hace válido el modelo.<br>R: El modelo sólo es válido desde los 0 a los 1000 metros de profundidad, y no para valores sobre el nivel del mar (valores negativos).<br>Restringir el dominio del modelo matemático.<br>R: $\text{Dom } f: \{n \in \mathbb{R} \mid 0 \leq n \leq 1000\}$. |

### Posibles estrategias

Para el análisis de la clase, se han considerado las posibles estrategias a seguir, por parte de los estudiantes, para la obtención del modelo matemático que da respuesta a la misma, durante el desarrollo de las fases MT/ASM. La tabla 4 muestra las posibles estrategias de la primera clase de la secuencia didáctica.

Tabla 4: Posibles estrategias de la primera clase.

| Estrategias | Ejemplificación |
|---|---|
| División sucesiva por 2; formación de una tabla de divisiones por 2/multiplicaciones por ½:<br><br>Utilizando la noción de potencia como una multiplicación iterada, se puede formar una tabla de valores que represente las variaciones de flujo luminoso con respecto a los valores en metros ($a_n$) conocidos. | $$\begin{array}{llll} a_0 & 20 & & \\ a_1 & \frac{20}{2} & \frac{1}{2}(a_0) & \\ a_2 & \frac{10}{2} & \frac{1}{2}(a_1) & \frac{1}{4}(a_0) \\ a_3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2}(a_2) & \frac{1}{8}(a_0) \\ a_4 & \frac{2{,}5}{2} & \frac{1}{2}(a_3) & \frac{1}{16}(a_0) \\ a_5 & \frac{1{,}25}{2} & \frac{1}{2}(a_4) & \frac{1}{32}(a_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \frac{a_{n-1}}{2} & \frac{1}{2}(a_{n-1}) & \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_0) \end{array}$$ |

| | |
|---|---|
| | Esta descomposición permite obtener el valor del flujo luminoso a los $n$ metros de la forma $20 \cdot (1/2)^n$. |
| Representación gráfica:<br><br>Representar como puntos en el plano cartesiano los valores de ambas variables y buscar una expresión del tipo exponencial, debido a la curva decreciente que genera la ubicación de los puntos.<br><br>Esta estrategia puede ayudar a llevar a cabo las tres restantes. |  |
| Hallar una relación entre las variables, de la forma $$\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$$ para obtener el valor de la base de la potencia en la función exponencial. | Si $y_2 = 10$, $y_1 = 20$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, entonces: $$\frac{10}{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)$$ Si $y_3 = 5$, $y_1 = 20$, $x_3 = 3$, $x_1 = 1$, entonces: $$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2$$ |
| Hallar el patrón implícito en la tabla de valores para obtener una expresión para el flujo luminoso a los $n$ metros de profundidad. | A los $n$ metros, el flujo luminoso es de $20 \cdot (1/2)^n$ lm. |

Las estrategias presentadas son las que permitirían a los estudiantes la obtención del modelo matemático correcto para la situación-problema planteada, mientras que las que no son consideradas en este punto, son abordadas en el siguiente apartado, pues son conducentes a errores o inconclusión en la resolución de la actividad.

## Dificultades y errores

Para esta clase de la secuencia didáctica, se consideran las dificultades y errores durante las fases FP, MT/ASM e IE, con sus respectivas devoluciones por parte del docente, presentadas en la tabla 5. No se consideran dificultades y/o errores en la fase SM, porque sólo implica un cálculo algorítmico, ni en la fase VL, pues es realizada en forma de una puesta en común con el grupo curso.

Tabla 5: Dificultades y errores de la primera clase.

| Fases | Dificultades | Errores | Devoluciones |
|---|---|---|---|
| FP | Para comprender magnitudes inversamente proporcionales. | Declarar que la situación es inversamente proporcional 'porque una magnitud aumenta y la otra disminuye'. | ¿Cuál sería, entonces, el valor de la constante de proporcionalidad para todos los valores de la tabla? |
| MT/ ASM | Para traducir del lenguaje natural (conjetura) al lenguaje algebraico (flujo luminoso a los $n$ metros) [10]. | Representar los valores de la variable dependiente sólo como cocientes, sin incluir la variable $n$ (20, 20/2, 20/4, 20/8, etc.; 20; 20/2, 10/2, 5/2, etc.). | De acuerdo a la conjetura establecida, ¿cómo representarías la noción de 'la mitad del anterior?, ¿y 'la mitad de la mitad del anterior'? |
| | En la comprensión conceptual y/u operacional del objeto matemático potencia. | a) Declarar que, al aumentar el valor del exponente de toda potencia, el resultado aumenta su valor. | ¿Qué sucede en el caso de que sea una potencia de base $0 < b < 1$? |
| | | b) Inferir que la base de una potencia, al elevarse a cero, es igual a cero o a la misma base[11]. | Recordar las propiedades de las potencias. |
| | Para hallar el valor del flujo luminoso a los $n$ metros. | Igualar a $n$ la expresión $20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ o $\frac{20}{2^n}$[12]. | Evalúa la expresión asignando un valor real a $n$, ¿qué resultado obtienes?, ¿es lo mismo el valor de $n$ metros al valor del flujo luminoso a los $n$ metros? |

[10] Abrate, Pochulu y Vargas (2006) relacionan esta dificultad con la algoritmización en la traducción desde el lenguaje natural al algebraico, la cual "requiere […] la identificación de los datos y de aquello que debe ser averiguado, así como las relaciones entre ellos; la comprensión del problema; la movilización de los conceptos y procedimientos matemáticos […] que puedan estar en juego, etc."

[11] Abrate et al (2006) documentan en su estudio la existencia de errores asociados a las potencias, como que "$a^0 = 0$ en tanto se 'multiplica cero veces la base' […], y que $a^0 = a$ puesto que 'si se multiplica cero veces la base, queda la misma base'" (p. 61).

[12] En Abrate et al (2006) se refieren a un tipo de error similar asociado a las ecuaciones, donde "símbolos seguidos del signo '=' quedan asociados a un 'pedido de resultado' […] los signos operatorios indican algo que se debe hacer y por lo tanto están solicitando que se halle un resultado" (p. 117).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Para determinar una relación de función entre las variables[13]. | Construye erróneamente una relación (invierte el orden de las variables o no establece una relación entre estas). | De acuerdo a la conjetura establecida, ¿cuáles son las variables en la situación-problema?, ¿existe alguna relación entre estas?, ¿cómo es dicha relación? |
| IE | Para restringir el dominio de la función-modelo. | Considerar un dominio de la función de la forma $Dom\ f: \mathbb{R}$, sin restricción en los valores. | ¿Para qué valores de $n$ metros se hace válido este modelo?, ¿es válido para valores sobre el nivel del mar? |

## Elementos del marco conceptual

Para este estudio, se ha construido un marco conceptual basado en dos referentes: por una parte, en un modelo cognitivo que permite explicar las etapas del proceso de modelización matemática, según los estudios de Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008); y por otra, se considera la adaptación y modificación de un fragmento de la descomposición genética para la función exponencial propuesta por Vargas, González y Llinares (2011). La elección de estos dos referentes, de corte didáctico-cognitivo, se justifica en que la articulación entre ambos permite una mirada en la construcción de procesos, desde la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), sobre las fases de matematización y análisis del sistema matemático dentro del ciclo de modelización matemática, a su vez que dicha complementariedad posibilita dar cumplimiento al tercer objetivo específico propuesto para el estudio, en lo concerniente al análisis de los resultados obtenidos de la implementación efectuada.

Esta complementariedad a la que se hace mención, se sustenta en tres características: en primer lugar, por la claridad con que, en el modelo antes mencionado, son detalladas las etapas para generar y validar un modelo matemático, a partir de una situación del mundo real; lo anterior permite una flexibilidad con que este modelo se puede adaptar desde y hacia una implementación de aula; y, desde la didáctica, el aporte de una descomposición genética que permite vislumbrar las construcciones y mecanismos mentales que pueden evidenciar los estudiantes con el objeto matemático considerado para este estudio.

[13] Esta dificultad se relaciona a un obstáculo ligado al concepto de función, que alude a la "ocultación de la noción de función subyacente" (Neira, 2009, p. 4); además, en concordancia con Peralta-García (2002, en Abrate et al, 2006), los estudiantes suelen considerar "al registro algebraico como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica, y no como una representación por sí misma" (p. 118).

En una primera parte de este apartado, se presentan los conceptos fundamentales de la modelación como estrategia de enseñanza, para continuar con el proceso asociado a la misma bajo el modelo antes declarado, y finalizar con la descripción de los principales elementos de la Teoría APOE a considerar, con el respectivo fragmento de descomposición genética seleccionado para este estudio.

### La modelación como estrategia de enseñanza

Los tres conceptos claves en los que se sustenta esta propuesta son: modelo matemático, modelización matemática y modelación. Según Blomhøj (2008), un modelo matemático es "una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática" (p. 21). Por su parte, para Villa (2007), la modelización matemática se entiende como "el proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real [y] puede ser considerada como herramienta de representación de situaciones o fenómenos del 'mundo real', el cual se convierte en el sistema objeto de estudio" (p. 67). Y finalmente, en Bassanezi y Biembengut (1997), la modelación[14] se entiende como "el método de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares" (p. 14).

Durante los últimos 30 años, se ha venido desarrollando una comprensión teórica sobre el proceso de aprendizaje presente en la modelización matemática, razón por la cual es implementada en la actualidad como un elemento importante dentro del currículum de enseñanza de la matemática (Blum et al., 2003). Derivado de ello, es importante destacar la postura de Blomhøj (2008), quien plantea que en la construcción de un modelo matemático existen significativas implicaciones didácticas, como que al aplicar la matemática a una situación externa, ya existe –explícita o implícitamente– un modelo matemático involucrado, y que para posibilitar en el estudiante la experimentación con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones en el mismo, la precondición epistemológica es que él sea capaz de percibir tanto el contexto modelado como la matemática involucrada por separado, pero al mismo tiempo, de manera interrelacionada.

### El proceso de modelización matemática

En los estudios de Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), se presentó un proceso que busca describir la creación y uso de un modelo matemático, en el que se desarrollan seis sub-procesos para la modelización matemática, tal como lo muestra el esquema en la figura 12.

[14] "La palabra Modelación es una 'contracción' de los términos Modelización y Educación. Modelación = Modelización + Educación" (Bassanezi y Biembengut, 1997, p. 14).

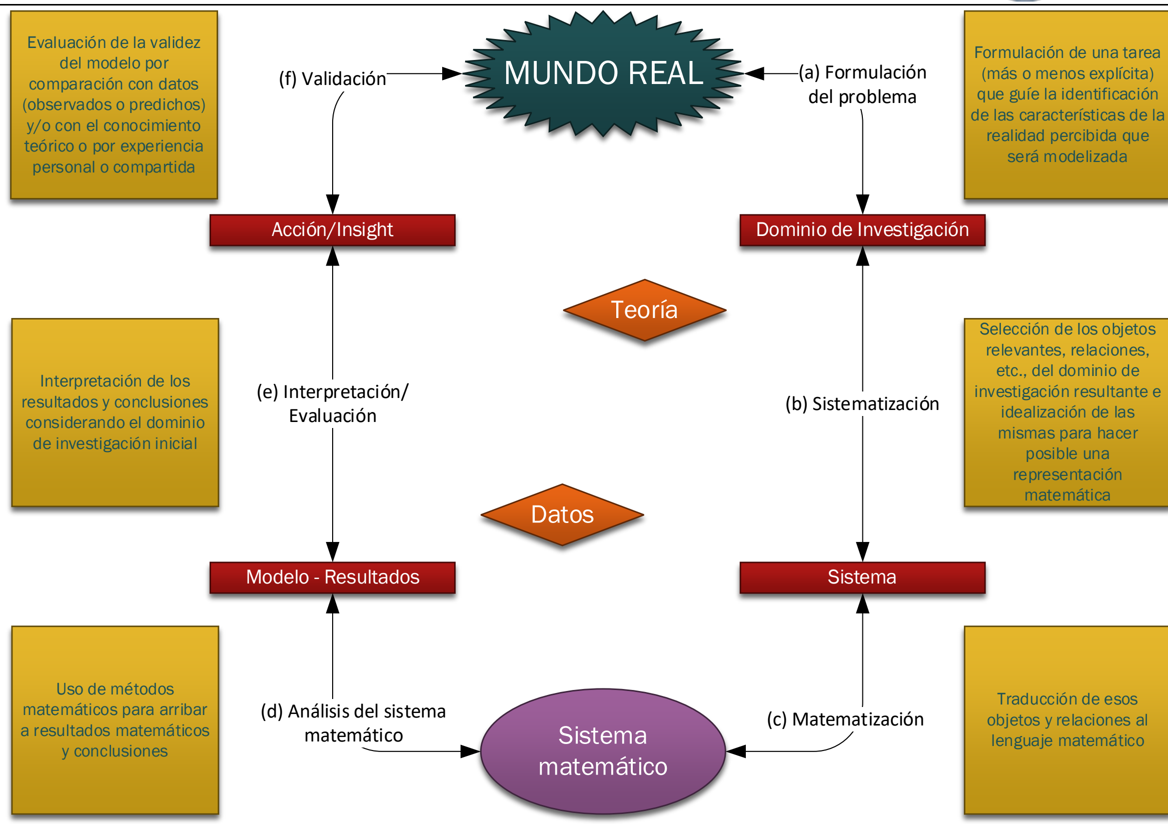



Figura 12: Esquema del proceso de modelización matemática según Blomhøj y Højgaard-Jensen (2003).
Fuente: adaptado desde Blomhøj (2008, p. 24).

A lo largo de todo este proceso se encuentran siempre presentes dos elementos basales: el conocimiento teórico y los datos empíricos. La ‘teoría’ hace directa alusión al conocimiento que se tiene sobre el dominio de investigación, ya sea del tipo formal (de una determinada ciencia o disciplina) o del basado en experiencias personales, compartidas, y suposiciones sobre el tema, siendo este elemento un importante determinante al momento de validar el modelo generado (Blomhøj, 2008). Los ‘datos’, por su parte, pueden estar presentes en forma explícita en el proceso previo a la modelización matemática, lo cual permitiría su

Blomhøj y Højgaard-Jensen (2003) enfatizan que este proceso no debe ser entendido en forma lineal, pues siempre adquiere un carácter de cíclico, lo que puede provocar una redefinición del modelo si es que las reflexiones e intenciones sobre su uso lo ameritan, convirtiendo este proceso en uno de características dinámicas, en el que se pueden cumplir o no todas las etapas para todas las situaciones. En torno a todo este ciclo se encuentra presente la ‘competencia en modelización matemática’, la cual es entendida como el “ser capaz de, autónoma y conscientemente, llevar a cabo todos los aspectos de un proceso de modelización matemática en un determinado contexto” (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003, p. 126).

Si bien la modelización tiende a considerarse como una actividad científica, los estudiantes pueden desarrollar un trabajo muy similar al del matemático para construir un modelo (Villa, 2007). Tanto para la enseñanza del pre-cálculo como de las matemáticas básicas, es importante aprovechar los modelos conocidos y el proceso de modelización para lograr un desarrollo de las competencias matemáticas, a través de una constante vinculación de la modelización dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje (García, 2012).

**La Teoría APOE**

Uno de los pensamientos más relevantes de Piaget, y que sirvió de base para la Teoría APOE de Dubinsky (1991), fue el de abstracción reflexiva, el cual consta de dos partes fundamentales:

- Por una parte, la reflexión, entendida “en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre [los] contenidos y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflejar contenidos y operaciones desde un nivel o estadio cognitivo inferior a uno superior” (Piaget, 1973, en Arnon et al., 2014, p. 6).
- Por otra, la abstracción, que consiste en “la reconstrucción y reorganización de los contenidos y operaciones en este estadio superior que da lugar a que las operaciones mismas se conviertan en contenido al cual se pueden aplicar nuevas operaciones” (Piaget, 1973, en Arnon et al., 2014, p. 6).

Como los estudios piagetianos se enfocaron, mayormente, en el pensamiento lógico de los niños, Dubinsky (1991) consideró la idea de abstracción reflexiva desde la perspectiva del pensamiento matemático avanzado, definiéndola como “la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos” (p. 101). De este modo, elaboró su teoría y la relacionó a conceptos matemáticos específicos (Dubinsky, 1991), bajo la idea de que “el conocimiento matemático consiste en la tendencia de un individuo de lidiar con situaciones percibidas como problemas matemáticos, construyendo acciones mentales, procesos y objetos, y organizándolos en esquemas para dar sentido a las situaciones y resolver problemas” (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 2).

La Teoría APOE es, fundamentalmente, un modelo para describir cómo pueden ser aprendidos los conceptos matemáticos, en un marco utilizado para explicar las construcciones mentales involucradas en el entendimiento de tales conceptos (Arnon et al., 2014). Son cuatro las construcciones (o estructuras) mentales que dan nombre a esta teoría: acción, proceso, objeto y esquema (APOE, por sus iniciales en español/APOS en inglés), las que son definidas y ejemplificadas en la tabla 6, considerando como ejemplos explicativos para estas el cálculo del área bajo la curva de una función.

Tabla 6: Definiciones y ejemplificación de las construcciones mentales de la Teoría APOE.

| Acción | Proceso | Objeto | Esquema |
|---|---|---|---|
| Es una transformación de objetos que un sujeto percibe como estímulo externo, que requieren –de forma explícita o memorística– instrucciones paso a paso sobre cómo realizar la operación. | Es el producto de la repetición y reflexión de un sujeto sobre una acción, donde el individuo puede pensar que está realizando la misma acción, pero sin estímulos externos, por lo tanto, puede pensar en invertirlo y componerlo con otros procesos. | Se construye, por parte del sujeto, a partir de la toma de conciencia del proceso en su totalidad, notando que las transformaciones pueden actuar sobre este. | Es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas del sujeto, que se encuentran vinculados por ciertos principios generales, formando un marco en la mente del individuo que le permite su evocación en un contexto que involucra dicho concepto. |
| Ejemplos de las respectivas construcciones mentales | | | |
| Las acciones pueden ser dividir un intervalo en sub-intervalos específicos de un tamaño dado, construir un rectángulo bajo la curva para cada sub-intervalo, calcular el área de cada rectángulo, y sumar las áreas de los rectángulos. | La acción de determinar la suma de Riemann en una partición particular, se interioriza en proceso cuando el individuo puede describir cómo se determina dicha suma para otra partición, e imaginar que este proceso continúa con una malla decreciente. | El área bajo la curva para una función en un intervalo cerrado es el límite de las sumas de Riemann (acción aplicada sobre el proceso). La encapsulación del proceso en un objeto se realiza para determinar la existencia del límite y/o determinar la existencia del límite y/o determinar su valor. | La coherencia de este esquema depende de la capacidad del individuo para determinar si puede usarse para tratar una situación particular en matemática. |

Fuente: adaptado desde las definiciones de Dubinsky y McDonald (2001, pp. 2-3), y los ejemplos de Arnon et al. (2014, pp. 20-25).

Si bien las cuatro construcciones mentales fueron presentadas en forma jerárquica, en la realidad no siempre se suceden de manera lineal cuando un individuo se encuentra desarrollando el entendimiento de un concepto, aunque lo ideal es que cada una sea construida antes del siguiente paso (Dubinsky y McDonald, 2001).

Las construcciones o estructuras mentales que conforman la teoría son guiadas por las siguientes formas de abstracción mental, o mecanismos mentales, según Arnon et al. (2014):

- **Interiorización:** la repetición de las acciones produce la interiorización en el sujeto que las efectúa, como un cambio mental que le permite ser consciente de la acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras, para así formar un proceso.
- **Encapsulación:** ocurre cuando un sujeto es capaz de aplicar una acción a un proceso, para transformarlo desde una estructura dinámica a una estática, es decir, en un objeto al cual se pueden aplicar acciones.
- **Des-encapsulación:** cuando la situación lo amerita, un objeto puede ser des-encapsulado de vuelta al proceso desde el cual emergió. La des-encapsulación necesita del mecanismo de **coordinación**, pues dos objetos se pueden des-encapsular, coordinar sus procesos y ser re-encapsulados en un nuevo objeto.
- **Tematización:** mecanismo que permite al sujeto aplicar transformaciones a la estructura de un esquema, para construirlo en un objeto mental.
- **Reversión**[15]**:** mecanismo que caracteriza al proceso APOE como “un sistema de retroalimentación circular” (Dubinsky, 1991, p. 106).

La figura 13 muestra una visión general de la interacción y articulación entre las construcciones y los mecanismos mentales involucrados en la Teoría APOE en lo que respecta a la construcción del conocimiento matemático.

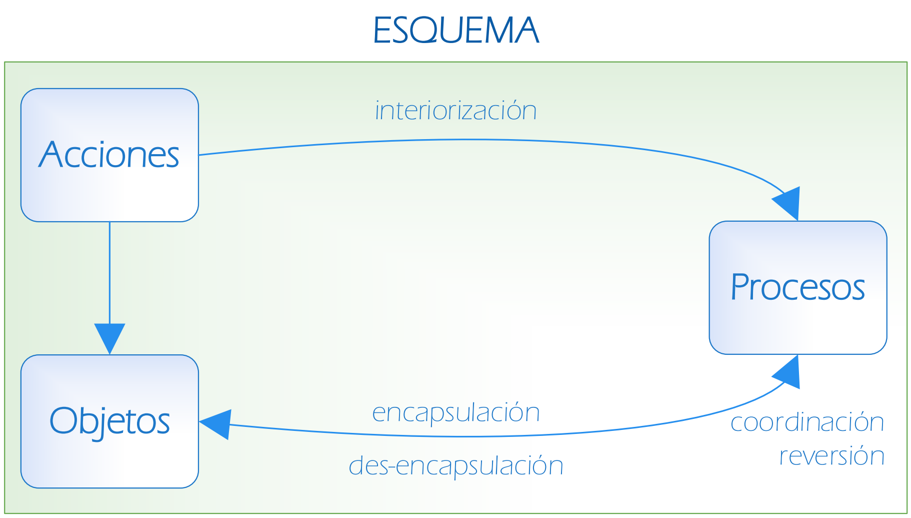



Figura 13: Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático. Fuente: traducido desde Arnon et al. (2014, p. 18).

En términos generales, la interacción de los elementos presentados en la figura 13 puede ser descrita de la siguiente forma:

[15] Por motivos de traducción, el término ‘reversión’ también puede aparecer en la literatura como ‘inversión’.

> El entendimiento de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos en forma de acciones; las acciones, son luego interiorizadas para formar procesos que después se encapsulan para formar objetos. Los objetos pueden ser des-encapsulados de vuelta a los procesos desde los que fueron formados. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en esquemas. (Asiala et al., 1996, p. 9)

La Teoría APOE se puede utilizar para el análisis de los datos por parte del investigador, comparando el éxito o fracaso de los estudiantes en ciertas tareas matemáticas, de acuerdo a las construcciones mentales específicas que estos puedan o no haber tenido, formulando, de este modo, probables predicciones sobre la forma en que son construidas, a través de una descomposición genética (Dubinsky y McDonald, 2001).

**Descomposición genética de la función exponencial**

En esta teoría, la descomposición genética (en adelante, DG) es entendida como “un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico” (Arnon et al., 2014, p. 27). Este modelo, comienza siendo una hipótesis para el investigador que la diseña, basado en sus experiencias de aprendizaje y enseñanza del concepto, el conocimiento de la teoría, el saber matemático, los antecedentes de investigaciones sobre el tema y el desarrollo epistemológico del concepto en cuestión; y, a menos que sea probada experimentalmente, la DG mantendrá un carácter de preliminar en su validez (Arnon et al., 2014).

Para el presente estudio, se considera la DG[16] propuesta por Vargas, González y Llinares (2011) para la función exponencial, en la que se establecen ciertos prerrequisitos, y se describen los mecanismos de construcción involucrados en el concepto de acuerdo a dos registros de representación: analítico-tabular y gráfico-analítico, los que también son abordados en esta secuencia didáctica. Sin embargo, para su presentación y utilización en este estudio, se realiza una adaptación y modificación de un fragmento de la DG mencionada, pues se consideran sólo los elementos y descripciones que se adecúan a los contenidos y habilidades que se trabajan en el nivel segundo año medio, con un foco en la construcción de procesos durante las fases de matematización y análisis del sistema matemático que propone el modelo de modelización matemática de Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), dentro el registro analítico-tabular.

En la tabla 7 se presentan y describen los prerrequisitos a considerar de acuerdo a la DG antes mencionada, tanto en las fases de modelización como en el registro de representación considerado.

[16] Para la presentación de la DG completa, véase Anexo 4: Descomposición Genética de la Función Exponencial.

Tabla 7: Descripción de los prerrequisitos de la DG.

| Prerrequisitos | Descripción |
|---|---|
| La función como objeto matemático. | |
| Comprensión de la potenciación generalizada para cualquier número real. | a) El concepto de exponente natural mayor que uno. La existencia de la potencia que surge de la interacción entre base y exponente, como una acción de multiplicar de manera reiterada una misma cantidad atendiendo a los requerimientos de economía en la escritura y en la sintaxis aritmética y algebraica.<br>b) la noción de exponente no natural como convención matemática para uniformizar las operaciones entre monomios.<br>c) Propiedades de los exponentes. |

Fuente: adaptado desde Vargas, González y Llinares (2011, p. 7).

La figura 14 muestra la adaptación realizada al fragmento de la DG escogida para este estudio, con las respectivas construcciones (acciones y procesos) y mecanismos mentales (interiorización y coordinación) involucrados.

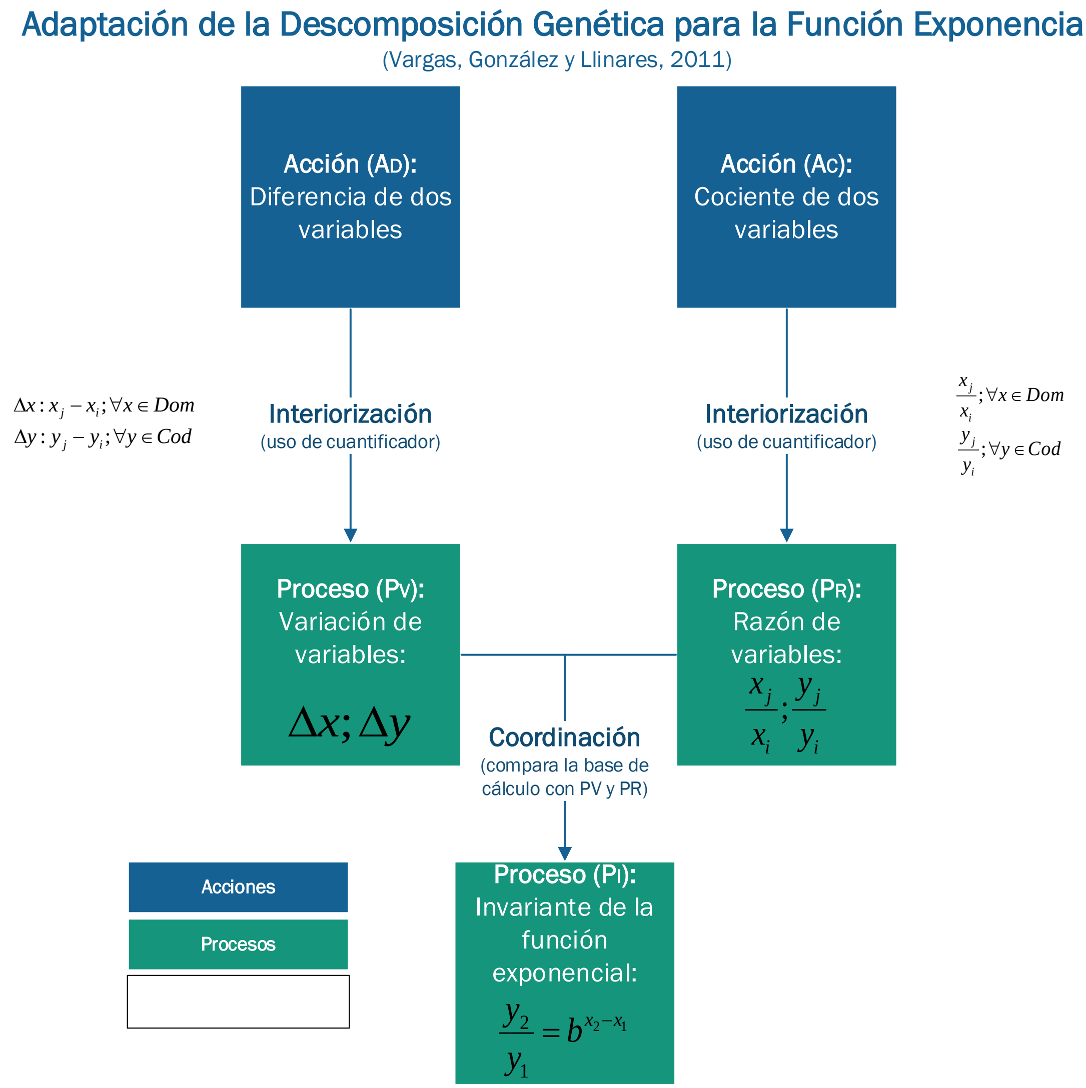



Figura 14: Adaptación de un fragmento de la DG de la función exponencial.
Fuente: adaptado y modificado desde Vargas, González y Llinares (2011).

# Elementos del marco metodológico

En este apartado, se abordan las especificaciones metodológicas del estudio, para lo cual se describen las características del estudio, las etapas para su diseño, el contexto en que fue desarrollada la fase de implementación y los sujetos participantes, para finalizar con las categorías propuestas y las técnicas utilizadas para analizar los resultados obtenidos.

## Descripción del estudio

Este estudio, de corte cualitativo y paradigma interpretativo, se enmarcó en el Estudio de Clases japonés en la forma de una investigación-acción del tipo práctica. Para el diseño de la misma, se consideró como referente a Hernández et al. (2014), y para dar cumplimiento al primer objetivo específico propuesto, sobre diseñar una secuencia didáctica, se planificaron tres clases utilizando la estrategia de modelación con el objeto matemático función exponencial, diseñando una situación-problema que guiase cada una de estas. En consonancia con el segundo objetivo específico, sobre implementar una de estas clases, se siguieron las fases documentadas en Isoda y Olfos (2009).

**Etapas de diseño del estudio**

Para el diseño del presente estudio, se siguieron las cuatro etapas de la investigación-acción[17] descritas en Hernández et al. (2014), como se presenta en la tabla 8, con las respectivas acciones llevadas a cabo en cada una.

Tabla 8: Etapas de diseño del estudio.

| Etapas | Acciones |
|---|---|
| Primera etapa: problemática y diagnóstico. | Se realizó la identificación y planteamiento de una problemática en lo que respecta a la falta de ejercicios de modelación utilizando la función exponencial en los textos de estudio del curso segundo año medio, lo que implicó una revisión curricular y de los textos del nivel, además de la definición del objeto matemático en cuestión. |
| Segunda etapa: formulación de un plan. | Se diseñó una secuencia didáctica de tres clases para tratar la problemática planteada, basado en la metodología del Estudio de Clases japonés, y en torno a una actividad utilizando la estrategia de modelación con los estudiantes, titulada 'El Caso del Buzo', la que consideró las respectivas retroalimentaciones de las profesoras a cargo del módulo para su formulación. Los planes de clase fueron diseñados siguiendo el modelo de modelización matemática considerado como referente teórico para este estudio. |
| Tercera etapa: implementación | Se llevaron a cabo tres implementaciones del primer plan de clase diseñado para la secuencia con estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años) pertenecientes a dos colegios de las comunas de Viña del Mar y Quilpué. Para el ingreso a cada establecimiento educacional, se contactaron a sus respectivas autoridades, para luego enviar una carta explicativa a los apoderados, adjuntada con la autorización para la grabación en video de las intervenciones de los estudiantes. |
| Cuarta etapa: reflexiones y replanteamientos | Posterior a cada implementación, se realizó una reflexión sobre la misma, lo que desembocó, por una parte, en una reestructuración del plan de clase originalmente diseñado para efectuar la segunda intervención; y por otra, en la aplicación de las pertinentes mejoras y adecuaciones para llevar a cabo la tercera intervención. |

[17] El ciclo está compuesto por: a) detección del problema de investigación, clarificación y diagnóstico; b) formulación de un plan para resolver el problema; c) implementación del plan y evaluación de resultados; d) retroalimentación, reflexiones y replanteamientos (Hernández et al., 2014).

## Contexto y sujetos

Para la implementación del primer plan de clase de la secuencia didáctica diseñada, se llevaron a cabo tres intervenciones. La tabla 9, muestra el contexto en que se desarrolló cada una y los sujetos informantes que participaron en estas.

Tabla 9: Descripción del contexto y sujetos informantes de las intervenciones.

| Intervenciones | Descripción del contexto y sujetos |
|---|---|
| Primera intervención | Realizada en un colegio particular subvencionado de la comuna de Quilpué; los sujetos informantes fueron 23 estudiantes del curso segundo año medio A, quienes participaron de la clase durante la asignatura de Matemáticas; la duración de la intervención fue de 90 minutos. |
| Segunda intervención | Realizada en un colegio particular subvencionado de la comuna de Viña del Mar; los sujetos informantes fueron 24 estudiantes del curso segundo año medio B, quienes participaron de la clase durante la asignatura de Taller de Matemáticas; la duración de la intervención fue de 45 minutos. |
| Tercera intervención | Realizada en el mismo establecimiento educacional que en la segunda intervención; los sujetos informantes fueron 30 estudiantes del curso segundo año medio A, quienes participaron de la clase durante la asignatura de Matemáticas; la duración de la intervención fue de 90 minutos. |

Los sujetos informantes se organizaron en grupos de tres a cinco integrantes cada uno para desarrollar la actividad de clase implementada, sin embargo, sólo se consideraron para este estudio aquellas producciones que los estudiantes entregaron en forma ordenada y legible al término de las intervenciones, dejando fuera aquellas que no demostraron un trabajo serio y comprometido con la actividad de clase. La tabla 10 muestra la clasificación de los grupos con respecto al orden de la intervención en aula en que estos participaron.

Tabla 10: Clasificación de los grupos de sujetos informantes de acuerdo a la intervención en que participaron.

| Intervención | Grupos |
|---|---|
| Primera intervención (a) | G1a, G2a, G3a |
| Segunda intervención (b) | G1b, G2b, G3b, G4b |
| Tercera intervención (c) | G1c, G2c, G3c, G4c |

## Técnicas de recogida de datos

Para este estudio, se utilizaron tres técnicas de recolección de datos durante las intervenciones antes mencionadas. La tabla 11, muestra las técnicas utilizadas con sus respectivas descripciones.

Tabla 11: Descripción de las técnicas de recogida de datos para el estudio.

| Técnicas | Descripción |
|---|---|
| Registro escrito | Actividad 'El Caso del Buzo', en torno a la cual se basó el plan de clase implementado y que fue desarrollada por los sujetos informantes, quienes registraron sus respuestas y procedimientos en la hoja entregada a cada grupo de estudiantes. |
| Registro audiovisual | Grabación en video de la primera y segunda intervención en los establecimientos educativos, las que posteriormente fueron editadas para destacar los momentos más relevantes de cada clase. |
| Entrevista (informal) | Con los jefes de UTP de cada establecimiento, para conocer las conductas de entrada de los estudiantes en sus respectivos colegios. |

## Categorías de análisis

Para el levantamiento de categorías de análisis, se consideraron de manera articulada el modelo de modelización matemática propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), con elementos de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), a fin de evidenciar cuáles son las construcciones (fundamentalmente acciones y procesos) y mecanismos mentales que se desarrollaron a través de las fases de matematización y análisis del sistema matemático, dentro del proceso de modelización matemática. Es por ello que, con base en la DG de la función exponencial[18] propuesta por Vargas, González y Llinares (2011), se efectuaron algunas modificaciones, adaptando una parte de esta a las fases mencionadas.

En la tabla 12, se muestran las categorías de análisis, entendidas como las etapas del proceso de modelización matemática; y las sub-categorías, que consideraron las construcciones mentales que se pudieron evidenciar en las producciones escritas de los sujetos informantes, con sus respectivos códigos para identificarlos.

[18] En el apartado 'Descomposición genética de la función exponencial' de este capítulo, se presenta la DG mencionada (pág. 40).

Tabla 12: Detalle de las categorías y sub-categorías de análisis propuestas para el estudio.

| Categorías | Descriptores | Sub-categorías |
|---|---|---|
| Formulación del problema (Cód. FP) | – Formular observaciones sobre la situación-problema planteada. | |
| Sistematización (Cód. SM) | – Formular una conjetura para la situación-problema.<br>– Calcular el flujo luminoso a los 6 m y 20 m de profundidad. | |
| Matematización (Cód. MT) | – Identificar relaciones matematizables a partir de la situación problema. | – Acción Diferencia de dos variables (cód. $A_D$).<br>– Acción Cociente de dos variables (cód. $A_C$).<br>– Proceso Variación de variables (cód. $P_V$). |
| Análisis del sistema matemático (Cód. ASM) | – Identificar las variables involucradas en la situación-problema y la naturaleza de la relación entre estas. | – Proceso Razón de variables (cód. $P_R$).<br>– Proceso Invariante de la función exponencial (cód. $P_I$). |
| Interpretación/Evaluación (Cód. IE) | – Interpretar el modelo generado.<br>– Evaluarlo con valores conocidos de profundidad en metros.<br>– Restringir su dominio. | |
| Validación (Cód. VL) | – Graficar el modelo.<br>– Proyectarlo para otros valores de profundidad en metros. | |

**Técnicas de análisis**

Para el análisis de los resultados, se consideraron los registros escritos recogidos de las implementaciones, clasificándolos de acuerdo a las etapas que lograron alcanzar los distintos grupos de estudiantes respecto del proceso de modelización matemática, e indicando si evidenciaron construcciones mentales durante las fases MT y ASM, de la forma mostrada en la tabla 13.

Tabla 13: Síntesis de las categorías y sub-categorías de análisis propuestas para el estudio.

| | Categorías/Sub-categorías | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupos | FP | SMM | MT | ASM | IE | VL |
| G1 | | | | | | |
| G2 | | | | | | |
| … | | | | | | |

Tanto las categorías de análisis como el diseño del plan de clase implementado, como se ha declarado con anterioridad, fueron elaborados en consonancia con fueron elaborados en consonancia con el proceso de modelización matemática, esto permite que no se puede lograr una etapa sin haber transitado por las anteriores. Por su parte, las construcciones mentales consideradas como subcategorías, que corresponden a acciones y procesos dentro de las fases MT y ASM, son evidenciables a la luz del fragmento de DG considerado para el estudio, en función de la matemática en juego de la actividad planteada durante la clase y de la habilidad en el trabajo con patrones por parte de los estudiantes.

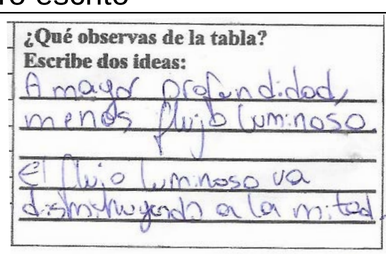
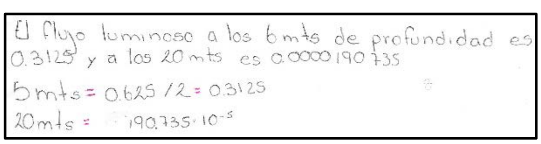
## Análisis de resultados

Este apartado se encuentra dividido en dos partes: en la primera, se presentan los resultados obtenidos de las tres intervenciones implementadas para el estudio, y que evidenciaron las categorías y sub-categorías de análisis propuestas; en el segundo, se detalla el análisis y la discusión de los resultados obtenidos.

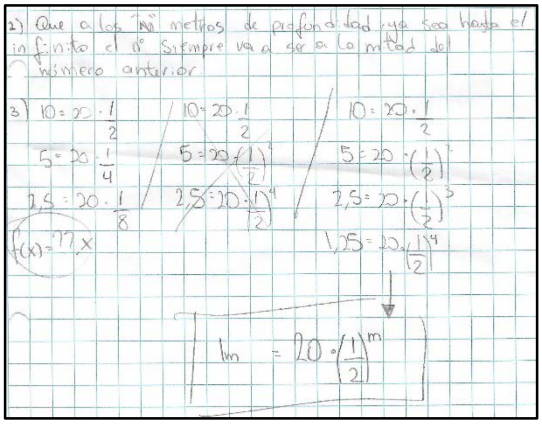
### Evidencias de las categorías de análisis

La tabla 14 muestra evidencias del desarrollo de las fases del proceso de modelización matemática (consideradas como categorías de análisis para este estudio) de acuerdo a extractos de las producciones escritas de los sujetos participantes, incluyendo una descripción de la evidencia de cada una de las etapas declaradas.

Tabla 14: Evidencias de las categorías de análisis propuestas para el estudio.

| Registro escrito | Descripción |
|---|---|
|  ¿Qué observas de la tabla? Escribe dos ideas: A mayor profundidad, menos flujo luminoso. El flujo luminoso va disminuyendo a la mitad | La producción escrita del G1c evidencia la categoría FP. En ella, los estudiantes formularon observaciones sobre la situación-problema planteada, con respecto al comportamiento de los datos de una tabla de valores. |
|  El flujo luminoso a los 6 mts de profundidad es 0.3125 y a los 20 mts es 0.0000190735 5mts = 0.625 / 2 = 0.3125 20mts = 190.735·10-5 | La producción escrita del G2a evidencia la categoría SM. En esta, los estudiantes calcularon el flujo luminoso a los 6 m y 20 m de profundidad, que se obtiene a partir de la conjetura formulada con respecto a las |

observaciones realizadas en la fase anterior.



2) Que a los "m" metros de profundidad ya sea hasta el infinito el n° siempre va a ser la mitad del número anterior

3) $10 = 20 \cdot \frac{1}{2}$ / $10 = 20 \cdot \frac{1}{2}$ / $10 = 20 \cdot \frac{1}{2}$

$5 = 20 \cdot \frac{1}{4}$ / $5 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ / $5 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

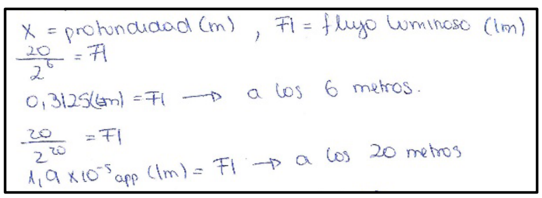
$2,5 = 20 \cdot \frac{1}{8}$ / $2,5 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$ / $2,5 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$f(x) = ??\,x$ / $1,25 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$lm = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

La producción escrita del G1c evidencia las categorías MT/ASM.

Como estas fases se suceden en forma simultánea, se observa que, a través de la descomposición de los valores de la tabla incluida en la situación, logran identificar relaciones matematizables y las variables involucradas, utilizando la noción de potencia como multiplicación iterada y generalizando el comportamiento de los valores a través de una expresión matemática que, posteriormente, se representa como una función.



X = profundidad (m) , Fl = flujo luminoso (lm)

$\frac{20}{2^6} = Fl$

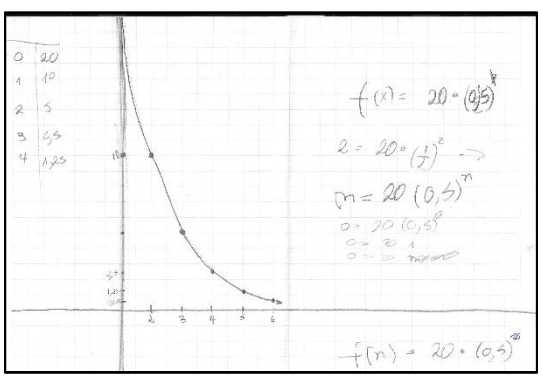
$0,3125 (lm) = Fl \rightarrow$ a los 6 metros.

$\frac{20}{2^{20}} = Fl$

$1,9 \times 10^{-5}$ app $(lm) = Fl \rightarrow$ a los 20 metros

La producción escrita del G1b evidencia la categoría IE.

Una vez que los estudiantes generaron la función que modela la situación, proceden a interpretarla y evaluarla con los valores conocidos de profundidad en metros para obtener el flujo luminoso. Lo anterior, se desarrolla en el marco de una puesta en común con el curso, la cual continúa con la restricción del dominio de dicha función-modelo en la pizarra.




La producción escrita del G3c evidencia la categoría VL.

En esta fase los estudiantes proceden a validar el modelo, a través de su representación gráfica en el plano cartesiano y la proyección del mismo para otros valores de profundidad en metros según la restricción del dominio de la función que modela la situación.

Esta última fase, también en forma de una puesta en común con el curso, involucra la utilización de una aplicación de teléfono para realizar la representación gráfica.

## Evidencias de las sub-categorías de análisis

Con respecto a las construcciones mentales durante las fases MT y ASM del proceso de modelización matemática (consideradas como sub-categorías de análisis para este estudio), sólo un grupo de sujetos informantes (G4b) las evidenció de manera parcial, como se muestra en la figura 15.

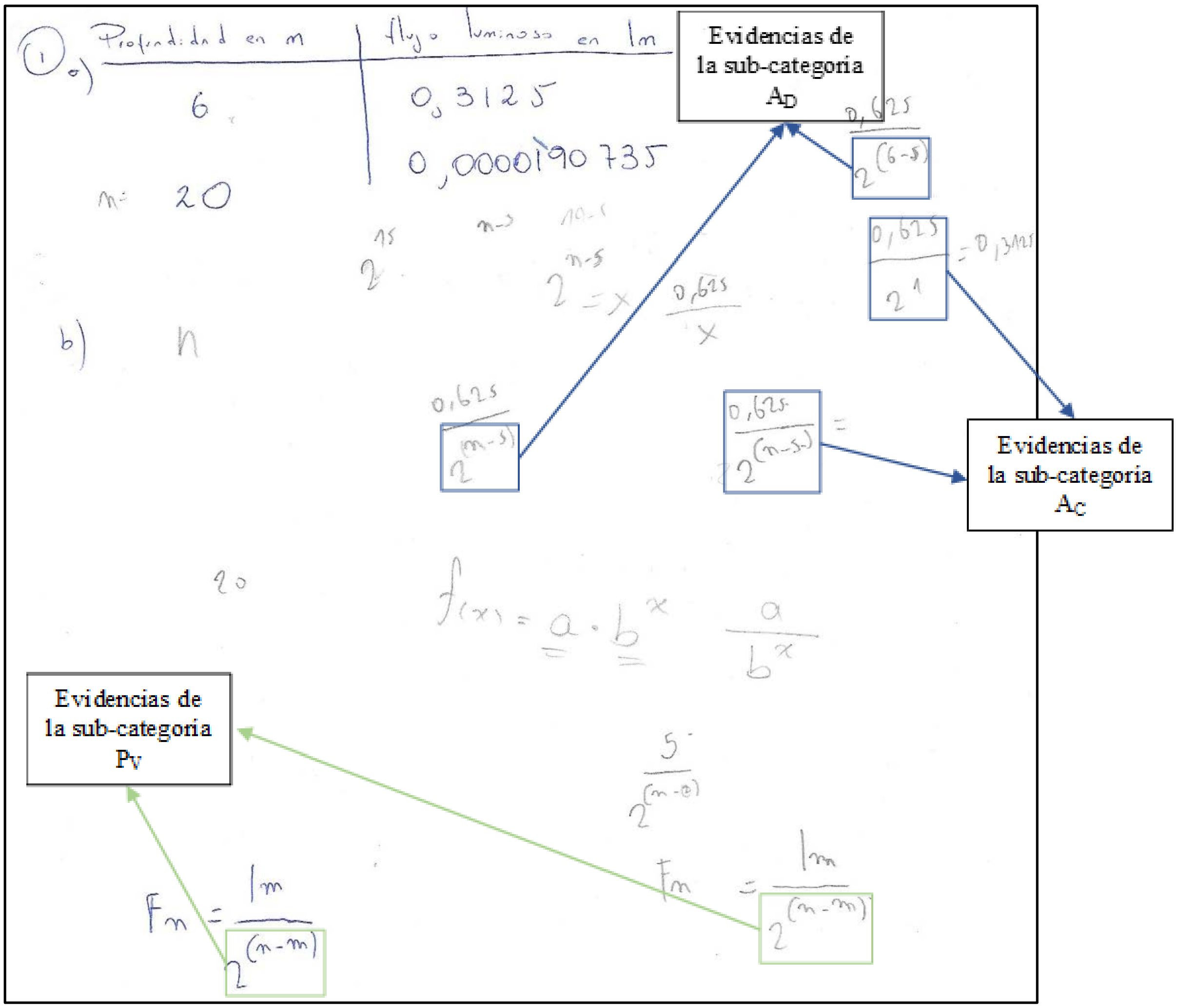



Figura 15: Evidencias de las sub-categorías de análisis.

Bajo la pregunta sobre cómo es la relación del comportamiento entre las variables de la situación-problema, los sujetos informantes del G4b realizaron las acciones ‘diferencia de variables’ (sub-categoría $A_D$) y ‘cociente de variables’ (sub-categoría $A_C$), logrando el mecanismo de interiorización de la acción $A_D$ en el proceso ‘variación de variables’ (sub-categoría $P_V$), mas no logrando la interiorización de la acción $A_C$ en el proceso ‘razón de variables’ (sub-categoría $P_R$). No obstante, el tiempo que invirtió el grupo en ello le imposibilitó concretar la fase VL.

## Síntesis global de resultados

Para sintetizar los resultados obtenidos de las tres intervenciones realizadas durante la fase de implementación del estudio, la tabla 15 muestra una clasificación de los grupos de sujetos informantes de acuerdo a las categorías y sub-categorías en las que se evidencian sus logros dentro de la actividad desarrollada por los mismos, en lo que respecta a las fases del proceso de modelización matemática y si evidenciaron construcciones mentales durante las fases MT y ASM.

Tabla 15: Síntesis global de los resultados del estudio.

| | Categorías/Sub-categorías | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Grupos | FP | SM | MT | ASM | IE | VL |
| G1a | X | X | | | | |
| G2a | X | X | | | | |
| G3a | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | |
| G1b | X | X | X | X | X | X |
| G2b | X | X | X | X | X | X |
| G3b | X | X | X | X | | |
| G4b | X | X | $A_D$, $A_C$, $P_V$ | | X | |
| | | | | | | |
| G1c | X | X | X | X | X | |
| G2c | X | X | X | X | X | |
| G3c | X | X | X | X | X | X |
| G4c | X | X | X | X | | |

## Sobre la primera intervención

Esta intervención tuvo lugar en un establecimiento particular subvencionado de la comuna de Quilpué, con tres grupos de sujetos informantes considerados para su análisis, pertenecientes al curso segundo medio A. De acuerdo a los resultados que obtuvieron, se evidenció en dos de ellos (G1a y G2a) la presencia de dificultades y errores, durante las fases MT y ASM, en lo que respecta a la pregunta sobre el flujo luminoso a los $n$ metros de profundidad. La principal causa que se atribuye a dicha situación es en la dificultad para traducir la conjetura planteada en el lenguaje natural, hacia la expresión algebraica de los $n$ metros, respecto a lo cual, Abrate et al. (2006) relacionan esta dificultad con la algoritmización en la traducción entre ambos lenguajes, pues esta requiere “de la identificación de los datos y de aquello que debe ser averiguado, así como las relaciones entre ellos; la comprensión del problema; la movilización de los conceptos y procedimientos matemáticos […] que puedan estar en juego, etc.” (p. 117).

Fue esta dificultad la que llevó a los grupos mencionados a errores como, por mencionar algunos, representar los valores de la variable dependiente sólo como cocientes, sin incluir la variable $n$ (20, 20/2, 20/4, 20/8, etc.; 20, 20/2, 10/2, 5/2, etc.) o igualar a $n$ tales resultados. Sobre dichas igualdades, en Abrate et al. (2006) se refieren a un tipo de error similar asociado a las ecuaciones, donde “símbolos seguidos del signo ‘=’ quedan asociados a un ‘pedido de resultado’ [implicando que] los signos operatorios indican algo que se debe hacer y por lo tanto están solicitando que se halle un resultado" (p. 117).

Ambas dificultades y errores llevaron a que los grupos G1a y G2a no lograran completar el desarrollo de la actividad, ni siquiera generando una expresión válida que representase tanto el decrecimiento exponencial, como la inclusión de la variable $n$ como parte de la misma, pues se limitaron sólo a buscar un valor real para $n$, en vez del flujo luminoso a una profundidad $n$.

Sin embargo, el grupo G3a sí logró completar la actividad, aunque su procedimiento no estuvo exento de dificultades y errores. Si bien no manifestaron errores en la traducción desde el lenguaje natural hacia el algebraico, sí demostraron tener dificultades en la comprensión conceptual y/u operacional del objeto matemático potencia, evidenciado en inferir que, el aumento de los valores de la variable dependiente, se debía a la presencia de una potencia, y que, al disminuirlos, se debía a una raíz. Por otra parte, manifestaron dificultades para determinar una relación de función entre las variables, lo cual está relacionado con el obstáculo que alude a la "ocultación de la noción de función subyacente" (Neira, 2009, p. 4), pues, en consonancia con Peralta-García (2002, en Abrate et al., 2006), los estudiantes suelen considerar "al registro algebraico como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica, y no como una representación por sí misma" (p. 118), situación que se evidenció en este grupo al no evidenciar con prontitud que los valores de la tabla presentada se relacionaban a través de una función. Hacia el final de la intervención, se solicitó al grupo G1c que expusiera su trabajo frente al curso, con el fin de explicitar su procedimiento y resultados.

En conclusión, las dificultades y errores evidenciadas en esta intervención, también se encontraban relacionadas con las conductas de entrada de los sujetos informantes, evidenciada en la imposibilidad, en determinados casos, para traducir, desde el lenguaje natural hacia el algebraico, una noción tan elemental como 'la mitad' de un valor, considerando que la introducción formal del sistema de los números racionales se sucede en el nivel séptimo año básico (OA nº 2 en MINEDUC, 2016a, p. 107). Del mismo modo, tampoco se evidenciaron construcciones mentales por parte de los sujetos informantes.

Por otra parte, en entrevista informal con el jefe de UTP del establecimiento, este reconoció que, los constantes cambios de profesores, provocaron irregularidades en las clases y retrasos sustanciales en el avance curricular de la asignatura en el nivel de segundo año medio, razón que justificaría que no poseían como conducta de entrada este tipo de función, además de declarar que la modelación no es una estrategia de clase utilizada en la praxis regular, siendo esta su primera experiencia formal. Esto último, permitió reafirmar lo planteado por Biembengut y Hein (2004), acerca de que la falta de vivencias en actividades de este tipo, por parte de los estudiantes, posibilitan la existencia de dificultades para llevar a cabo los procesos de modelización.

A raíz de los resultados obtenidos de esta sesión, se realizó la respectiva reflexión y mejora del plan de clase, antes de llevar a cabo la segunda intervención.

**Sobre la segunda intervención**

Esta intervención tuvo lugar en un establecimiento particular subvencionado de la comuna de Viña del mar, con cuatro grupos de sujetos informantes considerados para su análisis, pertenecientes al curso segundo medio B. De acuerdo a los resultados que obtuvieron, se evidenció en todas las producciones escritas la obtención del modelo matemático adecuado para la situación, no así el logro del proceso completo de modelización. De acuerdo a los resultados que obtuvieron, el grupo G3b, evidenció una dificultad no prevista en este estudio, relacionada con no considerar otras funciones que no sean lineales, es decir, si bien lograron identificar una relación de función entre las variables presentes en la tabla, intentaron modelar la situación utilizando una función del tipo afín ($f(x) = ax + b$) durante las fases MT y ASM. Ello les demandó bastante tipo, pues al no lograr relacionar los valores obtenidos de la evaluación del modelo que propusieron con los presentes en la tabla, escogieron un modelo del tipo exponencial, en un espacio de tiempo cercano al término de la clase.

En esta intervención, el grupo G4b evidenció el desarrollo de construcciones mentales durante las fases MT y ASM, como lo demostraron sus producciones escritas (véase figura 21 en Anexo 4). En términos de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), las acciones requieren de ciertos estímulos externos para poder realizar una determinada operación (Dubinsky y McDonald, 2001), razón por la cual se planteó una pregunta (¿cómo es la relación del comportamiento entre las variables?), de carácter voluntario, para los sujetos informantes del curso una vez que hayan generado el modelo matemático para la situación, esto con el fin de activar las acciones explicitadas en el fragmento de DG considerado para el estudio. El grupo G4b se dedicó, entonces, a buscar dichas relaciones entre variables, evidenciando el logro de dos acciones y un proceso. Ello sugiere que es posible que las construcciones mentales estudiadas permitan a los estudiantes comprender que la relación de las variables de una función exponencial incide directamente en su comportamiento, primero en el registro algebraico, pues el proceso 'invariante de la función exponencial' permite obtener el valor de la base de la potencia; y segundo, permitiendo entender que la razón de cambio de la función exponencial es proporcional a la función. Si bien el grupo G4b no evidenció una construcción completa de dicho proceso, la importancia de su producción contribuye, en parte, a validar el fragmento de DG considerado. Sin embargo, el tiempo invertido en responder a la pregunta planteada, les impidió concretar la fase VL.

Con respecto a los grupos G1b y G2b, estos lograron todas las fases del proceso de modelización matemática, sin evidenciar tampoco dificultades o errores en su procedimiento. Ello respalda lo que, en entrevista informal, el jefe de departamento de matemáticas del establecimiento declaró, acerca de que la modelación es una práctica habitual dentro de la asignatura, sobre todo al término de las unidades de álgebra que implican el aprendizaje de funciones, del mismo modo que suele supervisar las clases de la asignatura periódicamente.

Al igual que al término de la intervención anterior, se llevó a cabo la respectiva reflexión y mejora del plan de clase, antes de llevar a cabo la tercera implementación.

**Sobre la tercera intervención**

Esta intervención tuvo lugar en el mismo establecimiento que en la segunda, con cuatro grupos de sujetos informantes considerados para su análisis, pertenecientes al curso segundo medio A. de acuerdo a los resultados que obtuvieron, nuevamente se evidenció en todas las producciones escritas la obtención del modelo matemático adecuado para la situación, no así el logro del proceso completo de modelización. De acuerdo a los resultados que obtuvieron, los grupos G1c y G2c, debido a ciertas dificultades en la traducción desde el lenguaje natural hacia el algebraico, tardaron más tiempo en concretar las fases MT y ASM, sin embargo, no se detectaron errores en sus producciones escritas. Fue esta demora la única causa del no logro de la fase VL. Igual situación se sucedió con el grupo G3c, con la diferencia de que sí logró completar el proceso completo de modelización durante la clase.

Con respecto al grupo G4c, la no concreción de las fases IE y VL se debió a una situación muy similar a la del grupo G4b de la intervención anterior, pues decidieron dar respuesta a la pregunta relacionada con las acciones de la DG, pero lo lograron evidenciar construcciones mentales en sus producciones escritas.

A diferencia de las dos intervenciones anteriores, y producto de las adecuaciones que se hicieron al plan de clase, es que, al término de la sesión, se presentó a los estudiantes el proceso ‘invariante de la función exponencial’, con las respectivas construcciones mentales previas (acciones y procesos) que llevaban al mismo. Ello permitió que, tal como se tenía propuesto durante el diseño del plan, este proceso fuese entendido como una estrategia para obtener el valor de la base de una función exponencial.

## Comparación de análisis a priori/a posteriori

La evidencia recogida de las tres intervenciones implementadas, en la mayoría de los casos, guardó estrecha relación con los análisis a priori realizados por este estudio. Como se ha declarado con anterioridad, las adecuaciones hechas al plan de clase fueron con base en las dificultades y errores experimentados por los estudiantes, lo que permitió ir mejorando la pertinencia de las devoluciones del docente ante cada situación de complejidad que se sucediese durante el desarrollo de las clases. Sin embargo, como la calidad de esta propuesta es su constante perfectibilidad, el espectro de análisis apriorísticos se puede ir ampliando conforme aumenten las implementaciones llevadas a cabo de este plan de clase.

# CAPÍTULO IV: SECUENCIA DIDÁCTICA

Como parte de los objetivos propuestos para el presente estudio, se diseñó una secuencia didáctica de tres clases, considerando el objeto matemático función exponencial, en conjunto con la habilidad de modelar, para el curso segundo año medio, teniendo como objetivo general de la propuesta: **resolver problemas a través de la modelación con función exponencial**. En este capítulo, se presentan la segunda y tercera clase de la secuencia didáctica diseñada, además de la articulación global entre las tres diseñadas, con sus respectivos análisis a priori.

## Aspectos generales de la secuencia didáctica

Las clases que componen la secuencia poseen objetivos específicos que se encuentran articulados, y cuyos aspectos generales son presentados en la tabla 16.

Tabla 16: Aspectos generales del diseño de la secuencia didáctica.

| Clases | Objetivos | Actividades | Características |
|---|---|---|---|
| Clase 1 | Modelar una situación de decrecimiento exponencial | ‘El Caso del Buzo’ (situación basada en la pérdida del flujo luminoso bajo el mar) | – Decrecimiento exponencial.<br>– Se interpretan los datos de una tabla para desarrollar la modelización.<br>– Se presentan las etapas del proceso de modelización. |
| Clase 2 | Evaluar la pertinencia de un modelo lineal en una situación de decrecimiento exponencial | ‘El Furgón de Don Carlos’ (situación basada en la devaluación en la tasación fiscal de un vehículo) | – Decrecimiento exponencial.<br>– Se desarrolla la modelización a partir de la interpretación de un porcentaje.<br>– Se diferencia el comportamiento entre modelos lineales y exponenciales. |
| Clase 3 | Resolver un problema geométrico a través de la modelación | ‘El Dispositivo Artístico de Nora’ (problema basado en la construcción de un fractal) | – Crecimiento exponencial.<br>– Se utiliza la modelización como herramienta para resolver un problema.<br>– Se construye el objeto a modelizar.<br>– Se diferencia el comportamiento entre modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial. |

En cada plan de clase, se hace una diferencia entre la declaración y presentación de cada uno de los objetivos, la cual radica en que no se considera pertinente explicitar que el modelo que deben generar los estudiantes sea utilizando la función exponencial, para que sean ellos quieren lo descubran conforme desarrollan las etapas del proceso de modelización matemática.

Tabla 17: Objetivos específicos de la secuencia didáctica.

| Clase | Objetivo de la clase | Objetivo presentado a los estudiantes |
|---|---|---|
| Primera | Modelar una situación de decrecimiento exponencial | Modelar una situación del mundo real |
| Segunda | Evaluar la pertinencia de un modelo lineal en una situación de decrecimiento exponencial | Evaluar la pertinencia de un modelo matemático |
| Tercera | Resolver un problema geométrico a través de la modelación | Resolver un problema de carácter geométrico |

Atendiendo a la necesidad de desarrollar una competencia tan importante como lo es la de modelar (Blum y Borromeo-Ferri, 2009), es que se diseña esta secuencia didáctica, contribuyendo a que la modelación, como estrategia de enseñanza, sea una práctica habitual en el aula, tanto desde el punto de vista didáctico como desde el curricular.

Desde el plano didáctico, las clases que forman la propuesta se articulan de manera tal que permiten a los estudiantes transitar por las etapas del proceso de modelización matemática según el modelo didáctico-cognitivo definido para el estudio (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), a fin de generar y validar un modelo para una determinada situación que se les presenta a los estudiantes como un desafío. Del mismo modo, el nivel de complejidad de las sesiones es ascendente, permitiendo a los alumnos, basado en sus experiencias y conocimientos previos, idear estrategias para dar respuesta a la actividad central de cada una.

Desde el plano curricular, para el nivel segundo año medio, el séptimo aprendizaje esperado de la unidad de Álgebra corresponde a "modelar y aplicar la función exponencial […] en la resolución de problemas" (MINEDUC, 2011, p. 29), en consonancia a lo cual es diseñada esta secuencia didáctica, para ser implementada al término de dicha unidad, una vez abordado el objeto matemático función exponencial.

# Plan de clase 2: «El Furgón de Don Carlos»

En este apartado, se presenta la segunda clase[19] de la secuencia didáctica diseñada, comenzando por la descripción de sus tres momentos, para continuar con los respectivos análisis apriorísticos.

## Momento de inicio

Se comienza la clase presentando el objetivo declarado a los estudiantes: **evaluar la pertinencia de un modelo matemático**. Como previamente se ha trabajado la estrategia de modelación con los estudiantes, se recuerdan los momentos principales de la clase anterior. Los estudiantes se deben organizar en grupos de tres a cinco integrantes cada uno, a los cuales se les entrega la actividad «El Furgón de Don Carlos» en forma escrita, además de proyectarla en la pizarra frente al curso. Se realiza una lectura en conjunto de la misma y se les pide que respondan a la pregunta: ¿por qué Carlitos tiene razón en afirmar que ese no es el modelo correcto? Explica.

Con las observaciones de los estudiantes, el profesor realiza una puesta en común, anotando las observaciones en la pizarra, lo que invalida el modelo propuesto en la situación, ya que transcurridos 10 años desde su compra, el furgón tendría un valor comercial de $0, lo cual no es posible en la realidad. Se espera que esta clase de modelación sea menos guiada que la anterior, en cuanto a la sucesión de las etapas del proceso de modelización matemática. Lo anterior, se encuentra estructurado dentro de la fase FP. El momento de inicio tiene una duración aproximada no mayor a 15 minutos.

## Momento de desarrollo

Los alumnos continúan organizados en sus respectivos grupos, a cada uno de los cuales se les entregan hojas en blanco donde deberán responder la pregunta: ¿en cuánto estaba tasado el furgón los años 2015, 2016 y 2017?, la que también estará proyectada en la pizarra. Se les pide a los estudiantes, además, que registren sus procedimientos en las hojas entregadas, aunque se les está permitido utilizar la calculadora. Lo anterior, se encuentra estructurado dentro de la fase SM.

Luego de la pregunta anterior, se formula otra: ¿cuál es el modelo que debe considerar don Carlos?, la que permite, ahora, dar paso a las fases MT y ASM, que implican la traducción de las relaciones matematizables de la situación hacia el lenguaje algebraico. Es importante que el profesor supervise en todo momento los procedimientos de esta etapa en los distintos grupos, y haga las respectivas devoluciones a los estudiantes, sin guiarlos directamente hacia la respuesta esperada.

Al ser esta intervención una segunda experiencia formal de modelación con función exponencial en el aula, se sugiere que la ocurrencia reiterada de dificultades y errores en los grupos de estudiantes sea una instancia que propicie la detención de la clase para realizar una puesta en común, en la que se pida a algunos estudiantes que

[19] Para ver la planificación de la clase, véase Anexo 4: Plan de Clase Nº 2 – «El Furgón de Don Carlos».

expliquen ante el curso una posible estrategia para lograr la obtención del modelo matemático (véase el apartado 'Posibles estrategias').

Una vez que los estudiantes hayan obtenido la función que modela la situación $(T(n) = 20.000.000 \cdot (9/10)^n)$, se procede a realizar una nueva puesta en común, esta vez, para exponer las respuestas a las preguntas realizadas con anterioridad. De este modo, un representante de cada grupo escribe sus respuestas en la pizarra en el espacio designado para su grupo, y explican brevemente frente al curso cómo obtuvieron sus modelos (de ser necesario, se contrastan las respuestas en el caso de ser dispares). Ahora comienza la fase IE, en la que los estudiantes interpretan el modelo generado y lo evalúan con los valores de tasación que obtuvieron para los años 2015, 2016 y 2017, comparando los resultados. Continuando, se procede a la restricción del dominio de la función-modelo, para el intervalo de diez años que se mencionan en el enunciado de la actividad, de la forma $\mathrm{Dom}\, T\colon \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq n \leq 10\}$. Del mismo modo, se comparan los valores obtenidos de la evaluación de ambos modelos (el generado por los estudiantes y el propuesto en la situación) respecto del dominio ya restringido. El momento de desarrollo de la clase tiene una duración aproximada no mayor a 60 minutos.

**Momento de cierre**

Para finalizar, se sucede la fase VL, en la que se pide a los estudiantes que grafiquen ambos modelos en la aplicación Desmos® de sus teléfonos (si no cuentan con ello, lo pueden hacer de igual forma en sus cuadernos), además de presentarlos proyectados en la pizarra. Una vez graficados, se hace una última puesta en común con respecto al comportamiento de un modelo lineal y uno exponencial, formulando preguntas como ¿llegará a $0 el algún momento el valor del vehículo con el modelo generado?, esto con el fin de analizar el decrecimiento exponencial cuando los valores del dominio son muy grandes. El momento de cierre tiene una duración aproximada no mayor a 15 minutos.

**Matemática en juego**

Para el desarrollo de esta clase, se ponen en juego los siguientes elementos matemáticos:

- Potencia de base racional con exponente variable.
- Representación fraccionaria de un porcentaje.
- Potenciación como una multiplicación iterada.
- Dominio y recorrido de una función exponencial.
- Invariante de la función exponencial $\left(\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}\right)$.
- Comportamiento de modelos lineales y de decrecimiento exponencial cuando $x \to +\infty$.

**Descripción de la actividad**

Se diseñó una actividad basada en la depreciación en el valor de la tasación fiscal de un vehículo motorizado, en el que se busca desarrollar la modelización matemática, evaluando la pertinencia de un modelo lineal presentado, contrastándolo con la información que aporta la situación propuesta, para así generar un modelo exponencial válido.

**El Furgón de Don Carlos**

Don Carlos es un contratista y dueño de Transportes CACH, una empresa dedicada al traslado de los trabajadores de una compañía minera, para lo cual dispone de furgones de pasajeros. Su última adquisición fue un furgón para 12 pasajeros, comprado en 2014, con un valor comercial de $20.000.000.

En marzo de 2015, don Carlos revisó la base de datos del Servicio de Impuestos Internos, y fue entonces que notó que la tasa de devaluación para la tasación fiscal de vehículos livianos era de un 10% del valor de cada año.

Tras una serie de procedimientos, determinó que se podía conocer el valor de la tasación fiscal del vehículo $(T)$ al enésimo año transcurrido desde la compra $(n)$ según el siguiente modelo:

$$\boldsymbol{T(n) = 20.000.000 - 2.000.000n}$$

Para ello, se basó en la conjetura de que el 10% del precio inicial son los $2.000.000, valor con el que se va devaluando el furgón cada año. Sin embargo, su hijo Carlitos, le planteó que ese modelo no podía ser correcto, pues la devaluación no es constante todos los años.

**¿Por qué Carlitos tiene razón en afirmar que ese no es el modelo correcto? Explica**

Figura 16: Actividad de clase «El Furgón de Don Carlos».
Fuente: elaboración propia.

Durante el desarrollo de la clase, se plantean dos preguntas desprendidas de esta actividad a los estudiantes, las que permiten ir desarrollando las dos etapas del proceso de modelización matemática siguientes a la de FP, tal como serán explicadas en el análisis de la respuesta experta. Una vez generada la función-modelo por parte de los estudiantes, se hará una puesta en común para concretar las fases IE y VL, en esta última, también se realizará una reflexión para comparar los comportamientos de los modelos lineales y exponenciales.

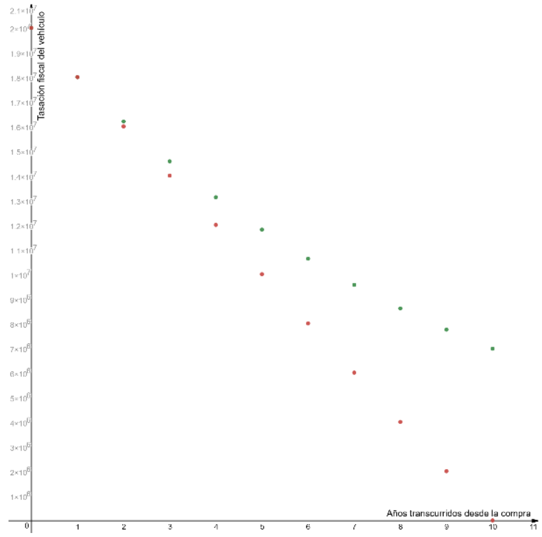
A diferencia de la actividad anterior, en que se les presentaba a los estudiantes una tabla con los datos de la situación a modelizar, en esta ocasión son ellos quienes los deben obtener durante la fase SM, a través del cálculo de los valores de la tasación fiscal para un determinado número de años, de acuerdo a la información que se encuentra en la situación (devaluación anual de un 10%). Del mismo modo, las preguntas planteadas por el docente son orientadoras, pero no tan dirigidas como en la clase anterior, pues si bien permite que se sucedan las etapas del proceso de modelización matemática, igualmente al inicio se recuerdan los principales momentos de la experiencia anterior, para que sean los estudiantes quienes las desarrollen de manera más independiente.

**Respuesta experta**

La tabla 18 muestra la respuesta experta de las preguntas y acciones de la segunda clase, de acuerdo a las distintas etapas del proceso de modelización matemática.

Tabla 18: Respuesta experta de la segunda clase.

<table>
<tr><th>Fases</th><th>Respuesta experta</th></tr>
<tr><td>FP</td><td>¿Por qué Carlitos tiene razón en afirmar que ese no es el modelo correcto? Explica.<br>– Porque cada año el valor del 10% es diferente, pues depende del que tenga el año anterior, y según el modelo propuesto en la situación, transcurridos diez años el furgón valdría $0, lo cual es imposible.</td></tr>
<tr><td>SM</td><td>¿En cuánto estaba tasado el furgón los años 2015, 2016 y 2017?<br>R: En 2015, estaba tasado en $18.000.000; en 2016, en $16.200.000; y en 2017, en $14.580.000.</td></tr>
<tr><td>MT/ASM</td><td>¿Cuál es el modelo que debe considerar don Carlos?<br>R: La tasación fiscal del vehículo $(T)$ al enésimo año transcurrido desde la compra $(n)$ se modela según la función $T(n) = 20.000.000 \cdot (9/10)^n$.</td></tr>
<tr><td>IE</td><td>Comparar los valores obtenidos de evaluar el modelo presentado en la situación con el generado en la clase, durante un periodo de diez años desde la compra del furgón.
<table>
<tr><th colspan="2">(valores del modelo de la situación):</th></tr>
<tr><th>Años</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td>0</td><td>$20.000.000</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$18.000.000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$16.000.000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$14.000.000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$12.000.000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$10.000.000</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$8.000.000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$6.000.000</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$4.000.000</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$2.000.000</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th colspan="2">(valores del modelo generado):</th></tr>
<tr><td>4</td><td>$13.122.000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$11.809.800</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$10.628.820</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$9.565.938</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$8.609.344</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$7.748.410</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$6.973.569</td></tr>
</table>
Determinar para qué valores de $n$ en años se hace válido el modelo.<br>R: El modelo es válido desde los 0 a los 10 años, de acuerdo a la situación.<br>Restringir el dominio del modelo matemático.<br>R: $\mathrm{Dom}\, T: \{n \in \mathbb{N} | 0 \leq n \leq 10\}$.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| VL | Gráfica del modelo generado (en verde) y del presentado en la situación (en rojo):  |



**Posibles estrategias**

Al igual que en el análisis de posibles estrategias de la clase anterior, son consideradas las fases MT/ASM, por ser las conducentes a la obtención del modelo matemático por parte de los estudiantes. La tabla 19, muestra las posibles estrategias de la segunda clase de la secuencia didáctica.

Tabla 19: Posibles estrategias de la segunda clase.

| Estrategias | Ejemplificación |
|---|---|
| Descomposición de la tabla de valores, calculando diferencias con respecto al valor del año anterior.<br>Esta estrategia no permite obtener una respuesta, pero es conducente a la siguiente. | $\begin{array}{ll} a_0 & 20.000.000 \\ a_1 & 20.000.000 - 2.000.000 \\ a_2 & 18.000.000 - 1.800.000 \\ a_3 & 16.200.000 - 1.620.000 \\ \dots & \dots \end{array}$ |
| Descomposición de la tabla de valores aplicando la devaluación del 10% con respeto al valor del año anterior.<br><br>Dicha descomposición permite obtener la expresión algebraica del modelo, de la forma $20.000.000 \cdot (9/10)^n$. | $\begin{array}{llll} a_0 & 20.000.000 & & \\ a_1 & a_0 - \frac{1}{10}(a_0) & \frac{9}{10}(a_0) & \\ a_2 & a_1 - \frac{1}{10}(a_1) & \frac{9}{10}(a_1) & \left(\frac{9}{10}\right)^2 (a_0) \\ a_3 & a_2 - \frac{1}{10}(a_2) & \frac{9}{10}(a_2) & \left(\frac{9}{10}\right)^3 (a_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} - \frac{1}{10}(a_{n-1}) & \frac{9}{10}(a_{n-1}) & \left(\frac{9}{10}\right)^n (a_0) \end{array}$ |

| | |
|---|---|
| Utilización de la invariante de la función exponencial para hallar el valor de la base. $$\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$$ | Si $y_2 = 18.000.000$, $y_1 = 20.000.000$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, entonces: $$\frac{18.000.000}{20.000.000} = \left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)$$ Si $y_3 = 16.200.000$, $y_1 = 20.000.000$, $x_3 = 3$, $x_1 = 1$, entonces: $$\frac{16.200.000}{20.000.000} = \frac{81}{100} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^2$$ |

**Dificultades y errores**

Para esta clase de la secuencia didáctica, se consideran las dificultades y errores durante las fases FP, MT/ASM, IE y VL, con sus respectivas devoluciones por parte del docente, presentadas en la tabla 20. No se consideran dificultades y/o errores en la fase SM, pues sólo implica un cálculo algorítmico.

Tabla 20: Dificultades y errores de la segunda clase,

| Fases | Dificultades | Errores | Devoluciones |
|---|---|---|---|
| FP | Para considerar otras funciones que no sean lineales | Considerar el modelo lineal presentado en la situación como el válido para la actividad | ¿Es la depreciación de \$2.000.000 que plantea el modelo una constante válida para todos los años?, de acuerdo al modelo ¿qué sucedería a los diez años de comprado el vehículo? |
| MT/ ASM | Para representar un porcentaje como fracción[20]. | Representar la depreciación sólo como un porcentaje y no como una fracción. | Si el porcentaje es una razón, ¿entre qué valores se forma dicha razón? |
| | Para comprender la utilidad del porcentaje de depreciación anual. | Incluir en el modelo el 10% de depreciación anual como base de la potencia ($\frac{10}{100}$ o $\frac{1}{10}$), y no el 90% ($\frac{90}{100}$ o $\frac{9}{10}$) en que queda tasado el vehículo. | De acuerdo a la situación, ¿qué representa el 10%? Si se descuenta el 10%, ¿con qué porcentaje queda tasado el vehículo al año siguiente? |

[20] En Abrate et al (2006) se plantea la dificultad para reconocer que, en este caso, $0{,}9$, $90/100$, $9/10$, $90\%$, etc., “son distintas representaciones de un mismo número y que ninguna de ellas es mejor que las otras en términos genéricos” (p. 110).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Para identificar los valores que representan datos en la situación. | Considerar los años en forma de fechas (2014, 2015, 2016…) como variable independiente. | De acuerdo a la situación, ¿cuáles son las variables involucradas? ¿son las fechas una variable válida? |
| IE | Para restringir el dominio de la función-modelo. | Considerar un dominio de la función de la forma $\mathrm{Dom}\, f: \mathbb{R}$, sin restricción en los valores. | Si el valor de la tasación fiscal cambia cada un año, ¿cómo es posible el decrecimiento durante el año?, ¿estamos ante una situación de carácter continuo en el sistema de los números reales? |
| VL | Para comprender la restricción del dominio en la gráfica. | Graficar la función-modelo como una curva decreciente continua[21]. | Respecto al dominio que se ha restringido, ¿cómo se relaciona este con la gráfica? |

## Plan de clase 3: «El Dispositivo Artístico de Nora»

En este apartado, se presenta la tercera clase[22] y final de la secuencia didáctica diseñada, comenzando por la descripción de sus tres momentos, para continuar con los respectivos análisis apriorísticos.

### Momento de inicio

Se comienza la clase presentando el objetivo declarado a los estudiantes: **resolver un problema de carácter geométrico**. Como esta es la tercera clase de modelación con los estudiantes, se recuerdan los momentos principales de las sesiones anteriores. Los estudiantes se deben organizar en grupos de tres a cinco integrantes cada uno, a los cuales se les entrega la actividad «El Dispositivo Artístico de Nora» en forma escrita, además de proyectarla en la pizarra frente al curso. Se realiza una lectura en conjunto de la misma y se presenta la pregunta: ¿cuál es la función que modela la cantidad de lados que tendrá el copo de nieve?

Se explica a los estudiantes que, en el proceso de modelización matemática, no siempre se cuenta con los datos, y que, en tal caso, el matemático debe obtenerlos de

[21] Al respecto, Bagni (2004) señala que las funciones se suelen expresar a menudo en la gráfica cartesiana continua, lo que puede llevar erróneamente a los estudiantes a considerar la continuidad como una característica inherente y común a todos los tipos de funciones.
[22] Para ver la planificación de la clase, véase Anexo 5: Plan de Clase Nº 3 – «El Dispositivo Artístico de Nora».

acuerdo a la información con la que cuente sobre la situación a modelizar. Es por ello que, para realizar esta clase, se les entregan cartulinas a los grupos de estudiantes, con la finalidad de que construyan el modelo físico (copo de nieve) utilizando regla, compás y lápices. Como esta clase de modelación es totalmente independiente para los estudiantes, ellos deberán ser capaces de obtener los datos necesarios para resolver el problema planteado, y así poder generar y validar un modelo matemático acorde. La fase de inicio es netamente instruccional, y tiene una duración aproximada no mayor a 10 minutos.

**Momento de desarrollo**

Los alumnos continúan organizados en sus respectivos grupos, construyendo la figura del problema para obtener los datos necesarios para continuar con el proceso de modelización. El profesor supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando, y realiza las respectivas devoluciones cuando los estudiantes manifiesten determinadas dificultades o errores durante el proceso (véase el apartado ‘Dificultades y errores’).

Una vez que los estudiantes hayan obtenido la función que modela el problema ($f(n) = 3 \cdot 4^n$), se procede a realizar una puesta en común para exponer los modelos físicos (copos de nieve) construidos, donde un representante de cada grupo debe explicar brevemente frente al curso cómo obtuvieron sus modelos (de ser necesario, se contrastan las respuestas en el caso de ser dispares). En esta fase (IE) se restringe el dominio de la función-modelo de acuerdo a un determinado número de iteraciones, además de ya haber interpretado y evaluado los modelos generados. El momento de desarrollo tiene una duración aproximada no mayor a 60 minutos.

**Momento de cierre**

Para finalizar, se sucede la fase VL, en la que se pide a los estudiantes que grafiquen el modelo en la aplicación Desmos® de sus teléfonos (si no cuentan con ello, lo pueden hacer de igual forma en sus cuadernos), además de presentarlo proyectado en la pizarra. Una vez graficado, se hace una última puesta en común con respecto al comportamiento de los modelos exponenciales cuando el valor de la variable es muy grande o muy pequeño, tanto en los casos de crecimiento como de decrecimiento. Además, se abordará el tema de la utilidad de este tipo de modelos en determinadas situaciones, como el crecimiento de poblaciones o células, interés compuesto, desintegración radiactiva, devaluaciones, entre otros casos. La clase concluye con la presentación de algunas imágenes de la curva de Koch y de fractales en la naturaleza. El momento de cierre tiene una duración aproximada no mayor a 20 minutos.

**Matemática en juego**

Para el desarrollo de esta clase, se ponen en juego los siguientes elementos matemáticos:

- Potencia de base natural con exponente variable.
- Potenciación como una multiplicación iterada.

- Dominio y recorrido de una función exponencial.
- Construcción de triángulos (fractales).
- Invariante de la función exponencial $\left(\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}\right)$.
- Comportamiento de modelos exponenciales cuando $x \to +\infty$, $x \to 0$, tanto para casos de crecimiento como de decrecimiento.

### Descripción de la actividad

Se diseñó un problema basado en la construcción de un fractal, en el que se busca desarrollar la modelización matemática como una herramienta para la resolución de problemas, elaborando el objeto a modelizar y obteniendo datos de este.

**El Dispositivo Artístico de Nora**

Nora es una artista visual a quien se le ha encargado que decore, con motivos navideños, el muro de un museo. Ella ha pensado en un copo de nieve gigante, el cual dibujará comenzando por un triángulo invertido, y levantando un pequeño triángulo en cada punto medio de los lados de esta figura con cada iteración, como se muestra en la imagen de uno de sus bocetos:

**¿Cuál es la función que modela la cantidad de lados que tendrá el copo de nieve?**

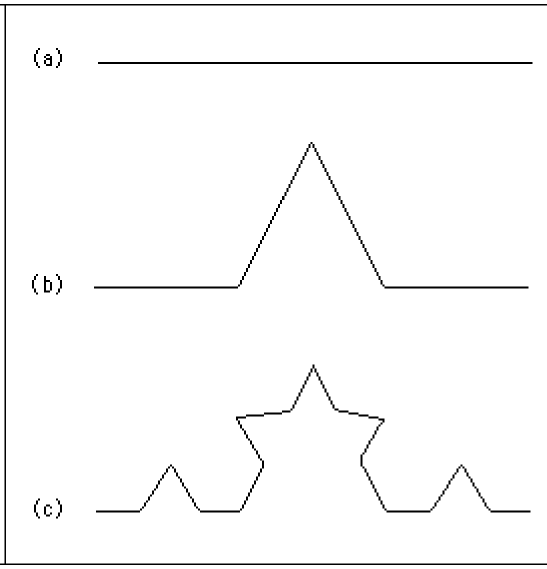


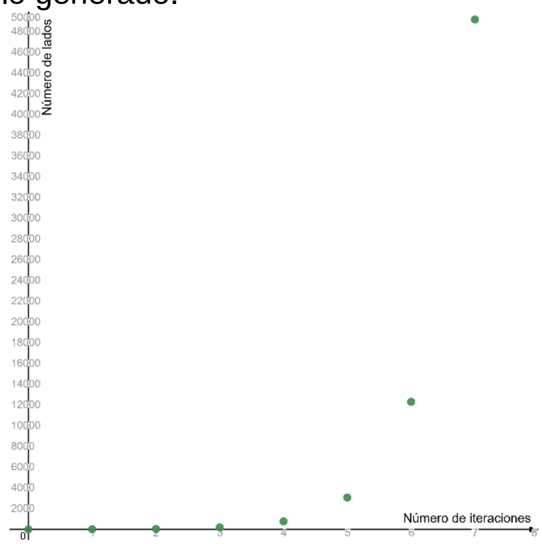

Figura 17: Actividad de clase «El Dispositivo Artístico de Nora».
Fuente: elaboración propia.

A diferencia de las clases anteriores, los estudiantes deben construir tanto un modelo físico como matemático que permita la resolución del problema, es decir, deben dibujar la figura a fin de obtener datos de esta y así proceder a la fase MT de la situación que se les plantea. La pregunta planteada en la actividad es la que permite el desarrollo de las tres primeras fases del proceso de modelización matemática, y también da respuesta a la situación-problema en su totalidad. Del mismo modo, la clase es totalmente independiente para los estudiantes, quienes ya debiesen haber comprendido las etapas del proceso de modelización matemática, derivadas de las dos experiencias anteriores, y desarrollarlas en forma independiente, aunque entendiendo que, en esta ocasión, sirve como una herramienta para resolver el problema propuesto.

### Respuesta experta

La tabla 21 muestra la respuesta experta de las preguntas y acciones de la tercera clase, de acuerdo a las distintas etapas del proceso de modelización matemática.

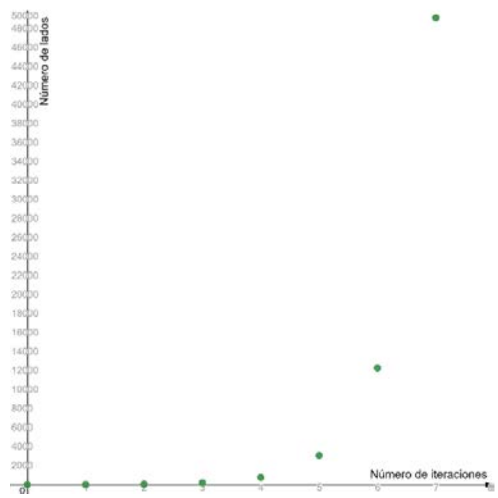
Tabla 21: Respuesta experta de la tercera clase.

| Fases | Respuesta experta |
|---|---|
| FP<br>SM<br>MT/ASM | ¿Cuál es la función que modela la cantidad de lados que tendrá el copo de nieve?<br>R: La función que modela la situación es $f(n) = 3 \cdot 4^n$. |
| IE | Determinar para qué valores de $n$ iteraciones se hace válido el modelo.<br>R: El modelo sólo es válido desde las 0 a las iteraciones que se estimen convenientes.<br>Restringir el dominio del modelo matemático.<br>R: $\mathrm{Dom}\, f: \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq (n + \ldots)\}$. |
| VL | Gráfica del modelo generado.<br><br> |

## Posibles estrategias

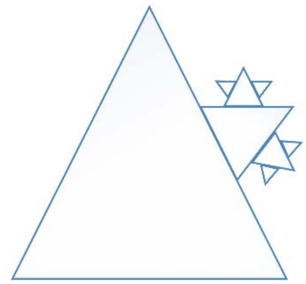
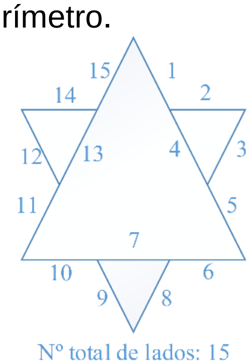
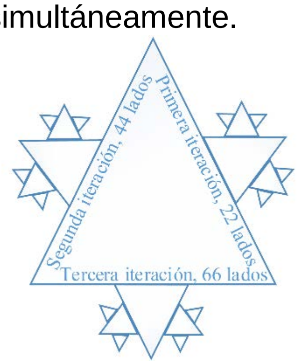
Como en los análisis de las clases anteriores, se presentan a continuación las posibles estrategias a seguir por los estudiantes para desarrollar el problema planteado, en las fases MT/ASM. Cabe destacar que, estas estrategias son llevadas a cabo una vez que los alumnos ya construyeron el objeto a modelar y extrajeron los datos del mismo en la fase anterior (SM).

Tabla 22: Posibles estrategias de la tercera clase.

| Estrategias | Ejemplificación |
| --- | --- |
| Formación de una tabla de valores que represente las variaciones de número de lados con respecto al número de iteraciones de la figura($a_n$) realizadas. | $a_0$ 3<br>$a_1$ 12 $4(a_0)$<br>$a_2$ 48 $4(a_1)$ $16(a_0)$<br>$a_3$ 192 $4(a_2)$ $64(a_0)$<br>$a_4$ 768 $4(a_3)$ $256(a_0)$<br>… … … …<br>$a_n$ $4(a_{n-1})$ $4^n(a_0)$<br><br>Esta descomposición permite obtener la expresión algebraica del modelo, de la forma $3 \cdot 4^n$. |
| Representación gráfica:<br><br>Representar como puntos en el plano cartesiano los valores de ambas variables y buscar una expresión del tipo exponencial, debido a la curva creciente que genera la ubicación de los puntos.<br><br>Esta estrategia puede ayudar a llevar a cabo las tres restantes. |  |
| Utilización de la invariante de la función exponencial para hallar el valor de la base. $\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$ | Si $y_2 = 12$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, entonces: $\frac{12}{3} = (4)^{2-1} \Rightarrow 4$<br>Si $y_3 = 48$, $y_1 = 3$, $x_3 = 3$, $x_1 = 1$, entonces: $\frac{48}{3} = 16 \Rightarrow (4)^{3-1} \Rightarrow 4^2$ |
| Hallar el patrón implícito en la tabla de valores para obtener una expresión para el número de lados a la enésima iteración. | A la enésima iteración habrán $3 \cdot 4^n$ lados. |

### Dificultades y errores

Para esta clase de la secuencia didáctica, se consideran las dificultades y errores durante las fases SM y MT/ASM, que son desarrolladas de forma independiente por parte de los grupos de estudiantes; y en las fases IE y VL, realizadas como parte de una puesta en común con el grupo curso. No se consideran dificultades y/o errores en la fase FP, pues es un paso que sólo implica la comprensión del problema planteado.

| Fases | Dificultades | Errores | Devoluciones |
|---|---|---|---|
| SM | Para construir el objeto a modelar. | Construir los triángulos en sólo un lado de la figura inicial con cada iteración.<br> | Releer el enunciado de la situación-problema, ¿desde dónde emergen los triángulos en cada iteración? |
| | Para obtener datos del objeto modelado (contar el número de lados). | a) Considerar la medida de los lados de la iteración anterior como parte del perímetro.<br> | ¿Los lados de la iteración anterior forman parte del perímetro?, ¿cuántos lados de la figura forman parte sólo del perímetro? |
| | | b) Considerar que en cada iteración emergen los triángulos desde un solo lado de la figura, y no desde todos simultáneamente.<br> | Releer el enunciado de la situación-problema, ¿desde dónde emergen los triángulos en cada iteración?, ¿cuántos lados de la figura forman parte sólo del perímetro? |

| | | | |
|---|---|---|---|
| MT/ ASM | Para identificar las variables involucradas en la situación. | Construye erróneamente una relación (invierte el orden de las variables o no establece una relación entre estas). | De acuerdo a la construcción del modelo físico, ¿cuáles son los elementos que variaron?, ¿existe alguna relación entre estos?, ¿cómo es dicha relación? |
| IE | Para restringir el dominio de la función-modelo. | Considerar un dominio de la función de la forma $\mathrm{Dom}\ f\colon \mathbb{R}$, sin restricción en los valores. | ¿Es válido este modelo para valores negativos de iteraciones?, ¿y para valores no-enteros?, ¿estamos ante una situación de carácter continuo en el sistema de los números reales? |
| VL | Para comprender la restricción del dominio en la gráfica. | Graficar la función-modelo como una curva creciente continua. | Respecto al dominio que se ha restringido, ¿cómo se relaciona este con la gráfica? |

# CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones del estudio, comenzando por la revisión de los objetivos y preguntas de investigación; luego, se abordarán las limitaciones del trabajo realizado; para finalizar con las proyecciones y aportaciones del estudio.

## Sobre los objetivos y preguntas de investigación

El objetivo general propuesto para este estudio era el de **proponer una secuencia didáctica para el aprendizaje de la modelación con el objeto matemático función exponencial para estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años)**. Para su concreción, se formularon tres objetivos específicos, abordando las conclusiones con base en estos, y dando respuesta a las preguntas de investigación con los que se encuentran asociados.

### Sobre el objetivo específico 1

El OE 1 era **diseñar una secuencia didáctica de tres clases sobre la modelación con el objeto matemático función exponencial para estudiantes de segundo año medio (15 a 16 años)**. Durante el trabajo con la metodología del Estudio de Clases japonés, en la fase formulación de esta investigación, se diseñó una secuencia didáctica compuesta por tres planes de clase, cada uno en torno a una situación-problema, la cual debía ser modelizada utilizando la función exponencial. La importancia de esta metodología, de acuerdo a Isoda y Olfos (2009), es que permite a los docentes la mejora en sus capacidades de enseñanza, para poder generar un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, en la praxis profesional docente y la calidad de enseñanza.

Para concatenar la metodología del Estudio de Clases con el diseño de la secuencia didáctica, es que cada sesión debía ser desafiante y atractiva para los estudiantes, con una situación contextualizada, que tampoco fuese ajena a la realidad de los sujetos a los que iba dirigida la propuesta, sin cometer complicaciones en los efectos del contrato didáctico (Brousseau, 2007) que provocasen de cada actividad un simple ejercicio. Sin embargo, como dicho trabajo demandó bastante tiempo, tanto durante el análisis sobre el trabajo como en la constante mejora de los planes de clase diseñados, es que se demostró, coincidiendo con Aparisi y Pochulu (2013), en que la búsqueda y elección de problemas adecuados, tanto a las tendencias actuales y directrices del currículo, como a un determinado enfoque didáctico, termina siendo un gran desafío para los profesores.

El diseño de las clases que conforman la secuencia, también estuvo en directa relación con el modelo didáctico-cognitivo de Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), pues su estructura, como se ha declarado anteriormente, se encuentra ligada a las fases del proceso de modelización matemática.

El logro de este objetivo se manifestó en el diseño de la secuencia didáctica con sus respectivas clases, y el cual se materializó en la posterior implementación de una de estas.

### Sobre el objetivo específico 2

El OE 2 era **implementar una clase de la secuencia didáctica**. La tercera fase de este estudio, concerniente a la implementación, se materializó en tres intervenciones de la primera clase de la secuencia diseñada, las que a su vez permitieron la constante mejora del plan propuesto inicialmente. Como se declaró con anterioridad, al término de cada intervención se realizó una reflexión sobre los resultados, analizando el registro audiovisual y realizando adecuaciones y mejoras para la siguiente implementación, en consonancia con el ciclo de la metodología del Estudio de Clase japonés (Isoda y Olfos, 2009).

Las dificultades y errores que evidenciaron los estudiantes durante las distintas intervenciones, fueron causal de atención a ciertos momentos de la clase, por lo que representaron significativos aportes para la mejora en las devoluciones del docente, la reestructuración de los tiempos, y ayudaron a la predicción de las complicaciones que se podían suceder en cada sesión. Es por ello que, con cada intervención realizada, el plan de clase se iba perfeccionando con respecto al de la anterior implementación, además de posibilitar la recolección de información sobre los resultados obtenidos de cada una.

Los dos primeros objetivos permitieron dar respuesta a la primera pregunta de investigación planteada: **¿qué características didácticas debe tener una clase de modelación para que los estudiantes sean capaces de alcanzar las etapas del proceso de modelización matemática?** Al respecto, el estudio permite vislumbrar que una de las características es que la clase permita el balance entre una mínima intervención directa del profesor y una máxima independencia por parte de los estudiantes para desarrollar el ciclo de modelización matemática, ello sustentado por Blum y Borromeo-Ferri (2009). También, el problema planteado debe ser desafiante para los estudiantes, pero no imposible de resolver, donde las preguntas del profesor permitan el tránsito de los alumnos a través de las fases propuestas, pero sin guiarlos en las respuestas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

### Sobre el objetivo específico 3

El OE 3 era **analizar los resultados obtenidos de la implementación**. Una vez implementado el plan de la primera clase de la secuencia didáctica, los resultados fueron analizados con base en los referentes teóricos escogidos para el estudio. Dicho análisis permitió clasificar a los grupos de estudiantes en función de los logros del proceso de modelización matemática, y de la evidencia de construcciones mentales en sus producciones escritas.

Cabe destacar que, en este estudio, no se consideró como ‘clase ideal’ a aquella en la que se lograron desarrollar todas las fases del proceso de modelización sin dificultades o errores, o en el menor tiempo posible, sino que es la que, incluso presentando dificultades y errores por parte de los estudiantes, estas son subsanadas con las devoluciones del profesor y las reflexiones propias del alumnado, para así poder lograr completamente las fases de la modelización. Bajo este principio es que se afirma que la tercera clase fue la más cercana a una 'clase ideal' durante la fase de implementación, pues en la primera, las dificultades experimentadas fueron mayores que las previstas e impidieron al grueso de los grupos desarrollar la actividad, a excepción de uno solo que logró superarlas y la completó; por otra parte, en la segunda implementación, las dificultades experimentadas fueron mínimas, sin necesitar de gran intervención por parte del profesor en lo que respecta a devoluciones, desarrollándose por la mayoría de los grupos en un tiempo mucho menor que el estipulado en el plan de clase, dejando en evidencia que no representó un mayor desafío para los estudiantes. La tercera implementación, sin embargo, evidenció un equilibrio entre el logro de las fases y la superación de las dificultades y errores.

Desde el plano de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), sólo un grupo de sujetos informantes logró evidenciar construcciones mentales en sus producciones escritas. Si bien el proceso 'invariante de la función exponencial' fue considerado para este estudio como una herramienta que facilita la obtención de la función que modela la situación-problema planteada, el logro de la actividad estuvo exenta de la necesidad de su hallazgo para dar respuesta a la misma. Esto sugiere que, a fin de proyectar este estudio, se debe enfatizar aún más en la articulación de los referentes teóricos considerados para que sean más evidentes las construcciones mentales durante el desarrollo del proceso de modelización matemática.

Este objetivo permitió dar respuesta a la segunda pregunta de investigación planteada: **¿cómo aporta el proceso de modelización matemática al aprendizaje del objeto función exponencial?** La evidencia recopilada de las intervenciones implementadas, sugiere que, en una clase de modelación se articulan una serie de objetos matemáticos y habilidades con las que cuentan los estudiantes, por lo que dicha mixtura de elementos evidenció, en parte, sólo la reafirmación de aprendizajes en los alumnos, más que el logro de nuevos conocimientos. Es por ello que sería necesario un estudio de mayor envergadura para responder a cabalidad esta pregunta.

### Reflexión sobre los objetivos

Este estudio provocó reflexiones y cuestionamientos sobre el tema de la modelación como estrategia y la modelización matemática como proceso. Por una parte, tanto la implementación como el análisis de los resultados obtenidos de la misma, sugirió una mirada de la modelización no como un objeto matemático, sino más bien, como un proceso que requiere de la articulación de distintos elementos, tanto en lo que respecta a las habilidades y contenidos matemáticos previos, como en el factor empírico en los sujetos que la desarrollan. Por otra parte, con base en la información recopilada en los establecimientos, surgió el cuestionamiento de porqué parece existir aún una reticencia a implementar la estrategia de modelación en el aula como práctica regular por parte de algunos docentes, incluso cuando el currículo nacional vigente lo promueve en sus directrices, además de existir estudios desde hace más de 30 años en esta materia, como se documenta en Blum et al. (2003).

A la luz de ello, este estudio sugirió una cierta discordancia entre lo que plantea el currículo y los tiempos disponibles para desarrollar la modelación como estrategia, pues se evidenció, durante la fase de diseño del Estudio de Clases, que es bastante el tiempo que demanda este trabajo. Pueda que ello sea una de las causales de que dicha práctica no sea habitual para todos los establecimientos. Del mismo modo, en los textos de estudio analizados, se evidenció la carencia del desarrollo de la habilidad de modelar, limitándose, en determinados casos, a evaluar numéricamente un modelo prestablecido, o a representar una situación en el lenguaje algebraico, sin evidenciar la presencia de un proceso formal, desde la generación hasta la validación de un modelo. Si bien el currículo define la habilidad de modelar, parece contraproducente lo que presentaron los textos de estudio analizados con respecto a ello, incluso en el distribuido por el mismo Ministerio de Educación. ¿Será necesaria, por lo tanto, una reformulación del tratamiento de la modelación como estrategia de enseñanza en los textos de estudio? ¿Cómo se puede entregar a los profesores las herramientas necesarias para que hagan de la estrategia de modelación una praxis habitual en sus clases? Si bien las actividades diseñadas para esta propuesta pueda que no se encuentren netamente enmarcados dentro de la modelación como estrategia, pero sí utilizan la modelización como proceso, las interrogantes recién planteadas son parte de las que se pretenden abordar en estudios de mayor envergadura que emerjan de este.

## Limitaciones del estudio

Una de las mayores limitantes de este estudio es que la modelación como estrategia de enseñanza demanda más tiempo que el habitual, evidenciado desde el diseño de la secuencia didáctica hasta la misma implementación y análisis de los resultados. En consonancia con Blum y Borromeo-Ferri (2009), la modelación requiere de una preparación, por parte de los profesores, en lo que respecta al manejo de esta estrategia en el aula, pues es una competencia que “tiene que ser construida en procesos de aprendizaje a largo plazo (a través de los años)” (p. 56). Por otra parte, el diseño de la clase implementada, contemplaba como conducta de entrada el objeto función exponencial, situación que colocó en desventaja a los estudiantes de la primera intervención, que fueron quienes más dificultades y errores evidenciaron; contrario a lo sucedido con las otras dos sesiones donde sí se había enseñado dicho contenido.

Con respecto al diseño de los planes de clase, una limitante observada durante la reflexión de este estudio, es que la fase de matematización y análisis del sistema matemático evidenció tender a la algebrización de la respuesta esperada, que, si bien estaba en consonancia con el objetivo que se esperaba desarrollar, sugiere que fue una limitante con respecto a la importancia del desarrollo de las representaciones semióticas en el aula que plantea Duval (2004), o con la riqueza de la modelación, que favorece la multiplicidad de respuestas válidas para una misma situación, de acuerdo a lo planteado por Blum y Borromeo-Ferri (2009). Sin embargo, como una reformulación de esta propuesta, se pondrá foco en dichas etapas del proceso de modelización matemática, y en los análisis de las respuestas esperadas de los estudiantes.

Otra limitante fue que, para evidenciar construcciones mentales, los estudiantes necesitaban de mayor tiempo para lograrlo, lo que les imposibilitó, en los dos casos mencionados (G4b y G4c), el poder completar el proceso de modelización matemática a la par del resto de grupos que lo lograron, ya sea parcial o totalmente. Ello sugiere que, en una próxima reformulación del plan de clase, los estímulos previstos para activar las acciones, deban adecuarse para que no provoquen pérdidas de tiempo o desfases notorios en su consecución, a fin de no afectar el desarrollo de la clase y del proceso de modelización matemática.

## Proyecciones y aportaciones del estudio

Durante el desarrollo del presente estudio, se ha ampliado la mirada de la enseñanza del objeto matemático función exponencial, lo que ha provocado, a su vez, proyectarlo en dos líneas, principalmente. Por una parte, la corriente investigativa, orientada desde los marcos teóricos de la didáctica de la matemática, pues en este estudio se ha logrado articular el modelo didáctico-cognitivo propuesto por Blomhøj y Højgaard-Jensen (Blomhøj y Højgaard-Jensen, 2003; Blomhøj, 2008), con la adaptación de un fragmento de la DG de la función exponencial, propuesta por Vargas, González y Llinares (2011), a fin de fortalecer la comprensión y análisis de las fases de matematización y análisis del sistema matemático, desde la mirada de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991) y que, en futuras investigaciones, se centre el foco en la construcción de objetos o esquemas, y no sólo en la de procesos, como evidenció este estudio. Sin embargo, la primera tarea será reforzar aún más la articulación entre ambos referentes.

La propuesta didáctica generada se considera una innovación ya que, a la luz de lo evidenciado en los textos de estudio analizados, sugiere que la modelación como estrategia no presenta un proceso detallado que se le asocie a su puesta en práctica en el aula, y es en ese aspecto en el que busca aportar esta secuencia didáctica, sirviendo de herramienta para los docentes que se interesen en implementarla como forma de reforzar aprendizajes, en este caso, con respecto a la función exponencial.

Por otra parte, se tiene una proyección desde la práctica, dirigida hacia el diseño e implementación de propuestas didácticas que articulen a la función exponencial con la logarítmica, y de otras experiencias de aula que involucren distintos tipos de funciones, y en lo posible, con otros objetos matemáticos. Ello espera ir en directa relación con respecto a las aportaciones de este estudio, pues se espera que contribuya en parte a que la estrategia de modelación y el proceso de modelización matemática, sean elementos que formen parte de la praxis habitual en la enseñanza de la asignatura, representando –esta propuesta– una herramienta para los profesores que deseen desarrollar esta habilidad de modelar situaciones en sus estudiantes.

# REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Aparisi, L. y Pochulu, M. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 26*, pp. 1387-1397. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Nueva York: Springer.

Arrieta, J. y Hernández, M. Á. (2005). Las prácticas sociales de modelación y la emergencia de lo exponencial. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Edits.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 537-542). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathemmatics Education. En CBMS issues in mathematics education, *Research in Collegiate mathemmatics education II* (pp. 1-32). Providence, Rhode Island, EE.UU.: American Mathematics Society.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Relime, VII*(1), 5-23. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2095332.pdf

Bartle, R. (1967). *The Elements of Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*(32), 13-25.

Benavides, L. y Calvache, R. (2013). El Estudio de Clase como investigación en el aula. *Universitaria, 2*(1), 32-55.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Blanco, M., Bozt, J., Calderón, F., Jiménez, M. J., González, M., López, G., . . . Rupin, P. (2009). *Matemática 2 Proyecto Bicentenario.* Providencia, Chile: Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones.

Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. (M. Mina, Trad.) *Revista de Educación Matemática, 23*(2), 20-35.

Blomhøj, M. y Højgaard-Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 22*(3), 123-139.

Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. H. (2009). Project organised science studies at university level: exemplarity and interdisciplinarity. *ZDM Mathematics Education*, 183-198. doi:DOI 10.1007/s 11858-008-0102-3

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Jounal of Mathematical Modelling and Application*, 45-58.

Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M. S., Bouleau, N., Confrey, J., Galbraith, P., . . . Henn, H. W. (2003). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education - discussion document. En *Educational Studies in Mathematics 51* (pp. 149-171). Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral, R. y Farfán, M. R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo.* México, D.F.: International Thomson Editores.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado* (Tercera ed.). AIQUE Grupo Editor.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, 273-280.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano* (Segunda ed.). (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Merlín I.D.

García, W. (2012). *Modelación matemática en funciones exponencial y logarítmica: una propuesta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas básicas.* Informe de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Medellín.

González, M. Á., García, L., García, J. E., Travieso, Y. y Puldón, G. (2015). Propuesta de actividades con un enfoque interdisciplinario que favorezca la integración de las disciplinas de Ciencias Básicas. *Educación Médica Superior*. Obtenido de http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S0864-21412015000300017&script=sci_arttext&tlng=pt

Guerrero-Ortiz, C. y Mena-Lorca, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 10*(1), 1-14.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases.* Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kleiner, I. (2009). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. En M. Anderson, V. Katz, R. Wilson, & MAA (Ed.), *Who Gave You the Epsilon?: And Other Tales of Mathematical History* (pp. 14-26). Estados Unidos: The Mathematical Association of America.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Séptima ed.). (F. Mata, Trad.) Tlalnepantla, México: Grupo Mexicano MAPASA, S.A. de C.V.

López, L. (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas, Yucatán.

Miatello, R. y Tirao, P. (2005). Una introducción a las funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista de Educación Matemática, 20*(2), 23-46.

MINEDUC. (2002). *Matemática. Álgebra y Modelos Analíticos. Programa de Estudio Tercer Año Medio. Formacion Diferenciada.* Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2011). *Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación, República de Chile.

MINEDUC. (2012). Guía Didáctica para 2º año de Educación Media: Crecimiento Exponencial y Logarítmico. En MINEDUC, *Guías Didácticas para la Articulación de los Ejes Curriculares de Números, Álgebra, Geometría* (pp. 80-137). Santiago, Chile: Impresión Maval Ltda.

MINEDUC. (2016a). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio.* Santiago, Chile: Ministerio de Educación, República de Chile.

MINEDUC. (2016b). *Matemática. Programa de Estudio - Octavo Básico.* Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC. (2016c). *Matemática. Programa de Estudio - Primero Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC. (2016d). *Matemática. Programa de Estudio - Séptimo Básico*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación de Chile.

Muñoz, G., Jiménez, L. y Rupin, P. (2013). *Matemática 2º Medio Texto del Estudiante.* Providencia, Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Neira, G. (2009). Obstáculos Epistemológicos y Conflictos Semióticos en la Educación Matemática: Visiones y Perspectivas Actuales. *Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística* (pp. 1-10). Duitama: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ocampo, A. (2012). *Propuesta metodológica para la enseñanza de funciones en el curso de matemáticas básicas de la Universidad Nacional de Colombia (sede Medellín).* Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Exactas, Medellín.

O'Connor, J. y Robertson, E. (2017). *Etymology of some common mathematical terms.* Obtenido de University of St Andrews: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Mathematical_notation.html

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* (C. Valdés, Trad.) Moscú, URSS: Editorial Mir.

Sastre, P., Boubée, C., Rey, G., Maldonado, S. y Villacampa, Y. (2006). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 19*, pp. 22-27. México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stewart, I. (2008). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años.* (J. García, Trad.) Barcelona, España: Editorial Crítica.

Vargas, J., González, M. T. y Llinares, S. (2011). Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife: Comité Interamericano de

Educación Matemática. Obtenido de http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1292/154

Velásquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en cursos de pre-cálculo.* Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado, San Miguel.

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

# ANEXOS

## Anexo 1: Tratamiento de la Función Exponencial en Blanco et al. (2009)

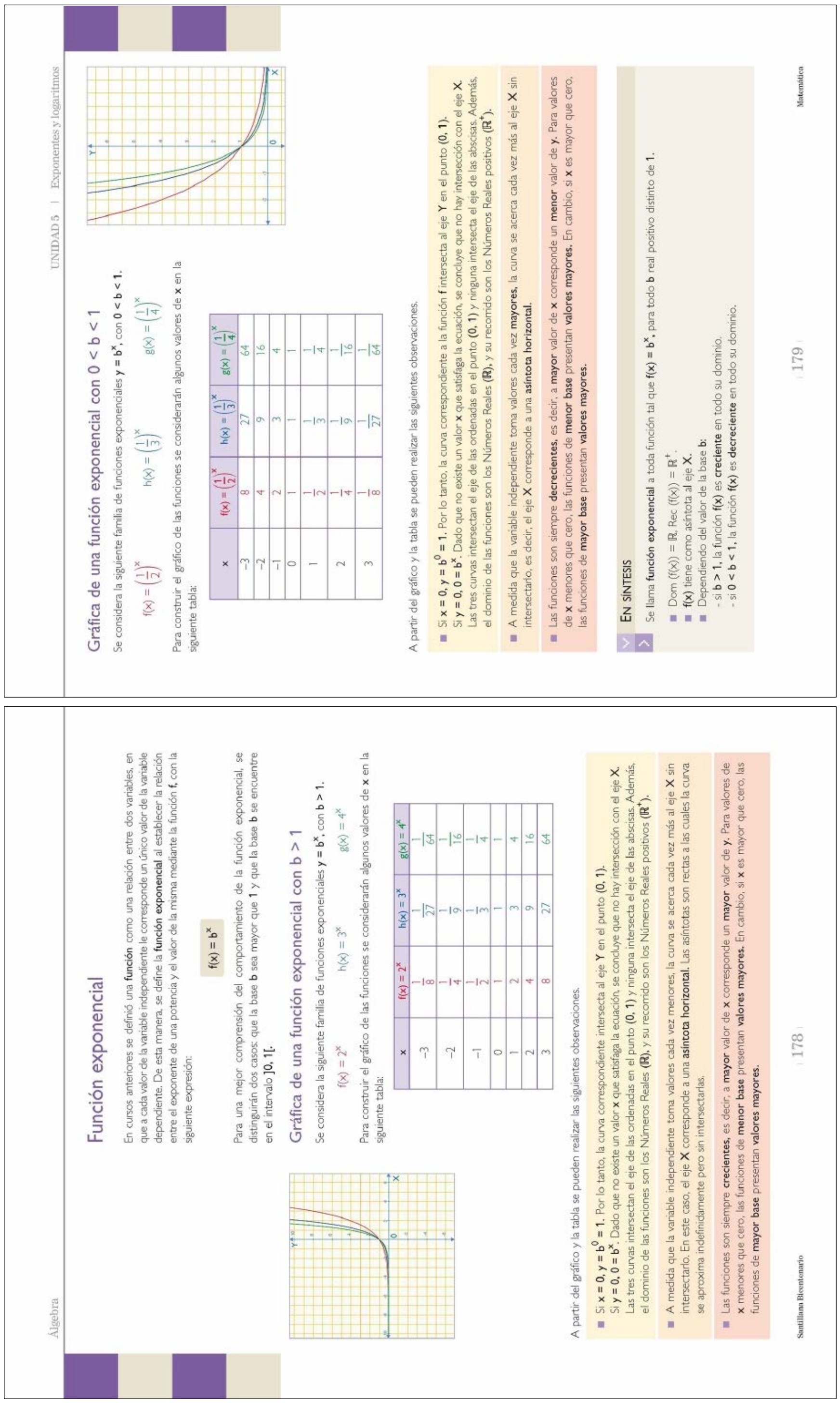
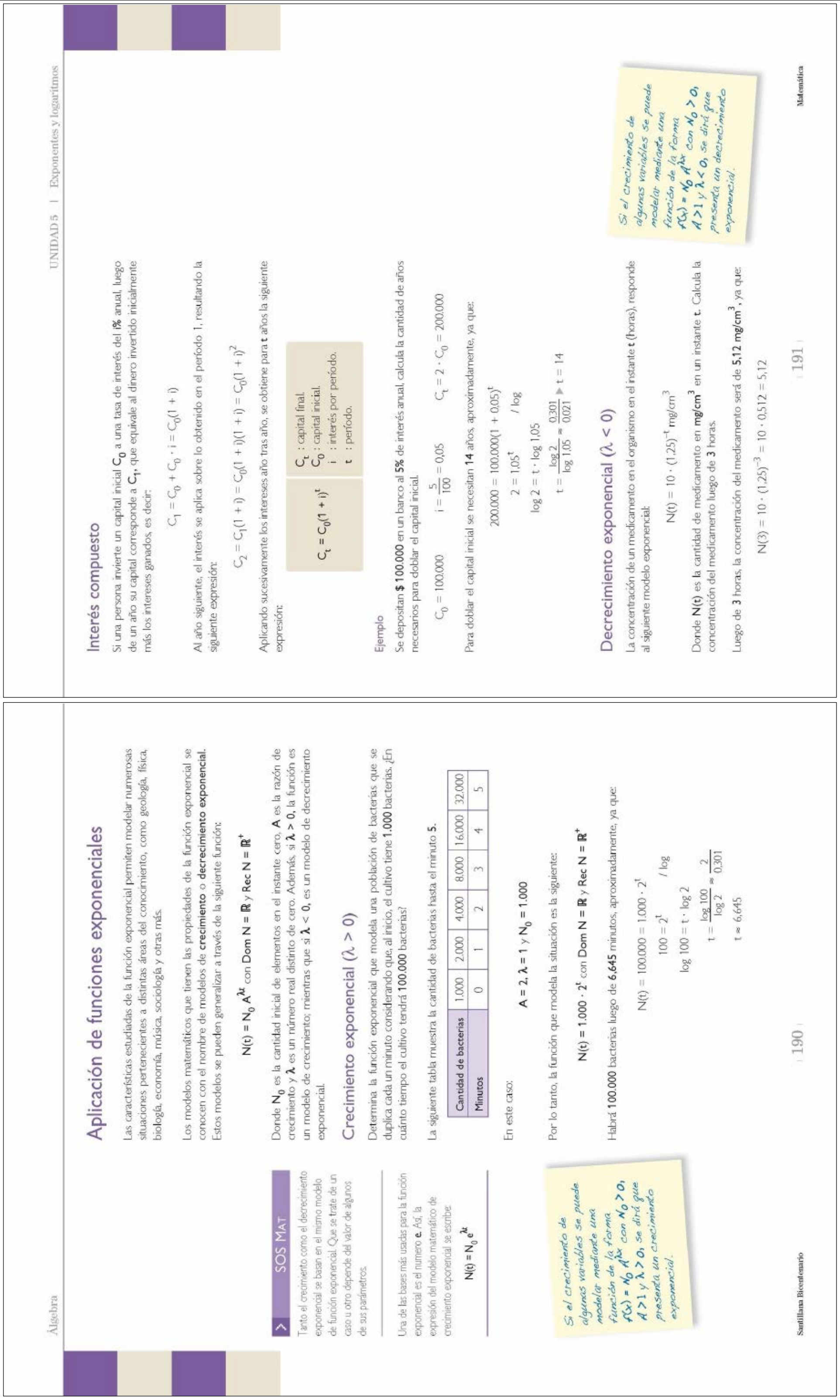


Figura 18: Introducción al concepto de función exponencial en el primer texto de estudio analizado. Fuente: extraído desde Blanco et al. (2009, pp. 178-179).



Álgebra

## Aplicación de funciones exponenciales

Las características estudiadas de la función exponencial permiten modelar numerosas situaciones pertenecientes a distintas áreas del conocimiento, como geología, física, biología, economía, música, sociología y otras más.

Los modelos matemáticos que tienen las propiedades de la función exponencial se conocen con el nombre de modelos de **crecimiento** o **decrecimiento exponencial**. Estos modelos se pueden generalizar a través de la siguiente función:

$$N(t) = N_0\, A^{\lambda t} \text{ con Dom } N = \mathbb{R} \text{ y Rec } N = \mathbb{R}^+$$

Donde $N_0$ es la cantidad inicial de elementos en el instante cero, **A** es la razón de crecimiento y $\lambda$ es un número real distinto de cero. Además, si $\lambda > 0$, la función es un modelo de crecimiento; mientras que si $\lambda < 0$, es un modelo de decrecimiento exponencial.

**SOS MAT**

Tanto el crecimiento como el decrecimiento exponencial se basan en el mismo modelo de función exponencial. Que se trate de un caso u otro depende del valor de algunos de sus parámetros.

Una de las bases más usadas para la función exponencial es el número **e**. Así, la expresión del modelo matemático de crecimiento exponencial se escribe:

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}$$

### Crecimiento exponencial ($\lambda > 0$)

Determina la función exponencial que modela una población de bacterias que se duplica cada un minuto considerando que, al inicio, el cultivo tiene **1.000** bacterias. ¿En cuánto tiempo el cultivo tendrá **100.000** bacterias?

La siguiente tabla muestra la cantidad de bacterias hasta el minuto **5**.

| Cantidad de bacterias | 1.000 | 2.000 | 4.000 | 8.000 | 16.000 | 32.000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Minutos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

En este caso:

$$A = 2,\ \lambda = 1 \text{ y } N_0 = 1.000$$

Por lo tanto, la función que modela la situación es la siguiente:

$$N(t) = 1.000 \cdot 2^t \text{ con Dom } N = \mathbb{R} \text{ y Rec } N = \mathbb{R}^+$$

Habrá **100.000** bacterias luego de **6,645** minutos, aproximadamente, ya que:

$$N(t) = 100.000 = 1.000 \cdot 2^t$$
$$100 = 2^t \quad / \log$$
$$\log 100 = t \cdot \log 2$$
$$t = \frac{\log 100}{\log 2} \approx \frac{2}{0{,}301}$$
$$t \approx 6{,}645$$

*Si el crecimiento de algunas variables se puede modelar mediante una función de la forma $f(x) = N_0 A^{\lambda x}$ con $N_0 > 0$, $A > 1$ y $\lambda > 0$, se dirá que presenta un crecimiento exponencial.*

Santillana Bicentenario | 190

UNIDAD 5 | Exponentes y logaritmos

### Interés compuesto

Si una persona invierte un capital inicial $C_0$ a una tasa de interés del **i%** anual, luego de un año su capital corresponde a $C_1$, que equivale al dinero invertido inicialmente más los intereses ganados, es decir:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$$

Al año siguiente, el interés se aplica sobre lo obtenido en el período 1, resultando la siguiente expresión:

$$C_2 = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$$

Aplicando sucesivamente los intereses año tras año, se obtiene para **t** años la siguiente expresión:

$$C_t = C_0(1 + i)^t$$

$C_t$ : capital final.
$C_0$ : capital inicial.
i : interés por período.
t : período.

Ejemplo

Se depositan **$ 100.000** en un banco al **5%** de interés anual, calcula la cantidad de años necesarios para doblar el capital inicial.

$C_0 = 100.000 \qquad i = \frac{5}{100} = 0{,}05 \qquad C_t = 2 \cdot C_0 = 200.000$

Para doblar el capital inicial se necesitan **14** años, aproximadamente, ya que:

$$200.000 = 100.000(1 + 0{,}05)^t$$
$$2 = 1{,}05^t \quad / \log$$
$$\log 2 = t \cdot \log 1{,}05$$
$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} \approx \frac{0{,}301}{0{,}021} \blacktriangleright t = 14$$

### Decrecimiento exponencial ($\lambda < 0$)

La concentración de un medicamento en el organismo en el instante **t** (horas), responde al siguiente modelo exponencial:

$$N(t) = 10 \cdot (1{,}25)^{-t} \text{ mg/cm}^3$$

Donde **N(t)** es la cantidad de medicamento en $\mathbf{mg/cm^3}$ en un instante **t**. Calcula la concentración del medicamento luego de **3** horas.

Luego de **3** horas, la concentración del medicamento será de **5,12 mg/cm³**, ya que:

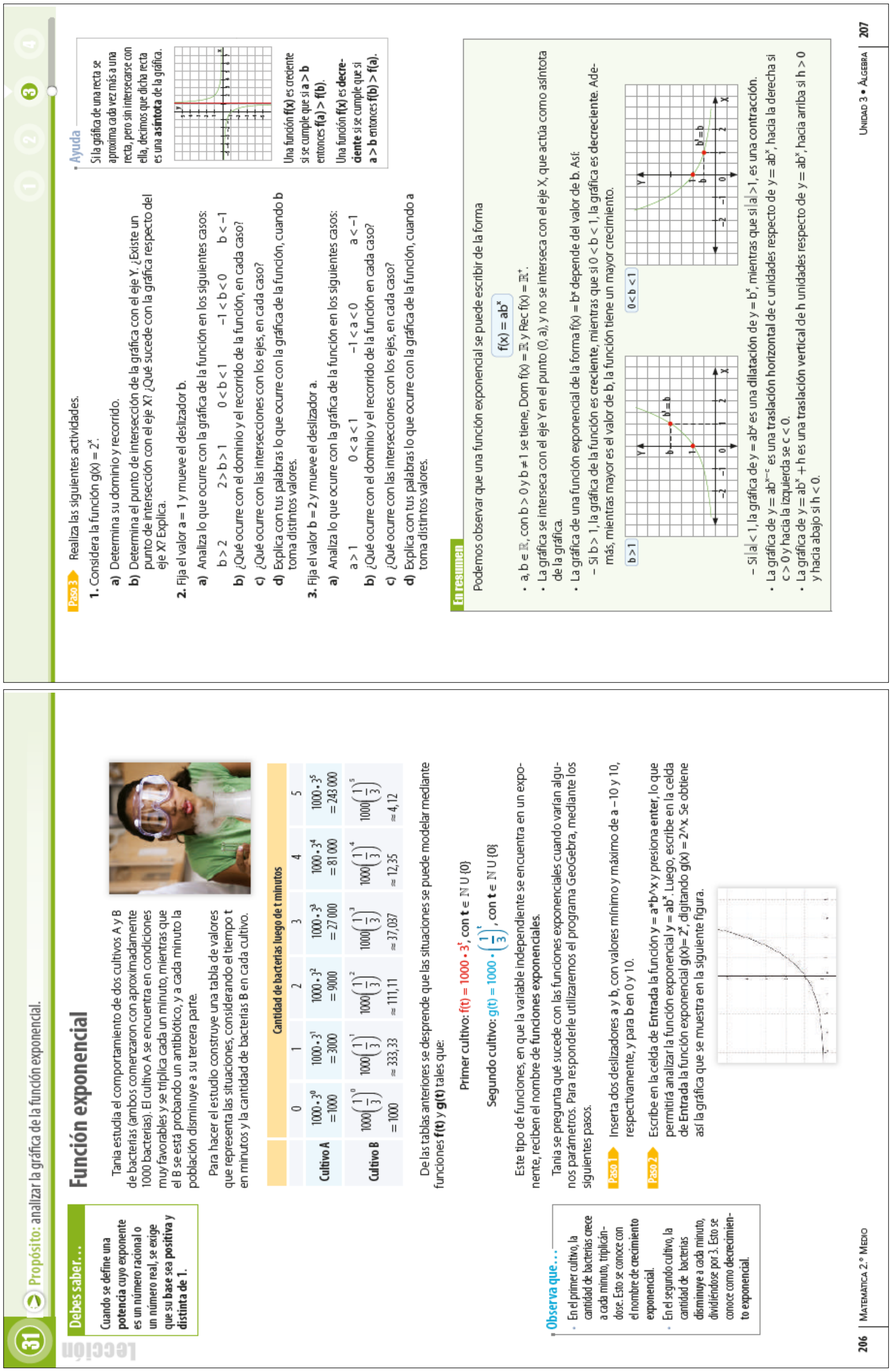
$$N(3) = 10 \cdot (1{,}25)^{-3} = 10 \cdot 0{,}512 = 5{,}12$$

*Si el crecimiento de algunas variables se puede modelar mediante una función de la forma $f(x) = N_0 A^{\lambda x}$ con $N_0 > 0$, $A > 1$ y $\lambda < 0$, se dirá que presenta un decrecimiento exponencial.*

191 | Matemática

Figura 19: Aplicaciones de la función exponencial en el primer texto de estudio analizado. Fuente: extraído desde Blanco et al. (2009, pp. 190-191).

## Anexo 2: Tratamiento de la Función Exponencial en Muñoz et al. (2013)



Lección 31

Propósito: analizar la gráfica de la función exponencial.

**Debes saber...**

Cuando se define una **potencia** cuyo exponente es un número racional o un número real, se exige que su **base** sea **positiva** y **distinta de 1**.

### Función exponencial

Tania estudia el comportamiento de dos cultivos A y B de bacterias (ambos comenzaron con aproximadamente 1000 bacterias). El cultivo A se encuentra en condiciones muy favorables y se triplica cada un minuto, mientras que el B se está probando un antibiótico, y a cada minuto la población disminuye a su tercera parte.

Para hacer el estudio construye una tabla de valores que representa las situaciones, considerando el tiempo t en minutos y la cantidad de bacterias B en cada cultivo.

| | Cantidad de bacterias luego de t minutos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Cultivo A | $1000 \cdot 3^0 = 1000$ | $1000 \cdot 3^1 = 3000$ | $1000 \cdot 3^2 = 9000$ | $1000 \cdot 3^3 = 27\,000$ | $1000 \cdot 3^4 = 81\,000$ | $1000 \cdot 3^5 = 243\,000$ |
| Cultivo B | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1000$ | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^1 \approx 333,33$ | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^2 \approx 111,11$ | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 37,037$ | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 12,35$ | $1000\left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 4,12$ |

De las tablas anteriores se desprende que las situaciones se puede modelar mediante funciones **f(t)** y **g(t)** tales que:

Primer cultivo: $f(t) = 1000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Segundo cultivo: $g(t) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Este tipo de funciones, en que la variable independiente se encuentra en un exponente, reciben el nombre de **funciones exponenciales**.

Tania se pregunta qué sucede con las funciones exponenciales cuando varían algunos parámetros. Para responderle utilizaremos el programa GeoGebra, mediante los siguientes pasos.

Paso 1 Inserta dos deslizadores a y b, con valores mínimo y máximo de a –10 y 10, respectivamente, y para b en 0 y 10.

Paso 2 Escribe en la celda de **Entrada** la función y = a*b^x y presiona **enter**, lo que permitirá analizar la función exponencial $y = ab^x$. Luego, escribe en la celda de **Entrada** la función exponencial $g(x)= 2^x$, digitando g(x) = 2^x. Se obtiene así la gráfica que se muestra en la siguiente figura.

**Observa que...**

- En el primer cultivo, la cantidad de bacterias crece a cada minuto, triplicándose. Esto se conoce con el nombre de crecimiento exponencial.
- En el segundo cultivo, la cantidad de bacterias disminuye a cada minuto, dividiéndose por 3. Esto se conoce como decrecimiento exponencial.

206 | Matemática 2.° Medio

Paso 3 Realiza las siguientes actividades.

1. Considera la función $g(x) = 2^x$.
   a) Determina su dominio y recorrido.
   b) Determina el punto de intersección de la gráfica con el eje Y. ¿Existe un punto de intersección con el eje X? ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X? Explica.
2. Fija el valor a = 1 y mueve el deslizador b.
   a) Analiza lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:
      b > 2    2 > b > 1    0 < b < 1    –1 < b < 0    b < –1
   b) ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido de la función, en cada caso?
   c) ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes, en cada caso?
   d) Explica con tus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función, cuando b toma distintos valores.
3. Fija el valor b = 2 y mueve el deslizador a.
   a) Analiza lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:
      a > 1    0 < a < 1    –1 < a < 0    a < –1
   b) ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido de la función en cada caso?
   c) ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes, en cada caso?
   d) Explica con tus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función, cuando a toma distintos valores.

**Ayuda**

Si la gráfica de una recta se aproxima cada vez más a una recta, pero sin intersecarse con ella, decimos que dicha recta es una **asíntota** de la gráfica.

Una función **f(x)** es creciente si se cumple que si **a > b** entonces **f(a) > f(b)**.

Una función **f(x)** es **decreciente** si se cumple que si **a > b** entonces **f(b) > f(a)**.

**En resumen**

Podemos observar que una función exponencial se puede escribir de la forma

$$f(x) = ab^x$$

- $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$ se tiene, Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y Rec $f(x) = \mathbb{R}^+$.
- La gráfica se interseca con el eje Y en el punto (0, a), y no se interseca con el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de b. Así:
  - Si b > 1, la gráfica de la función es **creciente**, mientras que si 0 < b < 1, la gráfica es **decreciente**. Además, mientras mayor es el valor de b, la función tiene un mayor crecimiento.

b > 1      0 < b < 1

  - Si |a| < 1, la gráfica de $y = ab^x$ es una **dilatación** de $y = b^x$, mientras que si |a| > 1, es una **contracción**.
- La gráfica de $y = ab^{x-c}$ es una **traslación horizontal** de c unidades respecto de $y = ab^x$, hacia la derecha si c > 0 y hacia la izquierda se c < 0.
- La gráfica de $y = ab^x + h$ es una **traslación vertical** de h unidades respecto de $y = ab^x$, hacia arriba si h > 0 y hacia abajo si h < 0.

Unidad 3 • Álgebra | 207

Figura 20: Introducción al concepto de función exponencial en el segundo texto de estudio analizado. Fuente: extraído desde Muñoz et al. (2013, pp. 206-207).

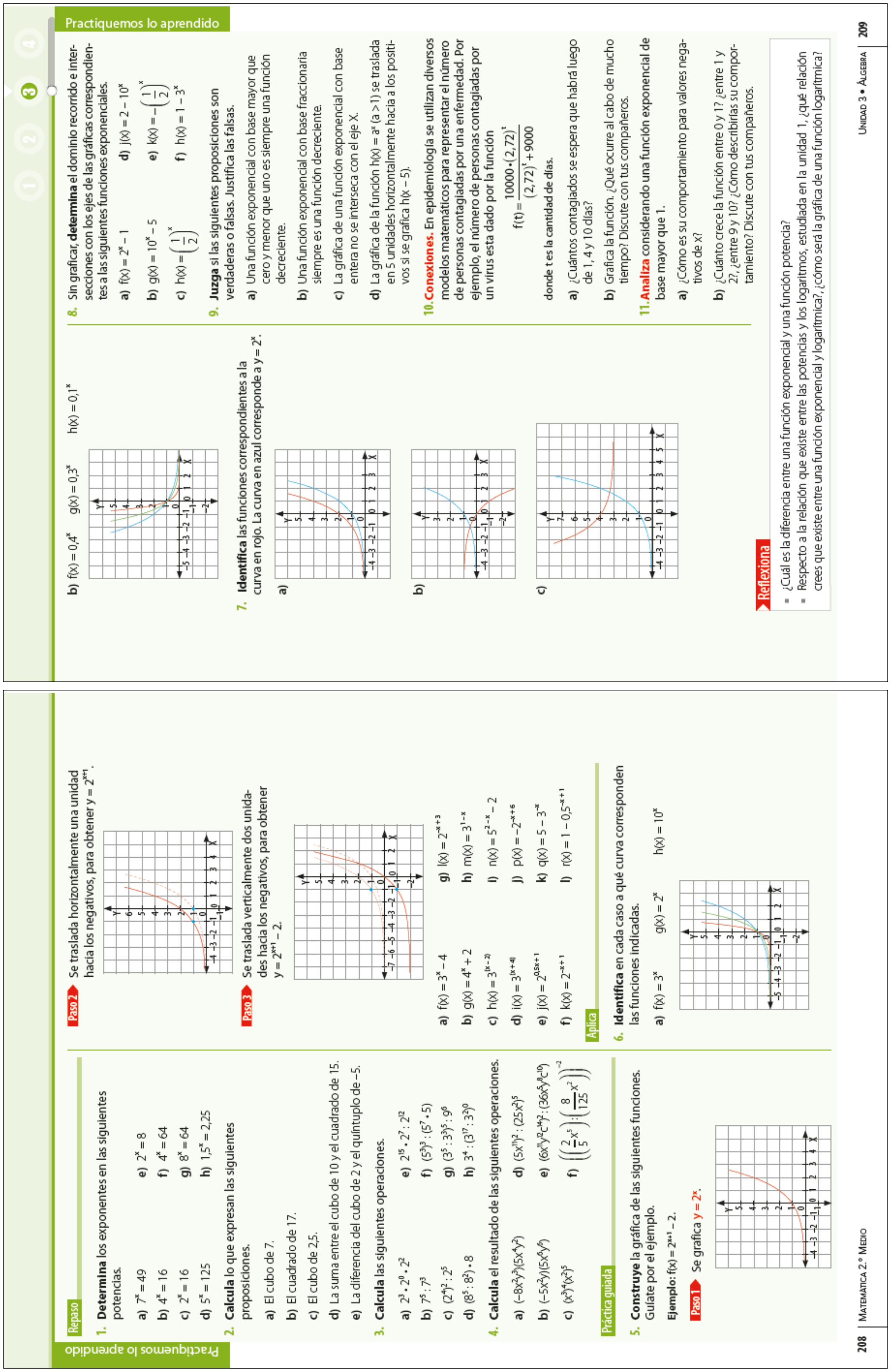


Figura 21: Ejercicios con función exponencial en el segundo texto de estudio analizado. Fuente: extraído desde Muñoz et al. (2013, pp. 216-217).

# Anexo 3: Plan de Clase Nº 1 – «El Caso del Buzo»

| PLANIFICACIÓN DE CLASE 1 | | |
|---|---|---|
| Asignatura: Matemáticas | Nivel: Segundo Año Medio | Semestre: II |
| Unidad didáctica: Álgebra – Función Exponencial | | Horas: 2 (pedagógicas) |
| Objetivo(s) de aprendizaje:<br>–AE 7: Modelar y aplicar la función exponencial […] en la resolución de problemas […]. | Habilidad(es):<br>– Modelar situaciones diversas a través de la función exponencial.<br>– Representar gráficamente la función exponencial. | Actitud(es):<br>– La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos |
| Conocimientos previos:<br>– Función.<br>– Dominio y recorrido.<br>– Expresiones algebraicas. | Objetivo de la clase:<br>– Modelar una situación de decrecimiento exponencial. | Recursos de aprendizaje:<br>– Actividad escrita “El Caso del Buzo”.<br>– Proyector.<br>– Teléfono con aplicación Desmos® instalada. |
| Contenido(s):<br>– Función exponencial y representación gráfica. | | |

## El Caso del Buzo

Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede atravesar en distintas profundidades del mar. Según la Ley de Beer-Lambert, existe un modelo para este fenómeno, en el que están presentes la cantidad de luz que llega a una cierta profundidad en metros y el flujo luminoso emitido desde un foco de luz en la superficie.

En un experimento llevado a cabo en la costa viñamarina, un buzo registró el flujo luminoso conforme se sumergía a ciertos metros de profundidad del nivel del mar, utilizando un sensor que arrojó los siguientes resultados:

| Profundidad en m | Flujo luminoso en lm |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 1 | 10 |
| 2 | 5 |
| 3 | 2,5 |
| 4 | 1,25 |
| 5 | 0,625 |

lm = lúmenes

**¿Qué observas de la tabla? Escribe dos ideas:**

________________________________________

________________________________________

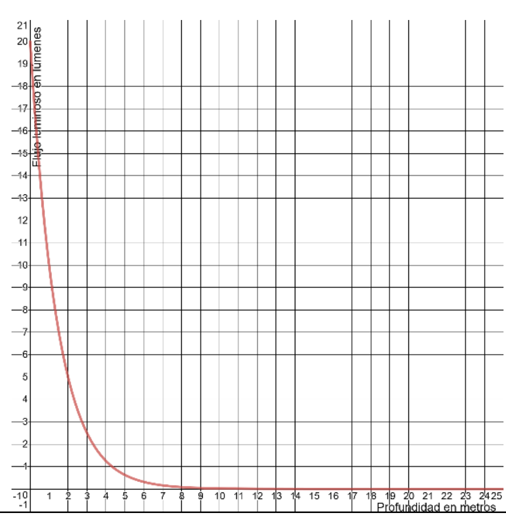
________________________________________

________________________________________

________________________________________

<table>
<tr><th></th><th>Actividad</th><th>Profesor</th><th>Estudiantes</th></tr>
<tr><td rowspan="6">INICIO (15 MINUTOS)</td><td rowspan="2">Presentar el siguiente objetivo de clase a los estudiantes:<br>Modelar una situación del mundo real</td><td>Pregunta a los estudiantes: ¿qué es (o qué entienden) por un modelo matemático?</td><td>Explican qué es (o entienden por) un modelo matemático.</td></tr>
<tr><td>Se puede definir un modelo matemático como una expresión que representa una situación, para así estudiarla.<br>Devolució</td><td>*puede que hayan olvidado (o no sepan) lo que es un modelo matemático*</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proyectar en la pizarra un video introductorio sobre la profundidad del mar, como motivación de la clase</td><td>Pide que tomen atención al video y a la información que aporta.</td><td></td></tr>
<tr><td>Pregunta al curso sobre los elementos del video que les hayan llamado más la atención.</td><td>Comentan sobre el video y los elementos que llamaron su atención.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 1: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</td></tr>
<tr><td>Presentar la situación de la clase:<br>El Caso del Buzo<br><br>(Los estudiantes se organizan en grupos de 3 a 5 integrantes cada uno, a los cuales se les entrega esta situación en forma escrita, además, de proyectarse en la pizarra frente al curso)<br><br>Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede atravesar en distintas profundidades del mar. Según la Ley de Beer-Lambert, existe un modelo para este fenómeno, en el que están presentes la cantidad de luz que llega a una cierta profundidad en metros y el flujo luminoso emitido desde un foco de luz en la superficie.<br><br>En un experimento llevado a cabo en la costa viñamarina, un buzo registró el flujo luminoso conforme se sumergía a ciertos metros de profundidad del nivel del mar, utilizando un sensor que arrojó los siguientes resultados:<br><br>
<table>
<tr><th>Profundidad en m</th><th>Flujo luminoso en lm</th></tr>
<tr><td>0</td><td>20</td></tr>
<tr><td>1</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,25</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0,625</td></tr>
</table>
$lm$= lumen<br><br>¿Qué observas de la tabla? Escribe dos ideas</td><td>Dirige la pregunta al curso, y pide a los estudiantes que anoten las respuestas en la hoja entregada.<br><br>¿Por qué es inversamente proporcional? Devolució<br>*Aprovechar la instancia para aclarar que no siempre que una variable aumente y la otra disminuya se hablará de proporcionalidad inversa, pues debe existir una constante de proporcionalidad entre el producto de las variables.<br><br>Se realiza una puesta en común con las respuestas de los estudiantes, anotando las observaciones en la pizarra.</td><td>Posibles respuestas:<br><br>– A medida que la profundidad aumenta, el flujo luminoso disminuye.<br>– Son inversamente proporcionales.<br>– Con cada metro, el flujo luminoso disminuye a la mitad.<br>– Es/existe una (relación de) función.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| DESARROLLO (60 MINUTOS) | **Fase 2: SISTEMATIZACIÓN** | | |
| | Formular una conjetura al respecto | De las ideas presentadas por los grupos, se elabora en conjunto una conjetura con respecto a la situación. | **Respuesta experta (conjetura):** “Con cada metro de profundidad, el flujo luminoso disminuye a la mitad de su valor anterior” |
| | (Los estudiantes continúan organizados en sus respectivos grupos, a cada uno de los cuales se les entrega una hoja en blanco donde deberán responder las siguientes preguntas, que también estarán proyectadas en la pizarra, y deberán registrar sus procedimientos, **aunque les está permitido utilizar la calculadora**) | Presentar la segunda parte de la clase, en la que se generará el modelo matemático para esta situación. | |
| | Responder las siguientes preguntas:<br><br>**– ¿Cuánto será el flujo luminoso a los 6 metros de profundidad?**<br>**– ¿Y a los 20 metros?** | Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación, y que respondan las preguntas. | **Respuesta experta (preguntas 1 y 2):**<br>– A los 6 metros el flujo luminoso será de 0,3125 lm.<br>– A los 20 metros el flujo luminoso será (aprox.) de 0,000019073486 lm. |
| | **Fase 3: MATEMATIZACIÓN** | | |
| | Continuar con las siguientes preguntas:<br><br>**– ¿Y a los $n$ metros de profundidad?**<br>**– ¿Cómo modelarías matemáticamente esta situación?** | Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación, y que respondan las preguntas.<br><br>Las fases 3 y 4 se desarrollan simultáneamente por parte de los estudiantes, de acuerdo a los modelos que generen. | **Respuesta experta (preguntas 3 y 4)**<br>– A los $n$ metros el flujo luminoso será de $20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ lm, o $\frac{20}{2^n}$ lm.<br>– El modelo matemático para esta situación es $f(n) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, o $f(n) = \frac{20}{2^n}$. |
| | **Fase 4: ANÁLISIS DEL SISTEMA MATEMÁTICO** | | |
| | Descomponer la tabla con los valores conocidos:<br><br>$\begin{array}{lll} a_0 & 20 & \\ a_1 & \frac{20}{2} & \frac{1}{2}(a_0) \\ a_2 & \frac{10}{2} & \frac{1}{2}(a_1) \\ a_3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2}(a_2) \\ a_4 & \frac{2,5}{2} & \frac{1}{2}(a_3) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & \frac{a_{n-1}}{2} & \frac{1}{2}(a_{n-1}) \end{array}$ | (pregunta voluntaria a los estudiantes: ¿cómo es la relación del comportamiento entre las variables?)<br><br>En el caso que los estudiantes presenten dificultades o no logren la fase de matematización, se debe analizar el sistema matemático a través de la descomposición de los valores $(a_n)$ de la tabla para vislumbrar la regularidad | Pueda que un estudiante aplique la relación: $\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$ para hallar la regularidad y generar un modelo matemático. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Fase 5: INTERPRETACIÓN/EVALUACIÓN** | | |
| | Realizar una puesta en común con las respuestas de los estudiantes.<br><br>Interpretar los modelos matemáticos generados y evaluarlos con los valores conocidos de profundidad en metros y flujo luminoso. | Felicita a los estudiantes por haber desarrollado este proceso, destacándolos por haber hecho un trabajo muy similar al de los matemáticos | |
| | | Se contrastan las respuestas en el caso de ser muy dispares. | Un representante de cada grupo responde las preguntas en el pizarrón, en el espacio designado para su grupo. |
| | | | Explican cómo obtuvieron sus modelos matemáticos frente a los demás estudiantes. |
| | Restringir el dominio del modelo generado | Formula preguntas que guíen a los estudiantes a restringir el dominio del modelo:<br><br>¿Para qué valores de $n$ metros se hace válido el modelo?<br>¿Sirve para valores no enteros? (reflexionar sobre la continuidad)<br>¿Hasta cuántos metros bajo el nivel del mar tiene sentido este modelo?<br>¿Servirá este modelo sobre el nivel del mar, o para valores negativos de $n$? | **Respuesta experta (dominio del modelo):**<br>– El modelo sólo es válido hasta los 1000 metros de profundidad, y no para valores negativos o sobre el nivel del mar.<br>– $Dom\ f: \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq n \leq 1000\}$. |
| CIERRE (15 MINUTOS) | **Fase 6: VALIDACIÓN** | | |
| | Graficar el modelo generado:<br><br> | Pide a los estudiantes que grafiquen el modelo generado y validado con la aplicación de sus teléfonos, para luego, presentarlo en la pizarra.<br><br>Ejemplifica la relación $$\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$$ utilizando los valores conocidos de la tabla o gráfica. | Grafican el modelo generado con la aplicación Desmos. |

# Anexo 4: Descomposición Genética de la Función Exponencial

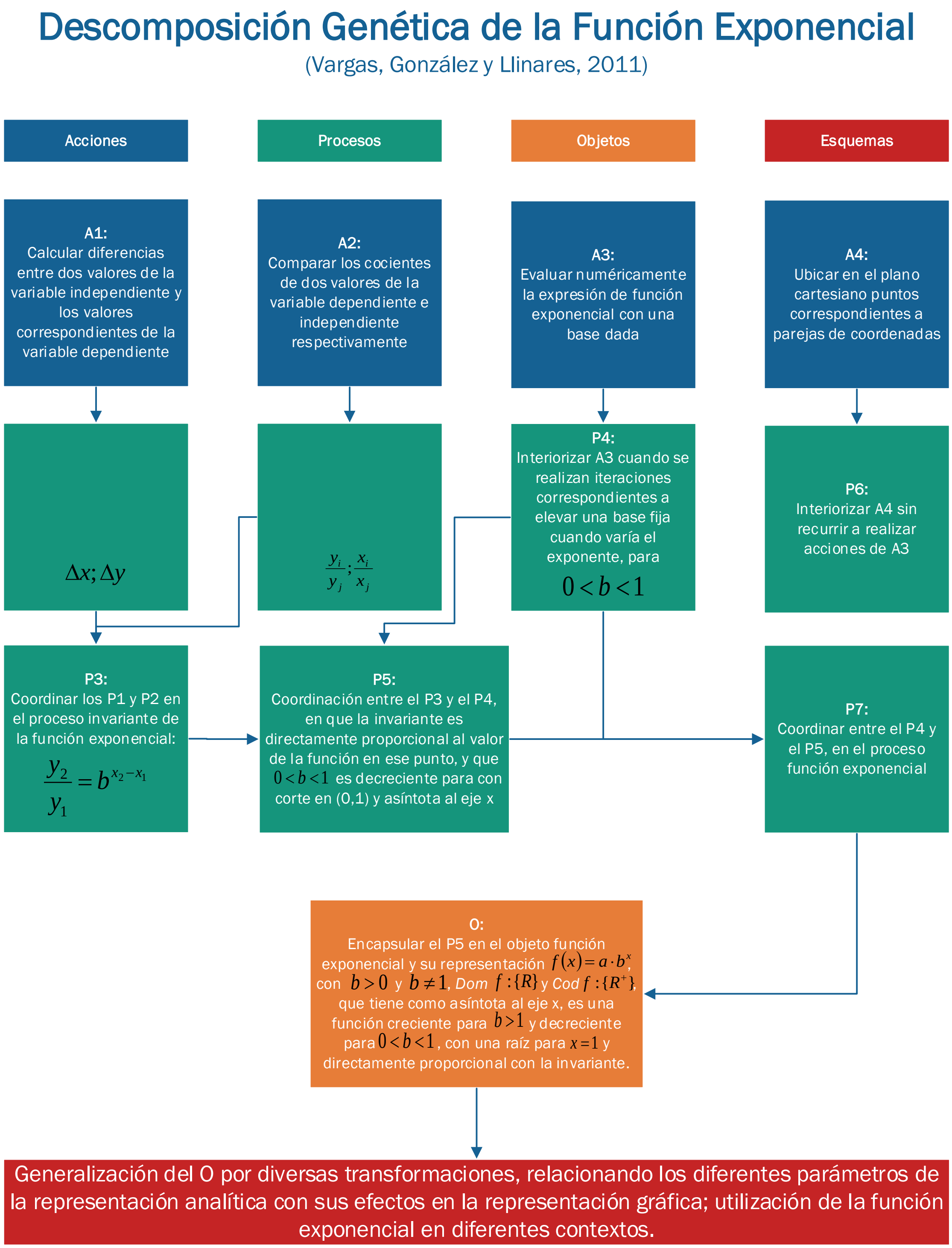



Figura 22: Descomposición genética de la función exponencial.
Fuente: adaptado y modificado desde Vargas, González y Llinares (2011).

## Anexo 5: Plan de Clase Nº 2 – «El Furgón de Don Carlos»

| PLANIFICACIÓN DE CLASE 2 | | |
|---|---|---|
| Asignatura: Matemáticas | Nivel: Segundo Año Medio | Semestre: II |
| Unidad didáctica: Álgebra – Función Exponencial | | Horas: 2 (pedagógicas) |
| Objetivo(s) de aprendizaje:<br>–AE 7: Modelar y aplicar la función exponencial […] en la resolución de problemas […]. | Habilidad(es):<br>– Modelar situaciones diversas a través de la función exponencial.<br>– Representar gráficamente la función exponencial. | Actitud(es):<br>– La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos |
| Conocimientos previos:<br>– Función.<br>– Dominio.<br>– Recorrido.<br>– Expresiones algebraicas.<br>Contenido(s):<br>– Función exponencial y representación gráfica. | Objetivo de la clase:<br>– Evaluar la pertinencia de un modelo lineal en una situación de decrecimiento exponencial. | Recursos de aprendizaje:<br>– Actividad escrita "El Furgón de Don Carlos".<br>– Proyector.<br>– Teléfono con aplicación Desmos® instalada. |

### El Furgón de Don Carlos

Don Carlos es un contratista y dueño de Transportes CACH, una empresa dedicada al traslado de los trabajadores de una compañía minera, para lo cual dispone de furgones de pasajeros. Su última adquisición fue un furgón para 12 pasajeros, comprado en 2014, con un valor comercial de $20.000.000.

En marzo de 2015, don Carlos revisó la base de datos del Servicio de Impuestos Internos, y fue entonces que notó que la tasa de devaluación para la tasación fiscal de vehículos livianos era de un 10% del valor de cada año.

Tras una serie de procedimientos, determinó que se podía conocer el valor de la tasación fiscal del vehículo ($T$) al enésimo año transcurrido desde la compra ($n$) según el siguiente modelo:

$$\boldsymbol{T(n) = 20.000.000 - 2.000.000n}$$

Para ello, se basó en la conjetura de que el 10% del precio inicial son los $2.000.000, valor con el que se va devaluando el furgón cada año. Sin embargo, su hijo Carlitos, le planteó que ese modelo no podía ser correcto, pues la devaluación no es constante todos los años.

**¿Por qué Carlitos tiene razón en afirmar que ese no es el modelo correcto? Explica**

| | Actividad | Profesor | Estudiantes |
|---|---|---|---|
| INICIO (15 MINUTOS) | Presentar el siguiente objetivo de clase a los estudiantes:<br>**Evaluar la pertinencia de un modelo matemático** | Recordar los momentos principales de la anterior clase de modelación. | |
| | **Fase 1: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA** | | |
| | Presentar la situación de la clase:<br>**El Furgón de Don Carlos**<br><br>(Los estudiantes se organizan en grupos de 3 a 5 integrantes cada uno, a los cuales se les entrega esta situación en forma escrita, además, de proyectarse en la pizarra frente al curso)<br><br>Don Carlos es un contratista y dueño de Transportes CACH, una empresa dedicada al traslado de los trabajadores de una compañía minera, para lo cual dispone de furgones de pasajeros. Su última adquisición fue un furgón para 12 pasajeros, comprado en 2014, con un valor comercial de \$20.000.000.<br><br>En marzo de 2015, don Carlos revisó la base de datos del Servicio de Impuestos Internos, y fue entonces que notó que la tasa de devaluación para la tasación fiscal de vehículos livianos era de un 10% del valor de cada año.<br><br>Tras una serie de procedimientos, determinó que se podía conocer el valor de la tasación fiscal del vehículo $(t)$ al enésimo año transcurrido desde la compra $(n)$ según el siguiente modelo:<br><br>$T(n) = 20.000.000 - 2.000.000n$<br><br>Para ello, se basó en la conjetura de que el 10% del precio inicial son los \$2.000.000, valor con el que se va devaluando el furgón cada año. Sin embargo, su hijo Carlitos, le planteó que ese modelo no podía ser correcto, pues la devaluación no es constante todos los años.<br><br>**¿Por qué Carlitos tiene razón en afirmar que ese no es el modelo correcto? Explica** | Dirige la pregunta al curso, y pide a los estudiantes que anoten las respuestas en la hoja entregada.<br><br>Se realiza una puesta en común con las respuestas de los estudiantes, anotando las observaciones en la pizarra.<br><br>Se espera que esta clase de modelación sea menos guiada que la anterior, en cuanto a la sucesión de las etapas del proceso de modelización matemática. Para ello, las tres preguntas planteadas como parte de la actividad serán las que guíen a los estudiantes en el proceso para generar y validar un modelo matemático. | **Posibles respuestas:**<br>– Porque todos los años el vehículo cambia su valor.<br>– Porque a los 10 años el furgón valdría \$0, y eso no es posible.<br>– Porque cada año el valor del 10% es diferente. |

<table>
<tr><td rowspan="7">DESARROLLO (60 MINUTOS)</td><td colspan="3">Fase 2: SISTEMATIZACIÓN</td></tr>
<tr><td>(Los estudiantes continúan organizados en sus respectivos grupos, a cada uno de los cuales se les entregan hojas en blanco donde deberán responder las siguientes preguntas, que también estarán proyectadas en la pizarra, y deberán registrar sus procedimientos, aunque les está permitido utilizar la calculadora)</td><td>Presentar la segunda parte de la clase, en la que se generará el modelo matemático para esta situación.</td><td></td></tr>
<tr><td>Responder las preguntas:<br><br>¿En cuánto estaba tasado el furgón los años 2015, 2016 y 2017?</td><td>Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación, y que respondan las preguntas.</td><td>Se espera que formen una tabla con las variables de años y valor del vehículo.<br><br>Respuesta experta (pregunta 2):
<table>
<tr><th>Años</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td>2014</td><td>$20.000.000</td></tr>
<tr><td>2015</td><td>$18.000.000</td></tr>
<tr><td>2016</td><td>$16.200.000</td></tr>
<tr><td>2017</td><td>$14.580.000</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 3: MATEMATIZACIÓN</td></tr>
<tr><td>¿Cuál es el modelo que debe considerar don Carlos?</td><td>Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación, y que respondan las preguntas.<br><br>Las fases 3 y 4 se desarrollan simultáneamente por parte de los estudiantes de acuerdo a los modelos que generen.</td><td>Respuesta experta (pregunta 3):<br>– El modelo que debe considerar para esta situación es $T(n) = 20.000.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 4: ANÁLISIS DEL SISTEMA MATEMÁTICO</td></tr>
<tr><td>La descomposición de la tabla debería ser de las siguientes formas:<br><br>
$a_0$ 20.000.000<br>
$a_1$ $20.000.000 - 2.000.000$<br>
$a_2$ $18.000.000 - 1.800.000$<br>
$a_3$ $16.200.000 - 1.620.000$<br>
… …<br><br>
$a_0$ 20.000.000<br>
$a_1$ $a_0 - 2.000.000$ $\frac{9}{10}(a_0)$<br>
$a_2$ $a_1 - 1.800.000$ $\frac{9}{10}(a_1)$<br>
$a_3$ $a_2 - 1.620.000$ $\frac{9}{10}(a_2)$<br>
… … …</td><td>En el caso que los estudiantes presenten dificultades o no logren la fase de matematización, se debe sugerir que analicen el sistema matemático descomponiendo la tabla.<br><br>De ser necesario, se solicita a un estudiante que haga la descomposición en la pizarra frente al curso.</td><td>Pueda que un estudiante aplique la relación:<br>$\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$<br>para hallar la regularidad y generar un modelo matemático.</td></tr>
</table>

## Fase 5: INTERPRETACIÓN/EVALUACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| Realizar una puesta en común con las respuestas de los estudiantes.<br><br>Interpretar los modelos matemáticos generados y evaluarlos con los valores conocidos de años transcurridos y valor de la tasación fiscal. | Se contrastan las respuestas en el caso de ser muy dispares. | Un representante de cada grupo responde las preguntas en el pizarrón, en el espacio designado para su grupo.<br><br>Explican cómo obtuvieron sus modelos matemáticos frente a los demás estudiantes. |
| Proyectar los valores de la tabla para los diez años siguientes.<br><br>Comparar los valores de ambos modelos: el de la situación y el generado en la clase.<br><br>Restringir el dominio del modelo generado para un tiempo de diez años. | ¿Cómo serán los valores de la tasación fiscal para los siguientes diez años, según ambos modelos? | **Respuesta experta (valores del modelo de la situación):** (ver tabla siguiente) |

**Respuesta experta (valores del modelo de la situación):**

| Años | Valor |
|---|---|
| 0 | $20.000.000 |
| 1 | $18.000.000 |
| 2 | $16.000.000 |
| 3 | $14.000.000 |
| 4 | $12.000.000 |
| 5 | $10.000.000 |
| 6 | $8.000.000 |
| 7 | $6.000.000 |
| 8 | $4.000.000 |
| 9 | $2.000.000 |
| 10 | $0 |

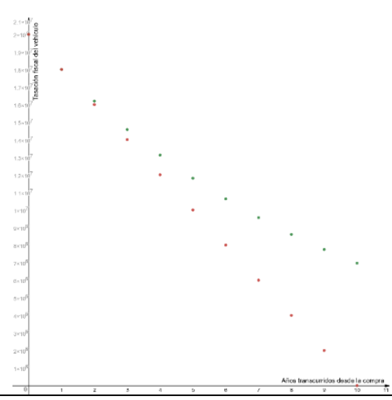
**(valores del modelo generado):**

| | |
|---|---|
| 4 | $13.122.000 |
| 5 | $11.809.800 |
| 6 | $10.628.820 |
| 7 | $9.565.938 |
| 8 | $8.609.344 |
| 9 | $7.748.410 |
| 10 | $6.973.569 |

CIERRE (15 MINUTOS)

## Fase 6: VALIDACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| Graficar el modelo generado y compararlo con el propuesto en la situación: | Pide a los estudiantes que grafiquen ambos modelos.<br><br>Hacer una puesta en común con respecto al comportamiento de un modelo lineal y uno exponencial.<br><br>¿Servirá este modelo para valores no enteros?<br>¿Llegará a $0 en algún momento el valor del vehículo con este modelo? | Grafican ambos modelos con la aplicación Desmos.<br><br>**Posibles respuestas:**<br>– Sólo para valores enteros.<br>– En un valor muy grande/en el infinito llegará a $0.<br>– Nunca llegará a $0. |



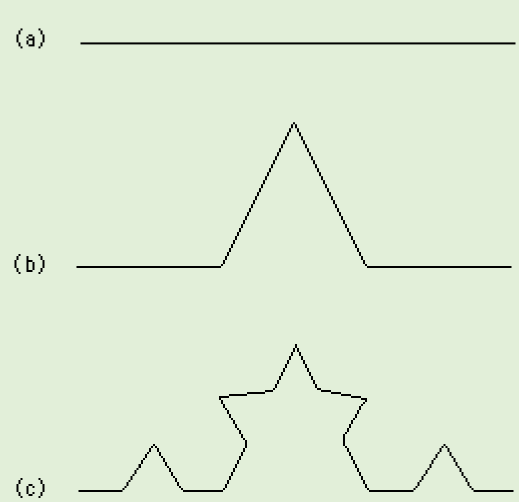
# Anexo 6: Plan de Clase Nº 3 – «El Dispositivo Artístico de Nora»

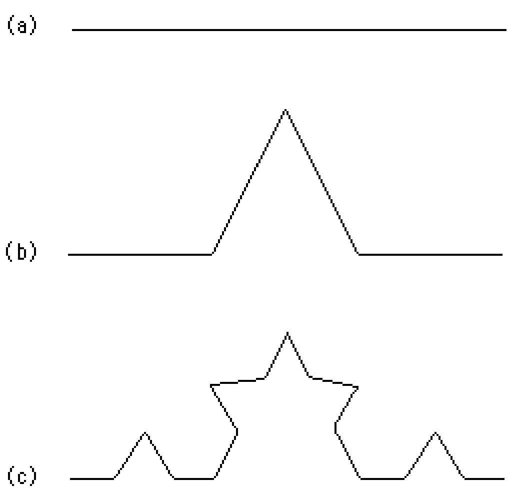
<table>
<tr><th colspan="3">PLANIFICACIÓN DE CLASE 3</th></tr>
<tr><td>Asignatura: Matemáticas</td><td>Nivel: Segundo Año Medio</td><td>Semestre: II</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidad didáctica: Álgebra – Función Exponencial</td><td>Horas: 2 (pedagógicas)</td></tr>
<tr><td>Objetivo(s) de aprendizaje:<br>–AE 7: Modelar y aplicar la función exponencial […] en la resolución de problemas […].</td><td>Habilidad(es):<br>– Modelar situaciones diversas a través de la función exponencial.<br>– Representar gráficamente la función exponencial.</td><td>Actitud(es):<br>– La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos</td></tr>
<tr><td>Conocimientos previos:<br>– Función.<br>– Dominio.<br>– Recorrido.<br>– Expresiones algebraicas.</td><td rowspan="2">Objetivo de la clase:<br>– Resolver un problema geométrico a través de la modelación.</td><td rowspan="2">Recursos de aprendizaje:<br>– Actividad escrita “El Dispositivo Artístico de Nora”<br>– Proyector.<br>– Cartulinas, regla, lápices y tijeras.<br>– Teléfono con aplicación Desmos® instalada.</td></tr>
<tr><td>Contenido(s):<br>– Función exponencial y representación gráfica.</td></tr>
</table>

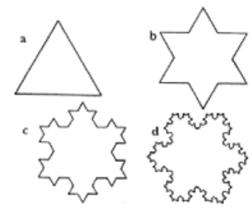
## El Dispositivo Artístico de Nora

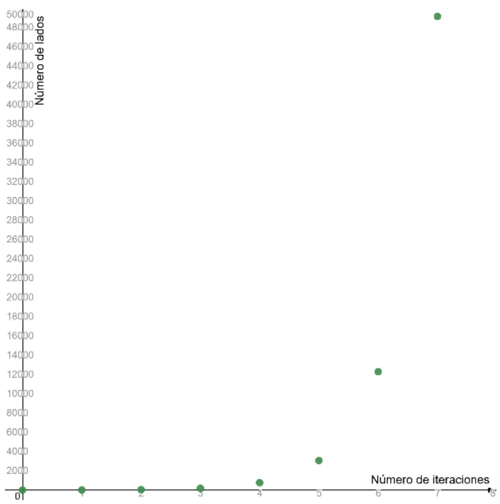
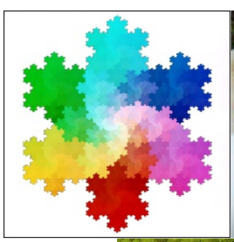
Nora es una artista visual a quien se le ha encargado que decore, con motivos navideños, el muro de un museo. Ella ha pensado en un copo de nieve gigante, el cual dibujará comenzando por un triángulo invertido, y levantando un pequeño triángulo en cada punto medio de los lados de esta figura con cada iteración, como se muestra en la imagen de uno de sus bocetos:

**¿Cuál es la función que modela la cantidad de lados que tendrá el copo de nieve?**



| | Actividad | Profesor | Estudiantes |
|---|---|---|---|
| | Presentar el siguiente objetivo de clase a los estudiantes:<br>**Modelar una situación de carácter geométrico** | Recordar los momentos principales de las anteriores clases de modelación. | |
| | **Fase 1: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA** | | |
| INICIO (10 MINUTOS) | Presentar la situación de la clase:<br>**El Dispositivo Artístico de Nora**<br><br>(Los estudiantes se organizan en grupos de 3 a 5 integrantes cada uno, a los cuales se les entrega esta situación en forma escrita, además, de proyectarse en la pizarra frente al curso; y una cartulina con plumones)<br><br>Nora es una artista visual a quien se le ha encargado que decore, con motivos navideños, el muro de un museo. Ella ha pensado en un copo de nieve gigante, el cual dibujará comenzando por un triángulo invertido, y levantando un pequeño triángulo en cada punto medio de los lados de esta figura, como se muestra en la imagen de uno de sus bocetos:<br><br><br>**¿Cuál es la función que modela la cantidad de lados que tendrá el copo de nieve?.** | Dirige la instrucción al curso.<br><br>Plantea que, en el proceso de modelización matemática, no siempre se cuenta con los datos, y que, en tal caso, el matemático debe obtenerlos de acuerdo a la información con la que cuente.<br><br>Esta clase de modelación es totalmente independiente para los estudiantes, pues ellos deberán ser capaces de obtener los datos necesarios para la situación, y así, poder determinar y validar el modelo matemático. | |

<table>
<tr><td rowspan="6">DESARROLLO (60 MINUTOS)</td><td colspan="3">Fase 2: SISTEMATIZACIÓN</td></tr>
<tr><td>(Los estudiantes continúan organizados en sus respectivos grupos, construyendo la figura de la situación para obtener los datos necesarios para continuar con el proceso de modelización)</td><td>Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación.</td><td>Construyen la figura, en la cartulina, de la siguiente forma (ellos deciden el número de iteraciones):<br><br><br>Luego, construyen una tabla para organizar los datos recopilados.<br><br>Respuesta experta (datos de la situación):<br><table><tr><th>Iteraciones</th><th>Lados</th></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>12</td></tr><tr><td>2</td><td>48</td></tr><tr><td>3</td><td>192</td></tr><tr><td>4</td><td>768</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 3: MATEMATIZACIÓN</td></tr>
<tr><td>(Los estudiantes continúan organizados en sus respectivos grupos, matematizando la situación, basados en los datos con los que cuentan)</td><td>Supervisa que todos los grupos se encuentren trabajando en la situación.<br><br>Las fases 3 y 4 se desarrollan simultáneamente por parte de los estudiantes de acuerdo a los modelos que generan.</td><td>Respuesta experta:<br>– A la enésima iteración hay $3 \cdot 4^n$ lados.<br>– El modelo matemático para la situación es<br>$L(n) = 3 \cdot 4^n$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 4: ANÁLISIS DEL SISTEMA MATEMÁTICO</td></tr>
<tr><td>La descomposición de la tabla debería ser de la siguiente forma:<br><br>$$\begin{array}{lll} a_0 & 3 & \\ a_1 & 12 \rightarrow 3 \cdot 4 & 4(a_0) \\ a_2 & 48 \rightarrow 12 \cdot 4 & 4(a_1) \\ a_3 & 192 \rightarrow 48 \cdot 4 & 4(a_2) \\ a_4 & 768 \rightarrow 192 \cdot 4 & 4(a_3) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} \cdot 4 & 4(a_{n-1}) \end{array}$$</td><td></td><td>Se espera que los estudiantes descompongan los valores de la tabla para hallar la regularidad, o apliquen la relación:<br>$$\frac{y_2}{y_1} = b^{x_2 - x_1}$$<br>para generar el modelo matemático.</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Fase 5: INTERPRETACIÓN/EVALUACIÓN** | | |
| | Realizar una puesta en común con las respuestas de los estudiantes.<br><br>Interpretar los modelos matemáticos generados y evaluarlos con los valores obtenidos con la construcción de la figura.<br><br>Restringir el dominio del modelo para un número determinado de iteraciones. | Se contrastan las respuestas en el caso de ser muy dispares. | Dos representantes de cada grupo presentan la figura construida y el modelo matemático generado. |
| CIERRE (20 MINUTOS) | **Fase 6: VALIDACIÓN** | | |
| | Graficar el modelo generado:<br><br>Presentar algunas imágenes de la curva de Koch y de fractales en la naturaleza:<br><br> | Pide a los estudiantes que grafiquen el modelo generado y validado.<br><br>Hacer una puesta en común con respecto al comportamiento de un modelo de crecimiento con los de decrecimiento exponencial trabajados en las clases anteriores.<br><br>¿Cuál es el mayor número de lados que puede tener la figura?<br><br>¿Qué sucede en los casos de decrecimiento exponencial con los valores en el infinito?<br><br>Mostrar ejemplos de fractales, comenzando por la curva de Koch.<br><br>¿Qué otros ejemplos de situaciones implican el crecimiento o decrecimiento exponencial? | Grafican el modelo con la aplicación Desmos.<br><br>**Posible respuesta:**<br>– Infinitos lados.<br>– Un valor muy cercano a 0. |