

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Facultad de Ciencias  
Instituto de Matemáticas



**Propuesta de innovación para la enseñanza de la  
media aritmética**

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA**

De: Justin Elizabeth Alvarado Brito

Profesores Guía:

Manuel Goizueta

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Elisabeth Ramos Rodríguez

Patricia Vásquez Saldías

2017

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>3</b>
<b>ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA.....</b>	<b>5</b>
<b>OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL SABER SABIO .....</b>	<b>10</b>
<b>OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL SABER ESCOLAR .....</b>	<b>13</b>
<b>DISTANCIA ENTRE SABERES.....</b>	<b>14</b>
<b>OBJETO MATEMÁTICO EN LA HISTORIA/EPISTEMOLOGÍA .....</b>	<b>15</b>
<b>BARRIDO CURRICULAR DEL OBJETO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS</b>	<b>20</b>
<b>DESCRIPCIONES GENERALES DEL PLAN DE CLASES .....</b>	<b>22</b>
PLAN DE CLASE 1 .....	25
<b>ANÁLISIS A PRIORI.....</b>	<b>39</b>
<b>ANÁLISIS A POSTERIORI .....</b>	<b>44</b>
ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN .....	44
ANÁLISIS DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA.....	46
<b>CONCLUSIONES DEL PLAN DE CLASE .....</b>	<b>52</b>
<b>SECUENCIA DIDÁCTICA .....</b>	<b>55</b>
PLAN DE CLASE 2.....	57
PLAN DE CLASE 3.....	69
<b>REFLEXIONES .....</b>	<b>76</b>
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>78</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>80</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>83</b>
ANEXO 1. Fichas para entregar a las y los estudiantes plan de clase 1. ....	83
ANEXO 2. Situación “las calificaciones” mostrada en el segundo plan de clase.....	85
ANEXO 3. Situaciones presentadas en el desarrollo de la segunda clase. ....	86
ANEXO 4. Guía presentada a las y los estudiantes para el desarrollo del plan de clase 3.....	87
ANEXO 5. Registro de las producciones de las y los estudiantes respecto al cuestionamiento individual de la situación presentada en la clase 1 .....	88
ANEXO 6. Categorías para el análisis de datos desde la socioepistemología .....	94

## INTRODUCCIÓN

La Estadística es una de las áreas que debe ser abordada a lo largo de la escolaridad chilena debido a la importancia que ésta tiene para el desarrollo social y personal. Batanero (2000) ratifica lo antes mencionado exponiendo que desde la década de los 80´s diversos autores han avalado la importancia de la educación estadística. Menciona a autores como Holmes (1980. Citado por Batanero, 2000) quien expone que los ciudadanos deben “adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos”; el mismo autor expresa que también es útil para la vida profesional, puesto que ésta es indispensable para estudiar diversos fenómenos que requieren de “definir objetos de estudio y las variables relevantes, tomar datos, interpretarlos y analizarlos” (Holmes, 1980. Citado por Batanero, 2000, p. 1). Por otra parte, Ottaviani (1998, citado por Batanero, 2000, p. 1) menciona que el conocimiento estadístico ayuda al desarrollo personal, pues fomenta el desarrollo crítico y el juicio, basado en la valoración de evidencia objetiva, en la interpretación de datos cuantitativos propios y de los demás, para poder tomar decisiones justificadas y realizar predicciones. Con lo antes descrito se deja en evidencia lo esencial que se vuelve la educación estadística para obtener como resultado una sociedad alfabetizada respecto a esta disciplina, que contribuya a la sociedad y se desarrolle personalmente.

Considerando el desarrollo de la Estadística como ciencia, se puede dar cuenta que en el último tiempo ésta ha evolucionado enormemente producto de los requerimientos de la sociedad, de la inmediatez de la información y por los avances tecnológicos, permitiendo, este último, un mayor almacenamiento de datos, una mayor diversidad de programas de faciliten el cálculo de determinados estadísticos y generación de gráficos y tablas pertinentes. Con esto se vuelve necesario un cambio en la forma de enseñanza de la estadística en la escuela y en las distintas entidades educativas, y un constante perfeccionamiento docente que vaya en pos de la educación estadística, los requerimientos curriculares, estudiantiles y sociales. Haciendo referencia al cambio educacional requerido por la estadística es que diversos textos y el mismo currículum realiza sugerencias para abordar la enseñanza de la estadística, pero son pocos los y las docentes que la enseñan de manera profunda y crítica, más bien, la mayoría de ellos(as) “no enseñan este tema y en otros casos se trata muy brevemente, o en forma excesivamente formalizada” (Batanero, 2000, p. 6). Batanero (2000) identifica que estos problemas de enseñanza

son producto de los cambios progresivos de la estadística tanto de contenido como de demandas de formación, de la expansión de la misma, su alejamiento de los procedimientos matemáticos y acercamiento a la "ciencia de los datos", del uso e implementación de nueva tecnología, de la escasa investigaciones sobre didáctica de la estadística –en comparación con otras ramas de la matemática– que proporcione información respecto al proceso de aprendizaje de esta disciplina y a las dificultades que en éste se presentan. También Batanero (2000) menciona que esto es producto de la poca difusión de los estudios que existen respecto a la estadística y a la didáctica de la estadística, lo que produce un freno en el conocimiento de las y los docentes. Considerando estos antecedentes, se vuelve necesaria una mejor preparación en la formación de los y las docentes para la enseñanza de la Estadística, producto del cambio que se ha generado en esta ciencia y en el modo en que es presentada actualmente en las aulas. También se cree necesario el constante cuestionamiento por parte del profesorado respecto a la enseñanza de la estadística para que, desde este cuestionamiento, se creen estrategias que permitan un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística en la escuela.

## ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

La Educación Estadística en Chile –América Latina en general y parte del Caribe– es deficiente, comprobando esto en la pobre percepción que las personas tienen de la disciplina Estadística referente a qué es y qué hace (Coba, Del Pino & Wistuba, 2010). En Chile, la estadística es enseñada a lo largo de la escolaridad dentro del subsector de matemáticas donde el estudiantado se enfrenta a diversos conceptos estadísticos desde temprana edad (MINEDUC, 2017). En este proceso de enseñanza-aprendizaje escolar participan dos tipos de sujetos principalmente, el de los y las docentes, y el de las y los estudiantes, los cuales interactúan con la finalidad de generar aprendizajes, donde cada docente presenta los conceptos relacionados con la Estadística según la visión que éste(a) tenga de lo que es la disciplina Estadística y sus propósitos.

Según Coba, del Pino y Wistuba (2010), producto de la forma en como la enseñanza de la estadística se ha llevado a cabo en cursos básicos, la sociedad tiene percepciones erróneas del uso que tiene esta disciplina, generando sensaciones como que las estadísticas mienten, son poco confiables o seguras y son frías. Esto se relaciona estrechamente con el concepto de media aritmética ya que ¿qué interpretación se le da a la media aritmética extraída desde un conjunto de datos? Los autores mencionados ejemplifican que: si una persona come dos pollos y la otra no come, en promedio sería un pollo por persona, lo que llevaría a pensar que cada una comió un pollo, pero ¿realmente ambas personas están bien alimentadas? O esta interpretación ¿conlleva a una tergiversación de los hechos reales?, puesto que hay personas que no comen pollo.

Enfocando la atención en la media aritmética, se puede notar que su uso en las prácticas matemáticas, además de su definición, también está presente sus representaciones, características y propiedades, y, por otra parte, se encuentran otros objetos matemáticos relacionados con este concepto, lo que evidencia lo complejo que éste es (Rondero y Font, 2015), por lo que entender la media aritmética sólo como un reparto equitativo, empobrece el real valor que tiene este concepto. Considerando esta misma idea, Coba, Del Pino y Wistuba (2010) mencionan que considerar la media aritmética desde la expresión que permite su cálculo, es decir, como la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos sumados, no permite que se reflexione correctamente ante la media aritmética y que se le considere como un representante de un conjunto de datos.

Los autores Coba, Del Pino y Wistuba (2010) mencionan que “la Media es entonces el mejor representante mínimo cuadrático de un conjunto de

números y consecuentemente sólo pretende representar dichos números y no explicar algún tipo de comportamiento de los mismos.” (p. 9)

En relación a la enseñanza de la media aritmética –y la estadística en general– Estrella, Morales y Olfos (2015) exponen que los y las docentes presentan una formación débil en la educación estadística, sustentándose por autores como Shaughnessy (2007) y Franklin y Mewborn (2006). Señalan que los docentes confunden la finalidad de la enseñanza estadística escolar con la enseñanza de reglas para calcular y técnicas para representar datos por medio de tablas y gráficos, sustentando esta afirmación en los y las autores Araneda, Del Pino, Estrella, Icaza y San Martín (2011), Ben-Zvi y Sharett-Amir (2005), Del Pino y Estrella (2012) y Garfield y Ben-Zvi, (2007). Ello contradice la finalidad que tiene la enseñanza de estadística en Chile, pues ésta señala que su propósito es la alfabetización estadística, para que cada estudiante sea capaz de leer, registrar, analizar y realizar predicciones, a partir de ciertos datos presentes día a día en la sociedad, mostrados de diversas maneras, producto del desarrollo de la tecnología y la inmediatez requerida en la actualidad (MINEDUC, 2012). Además, señalan Del Pino y Estrella (2012) que el conocimiento estadístico no tan solo influye en el crecimiento como sociedad, sino que también influye en el crecimiento personal, pues permite tener una actitud crítica respecto a las afirmaciones respecto a los datos mostrados en los medios de comunicación. También los autores mencionan que la estadística juega un papel importante en la toma de decisiones personales en cosas cotidianas respecto “a la calidad nutricional de los alimentos, la seguridad y eficacia de los fármacos, sondeos electorales, índices de audiencia de un programa de TV, el rendimiento, seguridad y confiabilidad de los vehículos” (p. 54), por lo que la alfabetización estadística se convierte en una “inversión en el bienestar individual y colectivo de los ciudadanos” (p. 54).

Es así que en el artículo de Del Pino y Estrella (2010) se afirma que “la enseñanza de conceptos estadísticos basada en la definición algorítmica y el cálculo matemático en conjuntos de datos descontextualizados no permite que los sujetos lleguen a una comprensión integral del concepto” (p. 54) Extrapolando lo antes descrito de la media aritmética, se puede notar que enseñar y concebir el promedio como la expresión matemática que permite su cálculo, no permite que el estudiantado comprenda a cabalidad este concepto.

Leavy y O’Loughlin (2006) indican que existen dos tipos de comprensiones de la media, conceptual y procedural, donde la media conceptual involucra a la interpretación de la media como un reparto justo –el valor que representa el conjunto de datos como si todos los datos fuesen iguales–, o

como el punto de equilibrio –donde valores mayores compensan los valores menores– , y que la comprensión procedural se refiere a la comprensión de la media sólo desde el uso de la expresión matemática que permite su cálculo. Los autores estudian la comprensión de la media aritmética en estudiantes en formación docente y encuentran que sólo el 25% de ellos manifestaba alguna forma de comprensión conceptual de la media y que el resto presentaba una comprensión procedimental.

Carlos Chan (2009), en su tesis, evidencia que la enseñanza de la media aritmética en México cae en la presentación de la expresión algebraica que permite el cálculo de ésta, mas no se impulsa a que los estudiantes construyan este conocimiento, provocando que se vuelva un aprendizaje memorístico. También expresa que no se habla de las propiedades, características, cuándo emplear esta medida de tendencia central, en qué condiciones, ni tampoco de su característica de representante de un conjunto de datos. Se expresa también que no se propicia la relación entre la media aritmética y la lectura de gráficos ni tampoco se impulsa a que las y los estudiantes tomen decisiones utilizando esta medida de tendencia central. Se analiza también la forma de presentar la enseñanza de la estadística, mostrando que:

[...] es el profesor quien presenta la gran mayoría de la información, comenzando por las definiciones, el tratamiento de los ejemplos, la explicación de la manera de obtener ciertos resultados, los algoritmos, etc., seguido de los ejercicios correspondientes, individualmente o en equipo. Se deja a un lado, la parte en donde es el alumno quien construye su conocimiento, enfocándose en los procedimientos para la resolución de ejercicios más no de problemas. Al final, se logra apreciar cómo es que poco a poco la estadística y la probabilidad llegan a parecer un “recetario” de fórmulas y técnicas (Chan, 2009, p.29).

Con todo lo antes descrito se puede evidenciar que parte de los y las docentes –sean chilenos o mexicanos– conciben la media aritmética como un número obtenido a través de una expresión algebraica, lo cual conlleva a una enseñanza poco reflexiva y sin sentido, donde no se le da énfasis a las propiedades que cumple la media aritmética y la utilidad de esta medida de tendencia central en la sociedad, siendo esta la problemática detectada.

Se podría decir que la enseñanza de la media aritmética –y la estadística en general– depende entonces de los docentes y la formación que ellos y

ellas reciben. Ante esto y con los antecedentes mostrados anteriormente, nace la necesidad de mejorar la formación docente para que los y las estudiantes reciban una educación adecuada a las exigencias de esta sociedad.

Con los antecedentes mostrados surge la necesidad de rediseñar la manera en cómo es enseñada la media aritmética, para que el estudiantado pueda participar de manera activa en su propio proceso de aprendizaje, que no se impongan símbolos carentes de sentido y puedan ser conscientes del uso que este concepto tiene en su contexto y cotidianidad. Se espera que a partir de este rediseño las y los estudiantes puedan construir significativamente este concepto y es en este punto donde nace la siguiente interrogante ¿Qué actividad relacionada con la media aritmética permitiría que la universalidad del conocimiento, la opacidad de lo cotidiano y la exclusión del estudiantado en la construcción de su propio conocimiento sean menos determinantes?

En consideración de lo expuesto en relación con la enseñanza de la estadística y la importancia que esta tiene, se vuelve necesario el perfeccionamiento docente y la difusión de material que permita que otros(as) de ellos(as) enriquezcan su profesión. Ante esto, con la finalidad de perfeccionarse, la docente creadora de este trabajo en conjunto con otra docente de la misma área, realizaron un Estudio de Clases relacionado con la enseñanza de la media aritmética. De este Estudio de Clases emergió un plan de clases que será mostrado a continuación y posteriormente analizado, con la finalidad de evidenciar la efectividad que éste tiene al momento de enseñar.

En el plan de clases antes mencionado, se pretende mostrar una manera innovadora de enseñanza del concepto de media aritmética, puesto que la problemática expresa que si esto se hace a partir de la expresión matemática que permite su cálculo, conlleva a un aprendizaje poco reflexivo y carente de sentido, provocando que las y los estudiantes se sientan ajenos a ese saber y, consecuentemente, no lo incorporan en sus conocimientos como un elemento útil en lo cotidiano. Ante esto, es el o la docente quien se debe hacer cargo de romper con esta problemática, primeramente, haciéndose consciente de que esta forma de presentar la media aritmética, provoca la exclusión de los y las estudiantes de su propio proceso de aprendizaje; junto con esto se opacan los argumentos del cotidiano que dieron –o dan– vida al concepto de media aritmética y se impone una manera generalizada de definir este concepto. Esta problemática es posible analizarla desde la teoría de la socioepistemología, considerando que esta trabaja desde problematizar el saber desde las prácticas sociales y el cuestionamiento de la universalización del

conocimiento, refiriéndose a esto último como la forma de presentar un contenido de manera igualitaria para todos, imponiendo símbolos matemáticos y definiciones que no tienen sentido alguno para el estudiantado, conocimiento que inicialmente fue construido producto de las necesidades humanas en un contexto y para una función específica.

## OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL SABER SABIO

El objeto matemático que se tratará es la Media Aritmética. Desde el saber sabio, comúnmente es definido como la suma de todos los datos divididos por el total de datos, lo que Lacourly (2011) expresa como un valor representativo de un conjunto de datos, el que se calcula como: si tenemos  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , su promedio aritmético es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

De este concepto se pueden desprender ciertas propiedades –las que describe la misma autora– de las cuales, una de ellas es la linealidad, es decir que, si  $y_i = ax_i + b$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces el promedio de los  $y_i$  es:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = a\bar{x} + b$$

Además, se cumple que la suma algebraica de las desviaciones de un conjunto de números de su media aritmética es cero, lo cual algebraicamente se describe como:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

es decir, si a un conjunto de datos se le calcula su media aritmética, se cumple que la suma de todas las distancias de cada número considerado y la media aritmética de ellos, teniendo además en cuenta el sentido en que se encuentra esta distancia, expresado con signo positivo o negativo –según corresponda– siempre dará cero. Visto de otro modo, los excesos y defectos de los números en relación con su media, son inversos aditivos. Además, se puede inferir que la media aritmética funciona como el punto de equilibrio entre los datos considerados.

Por otra parte, si se tiene que un conjunto de datos, cuya cardinalidad sea  $f_i$  con  $i \in \mathbf{N}$ , y cumple que tienen una media  $m_i$  con  $i \in \mathbf{N}$ , entonces la media de varios conjuntos de datos que cumplan las características mencionadas, se obtiene como

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot m_1 + f_2 \cdot m_2 + \dots + f_k \cdot m_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}$$

Finalmente, se cumple para la media aritmética que la suma total de  $n$  valores cuya media es  $\bar{x}$  es igual a  $n\bar{x}$ .

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

Los autores Coba, Del Pino y Wistuba (2010), a diferencia de los autores mencionados más arriba, presentan en su trabajo que la forma en que es “definida” la media aritmética o promedio comúnmente –como la suma de un conjunto de números y dividida por la cantidad de números sumados– no muestra realmente su definición, sino que cómo ésta se calcula. Esto es, decir que la definición de la media es la expresión algebraica que permite su cálculo, no es adecuado ya que sólo muestra cómo se calcula y no lo que es. Desde esta perspectiva, proponen a la media aritmética como:

La Media es entonces el mejor representante mínimo cuadrático de un conjunto de números y consecuentemente sólo pretende representar dichos números y no explicar algún tipo de comportamiento de los mismos (Coba, Del Pino y Wistuba, 2010)

Entonces, la suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de número  $x_i$  de cualquier número  $a$  es mínima solamente si  $a = \bar{x}$

Sea  $X = \{x_i/x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots\}$  Entonces:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - k)^2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

El principio de mínimo cuadrado, se plantea escoger el número  $k$  que minimiza  $\sum_{i=1}^n (x_i - k)^2$  encontrándose que este mínimo se obtiene para  $k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  (Coba, Del Pino y Witsuba, 2010)

En el artículo de Strauss y Bichler (1988, citado por García y García, 2004) se propone que las propiedades de la media aritmética se pueden clasificar en las categorías de Estadístico, Abstracto y Representativo. En cada una de estas categorías se encuentran las siguientes propiedades:

#### Estadístico

- A) La media está localizada entre los valores extremos.
- B) La suma de las desviaciones a la media es cero.
- C) La media es sensible a los valores atípicos.

#### Abstracto

- D) La media no necesariamente tiene la misma naturaleza que de los valores de la cual fue calculada.
- E) La media puede ser un valor que no se haya considerado en los datos.
- F) El cero debe ser considerado al calcular la media

#### Representativo

- G) La media es un valor representativo de los valores que se están promediando.

## OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL SABER ESCOLAR

En lo escolar se define el concepto de Media Aritmética como:

“[...] a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales. La fórmula para el cálculo de esta medida de tendencia central es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Si los datos están repetidos, puedes multiplicar el valor de la variable por su frecuencia absoluta, evitando así una adición reiterada” (Merino, Muñoz, Pérez y Rupin, 2017)

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

En otro texto escolar se describe que:

“La Media [...] se calcula como el promedio de los datos de la muestra. Tiene como característica que su diferencia del promedio con todos los valores de los datos de una muestra es la más pequeña posible” (Castro y Marambio, 2017)

## DISTANCIA ENTRE SABERES

Si se analiza lo expuesto en el saber sabio, se da cuenta de que se tiende a “definir” la media aritmética desde la expresión que permite el cálculo de ésta y extraer ciertas propiedades de la media desde la misma expresión algebraica. De los autores(as) expuestos(as), solamente Coba, Del Pino y Wistuba (2010) cuestionan esta forma de definirla, proponiendo hacerlo desde los mínimos cuadrados y como un representante de un conjunto de datos.

En cuanto al saber escolar, se da cuenta que en los textos analizados se da énfasis a la expresión matemática que permite el cálculo de la media aritmética y que no se menciona lo que es. En ambos textos se da a conocer solo una característica de lo que cumple la media en relación con los valores de los cuales fue calculada.

Si se comparan ambos tipos de saberes, se puede notar que la autora Lacourly (2011) y los autores del saber escolar Merino et al (2017), Castro y Marambio (2017) dan énfasis a la expresión matemática que permite el cálculo de la media aritmética. En este caso, comparando ambos saberes representados por los autores mencionados, la transposición didáctica hecha desde la bajada del saber sabio al saber escolar presentado en los textos de estudio se basa en escribir la expresión algebraica de manera más sencilla para los y las estudiantes de enseñanza básica y media, pero no se profundiza mayormente en lo que es la media aritmética, las propiedades que cumple y sus aplicaciones en lo cotidiano.

En cambio, los autores Coba, Del Pino y Wistuba (2010) mencionan que se debe realizar un cambio en la forma en que es definida la media aritmética, proponiendo una manera distinta de concebirla y definirla. Pero esto no se ha visto manifestado en los textos escolares, pudiendo deberse a que, para definir usando los mínimos cuadrados, se necesita tener una madurez cognitiva mayor a la alcanzada en el nivel en que es enseñada la media aritmética.

## OBJETO MATEMÁTICO EN LA HISTORIA/EPISTEMOLOGÍA

Esta investigación respecto a lo epistemológico se vuelve necesaria para que, como docentes, se pueda adquirir mayor conocimiento sobre el objeto matemático a enseñar. Se pudo encontrar algunos antecedentes respecto a la epistemología de la estadística, y aportes que dieron luces del concepto de la media aritmética pero que explícitamente no tratan de ésta, sino que de aspectos que ayudan en la actualidad a comprenderla.

Se tiene antecedentes que desde el comienzo de las civilizaciones humanas hasta la actualidad se usa la estadística, claramente con una dificultad creciente a medida que avanza el tiempo, desde la forma de registro hasta los análisis realizados.

En consideración de las civilizaciones humanas, en la isla de Cerdeña, Italia, se encontró los restos arqueológicos más antiguos relacionados con la estadística, pertenecientes a los Nuragas, quienes fueron los primeros habitantes de la isla. En ellos –de acuerdo a la interpretación del lenguaje que se le dio– se da cuenta del ganado y caza de la época.

En Egipto el año 3.050 a.C. se realizaba censos enfocados en la cantidad de habitantes y consecuentemente se realizaban cuentas respecto a los movimientos poblacionales. Heródoto indica que algunos de los censos de riqueza y población se realizaban para tenerlos en cuenta a la hora de planificar la construcción de las pirámides. Años más tarde, de la Dinastía XIX, el faraón Ramsés II mandó realizar un censo para el reparto de tierras. Es importante mencionar, que tanto era el afán de llevar un registro y orden de su población y riquezas que creían en la diosa Safnkit, la cual era diosa de los libros y de las cuentas.

En el año 3.000 a.C., los babilonios utilizaban tablas de arcilla principalmente para registrar la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque.

También se tiene registro que en el año 2.238 a.C., en China, el rey Yao mandaba a registrar y analizar datos de agricultura, industria y comercio.

Se tiene como antecedente que en el año 1450 a.C. en la Biblia, en los libros de Números y Crónicas, se realizó un censo por Moisés después de la salida de Egipto. Es necesario mencionar que uno de estos libros fue escrito en el año 1.400 a.C. y el otro en el año 450 a.C., por lo que, desde ese entonces se tenía una concepción de estudios estadísticos.

Se tiene antecedentes de que, en el año 721 a.C en Asiria, el rey Sargón II fundó la biblioteca en Nínive. En esta biblioteca se guardaban tablillas de arcilla de 25 X 16 cm en cuya inscripción se ve datos estadísticos sobre producción y cuentas.

El año 594 a.C. Grecia también tuvo importantes vestigios del uso de la estadística, relacionándola con la distribución de terreno, servicios militares, censos, etc. En este mismo sentido, los griegos Sócrates, Heródoto y Aristóteles incentivaron a la estadística por la importancia que ésta tenía para el Estado.

También, en el año 27 a.C., en el imperio Romano utilizó la estadística para su crecimiento y organización. Fue el primer gobierno que recopiló datos de población, superficie y renta de los territorios. Realizaban censo cada 5 años para el control de nacimientos, defunciones, ganado y tierras conquistadas. Con el tiempo, tras la caída del Imperio Romano, se realizaron muy pocos estudios estadísticos.

El primer catastro de Occidente data de 1085; lo estableció Guillermo el Conquistador en Inglaterra y se conserva en el "Domes Day Book". El nombre de este libro se tomó del anglosajón "domes doeg" que significa el día del juicio final. En él se recopilaron las propiedades, extensiones y el valor de las tierras de Inglaterra.

La estadística descriptiva comienza a partir del Renacimiento. Desde la época de la caída del Imperio Romano hasta el Renacimiento solo se tiene registros de estudios estadísticos mandatados por la iglesia, cuyo propósito era salvaguardar sus pertenencias y bienes.

En el Renacimiento, personajes como Leonardo da Vinci, Nicolás Copérnico, Galileo, Neper, William Harvey, Sir Francis Bacon y René Descartes, aportaron al desarrollo del método científico. Esta herramienta se utilizó en el ámbito económico, cuando tiempo después surgieron los estados nacionales y, con ello, el comercio internacional. Es necesario destacar que con estados nacionales se hace referencia a la organización política en el cual se tiene un gobierno, un territorio y una población definida. Estos estados nacionales acaban con el orden feudal que se tenía en algunos países. Es entonces que la Revolución Francesa cobra un valor importante en el desarrollo de la Estadística producto del nuevo orden estatal, el desarrollo de lo crítico-científico, la nueva opinión pública y colectiva, y el desarrollo comercial emanado de este proceso de cambio.

Volviendo a la época del Renacimiento, en el año 1532 Enrique VII de Inglaterra, mandó a registrar defunciones y nacimientos producto del

miedo ante la peste. Más adelante, en 1632, con el brote de la peste, semanalmente se publicaban estadísticas respecto a las muertes y nacimientos, por orden de Tomas Cromwell, las cuales estaban publicadas en orden, considerando el género de los ciudadanos y ciudadanas. Estos registros se les llamaban "Bills of Mortality"

Uno de los primeros trabajos de estadística en el sentido de "descripción del estado" apareció en Venecia en 1562. Su título era "Del Governo et Amministrazione di diversi Regni, et Republiche" y su autor fue Francesco Sansovinos. En este libro incluso se describe el estado ideal de Tomás Moro "Utopía".

En cuanto a Hispanoamérica, en el siglo XVI, España realizó un censo aplicado a Perú y otros lugares de América Latina.

En 1662 el Capitán y comerciante inglés John Graunt fue el primero que empezó a trabajar comparando los registros de nacimientos y muertes ya existentes y en 1662 publicó su "Natural and Political observations upon the bills of mortality", el primer trabajo sobre estadística de la población de su nación. En Alemania, en el año 1540 Sebastián Muester realizaba trabajos de estadística de la población, en los cuales compilaba estudios estadísticos de recursos nacionales, organización política, instituciones sociales, comercio y poderío militar. En la misma Alemania, en el año 1691 Gaspar Neumann propuso destruir la creencia de que en los años terminados en 7 moría más gente. Para derrocar este mito, analizó archivos parroquiales de la ciudad y con ello determinó que en los años que no terminaban en 7 podía morir más gente de la que moría en los años terminados en 7 pues había registro de que eso sucedía a través de los años. Edmond Halley oyó los resultados y análisis realizados por Neumann y los aplicó en el estudio de la vida humana. Halley utilizó las tablas de mortalidad creadas por Neumann para fundar la matemática de los seguros de hoy en día y, además, dio un gran impulso a los trabajos de demografía estadística.

En 1760 Godofredo Achenwell acuñó la palabra estadística extrayéndola del término italiano "statia". Se concebía a la estadística como la alidada más eficaz del gobernante consciente.

Los Estados Unidos de América fue el primer país que realizó censos de su población desde su fundación. Ya en 1790, cuando fue elegido George Washington como primer presidente, se realizó el primero de los censos, donde se contaron casi cuatro millones de habitantes en los 17 estados existentes entonces. Los censos se han seguido realizando cada 10 años.

En el año 1835 Jacques Quételet es quien aplica la estadística a las ciencias sociales. Aplicó el principio de promedios y de la variabilidad a los fenómenos sociales.

Es necesario destacar a Florence Nightingale, quien fue una líder inglesa importante en el desarrollo de las reformas hospitalarias. Ella utilizó estadística básica para mejorar el sistema hospitalario militar, sistema hospitalario civil, las maternidades y las escuelas coloniales.

Cuando ya las ciencias naturales requirieron de una descripción más precisa, se volvió imperante el uso de la probabilidad en este ámbito. En esta aplicación de la probabilidad a las ciencias se destacan DeMoivre, Laplace, Gauss y Poisson.

Desde la probabilidad se pudo responder interrogantes que presentan relación con el comportamiento de los juegos de azar. Hubo otras situaciones que no se pudieron analizar mediante la probabilidad, producto de que había datos desconocidos que debían ser estimados, trayendo como consecuencia un avance fundamental en la Estadística. La astronomía fue una de las ciencias que más necesitó de la estimación producto de la imprecisión de los instrumentos de medición. Gauss, considerando la necesidad de buscar un método de estimación de datos considerando otros datos tomados, introdujo la distribución normal como modelo de los errores de medida. Quételet usó la distribución normal para describir y estimar características sociales medias de los miembros de la comunidad. Además, en 1888 Sir Francis Galton introdujo como método de relación entre variables la idea de "correlación"; Karl Pearson introdujo el concepto de coeficiente de correlación. Estos últimos conceptos mantienen estrecha relación con el concepto de media aritmética.

El desarrollo de la estadística continúa hasta la actualidad, producto de nuevas situaciones que la requieren, y las nuevas tecnologías que proporcionan estadísticas más precisas. A mediados del siglo XX comienza lo que se puede denominar como la estadística moderna, donde uno de los factores que la determina es la aparición y popularización de los computadores. Las aplicaciones en este periodo de la Estadística a la Economía conducen a una disciplina con contenido propio: la Econometría. Esta es una de las ramas más modernas de la economía y consta de la aplicación de la matemática y la estadística al análisis económico. Si bien el apogeo de esta se dio en el siglo XX, su origen proviene desde el siglo XVII de la denominada "aritmética política", cuyo expositor fue William Petty. Petty logró aplicar la estadística a la economía producto de la visión sistemática que él tenía respecto a la medicina –pues era médico, poeta y economista– pues asumía cada problema económico como parte

integrante de un problema mayor, el cual necesitaba ser medido para poder ser conocido. Él intentó entender la relación que existía entre la población y la economía. (Jair, s.f)

En cuanto a la media aritmética, se encontró antecedentes que aluden al uso de este concepto a lo largo de la historia. En el artículo de Rondero (2010) se explica que Arquímedes usó en sus trabajos el principio de la balanza, trayendo con ello los conceptos de exceso y defecto. Lo utilizó principalmente en aplicaciones geométricas, para el cálculo del área de un sector parabólico. Esta visión del exceso y defecto también es importante para la media aritmética, pues a través de esto se puede llegar a construir su definición y la expresión matemática que permite su cálculo.

En Babilonia se tiene registros de que en tablas de arcilla los mismos babilonios anotaban respecto a los movimientos de los astros y los planetas, y a partir de ello realizaban estimaciones de la posición de los planetas utilizando la suma total de las observaciones y dividiéndolo por el número de datos tomados (Plackett, 1970, citado por Chan, 2009). He aquí una muestra del uso del concepto de media aritmética como representante de ciertos valores.

También en el siglo XV, en las regiones cercanas al mar, cuando se producía una pérdida de bienes relacionada con las embarcaciones, producto de las tormentas, las personas que utilizaban una misma embarcación debían pagar dicha pérdida mediante un acuerdo. Inicialmente a los daños de cargamento producidos por el mar se les llamó "havaría" pero de manera posterior se le comenzó a llamar de esa manera al dinero que debía pagar cada persona por los daños causados (Newman, 1968. Citado por Chan, 2009). Es aquí una muestra de la utilización de la media aritmética como reparto equitativo.

Por otra parte, se tiene registro que Huygens, en 1669, "realizó el primer gráfico de una función continua y demostró cómo encontrar el promedio de vida restante de una persona de cierta edad" (Citado por Chan, 2009, p. 34).

## **BARRIDO CURRICULAR DEL OBJETO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS**

En cuanto al saber escolar, si se sigue el currículum a lo largo de los doce años de escolarización, se puede notar que la media aritmética aparece en cuatro años: Quinto básico, Séptimo básico, Segundo medio y Cuarto medio. Claro está que este saber se va complejizando a medida que se avanza en los años escolares. La Tabla 1 muestra el nivel de enseñanza y el aprendizaje esperado.

Considerando el barrido curricular de la media aritmética, se puede identificar que si algún(a) estudiante no comprende este concepto en la enseñanza básica, no podrá ser capaz de aplicarlo y construirlo en su complejidad a medida que avanzan los años de escolaridad.

En el barrido curricular se puede dar cuenta de lo complejo que es el concepto de media aritmética, considerando la diversidad de aplicaciones que tienen, lo cual, ligado a los antecedentes mostrados anteriormente, reafirma la problemática de enseñanza de la media aritmética.

Tabla 1. Objetivos de aprendizajes relacionados con la media aritmética según el Currículo Nacional (MINEDUC, 2017)

<b>Nivel Básico OA23</b>	<b>Quinto</b>	<b>Calcula el promedio de datos e interpretarlo en su contexto.</b>
<b>Nivel Básico OA17</b>	<b>Séptimo</b>	<p>Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinando las medidas de tendencia central para realizar inferencias sobre la población.</li> <li>• Determinando la medida de tendencia central adecuada para responder un problema planteado.</li> <li>• Utilizándolos para comparar dos poblaciones.</li> <li>• Determinando el efecto de un dato que es muy diferente a los otros.</li> </ul>
<b>Nivel Medio AE01</b>	<b>segundo</b>	Determinar el rango, la varianza y la desviación estándar de conjuntos de datos.
<b>Nivel Medio AE02</b>	<b>Segundo</b>	Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, posición y dispersión.
<b>Nivel Medio AE03</b>	<b>segundo</b>	Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.
<b>Nivel Medio AE05</b>	<b>segundo</b>	Calcular medias muestrales
<b>Nivel Medio AE06</b>	<b>segundo</b>	Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población.
<b>Nivel Medio AE13</b>	<b>Cuarto</b>	Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.
<b>Nivel Medio AE14</b>	<b>Cuarto</b>	Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\bar{X}$ de muestras aleatorias del tamaño $n$ , extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño.

## DESCRIPCIONES GENERALES DEL PLAN DE CLASES

El plan de clases que se presenta fue creado en un Estudio de Clases, durante el primer ciclo de éste, es decir, se identificó el problema, se planificó la clase, se implementó, se evaluó la clase y satisfacción con los resultados, para generar observaciones que permitan el mejoramiento de este plan, dejándolas estipuladas para el segundo ciclo de éste. Es necesario destacar que el Estudio de Clase fue realizado por dos docentes de Matemáticas de distintos establecimientos y que este análisis será realizado por una de ellas. Una vez recogidos los datos, éstos serán analizados desde la mirada de la socioepistemología, para identificar si es que este plan califica como rediseño del dME de la media aritmética, a través de los fenómenos producidos por el dME: adherencia, exclusión y opacidad.

Primeramente, es necesario mencionar que la socioepistemología parte de cuestionar la enseñanza común de los conceptos matemáticos, esa enseñanza donde el o la docente muestra un determinado contenido y los y las estudiantes deben replicarlos en ejercicios, los cuales terminan siendo resueltos de manera rutinaria y sin sentido, además, trayendo en este proceso de enseñanza, la imposición de símbolos matemáticos que no tienen sentido para el estudiantado. A esto se le denomina desde la socioepistemología como Discurso Matemático Escolar, el cual será referido desde ahora en adelante como dME. La socioepistemología considera que el dME es el principal definidor de la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2014) por lo que esta teoría busca el *rediseño* de éste a partir del análisis de los tres fenómenos que trae consigo: la *adherencia*, la *exclusión* y la *opacidad*.

Se puede notar con lo antes descrito que la socioepistemología se enfoca en la construcción social y en la aplicación a lo cotidiano, dando énfasis a la participación de los y las estudiantes como principal sujeto generador de su propio conocimiento. Desde esta perspectiva, la enseñanza de la estadística está completamente ligada a lo cotidiano y a su uso en la vida real, y permite ser enseñada desde la construcción y uso en lo social. Es por esto que se cree necesario crear una secuencia didáctica donde se evite recaer en los fenómenos de exclusión, adherencia y opacidad producto del dME que describe la socioepistemología, con la finalidad de rediseñar lo imperante.

En relación con lo mencionado en los párrafos anteriores, en este trabajo se presentan dos tipos de análisis, el del Estudio de Clases relacionado con el plan de clases y su eficacia en la enseñanza de la media aritmética, y el relacionado con la socioepistemología.

Para la creación y aplicación del diseño didáctico, se pensó en estudiantes de octavo año básico de un colegio particular de la comuna de Buin. La cantidad de estudiantes en aula es diez. Es un colegio de enseñanza básica, mixto, con un curso por nivel desde primero básico a octavo año básico. Es un colegio que tiene pocos años de vida y ha pasado por modalidad de particular subvencionado y particular pagado –entendiendo el primero como aquellos establecimientos cuya modalidad de pago compartida entre la Municipalidad de la comuna en que se encuentra el colegio y los padres o apoderados del estudiantado; y el segundo como aquellos establecimientos cuya modalidad de pago depende exclusivamente de los padres y/o apoderados–, sucediendo este cambio hace no más de dos años, por lo que recién se está ajustando a lo que conlleva ser un establecimiento particular. Los y las niños(as) que asisten al establecimiento no son, en su mayoría, de un alto nivel económico.

En cuanto a las características particulares del curso en el cual se aplicará la clase, es necesario destacar que son estudiantes que acostumbran a no buscar respuestas a las situaciones, no se motivan con las situaciones de aprendizaje y les cuesta incluso formar grupos de trabajo. Como en todo curso, hay estudiantes que tiene más desarrollado el razonamiento lógico-matemático mientras que hay otros compañeros(as) que les cuesta razonar ante situaciones que impliquen la lógica matemática. Son un curso unido y bullicioso, no saben escuchar instrucciones y comienzan a actuar antes de que la docente o el docente termine de dar las características de alguna actividad. A pesar de todo, cada uno de los y las estudiantes, al insistirles, trabajan en las actividades y participan de ellas de una u otra manera.

Si se analiza el currículum nacional, se presenta en él que es en séptimo año básico donde se debería aprender el concepto de media aritmética, pero fue enseñado en octavo debido a que, para poder construir conocimientos más profundos y significativos respecto a la media aritmética, se debe tener más conocimientos y más enraizados de los que se tienen en el nivel que presenta el currículum chileno.

En cuanto a los y las estudiantes, ellos y ellas no pertenecen a ninguna comunidad étnica ni tampoco comparten más características en vivir en la misma comuna, pertenecer al mismo colegio, misma sociedad y pertenecer al mismo nivel educativo.

En cuanto a la docente de matemáticas del estudiantado al que se le aplicará el diseño, lleva con ellos(as) dos años consecutivos. Su manera de trabajar se basa en hacer que ellos y ellas intenten deducir las

propiedades de la matemática en general, que piensen y se cuestionen cada situación. A veces resulta esta manera de trabajar y otras veces se debe recurrir a la manera tradicional de realizar las clases. Se intenta hacer actividades que permita que el estudiantado pueda conocer cada concepto que se debe tratar según el currículum y que no queden con la sensación negativa respecto a las matemáticas.

La docente descrita con anterioridad forma parte de la dupla que realiza el Estudio de Clases. La otra docente ejerce su docencia en un establecimiento perteneciente a la comuna de Estación Central desde séptimo básico a cuarto año medio. El establecimiento profesa la religión católica cuyo proyecto educativo enfatiza en el desarrollo integral, excelencia académica y en lo valórico-religioso. Esta docente vela para que se cumpla este proyecto educativo.

## PLAN DE CLASE 1

**Objetivo de la Clase:** Analizar una situación relacionada con un reparto equitativo.

**Material de uso docente:** plumones, pizarra, borrador, cinta adhesiva para pegar cartulinas e información en el pizarrón, texto "Mejorando la convivencia escolar" para leer al estudiantado en el desarrollo de la clase (en el plan de clases).

**Material de uso estudiantil:** bolsas pequeñas, cartulina con recta numérica, dulces, fichas para completar con datos de las actividades.

**Organización de la clase:** Durante el inicio de la actividad, las y los estudiantes deberán trabajar de manera individual, reflexionar ante la situación planteada y escribirlas en una ficha. Durante el desarrollo de la actividad el estudiantado deberá trabajar en parejas, para compartir ideas, reflexionarlas y consensuarlas. Posteriormente cada uno(a) deberá reflexionar respecto a su situación particular, volviendo en el mismo desarrollo de la clase al trabajo individual. En el cierre de la clase, el trabajo continúa siendo individual.

**Descripción general:** Como se nombró en la sección anterior, uno de los materiales que se necesita son caramelos. Estos son solicitados al estudiantado de manera anticipada para que al comenzar la clase éstos ya estén en manos de las y los estudiantes. Además, la docente lleva dulces extras por si a algún(a) estudiante se le olvida este material. La cantidad de caramelos que debe llevar cada uno(a) será dada por la docente pues no todos(as) deben llevar la misma cantidad. Ante esto, la cantidad de dulces que cada uno llevará se repartirá por número de lista, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Relación entre el número de lista y la cantidad de caramelos que debe llevar el estudiante correspondiente.

<b>Estudiante N° de lista</b>	<b>Cantidad de Caramelos</b>	<b>Estudiante N° de lista</b>	<b>Cantidad de Caramelos</b>
<b>1</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>2</b>	<b>10</b>	<b>0</b>

**Conocimientos previos para la secuencia didáctica:** Considerando que el tema general que se tratará es la media aritmética, para poder realizar las actividades de cada clase, se necesita tener ciertos conocimientos de manera anterior.

En la primera clase, se puede distinguir la utilización de suma y división de números, distancia entre dos números, operatoria con números enteros, lenguaje algebraico y ubicar números en la recta numérica.

En la segunda clase, se puede distinguir el uso del concepto de media aritmética como reparto equitativo, de la expresión algebraica que permite el cálculo de la media aritmética, la comparación de datos, análisis de datos y argumentación de respuesta basada en evidencias.

En la tercera clase, se aplicarán los conocimientos adquiridos en las otras dos clases anteriores, por lo que los conocimientos previos son los vistos en las clases previas, como la media aritmética como reparto equitativo, expresión algebraica para el cálculo de la media aritmética, la media está localizada entre valores extremos, la suma de las desviaciones a la media es cero, la media no es necesariamente igual a un valor que se haya considerado, la media puede tener una naturaleza distinta a la de los valores calculados, el cero interviene en el cálculo de la media, la media es sensible a los valores atípicos y que la media es un valor representativo de los valores que se están promediando.

Se muestra a continuación el diseño didáctico propuesto para la enseñanza de la media aritmética hecho de manera detallada, mostrando inclusive las posibles.

Actividad	Lo que se espera del estudiantado	Posibles respuestas del estudiantado	Devolución y acción del docente	Evaluación	Tiempo
<p><b>INICIO.</b> Para comenzar la actividad, y con el fin de que el estudiantado no pueda manipular los caramelos, se les pedirá que, cada uno(a) de ellos/ellas, llene una ficha personal exponiendo cuántos caramelos llevó y que deje sus caramelos en la mesa de la docente.</p> <p>Prontamente se les presentará la situación “mejorando la convivencia escolar”:</p> <p>“Con el fin de</p>	<p>Se espera que el estudiantado complete la Ficha 1 con datos verídicos y que dejen en la mesa de la docente los caramelos.</p> <p>Se espera que el estudiantado reconozca la necesidad de conocer el total de dulces que tienen y en cuántas bolsitas los van a repartir.</p> <p>Se espera que identifiquen las operaciones matemáticas que deben utilizar para responder a la interrogante planteada.</p>	<p>El estudiante complete con los datos asignados o que el estudiante llene la ficha con datos falsos.</p> <p>Un obstáculo que puede aparecer es que no se comprenda el enunciado del problema, lo que podría producir el no tránsito entre el lenguaje natural y el numérico o algebraico.</p> <p>También puede suceder que la situación no motive a las y los estudiantes a participar de la actividad. Por otra parte, puede</p>	<p>El docente registra en la pizarra el objetivo de la clase.</p> <p>Da a conocer las indicaciones generales de la clase y da la palabra a los estudiantes que quieran realizar alguna sugerencia o plantear qué espera de la clase</p> <p>Entregar Ficha 1 a cada estudiante, dándoles tiempo para que la completen y puedan dejar los</p>	<p>Los estudiantes ¿ponen atención y comprenden las indicaciones?</p> <p>¿Dan sugerencias o plantean lo que esperan de la clase?</p> <p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p> <p>¿Ponen atención a la lectura del problema?</p> <p>¿Comprenden el problema y lo que se pide?</p> <p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p>	<p>20 min.</p>

<p>mejorar la convivencia escolar, cada uno(a) de ustedes deberá regalar una bolsita de dulces a aquel/aquella integrante de la comunidad educativa con quien crea que debe mejorar sus lazos. Pero para que sea un regalo equitativo para cada uno de los que recibirá este obsequio, repartiremos los dulces que ustedes trajeron para todos por igual ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?"</p> <p>Se pedirá que cada estudiante idee una manera</p>		<p>sucedier que el estudiantado no identifique las operaciones necesarias para encontrar la respuesta.</p> <p>Algunas de las estrategias que podrían usar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar la necesidad de conocer el total de los caramelos e identificar que se debe conocer la cantidad de bolsitas que se deben armar. Identifica las operaciones que debe utilizar para encontrar el número de caramelos que se asignará a cada bolsita</li> <li>• No construye ninguna</li> </ul>	<p>caramelos en la mesa de la profesora.</p> <p>Motiva a los estudiantes a que completen la Ficha N°1.</p> <p>La docente se paseará por los puestos de cada estudiante para supervisar el trabajo en la actividad y para realizar preguntas de devolución en caso de ser necesario, como:  ¿Qué datos deberías conocer para poder saber cuántos dulces le corresponderá a cada niño(a)?  ¿Qué operaciones matemáticas</p>	<p>¿Evidencian interés por resolver el problema?</p> <p>Se evaluará formativamente que las y los estudiantes estén completando la ficha con los datos pedidos y que sean verídicos.</p> <p>Se evaluará formativamente el trabajo individual a través de la observación de registros y respuesta a la pregunta.</p>	
--	--	--	---	--	--

<p>de encontrar el valor pedido, y que identifique los datos necesarios para poder encontrar la respuesta. Esta parte de la actividad se trabajará de manera individual y deberá dejarse expuesta en la parte derecha de la Ficha 1 (ver Anexo 1). Cuando la ficha esté completa, se la deben entregar a la docente.</p>		<p>estrategia para encontrar el valor requerido.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Plantea la estrategia de tomar todos los valores y comenzar a repartirlos uno a uno.</li> <li>• Realizan representaciones gráficas o algebraicas del problema.</li> <li>• Asigna valores numéricos cualquiera, teniendo en cuenta su valor.</li> </ul>	<p>podrías usar para responder a la pregunta?</p> <p>¿Con que operatoria relacionarías la palabra juntar?</p> <p>¿Con que palabra relacionarías la palabra repartir equitativamente?</p> <p>Se motivará el trabajo individual para que el estudiantado se plantee la situación y busquen estrategias.</p> <p>Motiva a los estudiantes a que intenten resolver el problema, utilizando sus conocimientos previos.</p>		
--	--	--	--	--	--

			La docente responde preguntas de comprensión del problema, nunca sobre la validez de alguna estrategia.		
<p><b>DESARROLLO.</b></p> <p>Posteriormente se les pedirá a los alumnos que formen parejas para poder analizar la situación de manera conjunta, con el fin de que en equipo puedan pulir sus ideas e idear una estrategia. Cuando ya se tenga la estrategia, se hará un plenario para conocer las ideas de cada equipo.</p>	<p>Se espera que los estudiantes presenten una actitud positiva para trabajar en equipo y que se genere discusión entre los integrantes de cada grupo para enriquecer sus ideas.</p> <p>Se espera que las y los estudiantes validen sus ideas a través de la discusión y puedan reafirmar su estrategia de resolución del problema.</p> <p>Se espera que cada estudiante pegue su</p>	<p>Puede suceder que a algún estudiante no le guste trabajar en equipo y que no quiera juntarse en grupos, como también puede suceder que sí quieran trabajar en equipos y eso los motive mucho más a participar en la actividad.</p> <p>Una estrategia a utilizar es que cada estudiante exponga sus ideas ante su equipo y que</p>	<p>Indica que desde ahora deben trabajar en equipo de dos o tres integrantes.</p> <p>Indica a los estudiantes que, con sus compañeros, deben comunicar entre sí sus estrategias personales, con un lenguaje acorde al problema.</p> <p>Además, indica que deben aunar criterios sobre</p>	<p>El docente observa el desempeño del trabajo en equipo y analiza el tipo de reflexiones que se van generando en el proceso.</p> <p>¿Veo que cada equipo de trabajo comunica las estrategias personales utilizadas?</p> <p>¿Veo que los estudiantes</p>	<p>20 min para el trabajo en parejas y el plenario.</p> <p>10 min para pegar las fichas en el pizarrón y encontrar la cantidad de caramelos por bolsa.</p> <p>10 min para trabajar</p>

<p>Considerando las respuestas del estudiantado ante esto, se pegarán las Fichas 1 del estudiantado en el pizarrón con el fin de que cada estudiante tenga acceso a la cantidad de dulce que cada estudiante trajo. Una vez que todas las fichas estén en el pizarrón, se les pedirá a las y los estudiantes que encuentren numéricamente la cantidad de dulces que debe haber en cada bolsita.</p> <p>Habiendo encontrado el valor, se les pedirá que escriban de manera algebraica</p>	<p>ficha en la pizarra de manera ordenada para que sus demás compañeros(as) tengan acceso a la información requerida para responder a la pregunta.</p> <p>Se espera que un integrante de cada equipo exponga la estrategia encontrada para responder a la pregunta.</p> <p>Se espera que las y los estudiantes lleguen a la respuesta de que se requiere todos los datos de la cantidad de dulces que cada uno(a) llevó y que además se necesita saber cuántas bolsitas se deben hacer. Junto con esto, se espera que identifiquen las operaciones</p>	<p>todos(as) las discutan y extraigan una conclusión, siendo ésta que deben sumar todas las cantidades de dulces llevadas para poder encontrar el total de caramelos y luego dividirlos por la cantidad de bolsitas que se deben realizar para repartir los caramelos en partes iguales.</p> <p>Puede suceder que, al conversar en el equipo, algún integrante no exponga sus ideas y sólo se deje llevar por lo que los demás digan.</p> <p>Otra de las</p>	<p>una o más estrategias para resolver el problema.</p> <p>Pide a un representante de alguna pareja, que salga para presentar la estrategia que utilizaron en la resolución del problema</p> <p>Camina por la sala, observando las estrategias utilizadas por los estudiantes, observando las posibles dificultades o errores, y respondiendo a ellos con las devoluciones pertinentes.</p> <p>¿Cómo</p>	<p>utilizan un lenguaje matemático acorde a la situación planteada?</p> <p>¿Las devoluciones planteadas, permiten que el alumno corrija por sí mismo sus errores y/o ayude a las dificultades que presenta?</p> <p>Las estrategias utilizadas, ¿son apropiadas para la resolución del problema?</p> <p>¿Logran aunar criterios sobre al menos una estrategia para resolver el problema?</p>	<p>en la expresión algebraica.</p> <p>5 min para completar la ficha N°2.</p> <p>15 min para trabajar en la recta numérica y en el significado del cero.</p>
--	--	--	--	---	---

<p>la expresión que les permitió encontrar la cantidad de dulces que deberían ir en cada bolsita, esperando que sean capaces de esbozar la expresión algebraica que permite el cálculo de la Media Aritmética.</p> <p>Cuando ya se tenga esta expresión, se volverá al trabajo individual y la información de los dulces por bolsa, se les preguntará a las y los estudiantes ¿Fue equitativa la cantidad de dulces que ustedes trajeron considerando la</p>	<p>matemáticas necesarias para desarrollar el problema, como lo son la suma y división.</p> <p>Se espera que cada estudiante encuentre de manera numérica la cantidad de caramelos que debe haber en cada bolsita para que sea un reparto equitativo, usando lo que se expuso en el pleno anterior.</p> <p>Se espera que el estudiantado sea capaz de formular una expresión algebraica para poder encontrar la cantidad de dulces que debe ir en cada bolsita. La expresión debe quedar escrita de manera genérica y no</p>	<p>estrategias de resolución del problema puede ser que como hay un estudiante que no llevará caramelos, no se considere a este para la repartición de ellos, modificando de esta manera el resultado esperado.</p> <p>Puede suceder también que algún equipo no llegue a consenso debido a que no sepan identificar la operatoria de división como una manera de repartir de manera equitativa una cierta cantidad.</p> <p>Dificultades en la comprensión de la</p>	<p>designarías a cada dato?</p> <p>¿Qué operatoria utilizaste?</p> <p>¿Con qué tipo de números se asocia las bajas temperaturas?</p> <p>¿Con qué tipo de números asocias sobre el nivel del mar o bajo el nivel del mar?</p> <p>¿Algunos sinónimos de diferencia?</p> <p>El docente menciona los sinónimos de diferencia. Por ejemplo: quitar y disminuir.</p> <p>¿Cómo se ordenan los</p>	<p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p> <p>Constantemente, promueve la participación del curso con preguntas como: ¿se entiende?, ¿están de acuerdo?</p> <p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p> <p>Los estudiantes ¿ponen atención y comprenden las indicaciones?</p> <p>El docente observará que el estudiantado complete la Ficha N°2</p>	
--	--	--	--	--	--

<p>cantidad de dulces que cada bolsita debe llevar? ¿Cuántos dulces te faltaron por traer o cuántos dulces menos debiste traer considerando la cantidad de dulces en cada bolsita para que fuese una repartición equitativa? El estudiantado deberá anotar su respuesta en la Ficha 2 (ver Anexo 1), expresando con signo negativo si es que le faltaron dulces por traer o con positivo si es que le sobraron dulces.  Posteriormente se les pedirá a cada una de las y los</p>	<p>con el uso de números de una situación particular.</p> $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ <p>Se espera que el estudiantado identifique que la cantidad de dulces que debió ir en cada bolsita también corresponde a la cantidad de dulces que cada uno de ellos debió llevar, considerando que debió ser una repartición equitativa.</p> <p>Se espera que el estudiantado sepa relacionar el signo negativo con una deuda para con el curso puesto que debió llevar más dulces de los que llevó para que fuese</p>	<p>estrategia presentada por sus compañeros.</p> <p>Puede suceder que el estudiantado utilice distintos registros algebraicos para la representación algebraica de la expresión que permite el cálculo de la repartición equitativa de los caramelos</p> <p>En consideración de la parte algebraica, puede suceder que algún estudiante no logre realizar el tránsito entre lo numérico, lenguaje natural y lo algebraico</p> <p>Para el cálculo del exceso o deuda de</p>	<p>números?</p> <p>¿Cómo se ordenan en la recta numérica?</p> <p>¿La deuda en la recta que significa?</p> <p>¿El exceso en la recta que significa?</p> <p>¿Cómo se opera en los números enteros?</p> <p>¿Cuáles son las propiedades de la adición en los números enteros?</p> <p>¿Qué significa que sea un punto de equilibrio?</p> <p>¿Cuándo no es</p>	<p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p> <p>Los estudiantes ¿ponen atención y comprenden las indicaciones?</p> <p>Se evaluará la participación de los estudiantes.</p> <p>¿Se cumple el tiempo planificado?</p>	
--	--	--	--	---	--

<p>estudiantes que ubiquen en una recta numérica, puesta en el pizarrón, los valores de deuda de dulces o exceso de dulces, el valor de dulces que debe ir en cada bolsita y la cantidad de dulces que cada uno de ellos trajo. Además, deben dejar registrada esta misma recta numérica en la Ficha 3 (ver Anexo 1), la cual debe ser pegada en sus cuadernos después.</p> <p>Cuando ya tengan en su poder todos los valores, se le pedirá que sumen, por una parte, todas las deudas</p>	<p>una repartición equitativa y, consecuentemente, se espera que sean capaces de relacionar el signo positivo con un exceso de dulces comparando la cantidad que ellos llevaron con la cantidad que debe ir en cada bolsita.</p> <p>Se espera que el estudiantado trabaje de manera activa, expresando sus resultados en el pizarrón. Además, se espera que sepan ubicar números en la recta numérica y que identifiquen en ella cómo expresar la falta de dulces o el exceso de dulces.</p> <p>Se espera que el estudiantado maneje la operatoria con</p>	<p>caramelos en consideración de una repetición equitativa (media aritmética), el estudiantado puede considerar la distancia entre su valor y el número obtenido en el cálculo de la cantidad de caramelos por bolsita y pudiendo o no identificar cuál debiese ser el signo que se le debe asignar. También podrían utilizar la resta para identificar el excedente o deuda a de caramelos.</p> <p>El alumno completa correctamente la Ficha N°2 con los valores correspondientes.</p>	<p>punto de equilibrio?</p>		
--	--	---	-----------------------------	--	--

<p>de caramelos y, por otra, todos los excesos de caramelos por persona. Se les pedirá que dejen expresados estos valores en la misma Ficha 3. Finalmente deben sumar los dos valores encontrados -la suma de todos los excesos con todas las deudas- para encontrar finalmente que esta suma será cero, cerrando con la pregunta ¿Qué significa que este valor sea cero?</p>	<p>números enteros y que puedan sumar de manera correcta todos los excesos y todas las deudas de caramelos de cada estudiante. También es necesario que cada estudiante deje registro de su proceso en la Ficha 3.</p> <p>Finalmente se espera que cada estudiante se dé cuenta de que el módulo del número de la suma de los excesos de caramelos con el módulo de las deudas de caramelos es igual, siendo la única diferencia entre estos números el signo, donde uno indica deuda y el otro exceso en comparación con la cantidad de dulces de cada bolsa. O también se espera</p>	<p>En cuanto a la recta numérica, puede suceder que el estudiantado ubique el número asignado en cualquier lugar o que analice que es la distancia entre el promedio y el número asignado. También puede suceder que ubiquen incorrectamente los números en la recta numérica, la razón radica en que no evidencian que un número es mayor o menor.</p> <p>En cuanto a la última pregunta planteada, el estudiantado puede pensar que</p>			
---	--	---	--	--	--

	que los y las estudiantes observen que el valor encontrado al sumar la deuda o exceso el número es el inverso aditivo del otro. Ante esto, podrán notar que la suma de ambos números - tanto el total de deudas como el total de exceso- es cero.	cuando el exceso es diferente que el defecto, existe un desequilibrio o que los excesos compensan los defectos. O puede suceder que no comprendan el significado del cero, ya que no lo relacionan con un punto de equilibrio.			
<b>CIERRE.</b> Se le comentará al estudiantado que el concepto trabajado durante la clase corresponde a la media aritmética, el cual es de uso estadístico. Con esto, y una vez que el estudiantado haya completado las fases anteriores, se dará inicio a la	Se espera que los estudiantes participen de la institucionalización, aportando con las ideas generadas con las actividades anteriores.  Se espera que el estudiantado identifique que: • La media aritmética representa un reparto equitativo.	Puede suceder que el estudiantado participe activamente de la exposición de las propiedades trabajadas, como también puede suceder que no participen.  Algunos estudiantes pueden ser capaces de identificar la	Si el estudiantado no participa en la exposición de las propiedades aprendidas, deberá comenzar a hacer preguntas como: ¿qué representa en esta situación la media aritmética? ¿Cómo se calcula la media aritmética y qué	¿Son capaces las y los estudiantes de reconocer sus propios aprendizajes adquiridos? ¿Son capaces de comunicarlos?  Se evaluará formativamente si las y los estudiantes fueron capaces de identificar las propiedades de	10 min

<p>institucionalización de los saberes adquiridos. Para ello se le pedirá a cada estudiante que responda a la pregunta ¿qué características de la media aritmética puedes identificar en esta clase? La idea es que cada estudiante se haga consiente de los conocimientos que ha adquirido y que además genere un escrito del detalle de ellos. Se les pedirá que cada uno aporte a la clase con alguna característica que haya identificado de la media aritmética hasta completar las que</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el cálculo de la media aritmética intervienen todos los valores, incluyendo el 0.</li> <li>• La expresión algebraica que permite el cálculo de la media aritmética es <math display="block">\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}</math> la cual corresponde a la suma de la cantidad total de datos dividido por la cantidad de datos recogidos.</li> <li>• La suma de deudas y excesos, de los datos en relación con la media aritmética, es cero</li> <li>• La media aritmética es un punto de equilibrio entre los excesos y las deudas.</li> </ul>	<p>totalidad de las propiedades, algunas propiedades o ninguna propiedad.</p> <p>Puede suceder que el estudiantado no reconozca la expresión algebraica para el cálculo de la media aritmética como se muestra en la columna anterior.</p>	<p>valores se deben utilizar para su cálculo? ¿Cuál es la expresión algebraica que permite el cálculo de la media aritmética? ¿Qué sucede con las deudas y los excesos? ¿Cómo son estos valores?</p> <p>Si es que el estudiantado no es capaz de identificar la expresión algebraica que se utiliza para su cálculo, se construirá ésta en conjunto entre docente y estudiantes y así llegar a la formalidad requerida.</p>	<p>la media aritmética a través de la actividad planteada</p> <p>La docente revisará que el estudiantado escriba sus propias ideas en el cuaderno.</p>	
--	---	--	---	--	--

<p>se hayan tratado en la clase. Se dejarán escritas en la pizarra con la finalidad de que luego quede registro en sus cuadernos de lo visto en la clase.</p>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Las deudas y los excesos son inversos aditivos.</li></ul>				
---	---	--	--	--	--

## ANÁLISIS A PRIORI

La **respuesta experta** considerada para este plan de clases se mostrará a continuación considerando los momentos de cada una de esta:

En el *inicio* de la clase, se espera que el estudiantado identifique que se necesita conocer la cantidad de dulces que llevó cada niño, la cantidad de niños en los que se quiere repartir los dulces y que las operaciones necesarias para calcular la cantidad de dulces que debe ir en cada bolsita son la suma y división.

En el *desarrollo* de la clase se espera que el estudiantado encuentre que la cantidad de dulces que debe ir en cada bolsita es 5, obteniendo este resultado a través de la suma de todas las cantidades de dulces que cada uno(a) llevó y dividiendo este resultado en 10, lo cual corresponde a la cantidad de niños a los que se le regalará una bolsa de dulces.

$$\frac{7+3+5+9+1+10+6+6+3+0}{10} = 5$$

Ante lo descrito con anterioridad, se espera que las y los estudiantes puedan describir que la expresión algebraica que permite el cálculo de la cantidad de dulces que debe ir en cada bolsita es

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

donde  $x_i$  corresponde a la cantidad de caramelo que cada estudiante llevó y  $n$  corresponde a la cantidad de personas en la cual se repartirá los dulces.

Además, cuando se les presenta a interrogante “¿fue equitativa la cantidad de dulces que cada uno de ustedes debió traer considerando la cantidad de caramelos que debe ir en cada bolsita?” se espera que el estudiantado reflexione e identifique que no fue equitativo o “justa” la asignación de la cantidad de dulces que cada uno debió llevar pues algunos debieron llevar más dulces y otros deberían haber llevado menos. Es aquí donde se les plantea la pregunta ¿en cuántos dulces se excedieron o cuántos les faltaron por traer?, y se les indica que deben expresar con signo negativo si es deuda y positivo si es exceso. Entonces, los estudiantes deberían responder, cada uno, lo que indica la Tabla 3.

Tabla 3. Relación entre el estudiante según el número de lista y las deudas o excesos de caramelos.

Estudiante N° de lista	Cantidad de Caramelos	Deudas o excesos	Estudiante N° de lista	Cantidad de Caramelos	Deudas o excesos
1	7	2	6	10	5
2	3	-2	7	6	1
3	5	0	8	6	1
4	9	4	9	3	-2
5	1	-4	10	0	-5

Posterior mente se les pide que representen los valores de la cantidad de caramelos que cada uno(a) llevó, la deuda y excesos y la cantidad de dulce que debe ir en cada bolsita en la recta numérica. Se espera que el estudiantado lo represente de la siguiente manera

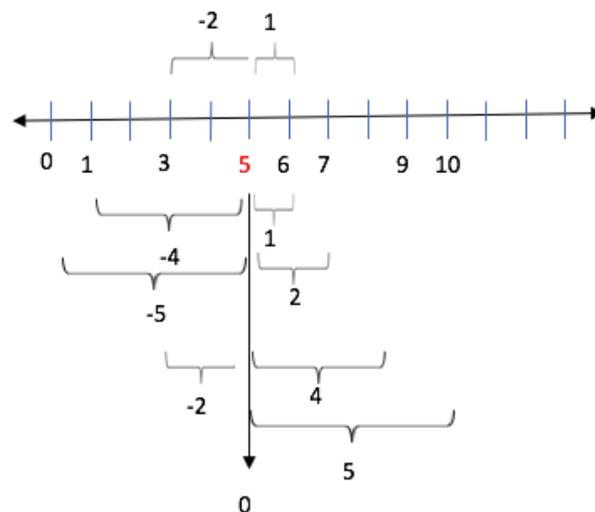


Figura 3. Recta numérica que expresa la cantidad de caramelos llevados por estudiante, deudas y excesos según la cantidad de caramelos por bolsa y cantidad de caramelos por bolsa.

Es con ayuda de este esquema que se espera que el estudiantado de cuenta de que la cantidad de deudas y excesos de caramelos son iguales en magnitud, sumando las deudas  $-13$  y los excesos  $13$ ; y que, si se suman las deudas con los excesos, esto dará cero.

Cuando se les plantee la pregunta ¿por qué crees que la suma de excesos y deudas da cero?, se quiere que el estudiantado sea capaz de identificar que:

- La media aritmética es un punto de equilibrio entre los excesos y las deudas.
- Las deudas y los excesos son inversos aditivos.
- Las deudas y los excesos son iguales en módulo.

En el *cierre* de la clase se quiere que el estudiantado logre identificar que:

- La media aritmética representa un reparto equitativo.
- En el cálculo de la media aritmética intervienen todos los valores, incluyendo el 0.
- La expresión algebraica que permite el cálculo de la media aritmética es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

la cual corresponde a la suma de la cantidad total de datos dividido por la cantidad de datos recogidos.

- La suma de deudas y excesos, de los datos en relación con la media aritmética, es cero
- La media aritmética es un punto de equilibrio entre los excesos y las deudas.
- Las deudas y los excesos son inversos aditivos.

A lo largo de la secuencia didáctica se pueden presentar diversas **dificultades y**, consecuentemente, se pueden cometer algunos **errores** en el desarrollo de la actividad. Estos se presentan en las siguientes Tabla 4.

Tabla 4. Posibles dificultades y errores que se pueden presentar en el plan de clase 1.

	<b>Dificultades</b>	<b>Errores</b>
<b>INICIO</b>	El estudiante no sepa responder a cómo calcular por no conocer la cantidad de caramelos que cada estudiante llevó	Utilizar valores al azar para calcular cuántos dulces deberían ir en cada bolsita en vez de pensar en la estrategia
	No comprender el significado de equitativo	En cada bolsita repartir la cantidad de dulces que cada uno de los estudiantes llevó
	No reconocer lo que permite realizar la operación división	Utilizar la operación resta para repartir cantidades en grupos
<b>DESARROLLO</b>	Encontrar una estrategia en conjunto con un(a) compañero(a) de equipo	Confundir una estrategia con otra y aplicarla mal a la situación
	Aparezca un cero entre los datos	No considerar el cero para la repartición equitativa al tener que dividir
	No saber lo que es el álgebra	Describir la expresión con números dados
	Utilizar negativos para la expresión de deudas	Operar de mala manera con los números negativos
	Ubicar números en la recta numérica	Ubicar números en la recta numérica donde no corresponde
Ubicar deudas y excesos en la recta numérica	Ubicarlos como números en la recta numérica y no como distancia Ubicar solo una vez la deuda o exceso, aunque aparezca más de una vez entre los datos	
<b>CIERRE</b>	Interpretar el significado del cero al sumar los excesos y deudas	Interpretarlo como ausencia de datos

Con el plan de clases mostrado se busca evidenciar que hay maneras distintas de enseñar la media aritmética desde una situación problemática cotidiana que genere sentido en las y los estudiantes. A partir de esto, se da cuenta que el objetivo de innovación de generar conocimiento a partir del uso de la media aritmética y con situaciones contextualizadas para las y los estudiantes, es posible realizarlo si es que se dedica el tiempo necesario a esta planificación y a la investigación de este objeto matemático. El reparto equitativo de dulces permite que las y los estudiantes puedan comprender cómo es que se forma la expresión algebraica que permite su cálculo, además, esta misma situación, permite rescatar otras propiedades de la media aritmética a partir de la contextualización cotidiana. Ahora, si bien la media aritmética responde en ciertas situaciones al comportamiento de un reparto equitativo, no siempre se cumple, por ejemplo, en situaciones como la que se menciona en los antecedentes, donde se calcula la media de la cantidad de pollos comidos entre dos personas y se reflexiona que la media diría que cada persona comió una cierta cantidad de pollos, pero eso no es cierto puesto que la persona pudo no haber comido pollo. Por lo mencionado es que se vuelve necesario presentar al estudiantado, adicionalmente, situaciones donde la media no se interprete desde el reparto equitativo y que, desde las mismas, se pueda extraer las demás propiedades que cumple la media aritmética.

## **ANÁLISIS A POSTERIORI**

Una vez implementado el plan de clase 1, se analizaron los resultados en relación con la socioepistemología, y además se analizaron en relación con el análisis a priori.

Los datos obtenidos se evidencian en un video de la implementación de la clase y en las fichas que los y las estudiantes debieron llenar. Estas últimas mostradas en el Anexo 5.

Para facilitar el análisis desde la socioepistemología, se crearon categorías e indicadores que serán mostrados a continuación.

### **ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN**

Al implementar la clase, se pudo dar cuenta que los y las estudiantes se motivaron con la actividad, la mayoría trabajó y solo a uno le costó tomar el ritmo de esta.

En el inicio de la clase, las y los estudiantes crearon sus propias estrategias para repartir la cantidad de dulces de manera equitativa. En cuanto a la parte del trabajo individual, no todos identificaron las operaciones matemáticas que estaban involucradas en la situación ni tampoco reconocen los datos que deben tener para poder realizar el reparto equitativo. Los y las estudiantes también identifican estrategias más concretas como repartir uno a uno los dulces en las bolsas y si es que sobran dejarlos aparte.

Una vez que las y los estudiantes se juntan en equipos, la mayoría es capaz de identificar las operaciones matemáticas que permitirían resolver la problemática sin la manipulación de los caramelos, y además identificaron los datos que ellos y ellas debían tener para lograr obtener la cantidad de caramelos que debería ir en cada bolsa.

Cuando se les pide a las y los estudiantes escribir o explicar cómo calcularon la cantidad de dulces por bolsas, ellos y ellas son capaces de hacerlo. Al momento de escribir esto de manera algebraica, se puede dar cuenta que el estudiantado no reconoce lo que es el álgebra pues durante sus años de escolaridad no han profundizado en ella. Cuando se les explica de manera general lo que esta es, el estudiantado escribe lo

que hizo con letras, pero no son precisamente lo que se plantea en la respuesta experta. Ellos y ellas definen sus propias variables y utilizan letras de su agrado.

Las y los estudiantes son capaces de identificar que no fue "justo" que algunos trajeran más que otro y que algunos debieron traer más y otros menos para que el reparto fuese equitativo. Ellos y ellas son capaces de identificar la cantidad que cada uno debió traer demás y cuantos debieron llevar de menos. Todos logran identificar el signo que debe ocupar cada número según sea deuda o exceso.

Al graficar en la pizarra, las y los estudiantes ubican bien los números en la recta, pero aquellos números que estaban repetidos no los consideran las veces que cada uno de estos datos aparece, solo lo consideran una vez. La docente les menciona que deben ser considerados pues todos los valores son importantes, y en ese momento los agregan.

Las y los estudiantes logran darse cuenta que las deudas y excesos tienen el mismo número, pero con signos diferentes, por lo que la suma de ellos será cero. Al preguntar por qué creen que esto sucede, ellos y ellas no llegan a considerar a la media como punto de equilibrio. De manera inesperada surge una respuesta de un estudiante, quien menciona que las deudas y los excesos son iguales porque no falta ningún dulce ni sobra ningún dulce de los que debe ser repartidos. Ante esta respuesta, si se analiza en este momento, en cierta medida es cierto puesto que, si es que hubiese un dulce demás o un dulce menos, si la media fuese la misma considerada en este caso (5 dulces por bolsa), deberían ser distintos los módulos de las deudas y los excesos.

El cierre de esta clase no logró ser implementado de manera óptima puesto que el tiempo no fue suficiente. Con esto se puede dar cuenta que la clase es extensa, por lo que se debería acortar o quitar algún contenido para poder realizar el cierre de buena manera.

## **ANÁLISIS DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA**

Los resultados obtenidos se pueden evidenciar en el diseño didáctico, el video de la clase y en las creaciones de las y los estudiantes. Se seleccionarán algunos de ellos y se describirán en esta sección, encasillándolo dentro de alguna categoría mostradas en el Anexo 6. Posteriormente se mostrará cómo se evidencia cada uno de los indicadores en los datos.

Para analizar cada una de las categorías presentadas, es necesario tener en cuenta que se analizará sólo esta secuencia didáctica relacionada con la enseñanza de la media aritmética y que no se pretende analizar si las docentes rediseñan el dME de todo concepto de enseñanza. Además, es necesario destacar que el foco de atención son las docentes y su postura ante la enseñanza de la media aritmética.

### Disipación de la adherencia

Se puede dar cuenta al leer el plan de clases presentado en la sección anterior que intenta construir el concepto de media aritmética a través del reparto equitativo, presentando una situación problemática referida a la convivencia estudiantil vivida en el mismo establecimiento. En él se evidencia que el concepto de media aritmética no fue presentado desde la expresión que permite su cálculo, sino que, como respuesta a una situación relacionada con el reparto equitativo, dejando entre ver que hubo un cuestionamiento de la actual forma de enseñanza de la media aritmética y a su propuesta es construir conocimiento a través de su uso.

En este mismo trabajo, se puede dar cuenta que las docentes son capaces de identificar los antecedentes relacionados con la enseñanza actual de la media aritmética, dejando registro de ello en el capítulo 1. En el mismo capítulo 1 de este trabajo, se puede evidenciar el cuestionamiento de la actual manera de enseñanza de la media aritmética, haciendo de manera explícita la pregunta de investigación.

También en el capítulo 1 se puede evidenciar la identificación de la problemática del actual modelo de enseñanza de la media aritmética, donde se cuestiona la constante inclinación de enseñar este concepto mediante la expresión algebraica que permite su cálculo.

## Disipación de la exclusión

La exclusión es posible evidenciarla en el mismo plan de clases creado por las docentes que realizaron el Estudio de Clases. Se da cuenta que las y los estudiantes son considerados en su propio proceso de aprendizaje, pues se intenta generar el conocimiento de la media aritmética a través del análisis de una situación y no imponer este concepto de manera abstracta o sin sentido, dando además un sentido a la expresión algebraica que permite cálculo.

Por otra parte, si se analiza la implementación de la secuencia didáctica, se puede notar que las y los estudiantes participan durante toda la actividad de manera activa, respondiendo a la docente, llenando fichas, buscando respuestas para la situación planteada, discutiendo entre pares, exponiendo ideas y expresando sus resultados en el pizarrón, siempre teniendo como guía a la docente que implementa el diseño didáctico.

Durante toda la actividad presentada en el plan de clase, se evidencia que es el estudiantado el principal actor de esta secuencia pues constantemente se le pide que reflexione y genere conocimiento.

Se puede ver a lo largo del video que la docente realiza constantemente preguntas de devolución con la finalidad de que el estudiantado sea capaz de reflexionar y crear sus propias respuestas. Se puede evidenciar que siempre se guía para encontrar la respuesta esperada. Analizando las reproducciones del estudiantado, mostradas en Anexo 5, se puede dar cuenta que, en primera instancia, surgen estrategias que luego no se reflejan en las exposiciones del estudiantado. Esto se puede deber a la confrontación de ideas entre pares y las devoluciones hechas por la docente.

Desde el minuto 17 del video se ve que la docente permite que cada pareja discuta como resolver la situación problemática. A partir de esto, y de las exposiciones, son las y los estudiantes quienes guían la construcción del conocimiento, mediante las estrategias que generan, las dificultades y los errores presentes.

A lo largo de todo el video, se puede evidenciar que la docente invita al estudiantado a participar de la reflexión. Se puede ver como el estudiantado participa de la actividad, excepto un estudiante. Desde el primer minuto, la docente hace partícipe a las y los estudiantes de la clase, preguntando por conocimientos previos. Desde el minuto 13 se

puede ver que la docente invita a reflexionar a las y los estudiantes que aún no tiene clara una estrategia para resolver la problemática haciendo preguntas de devolución.

### Disipación de la opacidad

Para identificar si se opaca o no el contexto de los y las estudiantes en su proceso de enseñanza, es necesario considerar el contexto que fue descrito en el capítulo 4. Allí se expresa que el estudiantado no tiene un contexto socio-cultural marcado, y se describe que lo único que tiene en común es el nivel escolar en el que se encuentran y que comparten el mismo establecimiento. Se describe también que el estudiantado no tiene capacidades distintas de aprendizaje ni pertenece a ninguna etnia chilena. Si bien pertenecen a la comuna de Buin, esto no es relevante para considerar el contexto en el que se desenvuelven puesto que no habitan en las zonas rurales ni en el campo.

Tan solo con la información que se expresa en el párrafo anterior, no es posible identificar si es que la secuencia didáctica considera el contexto del estudiantado puesto que no se conoce si es que comparten alguna otra cualidad que podría ser considerada en esta. Si se logra identificar que en el diseño didáctico que se considera el contexto estudiantil puesto que esto es lo que tienen en común.

Analizando el plan de clase, se puede dar cuenta que la problemática está contextualizada dentro del establecimiento educacional, presentando una situación que puede ser posible considerando las características del estudiantado.

Si se analiza el diseño didáctico creado, se puede dar cuenta que se considera el uso de la media aritmética en un determinado contexto para poder generar este conocimiento. Esto se hace a través del reparto equitativo de caramelos. Buscando solución a la situación planteada es que se llega a la construcción su definición como reparto equitativo, a la expresión algebraica que modela cómo se debe calcular y algunas propiedades que cumple la media.

Si se analiza el final del video, se puede notar que el estudiantado es capaz de construir el concepto de media aritmética a través del reparto equitativo.

Se muestra a continuación la relación entre indicadores de las categorías y ejemplos que se evidencian en el plan de clases e implementación de esta.

Indicador 1: en este mismo trabajo, se puede dar cuenta que las docentes son capaces de identificar los antecedentes relacionados con la enseñanza actual de la media aritmética, dejando registro de ello en el capítulo 1. En el mismo capítulo 1 de este trabajo, se puede evidenciar el cuestionamiento de la actual manera de enseñanza de la media aritmética, haciendo de manera explícita la pregunta de investigación.

Indicador 2: también se puede evidenciar la identificación de la problemática del actual modelo de enseñanza de la media aritmética, donde se cuestiona la constante inclinación de enseñar este concepto mediante la expresión algebraica que permite su cálculo.

Indicador 3: durante toda la actividad presentada en el plan de clase, se evidencia que es el estudiantado el principal actor de esta secuencia pues constantemente se le pide que reflexione y genere conocimiento.

Indicador 4: se puede ver a lo largo del video que la docente realiza constantemente preguntas de devolución con la finalidad de que el estudiantado sea capaz de reflexionar y crear sus propias respuestas. Se puede evidenciar que siempre se guía para encontrar la respuesta esperada. Analizando las reproducciones del estudiantado, mostradas en Anexo 5, se puede dar cuenta que en primera instancia surgen estrategias que luego no se reflejan en las exposiciones del estudiantado. Esto se puede deber a la confrontación de ideas entre pares y las devoluciones hechas por la docente.

Indicador 5: desde el minuto 17 del video se ve que la docente permite que cada pareja discuta como resolver la situación problemática. A partir de esto, y de las exposiciones, son las y los estudiantes quienes guían la construcción del conocimiento, mediante las estrategias que generan, las dificultades y los errores presentes.

Indicador 6: a lo largo de todo el video, se puede evidenciar que la docente invita al estudiantado a participar de la reflexión. Se puede ver como el estudiantado participa de la actividad, excepto un estudiante. Desde el primer minuto, la docente hace partícipe a las y los estudiantes de la clase, preguntando por conocimientos previos. Desde el minuto 13 se puede ver que la docente invita a reflexionar a las y los estudiantes que aún no tiene clara una estrategia para resolver la problemática haciendo preguntas de devolución.

Indicador 7: analizando el plan de clase, se puede dar cuenta que la problemática está contextualizada dentro del establecimiento educacional, presentando una situación que puede ser posible considerando las características del estudiantado descritas en el capítulo 4. Se puede notar que el contexto de las y los estudiantes fue considerado para la creación del diseño didáctico. Observar la situación presentada en el inicio de la actividad.

Indicador 8: si se analiza el diseño didáctico creado, se puede dar cuenta que se considera el uso de la media aritmética en un determinado contexto para poder generar este conocimiento. Esto se hace a través del reparto equitativo de caramelos. Buscando solución a la situación planteada es que se llega a la construcción su definición como reparto equitativo, a la expresión algebraica que modela cómo se debe calcular y algunas propiedades que cumple la media.

Indicador 9: Si se analiza el final del video, se puede notar que el estudiantado es capaz de construir el concepto de media aritmética a través del reparto equitativo.

Si se analizan los datos mostrados en categorías se puede decir que esta actividad disipa el fenómeno de exclusión y adherencia, considerando el proceso de construcción e implementación de esta. A modo general, las docentes son capaces de identificar la problemática que genera la enseñanza de la media aritmética a través de la expresión algebraica que permite su cálculo y se genera un diseño didáctico que proponga otra manera de enseñanza. También se puede dar cuenta que las y los estudiantes fueron capaces de construir conocimiento a partir de su constante reflexión, participación y colaboración entre pares.

En cuanto al fenómeno de opacidad, al respecto se puede decir que dada la realidad de las y los estudiantes y los antecedentes que se tienen respecto a su contexto, no son suficientes para identificar si es que este fue considerado en la secuencia didáctica. La socioepistemología presenta que se debe considerar el contexto en que el estudiante está inmerso y las características de este para generar conocimiento. En este caso, el contexto inmediato y común entre las y los estudiantes de esta investigación es el educativo, pero la socioepistemología intenta romper con lo hermético de este sistema escolar, intentando generar aprendizaje desde otro contexto distinto a este.

Es necesario tener en cuenta que el foco es analizar esta secuencia didáctica y que, tan solo con una clase, no se puede rediseñar por completo el dME, pues este corresponde a un proceso complejo, que rompe con el esquema tradicional de enseñanza impuesto en esta sociedad.

## CONCLUSIONES DEL PLAN DE CLASE

Se da cuenta en esta investigación que la problemática detectada es justificada a través de los antecedentes mostrados. También se puede dar cuenta que la media aritmética es un concepto estadístico que, a simple vista, no parece ser complejo, pero que realmente es una medida de tendencia central profunda y compleja de enseñar. Esta investigación deja en evidencia que, si las y los docentes investigan, trabajan de manera colaborativa y planifican en conocimiento de los antecedentes relacionados con la enseñanza del concepto y el concepto en sí, pueden emerger actividades que proporcionen una mejor recepción en las y los estudiantes.

Respecto al propósito de la estadística es donde se vuelve relevante conocer de la historia y epistemología de esta área del conocimiento o de algún concepto estadístico particular, pues ahí se le encuentra sentido a la enseñanza de éstos y se encuentran guías de orientación respecto a cómo abordar estos contenidos en el aula. Además, es de vital importancia conocer cuál es el propósito de la enseñanza de la estadística en el país donde se quiere implementar enseñanza, puesto que esto genera los cimientos para este proceso educativo.

Enfocándose en los antecedentes mostrados, se puede dar cuenta que la innovación respecto a la enseñanza de la media aritmética es necesaria; es necesario cuestionarse el cómo enseñar, dónde enseñar y qué enseñar. Es necesario que los y las estudiantes se hagan partícipes y protagonistas de su propia construcción del conocimiento, que el contexto sea considerado en la generación de éste y que cada docente se cuestione cómo enseñar a diario y no adherirse a la universalidad de la enseñanza de un determinado conocimiento.

Esta investigación tenía por objetivo analizar un diseño didáctico, generado en un Estudio de Clases para la enseñanza de la media aritmética, con la finalidad de identificar si este califica como rediseño del dME de la media aritmética. Este análisis se realizaría bajo la teoría de la socioepistemología. Se puede extraer del análisis realizado que este plan de clases que no se disipan por completo los fenómenos que el dME genera, pero de igual manera se podría considerar este plan como un rediseño en desarrollo del dME. Es necesario entender que es complejo romper por completo con la forma de enseñanza imperante en este país, en consideración de los estándares de evaluación con los que hay que cumplir y los requerimientos curriculares.

En cuanto al fenómeno de adherencia, se puede dar cuenta que las docentes fueron capaces de cuestionarse la actual forma de enseñanza de la media aritmética avalada por los antecedentes, lo cual conllevó a la creación de un diseño didáctico enfocado en la construcción del conocimiento de esta medida de tendencia central a través de su uso.

En cuanto al fenómeno de exclusión, las docentes fueron capaces de integrar a las y los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento. El estudiantado participó durante toda la actividad de manera activa, reflexionando ante la problemática y generando posibles soluciones a partir de su experiencia y conocimientos previos. El diseño didáctico muestra que el estudiantado es considerado para que genere su propio conocimiento y, además, en el video se puede observar que la docente que implementa la clase, intenta que todos y todas participen de las reflexiones y exposiciones.

En cuanto al fenómeno de opacidad, se pudo dar cuenta que las y los estudiantes fueron capaces de generar conocimiento a partir de la necesidad de ellos de dar respuesta a la interrogante que se les planteó. Además, fueron capaces de crear conocimiento a través del uso que se le da a la media aritmética. Este uso fue contextualizado en un problema relacionado con el reparto equitativo contextualizado en el ambiente escolar, donde se hacía el llamado a mejorar la convivencia en la escuela, pero no se identifica ningún otro contexto considerado en el plan de clase. Se cree que hubiese sido mucho más significativo para el estudiantado generar el conocimiento a través del uso de la media aritmética en un contexto más relevante para el estudiantado, contexto que no estuviese relacionado directamente con lo escolar. Ante esto, el fenómeno de opacidad no logró ser completamente disipado.

En resumidas cuentas, esta propuesta didáctica permitió generar el concepto a partir de la utilidad, es decir, desde lo cotidiano surge el concepto matemático como herramienta para solucionar una problemática de la vida diaria. Por otro lado, la universalización de la enseñanza de la matemática, no permite que los sujetos involucrados en el contexto educativo generen conocimiento de una manera distinta, pero en esta propuesta se busca incluir a los sujetos en la construcción del conocimiento matemático: no excluyendo producto de la imposición de símbolos y significados. Se intenta considerar otra manera de generar el conocimiento, que sea distinto a la imposición simbólica de cómo calcular la media aritmética.

Finalmente, el estudiantado logró generar el concepto de media aritmética mediante este diseño didáctico, pero se cree que es necesario

continuar con: 1) actividades que profundicen en el concepto de media aritmética puesto que este diseño sólo permitió identificar a la media aritmética como un reparto equitativo, pero, como fue nombrado en secciones anteriores, la media no siempre se usa de esta manera; y 2) se debe seguir generando actividades que rediseñen el dME para que la experiencia educativa en matemáticas sea un proceso formativo que proporcione enseñanza significativa y útil en lo cotidiano, que considere la subjetividad humana y que potencie habilidades relacionadas con la reflexión crítica.

Se puede notar que esta actividad no basta para poder generar un conocimiento acabado de la media aritmética o por lo menos que permita definir a la media aritmética como es en los distintos contextos en los que se pueda aplicar. Desde esto surge la necesidad de generar más clases que complementen a esta en la construcción del conocimiento de la media aritmética.

## SECUENCIA DIDÁCTICA

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos del diseño didáctico mostrado con anterioridad, extraído de un Estudio de Clases, se pensó en la necesidad de seguir profundizando en el concepto de media aritmética, para que las y los estudiantes puedan generar herramientas que permitan comparar dos poblaciones a través de esta medida de tendencia central o lograr identificar cuándo es útil y cuándo no lo es para tomar decisiones.

En consideración de lo expuesto en el párrafo anterior, se generó dos planes de clases más los cuales forman parte de una secuencia didáctica. Esta secuencia está compuesta por el plan de clases mostrado con anterioridad y estos nuevos dos planes, los cuales se posicionan después del plan ya mostrado. Estos nuevos dos planes fueron creados pensando en la socioepistemología y en disipar los fenómenos de exclusión, opacidad y adherencia producidos por el dME.

Particularmente se tienen tres objetivos, uno por cada clase, los cuales son: objetivo de la clase 1: reflexionar ante una situación relacionada con un reparto equitativo; objetivo de la clase 2: indagar respecto a las propiedades de la media aritmética; objetivo de la clase 3: analizar los datos a partir de la media aritmética de una encuesta creada y aplicada por las y los estudiantes.

La primera clase tiene como finalidad que las y los estudiantes puedan construir el concepto de media aritmética a través del reparto equitativo, y también que el estudiantado identifique algunas de las propiedades que cumple la media aritmética. Con esto, se quiere difuminar la imposición de conceptos carentes de sentido, y que no se defina la media aritmética a partir de la expresión algebraica que permite su cálculo. Además, se quiere que el estudiantado sea partícipe de su propio proceso de aprendizaje mediante la construcción del concepto a través de una situación cotidiana, cuyo problema puede ser resuelto mediante los conocimientos previos de las y los estudiantes.

Considerando el objetivo que tiene la primera clase, se cree que es necesario que el estudiantado profundice un poco más en las propiedades que cumple la media aritmética, para, en un futuro, poder tomar decisiones con el uso de esta medida de tendencia central. Ante esto, en la segunda clase, la finalidad es que las y los estudiantes identifiquen otras propiedades que cumple la media aritmética a través de otra situación donde no se pueda aplicar el reparto equitativo y,

desde la cual, se puedan extraer estas propiedades a través de preguntas de reflexión y análisis.

En la tercera clase, se quiere que el estudiantado aplique los conocimientos adquiridos respecto a la media aritmética en una situación de libre elección, en la cual deberán ser partícipes de la creación de una encuesta según su tema de interés, la aplicación de la misma y el análisis de los datos. En el análisis es donde se le pide al estudiantado que utilice la media aritmética, que evidencie la presencia de las propiedades de la media y cómo estas se aplican a cada contexto según la encuesta creada.

Se puede dar cuenta que las tres clases están relacionadas entre sí debido al contenido que en ellas se presentan. Además, están en secuencia cronológica respecto a la construcción del concepto, indagar respecto al concepto y aplicar el concepto en situaciones cotidianas y de interés para el estudiantado. Además, en esta secuencia se puede dar cuenta de la utilización del marco teórico de la Socioepistemología, donde, en primera instancia, se puede evidenciar el cuestionamiento de la universalización del saber y la forma tradicional en la que es enseñado. También se puede evidenciar la finalidad de disipar los fenómenos de exclusión del estudiantado de su propio proceso de aprendizaje y la opacidad de lo cotidiano en la construcción del conocimiento.

A continuación, se muestran los planes de clase 2 y 3.

## PLAN DE CLASE 2

**Objetivo de la Clase:** Indagar respecto a las propiedades de la media aritmética.

**Material de uso docente:** Pizarra, plumón, ficha con objetivo, ficha con las propiedades vistas y detalladas en la clase anterior (Ver plan de clase 1), afiche con propiedades que se deberán ver en esta clase.

**Material de uso del estudiantado:** Texto con planteamiento del problema, guía con situaciones, calculadora, computadores con Office y data.

**Organización de la clase:** Primeramente, se trabajará de manera individual y luego en parejas, al igual que en la clase anterior.

**Descripción general:** En esta clase se espera conocer otras propiedades de la media aritmética como que ésta está siempre entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos, que la media puede tomar valores con una naturaleza distintas a la de los valores de la variable, que no necesariamente la media aritmética debe ser un valor de los datos, que también es sensible a los valores atípicos y que ésta solo es un representante de los datos de los que ha sido calculada. Se busca que el estudiantado, a través de su propia reflexión, logre identificar las propiedades de la media aritmética mediante la comparación de una situación presentada con datos obtenidos por distintos estudiantes.

Actividad	Lo que se espera del estudiantado	Posibles respuestas del estudiantado	Devolución y acción del docente	Evaluación	Tiempo
<p><b>Inicio.</b> Se pedirá al estudiantado que recuerde la actividad realizada el día anterior. Junto con esto, se pedirá que mencionen las propiedades de la media aritmética encontradas hasta el momento y se pegarán en el pizarrón. Posteriormente se planteará una nueva situación, invitando a las y los estudiantes a seguir descubriendo las propiedades de la media aritmética. La situación</p>	<p>Se espera que cada estudiante se motive ante la nueva situación planteada. Se espera que muestren una actitud positiva y participativa en la clase. Se espera que cada estudiante sea capaz de comprobar que la media aritmética de las situaciones planteadas es 6,1 aproximadamente, y con esto se espera que apliquen lo aprendido en la clase anterior respecto a la</p>	<p>Los y las estudiantes pueden dar las propiedades que cumple la media aritmética desde la lectura de sus cuadernos en la clase anterior. Puede suceder que en la parte de comprobar que la media aritmética de las calificaciones es 6,1, el estudiantado no sea capaz de interpretar la expresión matemática que permite el cálculo de la media aritmética ni que tampoco recuerde que corresponde a "un reparto equitativo"</p>	<p>La docente deberá registrar en la pizarra el objetivo de la clase. Prontamente deberá preguntarles a las y los estudiantes qué recuerdan de la clase anterior. Si las y los estudiantes no son capaces de recordar las propiedades, la docente deberá guiar con preguntas como: en la situación de los dulces ¿qué operaciones se pueden</p>	<p>El estudiantado ¿participa de la clase? ¿Se motiva con la actividad? ¿Recuerdan lo que vieron en la clase anterior? ¿Son capaces de revisar sus apuntes y volver a reflexionar ante la actividad anterior? ¿El estudiantado es capaz de calcular la media</p>	<p>10 min</p>

<p>corresponde a "las calificaciones" mostradas en el Anexo 2. Junto con esto, se les pedirá que comprueben que la media aritmética es 6,1 como lo menciona la problemática, para poder utilizar lo aprendido la clase anterior.</p>	<p>expresión algebraica que permite el cálculo de la media aritmética</p>	<p>por lo que no será capaz de calcularla. Puede suceder también que el estudiantado sea capaz de calcularlo, ya sea porque puede interpretar la expresión algebraica o porque recuerda e identifica las operaciones involucradas en un reparto equitativo.</p>	<p>realizar para calcular cuántos dulces deben ir en cada bolsa? ¿Qué características tenían los excesos en comparación con la deuda de dulces que se llevaron y la media calculada? ¿Qué representaría la media aritmética en esta situación? ¿El cero se debe considerar en el cálculo de la media aritmética si es que éste es un dato?</p>	<p>aritmetica de la nueva situación planteada? ¿Es capaz de aplicar los conocimientos a esta nueva situación? Se evaluará de manera formativa si los y las estudiantes son capaces de aplicar lo aprendido en la clase anterior a una nueva situación.</p>	
<p><b>Desarrollo.</b> Posteriormente se le planteará al estudiantado las situaciones mostradas en el</p>	<p>Respecto a las situaciones que se plantean al estudiantado, se espera que ellos y ellas sean capaces</p>	<p>En cuanto a las respuestas que las y los estudiantes pueden dar respecto a las preguntas planteadas puede</p>	<p>La docente debe entregar las situaciones y preguntas mostradas en el Anexo 3 a cada</p>	<p>¿Trabajan los y las estudiantes en las situaciones planteadas?</p>	<p>Lectura e instrucciones 5 min Trabajo individual 10</p>

<p>Anexo 3., con la finalidad que encuentren las propiedades de la media aritmética. En primera instancia, se busca que cada estudiante reflexione de manera individual y posteriormente se reunirán en parejas para discutir las situaciones planteadas. Una vez que la discusión esté hecha, se le pedirá a cada estudiante que realice una ppt. para plasmar sus resultados, las cuales deberán ser expuestas a continuación. Finalmente, cada pareja deberá exponer ante el curso sus</p>	<p>de reflexionar respecto a las preguntas que se les presenta. En cuanto a la pregunta 1 y 2, se espera que sean capaces de identificar que el estudiante 1 tiene mejores calificaciones que el estudiante 2 excepto por la calificación 1. Con esto, se espera que reflexionen y elaboren una justificación consistente que afirme la elección de quién debería ganar las entradas. Con esto se quiere que el estudiantado se dé cuenta de que los valores atípicos influyen en la media. En cuanto a la</p>	<p>sucedan que, para las preguntas con la siguiente numeración, sus respuestas sean:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Las características son que ambos son números decimales, las calificaciones del estudiante 1 son más altas excepto por la calificación mínima 1,0. El estudiante 2 tiene notas más parecidas. Se espera que para este análisis realicen diagrama de puntos, listas o simplemente mirándolas en el problema.</li> <li>2. En esta parte se espera que el estudiantado se dé cuenta que ambos tienen el mismo promedio</li> </ol>	<p>estudiante. Se leerá en conjunto y, posteriormente se le pedirá que reflexionen ante ella de manera individual. Mientras las y los estudiantes reflexionan de manera individual, la docente deberá pasearse por la sala con la finalidad de identificar las ideas que van saliendo de la reflexión. Las parejas no serán creadas de manera azarosa, será creada juntando estudiantes que participan de la clase y los que no, de esta</p>	<p>¿Son capaces de reflexionar en dirección a las propiedades de la media aritmética?  ¿Trabajan de manera óptima en parejas?  Se evaluará de manera formativa el trabajo en equipo y la reflexión individual. Además, se evaluará el tipo de reflexiones que se realizan en torno a la media aritmética y</p>	<p>min  Trabajo grupal 35 min  Exposición 15 min</p>
---	--	---	--	--	--

<p>respuestas y dejar escritas en el pizarrón las respuestas a cada pregunta a modo general.</p>	<p>pregunta 3, se espera que las y los estudiantes reflexionen en la dirección de que la media aritmética puede tomar un valor que no sea uno de los datos considerados. En cuanto a la pregunta 4, se espera que el o la estudiante se dé cuenta de que la media aritmética siempre será un valor que debe estar entre el máximo y el mínimo de los valores de los datos. Respecto a la pregunta 5, se espera que el estudiantado se dé cuenta de que en la situación de los caramelos no tiene sentido que dé un</p>	<p>y el mismo comportamiento por lo que deberán analizar más los datos para decidir. Puede suceder que algunos justifiquen que el estudiante 1 merece las entradas pues tiene mejores calificaciones excepto por el 1 que pudo deberse a cualquier situación extraordinaria. Puede suceder que otros estudiantes responda que quien merece las entradas sea el estudiante 2 porque tiene notas más homogéneas.</p> <p>3. Algunos</p>	<p>manera se potenciarán en la reflexión y trabajo grupal. La docente debe monitorear constantemente la reflexión grupal y haciendo devoluciones que permitan una mejor reflexión. Estas devoluciones serán del tipo: al observar ambos conjuntos de números ¿Cómo son entre ellos? ¿Qué diferencias y similitudes tienen? Si se observan solo un grupo de calificaciones ¿cómo son los datos? ¿Son parecidos entre sí? Debemos</p>	<p>las situaciones presentadas.</p>	
--	--	--	---	-------------------------------------	--

	<p>número decimal puesto que no se puede regalar medio caramelo, por lo que en ese caso hubiese sido necesario aproximar por defecto para poder determinar cuántos caramelos le debería haber correspondido a cada uno. Respecto a la pregunta 6 se espera que el estudiantado se dé cuenta que la media aritmética solamente es un valor representativo de todos los datos sobre los cuales se calcula. Se espera que las reflexiones individuales no sean tan profundas pero que en la</p>	<p>estudiantes se darán cuenta que, en la situación de las calificaciones, la media es un valor dentro de los datos, pero en la situación de los caramelos la media no es un valor de los datos por lo que se cree que el estudiantado podrá darse cuenta que algunas veces la media es un valor de los datos y otras veces no lo es. Puede suceder que algún estudiante no comprenda la pregunta ni el enfoque de ésta.</p> <p>4. Algunos estudiantes se darán cuenta que la media no pue</p>	<p>escoger solo un estudiante ¿cómo lo escogemos si es que ambos tienen los mismos promedios e igual comportamiento? ¿Qué características tiene las calificaciones del estudiante escogido que justifican la elección? Supongamos que la media aritmética es un valor mayor que los datos de los que calcula ¿qué sucede con los excesos y defectos? Puedes utilizar una recta numérica para orientarte.</p>		
--	--	--	--	--	--

	<p>interacción con el compañero(a) se vuelvan más robustas. En cuanto a la creación de la ppt., se espera que el estudiantado sea capaz de crear este instrumento y dejen evidencia de sus reflexiones.</p>	<p>ser un valor mayor que los datos considerados y consecuentement e que tampoco será un valor menor de los datos que se presentan. En cuanto a la justificación, algunos estudiantes podrán llegar a considerar la propiedad de que los excesos y defectos deben ser iguales y eso no se puede lograr si la media es un valor mayor o menor a los de los datos, pero algunos otros estudiantes pueden no llegar a justificar su respuesta. Puede</p>	<p>¿Tiene sentido que se reparta 1,5 dulces? ¿Por qué? ¿Qué se puede hacer si es que el promedio es 1,5 en una situación de reparto equitativo? ¿Cómo repartirías los dulces? ¿En este caso se justifica la media aritmética desde el reparto equitativo?</p>		
--	---	---	---	--	--

		<p>ser que solo justifiquen a través de un ejemplo.</p> <p>5. Las y los estudiantes podrán darse cuenta que los valores decimales tienen sentido en algunos contextos, pero en otros contextos no, por lo que se debe aproximar por exceso o defecto según la situación que corresponda. Puede ser que otros estudiantes no piensen que los valores se pueden aproximar, sino que simplemente cuando da un número decimal, éste no es válido.</p> <p>6. Los y las</p>			
--	--	---	--	--	--

		<p>estudiantes podrán darse cuenta que en este caso la media aritmética no se aplica como un reparto equitativo puesto que las calificaciones no se quieren repartir. Lo difícil es que a partir de esta pregunta el estudiantado de manera autónoma se dé cuenta que la media aritmética en este caso sólo es un representante del conjunto de datos.</p> <p>Los y las estudiantes se motivarán al plantearles el uso de la computadora pues les gusta ir a la sala de computación. En cuanto a la</p>			
--	--	---	--	--	--

		exposición de las ideas a través del uso de una ppt., se cree que será óptima pues constantemente las realizan. Lo que puede ser preocupante es que realmente trabajen en la realización de la ppt. en vez de hacer otra actividad con la computadora.			
<b>Cierre.</b> En esta fase se dará inicio a la institucionalización. A partir de las exposiciones realizadas en el desarrollo y las reflexiones anotadas en el pizarrón, la docente deberá explicar de manera más formal las propiedades encontradas y	Se espera que las y los estudiantes sean capaces de relacionar las reflexiones adquiridas a partir de las situaciones con las propiedades que se institucionalizarán en esta parte de la clase. Se espera que las y los estudiantes logren reconocer que: <ul style="list-style-type: none"> <li>• La media está</li> </ul>	Se cree que los y las estudiantes serán capaces de relacionar las situaciones presentadas y las reflexiones de éstas con las propiedades descritas en un lenguaje más riguroso. Se cree que los y las estudiantes serán capaces de escribir con sus propias palabras estas	En el final del cierre, cuando el estudiantado debe aplicar sus conocimientos adquiridos, se harán preguntas de devolución como: ¿Qué entiendes tú por las propiedades antes nombradas? ¿En qué casos crees que es útil calcular la media	Se evaluará que el estudiantado preste atención en el momento de presentar las propiedades de la media aritmética con un lenguaje más técnico. Además, se evaluará de manera formativa si	15 min

<p>mencionar que estas son propiedades de la media aritmética. Se pegará en el pizarrón un afiche donde estén ya escritas las propiedades encontradas en esta clase y cada estudiante deberá escribirlas en su cuaderno. Finalmente se pedirá que cada estudiante explique con sus propias palabras las propiedades que cumple la media, que creen un ejemplo donde se puedan observar todas las propiedades vistas respecto a la media y que las expliquen en el contexto del</p>	<p>localizada entre los valores extremos de los datos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La media no necesariamente es igual a un valor que se haya sumado</li> <li>• La media puede no ser un valor de la misma naturaleza que los datos de los cuales se ha calculado</li> <li>• La media es un valor representativo de los valores que se están promediando</li> <li>• La media es sensible a los valores atípicos</li> </ul> <p>Se espera que el estudiantado interiorice los conocimientos al explicar con sus</p>	<p>propiedades. Lo más complejo será que el estudiantado piense en ejemplos propios y que apliquen en él todas las propiedades vistas desde la clase anterior (clase 1 y clase 2)</p>	<p>aritmética? ¿Cómo se aplican estas propiedades en el ejemplo que se te ocurre?</p>	<p>es que las y los estudiantes son capaces de aplicar las propiedades de la media aritmética en otras situaciones. También se evaluará el nivel de comprensión de las propiedades según cómo describen cada una de ellas con sus propias palabras.</p> <p>¿Se logró el objetivo de la clase?</p> <p>¿Hubo aprendizaje?</p>	
--	---	---	---	---	--

ejemplo.	<p>propias palabras las propiedades que cumple la media aritmética.</p> <p>Además, se espera que se hagan conscientes de sus propios conocimientos a aplicar estas propiedades en un ejemplo,</p>			<p>¿El estudiantado es capaz de aplicar sus aprendizajes?</p> <p>¿Las y los estudiantes son capaces de dar ejemplos?</p>	
----------	---	--	--	--	--

## PLAN DE CLASE 3

**Objetivo de la Clase:** Analizar los datos a partir de la media aritmética de una encuesta creada y aplicada por las y los estudiantes.

**Material de uso docente:** Plumones, pizarra y afiche con propiedades de la media aritmética.

**Material de uso del estudiantado:** Computador con Excel, cuaderno y lápices.

**Organización de la clase:** Las y los estudiantes trabajarán en equipos de dos estudiantes para crear encuesta y aplicarla. Posteriormente deberán trabajar de manera individual en la creación de sus reflexiones y análisis de los datos a partir de la media aritmética.

**Descripción General:** En esta actividad se espera que el estudiantado sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos en las clases anteriores relacionados con la media aritmética. Para esto el estudiantado deberá crear y aplicar una encuesta que arroje datos de naturaleza cuantitativa y que los analicen con el uso de la media aritmética. Una vez que calculen la media aritmética de los datos se le pedirá que reflexionen ante la utilidad de este estadístico en el contexto de su encuesta. Además, se les pedirá que evidencien el uso de las propiedades estudiadas respecto a la media aritmética en este análisis. Finalmente, se les pedirá que escriban sus reflexiones en una presentación y que las expongan a grandes rasgos.

Actividad	Lo que se espera del estudiantado	Posibles respuestas del estudiantado	Devolución y acción del docente	Evaluación	Tiempo
<p><b>Inicio.</b> Se les pedirá a las y los estudiantes que recuerden las propiedades de la media aritmética vistas en las clases anteriores, con la finalidad de refrescar los conceptos para su posterior aplicación. Luego, se les dará las instrucciones de trabajo para esta clase, la cual tiene como finalidad que las y los estudiantes apliquen los conocimientos relacionados con la media aritmética. Estas instrucciones están expuestas en el Anexo 4.</p>	<p>Se espera que el estudiantado participe del recuento de las propiedades de la media aritmética estudiadas anteriormente. Una vez hecho el recuento, se espera que las y los estudiantes escuchen y comprendan las instrucciones para el trabajo de la clase.</p>	<p>Puede suceder que las y los estudiantes no recuerden todas las propiedades vistas en las clases anteriores. Escucharán de manera atenta las instrucciones, pero se pondrán a armar grupos antes de que éstas terminen.</p>	<p>La docente tendrá que traer a colación situaciones donde se puedan divisar las propiedades faltantes, o incluso recordar las actividades de las cuales se extrajeron las propiedades para que las y los estudiantes puedan volver a reflexionar ante ellas y recordarlas. La docente tendrá que llamar al orden si es que las y los estudiantes comienzan a organizarse antes de terminas las instrucciones. La docente pegará las propiedades en el pizarrón una vez que ya hayan sido recordadas.</p>	<p>Se evaluará si las propiedades de la media aritmética son recordadas por el estudiantado o si son capaces de recordarlas al plantearle nuevamente situaciones desde donde se puedan extraer. También se verá si las y los estudiantes se entusiasman con la idea de generar una encuesta relacionadas con un tema de su interés.</p>	10 min
<p><b>Desarrollo.</b> Se pedirá a las y los estudiantes que</p>	<p>Se espera que las y los estudiantes se</p>	<p>Se cree que el estudiantado creará una</p>	<p>Si es que el estudiantado no recuerda qué es una investigación cuantitativa,</p>	<p>Se evaluará si las y los estudiantes son</p>	50 min

<p>trabajen en equipos de tres estudiantes máximos para que lleven a cabo la actividad, cuyas instrucciones se encuentran en el anexo 4.</p>	<p>organicen en equipos y comiencen a trabajar en la confección de la encuesta y en la recogida de datos, de manera ordenada y respetuosa con sus pares del colegio. Se espera que el estudiantado sea capaz de calcular la media aritmética de los datos recogidos y que además sepa interpretarla para este contexto, y también que sean capaces de identificar y comprobar las propiedades de</p>	<p>encuesta según su interés. Puede suceder que las y los estudiantes no recuerden que son las investigaciones de carácter cuantitativo. Las y los estudiantes recogerán los datos de manera ordenada y se cree que no desperdiciarán su tiempo haciendo cosas que no correspondan, como pasearse por el patio sin sentido o haciendo desorden. Se cree que las y los</p>	<p>la docente responderá esta duda de manera generalizada sólo si es que esto surge como un obstáculo para crear la encuesta. En caso de que las y los estudiantes no tengan problema con esto, entonces no se realizará aclaración alguna. Como preparación previa, la docente hablará con los y las docentes de los otros ramos para preguntar si es que les incomoda que las y los estudiantes tomen datos en sus cursos o a ellos mismos. Esto se gestionará para no ocasionar inconvenientes. Se estará en constante monitoreo en la toma de datos de las y los estudiantes para que no se desordenen ni hagan actividades que no corresponden. Una vez recogidos los datos, se irá a la sala de computación. El</p>	<p>capaces de crear una encuesta cuantitativa y si ésta es llevada a cabo de manera ordenada y respetuosa. Además, se evaluará si las y los estudiantes son capaces de calcular la media aritmética para un conjunto de datos. También se evaluará si es que las y los estudiantes son capaces de evidenciar las propiedades de la media aritmética en el contexto en el que estén trabajando según su</p>
--	--	---	---	--

	<p>la media aritmética para el contexto en el que estén trabajando en su encuesta. Se espera que el estudiantado sea capaz de sintetizar la información extraída en un escrito o presentación en ppt. De este modo, lo que se espera es que, las y los estudiantes, sean capaces de aplicar los conocimientos previos a nuevas situaciones.</p>	<p>estudiantes serán capaces de calcular la media aritmética pero que evidenciar las propiedades de la media aritmética y evaluar su veracidad, será algo que les costará. Las y los estudiantes han trabajado antes en los computadores y se cree que no habrá problema en escribir sus reflexiones, pero lo que sí les costará será llegar a ellas.</p>	<p>estudiantado ya ha trabajado anteriormente en Excel, con gráficos y tablas. En caso de que necesiten ayuda con el programa, la docente explicará de manera particular a cada estudiante que lo necesite. En cuanto a las preguntas de análisis, según el caso de cada estudiante, se debe pensar en las conclusiones que pueden extraer de la media aritmética. En caso de que algún/alguna estudiante tenga dificultades, se le orientará con preguntas como: ¿para qué sirve la media aritmética? ¿En el contexto de tu encuesta qué representaría la media aritmética? ¿Es significativo que en este contexto la media aritmética sea un número decimal? En el caso que haya duda</p>	<p>encuesta, a través de preguntas como: ¿reconocen las propiedades de la media aritmética? ¿Son capaces de responder a preguntas como las planteadas en las devoluciones de la docente? ¿Son capaces de elaborar sus propias conclusiones respecto a la media aritmética y el contexto y naturaleza de su encuesta?</p>	
--	---	---	---	--	--

			<p>con las propiedades de la media aritmética, se le hará preguntas a las y los estudiantes que guíen la reflexión según el contexto de cada encuesta: Si analizas los excesos y deudas de los datos con respecto a la media aritmética ¿qué sucede con eso? ¿En este caso se puede ver la media aritmética como reparto equitativo? ¿Se utilizan todos los valores para el cálculo de la media aritmética? ¿La media aritmética está entre el máximo y el mínimo? ¿Es la media aritmética un valor que aparezca entre los datos o es un valor distinto a los datos? ¿Hay valores atípicos? ¿Qué pasaría con la media aritmética si es que estos valores no estuviesen (o si estuviesen)?</p> <p>En cuanto a la confección de la presentación, los y</p>		
--	--	--	--	--	--

			las estudiantes podrán trabajar individualmente puesto que solo deben plasmar en ella sus resultados y conclusiones. La docente sólo deberá resguardar el orden y monitorear el trabajo de las y los estudiantes.		
<b>Cierre.</b> Se presentará una a una las encuestas creadas, los resultados extraídos relacionados con la media aritmética, donde se deberá evidenciar la presencia de las propiedades de la media aritmética estudiadas en las clases anteriores.	Se espera que el estudiantado sea capaz de expresar los resultados encontrados y explicar de manera correcta cómo es que se aplican las propiedades de la media aritmética a cada una de las situaciones particulares de las y los estudiantes.	Se cree que las y los estudiantes responderán de buena manera ante las exposiciones debido a que ellos y ellas están acostumbrados a exponer. El trabajo más duro se encuentra en la parte del desarrollo de la clase por lo que en esta parte no se	La docente deberá tomar apunte de la exposición de cada uno de las y los estudiantes, para posteriormente hacer una retroalimentación. La idea de que expongan sus conclusiones ante todos sus compañeros(as) es para que todos(as) se puedan dar cuenta que las propiedades de la media aritmética se aplican en todas las situaciones y que su interpretación (o uso) puede ser variada según el contexto en el que se calcule. Esto último es lo que la docente deberá dejar en claro y hacer explícito una vez	Se evaluará la claridad de la expresión de las conclusiones encontradas para las preguntas planteadas en el desarrollo de la clase. Se evaluará si el o la estudiante fue capaz de reconocer las propiedades de la media aritmética en el contexto de su encuesta creada.	30 min

		creo que haya demasiados problemas.	terminadas exposiciones.	las	Se evaluará el comportamiento del estudiantado durante la presentación de los (las) demás estudiantes.	
--	--	-------------------------------------	--------------------------	-----	--	--

## REFLEXIONES

Ante el plan de clases mostrado, se puede dar cuenta que la media aritmética es un objeto estadístico que no puede ser abordado en una sola clase, si es que se tiene el objetivo que el estudiantado comprenda de mejor manera este concepto. Si bien es una medida de tendencia central fácil de calcular, su definición y propiedades son más complejas de comprender, pensando además que en que es un concepto que aparece a lo largo del currículum, involucrándose constantemente con otros conceptos de mayor complejidad. Se vuelve necesario, ante esto último, conocer con un poco más de profundidad el uso que puede tener la media aritmética desde el primer momento que aparece en el currículum, para que, futuramente cuando se relacione con otros conceptos, se pueda comprender, de mejor manera, la relación que tiene con ellos.

Considerando que la media aritmética es un concepto que se presenta en la vida cotidiana, y que surge desde lo cotidiano, se cree necesario que el estudiantado construya este concepto a partir de una situación relacionada con el reparto equitativo, siendo esto lo que se presenta en el primer plan de clases. Pero a partir de ello, se puede dar cuenta que definir la media aritmética desde el reparto equitativo también puede llegar a ser un obstáculo, ya que la media es más que eso y no siempre funciona de ese modo. Frente a esto, vuelve necesario reflexionar ante otra situación en la cual el reparto equitativo no funcione, surgiendo así el plan de clase 2 y 3.

En el plan de clases 2 se puede reconocer que la mayor dificultad es reconocer las propiedades de la media aritmética a través de las respuestas de las situaciones presentadas. Es en este dónde el rol del o la docente se vuelve importante, pues se debe estar monitoreando constantemente las respuestas del estudiantado y hacer las devoluciones pertinentes para guiar la reflexión estudiantil.

A través de esta secuencia didáctica se espera difuminar los fenómenos que provoca la manera tradicional de la enseñanza de la media aritmética, denominado por la socioepistemología como dME. La adherencia es un fenómeno poco observable en la creación de esta secuencia didáctica ya que solamente se toma en consideración la percepción de la enseñanza de

la media aritmética de la docente que crea la secuencia. Teniendo en cuenta solamente a esta docente, se da cuenta que este fenómeno se difuminó ya que se cuestiona la manera tradicional de la enseñanza de la media aritmética y el percibir el objeto matemático desde su universalización, y se intenta romper con este esquema. En cuanto al fenómeno de exclusión, se puede notar que con esta secuencia didáctica es posible considerar al estudiante como el principal generador del conocimiento, además se consideran su contexto, conocimientos previos e ideas previas. En cuanto al fenómeno de opacidad, se puede notar que es posible considerar el contexto y realidad estudiantil para generar conocimiento.

Para evidenciar si es que estos fenómenos realmente son difuminados, se debe implementar la secuencia didáctica, recoger evidencias de éstas y analizarlas.

## CONCLUSIONES

En relación al diseño del primer plan de clase y el segundo, se puede dar cuenta de lo extenso que estos son, provocando que en la clase no haya espacio para que emerjan demasiadas reflexiones diversas. Se debería acotar los conceptos y propiedades de la media aritmética que se abordarán en ellas. Es necesario recalcar la importancia que tiene el concepto de media aritmética en la estadística, puesto que es uno de los que fundamenta muchos otros conceptos de esta ciencia. Ante esto, y considerando lo observado respecto a lo denso de los dos primeros planes de clases, se sugiere abordar la media aritmética en más de tres clases, para poder construir este concepto de manera más profunda, ahondando en su uso en diversos contextos y en las propiedades que este cumple, para justificar la elección de esta medida de tendencia central al comparar dos situaciones.

Por otra parte, esta secuencia didáctica muestra que es posible construir el concepto de media aritmética desde otro punto de vista, no enseñándolo desde la expresión algebraica que permite su cálculo, produciendo imposición de símbolos y "definiciones" sin sentido, sino que se muestra una manera de construir este concepto como una herramienta para solucionar una problemática cotidiana, dando sentido a este concepto en un determinado contexto. Además, considera a las y los estudiantes constantemente, pues son ellos y ellas quienes generan este conocimiento a través de constantes reflexiones.

En relación con lo antes mencionado, si bien se puede considerar esta secuencia como innovadora, pudiese serlo mucho más si es que se encuentra otra manera de ver la media aritmética, desde otra epistemología, no desde su uso común como un número obtenido al sumar todos los datos y dividirlos por la cantidad de datos sumados, sino desde otra forma de construir y utilizar este conocimiento, considerando el nivel escolar en el que debe ser enseñado. También se sugiere buscar la manera de construir este conocimiento de manera transversal con los otros subsectores de aprendizaje, dejando entre ver que la estadística es útil en cualquier campo académico y personal.

Con esta secuencia didáctica se busca contribuir a la enseñanza de la estadística, en particular de la media aritmética, puesto que, como se mostró en los antecedentes, es la ciencia que menos se profundiza en la enseñanza escolar y que más difusión necesita en estos momentos para que las y los docentes puedan enriquecer su conocimiento y la forma de enseñanza de esta disciplina. Es necesario que las y los docentes se den

cuenta de que es necesario el cambio en la enseñanza de la estadística ya que esta, como ciencia, ha evolucionado enormemente y la necesidad de su aprendizaje es necesario para el crecimiento personal, social, profesional y de país.

## REFERENCIAS

- Anderson, D., Sweeney, D. y Williams, T. (2008). *Estadística para administración y economía*. México: Cengage Learning.
- Bustos, A., Padilla, M., Valdés, A., y Vega, C. (2015). *Historia de la Estadística*. Recuperado de <https://www.slideshare.net/mariavictoriapadilla/historia-de-la-estadistica-en-la-antiguedad>
- [Biografía Florence Nightingale]. s.f. Recuperado de <http://www.estadisticaparatodos.es/bibliografias/nightingale.html>
- Batanero, C. (2000) ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, (15) 2-13. Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/isboa.pdf>
- Coba, A., Del Pino, G. y Wistuba, L., (2010) Buenas prácticas en la enseñanza de estadística. *En C. Araújo, Interpretando problemas de la vida cotidiana: Análisis exploratorio*. Santiago, Santiago: Departamento de Estadística, Facultad de Matemática PUC.
- Compostela, B. s.f. Estadística aplicada a las ciencias sociales. Recuperado de [http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/profesora-do/benitacompostela/apuntes\\_estadistica1/Estadistica\\_Tema%202\\_07.pdf](http://pendientedemigracion.ucm.es/info/socivmyt/paginas/profesora-do/benitacompostela/apuntes_estadistica1/Estadistica_Tema%202_07.pdf)

[Compendio de la Historia de la China: Su gobierno, leyes, ciencias, artes, industria, comercio, navegación, usos y costumbres]. s.f. Recuperado de <http://www.e-torredebabel.com/historia/compendio-historia-china/estadistica-china-c-h-ch-3.htm>

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2006). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del Discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa*, (27) 1475-1464. Recuperado de [https://www.researchgate.net/profile/Francisco\\_Cordero/publication/271206710\\_Opacidad\\_y\\_adherencia\\_tres\\_fenomenos\\_del\\_discurso\\_matematico\\_escolar/links/54c18f240cf25b4b80727c05/Opacidad-y-adherencia-tres-fenomenos-del-discurso-matematico-escolar.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Francisco_Cordero/publication/271206710_Opacidad_y_adherencia_tres_fenomenos_del_discurso_matematico_escolar/links/54c18f240cf25b4b80727c05/Opacidad-y-adherencia-tres-fenomenos-del-discurso-matematico-escolar.pdf)

Chan, C. (2009). Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad. (Tesis de Grado). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Latinoamericana*, 49 (1), 53-64.

Estrella, S. Morales, S. Olfos, R. (2015) Clase pública de un estudio de clases de estadística: Una instancia de cambio de creencias en los profesores. *Revista Electrónica Educare*, 19 (3), 1-17.

García, I. y García, J. (2004). La media aritmética. *Formación de profesorado e Investigación en educación matemática*. Universidad de Laguna, España. (6) 197-217. Recuperado de [https://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/FPIEM\\_2004.pdf](https://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/FPIEM_2004.pdf)

Jair, L. Sin fecha. Pensamiento económico de William Petty. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/5575/1/luisjairgomez.19991.pdf>

Lacourly, N. (2011). Introducción a la Estadística. Santiago, Chile: *Worldcolor Chile S.A*

Leavy, A. y O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 9 (1), 53-90. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-006-9003-y>

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B., y Rupin, P. (2017). Texto del estudiante de la matemática. Santiago, Chile: Editorial SM.

MINEDUC, (2017). Bases curriculares y planes de estudio. Recuperado de <http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-channel.html>

[Pensamiento económico de William Petty]. s.f. Recuperado de [http://www.eco-finanzas.com/economia/economistas/William\\_Petty\\_Pensamiento.htm](http://www.eco-finanzas.com/economia/economistas/William_Petty_Pensamiento.htm)

Rondero, C., Font, V. (2015) Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*. 33 (2), 29-49.

## ANEXOS

### ANEXO 1. Fichas para entregar a las y los estudiantes plan de clase 1.

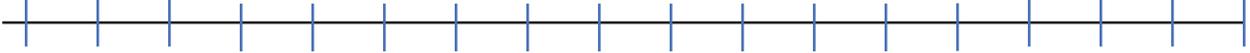
Ficha N°1

<b>Actividad:</b> <i>“Mejorando la convivencia escolar”</i> <b>Ficha 1</b>	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> <i>¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</i>
<b>Nombre del alumn@:</b>	
<b>Nº de dulces que trajiste</b>	

Ficha N°2

<b>Actividad:</b> <i>“Mejorando la convivencia escolar”</i> <b>Ficha 2</b>		
<b>Nº de dulces que tienes</b>	<b>Nº de dulces en cada bolsa para regalar</b>	<b>Diferencia entre el nº de dulces que tienes y nº dulces en cada bolsa para regalar</b>

Ficha N°3

<b>Actividad:</b> <i>"Mejorando la convivencia escolar"</i> <b>Ficha 3</b>	
<b>Representación Gráfica:</b>	
	
<i>Sumar</i>	<i>Sumar</i>
<b>Suma total</b>	

## ANEXO 2. Situación "las calificaciones" mostrada en el segundo plan de clase

### Las calificaciones

Se escogen dos estudiantes del colegio Patagonia del 7mo año básico, a los cuales se les quiere analizar sus notas con la finalidad de escoger a uno(a) para ganar entradas a Fantasilandia, considerando que ambos(as) tienen el mismo comportamiento. Al calcular sus promedios (media aritmética) se encuentra que en los dos estudiantes tienen promedio aproximado de 6,1.

#### Calificaciones Estudiante 1.

5,8    1    6,1    6,5

6,9    6,3    7    6,8

6,7    5,6    6,8    5,9

#### Calificaciones Estudiante 2.

6,1    6,5    5,9    6,9

5,9    5,6    6,3    7

6    6,7    6    5,3

### **ANEXO 3. Situaciones presentadas en el desarrollo de la segunda clase.**

Reflexiona ante las siguientes situaciones de manera individual y escribe tu respuesta en esta misma hoja.

1. Compara las dos situaciones de los estudiantes ¿Qué características tienen las calificaciones de cada uno de ellos?
2. Si de ti depende escoger a un estudiante para que vaya a fantasilandia ¿cuál de ellos escogerías y por qué?
3. ¿La media aritmética que representa a ambos conjuntos de calificaciones es una calificación que pertenezca a algún estudiante? En la situación vista en la clase anterior respecto a la cantidad de dulces que debía ir en cada bolsita ¿La cantidad de dulces que se encontró que debía ir en cada bolsita corresponde a alguna cantidad de dulces que algún estudiante llevó? ¿Qué dice esto respecto a la media aritmética?
4. Suponiendo que las notas de otro estudiante del curso están entre 4,0 y 5,7 ¿Puede el promedio ser un valor mayor que 5,7? ¿Podría ser menor que 4,0? Prueba con valores y justifica tu respuesta.
5. Identifiquemos que en la situación de las calificaciones tiene sentido que el promedio sea un valor decimal ¿Tiene sentido que en el reparto de los caramelos hubiese dado un valor decimal? Y si hubiese dado un valor decimal ¿Qué interpretación le hubieses dado?
6. Piensa ahora en la situación planteada en la clase anterior respecto al reparto de los caramelos. En esa situación, la media aritmética correspondía al valor que indicaba un reparto equitativo de dulces. Para esta situación ¿a qué correspondería la media aritmética? ¿Se le puede dar alguna interpretación? ¿Cuál?

## **ANEXO 4. Guía presentada a las y los estudiantes para el desarrollo del plan de clase 3.**

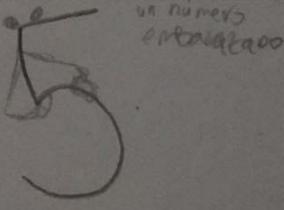
### Guía de actividad en clases

#### **INSTRUCCIONES**

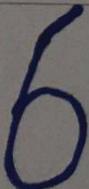
1. Deberá crear una encuesta donde se pregunten cosas de su interés. Esta encuesta deberá recoger datos del tipo cuantitativo. Basta con crear una pregunta que recoja la información que usted requiera.
2. Aplique la encuesta dentro del establecimiento y escriba los datos obtenidos en su cuaderno de manera ordenada.
3. Con ayuda de un computador con el programa Excel, organice sus datos y calcule la media aritmética.
4. Extraiga conclusiones de sus datos según el contexto donde lo aplicó, utilizando para ello la media aritmética y lo que ésta significa en sus datos. Además, se requiere que evidencie el uso o cumplimiento de las propiedades de la media aritmética en esta investigación.

**ANEXO 5. Registro de las producciones de las y los estudiantes respecto al cuestionamiento individual de la situación presentada en la clase 1**

Estudiante 1.

<p>Actividad : "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1</p>	<p>Estrategia planteada para la pregunta: ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</p> <p>un dulce en la BOLSA porque es la cantidad minima que tiene la mayoría</p>
<p>Nombre del alumn@: Constanza</p>	
<p>Nº de dulces que trajiste</p>	
	

Estudiante 2.

<p>Actividad : "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1</p>	<p>Estrategia planteada para la pregunta: ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</p> <p>11 invitaciones mismo cantidad de dulces ir repartiendo 1 en 1 bolsa, y que quede igual, y se sobra para mi</p>
<p>Nombre del alumn@: Daniel</p>	
<p>Nº de dulces que trajiste</p>	
	

Estudiante 3.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita? saber los datos de mis compañeros y los reunir los contiene de mis compañeros
<b>Nombre del alumn@:</b>	
<b>Nº de dulces que trajiste</b>	
8	

Estudiante 4.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita? necesitaria la cantidad de dulces de mis compañeros para sacar promedio, y eso es lo que va en la bolsa
<b>Nombre del alumn@:</b> marcos	
<b>Nº de dulces que trajiste</b>	
6	

Estudiante 5.

<p>Actividad : "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1</p>	<p>Estrategia planteada para la pregunta: ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</p>
<p>Nombre del alumn@: Aishaa Rojas</p>	<p>dividir el total de los dulces por los alumnos del grupo</p>
<p>Nº de dulces que trajiste</p>	<p>pero me falta el total de dulces</p>
<p>3</p>	

Estudiante 6.

<p>Actividad : "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1</p>	<p>Estrategia planteada para la pregunta: ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</p>
<p>Nombre del alumn@: Eduardo Lopez</p>	<p>me falta saber cuantos dulces van a regalar los demas y si lo se <del>como total</del></p>
<p>Nº de dulces que trajiste</p>	<p>no ponemos de acuerdo para regalar total iguales</p>
<p>0 Dulces</p>	

Estudiante 7.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?
<b>Nombre del alumn@:</b> Natalie Hernandez	- primero, debería saber la cont. de dulces de los demás
<b>Nº de dulces que trajiste</b>	- segundo, sumaría las cantidades y luego las dividiría por la cantidad de datos (sacar promedio)
7	

Estudiante 8.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?
<b>Nombre del alumn@:</b> Keigo Miranda	debería saber los datos de mis compañeros, pero probablemente si los tuviera, los pondría en parejas (dulces) en la bolsa
<b>Nº de dulces que trajiste</b>	
3	

Estudiante 9.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?
<b>Nombre del alum@:</b> John Madaraso	para poder hacer este ejercicio me enteré el total para poder dividirlo entre el número para que den partes iguales para cada bolsita.
<b>Nº de dulces que trajiste</b> 4	

Estudiante 10.

<b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1	<b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?
<b>Nombre del alum@:</b> Javiera Borqueta	sumar todos los dulces que cada uno trajo y dividirlos por el número de alumnos que somos pero me faltan 2 datos
<b>Nº de dulces que trajiste</b> 9	

Estudiante 11.

<p><b>Actividad :</b> "Mejorando la convivencia escolar" Ficha 1</p>	<p><b>Estrategia planteada para la pregunta:</b> ¿Cuántos dulces deben ir en cada bolsita?</p> <p>21 debe usar todos los dulces y deben divididos por la cantidad de bolsitas</p>
<p><b>Nombre del alumno@:</b> Felipe</p>	
<p><b>Nº de dulces que trajiste</b></p>	
<p>4</p>	

## ANEXO 6. Categorías para el análisis de datos desde la socioepistemología

Categorías	Indicadores
<b>Disipación de la Adherencia</b>	1) Las docentes son capaces de evidenciar antecedentes relacionados con la actual enseñanza de la media aritmética y luego cuestionan la actual forma de enseñanza de la media aritmética.
	2) Las docentes son capaces de identificar la problemática relacionada con el modelo de enseñanza de la media aritmética a través de la expresión algebraica que permite el cálculo de esta.
<b>Disipación de la Exclusión</b>	3) Las docentes consideran al estudiantado como principal generador del conocimiento en el plan de clases, teniendo en cuenta que es ella la que debe guiar la construcción de este.
	4) La docente da oportunidades a los y las estudiantes para que cuestionen y creen sus propias respuestas.
	5) La docente usa las respuestas de las y los estudiantes para construir el nuevo conocimiento.
	6) La docente da espacio para que las y los estudiantes participen constantemente de la actividad y de las reflexiones grupales e individuales.
<b>Disipación de la Opacidad</b>	7) Las docentes consideran el contexto del estudiantado para la creación del diseño didáctico.
	8) Las docentes consideran que el concepto de media aritmética fue construido producto de una necesidad humana.
	9) Los y las estudiantes son capaces de construir el concepto de media aritmética mediante su uso.