PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO-CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Propuesta de secuencia didáctica para la construcción del área en figuras geométricas para 5º básico

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

MAYRA CERDA

PROFESORES:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

SANTIAGO, ENERO 2018

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El estudio del área se inicia en 4º básico, según lo que plantea el Ministerio de Educación en su Programa de Estudio (2013), comenzando el trabajo mediante el conteo de cuadrículas en rectángulos, para luego ir progresando al cálculo del área en diversas figuras geométricas mediante diversas estrategias, como por ejemplo, figuras compuestas o redes de construcción.

Este objeto se trabaja a lo largo del currículum, siendo múltiples sus aplicaciones y el uso dentro del contexto escolar, así como su utilización en situaciones extra escolares como lo es la vida cotidiana y la educación superior.

Se selecciona este objeto matemático tomando en consideración la problemática detectada desde la práctica docente y diversos antecedentes recopilados (véase Tierney, Boyd y Davis, 1990; Chamorro, 2003; Reyes, Dissett y Gormaz, 2013; entre otros) asociada a la dificultad que tienen los estudiantes para comprender la noción de área de figuras geométricas y no solo asociarlo a una fórmula que conduce a la mecanización de su aplicación, sin una comprensión profunda de los procesos efectuados.

Se presenta un análisis epistemológico del área, para conocer cuál fue el comienzo de su estudio y como evolucionó este en el tiempo. Luego se presenta una definición desde el saber erudito y del saber escolar, para así esbozar un análisis de la distancia que existe entre estos. Seguido de esto se presentan análisis, tanto curricular como de textos escolares, para dar cuenta de cómo es trabajado y presentado el objeto en aulas chilenas.

En este informe se despliega una secuencia didáctica de tres clases con una duración de 90 minutos cada una, planificada para un 5º básico con el objetivo de desarrollar la noción de área como objeto matemático principal.

La secuencia de clases diseñada abarca dos objetivos propuestos para 5º básico; (OA21) Diseñar y construir diferentes rectángulos dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones y (OA22) Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares (MINEDUC, 2013).

Junto a esto, se utiliza la resolución de problema como metodología para las clases dado las diversas habilidades que pone en juego, como también rescatando su importancia per se tal como se declara en el Programa de Estudios de 4º básico, (MINEDUC, 2013) al ser una habilidad exigida por el ministerio a desarrollar. Existen diversos estudios e investigaciones que se han desarrollado en torno a la resolución de problemas (véase Alda y Hernández, 1998; Ignacio, Nieto y Barona, 2006; entre otros) y que analizan los impactos que esta produce en la comprensión de los distintos objetos en los estudiantes.

La secuencia diseñada, busca mitigar las dificultades asociadas a la comprensión del área en estudiantes de 5º básico, enfrentándolos a la resolución de problemas como metodología para la construcción del conocimiento. La secuencia se enmarca bajo la teoría de Brousseau de Situaciones Didácticas, presentándose los distintos momentos propios de la teoría como instancias claves en el desarrollo de las tres clases.

ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

ANTECEDENTES

La geometría es un componente esencial en la formación y educación de los estudiantes, por las habilidades de pensamiento espacial y capacidad de resolución de problemas que desarrolla (Bressan, 2000). Esta rama entrega herramientas para poder comprender el mundo que nos rodea, tal como plantean Godino y Ruiz (2002) "el lenguaje geométrico tiene su origen en nuestra necesidad de describir el mundo de las formas de los cuerpos perceptibles que nos rodean, su tamaño y posición en el espacio" (p. 456).

Desde el MINEDUC (2012) se plantea que la geometría entrega "conceptos para entender la estructura del espacio y describir con un lenguaje más preciso lo que ya conocen en su entorno. El estudio del movimiento de los objetos [...] busca desarrollar tempranamente el pensamiento espacial de los alumnos" (p. 91). Así, la geometría se trabaja de manera transversal a lo largo de toda la escolaridad con la intención de desarrollar el pensamiento y entregar herramientas a los y las estudiantes, junto con contribuir a la comprensión del mundo que los rodea.

Son variados los autores que han dedicado sus trabajos al estudio del área, analizando su construcción, comprensión y las distintas concepciones que existen en torno a esta, entre otras. Uno de estos estudios es el de Tierney, Boyd y Davis (1990) el cual trabaja con las concepciones de los docentes sobre el objeto matemático, y cómo en general se enfoca el trabajo en la fórmula en vez de en el concepto mismo.

Rouche (1992) hace referencia a que el rectángulo es la figura con la cual se debe comenzar el estudio del área, y con el cual se adquiere el concepto de superficie, planteando además que el dominar los elementos del rectángulo no es condición necesaria para comprender el concepto de área en el resto de las figuras trabajadas.

Otros investigadores se han enfocado en los obstáculos que se generan con este objeto matemático. Reyes, Dissett y Gormaz (2013) hacen mención a que "las dificultades y obstáculos que se pueden observar en la enseñanza de las áreas y perímetros son de dos tipos: unos tienen que ver con un deficiente manejo algebraico y numérico, y confusión en el uso de fórmulas; y otros tienen que ver con concepciones erradas de los conceptos geométricos" (p.164).

Desde los antecedentes recién mencionados, se puede afirmar que los principales obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes provienen de las múltiples herramientas que deben utilizar para calcular el área (ámbito geométrico y numérico), de las concepciones que presentan los docentes que enseñan el área y como finalmente este objeto es enseñado a partir de la fórmula en vez de una construcción de su significado, por tanto se tiende a enfrentar a las y los estudiantes a meros ejercicios, en lugar de problemas que logren poner en juego sus conocimientos y habilidades.

Tal como se expone en un comienzo, la geometría justamente promueve el desarrollo de las habilidades relacionadas con la resolución de problemas, la cual actualmente se presenta como una de las habilidades a desarrollar de manera transversal en el currículum chileno (MINEDUC, 2012). Se ha intencionado su desarrollo, ya que tal como exponen Alda y Hernández (1998) la resolución de problemas supone una sistematización de los conocimientos adquiridos con los propios procesos de pensamiento, los cuales se encuentran aislados entre sí, “lo que favorece el pensamiento divergente y, por tanto, retroalimenta el proceso de aprendizaje. Quien es capaz de resolver problemas está en condiciones de mejorar su capacidad de pensamiento” (p.29).

Se debe tener en consideración que los estudiantes manifiestan distintas emociones al enfrentarse a la resolución de problemas, ya que estos, por inercia, exigen de esfuerzo, perseverancia y paciencia. Ignacio, Nieto y Barona (2006) en su estudio plantean que estudiantes manifestaron no rendirse facilmente cuando no encontraban la solución a un problema, sino que volvían a intentarlo, lo cual se puede relacionar con la búsqueda de distintas estrategias para lograr llegar a la solución y que lleva a que valoren más el proceso de hacer matemática que solo el resultado.

Polya (citado en Gaulin, 2001) comenta que la idea de que en vez de que la escuela enseñe algoritmos y enfrente a las y los estudiantes a ejercicios repetitivos que tienden a la mecanización, se les debe plantear problemas para resolver, lo que los acerca en mayor medida a lo que realmente es hacer matemática.

Por tanto, se rescata que la geometría desarrolla a su vez potentes habilidades de pensamiento en los estudiantes, como de comprensión del medio que los rodea, siendo la resolución de problemas una forma de potenciar estas habilidades, lo cual fuerza a los estudiantes a poner distintos conocimientos y estrategias en juego para lograr plantear una solución, metodología que los motiva y desafía.

PROBLEMÁTICA

Los antecedentes aquí expuestos evidencian la dificultad que tienen los estudiantes para comprender el concepto de área, no solo desde el cálculo, sino desde su significado. En los textos escolares se suele presentar el área a partir de su fórmula, seguida de repetidos ejercicios que buscan la automatización en la aplicación de esta. Por tanto, el acercamiento de los estudiantes hacia el área se da por medio de una fórmula carente de sentido y significado.

Dada la dificultad asociada al proceso de construcción de la noción de área, es que se plantea esta secuencia didáctica, que tiene por objetivo mitigar las dificultades u obstáculos que se generan en el proceso de aprendizaje del área por medio de la resolución de problemas.

OBJETO MATEMÁTICO

ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

En Matemáticas, particularmente en el área de la Geometría, se suele trabajar con ciertos objetos a lo largo de toda la escolaridad, o bien, gran parte de ella. Muchos de ellos son presentados a los estudiantes en los cursos iniciales y luego se van complejizando con el paso del tiempo, lo que no confirma que lo comprendan a cabalidad.

El estudio del objeto, o su utilización, en principio data de hace muchos años, partiendo como una herramienta de solución frente a distintos problemas que se les presentaban a los hombres de aquella época.

Los egipcios se vieron en la necesidad de medir sus terrenos, debido a las continuas inundaciones provocadas por el aumento del cauce del río Nilo, ya que sus limites aumentaban y disminuían de tamaño, lo que obligaba a los dueños a volver a establecerlos.

> El pensador griego Heródoto (citado por Peña, en [36]) mencionó alguna vez que el rey egipcio Ramsés II dividió la tierra entre los egipcios de tal manera que a cada habitante le correspondiera un terreno rectangular de la misma área, por este terreno cobraría un impuesto anual. Pero cuando empezaron las inundaciones y el torrente hídrico invadía los límites de los terrenos, Ramsés enviaba a varios supervisores que calculaban cuánto terreno había sido reducido, para que el propietario pagara sobre el terreno que quedaba en proporción al impuesto total que el rey había determinado por todo el terreno. De esta historia se deduce que geometría viene del griego Geo que traduce tierra y metría que traduce medir, dando a la geometría una definición parecida a la medida de la tierra (González, 2016, p.9).

Los primeros indicios de problemas relacionados con el área se presentan en papiros egipcios. Uno de ellos es el papiro de Moscú, llamado así al haber sido comprado por un egiptólogo ruso en el año 1883. Este papiro contiene 25 problemas matemáticos, destacándose un problema donde se encuentra el área de una superficie parecida a un cesto (problema 10[1]), trabajándose por primera vez el área en superficies curvas (González, 2016).

Existe otro papiro llamado papiro de Ahmes o Rhind, el que se estima que fue elaborado en 1650 A.C (Arboleda, 2015), donde se presentan 87 problemas

---

[1] En el problema 10 se encuentra el área de una superficie similar a un cesta semiesférica.

relacionados con distintos aspectos de la matemática; aritmética básica, álgebra, volumen, proporciones y cálculo de áreas. Se encontraron fórmulas para el cálculo de áreas de cuadrados, de rectángulos, trapecios y triángulos, todas desde la subdivisión en triángulos. Un asunto importante a destacar en el papiro de Ahmes es que en este documento se solía calcular el área de figuras complejas mediante la conversión a figuras más simples, como el rectángulo (González, 2016).

Otra civilización que presenta importantes aportes con respecto al uso y estudio del área son los babilonios. Ellos “determinaron perímetros, áreas y volúmenes, además sus trabajos evidencian que resolvieron algunos problemas de proporcionalidad y triángulos semejantes, ternas pitagóricas y sobretodo el cálculo de áreas de figuras planas como los triángulos y trapecios, además de sólidos como los prismas y cilindros” (González, 2016, p.9) y al igual que los egipcios utilizaban la triangulación para obtener relaciones de área.

Cabe destacar, que si bien los babilonios ejercieron un gran trabajo con respecto a la resolución de problemas que involucraba cálculos de volumen y área, entre otros objetos, también cometieron errores. Uno de ellos es que calculaban el área de una figura multiplicando las longitudes de los lados opuestos entre sí, así el área de un cuadrilátero ABCD se calcularía como:

$$A = \frac{(a+b)}{2}\ x\ \frac{(c+d)}{2}$$

fórmula que funciona para figuras rectangulares, pero no para figuras irregulares (Gonzáles, 2016).

Ya en el siglo I d.C se desarrolla la fórmula de Herón, la que permite calcular el área de cualquier triángulo cuando se tiene la medida de sus tres lados;

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

siendo s el semiperímetro del triángulo.

Se presenta evidencia de que Pitágoras trabajaría en la aplicación de área, método que consiste en superponer un área con otra dada, y así lograr establecer relaciones de áreas deseadas. Para Boyer (1986) este sería el primer paso para la construcción formal del concepto de área.

Tal como menciona González (2016), “Pitágoras propuso construir sobre un segmento, un rectángulo de altura x . El área de este rectángulo debe exceder por cualquier cantidad, el área del cuadrado cuyo lado es x . Este problema puede ser visto como la resolución de la ecuación $A = x(b-x)$, llevando implícita la estrecha relación existente entre la geometría y el álgebra” (p.11).

Entonces, no solo los egipcios poseían un conocimiento intuitivo de la geometría, sino que los babilonios hicieran grandes aportes para el desarrollo de esta área. Según Arboleda (2015), los babilonios lograron calcular el área de triángulos y trapecios, y al multiplicar el área de la base por la altura de la figura, obtenían el volumen de prismas rectos y cilindros. También tenían fórmulas que les permitía calcular el volumen de conos y pirámides truncadas.

En la Antigua Grecia, según lo que afirma Olave (2005, citado en Martínez, 2015), se inventaron y desarrollaron mecanismos para la resolución de problemas asociados al cálculo del área de figuras no poligonales, dentro de lo que figuran la cuadratura de las lúnulas y el método de exhausción, entre otros.

Euclides, geómetra griego, por su parte escribió Los Elementos, en el año 300 a.C aproximadamente. En los dos primeros libros se encuentran algunas demostraciones del área de figuras planas, presentándose por ejemplo por primera vez la demostración de las áreas de paralelogramos y triángulos de manera formal como el producto de la base por la altura, y la del triángulo como la mitad del paralelogramo (González, 2016). Lo particular de las demostraciones presentes en los libros es que carecen de números, forma en que se demostraban los teoremas en la antigüedad, realizándolas con base en 5 axiomas, 5 postulados y algunas definiciones.

Otro importante aporte es el efectuado por Demócrito de Abdera, a quien se le atribuye haber encontrado la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, dividiendo en tres el producto de la medida de la base por la altura (D'Amore, 2009, citado en Martínez, 2015).

Arquímedes toma como base para el método de exhausción el lema planteado por Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C) quien propone que dadas dos magnitudes, distintas de cero y del mismo tipo, y que tengan una razón, es posible encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra (Boyer, 1986). El método de exhausción fue utilizado por Arquímedes para calcular la medida del área de un segmento de parábola. Martínez (2015) muestra que la proposición que se utiliza como base a dicho método es la extraída de los Elementos de Euclides, volumen III, que plantea que "Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano" (Boyer, 1986, p. 129).

Así, Eudoxo es quien otorga la clave para comparar figuras curvilíneas y rectilíneas: inscribiendo y circunscribiendo figuras rectilíneas a la figura curvilínea y luego multiplicando el número de caras o lados indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la curvilínea. En ese momento aún se desconocía la idea de límite, lo que les permitiría concluir su razonamiento.

A partir de este momento en la historia, se observa como el área se comienza a trabajar en distintas figuras y va adquiriendo un carácter más parecido a la integral, ya que se comienza a trabajar con la aproximación por medio de sumas infinitas.

Olave (2005, citado en Martínez, 2015) comenta que en los siglos XVI, XVII y XVIII se le otorga valor a la intuición, dejando de lado los métodos más rigurosos, impulsándose así el desarrollo del Cálculo. Se plantean diversos métodos generales para la resolución de una gran cantidad de problemas. Se destacan los aportes de Cavalieri, Fermat, Pascal, Descartes y Barrow.

Cavalieri, B. (1598-1647) utilizó razonamientos similares a los de Arquímedes para estudiar el cálculo de medidas de áreas y de volúmenes, utilizando como base el concepto de los indivisibles, lo que correspondía a áreas formadas por segmentos rectilíneos(Martínez, 2015). Él basa su libro en la idea de que el área se considera formada por segmentos rectilíneos o indivisibles.

Martínez (2015) destaca el trabajo de Fermat (1601 – 1665), quien plantea en el año 1629 aproximadamente un teorema relacionado con el área bajo las curvas del tipo $y = mx$, el que esencialmente era del teorema que Cavalieri publicó en 1635 y 1647, pero que ya no estaba acotado para $m = 1,2,3 \dots 9$, sino que ahora también se podía utilizar para valores fraccionarios. Fermat subdividía la curva en una cantidad infinita de subintervalos, aproximando el área bajo la curva por medio de rectángulos circunscritos

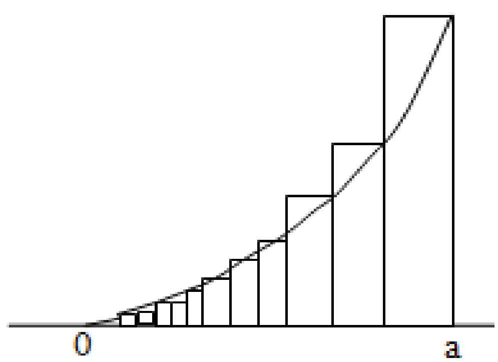


Figura 1: Rectángulos circunscritos a la región.
Fuente: Boyer (1986, p.442)

En lo planteado por Fermat se encuentran los elementos de la integral definida, como se conoce actualmente, inscribiendo y circunscribiendo rectángulos infinitesimales "presuponiendo el límite en el sentido de que cuando crece el número de rectángulos inscritos, la diferencia entre el área bajo la curva y los polígonos, se puede hacer *tan pequeña como se quiera"* (Moran, 2014, p. 39).

Leibniz (1646 – 1716) realizó un gran aporte a la historia de la integral, recogiendo la tradición de los indivisibles propuesta por Cavalieri e incorporando la notación que se utiliza hasta el día de hoy para la integral. Él propone que sería conveniente utilizar ≪ $\int$ ≫ en vez de <<omn.>>, siendo entonces $\int l$ la suma de todas las l(Grattan-

Guiness, 1982, citado en Morán, 2014). Tal como comenta el autor, el haber aportado con el símbolo de la integral es un hecho epistemológicamente significativo, ya que se le está reconociendo como una operación autónoma dentro de las matemáticas.

Según lo que expone Turégano (1998) antes del siglo XVIII se encontraban varios ejemplos de cálculos de áreas bajo la curva, que fueron realizados independendientemente del trazado de la tangente, este se considera que es el primer concepto de integral definida: «cuadratura con independencia de tangentes».

Luego la integral, o área bajo la curva, va cambiando su significado y la forma en que es calculada. A partir de los trabajos de Euler (1707 – 1783) surgen las funciones en vez de las curvas como objeto de estudio. Tal como plantea Turégano (1998) el problema de la integración era el de determinar una función primitiva F(x) que tuviera como derivada f(x). Entre los siglos XVIII y XIX, se define al cálculo integral como el inverso del diferencial.

El autor también menciona que durante el siglo XIX se produce un cambio conceptual en relación a lo que es una función ya que se acepta la defineción de función de una variable real como correspondencia arbitraria entre números reales.

Cauchy (1789 – 1857) define a la integral como el *límite* de una suma junto a una formulación rigurosa del teorema fundamental del cálculo. Posteriormente Peano, en 1887 da la primera defineción formal de área, retomando la idea de Eudoxo y su método de exhausción.

Reimann (1826 – 1866) "mostró que la idea de integral requería una definición más minuciosa que la propuesta por Cauchy, inspirada en una visión geométrica del área limitada bajo una curva, y propuso una definición de integral definida basado en el concepto de sumas superiores e inferiores, la cual se utiliza en la actualidad y se le conoce como Integral de Riemann" (Martínez, 2015, p.73). Pero la integral entendida bajo lo propuesto por Riemann tiene limitaciones, ya que esta no se preserva bajo el paso al límite (Morán, 2014).

Finalmente, en los primeros años del siglo XX, Lebesgue (1875 – 1941) precisa las indicaciones que realizó Borel sobre lo propuesto por Peano-Jordan y plantea su teoría de la medida, la que sirvió de base para una teoría más general de integración. Lebesgue comenta que se regresa a los métodos intuitivos que habían previos a Cauchy, pero teniendo una fundamentación lógica sólida por la definición de medida. (Turégano, 1998).

Lebesgue, en su trabajo, reconoce que para resolver los problemas que el formalismo analítico trae consigo, debe remontarse al problema original de las cuadraturas, desde un aspecto geométrico. Expone que las bases conceptuales que sustentan la teoría de la medida están basadas en tres características fundamentales:

i. Existe un conjunto cuya medida es diferente de cero.

ii. La medida es invariante bajo traslaciones

iii. La medida de la unión de un número finito o numerable de conjuntos, disjuntos dos a dos, es la suma de las medidas de los conjuntos.

Lebesgue se da cuenta que para resolver los problemas actuales debe volver a lasideas antiguas, por tanto retoma el trabajo de Euclides y Arquímedes, comprendiendo que ahí está la respuesta, cambiando entonces el concepto de medida relativa propuestos por los antiguos, por el de medida absoluta. Así, redefine la integral, siendo esta una generalización de la propuesta por Riemann ya que toda función Riemann integrable es Lebesgue integrable.

Seguido de Lebesgue se han producido muchos desarrollos de la integral: la integral de Riemann-Stieltjes, la integral de Lebesgue-Stieltjes, la integral de Daniell, entre otras, los que se corresponden con la gran proliferación de las matemáticas en el siglo XX (Morán, 2014).

DEFINICIÓN SABER ERUDITO

Desde una geometría euclediana, los autores Clemens, O'Daffer y Cooney (1998) mencionan que "una región poligonal es un subconjunto de un plano acotado por un polígono (o polígonos). De esta forma, es que consideran que a cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado área. El área de la región R, se representa por A(R)" (p. 393).

Los autores definen el concepto de polígono como la unión de segmentos que se juntan solamente en sus extremos, tal que dos segmentos se encuentran como máximo en un punto y que cada uno de los segmentos toca exactamente a otros dos (Clemens et al., 1998). Seguido de esto, exponen una serie de postulados del área donde se hace mención al cálculo de área de una figura compuesta por medio de la suma de las áreas de cada subunidad, como también al cálculo del área de un rectángulo, explicitando que es largo por ancho.

Por su parte Stewart (2007) para explicar el concepto de área hace relación al cálculo infinitesimal, estableciendo una distinción entre el área de regiones con lados rectos y regiones curvas. Para los primeros, plantea que el área se puede calcular mediante la multiplicación del largo por el ancho, o para polígonos, dividiendo estos en múltiples triángulos y sumando el área de todos ellos. Para las regiones con lados curvos, se trazan sucesivos rectángulos que se van acercando cada vez más a la región dada, los cuales se suman y van otorgando una aproximación más cercana al área de la región.

El autor define "el área de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua *f* es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación" (2007, p. 373).

$$\text{Sea } f(x) \geq 0 \text{ , } \forall x \in Dom(x)$$

$$\text{Luego } A = \lim_{n\to\infty} R_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Esta definición de área, amplia el espectro donde puede ser utilizado el objeto matemático, ya que generaliza su cálculo y no lo atribuye solo a la multiplicación de dos dimensiones como es el caso del área de polígonos.

Cabe destacar, que al analizar ambos textos, se encuentran similitudes en la forma en que es presentado el objeto matemático, ya que uno alude su definición a polígonos y propone el cálculo del área mediante la suma de unidades cuadradas, y el otro propone el cálculo mediante la suma sucesiva de rectángulos de aproximación para la región dada.

DEFINICIÓN ESCOLAR

Para llevar a cabo un análisis sobre como es presentado el área en las aulas chilenas, se utilizan dos textos: Matemática para 4º Básico de Ediciones Galileo (Alfaro, Espinoza y Cano, 2014) el cual se utiliza desde el ministerio y La Casa del Saber de Editorial Santillana para 5º básico (Ávila, Fuenzalida, Jiménez, y Ramírez, s/f) utilizado en establecimientos particulares.

El saber escolar incorpora al objeto matemático en 4º básico según lo establecido en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2012), presentándolo en textos ministeriales como “el número de unidades cuadradas que se necesitan para cubrir una superficie plana” (Alfaro, Espinoza y Cano, 2014, p.216) utilizando la representación gráfica para ejemplificar tal como se muestra a continuación:

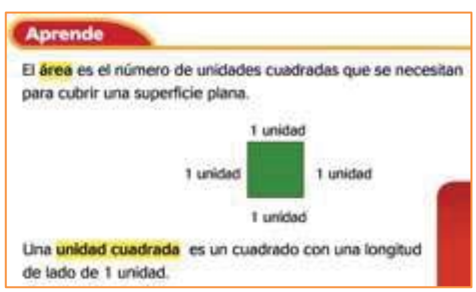


*Fig. 2:*Representación gráfica
Fuente: Matemáticas 4º básico (2014).

Este texto presenta el área en relación a distintas figuras geométricas: triángulo, rectángulo, cuadrado, paralelogramo, cuadrilátero, entre otras. Es así, como en cursos más avanzados, ya no se entrega una definición de área, sino más bien solo se intenciona su utilización, asumiendo la comprensión por parte del estudiantado.

En 5º básico, según el texto escolar La Casa del Saber, el objeto se presenta como: "El área (A) de una figura corresponde a la medida de la superficie que ocupa. Para medir las superficies de figuras planas se pueden utilizar unidades de medida como: el centímetro cuadrado (cm^2), el decímetro cuadrado (dm^2), el metro cuadrado (m^2), entre otras" (Ávila, Fuenzalida, Jiménez, y Ramírez, s/f, p.232). Luego, el texto entrega la definición de área de rectángulo explicándola como el producto entre las medidas de dos lados consecutivos.

El objeto matemático en este texto presenta en primer lugar una definición asociada a la medida de superficie y las unidades de medición involucradas. Posteriormente, se va asociando a figuras geométricas específicas, no estableciendo relaciones entre ellas, por tanto, no intencionando la comprensión del área de forma genérica ni su comprensión conceptual.

Desde ambos textos analizados, se puede afirmar que el saber escolar relaciona al área con el concepto de superficie y lo vincula a la utilización de unidades cuadradas, explicándolo como la cantidad de unidades cuadradas que se necesitan para cubrir una superficie determinada.

UBICACIÓN CURRICULAR

El área, en nuestro currículum escolar, es trabajada según los siguientes objetivos de aprendizaje entre 4º y 6º básico, según lo planteado en el Programa de Estudio (MINEDUC, 2013):

<table>
<tr><th>4º Básico</th><th>5º Básico</th><th>6º Básico</th></tr>
<tr><td rowspan="2">OA 23
Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado:
› reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas
› seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (cm^2 y m^2)
› determinando y registrando el área en cm^2 y m^2 en contextos cercanos</td><td>OA 21
Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.</td><td>OA 13
Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes (plantillas) asociadas.</td></tr>
<tr><td>OA 22
Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando las siguientes estrategias:</td><td>OA 18
Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos expresando el resultado en cm^2 y m^2.</td></tr>
</table>

› construyendo diferentes rectángulos para un área dada (cm^2 y m^2) para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área › usando software geométrico	› conteo de cuadrículas › comparación con el área de un rectángulo › completar figuras por traslación	

SECUENCIA DIDÁCTICA

Se diseña una secuencia didáctica de tres clases de 90 minutos de duración, la que propone mitigar las dificultades asociadas a la comprensión del área mediante la resolución de problemas.

EXPLICITACIÓN Y PERTINENCIA DEL MARCO TEÓRICO

Para el análisis y la elaboración de la secuencia didáctica se utiliza la teoría propuesta por Guy Brosseau de las Situaciones Didácticas.

Brosseau (citado en Sadovsky, 2005) propone un modelo desde el cual se piensa la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. Él propone en esta teoría que son tres los elementos que interactúan en el proceso de enseñanza-aprendizaje: estudiante, profesor y los saberes. La interacción entre estos componentes da lugar al medio didáctico. En este caso es el profesor quien facilita el medio en el cual el alumno construye el conocimiento.

La teoría de las situaciones didácticas está sustentada en una concepción constructivista, bajo el sentido de Piaget, y que Brousseau (1986) lo explica como "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (citado en Panizza, 2003, p.3). Es en este proceso, en el que surgen estrategias, los estudiantes toman decisiones para obtener una solución, y donde se construye el conocimiento.

Brousseau define la situación como "un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable" (2007, p.16).

La situación didáctica es una situación creada con la intención de que los estudiantes adquieran un saber determinado, en palabras de Brousseau (1982) se define como un conjunto de relaciones establecidas explícitamente entre un estudiante o un grupo, un medio (que pueden ser instrumentos u objetos) y un sistema educativo (en este caso el profesor) con la finalidad de lograr que los estudiantes se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Se realiza una distinción entre dos situaciones: didáctica y adidáctica. La situación didáctica involucra a todo el entorno del alumno, ya sea el docente y el sistema educativo.
La situación adidáctica es aquella que requiere mayor autonomía por parte del estudiante ya que los estudiantes deben afrontar por sí solos el problema al que fueron enfrentados. Por tanto, las situaciones didácticas engloban a las a-didácticas.

En términos de Brousseau (1986) la situación a-didáctica “designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego” (citado en Panizza, 2003, p. 4). Esta cita da cuenta de que en la situación adidáctica el estudiante, o grupo de estudiantes, se enfrenta solo al problema y es consciente de que este fue elegido para hacerle adquirir un nuevo conocimiento (Sadosvky, 2005) sin la dirección del profesor, quien espera ver aparecer los conocimientos para los cuales fue elaborada la situación.

La situación adidáctica presenta dos condiciones inherentes; el sujeto debe poder elegir entre varias estrategias, entendiendo que cuando elige una opción, rechaza en simultáneo otras alternativas y que la situación tiene una finalidad que puede identificarse independientemente del conocimiento a producir (Sadovsky, 2005).

Esta teoría presenta cuatro momentos denominados: acción (donde las y los estudiantes plantean sus estrategias), formulación (verbalización del estudiante de lo que está tratando de formular), validación (el estudiante debe sostener su opinión y/o ser capaz de demostrar que lo que dice es verdad) y la institucionalización (se brinda a los conocimientos el estado cultural indispensable de saberes), siendo esta última la única fase en que es central la participación del profesor.

Brousseau (2007) plantea que el conocimiento no está completamente adquirido hasta que el estudiante es capaz de ponerlo en juego, o bien, de utilizarlo, en situaciones que se encuentren fuera del contexto de enseñanza.

Se selecciona este marco teórico ya que plantea que el conocimiento se construye por medio de la producción y de la toma de decisiones frente a una determinada situación. En este caso, estos elementos se ponen en juego por medio de la resolución de problemas, metodología que se utiliza en la secuencia didáctica descrita a continuación.

En cada clase también es posible observar los momentos propios de la teoría, estando la acción y la formulación presente en el momento de resolución del problema en los grupos aleatorios, la validación se origina en el momento de la plenaria, donde cada grupo debe exponer su estrategia y validarla frente al grupo curso, y finalmente una fase de institucionalización, componente que tras la implementación del Estudio de Clases se constató la necesidad de ser implementado, para afiatar los conocimientos construidos y otorgarle la cohesión necesaria al objetivo de aprendizaje propuesto.

DESCRIPCION DE LA SECUENCIA

Para la creación de esta secuencia didáctica, se considera como base la metodología usada en la iniciativa Activando la Resolución de Problemas en el Aula

(ARPA), la cual nace bajo el alero del Centro de Investigación Avanzada (CIAE) y el Centro de Modelamiento Matemático (CMM), ambos de la Universidad de Chile.

La metodología ARPA propone clases basadas en la resolución de problemas, la cual se desarrolla en 4 etapas descritas a continuación:

- **Entrega:** En primer lugar, los estudiantes se deben agrupar en grupos aleatorios. Luego cada grupo recibe el problema a resolver durante la sesión y lo leen por sí solos.
- **Activación:** En esta etapa los estudiantes resuelven de manera autónoma el problema, en caso de que presenten dudas, el profesor solo interactúa con ellos mediante preguntas, sin entregar la respuesta y promoviendo la discusión entre pares.
- **Consolidación:** Esta sucede cuando los estudiantes creen haber resuelto el problema. Este se considera resuelto cuando cada uno de los integrantes del grupo puede explicar como lo resolvieron.
- **Discusión:** Se realiza una plenaria donde los estudiantes comunican las estrategias que utilizaron para plantear una solución al problema.

Cabe destacar que esta secuencia toma como base, pero no replica exactamente la metodología ARPA ya que incorpora, por ejemplo, la etapa de institucionalización al final de cada clase vinculada directamente con la TSD. La etapa de entrega se produce en el inicio de las clases donde los estudiantes se distribuyen en grupo y se activan los conocimientos previos. La activación y consolidación se generan en el desarrollo de la clase, donde se produce el trabajo de forma autónoma por parte de los estudiantes. Estas etapas se pueden asociar a las fases propuestas por Brousseau de acción y formulación respectivamente, ya que es el momento en que los estudiantes ponen sus conocimientos en juego, comienzan a explorar distintas estrategias para plantear soluciones y dialogan con sus compañeros para establecer un consenso. Finalmente se genera la discusión a través del espacio de plenaria destinado para cada clase, la que en ciertos casos, dependiendo del objetivo propuesto por el docente, se podría vincular a la fase de validación, propia de la TSD, al tener que justificar el por qué de su estrategia.

La resolución de problemas es una habilidad que el currículum declara explícitamente que se debe desarrollar en los estudiantes (MINEDUC, 2013). En términos de Ponte (2005) un problema corresponde a una actividad desafiante donde los estudiantes deben buscar distintas estrategias para intentar solucionarlo, movilizando distintos saberes y decidiendo cuales de ellos les servirán de herramienta para enfrentar el problema, potenciándose también habilidades de comunicación, argumentación y pensamiento crítico. Por otra parte, un ejercicio se entiende como una actividad mecánica, es decir, no desafiante, donde el estudiante ya conoce el algoritmo a utilizar.

Desde las palabras de Ponte se puede develar la gran brecha que existe entre un problema y un ejercicio y los diferentes procesos que se ponen en juego. El Ministerio de Educación (2012) declara que el resolver problemas implica el uso por ejemplo de habilidades de indagación, de búsqueda de posibles soluciones, de toma de decisiones para poder dar respuestas y la comunicación de estas con un lenguaje propio de la disciplina, habilidades que no se presentan en la resolución de un ejercicio.

Tal como se mencionó anteriormente la resolución de problemas promueve el desarrollo de distintas habilidades y distintos aprendizajes. De esto último cabe destacar el incremento del lenguaje disciplinario, el que permite avanzar en distintos procedimientos como por ejemplo el establecimiento de relaciones conceptuales o la organización conceptual de la disciplina (MINEDUC, 2012). Estrechamente ligada con este aprendizaje se encuentra la habilidad de argumentar, la que guarda relación con la capacidad de comunicar, ya sea de forma oral o escrita, sus estrategias y/o la solución al problema, la que se ve enriquecida con el lenguaje disciplinar como argumento de su discurso.

USO DE LA PIZARRA

El Estudio de Clases promueve un buen uso de la pizarra como parte fundamental de la gestión del aula. Durante la clase, el profesor va organizando el uso de la pizarra, intentando mantener en ella todo lo que se escribe durante el desarrollo de la sesión. Considerando el papel del alumno, se facilita el proceso de aprendizaje al tener todas las estrategias en la pizarra, pudiendo así establecer comparaciones entre ellas y registrando todo lo importante en su cuaderno (Isoda y Olfos, 2009).

Dentro de las acciones que se pueden llevar a cabo dentro del aula para favorecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes es ayudarlos a adquirir buenos hábitos, como por ejemplo apoyarlos en que tomen buenos apuntes de la clase. Para esto es importante que el profesor realice un buen uso de la pizarra, su disposición y que brinde el tiempo suficiente para que los alumnos copien en sus cuadernos.

Tal como plantean los autores, la pizarra se convierte en un actor fundamental dentro del aula, ya que sirve para que los estudiantes incluso memoricen visualmente lo que está escrito en ella. Por esto, es importante que el profesor sea sistemático en su uso y tenga la precaución de escribir lo esencial de la clase, para que luego no produzca confusiones cuando los estudiantes revisen sus apuntes.

Otra estrategia que plantea el Estudio de Clases (Isoda y Olfos, 2009) es el uso de tarjetas con títulos que ayudan a ordenar la transcripción al cuaderno, los cuales se posicionan en ubicaciones estratégicas para que los estudiantes se acostumbren a ellos y logren identificar los distintos elementos trabajados.

Tomando en consideración lo planteado por el Estudio de Clase, y como parte de la gestión del aula, para todas las clases se propone el siguiente esquema de uso para la pizarra, incorporándose también las tarjetas de títulos, con la intención de orientar a los estudiantes a qué corresponde cada elemento que se escriba o coloque en la pizarra.

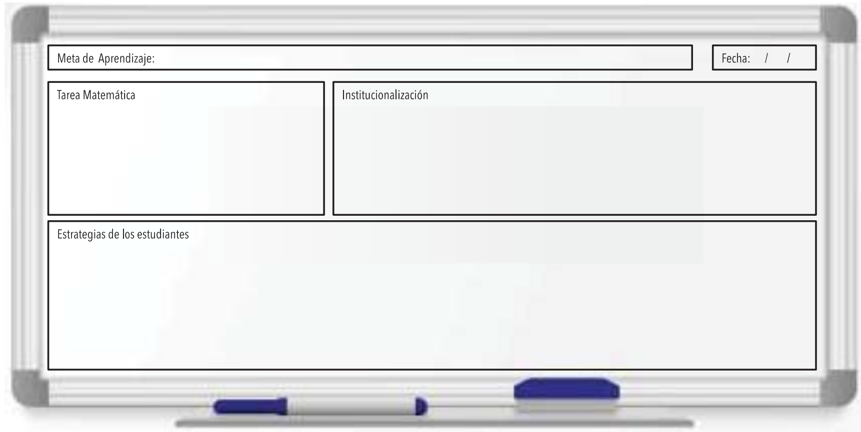


Imagen representativa sobre propuesta uso de la pizarra

OBJETIVOS

Se presenta una tabla que sintetiza los objetivos y metas de aprendizaje de cada clase:

	Clase 1	Clase 2	Clase 3
Objetivo de Aprendizaje	**OA 22.** Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando la siguiente estrategia: › conteo de cuadrículas	**OA 21.** Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.	**OA 22.** Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando la siguiente estrategia: › completar figuras por traslación
Objetivo de la clase	Calcular el área de figuras rectangulares, mediante el conteo de cuadrículas.	Diferenciar entre área y perímetro de figuras rectangulares para establecer conclusiones.	Calcular el área de paralelogramos y triángulos, mediante diversas estrategias.
Meta de Aprendizaje	Identificar estrategias de medición en superficies rectangulares.	Analizar superficies rectangulares y obtener conclusiones a partir de los elementos entregados.	Analizar distintas superficies y utilizar diversas estrategias para resolver un problema.

Para una mejor comprensión de la tabla, se explican a continuación los componentes de esta. El objetivo de aprendizaje responde directamente a lo planteado por los Programas de Estudio (2013), estableciendo la conexión directa entre la propuesta ministerial y la secuencia didáctica diseñada. El objetivo de la clase corresponde a aquel objetivo al que el profesor pretende llegar, y para el cual fueron diseñadas las tareas matemáticas a desarrollar durante la sesión, este objetivo solo es conocido por el docente y sirve de hilo conductor para el desenlace de la clase. Finalmente se presenta la meta de aprendizaje, la cual es la que se les presenta a los estudiantes al comienzo de cada clase, se pretende que por esta los alumnos tengan conocimientos del propósito con que se desarrollará la clase, pero no contiene elementos específicos, evitando así que la meta les de una pista sobre la estrategia o saber que surgirá desde la tarea matemática propuesta.

Tal como se puede observar en la tabla, se trabaja en esta sub-unidad con dos objetivos expuestos por el MINEDUC (2013). Uno de ellos se repite en la primera clase y en la última, mientras que la de al medio presenta un objetivo diferente y posterior según la propuesta ministerial. Se diseña de esta manera ya que se intenciona que el estudiante afiate los conocimientos del área de figuras rectángulas, comprendiendo como calcularla y analizando que ocurre con su perímetro en las dos primera clases, para luego dar paso al cálculo de áreas de otras figuras geométricas.

La última clase en particular, se considera de un nivel más complejo que las anteriores, dado que deberán poner en juego los conocimientos adquiridos con anterioridad y además podrán utilizar como estrategia (se explica en detalle más adelante) otros conocimientos adquiridos relacionados con las transformaciones isométricas para lograr formar un rectángulo y así desarrollar un trabajo similar al de las clases anteriores. Junto con esto, se les solicita establecer conjeturas sobre el área del triángulo, teniendo que descubrirla a través de la experimentación y generalizando sus hallazgos.

Aún cuando la primera y la tercera clase presenten el mismo objetivo, difieren en la meta de aprendizaje y el nivel de complejidad implicada en ellas. Además proponen la utilización de distintas estrategias como herramienta de solución, tal como se indica en los programas de estudio.

Nombre Sub- unidad: Área de figuras geométricas.

Clase N°	1	Nombre clase	¡Ayudemos a la señora María!	Curso	5º básico
Objetivo de aprendizaje		OA 22. Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando la siguiente estrategia: › conteo de cuadrículas		Asignatura	Matemática
Meta de Aprendizaje		Identificar estrategias de medición en superficies rectangulares.			
Duración	90 minutos				

Momento	Tiempo	Actividad	Respuestas de los estudiantes/ Preguntas de devolución	Indicador o Marcha de clases	Recursos
Inicio	10 min	0. Escuchan las indicaciones generales de la clase. 1. Presentación de la meta de aprendizaje: “Identificar estrategias de medición en superficies rectangulares” 2. Cada estudiante recibe una carta con un número del 1 al 7 y se sientan en grupo según el número que les tocó (se espera que se generen 7 grupos de 4 integrantes cada uno). 3. Identifican la imagen de un embaldosado y responden a la pregunta: ¿Qué es un embaldosado? ¿Qué características tiene?	**3. Posibles respuestas de los estudiantes:** Una superficie plana formada con baldosas. Las baldosas de un piso. Las baldosas se ubican una al lado de otra, sin sobreponerse y sin dejar espacio entre una y otra.	0. Reconocen las normas de conducta a respetar 1.Comprenden el objetivo a trabajar 2. Se agrupan según el número que les tocó. 3. Los estudiantes se interesan en observar la imagen presentada. Los estudiantes buscan reconocen las características de un embaldosado. Los estudiantes participan activamente de la clase.	Data Imagen de un embaldosado
Desarrollo	40 min.	**Desarrollo de la tarea** 4. Escuchan las instrucciones de trabajo: Cada grupo deberá buscar la solución al problema de forma colaborativa, para esto dispondrán de 45 minutos. El problema se considerará resuelto cuando todos los integrantes del grupo sepan como resolverlo. Deben establecer una estrategia común para luego ser presentada en la plenaria. En caso de que tengas dudas, deben levantar la mano y esperar su turno. Cada grupo recibe una hoja de trabajo (ver	**Preguntas de devolución** 4. ¿Cómo podríamos resolver el problema? ¿De qué forma nos puede ayudar la baldosa que nos entregaron? ¿Qué figura geométrica es la superficie que les tocó? ¿Cómo lo saben? ¿Cómo son los lados de la figura? ¿Cómo van las baldosas en un embaldosado? ¿Están separadas? ¿Se colocan unas encimas de otras? ¿Qué estrategias van a utilizar? ¿Alguien tiene una estrategia diferente? ¿Será la única estrategia existente? Extensión: Y si ahora tuvieran que embaldosar el patio del colegio, que también es rectangular, ¿les serviría la estrategia utilizada? ¿por qué? ¿Existirá alguna forma de generalizar este cálculo de baldosas? ¿Qué concepto matemático está detrás de este cálculo? ¿Qué es lo	4. Los estudiantes muestran interés por el problema. Los estudiantes comprenden el problema a resolver. Los estudiantes comunican posibles estrategias para enfrentar el problema. Los estudiantes atienden a las preguntas realizadas por la profesora y las utilizan como guía para la	1 cartulina rectangular que representa la superficie de una habitación. 1 unidad cuadrada (u) (cuadrado de 3 x 3

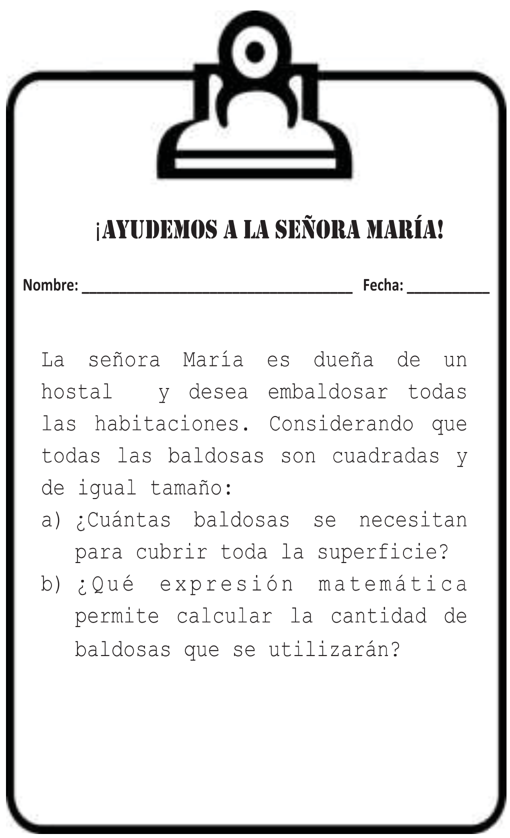
		Material complementario), una cartulina rectangular con la superficie a embaldosar, un cuadrado de 3x3 cm que representa la baldosa para embaldosar y desarrolla la actividad. Problema a desarrollar: *La señora María es dueña de un hostal y desea embaldosar todas las habitaciones. Considerando que todas las baldosas son cuadradas y de igual tamaño, ¿cuántas baldosas se necesitan para cubrir toda la superficie?* *¿Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas se utilizarán?* La profesora comenta al curso que la cartulina es la superficie que deben cubrir por habitación y el cuadrado, que representa al tipo de baldosa a utilizar, es de libre manipulación, es decir, que ellos deben encontrar la mejor forma de utilizarla para ayudarles a resolver el problema planteado.	que estamos calculando? ¿Qué representa matemáticamente la cantidad de baldosas utilizadas? Pensemos la baldosa como nuestra unidad de medición, ¿cómo la podríamos llamar? Si la baldosa es nuestra unidad cuadrada de medición ¿qué calculamos entonces? **Posibles estrategias:** *Correctas:* 1) Ubican la unidad cuadrada, y comienzan a marcarla en la cartulina, una al lado de otra, sin sobreponerla. Realizan este procedimiento hasta completar la cartulina. Cuentan las unidades cuadradas marcadas. 2) Ubican la unidad cuadrada y marcan, sin sobreponer, una fila y una columna. Cuentan cuántas unidades cuadradas hay por fila y la suman según la cantidad que hay por columnas, y viceversa. 3) Ubican la unidad cuadrada y marcan, sin sobreponer, una fila y una columna. Cuentan cuántas unidades cuadradas hay por fila y por columnas y multiplican ambas cantidades (respuesta experta). *Incorrectas:* 4) Dibujan en la cartulina las unidades cuadradas sobre poniéndolas unas con otras. 5) Dibujan en la cartulinas las unidades cuadradas sin yuxtaponer **Posibles errores y/o dificultades:** Los principales errores y dificultades se asocian, tal como se expone en las estrategias incorrectas, con que los estudiantes no comprendan la dinámica del embaldosado y coloquen las baldosas muy separadas unas de otras, llegando a un resultado erróneo en el número de baldosas a utilizar.	búsqueda de soluciones. Los estudiantes son capaces los estudiantes de comunicar sus propias ideas. Los miembros de los grupos participan activamente. Los estudiantes utilizan distintas estrategias para encontrar una solución. Surgen estrategias no contempladas. Surgen errores en las estrategias de los estudiantes. Logran comunicar sus ideas con claridad. Logran comprender que el cálculo realizado se asocia al área de una figura rectangular. Logran generalizar y formular una expresión para el cálculo del área.	cm) 1 hoja de registro Se consideran las siguientes dimensiones de cartulina: 2 x 11 u; 3 x 18 u; 5 x 5 u; 9 x 7 u; 10 x 8 u; 10 x 10 u; 15 x 3 u (ver material complementario).
	15 min	**Plenaria** 5. Un integrante por grupo expone la estrategia utilizada para el cálculo de las baldosas en la superficie entregada. Saldrán a la pizarra en orden según los siguientes criterios basados en las estrategias utilizadas: 1) los que consideran estrategias de sumatoria: conteo uno a uno. 2) los que consideran estrategias de sumatoria: conteo en agrupaciones. 3) los que consideran como estrategia la multiplicación. 6. A modo de extensión los estudiantes	La profesora durante el transcurso de la clase monitorea el trabajo de los estudiantes y selecciona el orden con que presentarán las estrategias, tratando de partir por el error para trabajarlo con todo el curso, y luego desde la estrategia más simple hasta la más compleja que se presente. **Preguntas de devolución:** 5. ¿Qué estrategia utilizaron? ¿Fue la única estrategia que se les ocurrió? ¿Habrá alguna otra estrategia que permita obtener la cantidad de baldosas? 6. Si ahora queremos embaldosar el patio del colegio ¿su estrategia facilita este cálculo? ¿por qué? ¿cómo podríamos hacerlo en superficies más grandes? ¿Qué cálculo nos facilita el proceso? ¿Cómo podríamos generalizar entonces el cálculo?	5. Comunican sus estrategias frente al curso. Escuchan con respeto lo expuesto por sus pares. 6. Los estudiantes determinar que al utilizar la multiplicación se facilita el proceso de cálculo.	--

		comentan la siguiente pregunta: Si tuvieran que embaldosar el patio central del colegio, que tiene forma rectangular, ¿creen que su estrategia facilita el cálculo de las baldosas que se deben utilizar? ¿Por qué?			
	15 min	**Institucionalización** 7. Los estudiantes escuchan los comentarios de la profesora y responden las preguntas: ¿Qué concepto matemático será el que estamos trabajando? El concepto que trabajamos es el área que mide la superficie que existe dentro de una región. En este caso en particular, nuestra baldosa fue nuestra unidad de medición. Calculamos cuántas baldosas se necesitaba para cada superficie, por lo que este número representa el área de cada superficie que les tocó a cada grupo. El área se mide en unidades cuadradas, comúnmente son el cm^2 y el m^2, por tanto el área de su habitación será de *x* m^2.	**Preguntas de devolución** 7. ¿Cuál fue la expresión matemática que nos permitió generalizar el cálculo del número de baldosas? ¿Qué estaremos calculando aquí? Si estamos cubriendo toda la superficie ¿qué representará matemáticamente? La profesora enfatiza que para resolver la tarea, debieron buscar una estrategia que permita calcular el área de la figura rectangular, donde pese a que todos los grupos trabajaron con distintos rectángulos, existe una única expresión matemática que permite encontrar la cantidad e baldosas utilizadas. Por lo tanto, esta expresión permite encontrar el área de un rectángulo.	7. Reconocen la conexión de la multiplicación (filas por columnas) con el cálculo de superficies rectangulares. Identifican que para calcular el área de rectángulos deben multiplicar el largo por el ancho de la figura. Registran en sus cuadernos lo comentado por la profesora.	Cuadernos de los estudiante s.
Cierre	10 min.	8. Los estudiantes escuchan las instrucciones y responden el ticket de salida: Ahora tenemos un desafío, para esto deberán resolver el ticket de salida a continuación.	**Posibles respuestas de los estudiantes** 8. *Correcta* El área de la habitación es de 20 m^2. *Incorrecta* El área de la habitación es de 28/12/14/21/25 m^2. **Posibles errores y/o dificultades** Las principales dificultades que pueden presentar los estudiantes se relacionan con encontrar la longitud de los lados restantes de la figura (ambos de $4m^2$). Otro error que podría presentar sería la multiplicación de lados erróneos lo que llevaría a un resultado equivocado (por ejemplo $7 \cdot 3$), o cualquier otra combinación de los valores dados ($3 \cdot 4$, $7 \cdot 2$, $7 \cdot 3 + 2 \cdot 2$).	8. Los estudiantes resuelven el ejercicio dado. Mantienen un clima óptimo para el aprendizaje.	Ticket de salida

Material complementario

Imagen embaldosado

Hoja con problema



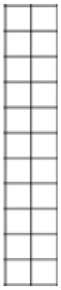
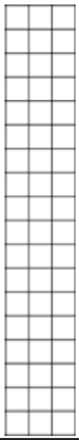
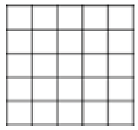
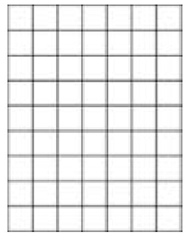
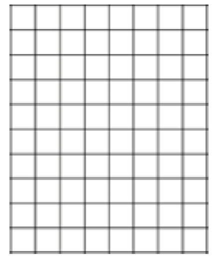
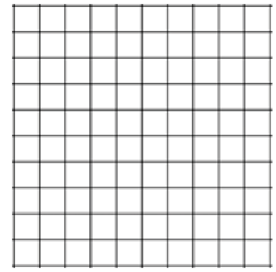
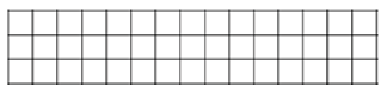
¡AYUDEMOS A LA SEÑORA MARÍA!

Nombre: ______________________________ Fecha: __________

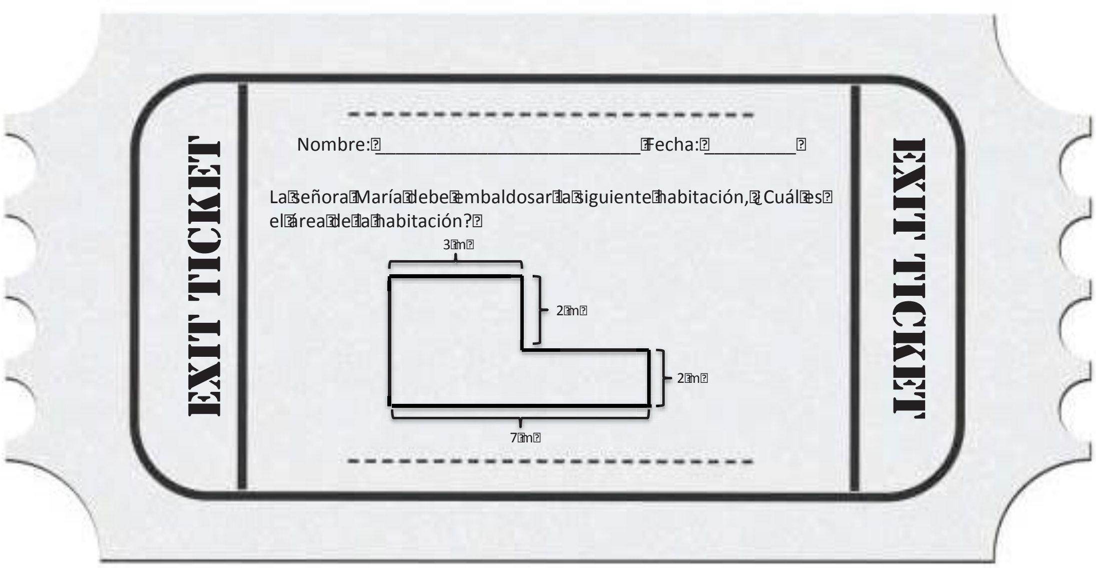
La señora María es dueña de un hostal y desea embaldosar todas las habitaciones. Considerando que todas las baldosas son cuadradas y de igual tamaño:

a) ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir toda la superficie?
b) ¿Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas que se utilizarán?

Dimensiones de cartulina a ocupar:

2 x 11 u	3 x 18 u	5 x 5 u	9 x 7 u	10 x 8 u	10 x 10 u
					
15 x 3 u 					

Ticket de salida



CLASE 1

Actividad Matemática

La primera actividad a desarrollar en la secuencia didáctica es la siguiente:

La señora María es dueña de un hostal y desea embaldosar todas las habitaciones. Considerando que todas las baldosas son cuadradas y de igual tamaño ¿Cuántas baldosas se necesitan para cubrir toda la superficie? ¿Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas se utilizarán?

Esta actividad, al igual que toda la secuencia didáctica, se diseña para mitigar las dificultades asociadas a la construcción del área por parte de los estudiantes y no que conozcan el objeto mediante una fórmula introducida por el profesor.

Esta tarea se crea con el propósito de que sea desarrollada en forma grupal con la intención de que se promueva la discusión matemática entre pares, y que por medio de la toma de decisiones construyan el saber matemático esperado.

Para desarrollar esta actividad, se les entrega a cada estudiante una hoja con el enunciado del problema, y por grupo se entrega una superficie rectangular en cartulina y una baldosa.

La intención de la tarea es que los estudiantes busquen distintas estrategias para encontrar la cantidad de baldosas necesarias para cubrir una superficie, por medio del material concreto, pudiendo ser capaces de manipular la baldosa como herramienta para la búsqueda de nuevas soluciones y emergiendo la noción de unidad de medida como la cantidad de baldosas.

Luego, se presenta una pregunta que intenciona a los estudiantes para dar un lenguaje más cercano a lo disciplinar la estrategia utilizada para plantear una solución al problema. El propósito de establecer esta conjetura, es que por medio de una discusión entre pares los estudiantes logren percatarse de que existe una regularidad en torno al cálculo del área de la superficie rectangular, y que esta corresponde al área de rectángulo, de forma de que el objeto se devele por medio del trabajo realizado por ellos mismos.

Esta tarea matemática se explica según las fases propuestas por Brousseau, propias de una situación adidáctica. En la fase de acción se espera que los estudiantes lean el problema por sí solos y comiencen con la búsqueda de estrategias de solución, primero de forma independiente buscando su propio camino y comprensión del problema. Las estrategias pueden ir desde el conteo de cuadrículas hasta la multiplicación de la longitud de los lados.

Luego, en la fase de formulación, se espera que los estudiantes comenten sus estrategias o posibles caminos de resolución con sus compañeros, y juntos como grupo logren proponer una forma que permita otorgar una respuesta al problema.

Se puede dar una fase de validación si es que los estudiantes comienzan a probar su estrategia seleccionada para distintas áreas de figuras rectangulares, es decir, inventando sus propios rectángulos y comprobar si se cumple para todos los casos que el calculo del numero de baldosas corresponde a la multiplicación de la longitud de los lados del rectángulo.

Es posible también relacionar la actividad con la metodología ARPA y observar su vínculo con la TSD. Tal como se menciona en un comienzo, ARPA presenta cuatro momentos en su propuesta: entrega, activación, consolidación y discusión. La entrega comienza con la distribución de grupos aleatorios junto con la lectura por parte de los estudiantes del enunciado presentado. La profesora puede realizar ciertos comentarios previos a la lectura del problema que contextualicen el problema, que sirvan para activar conocimientos previos o bien que motiven a los estudiantes a enfrentar el problema.

La activación comienza cuando los estudiantes comienzan a buscar estrategias para plantear la solución. En este caso, se les entrega un cuadrado de cartulina de 3 x 3 cm que representa la baldosa y los estudiantes pueden comenzar a explorar distintas formas para encontrar una estrategia. La profesora puede ayudar a aquellos estudiantes que presenten dudas o que estén complicado con hallar una estrategia mediante preguntas que orienten su accionar. Este momento se relaciona con la fase de acción según la TSD ya que los estudiantes tienen un primer acercamiento a la tarea , donde comienzan a explorar y buscar soluciones.

La fase de consolidación ocurre cuando todos los integrantes de un grupo saben como resolver el problema, y el grupo ha llegado a un consenso. En este caso en particular, ocurre cuando el grupo manifiesta su decisión, ya sea por conteo, suma iterada o la multiplicación de la longitud de los lados.

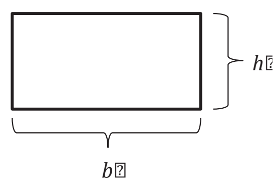
Finalmente, se da paso a la etapa de discusión, donde los grupos pasaran a exponer frente a sus compañeros la estrategia utilizada y por medio del andamiaje de la profesora y distintas preguntas planificadas con anterioridad se pretende conducir a los estudiantes a que vinculen la multiplicación de la longitud de los lados de un rectángulo al área de este. Esta etapa se podría vincular con la fase de validación propuesta por Brousseau, ya que aun cuando los estudiantes no prueban si su estrategia se cumple para todos los casos, en la etapa de plenaria se someten a la opinión de sus compañeros y puede suceder que deban argumentar el por qué de sus decisiones.

La fase de institucionalización, si bien no es explícita en el enunciado de la tarea matemática, se considera constitutiva de esta, ya que es luego de que los estudiantes declaren que es el área lo que usaron como estrategia para la solución del problema, es la profesora quien valida la conjetura de los estudiantes, y le otorga el carácter de saber matemático a la estrategia intuitiva de los alumnos.

Respuesta Experta

El área de una región poligonal se entiende, según lo propuesto por Clemens, O'Daffer y Cooney (1998) como "un subconjunto de un plano acotado por un polígono (o polígonos). De esta forma, es que consideran que a cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado área. El área de la región R, se representa por A(R)" (p. 393).

La situación presentada contempla el cálculo de la medida del área de un paralelogramo, en este caso un rectángulo. A cada grupo se le presenta un rectángulo el cual está elaborado con dimensiones distintas a la de los otros, por tanto se generalizará la superficie a medir como:



con $b \wedge h \in \mathbb{N}$.

Para este se efectúa el cálculo del área mediante la multiplicación de la longitud de los lados b y h, que corresponde a la base de la figura y la altura de la figura respectivamente, puesto que al cuadricular el rectángulo en cuadrados de una unidad de longitud, se procede a contarlos, logrando así el resultado dado.
En la obra de Clemens et al. (1998) se encuentra el teorema que enuncia:

<u>Teorema</u>: Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = bh$, con $b \wedge h \in \mathbb{N}$.

Cabe destacar que el teorema anterior, se fundamenta de la definición de región poligonal, la cual manifiesta que es un subconjunto de un plano acotado por un polígono (o polígonos).

Matemática en juego, conocimientos previos y los a desarrollar

El objetivo de esta clase es: Identificar estrategias de medición en superficies rectangulares. Para poder desarrollar la tarea matemática los estudiantes deben tener conocimiento de operaciones en los números naturales, deben reconocer a las figuras geométricas y sus características y deben ser capaces de identificar la medida de un objeto.

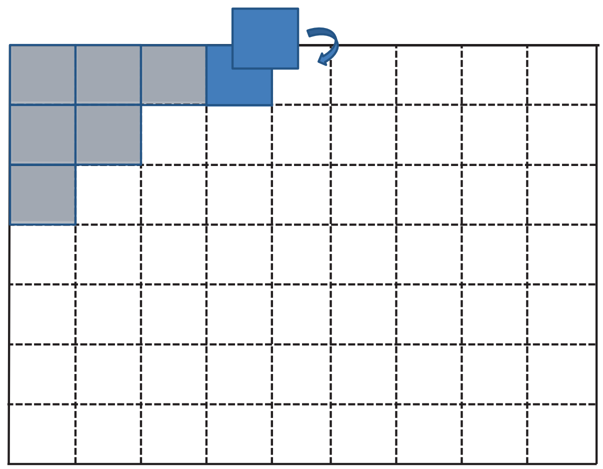
En el desarrollo de la tarea entran en juego los arreglos bidimensionales, el conteo en arreglos bidimensionales, la suma iterada o multiplicación de números naturales, la medición de objetos con unidades no estandarizadas.

Se pretende que esta tarea permita a los estudiantes construir el concepto de área en figuras rectangulares y el cálculo de su medida dada la longitud de sus lados.

Posibles estrategias

Para el desarrollo de esta tarea se consideran tres posibles estrategias:

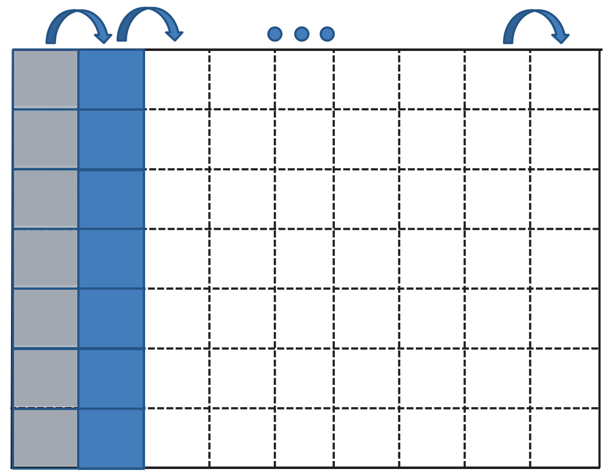
E_1: Completan la superficie rectangular con la baldosa (material concreto) que se les facilitó, yuxtaponiéndolas unas con otras y marcándolas en la superficie. Luego proceden al conteo de las unidades cuadradas una a una, para obtener la cantidad total de unidades que se necesitarán para cubrir exactamente la región, sin que se sobrepongan unas con otras.



Con esta estrategia se espera que los estudiantes respondan a la pregunta sobre la cantidad de baldosas a utilizar, determinando la siguiente expresión:

$$1 + 1 + \cdots + 1 = total\ de\ baldosas$$

E_2: Completan una fila o una columna según esté compuesta la superficie rectangular y suman la cantidad de filas o columnas, según corresponda, para obtener la cantidad total de baldosas.



Se espera que los estudiantes, por medio de la suma iterada, logren determinar la cantidad de baldosas a utilizar, estableciendo expresiones como:

$$x + x + \cdots + x = total\ de\ baldosas$$

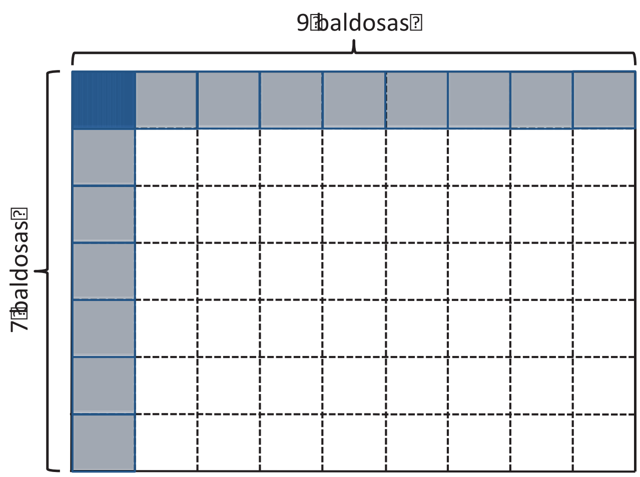
Con $x = cantidad\ de\ baldosas\ por\ columna\ o\ por\ fila$, según tantas veces se repita.

Considerado el ejemplo representado, el cálculo sería:

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 63\ baldosas$ si considera la cantidad de baldosas por columna.

$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 63\ baldosas$ si considera la cantidad de baldosas por fila.

E$_3$: Identifican la cantidad de columnas y filas, y luego multiplican estas cantidades para obtener el número total de baldosas para cubrir toda la superficie.



En esta estrategia se espera que los estudiantes formulen expresiones del tipo $x \cdot y = total\ de\ baldosas$, siendo x la cantidad de columnas e y la cantidad de filas.

Según el ejemplo expuesto, este cálculo sería

$$9 \cdot 7 = 63$$

o bien

$$7 \cdot 9 = 63$$

obteniéndose así la cantidad total de baldosas a utilizar para cubrir toda la superficie.

Dificultades, errores y devoluciones

Es posible que los estudiantes presenten ciertos errores y/o dificultades al momento de enfrentarse a esta tarea matemática.

Dentro de los posibles errores, se plantea que puede ocurrir:

- La distribución de las baldosas para completar el embaldosado es errónea. En este caso los estudiantes podrían dibujar las baldosas muy separadas unas de otras, o bien, sobreponer una sobre otra, lo que les otorgaría un resultado erróneo. Frente a esto la profesora puede efectuar las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las características de un embaldosado? ¿Están separadas las baldosas? ¿Se colocan unas encimas de otras?
- Contabilizar solo las baldosas que se encuentran en el contorno de la figura, sin contemplar las baldosas del interior. Para orientar a los estudiantes, la profesora podría realizar las siguientes preguntas: ¿Cuáles baldosas se están considerando? ¿Contabilizarías así todas las baldosas de la superficie?

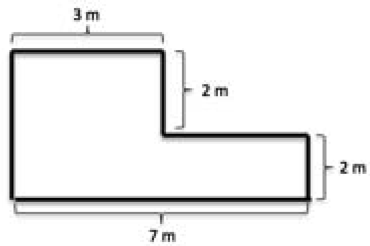
Como dificultades se pueden presentar:

- Que los estudiantes no logren relacionar el arreglo bidimensional con la multiplicación. Esto se originaría cuando los estudiantes no logren realizar el tránsito o bien del conteo o de la suma iterada al proceso de multiplicación. Para esto la profesora puede efectuar las siguientes preguntas de devolución: ¿Cuántas veces sumaste esa cantidad? ¿De qué otra forma podemos escribir esa adición iterada? ¿Hay alguna forma de escribirla en menos pasos? ¿Qué pasa con los términos? ¿Se repite alguno? ¿Cuántas veces?
- Que los estudiantes no logren vincular la multiplicación o estrategia utilizada al concepto de área. En este caso se podría generar que los estudiantes no asocien el proceso que están realizando al cálculo del área. Para esto la profesora puede realizar las siguientes preguntas: ¿Qué representa matemáticamente la cantidad de baldosas utilizadas? Pensemos la baldosa como nuestra unidad de medición, ¿cómo la podríamos llamar? Si la baldosa es nuestra unidad cuadrada de medición ¿qué calculamos entonces?

Actividad Matemática

La segunda actividad a desarrollar es la siguiente:

La señora María debe embaldosar la siguiente habitación, ¿cuál es el área de la habitación?



Esta actividad se propone como ticket de salida de la clase, su intención es evaluar si los estudiantes son capaces de aplicar los conocimientos aprendidos durante la sesión en un nuevo ejercicio. En este caso en particular, luego de la tarea matemática anterior, se desarrolla una plenaria donde los estudiantes vincularán el trabajo desarrollado en la actividad con la obtención del área de una figura rectangular, y luego viene una etapa de institucionalización por parte de la profesora, donde se plasma la generalización del cálculo del área de un rectángulo como $base \cdot altura$.

Luego de esto, se le entrega a cada estudiante un ticket de salida el cual tiene un tiempo de 10 minutos para ser desarrollado. Esta actividad matemática busca que los estudiantes sean capaces de aplicar su estrategia, pero en un nuevo contexto, en este caso en una figura compuesta.

Este problema puede ser considerado una extensión del problema anterior, ya que aún cuando se debe realizar el mismo proceso, se considera más complejo ya que el estudiante debe ser capaz de reconocer que la macrofigura está compuesta por dos rectángulos, y que para obtener el área final deberá sumar, o restar, las áreas de las subunidades por las cuales está compuesta la superficie total.

Respuesta Experta

Para resolver esta situación, se debe descomponer la macrofigura en dos sub unidades; puede ser en rectángulos de 3 x 4 m y de 2 x 4 m, o bien en rectángulo de 2 x 7m y otro de 2 x 3 m.

Se calcula el área de cada sub unidad:

$A_{R1}= 3m \cdot 4m = 12\ m^2$	$A_{F1}= 2m \cdot 7m = 14\ m^2$
$A_{R2}= 2m \cdot 4m = 8\ m^2$	$A_{F2}= 2m \cdot 3m = 6\ m^2$
$A_{TR}=A_{R1} + A_{R2}$	$A_{TF}= A_{F1} + A_{F2}$
$A_{TR}= 20\ m^2$	$A_{TF}= 20\ m^2$

En el desarrollo de este problema entra en juego un postulado de la área, el que enuncia:

<u>Postulado de la suma de las áreas</u>*:* si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las n regiones.

En este caso en particular, la región poligonal estaría compuesta por dos regiones poligonales que no se solapan, por tanto, el área total de la figura sería la suma de las áreas de las regiones poligonales, tal como se enuncia anteriormente, obteniéndose como resultado 20 m^2.

Matemática en juego, conocimientos previos y los a desarrollar

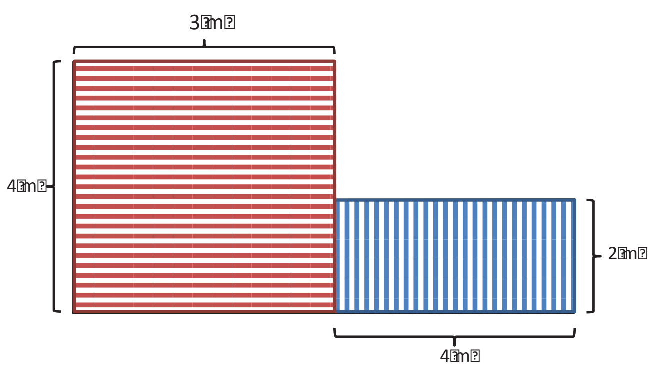
Al igual que la actividad anterior, esta tarea busca desarrollar la noción de área en figuras rectangulares. Para poder llevarlo a cabo es necesario que los estudiantes manejen las operaciones en los números naturales, deben reconocer las figuras geométricas y sus características y deben ser capaces de identificar la medida de un objeto.

Se ponen en juego la descomposición de figuras geométricas, la medición de figuras geométricas, la multiplicación de longitudes de una figura, el cálculo de área total mediante la suma de áreas parciales.

Posibles estrategias

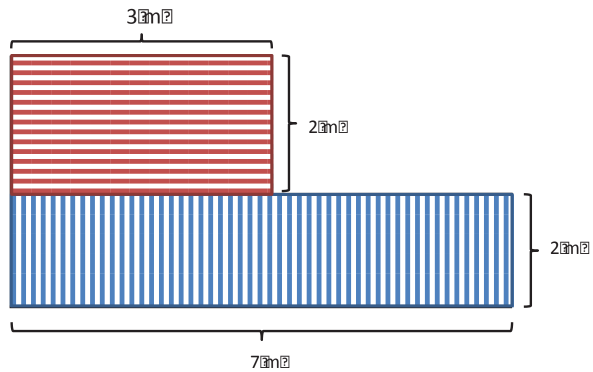
Para el desarrollo de esta tarea se consideran dos posibles estrategias de resolución:

> **E_1:** La primera estrategia es que los estudiantes descompongan la superficie en dos rectángulos: uno de 3 x 4 m y el otro de 2 x 4 m. Luego, calculen el área de cada rectángulo, obteniendo 12 m^2 y 8 m^2 respectivamente, para finalmente sumar ambas área para obtener el área total de la superficie.



> **E_2:** La segunda estrategia es similar a la primera, solo que la forma de división de la superficie es distinta. En este caso, la superficie se divide en dos rectángulos de dimensiones 3 x 2m y de 7 x 2 m, se obtienen las área

de cada uno; $6m^2$ y $14m^2$, y al igual que la estrategia anterior se suman ambas áreas obteniéndose como resultado 20 m^2.



Dificultades, errores y devoluciones

Al ser una actividad de ticket de salida, la profesora no puede ejercer preguntas de devolución ya que el objetivo de esta actividad es evaluar el logro del objetivo de aprendizaje de la sesión, por tanto los estudiantes deben responder el ticket de manera individual y sin intervención docente.

Dentro de las dificultades se puede presentar que:

- Encontrar la longitud de los lados faltantes de la superficie. Puede ser que los estudiantes no logren determinar con exactitud la medida o que no se percaten de que deben calcular la longitud de los lados.

Dentro de los posibles errores que se pueden originar tenemos:

- La multiplicación de los números que se presentan en el enunciado. Puede ser que los estudiantes no logren descomponer la figura en subunidades y procedan a multiplicar todos los números que se presentan explícitamente. De ser así efectuarían el siguiente cálculo:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 84\ m^2$$

- La obtención de la medida de los lados faltantes. Puede ocurrir que los estudiantes determinen de manera errónea la medida de los lados de la figura que no están en el enunciado, con lo que el resultado estaría incorrecto.
- Multiplicación de números que se encuentran presentes en el enunciado y/o con la longitud de los lados faltantes. Puede suceder que los estudiantes multipliquen distintas combinaciones de los números que se presentan en el problema, sin tomar en consideración el significado de cada uno de ellos como longitud de un determinado lado, sino que considerándolos solamente como una cantidad que debe ser multiplicada. Algunas de estas combinaciones podrían ser:

$$7 \cdot 3 = 21$$
$$7 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 25$$
$$7 \cdot 4 = 28$$

$$7 \cdot 2 = 14$$
$$3 \cdot 4 = 12$$

Clase N°	2	Nombre clase	¿Por qué una oferta es más barata?	Curso	5º básico
Objetivo de aprendizaje	OA 21. Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.			Asignatura	Matemática
Meta de Aprendizaje	Analizar superficies rectangulares y obtener conclusiones a partir de los elementos entregados.				
Duración	90 minutos				

Momento	Tiempo	Actividad	Respuestas de los estudiantes/ Preguntas de devolución	Indicador o Marcha de clases	Recursos
Inicio	10 min.	0. Los estudiantes a medida que van ingresando a la sala reciben una hoja con un número del 1 al 7. Se sientan en grupos de a 4 según el número que les tocó. 1. Escuchan las indicaciones generales de la clase. 2. Presentación de la meta de aprendizaje: Analizar superficies rectangulares y obtener conclusiones a partir de los elementos entregados.		0. Los estudiantes se agrupan según el número que les tocó. 1. Reconocen las normas de comportamiento propias de la clase. 2. Escuchan el objetivo a desarrollar.	--
Desarrollo	45 min.	**Desarrollo de la tarea** 3. Escuchan las instrucciones de trabajo: Cada grupo deberá buscar la solución al problema de forma colaborativa, para esto dispondrán de 45 minutos. El problema se considerará resuelto cuando todos los integrantes del grupo sepan como resolverlo. Deben establecer una estrategia común para luego ser presentada en la plenaria. En caso de que tengan dudas, deben levantar la mano y esperar su turno. Cada grupo recibe una hoja de trabajo (ver Material complementario) y desarrolla la actividad. El problema a resolver es el siguiente: *La señora María para terminar con la renovación de su hostal decide instalar una cancha de patinaje con baranda para ofrecer entretención y seguridad.* *Un vendedor le ofrece canchas de patinaje*	**Preguntas de devolución** 3. ¿Qué es lo que tenemos que hacer? ¿Qué nos están preguntando? ¿De qué forma es la cancha? ¿Cómo la podríamos construir? ¿Qué datos nos entrega el enunciado? ¿De qué servirá el dato de 20 m^2? ¿Qué nos dice este 20 m^2? ¿Qué debe ocurrir con los rectángulos? ¿Qué rectángulos cumplirían con esta condición? ¿Es único el rectángulo que cumple con la condición? ¿Se puede construir otro? ¿Qué ocurre con los lados de los rectángulos? ¿Qué pasaría con la baranda en cada caso? ¿Se utiliza la misma cantidad de baranda? ¿Por qué cambia la cantidad de baranda a utilizar? ¿Qué concepto matemático entra en juego aquí? ¿Es única la figura geométrica para una medida de área? ¿Por qué se utiliza menos baranda en un caso versus el otro? **Respuestas de los estudiantes** *Correctas* Una propuesta ocupa menos baranda oferta debido a que el perímetro de la piscina es menor. Para obtener esta respuesta los estudiantes pueden visualizar algunos de los siguientes rectángulos y analizar que ocurre con el perímetro en cada caso: $1 \cdot 20$, $2 \cdot 20$ y $4 \cdot 5$. Los estudiantes también pueden directamente buscar los factores	3. Mantienen un clima óptimo de trabajo. Trabajan de forma colaborativa. Manifiestan su opinión y respetan la de los compañeros. Expresan sus dudas e inquietudes. Buscan diversas estrategias para encontrar una solución al problema. Establecen, como grupo, una estrategia de resolución.	Hojas con problema.

		rectangulares de 20 m^2 con baranda incluida. Para esto le ofrece distintas opciones donde se utiliza distinta cantidad de baranda, pero la señora María no entiende por que se origina la diferencia en las barandas si la cancha siempre es de 20 m^2 ***¿Por qué se utiliza menos baranda en una cancha que en otra si se construyen con igual cantidad de baldosas?***	de 20 sin necesidad de dibujar los rectángulos *Incorrectas* La cantidad de metros lineales de baranda utilizada es la misma en todas las canchas. **Posibles errores y/o dificultades** Una posible dificultad se asocia con el enunciado como tal. Otra dificultad podría ser que el enunciado al no entregar mayores datos de la longitud de los lados de la cancha de patinaje rectangular, los estudiantes pueden tener dificultades para visualizar las distintas posibilidades de construcción de la figura. Otro error puede generarse si es que los estudiantes logran determinar los distintos rectángulos que tienen área 20 m^2, pero no logren comprender que el perímetro es lo que se modifica en este caso.		
	20 min	**Plenaria** 4. Un integrante por grupo pasa adelante y expone la estrategia que utilizaron para plantear la solución final. Entre todos aportan a la discusión y comparten ideas sobre la búsqueda de solución a este problema.	La profesora durante el transcurso de la clase monitorea el trabajo de los estudiantes y selecciona el orden con que presentarán las estrategias, tratando de partir por el error para trabajarlo con todo el curso, y luego desde la estrategia más simple hasta la más compleja que se presente. **Preguntas de devolución** 4. ¿Qué hicieron? ¿Qué es lo que había que hacer? ¿Cuál fue la estrategia que utilizaron? ¿Cómo llegaron a esa estrategia? ¿Qué datos utilizaron? ¿Qué rectángulos cumplían con la condición? ¿Eran todos iguales? ¿Cuándo dos rectángulos son iguales? ¿Qué es lo que se modificaba? ¿Estaban en lo correcto los vendedores? ¿Por qué una oferta es más barata entonces? Si variaba el perímetro ¿variaba también el área? ¿Solo un rectángulo tiene área de 20 m^2 o varios pueden cumplir con esta condición? ¿Y qué pasará con el perímetro, pueden haber varios con el mismo perímetro o es fijo para uno? ¿Por qué se utilizaba distinta cantidad de baranda? ¿Qué es lo que se mantiene constante? ¿Qué es lo que varia?	4. Comunican sus estrategias frente al curso. Escuchan con respeto lo expuesto por sus pares. Los estudiantes determinan que el área no es única para una rectángulo particular. Los estudiantes comprender que puede variar el perímetro sin que varíe el área.	--
	10 min	**Institucionalización** 5. Los estudiantes escuchan los comentarios de la profesora y responden a las preguntas efectuadas por ella: ¿Qué fue lo que aprendimos hoy? ¿Qué ocurría con el área? ¿Cómo eran los rectángulos? En resumen hoy aprendimos que se pueden construir distintos tipos de rectángulos para un área dada, y que lo mismo ocurre con un perímetro dado.	**Posibles respuestas de los estudiantes** 5. El área se mantenía fija, pero se podían construir distintos rectángulos. Lo que variaba es el perímetro. Aprendimos que diferentes rectángulos pueden tener la misma área. Los posibles rectángulos que originaban la cancha tenían diferentes longitudes de lados.	5. Escuchan atentamente a la profesora. Participan de la discusión. Registran en sus cuadernos lo comentado por la profesora.	Cuadernos de los estudiante s

Cierre	5 min	6. Los estudiantes resuelven el ticket de salida que se les entrega, el cual tiene la intención de rescatar los principales aprendizaje desarrollados durante la sesión.	**Posibles respuestas de los estudiantes** 6. Se espera que las respuestas estén asociadas a las conclusiones que se originaron en la plenaria, o estén asociadas a lo conversado en la institucionalización.	6. Responden ticket de salida.	Ticket de salida.

Material complementario

Hoja con problema

Ayudemos a la señora María

Nombre: ____ **Fecha:** _____________

La señora María para terminar con la renovación de su hostal decide instalar una cancha de patinaje con baranda para ofrecer entretención y seguridad.

Un vendedor le ofrece canchas de patinaje rectangulares de 20 m^2 con baranda incluida. Para esto le ofrece distintas opciones donde se utiliza distinta cantidad de baranda, pero la señora María no entiende por que se origina la diferencia en las barandas si la cancha siempre es de 20 m^2

¿Por qué se utiliza menos baranda en una cancha que en otra?

Ticket de salida

CLASE 2

Actividad Matemática

Esta clase presenta como objetivo, desde la propuesta ministerial el diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones. Se propone como meta de aprendizaje: Analizar superficies rectangulares y obtener conclusiones a partir de los elementos entregados. Para cumplir con estos objetivos, los estudiantes desarrollan la siguiente actividad:

La señora María para terminar con la renovación de su hostal decide instalar una cancha de patinaje con baranda para ofrecer entretención y seguridad. Un vendedor le ofrece canchas de patinaje rectangulares de 20 m^2 con baranda incluida. Para esto le ofrece distintas opciones donde se utiliza distinta cantidad de baranda, pero la señora María no entiende por que se origina la diferencia en las barandas si la cancha siempre es de 20 m^2 **¿Por qué se utiliza menos baranda en una cancha que en otra?**

Esta tarea busca incorporar los elementos de la TSD junto con los de la metodología ARPA. Para desarrollarla, los estudiantes se reúnen en grupos aleatorios al comienzo de la clase, luego recibe cada uno una hoja con el enunciado del problema y la leen de forma individual. Este proceso se relaciona con la etapa de Entrega propia de la metodología ARPA.

A continuación, los estudiantes comienzan a buscar estrategias de manera individual para lograr plantear una solución al problema, poniendo en juego distintos conocimientos matemáticos, llevando a cabo la prueba y error y probando distintas formas. Esta etapa se relaciona con la fase de acción de Brousseau, donde los estudiantes plantean estrategias para afrontar el problema, y también se relaciona con la fase de activación de ARPA, donde los estudiantes se involucran en resolver de manera autónoma la tarea matemática, existe un espacio para la discusión entre pares y sus dudas son aclaradas mediantes preguntas elaboradas por el profesor como respuestas.

En este problema se busca que los estudiantes analicen la situación y busquen qué rectángulos cumplen con la condición dada. El objetivo es que se percaten de que existen distintos rectángulos que poseen 20 m^2, los cuales pueden ser construidos con diferentes longitudes de lados, es decir que si bien el área es constante, el perímetro puede variar. Para poder establecer estas conclusiones es necesario que los estudiantes exploren y representen distintos rectángulos para ver cuales de ellos cumplen con las condiciones dadas.

Al ser un problema abierto, desde el punto de vista en que no se les direcciona por medio del enunciado a los estudiantes sobre cómo deben abarcarlo, se podrán

presentar dificultades que por medio de la discusión matemática entre pares se espera puedan aclarar y logren así concluir de manera correcta.
En una primera instancia, en la fase de activación, se promueve que cada estudiante luego de leer el problema busque su propia estrategia y que posteriormente se la comunique a sus compañeros, para luego decidir cual será la estrategia que utilizarán para trabajar el problema como grupo.

Cuando el grupo de trabajo cree haber encontrado una solución que satisfaga el problema presentado, se encontrarían en una fase formulación propia de la TSD, y de consolidación; etapa de ARPA.

Tal como se explica en el marco teórico, en la fase de formulación los estudiantes verbalizan sus estrategias frente a sus pares y argumentan por qué creen que esta es correcta. En estos momentos el grupo sirve de agente evaluador, ya que escucha la estrategia propuesta, emiten correcciones si es que lo consideran necesario, la complementan entre ellos o bien acatan la forma si es que esta les convence. En la etapa de consolidación el grupo cree haber resuelto el problema por medio de la selección de una única estrategia que representará al grupo.

Esta tarea no contempla una etapa de validación explícitamente en la tarea, ya que no se presentan extensiones ni se buscan generalizaciones por medio del problema presentado. Sin embargo, se pueden presentar casos de validación si es que los estudiantes se proponen por si mismos otra medida de área de una superficie rectangular y comprueben que es posible mantener el área modificando el perímetro.

Esta actividad contempla una etapa de discusión plenaria (etapa ARPA) en donde un integrante de cada grupo debe salir a la pizarra a explicar la estrategia utilizada, y argumentar porqué esta es válida, ya sea mediante la utilización de distintos conocimientos matemáticos manejados por el grupo curso, o bien probando los distintos casos posibles.

Luego, viene una etapa de institucionalización, donde la profesora por medio de las estrategias planteadas por los estudiantes, conduce los métodos a un objeto matemático y les brinda el estado cultural de saber matemático. En este caso, se llegará a la conclusión de que es posible construir rectángulos con área constante, pero con distinto perímetro, y que por esta razón se puede utilizar más o menos cantidad de baranda según corresponda.

La tarea así planteada pretende cumplir con el tránsito de las etapas propuestas de Brousseau, intentando profundizar la comprensión del área en figuras rectangulares, y en segundo lugar, buscando que los estudiantes diferencien el perímetro y el área y comprendan sus diferentes implicancias.

Eta actividad también cumple con las etapas de ARPA, pasando desde un trabajo autónomo, a la toma de decisiones como grupo y finalmente argumentado el porque de su estrategia.

Por medio de esta tarea es posible observar como la metodología ARPA se ve complementada y justificada por la TSD, presentando elementos en comunes y otros que se ven mejorados gracias a las ideas de Brousseau.

Respuesta Experta

Para desarrollar esta tarea matemática, se pone en juego la definición de área y su teorema.
Se entenderá al área como la medida de la superficie, es decir, la cantidad de veces que la región contiene a la unidad de medida.

Teorema: Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = bh$.

En esta tarea, se debe considerar el área dada de 20 m^2 y buscar los distintos rectángulos que cumplan la condición dada.

Por tanto, se puede plantear la siguiente ecuación:

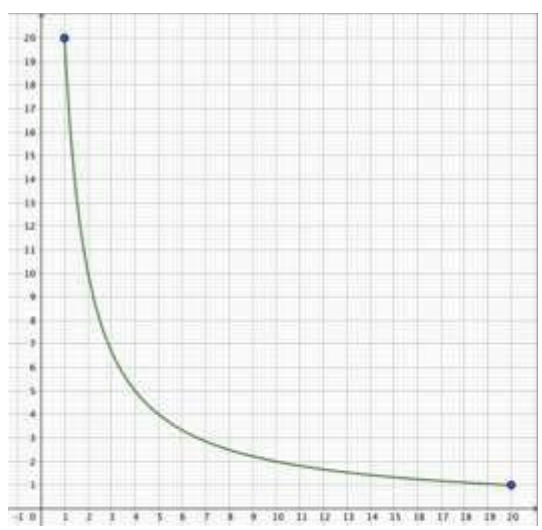
$$a \cdot b = 20, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+$$

Luego,

$$a = \frac{20}{b}$$

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,/\, a \cdot b = 20\}$$

Siendo a y b la longitud de los lados del rectángulo y ambos perteneciendo a $\mathbb{R}^+$, ya que el postulado del área enuncia que a cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominador área, que sería de 20 m^2 en este caso.



En el caso particular de tratarse de un contenido de quinto básico, en el que el ámbito numérico es el de los $\mathbb{Z}^+$ se tiene que:

Se tiene $a \cdot b = 20$

$$a = \frac{20}{b}$$

Pero sabemos que $a \in \mathbb{Z}^+$, por tanto es necesario que $\frac{20}{b} \in \mathbb{Z}^+$.

Luego, para que se cumpla $\frac{20}{b} \in \mathbb{Z}^+$, b tiene que ser divisor de 20, por tanto:

$$b = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Así, dependiendo del valor que tome b, se despeja el valor de a, según $a = \frac{20}{b}$, luego

$$(a, b) \in \{(1,20), (2, 10), (4,5), (5,4), (10,2), (20,1)\}$$

Posteriormente, para poder responder a la pregunta de por qué en una cancha se utiliza menos baranda que en la otra, se debe calcular el perímetro de los rectángulos que cumplen con la condición dada.

Clemens et al. (1998) enuncian al perímetro como "El perímetro (p) de un polígono es la suma de las longitudes de los lados del polígono" (p. 408).

Obtenemos el perímetro de los posibles rectángulos:

$$P_{R_1} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20$$
$$P_{R_1} = 2 + 40$$
$$P_{R_1} = 42$$

$$P_{R_2} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 10$$
$$P_{R_2} = 4 + 20$$
$$P_{R_2} = 24$$

$$P_{R_3} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$$
$$P_{R_3} = 8 + 10$$
$$P_{R_3} = 18$$

Se obtienen entonces los siguientes perímetros: 42m, 24m y 18m. Desde estos resultados es posible afirmar que el R_3, es decir, aquel compuesto por lados de longitudes 4m y 5m es aquel que presenta menor perímetro, y el rectángulo R_1, de lados 1m y 20 m, es aquel que presenta mayor perímetro, con un valor de 42m. Por tanto, se puede afirmar que una propuesta utiliza menos baranda que la otra dado el perímetro del rectángulo es menor en ciertos casos (R_3) manteniéndose un área de 20 m^2.

Matemática en juego, conocimientos previos y los a desarrollar

Para desarrollar esta tarea matemática es necesario que los estudiantes conozcan el conteo, las operaciones en los números naturales, el concepto de perímetro, descomposición y/o factorización de números naturales.

Durante el desarrollo se puede poner en juego la descomposición del número 20, la representación y construcción de distintos rectángulos con un área dada, la noción de área, la noción de perímetro.

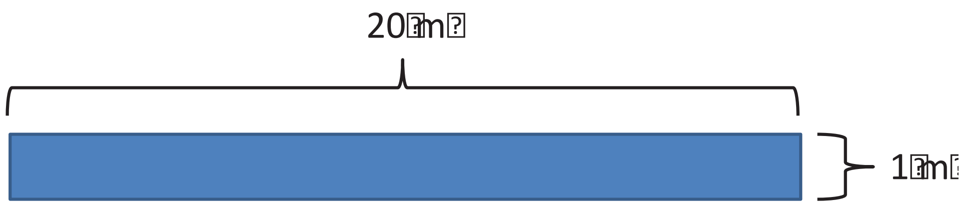
Esta actividad busca que los estudiantes sean capaces de analizar una situación y plantear conclusiones desde los conocimientos que ellos poseen. De la mano del problema, también los estudiantes conocerán que se pueden construir distintos rectángulos manteniendo un área constante, impidiendo así que atribuyan solo una forma única para un área dada.

Posibles estrategias

Dentro de las posibles estrategias encontramos:

E_1: Los estudiantes pueden dibujar distintos rectángulos que cumplan con la condición dada de área 20 m^2. Esta estrategia se puede llevar a cabo mediante la exploración de distintas medidas, o bien mediante ensayo y error. Los estudiantes obtendrán tres rectángulos distintos: 1 x 20 m, 2 x 10m y 4 x 5m. Luego de obtener estos rectángulos, deberán calcular el perímetro de cada uno de estos para obtener cuánta baranda necesitará cada una de estas propuestas de cancha.
Los posibles casos que cumplen con la condición dada son:

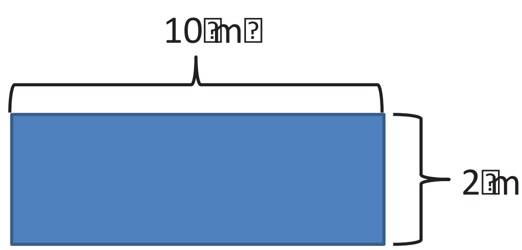
i) Rectángulo con lados 1m y 20m:



En este caso el perímetro estará dado por:

$$P_1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20$$
$$P_1 = 2 + 40$$
$$P_1 = 42\ m$$

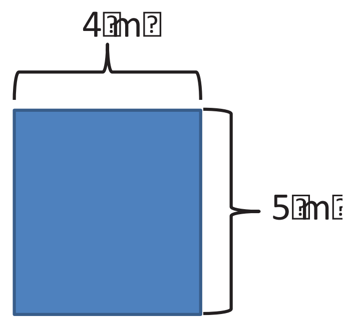
ii) Rectángulo con lados 10m y 2m:



En este caso el perímetro sería de

$$P_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 10$$
$$P_2 = 4 + 20$$
$$P_2 = 24\ m$$

iii) Rectángulo con lados 4m y 5m:



Aquí el perímetro sería:

$$P_3 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5$$
$$P_3 = 8 + 10$$
$$P_3 = 18\ m$$

Con estos tres perímetros, se observa que el menor es P_3, ya que en este caso se usarían solamente 18 metros de baranda. Por tanto, la razón de porque una cancha utiliza menos baranda que otra tiene que ver con la longitud de su perímetro.

E$_2$: Otra estrategia que pueden utilizar es buscar los factores de 20. Para esto los estudiantes pueden usar distintos registros para anotar sus cálculos, una forma podría ser que los escriban en una tabla tanteado para obtener aquellos que dan 20.

Factor 1	Factor 2
1	20
2	10
3	--
4	5
5	4
6	--
7	--
8	--
9	--
10	2

Factor 1	Factor 2
11	--
12	--
13	--
14	--
15	--
16	--
17	--
18	--
19	--
20	1

Desde esta tabla, se pueden obtener los distintos factores de 20, que serían: $1 \cdot 20, 2 \cdot 10, 4 \cdot 5, 5 \cdot 4, 10 \cdot 2$ y $20 \cdot 1$.

Dificultades, errores y devoluciones

Se pueden presentar diferentes dificultades para la resolución de esta tarea, dentro de las cuales podríamos encontrar:

- Que los estudiantes no comprendan a que se refiere que la cancha sea de 20m^2. Puede suceder que los alumnos aún no comprendan bien el objeto de área, ni sus unidades de medidas, por lo que el dato de 20m^2 podría carecer de sentido para ellos. En este caso la profesora puede realizar las siguientes preguntas de devolución para orientar a los estudiantes en la propuesta de sus estrategias: ¿Qué información nos presenta el enunciado? ¿De qué forma es la cancha? ¿Qué querrá decir 20m^2? ¿Será la longitud de uno de sus lados? ¿Por qué es m^2 y no solo m?
- Otra dificultad es que los estudiantes no logren determinar un rectángulo que tenga como área 20m^2. En este caso la profesora puede preguntar: ¿Qué significa que la cancha de patinaje sea de 20m^2? ¿Cómo se puede construir esto? ¿Qué rectángulos han probado? ¿Habrá algún otra longitud de lados que permita obtener el área dada? ¿Qué números les falta probar?
- Puede ocurrir que los estudiantes enuncien que una cancha es más chica que la otra y que por tanto se utilizará menos baranda, pero no sepan argumentar la diferencia de tamaño de las canchas. En caso de que esto sucediera la profesora puede efectuar las siguientes preguntas: ¿Por qué utilizará menos baranda en un caso que en otro?¿Cuáles son los casos que detectaron que cumplen con la condición? ¿Qué diferencias notan entre ellos? ¿cómo afectará esto en la cantidad de baranda a utilizar?

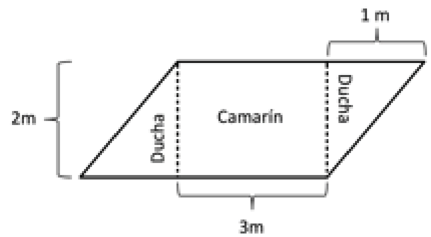
Dentro de los errores, se consideran los siguientes:

- Los estudiantes podrían contestar que se utilizan barandas distintas para las canchas y que por eso en algunos casos se utiliza menos barandas. En caso de que se presenten estos tipos de errores la profesora puede realizar las siguientes devoluciones: ¿Qué ocurre con las barandas? Y si ocupa la misma baranda ¿por qué en algunos casos podría utilizar menos que en otros?
- Los estudiantes podrían afirmar que en algunos casos se utiliza menos baranda ya que no cubriría toda la cancha. En estos casos se considera conveniente preguntar: ¿por qué ocupa menos baranda en un caso en comparación con otro? Y si se afirma que toda la cancha presenta una baranda por alrededor ¿qué pasará?
- Los estudiantes pueden considerar a 20 como la longitud de los lados del rectángulo, y responder que utilizará 80 m de baranda. En este caso, como preguntas de devolución se presentan: ¿Qué significa el 20? ¿La medida de qué? ¿Qué estaríamos calculando si obtenemos 80 m? ¿Este valor nos permite responder el porque se utiliza más o menos baranda?
- Puede ser que los estudiantes identifiquen los distintos rectángulos con área 20m^2 pero no logren concluir que el perímetro de estos es distinto y que por esa razón es posible utilizar más o menos baranda según corresponde. Frente

a este tipo de situaciones la profesora puede realizar las siguientes preguntas de devolución: ¿Qué lograron identificar? ¿Qué rectángulos obtuvieron? ¿Qué ocurre con estos rectángulos? ¿Cuáles son sus características?

Clase N°	3	Nombre clase	Y ahora ¿cómo calculo el área?	Curso	5º básico
Objetivo de aprendizaje	OA 22. Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando la siguiente estrategia: › completar figuras por traslación			Asignatura	Matemática
Meta de aprendizaje	Analizar distintas superficies y utilizar diversas estrategias para resolver un problema.				
Duración	90 minutos				

Momento	Tiempo	Actividad	Respuestas esperadas de los estudiantes/ Preguntas de devolución	Indicador o Marcha de clases	Recursos
Inicio	10 min.	0. Cada estudiante recibe una carta con un número del 1 al 7 y se sientan en grupo según el número que les tocó (se espera que se generen 7 grupos de 4 integrantes cada uno). 1. Escuchan las indicaciones generales de la clase. 2. Escuchan la meta de aprendizaje: Analizar distintas superficies y utilizar diversas estrategias para resolver un problema. 3. Activación de conocimientos previos: Los estudiantes responden a las siguientes preguntas: ¿Qué concepto matemático hemos estado estudiando? ¿Cómo generalizábamos el cálculo del área? ¿Qué ocurría con el área de un rectángulo, se podía dibujar solo uno que cumpliera con esa condición o hay varios?	3. Los estudiantes responden que el cálculo de la cantidad de baldosas se relaciona al cálculo del área de la superficie entregada. Comentan que la técnica eficiente está dada por la multiplicación de la longitud de sus lados. Los estudiantes comentan que distintos rectángulos pueden tener igual área, tal como se observó con el problema de la piscina.	0. Los estudiantes se agrupan según el número que les tocó. 1. Reconocen las normas de comportamiento. 2. Escuchan la meta de aprendizaje de la clase de hoy. 3. Los estudiantes responden a las preguntas realizadas por la profesora. 3. Los estudiantes participan activa y respetuosamente de la clase.	Cartas con número del 1 al 7 (4 set)
Desarrollo	45 min.	**Desarrollo de la tarea** 4. Escuchan las instrucciones de trabajo: Cada grupo deberá buscar la solución al problema de forma colaborativa, para esto dispondrán de 45 minutos. El problema se considerará resuelto cuando todos los integrantes del grupo sepan como resolverlo. Deben establecer una estrategia común para luego ser presentada en la plenaria. En caso de que tengas dudas, deben levantar la mano y esperar su turno. Cada grupo recibe una hoja de trabajo y	**Preguntas de devolución** 4. Los estudiantes pueden presentar dudas al enfrentar el problema, frente a lo cual la profesora deberá realizar las siguientes preguntas, según las inquietudes de los alumnos, para guiar la búsqueda de solución al problema presentado: ¿Cómo lo están resolviendo? Con respecto a la primera pregunta ¿Qué necesitan encontrar? ¿Qué información les entrega el enunciado? ¿Cómo les puede ayudar la información presente a encontrar el resultado? ¿Qué figuras geométricas ven? ¿Se acuerdan qué hicimos la clase anterior? ¿Qué es el área de una figura geométrica? ¿Cómo calculábamos el área del rectángulo? ¿Qué obtenemos de la multiplicación de la longitud del largo por el ancho? Si calculamos el área del rectángulo interior, ¿nos faltaría algo más? ¿Cómo podemos	4. Los estudiantes trabajan de forma colaborativa. Manifiestan su opinión. Buscan distintas estrategias para encontrar una solución al problema. Escuchan con respeto las ideas de sus compañeros. Identifican las distintas figuras que componen la macrofigura. Utilizan la traslación como estrategia de resolución.	Hojas con problema a resolver.

		desarrolla la actividad. Problema a resolver: *A Julián lo contrataron para que embaldosara un baño del hostal de la señora María, el cual tiene la siguiente forma:*  *Si Julián utiliza baldosas de $1m^2$* *a)¿Cuántas baldosas necesitará para embaldosar todo el baño?* *b) La señora María quiere probar un nuevo tipo de cerámica antideslizantes que Julián le ofreció, para esto decide probarla solo en una de las duchas, ¿cuántas baldosas necesitará? (La nueva baldosa también mide $1m^2$)*	calcular el área de un triángulo? ¿Qué podríamos hacer? ¿Cómo son las dimensiones de los triángulos: distintas o iguales? Si los triángulos son iguales ¿qué podemos hacer con ellos? En caso de que lo necesiten, se les puede entregar otra hoja para que recorten la superficie a trabajar. ¿Cómo podríamos calcular el área del triangulo con lo que ya conocemos? ¿Podemos formar alguna otra figura con los triángulos? ¿Y si trasladamos los triángulos para armar otra figura? ¿Se mantiene el área con la traslación? Con respecto a la segunda pregunta: ¿Qué figura logramos armar con los triángulos? ¿Cómo podemos afirmar que es un rectángulo? ¿Cómo son la medida de los lados del rectángulo formado? ¿Miden lo mismo los lados opuestos? ¿Con cuántos triángulos formamos el rectángulo? ¿Podemos conocer el área del rectángulo? ¿Cuánto sería el área de cada triángulo? Si el rectángulo está formado por dos triángulos ¿cuál es el área de un triángulo? Si el área del rectángulo es la multiplicación de la longitud del largo por el ancho ¿Cuál será la de un triángulo? ¿Cómo podemos generalizar esta expresión? . **Posibles respuestas de los estudiantes** *Correctas:* a) Necesitará 8 baldosas, ya que el área es de 8 m^2. b) Necesitará 1 baldosa, ya que el área del triángulo es de 1 m^2. *Incorrectas:* a) Necesitará 6 baldosas para cubrir la superficie. a) Necesitará 10 baldosas para cubrir la superficie. b) Necesitará 2 baldosas para cubrir un triángulo. **Posibles errores y/o dificultades de los estudiantes** a) Que calculen solo el área del rectángulo. a) Que calculen el área de cada triángulo como *base · altura* obteniendo como resultado $2m^2$ para cada triángulo, resultando 10 m^2 en total (6 m^2 + $2m^2$ + $2m^2$). b) Que calculen el área del triángulo como *base · altura* obteniendo como resultado $2m^2$.	Completan el rectángulo para calcular el área. Conjeturan acerca del área del triángulo.	
	20 min.	**Plenaria** 5. Un representante de cada grupo pasa adelante a explicar su estrategia al resto del curso, ordenados según criterio de la profesora, con la intención de desarrollar una plenaria de estrategias en la búsqueda de soluciones al problema planteado.	La profesora durante el transcurso de la clase monitorea el trabajo de los estudiantes y selecciona el orden con que presentarán las estrategias, tratando de partir por el error para trabajarlo con todo el curso, y luego desde la estrategia más simple hasta la más compleja que se presente. **Preguntas de devolución** 5. ¿Qué hicieron? ¿Cómo pensaron este problema? ¿Qué es lo que	5. Comunican sus estrategias de resolución. Argumentan utilizando lenguaje propio de la disciplina. Escuchan con atención los comentarios de sus pares.	--

			había que hacer? ¿Cuál fue la estrategia que utilizaron? ¿Cómo llegaron a esa estrategia? ¿Qué datos utilizaron? ¿Qué figuras componían la superficie final? ¿Qué podíamos hacer con estas? ¿Cómo calculábamos entonces el número total de baldosas? ¿Existe alguna otra forma de calcular el número de baldosas? Con respecto a la segunda pregunta ¿cómo podríamos saber cuántas baldosas se ocuparían solo para una ducha? ¿Qué estrategia utilizaron? ¿Qué figura tenemos aquí? ¿Cómo podríamos relacionarla con el rectángulo que estudiamos en clases anteriores? ¿Existirá alguna otra estrategia? ¿Cómo podríamos generalizar este cálculo?		
	10 min.	**Institucionalización** 6. Los estudiantes escuchan los comentarios de la profesora y responden las preguntas formuladas: ¿Cómo podríamos sintetizar lo que vimos hoy? Con respecto a la primera pregunta, ¿qué aprendimos? Vimos que el área del paralelogramo se puede calcular entonces como base · altura, dado que pudimos trasladar los triángulos para completar el rectángulo. ¿Qué ocurre con la segunda pregunta? ¿Qué surgió desde esta pregunta? ¿Cómo se puede generalizar? Descubrimos el área del triángulo, y que esta se puede generalizar como $\frac{base \cdot altura}{2}$, dado que es la mitad del área del rectángulo compuesto por dos triángulos.	**Posibles respuestas de los estudiantes** Se espera que los estudiantes respondan según lo siguiente: a) completar rectángulos, por medio de la traslación se completa el rectángulo y así se puede calcular el área. b) cálculo del área de un triángulo como la mitad del rectángulo que lo compone, también se puede ver con la traslación. En conjunto con lo expuesto en las plenarias, que servirá para complementar su información	6. Los estudiantes comparten sus opiniones respetuosamente. Registran en su cuaderno los elementos más importantes de la clase.	Cuadernos de los estudiantes
Cierre	5 min.	7. Ticket de salida Los estudiantes resuelven el ticket de salida que se les entrega: *Inventa una situación donde utilices lo aprendido hoy en clases*.	Los estudiantes crean un problema donde se requiera el cálculo del área de un paralelogramo o de un rectángulo.	7. Resuelven el ticket de salida. Incorporan elementos propios de la sesión.	Ticket de salida

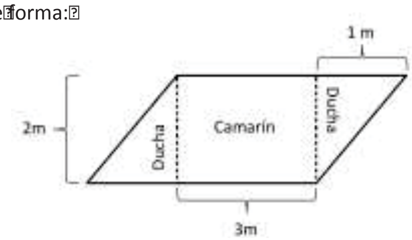
Material complementario

Hoja de trabajo

¡Ayudemos a la Señora María!

Nombre: ____ **Fecha:** _____________

A Julián lo contrataron para que embaldosara un baño del hostal de la señora María, el cual tiene la siguiente forma:

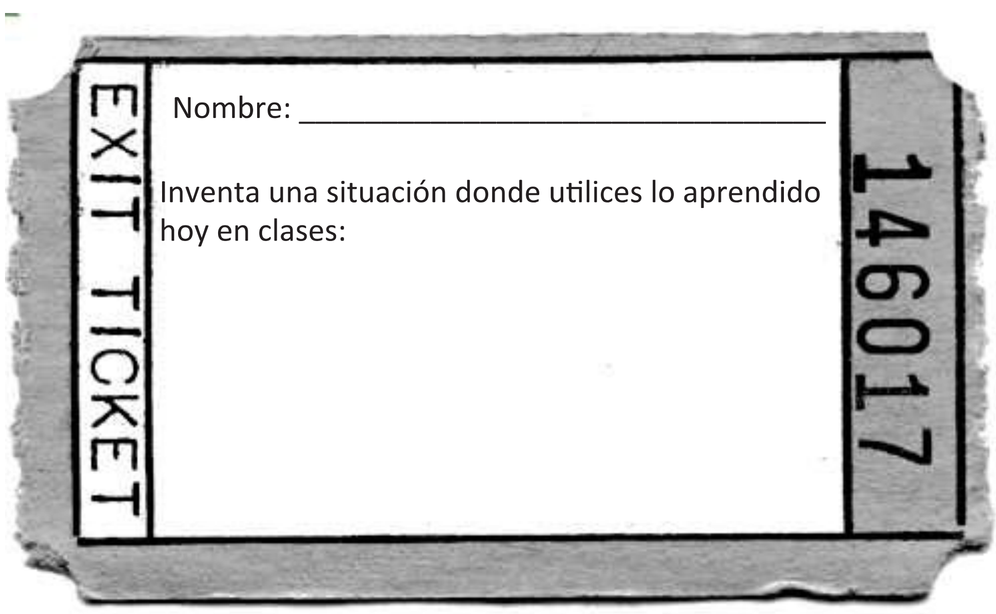


Si Julián utiliza baldosas de 1 m^2

a) ¿Cuántas baldosas necesitará para embaldosar todo el baño?

b) La señora María quiere probar un nuevo tipo de cerámica antideslizantes que Julián le ofreció, para esto decide probarla solo en una de las duchas, ¿cuántas baldosas necesitará? (La nueva baldosa también mide 1 m^2)

Ticket de Salida

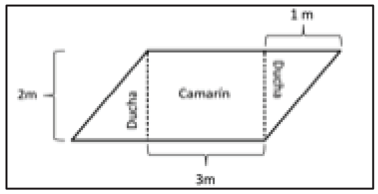


CLASE 3

Actividad Matemática

La tarea matemática es la siguiente:

A Julián lo contrataron para que embaldosara un baño del hostal de la señora María, el cual tiene la siguiente forma:



Si Julián utiliza baldosas de $1m^2$

a)¿Cuántas baldosas necesitará para embaldosar todo el baño?

b) La señora María quiere probar un nuevo tipo de cerámica antideslizantes que Julián le ofreció, para esto decide probarla solo en una de las duchas, ¿cuántas baldosas necesitará? (La nueva baldosa también mide $1m^2$).

Esta actividad presenta como objetivo desde la propuesta ministerial: Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares aplicando la siguiente estrategia: completar figuras por traslación. A los estudiantes se les presenta como meta de la clase el: Analizar distintas superficies y utilizar diversas estrategias para resolver un problema.

En la entrega, etapa de la metodología ARPA, los estudiantes se reúnen en grupo aleatorios de 4 integrantes y leen de forma individual el problema presentado. En caso de presentar dudas se las podrán realizar a la profesora, pero ella solo podrá contestar con otras preguntas que direccionen el actuar de los estudiantes.

Luego, los estudiantes comienzan con la búsqueda de estrategias que le permitirán plantear una solución a la tarea matemática. En este problema en particular, los estudiantes deben responder a dos preguntas, las cuales se encuentran conectadas ya que ambas involucran al área del triángulo, elemento que aún no ha sido estudiado por los alumnos, por tanto deben poner en juego conocimientos previos para plantear una estrategia.

La fase de acción propuesta por Brousseau se origina al momento en que los estudiantes comienzan la búsqueda de estrategias y exploración, buscando distintas formas de poder enfrentar el problema. Se espera que las estrategias estén vinculadas al conteo de cuadrículas o a la utilización de la traslación como herramienta para la solución. Esta etapa también se vincula con la de activación, propia de ARPA, la que también plantea que los estudiantes en este período buscan formas de afrontar el problema presentado.

Posteriormente, cuando los estudiantes encuentran alguna estrategia que les ayuda a encontrar la respuesta a las preguntas planteadas, las comentan con sus compañeros de grupo y entre todos comienzan a aunar opiniones para encontrar una única estrategia de solución. Este proceso se puede vincular a la etapa de formulación de Brousseau, donde los estudiantes deben verbalizar su accionar. En el momento en que los estudiantes creen haber encontrado una solución que les brinde respuesta a las preguntas, se encuentran en una etapa de consolidación según lo propuesto por ARPA, ya que es en esta etapa donde todos los integrantes del grupo serían capaces de explicar la solución al problema.

En esta planificación y diseño de la tarea no se presenta de manera específica una etapa de validación como la plantea Brousseau, ya que los estudiantes solo trabajaran en la figura entregada y no probaran o demostraran si esta se cumple para todos los casos. Lo que si ocurre es que los estudiantes deben validar su estrategia frente a sus pares en la etapa de discusión, donde un integrante por grupo deberá pasar delante de la sala y explicar al resto del curso cuál fue su estrategia de solución, y en este momento podrán ser interpelados por sus compañeros, teniendo que argumentar por que su estrategia es valida. Esto se relaciona directamente con la etapa de discusión propuesta por ARPA.

Luego de que se realiza esta plenaria de estrategias se da paso a la etapa de institucionalización propuesta por Brousseau. En este momento la profesora destaca los principales aciertos de las estrategias planteadas por los estudiantes e institucionaliza las estrategias develando que el área de un paralelogramo se calcula como $base \cdot altura$ demostrándolo con ayuda de la traslación, y luego explicando que el área del triángulo se calcula como $\frac{base \cdot altura}{2}$, ya que esta área es la mitad del área del rectángulo.

Respuesta Experta

En la solución de esta tarea matemática entran en juego la definición de área, el teorema del área y alguno de sus postulados, los cuales se detallan a continuación:

i) Teorema: Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula $A = bh$.

ii) Postulado del área de regiones congruentes: si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces, las regiones que acotan tienen la misma área.

iii) Postulado de la suma de las áreas: si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las n regiones.

iv) Postulado del área: a cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominador área. El área de la región R se representa por $A(R)$.

Para plantear una solución, se puede descomponer la figura en subunidades; un rectángulo y dos triángulos congruentes. Se calcula el área del rectángulo, luego el área de un triángulo y al considerar el postulado del área de regiones congruentes, se obtiene el área de los dos triángulos ya que son congruentes.

Luego, se hace uso del postulado de la suma de las áreas, así, para obtener el área total de la superficie se suman las área del rectángulo y de los triángulos. Así, se obtiene que se necesitarán de 8 baldosas para embaldosar todo el baño.

Para obtener el área de un triángulo, se puede hacer por medio de los postulados mencionados con anterioridad, ya que un rectángulo que posea área A_R, puede ser descompuesto en dos triángulos T_1 y T_2 , congruentes entre sí.
Luego,

$$A_R = A_{T_1} + A_{T_2}$$

pero sabemos que

$$A_{T_1} = A_{T_2}$$

así

$$A_R = 2A_{T_1}$$

finalmente

$$A_{T_1} = \frac{A_R}{2}$$

con lo que se obtendría la respuesta a la segunda pregunta.

Por tanto, considerando el desarrollo anterior, la respuesta a la segunda pregunta es que se necesita de 1 baldosa para embaldosar una ducha.

Matemática en juego, conocimientos previos y los a desarrollar

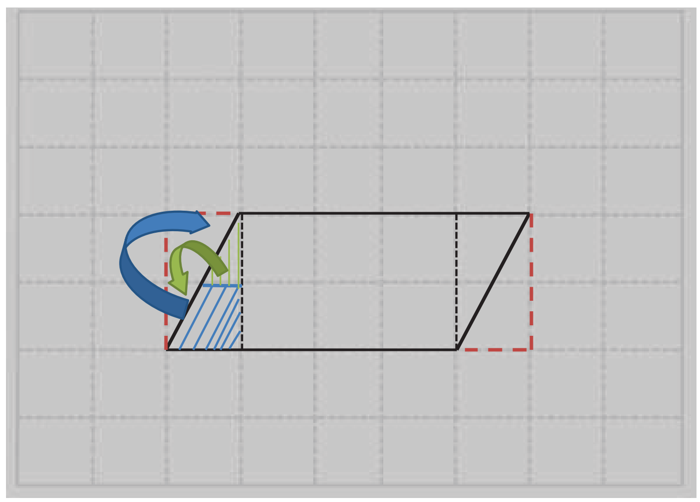
Para poder enfrentar este problema los estudiantes deben tener conocimiento de las operaciones matemáticas básicas, como suma, multiplicación y división. Junto a esto, deben ser capaces de identificar distintas figuras geométricas y manejar ciertas propiedades de estas, como por ejemplo la congruencia de los lados del rectángulo, como también el uso de las transformaciones isométricas, como la traslación.

Con esta tarea se pretende profundizar en el área de paralelogramos ya sea mediante el conteo de cuadrículas o mediante la traslación de figuras geométricas, junto a que los estudiantes sean capaces de descubrir cuál es el área del triángulo y comprender el por qué de su fórmula.

Posibles estrategias

Como posibles estrategias de los estudiantes podrían presentarse:

E_1: Los estudiantes podrían encontrar la respuesta al problema mediante el conteo de cuadrículas. Esta estrategia es trabajada desde cuarto año básico, y al ser una herramienta que ellos ya conocen podrían ponerla en juego para plantear una solución. En este caso, ellos podrían cuadricular la figura y comenzar a contar cuantas cuadrículas utiliza la superficie. Una forma podría ser que los alumnos se percataran de que en el rectángulo (con márgenes rojos) se presentan dos triángulos y dos trapecios congruentes, por lo tanto se puede rellenar solo una de cada figura, con lo que se completaría una cuadrícula, y así podrían obtener la solución final de 8 baldosas, mediante el siguiente cálculo:
6 baldosas del rectángulo interior + 1 baldosa del triángulo del lado derecho + 1 baldosa del triángulo del lado izquierdo = 8 baldosas en total.



Con respecto a la segunda pregunta, esta misma estrategia puede ser de ayuda para obtener la solución, dado que los estudiantes cuadricularon la figura, se observa que se genera un rectángulo (con los márgenes rojos) que presenta dos triángulos congruentes. Los alumnos, al ya conocer como calcular el área de un rectángulo, pueden obtener el área total de este que sería:

$$1\ m \cdot 2\ m = 2m^2$$

luego, al ser esta el área del rectángulo, el área de cada triángulo sería

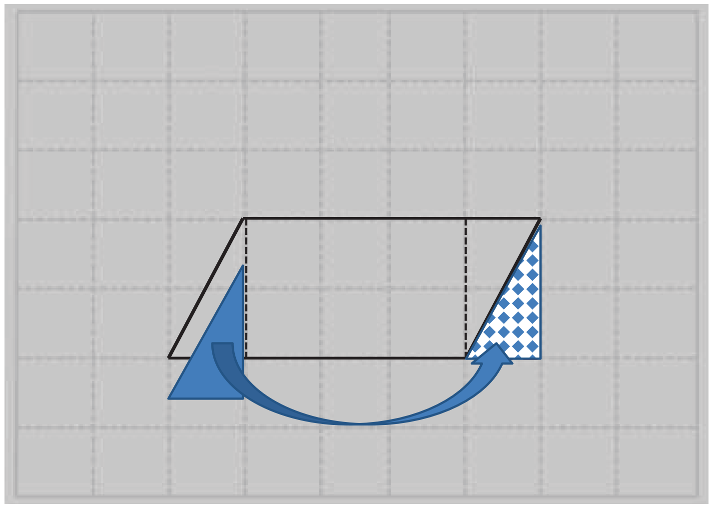
$$\frac{2m^2}{2} = 1m^2$$

ya que el rectángulo se encuentra compuesto por dos triángulos congruentes.

E_2: Otra posible estrategia de solución se relaciona con el uso de la traslación. En este caso, los estudiantes podrían recurrir a la traslación del triángulo que corresponde al sector de la ducha según el enunciado, y posicionarlo bajo el otro triángulo, formando así un rectángulo.
De esta forma, les quedaría un rectángulo de cuatro cuadrículas por dos cuadrículas, con lo cual podrían calcular la cantidad de baldosas según el siguiente cálculo:

$$4 \cdot 2 = 8$$

o bien podrían proceder a contar las cuadrículas contenidas en el rectángulo, con lo cual llegarían a la respuesta de que se necesitan 8 baldosas para cubrir toda la superficie.



Con respecto a la segunda pregunta, esta misma traslación le otorgaría herramientas para descubrir como se calcula el área de un triángulo. Por medio de la traslación se construye un rectángulo de 1 cuadrícula x 2 cuadrículas, y tal como se observa en la figura, este rectángulo está compuesto por dos triángulos congruentes, por lo tanto el área de cada uno de estos triángulos correspondería a la mitad del área del rectángulo. Así:

Área del rectángulo: $1\ m \cdot 2\ m = 2m^2$

Área de un triángulo: $\frac{2m^2}{2} = 1m^2$

Por lo tanto, se utilizaría solo una baldosa para cubrir una ducha con la cerámica antideslizante.

Dificultades, errores y devoluciones

Como dificultades podría ocurrir que:

- Los estudiantes no sepan como abordar el problema, comentando que no conocen la figura propuesta. Para afrontar esta dificultad la profesora puede realizar las siguientes preguntas: ¿Qué figuras observan en el problema? ¿podría haber alguna forma de obtener figuras conocidas para ustedes? ¿se podría descomponer de alguna forma para obtener otras figuras geométricas?

Entre los errores se puede mencionar:

- Los estudiantes podrían calcular solo el área del rectángulo interior, ya que es la figura que han trabajado hasta el momento. Frente a esto la profesora pregunta: ¿Qué calcularon? ¿Qué figuras observan? Con ese cálculo ¿abarcarían toda la superficie? ¿quedaría alguna zona sin ser embaldosada?
- Otro posible error sería que los estudiantes, al momento de enfrentar el triángulo, utilizaran la misma estrategia que para el rectángulo, con lo que calcularían su área como $base \cdot altura$, obteniendo $2m^2$ para cada triángulo,

resultando un área total del $10m^2$. En caso de que esto ocurriera, se deben realizar las siguientes preguntas de devolución: ¿Qué figuras observas? ¿Son iguales el triángulo con el rectángulo? ¿Notas alguna diferencia en la superficie que ocupan? ¿Cuál ocupa más? ¿Qué notas de especial en el rectángulo? ¿Cómo podríamos relacionar el triángulo con el rectángulo? ¿Qué figura geométrica podemos formar a partir de los triángulos?

- Otro error podría ser que los estudiantes dijeran que se necesitan 6 baldosas para cubrir las duchas. De ser así se preguntaría: ¿Qué calculaste? ¿Qué lados consideraste? ¿A qué corresponden esas longitudes? ¿Me lo puedes enseñar? ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?
- También podría suceder que los estudiantes para calcular el área total de la superficie multiplicaran $2\ cuadrículas \cdot 3\ cuadrículas$ que corresponde al área del rectángulo, y que luego ese resultado lo multiplicaran por 2, dato obtenido de la altura del triángulo, lo que les arrojaría un resultado de 12 baldosas para cubrir toda la superficie. Si la profesora observa este error, puede realizar las siguientes preguntas de devolución para orientar el trabajo de los alumnos: ¿Cómo calcularon el área? ¿Me pueden mostrar cuáles son los datos que utilizaron? ¿Cómo obtuvieron el área del rectángulo ¿Por qué se multiplica por 2 nuevamente? Y si tuviera dos rectángulos ¿cómo calcularía el área? ¿Se usaría el mismo cálculo que para la superficie del problema?

ESTUDIO DE CLASES

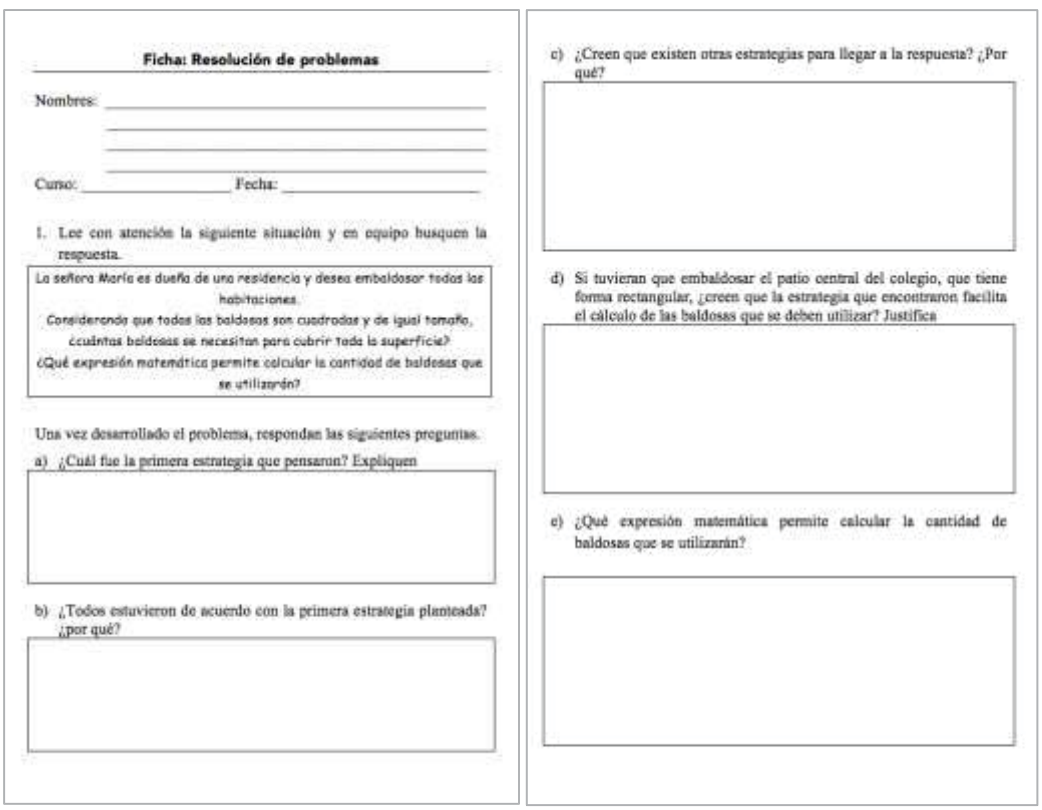
A continuación se presenta un estudio de clases a partir de un plan de clases que se crea en conjunto con estudiantes del programa de magíster en didáctica de las matemáticas, obteniéndose distintas mejoras que van en pos del proceso de construcción del área de figuras geométricas luego de sus iteraciones.

Este plan de clases tiene como actividad matemática principal un problema que deberá ser resuelto por estudiantes de 5º básico, donde mediante la búsqueda de diversas estrategias y la puesta en juego de distintas herramientas y conocimientos, podrán plantear la solución esperada.

Actividad matemática

La señora María es dueña de una residencia y desea embaldosar todas las habitaciones. Considerando que todas las baldosas son cuadradas y de igual tamaño, ¿cuántas baldosas se necesitan para cubrir toda la superficie? ¿ Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas se utilizarán?

Guía de trabajo



Ficha: Resolución de problemas

Nombres: ____________________

Curso: __________ Fecha: __________

1. Lee con atención la siguiente situación y en equipo busquen la respuesta.

La señora María es dueña de una residencia y desea embaldosar todas las habitaciones. Considerando que todas las baldosas son cuadradas y de igual tamaño, ¿cuántas baldosas se necesitan para cubrir toda la superficie? ¿Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas que se utilizarán?

Una vez desarrollado el problema, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue la primera estrategia que pensaron? Expliquen

b) ¿Todos estuvieron de acuerdo con la primera estrategia planteada? ¿por qué?

c) ¿Creen que existen otras estrategias para llegar a la respuesta? ¿Por qué?

d) Si tuvieran que embaldosar el patio central del colegio, que tiene forma rectangular, ¿creen que la estrategia que encontraron facilita el cálculo de las baldosas que se deben utilizar? Justifica

e) ¿Qué expresión matemática permite calcular la cantidad de baldosas que se utilizarán?

ANÁLISIS A POSTERIORI

La clase fue implementada en un colegio particular subvencionado de la comuna de San José de Maipo, el cual presenta un índice de vulnerabilidad entre un 12,01 y 43%, según lo que declaran los datos del SIMCE. La profesora que implementa la clase imparte la asignatura en ese curso desde comienzo de año. La materia se trabaja en 7 horas a la semana de las cuales 2 son destinadas a geometría.

En general las clases de matemática se desarrollan de la siguiente manera: en un principio la profesora explica el contenido en la pizarra, elaborando preguntar para ir sondeando el aprendizaje de los estudiantes. Luego de que son resueltas las principales dudas, los estudiantes desarrollan los ejercicios relacionados al contenido del día en pareja, y finalmente revisan a nivel de grupo curso las respuestas obtenidas.

Al momento de ser implementada la clase se encontraban presentes 36 estudiantes de 45, quienes se agruparon en 10 grupos de trabajo. Esta clase fue distinta de la clase habitual de matemática. En esta ocasión se les entregó un problema matemático, el cual debían desarrollar en grupo, luego presentar su estrategia frente al grupo curso, y finalmente el profesor realizaría una síntesis de las estrategias utilizadas y develaría el contenido trabajado.

Tras la aplicación del plan de clases, se puede afirmar que la actividad fue exitosa. Los estudiantes fueron capaces de utilizar distintas estrategias, apoyarse con el material concreto y plantear una solución.

Desde las posibles estrategias, se observa que utilizan dos de las propuestas con anterioridad. Cuatro grupos utilizaron la estrategia de marcar todas las baldosas a lo largo de la superficie y luego proceder al conteo para obtener el número de baldosas que cubrirían toda la superficie. Por otra parte, cuatro grupos utilizaron la estrategia de multiplicar la cantidad de baldosas que cabían a lo largo y ancho, es decir, filas por columnas, y obtenían el resultado final. En esta implementación no se observa la utilización de la suma iterada como estrategia de solución.

Cabe destacar que emergió una estrategia que no se tenía contemplada en el análisis a priori. Dos grupos de estudiantes procedieron a medir la superficie rectangular y la baldosas que les fue entregada con ayuda de una regla que tenían como parte de sus útiles escolares básicos. Luego, para obtener la cantidad de baldosas que se necesitarían para embaldosar todo el piso, los estudiantes dividieron la medida de la superficie por la medida de la baldosas.

CONTRASTE ENTRE DOS ANÁLISIS A MODO DE CONCLUSIONES

Desde los análisis aquí expuestos, se observa que no existe una mayor diferencia entre las posibles estrategias a utilizar (señaladas en la secuencia didáctica), solo la emergencia de una nueva estrategia la que involucraba la utilización de material complementario (una regla) para poder plantear la solución. En este caso, se debió haber aclarado a los estudiantes que la intención de la clase era que trabajaran solo con el material que les fue entregado, pero la profesora los dejó continuar dado que de igual forma llegaron con éxito a la respuesta esperada.

Con respecto a los posibles errores y dificultades, estos se encontraron asociados principalmente a la medición de las superficies con la regla. Los grupos que midieron no lo realizaban con exactitud obteniendo números decimales como medida, lo que dificultaba en gran parte poder realizar la división. En este caso, la profesora se les acercó y les ayudó a descubrir cuál había sido el error en su medición, por medio de preguntas como ¿Cómo midieron? ¿Dónde se coloca el 0? Esto debido a que al momento de medir, los estudiantes situaban el comienzo de la regla al inicio de la superficie, no alineando el 0 con el material.

Como se menciona anteriormente, se considera que la clase fue desarrollada con éxito, ya que los 10 grupos lograron plantear una respuesta correcta, fueron capaces de explicar frente a sus compañeros cómo lo habían realizado, y luego, a través de una plenaria se llegó a la conclusión de que el objeto que se había trabajado en la sesión correspondía al área de figuras rectangulares.

Según lo descrito en ambos análisis, se puede afirmar que el desarrollo se asemejó bastante a lo que se había propuesto tanto en la planificación como en el análisis a priori, destacándose aquí la ventaja de tener un análisis a priori detallado. En este caso, la profesora al evidenciar alguno de los errores o dificultades esperados, ya sabía como manejarlos y que preguntas de devolución realizar para que los estudiantes pudieran seguir avanzando, o bien verificar rápidamente si la respuesta que brindaba algún grupo era la correcta.

Se resalta la idea entonces de siempre contar con una planificación revisada por el profesor a cargo de la clase, que conozca los ejercicios o problemas a los cuales se irán a enfrentar los estudiantes, evitando así generar mayores obstáculos, o bien contar con las herramientas necesarias para poder andamiar a los estudiantes con la intención de contribuir en su proceso de aprendizaje.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

El área de figuras geométricas es considerada por el currículum, siendo introducida en sus bases curriculares a partir de 4º año básico, para proseguir con su estudio a lo largo de la escolaridad, siendo un objeto que entrega importantes bases para el trabajo en geometría y medición.

Desde los antecedentes expuestos, es posible evidenciar como este objeto ha sido estudiado por distintos investigadores, que dan cuenta inclusive de las dificultades y obstáculos que presenta su enseñanza y comprensión.

Por tanto, se considera necesario buscar estrategias docentes que ayuden a mitigar esta dificultad asociada a la comprensión del objeto en cuestión, y en este caso diseñar una secuencia didáctica que se proponga mitigar las dificultades asociadas a la comprensión del área.

Es importante que al momento de diseñar una secuencia didáctica esta presente coherencia, es decir que persiga un objetivo común a lo largo de todas las clases, y permita el tránsito por parte de los estudiantes de los distintos aprendizajes esperados.

Al crear una tarea matemática, se debe tener en consideración los conocimientos previos que poseen los estudiantes, cuáles son aquellos que pondrán en juego y cuáles son aquellos que se quieren desarrollar mediante la resolución del problema. Si estos no se encuentran en concordancia, el trabajo del estudiante se verá dificultado no porque no tenga los conocimientos o habilidades necesarias para desenvolverse, sino por que el diseño en sí no es propicio para la comprensión de los objetos matemáticos en cuestión.

Es importante también anticiparse a las posibles dificultades o errores que puedan presentar los estudiantes, para así planificar preguntas de devolución que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes, y no se comentan efectos propios del desempeño docente como lo es el efecto Topaze.

El diseñar una secuencia didáctica a la luz de una teoría contribuye al orden y a los objetivos que el docente pretende desarrollar en sus estudiantes, ya que al ser planificado de esta forma, las clases poseen un hilo conductor que permite a los alumnos comprender los objetivos y la forma en que se desarrolla la clase. Brinda también a la docente a cargo hacer elecciones en base a supuestos que debiera ir verificando a lo largo de la sesión para provocar los resultados esperados según el diseño realizado.

Desde lo aquí expuesto se puede destacar la importancia de una planificación detallada y que sirva como guía al docente para contribuir en el andamiaje y en la posibilidad de entregarle a los estudiantes las herramientas necesarias para que construyan de manera óptima el conocimiento matemático esperado.

Por medio del desarrollo de este trabajo se pueden levantar distintas cuestiones trascendentes para la práctica pedagógica. La primera de ellas es la importancia de conocer en profundidad el objeto matemático que se trabajará en clases. Si el docente conoce el objeto, está informado sobre cómo se presenta tanto en el saber sabio y en el saber escolar, será capaz de proponer una estrategia de trabajo que busque estrechar esta distancia entre saberes y planificar actividades con sus respectivas preguntas de devolución, que vayan en pos del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Aun cuando no sería posible, por los tiempos reales que implica un año escolar, realizar un estudio de esta índole para cada objeto a enseñar, se considera que sería interesante y nutritivo para la práctica pedagógica seleccionar algunos objetos que se considere ocasionan mayores dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, y llevar a cabo, en la medida de lo posible, un estudio detallado de cómo es presentado en los saberes erudito y escolar, y generar actividades que busquen disminuir la distancia pero brinden a los estudiantes un medio idóneo para la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alagia, H., Bressan, A y Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Alda, F. L., & Hernández, M. D. (1998). Resolución de problemas. *Cuadernos de Pedagogía*, *265* (31), 28-32.

Alfaro, S., Espinoza, Y. y Cano, S., (2014).*Matemática – Cuarto básico*. Ediciones Galileo.

Arboleda González, G. (2015). *Propuesta de enseñanza aprendizaje de la geometría de las figuras planas en básica primaria*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/52576/

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación Matemática, (13)* 3, 5 – 21. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol13/02Avila.pdf

Ávila, J., Fuenzalida, C., Jiménez, M. y Ramírez, P. (s/f). *Matemáticas 5º básico, Tomo II*. Santiago, Chile: Santillana

Ávila, J., Castro, C., Merino, M y Ramírez, P. (s/f). *Matemáticas 6º básico, Tomo II*. Santiago, Chile: Santillana

Batarce, Y., Cáceres, B. y Kukenshoner, C. (s/f.). *Matemáticas 4º básico, Tomo I*. Santiago de Chile: Santillana.

Boyer, C. (1986).*Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Bressan, A. M., Bogisic, B., y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica: mirar, construir, decir y pensar*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones novedades educativas.

Brousseau G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Trabajos de Matemática*, (19).

Brousseau G. (1999): "Educación y Didáctica de las matemáticas", en Educación Matemática, México.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid, España: Pearson Educación.

Clemens, S. , O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometría*. México: Pearson Educación.

Colmenares, A. y Piñero, M. (2008). LA INVESTIGACIÓN ACCIÓN. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas. *Revista de Educación*, *14*(27), 96 – 114.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

González Puello, R. (2016). *La construcción del concepto de área de figuras planas en un aula inclusiva de grado décimo*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
Recuperado de
http://www.bdigital.unal.edu.co/56680/2/1030582436.2017.pdf

Hernández, R., Férnandez, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill Education.

Ho Kheong, D., Kee, G. y Ramakrishnan, C. (2017). Matemáticas 5º básico. Santiago, Chile: Santillana.

Ignacio, N. G., Nieto, L. J. B., & Barona, E. G. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, *340*, 551-569.

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en MATEMÁTICAS*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de Resolución de Problemas en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases.* Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Maldonado, L. y Castro, C. (2016). *Matemáticas 6º básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Martínez, M. (2015). *Una propuesta para articular área y medida usando la TSD, en alumnos de nivel superior*. (Tesis de maestría inédita). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/6113

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares – Matemáticas*. Santiago, Chile.

MINEDUC (2012). *Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y Final en Resolución de Problemas 4º año de Educación Media*. Santiago, Chile.

MINEDUC (2013). *Programa de Estudio Quinto Año Básico*. Santiago, Chile.

MINEDUC (2013). *Programa de Estudio Sexto Año Básico*. Santiago, Chile.

Morán, D. (2014). *De la integral como herramienta a la integral como noción formal: de las cuadraturas a la integral de Cauchy.* (Tesis de grado inédita). Universidad del Valle, Santiago de Cali.
Recuperado de
http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7676/1/3487-0473500.pdf

Panizza, M. (2003). Conceptos Básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. En M, Panizza, *Enseñar matemática en Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB* (pp 59 – 71). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Piaget, J. (1970). Inteligencia y adaptación biológica. En Nuttin, J. y Piaget, J. (Eds.),*Los procesos de adaptación* (pp. 69 – 84). Buenos Aires, Argentina: Proteo.

Ponte, J.P (2005) Gestão curricular en Matemática. *O profesor e o desenvolvimento curricular*, pp.11 – 34. Traducción libre de Ponte, realizada por Francisco Rojas, enero 2014.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Educación e Historia*, *15*(2), 103-127.
Recuperado de
http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/1828/1/V.15-No2-p.103-127.pdf

Reyes, C., Dissett L. y Gormaz R. (2013). *Geometría. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de Educación Básica.* Santiago. Chile: Ediciones SM Chile.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, *5*, 13-66.
Recuperado de
https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Sánchez, N. M. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Pedagogía Universitaria*, *8*(3), 81 – 88.

Stewart, J. (2007). *Cálculo: trascendentes tempranas* (4ta ed.). México: Thomson Editores.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, *16* (2), 233-249. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21531/21365

Tierney C., Boy C. y Davis G. (1990). Prospective primary teachers conceptions of area. *Procceding Fourteenth PME*, (2), 307 - 315.

Vera Barrios, D. (2013). *Sobre el estudio de la función cuadrática y su relación con el área de algunas figuras y su visualización usando CABRI II PLUS*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/39694/8/1186881.2013.pdf