

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO-CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS



**Desde el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales
de 2×2 y 3×2 hasta algunos conceptos básicos del Álgebra Lineal**

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

De: Samuel Campos Cid

Profesores Guías:

Arturo Mena Lorca

Raimundo Olfos Ayarza

Patricia Vásquez Saldías

2017

INTRODUCCIÓN	4
LOS SEL DESDE EL SABER ESCOLAR Y ERUDITO.....	6
DISTANCIA ENTRE EL SABER ESCOLAR Y ERUDITO	6
ANÁLISIS CURRICULAR	8
ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES.....	12
ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ERUDITOS	15
BREVE ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO	18
MARCO TEÓRICO	21
LA CLASE DEL ESTUDIO DE CLASES	25
EL PLAN DE CLASES.....	25
ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	29
SECUENCIA DIDÁCTICA	37
ANÁLISIS PRELIMINAR	37
CLASES 1 Y 2.....	38
DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE LAS CLASES 1 Y 2.....	38
RESPUESTA EXPERTA DE LAS TAREAS PLANTEADAS EN LA CLASE 1	38
PLAN DE LA CLASE 1.....	41
CLASES 3 Y 4.....	45
DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE LAS CLASES 3 Y 4.....	45
RESPUESTA EXPERTA DE LAS TAREAS PLANTEADAS EN LA CLASE 3	46
PLAN DE LA CLASE 3.....	49
CLASES 5 Y 6.....	53
DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA DE LAS CLASES 5 Y 6.....	53
RESPUESTA EXPERTA DE LAS TAREAS PLANTEADAS EN LA CLASE 5	53
PLAN DE LA CLASE 5.....	55
REFLEXIONES FINALES	59
REFERENCIAS	61
ANEXOS.....	63
MATERIAL PARA EL ESTUDIANTE. GUÍAS DE TRABAJO DESDE LA SESIÓN 1 A LA 6 ..	64
PLAN DE CLASES SESIÓN 0.....	81

INTRODUCCIÓN

En el currículo de matemática en Chile, durante el primer año de enseñanza media, en la unidad de Álgebra se deben enseñar los sistemas de ecuaciones lineales (en adelante SEL) y sus métodos de resolución. El objetivo de aprendizaje 4 declara: *resolver sistemas de ecuaciones lineales (2×2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo* (MINEDUC, 2016, p. 60).

Este contenido tiene múltiples aplicaciones tanto en ámbitos escolares como universitarios y profesionales. Por ejemplo, podemos destacar el balanceo de ecuaciones químicas mediante SEL y computación (Regalado, Delgado, Martínez y Peralta, 2014), el análisis y diferenciación de señales en ingeniería (Vásquez, Romo y Trigueros, 2016) o el procesamiento digital de imágenes (Jácome, Torres y Araujo, 2017).

El uso de los SEL en el ámbito profesional ha generado un mayor interés en el estudio de su enseñanza y aprendizaje. Entre otros estudios podemos mencionar algunos que evidencian y describen ciertas dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de este objeto matemático. Por ejemplo, Ochoviet (2009) sostiene que los estudiantes que requieren transitar de la representación gráfica de un SEL a la algebraica presentan mayores dificultades que pasar de la representación algebraica a la gráfica. Esta misma autora explica esta dificultad basándose en la teoría de registros de representación semiótica de Duval, particularmente en la no conversión de las diferentes representaciones de SEL de parte del estudiante.

Por otra parte, así como hay autores que se han dedicado a estudiar las problemáticas de enseñanza-aprendizaje asociadas al estudio de los SEL, también existen autores que ofrecen secuencias didácticas y propuestas de clases para abordar la enseñanza de este tema.

Por ejemplo, Segura (2004) propone una secuencia didáctica donde las actividades conjugan diferentes registros de representación semiótica. Otra investigación es la propuesta por Figueroa (2013). Ella propone una secuencia de clases enfocada a estudiantes de cuarto año de enseñanza secundaria bajo la teoría de las situaciones didácticas. Su propuesta se caracteriza por pedirle a los estudiantes la creación de nuevos problemas asociados a los SEL y que los analicen mediante Geogebra. Por otro lado, Bozalla y García (2014) proponen una secuencia didáctica donde comienzan con el análisis gráfico hasta llegar a los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 .

Como se puede apreciar, los SEL han sido objeto de muchos estudios en los últimos años. No obstante lo anterior, los SEL no tienen una prosecución directa en el currículo escolar. Por ejemplo, en los planes diferenciados de matemática para la enseñanza media científico-humanista en III medio nos encontramos con una profundización del lenguaje algebraico, lugares geométricos y programación lineal (MINEDUC, 2001). A su vez, en IV medio se propone el estudio de procesos infinitos, funciones polinomiales y funciones trigonométricas (MINEDUC, 2002). Constatamos que, salvo el contenido de programación lineal, ninguno de los otros contenidos propuestos para esta profundización desarrollan los SEL para estudiar nuevos objetos matemáticos. Esta carencia, sumada a la priorización del análisis de funciones en el plan diferenciado matemático de IV medio, dio origen a la siguiente

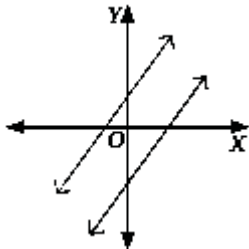
secuencia didáctica. El objetivo de esta propuesta es complementar esta formación diferenciada en los estudiantes que hayan escogido el diferenciado matemático en III y IV medio. En específico, queremos *desarrollar en los alumnos de III y IV las nociones básicas del Álgebra Lineal a partir del estudio de los SEL.*

LOS SEL DESDE EL SABER ESCOLAR Y ERUDITO

Distancia entre el saber escolar y erudito¹

Los textos del *saber sabio* (o *erudito*) que se consultaron fueron Álgebra Lineal de Juan De Burgos (1993) y Álgebra Lineal de Kenneth Hoffman (1973). Por otro lado, desde el *saber escolar* se analizaron los textos ministeriales de 1º y 2º medio. A continuación, se muestra un cuadro comparativo donde se evidencian las distancias que se presentan entre el saber sabio y el saber escolar del mismo objeto matemático (Tabla 1).

Tabla 1:
Diferencia entre el saber sabio y saber escolar

Característica	Saber sabio	Saber escolar
Tamaño del sistema	$\begin{matrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n = y_m \end{matrix}$ m filas y n columnas	$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ 2 filas y 2 columnas
Sistema numérico de los coeficientes	Cuerpo K (reales o complejos)	Racionales (1º medio) y reales (2º medio)
Conjunto solución	n -tupla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$	Par ordenado (p, q)
Registros de representación	$AX = Y$ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ and } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ Registro matricial	 Registro gráfico

Nota: Información del saber sabio es recuperada de los textos de Álgebra Lineal de Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973) y De Burgos (1993)

En la Tabla 2 podemos ver las distancias entre el saber sabio y el saber escolar para algunas características de este objeto matemático, características que denominamos como criterios en esta tabla. Los criterios analizados van desde la

¹ Tanto la Tabla 1 como la Tabla 2 de este capítulo son producto del análisis *a priori* del Estudio de Clases desarrollado en conjunto por los profesores Luis Muñoz, Valeria Pastén, Nicolás Piña, Ricardo Romero y el autor de esta investigación.

extensión, o tamaño de los sistemas hasta el análisis del conjunto solución o sus posibles clasificaciones.

Tabla 2:
Comparación entre textos de Álgebra Lineal y textos escolares

Criterio	Textos de Álgebra Lineal	Textos escolares
Extensión	En Hoffman (1973), se presenta el sistema cuyo número de filas y número de columnas puede ser igual o distinto	En los textos del saber escolar se considera un caso particular (sistema de 2×2).
Coeficientes	Los coeficientes se encuentran en un cuerpo K . Sin embargo, en Burgos se particulariza este cuerpo K a los cuerpos de los números reales y los números complejos.	En primero medio, se especifica que para el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ los coeficientes a, b, c, d, e y f se encuentran en los números racionales, mientras que en segundo medio se amplía el sistema al cuerpo de los números reales.
Conjunto solución	El conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales se presenta como n -tuplas, donde los valores de las incógnitas son los elementos de estas secuencias.	En el texto de primer año medio los valores de las incógnitas son presentados como los valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones a la vez, en cambio en segundo medio se establece que el conjunto solución de un SEL de 2×2 (salvo algunos ejemplos escasos de sistemas de 3×3) corresponde a un par ordenado (2-tupla) de la forma (p, q) , relacionando esta representación con los puntos sobre el plano cartesiano. De este modo, se prioriza el caso donde el sistema tiene solución única, por sobre los otros dos casos, solución vacía o soluciones infinitas.
Registros de representación	En los libros del saber sabio se usa el registro matricial, donde los elementos del conjunto solución son n -tuplas o matrices.	Los registros de representación en los textos del saber escolar son el gráfico, donde cada ecuación corresponde a una recta en el plano XY y el conjunto solución es representado por los puntos de intersección de las dos rectas que componen el sistema, y el algebraico, por medio de ecuaciones.

Resolución	Se propone trabajar los sistemas utilizando la técnica de eliminación. En su forma matricial, el método de resolución que se propone es el método de Gauss-Jordan usando pivotes y eliminación usando operaciones filas o columnas.	En los textos de educación media se propone revolver los sistemas utilizando los métodos de resolución, gráfico, sustitución, reducción e igualación.
Clasificación	Se presentan casos particulares de sistemas. Si las ecuaciones están todas igualadas a cero, se menciona que el sistema se denomina <i>homogéneo</i> .	Esta clasificación no se encuentra registrada en alguno de los libros de textos del saber escolar. La única clasificación es la que se hace en función de la cantidad de soluciones (<i>compatible determinado</i> , <i>compatible indeterminado</i> e <i>incompatible</i>). Sin embargo esta clasificación es tratado en 3º medio.

En síntesis, la distancia entre el saber sabio y el saber escolar radica en el tamaño del sistema de ecuaciones lineales asociado y el sistema numérico en el que se trabajan los coeficientes del sistema. Esta diferencia influye en el tipo de representaciones que se utilizan, ya que hasta un sistema de 3×3 su representación gráfica puede ser visualizada en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo los SEL con más variables no tienen una representación gráfica natural y la forma de expresarlos es, en general, como matrices. Entender esta limitación es fundamental, ya que proponer estudiar los SEL a partir de la representación gráfica (modo sintético-geométrico) solo porque sí no tiene sentido debido a la limitante de la representación visual en 3 dimensiones. La propuesta se fundamenta en desarrollar una mayor comprensión de la aritmética y del álgebra de los SEL a partir de su representación gráfica, o dicho en términos de los modos de pensamiento, desarrollar una mejor comprensión del modo analítico-aritmético a partir del sintético-geométrico y llegar a estudiar aspectos básicos del modo analítico-estructural.

Análisis curricular

Como ya hemos mencionado, los SEL son estudiados en dos niveles de enseñanza: en 1º y en 2º medio. De modo que, los estudiantes que este año cursen primero medio, estudiarán los SEL debido al ajuste curricular implementado a partir del 2017. Sin embargo, el antiguo programa establecía que en segundo año medio los estudiantes desarrollarían el estudio de los SEL. Para este nivel, el año de implementación de la nuevas bases curriculares es 2018.

Para comprender la forma en que se construye y articulan los conceptos previos necesarios para desarrollar los SEL expondremos en la Tabla 3 el tránsito de este objeto matemático y sus conceptos previos más cercanos desde 3º básico hasta 2º medio.

Tabla 3:
Tránsito del objeto matemático en el currículo escolar chileno

Nivel	Objetivo de aprendizaje
Tercero Básico	Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.
Cuarto Básico	Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.
Quinto Básico	Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.
Sexto Básico	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: > usar una balanza > usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.
Septimo Básico	Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucren ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: $ax = b$ $\frac{x}{a} = b$ $ax < b$ $ax > b$ $\frac{x}{a} < b$ $\frac{x}{a} > b$ $(a, b \text{ y } c \in \mathbb{N}; a \neq 0)$

Como se puede apreciar de la Tabla 3, el currículo comienza en 3º básico a estudiar la idea de ecuación. Desde aquí se inicia la construcción de los conceptos de ecuación y de inecuación (4º básico) complejizando las tareas al ir ampliando el conjunto numérico con el que trabaja el estudiante. En 5º básico se relacionan las ecuaciones e inecuaciones con la resolución de problemas. De este modo podemos concluir que, en estos 3 primeros años, el enfoque es aritmético. En 6º básico comienzan a estudiarse las ecuaciones pero con la incorporación de expresiones algebraicas sencillas (letras como incógnitas) y las analogías con la balanza. Esta analogía se concreta en 7º básico, donde los estudiantes deben ser capaces de plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando lenguaje algebraico. Podemos ver que a partir de 6º el currículo comienza a incorporar el enfoque algebraico como una extensión o generalización del enfoque aritmético. Cuando el estudiante llega a 8º básico debería ser capaz de plantear y resolver diversos problemas asociados a ecuaciones e inecuaciones lineales, trabajando con los sistemas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Al terminar el 8º básico, los objetivos de aprendizaje que son requeridos para estudiar los SEL en el siguiente nivel (1º medio) están explicitados en la Tabla 4.

Tabla 4:
Objetivos de aprendizaje de conceptos previos (8° Básico) necesarios para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2

Concepto	Objetivo de aprendizaje
Función	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: • Utilizando tablas. • Usando metáforas de máquinas. • Estableciendo reglas entre x e y. • Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con <i>software</i> educativo
Ecuaciones lineales	Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: $ax = b$ $\frac{x}{a} = b, a \neq 0$ $ax + b = c$ $\frac{x}{a} + b = c$ $ax = b + cx$ $a(x + b) = c$ $ax + b = cx + d$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{Q})$
Inecuaciones lineales	Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo
Función afín	Mostrar que comprenden la función afín: • Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. • Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. • Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con <i>software</i> educativo. • Relacionándola con el interés simple. • Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Nota: La información corresponde al programa vigente desde el 2016.

Se puede apreciar una variedad de registros que se le presentan al estudiante para comprender el concepto de función, como por ejemplo, tablas, gráficos, expresiones algebraicas o representaciones en el plano cartesiano. No obstante, se debe aclarar que el uso de un determinado registro no garantiza que el estudiante esté en un modo de pensamiento específico, ya que puede estar usando un tipo de representación pero aún pensando la tarea con estrategias de otro modo de pensamiento. Por tanto, no basta con usar un determinado registro para evidenciar un modo de pensamiento, sino que son las estrategias o las formas en que se entienden los objetos matemáticos las que permiten evidenciar si estamos en uno o en otro modo de pensamiento. Por otro lado, los objetivos de aprendizaje asociados a los SEL en 1° medio están expresados en la Tabla 5.

Tabla 5:
Objetivos de aprendizaje e indicadores para el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 en 1º Medio

Objetivo de aprendizaje	Indicadores
Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2×2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.	Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • Creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable. • Representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo. • Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima).

Nota: La información corresponde al programa vigente desde el 2017.

Por otro lado, en el currículo vigente (según los ajustes curriculares del 2011), en 2º medio el objetivo que se presenta es: *Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente* (MINEDUC, 2011, p. 63). Más adelante veremos que, a pesar de que tanto en primero medio (del currículo actual) y segundo medio (del currículo antiguo) hacen referencia a desarrollar los SEL de forma algebraica como de forma gráfica, el énfasis que le da cada texto es diferente. Esto lo desarrollaremos más adelante, en el estudio de los textos escolares.

Por otra parte, después de 1º medio (o 2º medio en el currículo antiguo) los estudiantes siguen estudiando SEL pero analizando nuevas clasificaciones o generalizándolo a sistemas de inecuaciones lineales (o *programación lineal*). Luego, a nivel de educación superior, la resolución de los SEL son la base para desarrollar la dependencia lineal, concepto básico del Álgebra Lineal que a su vez es base para desarrollar vectores generadores y espacios vectoriales. Usando esta información podemos construir el siguiente mapa conceptual de los SEL (Figura 1).



Figura 1: Mapa conceptual de los sistemas de ecuaciones lineales

Análisis de los textos escolares

Si solo analizamos la extensión o la cantidad de preguntas asociadas a un determinado método de resolución de los SEL, podemos afirmar que los libros ministeriales, a saber, los libros de matemática que entrega el MINEDUC gratuitamente a todos los estudiantes de establecimientos municipales y particulares subvencionados, apuntan a los métodos de resolución, es decir a desarrollar la estrategia o el algoritmo de resolución más que al desarrollo gráfico de estos sistemas (a pesar de estar declarado como objetivo en las bases curriculares). En este sentido, el texto de 2º medio (Muñoz, Rupin y Jiménez, 2016) da solo 4 páginas a abordar los gráficos de los SEL (de las 36 páginas totales de la temática). Incluso, en estas páginas solo desarrolla la representación gráfica pero define como métodos de resolución los algebraicos (reducción, sustitución e igualación) y dejan de lado la representación gráfica, es decir, no la consideran un método. Esto se ve evidenciado en la última actividad de la sub-unidad donde se le pide construir un mapa conceptual con los conceptos básicos de la temática (Figura 2).

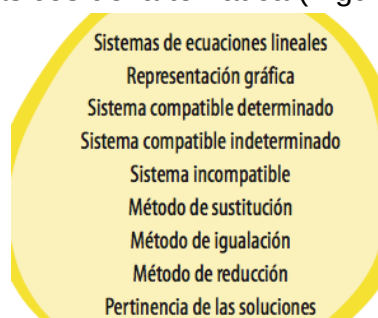


Figura 2: Actividad sobre construcción de un mapa conceptual

Como se puede apreciar en la Figura 2, la representación gráfica no se considera como un método de resolución. Por otro lado, el análisis de la cantidad de soluciones se desarrolla de forma algebraica y no se hace relación con un análisis gráfico. Esto lo podemos ver en la Figura 3.

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

Se tiene que:

- el sistema es **compatible indeterminado** si es posible obtener la segunda ecuación a partir de la primera (o la primera a partir de la primera) multiplicando o dividiendo por un número $k \neq 0$. Es decir, se cumple la relación:

$$c=ka \rightarrow \frac{c}{a}=k \quad d=kb \rightarrow \frac{d}{b}=k \quad f=ke \rightarrow \frac{f}{e}=k$$
 Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{f}{e}$
- el sistema es **incompatible** si es posible obtener los coeficientes de x e y de la segunda ecuación a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$, pero no el término libre. Es decir, se cumple la relación:

$$c=ka \rightarrow \frac{c}{a}=k \quad d=kb \rightarrow \frac{d}{b}=k \quad f \neq ke \rightarrow \frac{f}{e} \neq k$$
 Entonces, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} \neq \frac{f}{e}$
- el sistema es **compatible determinado** si no es posible obtener los coeficientes de la segunda a partir de los de la primera (o los de la primera a partir de los de la segunda) multiplicando o dividiendo por un mismo número $k \neq 0$. Es decir, para todo número $k \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{c}{a} \neq \frac{d}{b}$$

Figura 3: Explicación sobre la cantidad de soluciones de un SEL de 2×2 (Muñoz et al, 2016, p. 233)

Finalmente, el texto también propone algunos problemas sobre SEL de 3×3 o de 2×2 pero trabajando en $\mathbb{R}$ y no solo en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. Esto se puede apreciar en la Figura 4.

11. Aplica la fórmula de la pregunta anterior para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+3y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 29x+4y=12 \\ 7x+y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y=-7 \\ 6x+9y=5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=0,1 \\ x-y=0,5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+4y=2 \\ 3x+13y=9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=0 \\ \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{5}x-y=6 \\ x+\sqrt{5}y=-2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x-y= \\ x-(\sqrt{3}+1)y= \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+\sqrt{2}y=\sqrt{ } \\ \sqrt{3}x+\sqrt{6}y=1- \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-\sqrt{12}y=9 \\ x+\sqrt{3}y=10 \end{cases}$

14. Analiza la siguiente estrategia para resolver el sistema de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 2x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$$

- Se utiliza el método de eliminación entre la primera y la segunda ecuación, y luego entre la primera y la tercera, para eliminar la variable x .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 2x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} & \rightarrow & \begin{cases} 2x+6y+4z=4 \\ 8y+3z=-2 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \\ & & \rightarrow \begin{cases} 2x+6y+4z=4 \\ 8y+3z=-2 \\ 8y+7z=6 \end{cases} \end{array}$$
- La segunda y la tercera ecuación forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, que se resuelve. Se obtiene así el valor de y y de z .
- Se reemplazan los valores obtenidos en la primera ecuación, para obtener el valor de x .

Figura 4: Algunas actividades sobre SEL en el libro de 2º medio (Muñoz et al, 2016, p. 231)

Por otra parte, en los textos de 1º medio de las nuevas bases curriculares podemos evidenciar que el análisis gráfico de los SEL sí son considerados como un método de resolución, esto se evidencia en la Figura 5.

Método de resolución: gráfico

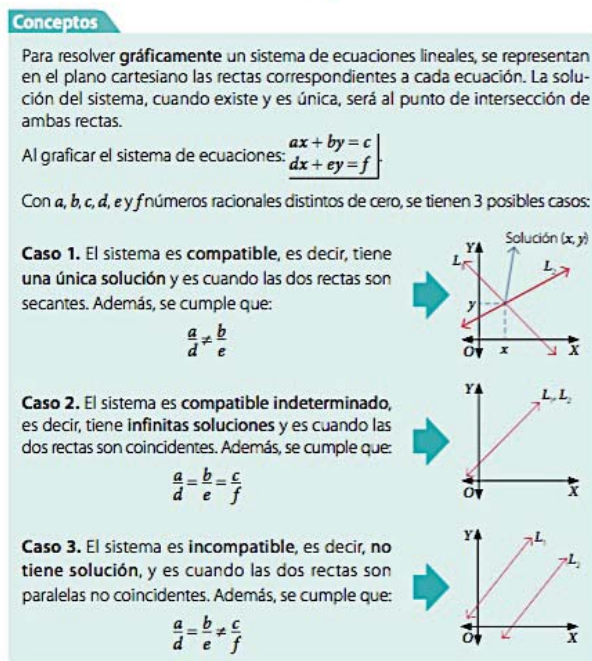


Figura 5: El método gráfico en el libro de 1º medio (Galasso, Maldonado y Marambio, 2016, p. 108)

Por otro lado se puede apreciar que la representación gráfica no solo es usada para desarrollar el método gráfico sino que también la usan para explicar los otros métodos de resolución o para determinar cuántas soluciones tiene un SEL sin resolverlo explícitamente.

Un último aspecto a destacar es el sistema numérico empleado para los coeficientes de los SEL (Figura 6).

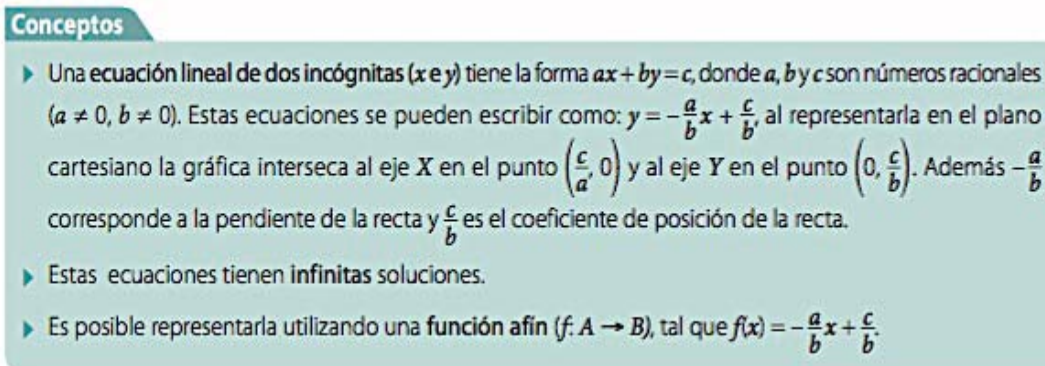


Figura 6: Resumen de conceptos sobre ecuaciones lineales en libro de 1º medio (Galasso et al, 2016, p. 102)

Al respecto podemos mencionar dos aspectos a considerar:

1. En la ecuación $ax + by = c$ se hace la restricción ($a \neq 0, b \neq 0$). Esto no deja claridad si la restricción es que ambos coeficientes no pueden ser cero a la vez o por separado. Si fuera lo último, estaríamos descartando ecuaciones que si bien no son de dos incógnitas igual pueden ser representadas como rectas en la plano. Estas ecuaciones son del tipo $ax = c$ o bien $by = 0$, rectas verticales u horizontales en el plano cartesiano.
2. Otro aspecto interesante es la segunda afirmación de la imagen: “Estas ecuaciones tienen **infinitas** soluciones”. Esta afirmación debe ser sucedida de la aclaración que, si bien es cierto que tiene infinitas soluciones, también es cierto que hay infinitas parejas de valores que no lo son. Esta aclaración es necesaria para el estudiante, ya que algunos al leer que son infinitas las soluciones podría pensar que cualquier pareja de valores es solución, lo cual es incorrecto. Por otro lado, el objetivo de resolver un SEL es encontrar las soluciones del sistema y no solo mencionar la cantidad de soluciones que tiene. En este sentido, mencionar que el sistema tiene infinitas soluciones, si bien es cierto, no responde a la pregunta sobre **cuáles** son estas soluciones.
3. Por otro lado, si los coeficientes a, b y c son racionales y el sistema numérico más amplio que han visto es $\mathbb{Q}$, entonces las rectas que son representadas en el plano no son “completas” ya que le faltarían infinitos puntos, los puntos de coordenadas números irracionales. De hecho, basados en la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$, podemos afirmar que a la recta le faltan *casi* todos sus puntos si trabajamos solo en $\mathbb{Q}$. Esta no es una complicación que visualicen los estudiantes pero debe ser al menos una consideración que el docente debe conocer al utilizar estas representaciones.

A pesar de estas dos consideraciones, se evidencia la constante relación entre la representación algebraica y la gráfica, al relacionar los coeficientes de la ecuación algebraica con elementos gráficos del plano, como por ejemplo cortes con los ejes X o Y, o la pendiente de la recta asociada a la ecuación estudiada. Esta constante interacción es la que permite una mejor comprensión del objeto matemático. Es como lo han hecho a lo largo de la historia diferentes matemáticos y lo que propone Sierpinski en su Teoría de los Modos de Pensamiento. Esta teoría y las interacciones entre los diferentes modos de pensamiento es lo que vamos a estudiar en el siguiente capítulo orientado a desarrollar el marco teórico del trabajo.

Análisis de los textos eruditos

Analizaremos los textos de Álgebra Lineal de Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973) y De Burgos (1993) para observar la manera en que estos textos presentan los conceptos básicos del Álgebra Lineal que vamos a desarrollar en la secuencia, a saber la dependencia e independencia lineal, la combinación lineal y los conjuntos generadores.

La Figura 7 muestra cómo el texto De Burgos define el concepto de combinación lineal a partir de una explicación intuitiva de la dependencia lineal.

Se dice que un vector $\vec{v}$ es una *combinación lineal* de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_h$ o que $\vec{v}$ *depende linealmente* de ellos si, para algunos escalares $x_1, x_2, \dots, x_h$, se verifica:

$$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_h\vec{u}_h$$

La dependencia lineal es transitiva: si $\vec{v}$ depende linealmente de unos vectores y cada uno de éstos depende linealmente de otros, entonces $\vec{v}$ depende linealmente de los últimos.

Se dice que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es un sistema *ligado* o *linealmente dependiente* si se verifica una de las siguientes condiciones (I) o (II), que son equivalentes entre sí:

- (I) Alguno de los vectores de S depende linealmente de los demás.
- (II) Para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ que no son todos nulos es:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

Figura 7: Definición de combinación lineal en De Burgos (1993, p. 26)

Como se puede apreciar el énfasis es algebraico en la definición sin alguna relación con intuiciones geométricas previas. Lo mismo ocurre más adelante cuando definen un conjunto linealmente independiente. Esta definición aparece en la Figura 8.

Se dice que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es un sistema *libre* o *linealmente independiente* si se verifica una de las siguientes condiciones (A) o (B), que son equivalentes entre sí:

- (A) El sistema S no es linealmente dependiente, es decir, ninguno de los vectores de S depende linealmente de los demás.
- (B) La única combinación lineal de vectores de S que es nula es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \text{escalares}).$

Figura 8: Definición de la independencia lineal de un conjunto de vectores en De Burgos (1993, p. 29)

La definición entregada por el texto vuelve a tener un fuerte énfasis algebraico sin dar luces de posibles conexiones con intuiciones geométricas. A partir de los primeros capítulos de este libro de Álgebra Lineal podemos observar que el énfasis es fundamentalmente algebraico. De hecho el libro comienza con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, no obstante rápidamente lo lleva a su expresión matricial para abordar estos conceptos mediante matrices y vectores. Un ejemplo de esta enfoque lo muestra la Figura 9 donde se explica la matriz escalonada para resolver un SEL por el método de eliminación de Gauss.

MATRIZ ESCALONADA

1	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0	0	1	*	*	*	*	*	*	*
0	0	0	1	*	*	*	*	*	*
0	0	0	0	0	1	*	*	*	*
0	0	0	0	0	0	1	*	*	*
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0 = elementos nulos

1 = elementos unidad

* = elementos cualesquiera
(todos los que están sobre cada uno de los elementos 1 pueden hacerse nulos)

Figura 9: Representación de una matriz escalonada en De Burgos (1993, p.13)

Por otra parte en el libro de Álgebra Lineal de Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973) comienzan definiendo una combinación lineal. A pesar de dar una mayor explicación de donde surge esta idea, aun estos fundamentos están anclados en un punto de vista puramente algebraico (Figura 10).

Para el sistema general (1-1), supóngase que seleccionamos m escalares $c_1, \dots, c_m$, que se multiplica la j -ésima ecuación por c_j y que luego se suma. Se obtiene la ecuación

$$(c_1 A_{11} + \dots + c_m A_{m1})x_1 + \dots + (c_1 A_{1n} + \dots + c_m A_{mn})x_n = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m.$$

A tal ecuación se la llama **combinación lineal** de las ecuaciones (1-1). Evidentemente, cualquier solución de todo el sistema de ecuaciones (1-1) será también solución de esta nueva ecuación. Esta es la idea fundamental del proceso de eliminación. Si se tiene otro sistema de ecuaciones lineales

Figura 10: Definición de combinación lineal en Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973, p. 4)

La definición de combinación lineal también es presentada a partir del punto de vista algebraico, tal como aparece en la Figura 11.

Definición. Un vector β de V se dice **combinación lineal** de los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en V , si existen escalares $c_1, \dots, c_n$ de F tales que

$$\beta = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i.$$

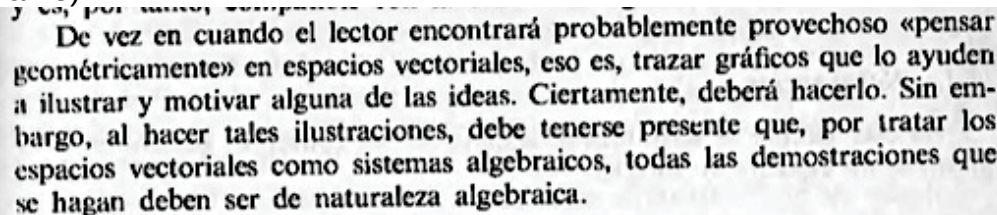
Figura 11: Definición de combinación lineal de Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973, p. 31)

No obstante lo anterior, en este último texto si se desarrolla una conexión entre estos conceptos y la noción geométrica de los mismos. El texto comienza haciendo explícita esta conexión entre los conceptos algebraicos y su intuición geométrica (Figura 12).

Ciertas partes del álgebra lineal están íntimamente relacionadas con la geometría. La misma palabra «espacio» sugiere algo geométrico, como lo hace el vocablo «vector» para muchos. Cuando se avance en el estudio de los espacios vectoriales, el lector observará que mucha de la terminología tiene una connotación geométrica. Para concluir esta sección introductoria sobre espacios vectoriales, se considerará la relación de los espacios vectoriales con la geometría, hasta un grado que indicará al menos el origen del nombre «espacio vectorial». Este será un breve análisis intuitivo.

Figura 12: Conexión entre el punto de vista algebraico y geométrico en Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973, p. 32)

El texto no solo brinda esta conexión entre el álgebra y la geometría sino que también plantea las limitaciones de pensar los problemas en este último punto de vista (Figura 13).



De vez en cuando el lector encontrará probablemente provechoso «pensar geoméricamente» en espacios vectoriales, eso es, trazar gráficos que lo ayuden a ilustrar y motivar alguna de las ideas. Ciertamente, deberá hacerlo. Sin embargo, al hacer tales ilustraciones, debe tenerse presente que, por tratar los espacios vectoriales como sistemas algebraicos, todas las demostraciones que se hagan deben ser de naturaleza algebraica.

Figura 13: Limitaciones del punto de vista geométrico según Hoffman, Kunze y Finsterbusch (1973, p. 33)

Como se puede apreciar a partir de estos pocos ejemplos, el punto de vista priorizado en estos textos del *saber erudito* es el algebraico. No obstante, uno de ellos brinda una conexión explícita entre estos conceptos algebraicos y las nociones geométricas intuitivas. Veremos a continuación que estas conexiones se produjeron en el devenir histórico de los problemas del Álgebra. Por tanto, a un nivel epistemológico, este tipo de conexiones fueron necesarias para el desarrollo del Álgebra en general.

Breve análisis histórico-epistemológico²

El desarrollo de los SEL está muy ligado al desarrollo de las ecuaciones y del Álgebra en general. De este modo, de una forma muy breve podemos evidenciar la evolución de este objeto en la historia y sus concepciones epistemológicas en cuatro grandes estadios.

La primera es una etapa **retórica**. En este período se resolvieron ecuaciones pero con énfasis en el lenguaje natural. Los babilonios (2000 a.C.) analizaron problemas matemáticos estrechamente relacionados con problemas cotidianos (agrícolas, repartición de terrenos, herencias, etc). Las soluciones eran dadas en lenguaje natural, al igual que sus procedimientos. Tenían símbolos para denotar cantidades pero no usaban estos símbolos para desarrollar operaciones.

Los egipcios (1700 a.C.) desarrollaron un sistema numérico no posicional, lo cual no permitía un fácil manejo de las cantidades y sus operaciones. Emplearon los métodos de *falsa posición* o *doble falsa posición* para resolver problemas sobre ecuaciones. No obstante, al igual que los babilonios, sus procedimientos eran fundamentalmente orales ya que carecían de un lenguaje simbólico matemático.

Los chinos (1200 a.C.) denotaban con símbolos las cantidades pero carecían de un símbolo para el cero. Su contribución mas notable fue la resolución de sistemas de ecuaciones mediante tablas (lo que hoy llamaríamos matrices). Trabajaron con los números negativos pero no los consideraban soluciones válidas debido a la fuerte influencia del contexto del problema lo cual dificultó la generalización del estudio de las ecuaciones.

² El análisis epistemológico desarrollado en esta sección está tomado de un trabajo previo titulado *Análisis epistemológico del objeto matemático ecuaciones*, con sus respectivas referencias. No obstante, podemos destacar los aportes de Malisani (1999), Bell (2016), Perero (1994), Kline (1992) y Casalderrey (2000).

Los griegos (600 a.C – 600 d.C), debido al complejo sistema numérico que usaban, prefirieron desarrollar sus procedimientos mediante geometría, ya que les parecían mas claros o evidentes. Los procedimientos eran fundamentalmente geométricos, no obstante hubo algunos griegos que comenzaron a usar un tipo de simbología rudimentaria, tales como Herón o Diofanto.

Luego vino una etapa **sincopada**. En este período se resolvieron ecuaciones pero variando entre los desarrollos orales antiguos y el nuevo simbolismo incipiente. Los indios (200 a.C. – 1200 d.C.) usaron un sistema numérico posicional y en base 10, muy similar al usado actualmente. A pesar de que los problemas seguían emergiendo de problemas cotidianos concretos, desarrollaron un simbolismo para resolver algunas ecuaciones, la regla de tres o la regla de los signos. A pesar de este avance, mantuvieron muchos procedimientos de forma oral y no sacaron provecho a los avances en su notación simbólica, más sencilla que los sistemas numéricos no posicionales antiguos y más adecuada para construir algoritmos y fórmulas para las operaciones básicas.

Los árabes (800 – 1300) lograron un mayor desarrollo del álgebra de ecuaciones. Establecieron reglas de reducción y cancelación de ecuaciones de primer grado. Por lo demás, la notoria influencia de los trabajos egipcios y griegos les permitió desarrollar relaciones entre los procedimientos geométricos griegos, los procedimientos orales egipcios y el nuevo simbolismo y sistema de numeración árabe.

A continuación vino una etapa **simbólica**. En este período se resolvieron las ecuaciones mediante símbolos y signos para todos sus desarrollos. En el renacimiento europeo (s. XVI – s. XVIII) se comienza a desarrollar una nueva forma de resolver problemas asociados a ecuaciones. No obstante, Fibonacci en el s. XII da luces del nuevo simbolismo matemático empleado para resolver ecuaciones. De todos modos, es en este período donde se desarrollan fundamentalmente las ideas de incógnita (usando letras para estas), signos que denoten operaciones entre cantidades numéricas y diferentes tipos de resolución para ecuaciones de distinto grado (primer, segundo, tercer y cuarto grado). Las ecuaciones comenzaron a ser el objeto de estudio sin que, necesariamente, tengan una conexión con algún problema cotidiano. En el proceso de resolución de ecuaciones de grado superior se encontraron con raíces cuadradas cuya cantidad sub-radical era negativa aunque no le dieron mucha importancia. Desarrollaron el estudio de las matrices de diversos órdenes. Euler fue uno de los primeros en mencionar que un sistema de $n \times n$ no tiene necesariamente n ecuaciones ya que depende de las características de las ecuaciones (indicios de la dependencia lineal).

Finalmente llegó una etapa **abstracta**. En este período las ecuaciones son estudiadas desde una teoría más general y abstracta en donde ya no se buscan las soluciones particulares de una ecuación sino que se estudia el *comportamiento* de las soluciones de una familia de ecuaciones. Esta etapa se inicia en Europa durante el s. XIX y llega hasta nuestros días. Este cambio de enfoque nace producto de los escritos de Galois antes de morir. Liouville, luego de meses de analizar estos escritos, publicó los resultados de Galois en el *Journal de mathématiques pures et appliquées*. A partir de estos trabajos algunos matemáticos pudieron desarrollar la teoría implícita en ellos, la teoría de grupos y anillos, destacando Lagrange, Jordan y principalmente Cauchy. Ante la imposibilidad de encontrar las soluciones de la

ecuación de quinto grado (demostrado por Abel) Galois tomó un rumbo distinto de investigación. Ya no se centró en cómo resolver ecuaciones de mayor orden sino cómo se comportaban las soluciones de determinadas ecuaciones. Estas ideas las adoptan Cayley y Hamilton y desarrollan el álgebra de matrices y los cuaterniones, respectivamente. Estas nuevas estructuras tenían divisores no nulos del 0 lo cual era una estructura matemática nueva jamás analizada antes. El estudio de estas nuevas estructuras no euclidianas y no conmutativas dio lugar a la definición de cuerpo. Sin embargo, no fue hasta principios del s. XX que se desarrollaría una teoría abstracta de cuerpos.

A modo de síntesis podemos resumir las principales concepciones epistemológicas relativas al estudio de ecuaciones con la Figura 14.

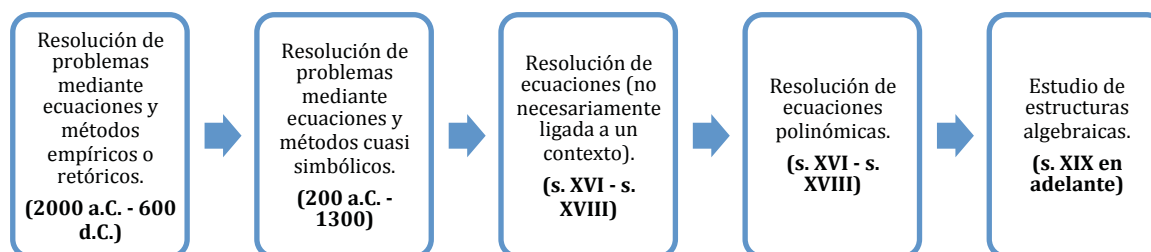


Figura 14: Síntesis de la evolución histórica del Álgebra.

Para finalizar este breve barrido histórico-epistemológico, cabe destacar la necesaria interacción entre los diferentes modos de pensamiento que se tuvieron que desarrollar a lo largo de la historia. Fue necesario volver al análisis geométrico o gráfico para dar el salto desde el estudio de las soluciones (o raíces) de una ecuación al estudio del comportamiento de estas soluciones. Visualizar las soluciones de un polinomio como vectores en el plano complejo al cual se le hacen determinadas isometrías, o entender las raíces de la unidad como el polígono regular con centro en el origen del plano complejo, son solo muestras de la necesaria interacción entre las distintas formas de pensar la matemática para una mayor comprensión y abstracción de los objetos matemáticos. Es en esta interacción donde comienza a enriquecerse la comprensión del objeto matemático estudiado.

MARCO TEÓRICO

La secuencia didáctica se centra en la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska. De una forma breve podemos decir que los modos de pensamiento nacieron bajo el estudio del Álgebra Lineal, en particular con el estudio de elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Entre estos elementos se encontraban los SEL, tanto en sistemas de 2×2 como 3×3 . La investigadora propone, a grandes líneas, que el desarrollo del Álgebra Lineal está marcado por dos hitos matemáticos, el primero fue pasar de una geometría sintética, como la clásica geometría griega, a la geometría analítica, donde cada punto del plano (o de $\mathbb{R}^n$ en general) está completamente identificado por las coordenadas de su n -tupla. De este modo se lograron conectar la geometría sintética con la analítica. El segundo hito matemático que menciona es el paso de la geometría analítica a una estructura más abstracta o axiomática. Esto se llevó a cabo mediante el estudio de espacios vectoriales, en donde los vectores (o las matrices) ya no son entendidos solamente como una n -tupla de números sino que son estudiados como elementos que cumplen propiedades y axiomas dentro de un cuerpo definido (Sierpinska, 2000). En este desarrollo del Álgebra Sierpinska propuso, de forma natural, 3 modos de pensamiento:

- Modo sintético-geométrico (SG).
- Modo analítico-aritmético (AA).
- Modo analítico-estructural (AE).

A pesar de estos diferentes modos de pensamiento y la forma en que se fueron gestando, ninguno de estos es mejor que otro, sino que cada uno tiene propiedades que son más evidentes en uno que en otro, por lo que, según el contexto de la tarea matemática presentada, será más conveniente usar uno u otro modo de pensamiento. En palabras de Dorier y Sierpinska (2001), "...cada uno de estos modos de pensamiento puede presentar dificultades específicas para los estudiantes, lo que sugiere que, con mucho, lo más difícil es que los alumnos los usen en una manera consciente cuando sea apropiado y se muevan con flexibilidad entre ellos..."³ (p. 264).

Siguiendo la idea de Sierpinska de fortalecer la relación entre estos distintos modos de pensamiento, se ha diseñado la presente secuencia didáctica comenzando con los SEL hasta llegar la independencia lineal y vectores generadores de $\mathbb{R}^2$. Las 6 clases presentarán una fuerte prioridad por la representación gráfica y su evidente relación con el modo SG. Será este el modo de pensamiento que servirá como base para llegar al modo AA, al que está habituado el estudiante, y el modo AE. Con el fin de apoyar el modo SG y la representación gráfica de las diferentes actividades se usará como herramienta un software de geometría dinámica (Geogebra) que le permitirá a los estudiantes manipular y/o modificar algunos valores numéricos de los objetos matemáticos estudiados (modo AA) y visualizar cómo interactúan dinámicamente en su representación gráfica, que no es equivalente al modo SG pero si permite estudiar algunos elementos de ese modo, para llegar a extrapolar

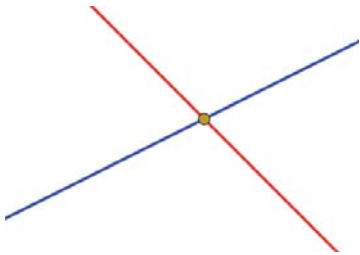
³ "...each of these modes of thinking can present its specific difficulties for the students, suggesting that by far the hardest thing is for the students to use each of them in a conscious manner where appropriate and move flexibly between them..." (traducción del autor).

conjeturas sobre relaciones más generales (o estructurales) de estos objetos estudiados (modo AE).

La Tabla 6 expone las principales diferencias entre los modos de pensamiento en el estudio de los SEL.

Tabla 6:

Descripción de cada modo de pensamiento en el estudio de los SEL

Modo de pensamiento	Descripción	Registro usado
<i>Sintético-geométrico (SG)</i>	En este modo de pensamiento aun no se habla de ecuaciones. Los objetos analizados son rectas y puntos de intersección en el plano (sin coordenadas, ya que aun no se <i>arimetiza</i> la geometría en este modo). Más tarde estas rectas serán entendidas como la representación gráfica de una ecuación y el punto de intersección como la solución del sistema.	
<i>Analítico-aritmético (AA)</i>	Los SEL son entendidos como ecuaciones entre variables (o incógnitas) y coeficientes numéricos dados. La solución será los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema a la vez. En este modo de pensamiento tienen lugar los clásicos métodos de resolución de los SEL (reducción, sustitución e igualación)	Los SEL son representados algebraicamente mediante dos (o más) ecuaciones: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ Como por ejemplo: $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$ Cuya solución es $x = 1, y = 1$ ya que $\begin{cases} 2 \cdot (1) - 3 \cdot (1) = -1 \\ 5 \cdot (1) + 2 \cdot (1) = 7 \end{cases}$
<i>Analítico-estructural (AE)</i>	Los SEL son entendidos como lugar (geométrico) común a un conjunto de rectas cuya construcción se basa en un vector director y un vector posición.	Las rectas asociadas al SEL se pueden representar como: $\vec{r}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \vec{p}_1$ $\vec{r}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \vec{p}_2$ Un ejemplo de las propiedades de esta nueva estructura es que si

En este caso los vectores ya no son analizados en función de sus coordenadas sino que como objetos abstractos pertenecientes a una estructura mayor (con sus propias propiedades).

los vectores son L.I. el SEL siempre tendrá solución. Esto se basa, bajo este modo de pensamiento, en el hecho que si los vectores son L.I. entonces generan una base de $\mathbb{R}^2$, es decir $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \mathbb{R}^2$. Por ende todo vector del plano (en este caso nuestra solución) se podrá expresar como combinación lineal de los vectores generadores del plano.

Un aspecto relevante de la elección de este marco teórico es que responde a la interacción entre la geometría sintética (modo SG), la geometría analítica (modo AA) hasta llegar estructuras algebraicas más abstractas (modo AE). Es esta la línea que proponemos seguir para estudiar los SEL y los conceptos del Álgebra Lineal que se desprenden de ellos. Por tanto, el objetivo no es llegar a un modo de pensamiento puramente estructural sino lograr una correcta y profunda interacción entre los diferentes modos de pensamiento, reconociendo el más útil para determinado contextos o problemáticas a resolver. Un correcto diagrama entre estos modos de pensamiento no debería ser algo secuencial sino que interactivo, tal como lo muestra la Figura 15.

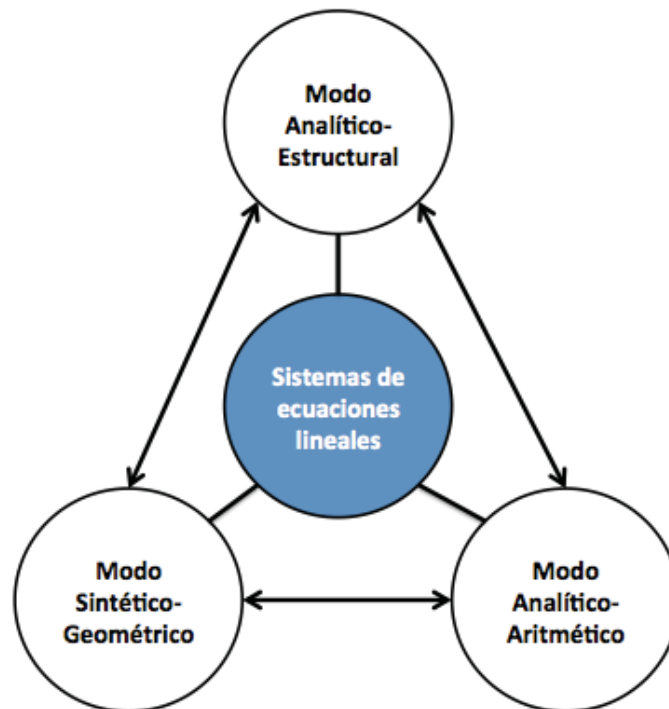


Figura 15: Interacción entre los modos de pensamiento al estudiar los SEL

Esta interacción entre los diferentes modos de pensamiento se hace necesaria ya que cada modo de pensamiento presenta dificultades específicas para los estudiantes, por tanto se hace necesario que el estudiante sepa reconocer cuál modo de pensamiento le es más conveniente para resolver diferentes tareas. En palabras de Dorier y Sierpinska (2001):

“...cada uno de estos modos de pensamiento puede presentar dificultades específicas para los estudiantes, lo que sugiere que, con mucho, lo más difícil es que los alumnos los usen en una manera consciente cuando sea apropiado y se muevan con flexibilidad entre ellos...”⁴ (p. 264).

Propiciando esta idea de Sierpinska es que se diseñó la presente secuencia didáctica. Su objetivo principal es que el estudiante se puede mover desde el modo SG hacia los modos analíticos, el aritmético o bien el estructural.

⁴ “...each of these modes of thinking can present its specific difficulties for the students, suggesting that by far the hardest thing is for the students to use each of them in a conscious manner where appropriate and move flexibly between them...” (traducción del autor).

LA CLASE DEL ESTUDIO DE CLASES

El Plan de Clases

La primera clase del estudio fue diseñada colaborativamente por un grupo de profesores y revisada por un grupo de didactas luego de cada implementación. Las principales modificaciones se enfocaron en la reformulación de las tareas para una mayor claridad del objetivo de las tareas para el estudiante. Esto buscaba favorecer la relación entre los diferentes modos de pensamiento. Este proceso de evaluación y reformulación de las tareas le dio mayor consistencia al instrumento lo cual favoreció la claridad de las tareas a desarrollar.

Por otra parte, el plan de clases original se encuentra en los anexos. No obstante, a continuación desarrollaremos el plan de clases, pero destacando aquellos aspectos relevantes del marco teórico. Estos elementos se encuentran desarrollados en la Tabla 7, donde se explicita la forma en que se analizará cada actividad propuesta del plan de clases desde la teoría de los modos de pensamiento.

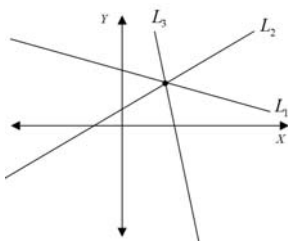
Tabla 7:
Plan de Clase y su relación con los modos de pensamiento

Tarea Matemática	Posibles respuestas o estrategias de los estudiantes	Relación con el marco teórico o con el diseño metodológico
Actividad 1: Decide si la siguiente afirmación es cierta o no: <i>Una ecuación de primer grado con dos incógnitas representa siempre una recta.</i>	Posibles respuestas: Sí, porque la ecuación es lineal. Sí, porque si se dan valores a la variable y se grafica, representa un línea en el plano. No, porque la solución de una ecuación es un número. No, porque una ecuación no se puede graficar. Estrategias: Asignar valores a las constantes m y n de una ecuación lineal de la forma $y = mx + n$ y graficar en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores".	Relacionan el modo analítico-aritmético (AA) con el sintético-geométrico (SG). Los argumentos que utilicen los estudiantes para fundamentar esta respuesta develarán la relación que hacen entre la ecuación (AA) y su representación gráfica (SG).
Actividad 2: ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2 , es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?	Posibles respuestas: El sistema representará lo que determine su conjunto solución. El sistema representa dos rectas en el plano. La representación gráfica dependerá de cómo sean las ecuaciones del sistema.	Nuevamente la tarea busca relacionar el modo AA con el modo SG de los SEL de 2×2 .

Estrategias: Los estudiantes crean un sistema de ecuaciones lineales y asignan valores a las constantes m y n de cada ecuación de la forma $y = mx + n$ y grafican en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores". Infieren de la actividad 1. Una ecuación lineal se representa gráficamente a través de una recta, entonces dos ecuaciones se representarán como dos rectas.		
Actividad 3: Representa gráficamente de todas las formas posibles dos rectas en el plano cartesiano.	Posibles respuestas: Graficar las tres formas posibles (rectas coincidentes, paralelas y secantes) Considerar solo las formas 1 y 3, pues en estas aparecen las dos rectas visibles.	En esta tarea queda de lado el modo AA y se enfoca completamente a desarrollar el modo SG de los SEL de 2×2.
Estrategias: Trazar distintas rectas (de a pares) en el plano al azar. Trazar las rectas considerando sus posiciones relativas: paralelas o secantes.		
Actividad 4: Describe el conjunto solución de los sistemas graficados en la actividad 3 y asócialo a una representación geométrica, según la posición de las rectas.	Posibles respuestas: Describir una solución particular para cada una de las formas. Mencionar la cantidad de soluciones que tiene cada forma. El sistema de la forma 3 tiene solución vacía. Estrategias: Analizar los puntos comunes de ambas rectas como objetos geométricos (puntos, rectas, segmentos, líneas, etc.)	Relacionan las representaciones de los SEL de 2×2 (modo SG) con el conjunto solución, ya sea en términos de cantidad de las soluciones (0, 1 o infinitas) o en términos geométricos (un punto al tener rectas secantes, infinitos puntos al tener rectas coincidentes, o el conjunto vacío al tener rectas paralelas)

Actividad 5: Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.	Posibles respuestas: Los sistemas de ecuaciones de 2×2 que representan los casos de la actividad 4. Los sistemas pueden estar representados de las siguientes formas: 1) $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ 2) $Ax + By = C$ $Dx + Ey = F$ 3) $y = Ax + B$ $y = Dx + F$	Relacionan el modo SG de los SEL de 2×2 con el modo AA. Esto es diferente al análisis usual, donde se relacionan estos dos modos de pensamiento pero a partir del AA se llega al SG. En este caso, la tarea busca esta relación pero en el sentido contrario, es decir, desde el modo SG llegar al modo AA.
	Estrategias: Escribir un sistema en particular y encontrar el conjunto solución y asignar ese sistema a una de las formas posibles. Escribir una solución e idear un sistema donde tal solución satisfaga las dos ecuaciones. Es muy probable que algunos estudiantes no usen la forma general de la ecuación de la recta ($Ax + By = C$) y usen por comodidad la ecuación particular de la recta ($y = mx + n$) Graficar las rectas y de ahí sacar las ecuaciones que representan esas rectas. Usar la ecuación particular de la recta modificando los valores de m y n para cada ecuación lineal de cada caso. Ensayo y error.	
Actividad 6: Representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 3×2 , es decir, tres	Posibles respuestas: Dibujar tres rectas que se interceptan en un punto. Dibujar dos rectas secantes y la tercera coincidente a cualquier de las otras dos.	Analizan desde el modo SG los SEL de 3×2 , es decir, como se pueden posicionar tres rectas en el plano.

ecuaciones y dos incógnitas.	Dibujar tres rectas secantes sin un punto de intersección en común Dibujar tres paralelas no coincidentes. Dibujar dos rectas coincidentes y una transversal a estas.	
	Estrategias: Dibujar tres rectas cualesquiera en el plano.	
Actividad 7: Representa gráficamente de todas las formas posibles tres rectas en el plano cartesiano.	Posibles respuestas: Dibujar tres rectas en el plano y sus 7 posibilidades. Estrategias: Fijar una recta e ir modificando las otras dos para obtener las distintas formas.	Analizan a partir del modo SG todas las posibles representaciones de tres rectas sobre el plano.
Actividad 8: En la figura, el punto de intersección satisface a cada una de las ecuaciones del sistema,	Posibles respuestas: Describir cada sistema según la cantidad de intersecciones que presenten las rectas. Describir cada sistema según la posición relativa de las rectas. Mencionar que solamente en la forma 7 el conjunto solución es único y no vacío. Mencionar que en la forma 6 el sistema tiene infinitas soluciones. Estrategias: Categorizar los sistemas según la cantidad de soluciones que presente el sistema.	Analizan los puntos de intersección en las representaciones gráficas (modo SG) y deciden cuando estos puntos son soluciones o no del SEL asociado. La tarea busca que los estudiantes analicen que significa ser solución de un SEL a partir tanto de su representación geométrica (modo SG) como también desde su representación algebraica (modo AA).



¿Qué ocurre en cada una de las distintas formas graficadas en la actividad 7?

Análisis de las respuestas de los estudiantes

Comenzaremos entregando una panorámica general de los resultados de los estudiantes para luego dar paso a un análisis más particular de algunas producciones de interés de algunos alumnos. Para referirnos a los estudiantes usaremos la simbología E1 para referirnos al estudiante 1, E2 para el estudiante 2 y así sucesivamente.

Sobre los modos de pensamiento que evidenciaron los estudiantes para explicar el conjunto solución de un SEL podemos sintetizarlos en la Tabla 8 que muestra la cantidad de alumnos que evidenciaron un modo de pensamiento en la tarea 4 y en la tarea 8. Consideramos pertinente el análisis de estas tareas porque en ellas se le pide al estudiante que explique el conjunto solución del SEL asociado. Por tanto, dependiendo del modo en que presenta el conjunto solución se podrá clasificar en el modo AA o SG.

Tabla 8:
Modos de pensamiento evidenciados en las tareas 4 y 8

	Tarea 4	Tarea 8
Modo SG	15	23
Modo AA	3	0
Modo AA y SG	6	1
No responde	1	1

La evidente inclinación por el modo SG se debe fundamentalmente a los enunciados de la tareas analizadas ya que buscaban desarrollar la reflexión de los SEL a partir del modo SG. No obstante, veremos más adelante que algunos alumnos seguían pensando en un modo AA a pesar de que la pregunta estuviera inclinada hacia el modo SG. Por otro lado, también veremos que esta inclinación por el modo SG no basta para responder correctamente las diferentes tareas que proponía el instrumento. Daremos algunos ejemplos de producciones donde se evidencia el modo SG para responder a la tarea 4 y 8.

Las respuestas de los estudiantes E1 (Figura 16) y E2 (Figura 17) se basan en conceptos geométricos, como por ejemplo rectas, puntos, paralelismo o intersección. Un aspecto interesante a destacar es la aclaración que añade el estudiante E2 a su respuesta en el caso que las rectas sean coincidentes: “*Tiene infinitas soluciones. (Todos los puntos que construyen la recta)*”. En este caso podemos evidenciar que el estudiante entrega más que solo la cantidad de soluciones sino que identifica cuáles son ellas, una comprensión más profunda de los SEL bajo el modo SG.

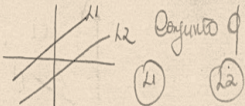
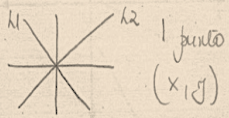
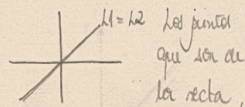
Descripción conjunto solución	Representación geométrica
Son líneas paralelas, es decir, nunca se intersectan, sino que seguirán cada una su camino; no hay solución.	
Son líneas perpendiculares que se cruzan en un punto; el cruce es el punto es la solución.	
Las dos líneas son iguales y están una sobre la otra; tiene infinitas soluciones.	

Figura 16: Producción del estudiante E1 en la tarea 4

Descripción conjunto solución	Representación geométrica
No tiene solución, ya que las dos rectas son paralelas. No hay intersección entre ellas. (vacío)	
Tiene como solución un único punto (x, y).	
Tiene infinitas soluciones. (todos los puntos que construyen la recta)	

Figura 17: Producción del estudiante E2 en la tarea 4

Por otro lado, los estudiantes E3 (Figura 18) y E4 (Figura 19) también basan sus respuestas en la tarea 8 en conceptos geométricos. No obstante, el manejo geométrico de la situación planteada no aseguraba una respuesta correcta. Esto se puede ver en la respuesta del estudiante E3 donde concluye que algunos casos tienen 2 o 3 puntos solución, justamente los errores previstos en el análisis a priori de la clase. En contraposición a esto, el estudiante E4 también evidencia un manejo geométrico de la tarea 8 pero llegando a conclusiones correctas. Esto nos permite entrever que debe existir un conocimiento adicional al manejo geométrico de la situación planteada para responder correctamente la tarea 8. Este conocimiento adicional se evidencia en las respuestas del estudiante E4 en todas las demás tareas del instrumento, donde responde correctamente las tareas que implicaban ir desde el modo SG al modo AA como las tareas que implicaban ir desde el modo AA al modo SG.

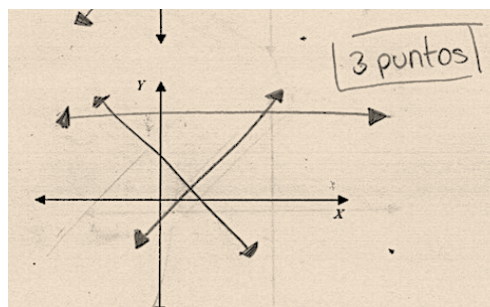
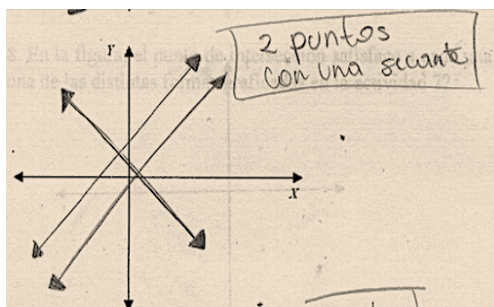


Figura 18: Producciones del estudiante E3 en la tarea 8

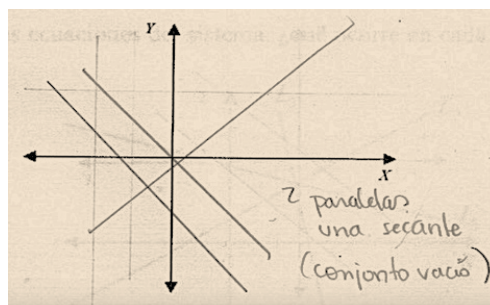
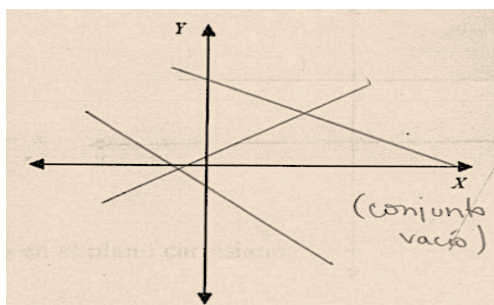


Figura 19: Producciones del estudiante E4 en la tarea 8

Por otro lado, las tareas 2, 4, 5 y 8 son las que analizaremos ya que consideramos que en ellas debe existir una relación entre más de un modo de pensamiento para ser respondidas correctamente. El panorama global de las respuestas de los estudiantes lo observamos en la Tabla 9.

Tabla 9:
Modos de pensamiento evidenciados en las tareas 2, 4, 5 y 8

	Tarea 2	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 8
Modo SG	19	15	0	23
Modo AA	6	3	20	0
Modo AA y SG	0	6	4	1
No responde	0	1	1	1

Como se puede apreciar de la Tabla 9, en la tarea 5 el modo más usado por los estudiantes es el modo AA. Esto se debe al objetivo de la tarea, ya que esta le pedía construir las ecuaciones de un SEL para cada uno de los casos gráficos de la tarea anterior. Por otro lado, en la tarea 2 la prioridad por el modo SG también se debe al sentido de la tarea. En esta se le preguntaba a los estudiantes qué representaba gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2 . Claramente la tarea estaba enfocada en desarrollar el análisis gráfico por sobre el algebraico, no obstante hubo estudiantes que de igual manera lo justificaron bajo el modo AA. Daremos algunos ejemplos de las producciones de los estudiantes que evidencian estos modos de pensamiento.

Consideramos relevante destacar nuevamente las respuestas del estudiante E1 en la tarea 2 (Figura 20). Por un lado, en esta tarea se desarrolla un claro manejo

de los conceptos gráficos asociados a un SEL de 2×2 . No obstante, en la tarea 5 (Figura 21) queda en evidencia que, a pesar de que esta tarea buscaba desarrollar el análisis AA, existe un recurso geométrico empleado por el estudiante E1 para responder correctamente a la situación planteada. Este recurso es la ecuación particular de la recta y el manejo de la pendiente y el coeficiente de posición. Estos conceptos pueden ser analizados como valores numéricos en las relaciones aritméticas entre las variables, pero no cabe duda que tiene una fuerte influencia geométrica en su análisis, tal como lo muestra la respuesta del estudiante E1 en la tarea 5.

2. ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2 , es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?

Un cruce, dos líneas perpendiculares entre las rectas, cuya intersección es la solución del sistema. O puede haber otro caso sin intersección; sin solución. Solo puede ser cuando dos rectas se intersectan.

Figura 20: Producción del estudiante E1 en la tarea 2

5. Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.

① $y = 2x + 3$
 $y = 2x - 5$ $\times$

② $y = 2x + 3$
 $y = -2x + 3$ $\times$
($\times 17$)

③ $y = 2x + 3$
 $y = 2x + 3$ $\times$
 $L1 = L2$

$y = mx + n$

Figura 21: Producción del estudiante E1 en la tarea 5

Esta estrategia, también empleada por el estudiante E5, fue descrita en el análisis a priori de la clase y se pudo constatar su uso en las evidencias escritas de la tarea. Por otro lado, a pesar de que la tarea 2 se enfocaba en desarrollar un análisis geométrico de la situación hubo estudiantes que la respondieron desde el modo AA. Un ejemplo de esto lo muestra la respuesta del estudiante E5 donde relaciona la forma de la gráfica con el grado de la ecuación (Figura 22). Concretamente expone que “2 rectas que se intersectan o no, es de 2×2 porque son ecuaciones de primer grado, de lo contrario, al presentarse una curva es de segundo grado”. Esto muestra la relación que hace el estudiante entre la forma de la gráfica con los valores numéricos que definen su ecuación algebraica.

2. ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2 , es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?

2 Rectas que se intersectan o no, es de 2×2 porque son ecuaciones de primer grado, de lo contrario, al presentarse una curva es de segundo grado.

Figura 22: Producción del estudiante E5 en la tarea 2

Por otro lado, pudimos evidenciar otro error previsto en el análisis a priori de la clase. El estudiante E6 sostiene que si los coeficientes numéricos de un SEL son distintos, el SEL tendrá solución única (Figura 23). Esto no es correcto, ya que, por ejemplo, si tomamos la ecuación $x + 2y = 3$ y la amplificamos por 4 obtenemos $4x + 8y = 12$. Si hacemos el SEL entre estas dos ecuaciones, al ser las dos

ecuaciones iguales, el conjunto solución, analizado gráficamente, será aquel formado por todos los puntos pertenecientes a la recta, lo cual es un conjunto infinito. No obstante se cumple que los coeficientes numéricos son todos diferentes. Por lo tanto, la respuesta del estudiante E6 muestra una dificultad al transitar desde el modo SG al modo AA.

5. Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 4x + 1y = 90 \\ & 9x + 3y = 100 \end{aligned}$$

todos distinto

$$\begin{aligned} 2) \quad & 4x + 2y = 40 \\ & 2x + y = 20 \end{aligned}$$

Iguales

$$\begin{aligned} 3) \quad & x + 3y = 15 \\ & 3x + 9y = 4 \end{aligned}$$

distinto coef.

Figura 23: Producción del estudiante E6 en la tarea 5

Si analizamos las respuestas de los estudiantes en las tareas 5 y 8 resulta algo se mucho interés. Los resultados de este análisis comparativo están en la Tabla 10.

Tabla 10:

Comparación entre las respuestas de la tarea 5 y 8.

		Respuestas Tarea 8		
		Incorrectas	Correctas	No responde
Respuestas Tarea 5	Incorrectas	5	0	1
	Correctas	10	5	3
	No responde	0	0	1

Como se puede apreciar de la Tabla 10, hay una estrecha relación entre las tareas 5 y 8 la cual se puede expresar de la siguiente manera: Todos los estudiantes que respondieron incorrectamente la tarea 5, respondieron incorrectamente la tarea 8 o no la respondieron. Por otro lado, todos los estudiantes que respondieron correctamente la tarea 8, respondieron correctamente la tarea 5. La característica fundamental entre la tarea 5 y la tarea 8 es que la primera le pide al estudiante construir su análisis a partir del modo SG pero debe llegar al modo AA. Por otro lado, en la tarea 8 se le pide al estudiante explicar el conjunto solución de los diferentes casos en que se grafican 3 rectas en el plano. Para responder correctamente esta última tarea se hacía necesario una relación entre el modo SG y el modo AA.

La respuesta del estudiante E7 (Figura 24) muestra una alusión a la interacción entre el modo SG y el modo AA. Esto lo podemos pensar basándonos en la respuesta que entrega en el caso de 3 rectas todas ellas con diferente pendiente entre si y no confluyentes a un punto común.

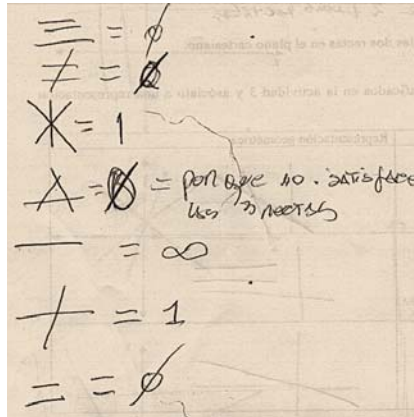


Figura 24: Producción del estudiante E7 en la tarea 8

La justificación del estudiante E7 es que la solución es vacía “*porque no satisface las 3 rectas*”. Uno puede intuir que se está refiriendo a las ecuaciones. No obstante se hace necesaria mayor evidencia para afirmar esto. Una posibilidad a futuro podría ser el uso de una entrevista personal para indagar en mayor profundidad las conexiones entre estos modos de pensamiento.

Del mismo modo, el estudiante E8 pudo responder correctamente la tarea 8. No obstante ni el registro de su guía ni la videograbación permiten asegurar que el estudiante E8 desarrolló una conexión entre dos modos de pensamiento (Figura 25). Su respuesta escrita se limita al modo SG. Lo que dice explícitamente es que la solución es vacía “*porque las 3 rectas no intersectan en ningún punto las 3 juntas*”. Esto solo evidencia elementos geométricos en su análisis. Para poder afirmar con mayor seguridad si el estudiante E8 hizo conexiones entre un modo de pensamiento y otro se haría necesario una entrevista personal donde se evidencie en mayor profundidad estas posibles conexiones.

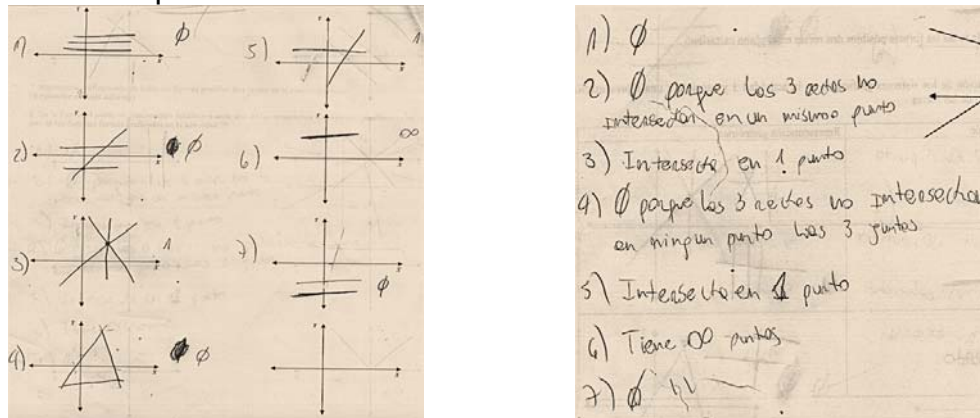


Figura 25: Producciones del estudiante E8 en la tarea 8

A pesar de estas respuestas correctas de la tarea 8, hubo muchos que cometieron el error previsto en el análisis a priori, este era considerar que si tenemos un SEL con 3 ecuaciones y dos incógnitas, puede existir un caso en el que este sistema tenga 2 o 3 soluciones.

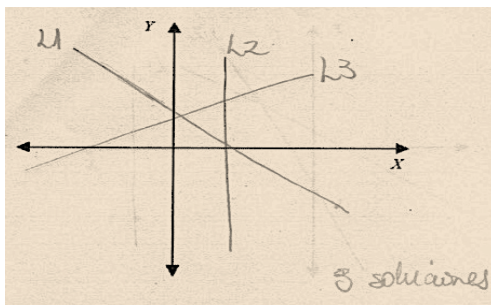


Figura 26: Error en la tarea 8

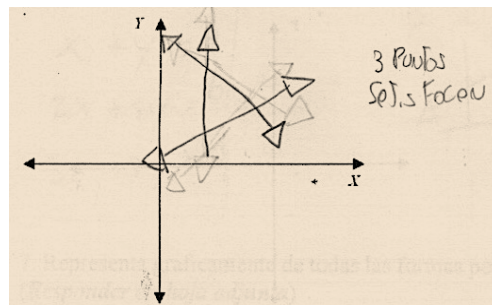


Figura 28: Error en la tarea 8

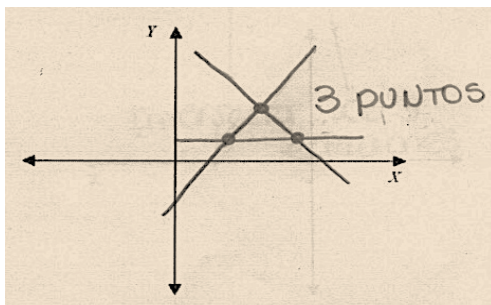


Figura 27: Error en la tarea 8

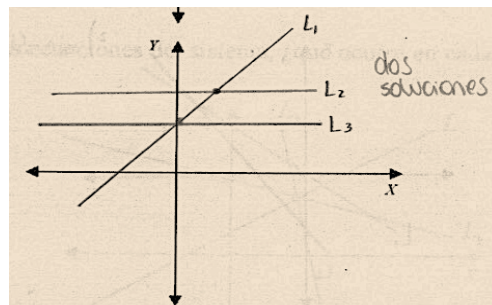


Figura 29: Error en la tarea 8

A partir de las producciones de los estudiantes y de la Tabla 10 podemos afirmar que responder correctamente la tarea 5 es una condición necesaria (pero no suficiente) para responder correctamente la tarea 8. Si relacionamos esta hecho con los modos de pensamiento podemos concluir que es necesario que el estudiante desarrolle correctamente una conexión entre el modo SG y AA para responder correctamente la tarea 8. Esta conexión debe desarrollarse en ambos sentidos, es decir, desde el modo AA hacia el modo SG pero también desde el modo SG hacia el modo AA. Esto se puede concluir del hecho que en la tarea 2, donde debían analizar la tarea desde el modo AA hacia el modo SG, la mayoría de los alumnos lograron una respuesta convincente. No obstante, no todos lograron desarrollar correctamente la tarea 5, donde debían analizar la tarea desde el modo SG hacia el modo AA. Y como se pudo apreciar en la Tabla 10, responder correctamente la tarea 5 se convirtió en una condición necesaria (pero no suficiente) para responder correctamente la tarea 8.

Por otro lado, el análisis de las respuestas de los estudiantes en cada tarea del instrumento nos permite concluir que más allá de las propias características de cada tarea, es el conjunto de estas tareas la que va construyendo estas conexiones entre los diferentes modos de pensamiento. Por tanto, más allá de caracterizar una tarea en particular debemos caracterizar a un conjunto de tareas donde cada una de ellas favorezca la conexión no solo entre dos modos de pensamiento sino que desde un modo de pensamiento hacia otro. Esto es lo relevante para construir conexiones entre los diferentes modos de pensamiento. A partir del análisis de los errores de las tareas 5 y 8 pudimos constatar que los estudiantes que no desarrollaron correctamente una conexión desde el modo SG hacia el modo AA en un SEL de 2×2 (tarea 5) no pudieron responder correctamente cuál es el conjunto solución de un SEL de 3×2 de forma gráfica (tarea 8). Del mismo modo, todos los estudiantes que

respondieron correctamente a la tarea 8, respondieron correctamente a la tarea 5. No obstante lo anterior, la mayoría de ellos respondieron correctamente las primeras tareas donde se le pedía relacionar una ecuación lineal de dos variables o un SEL de 2×2 desde el modo AA hacia el modo SG. Este contraste nos permite concluir que la conexión entre los modos de pensamiento involucrados tienen una dirección. Con esto nos referimos a que, por ejemplo, un estudiante puede evidenciar una correcta relación desde el modo AA hacia el modo SG pero no a la inversa, es decir, desde el modo SG hacia el modo AA.

Finalmente, no hubo evidencia de un uso o alusión al modo AE en las respuestas de los estudiantes. Esto se puede deber a la prioridad geométrica de las tareas propuestas. Sin embargo, también puede ser un signo de la carencia del análisis o reflexión de este modo de pensamiento en los alumnos.

La secuencia de clases que expondremos a continuación responde a esta necesidad, a saber, desarrollar en los estudiantes el modo AE a partir del estudio de los SEL. En particular, el modo AE de los SEL está estrechamente relacionado con los conceptos básicos del Álgebra Lineal. Este hecho permite dar un valor adicional a esta secuencia ya que no solo permitirá fortalecer la interacción entre los diferentes modos de pensamiento en el estudio de los SEL, sino también conectar explícitamente el aprendizaje escolar con el aprendizaje universitario.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Análisis preliminar

La clase inicial, descrita en el apartado anterior, fue diseñada para el estudio del análisis gráfico del conjunto solución de SEL. A partir de esta implementación se diseñaron las siguientes 6 clases con un objetivo específico del Álgebra Lineal. En particular, los conceptos básicos del Álgebra Lineal que deseamos desarrollar en los estudiantes son la dependencia e independencia lineal, la combinación lineal y vectores generadores del plano $\mathbb{R}^2$. Como un esquema general, la secuencia didáctica se compone de las clases y objetivos explicitados en la Figura 30.

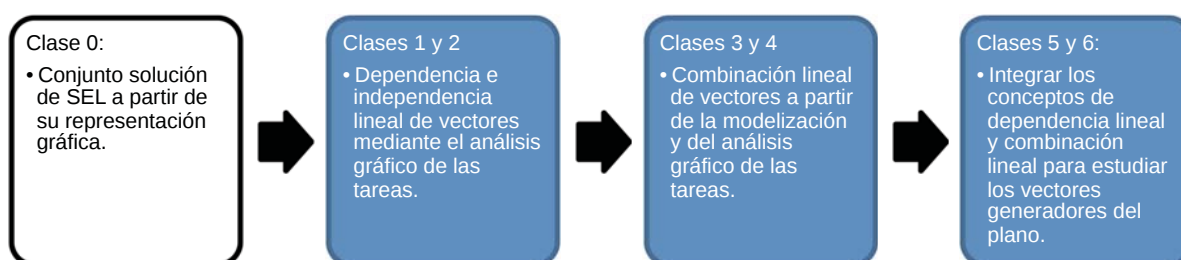


Figura 30: Objetivos de cada clase de la secuencia didáctica.

Cabe destacar algunos aspectos importantes de la secuencia didáctica. La secuencia fue diseñada para ser aplicada en el nivel de III medio matemático una vez finalizada la unidad sobre matrices. En esta unidad desarrollan la definición de matriz, adición y producto de matrices, determinante de matrices, matriz adjunta e inversa. No obstante lo anterior, para el buen desarrollo de la secuencia, solo es necesario que el estudiante comprenda la definición de matrices, su adición y su producto, tanto por escalar como el producto entre dos matrices.

Por otro lado las clases serán analizadas de a pares, es decir las clases 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6. Esto se debe a la carga horaria semanal del curso en el que está diseñada la secuencia: dos clases por semana, la primera de una duración de 1 hora y 30 minutos y la segunda de 45 minutos. Por este motivo la primera clase corresponde a una sesión de exploración teórica, en cambio la segunda tiene por objetivo aplicar lo aprendido en la sesión teórica. De este modo las sesiones teóricas serán 1, 3 y 5, y las sesiones prácticas serán 2, 4 y 6.

Por último, en cada clase se puede evidenciar la articulación de los modos de pensamiento al constatar que cada tarea está desarrollada desde el modo SG pero su resolución requiere conectar con algún modo analítico, ya sea el AA o el AE. Para propiciar este análisis gráfico, está planificado que cada sesión se apoye en un *applet* de geometría dinámica. En nuestro caso usaremos Geogebra. De este modo los estudiantes tendrán la posibilidad de analizar las tareas modificando sus componentes básicos (puntos o vectores en el plano) lo cual favorecerá su análisis al estudiar más de un tipo de situación.

CLASES 1 Y 2

Descripción de la secuencia de las clases 1 y 2

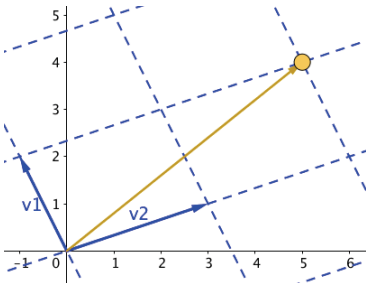
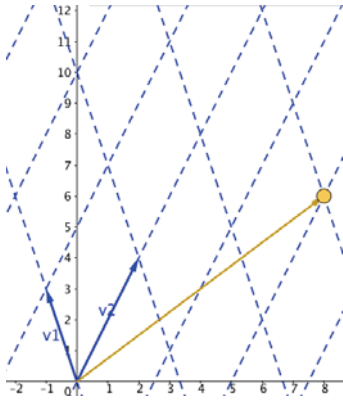
La sesión 1 está compuesta por 8 tareas y una actividad de síntesis. Entre las tareas propuestas está la resolución de diferentes SEL, con solución única, solución vacía e infinitas soluciones. A partir de la notación matricial de estos sistemas se estudiarán las relaciones entre los vectores columna de la matriz asociada al SEL con la cantidad de soluciones del mismo sistema.

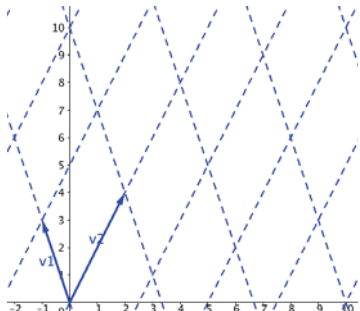
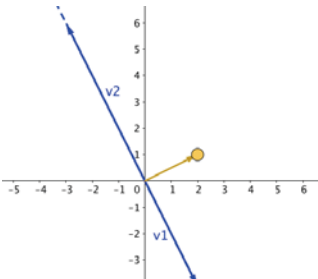
En estas sesiones se espera que los estudiantes:

- Transformen la representación algebraica de un SEL a su representación matricial.
- Identifiquen las columnas de la matriz como vectores y la solución del SEL como los ponderadores de estos vectores para llegar al vector solución (todo esto mediante el *applet* de Geogebra).
- Analicen el caso en que los vectores columna son uno ponderado del otro y definan cuando tienen solución este SEL y cuando no mediante al *applet* de Geogebra.
- Describan con sus palabras lo que sucede con el SEL cuando los vectores columna son uno ponderado del otro (linealmente dependientes), iniciando el concepto de dependencia lineal.
- Establezcan relaciones entre los vectores asociados a la matriz del SEL y la cantidad de soluciones del sistema.

Respuesta experta de las tareas planteadas en la clase 1

Tarea Matemática	Respuesta Experta
1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$	Aplicando el <i>método de sustitución</i> se obtiene lo siguiente: Despejamos x de la primera ecuación $3y - 5 = x$ Reemplazamos $x = 3y - 5$ en la segunda ecuación $2(3y - 5) + y = 4$ Resolvemos la ecuación para y $\begin{aligned} 6y - 10 + y &= 4 \\ 7y &= 4 + 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$ Reemplazamos el valor de y en otra ecuación y obtenemos el valor de x $\begin{aligned} x &= 3 \cdot 2 - 5 \\ x &= 6 - 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$ Por lo tanto la solución del sistema es $x = 1, y = 2$

2. Determine los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la matriz para que la siguiente expresión sea igual al sistema de ecuaciones anterior. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	Los coeficientes de la matriz serán: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ De esta forma se consigue: $\begin{pmatrix} -x + 3y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Que es otra representación del sistema de ecuaciones estudiado.
3. Mediante el <i>applet</i> de Geogebra determine la relación entre los vectores $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ y los valores solución de x e y.	Los valores solución son los ponderadores de los vectores columna de la matriz, a saber $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto se puede apreciar visualmente mediante el <i>applet</i> de Geogebra. La imagen del lado derecho muestra esta relación visualizada por el <i>applet</i>. 
4. Solo usando el <i>applet</i> y la relación encontrada en la pregunta anterior determine los valores solución de x e y del siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$	Usando el <i>applet</i> se llega a la representación visual del lado derecho. Usando el <i>applet</i> se puede concluir que la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado es $x = -2$, $y = 3$ 

5. Usando el <i>applet</i> determina valores de a y b tales que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases}$ tenga como solución números enteros.	Usando la estrategia del applet podemos tener la siguiente visualización (lado derecho). Por lo tanto los posibles valores de a y b (para que el sistema tenga solución entera) es tomar las coordenadas de los puntos de intersección de las líneas punteadas. En nuestro caso los posibles valores de a y b (expresados como coordenadas de puntos (a, b)) serán $(2,4), (3,1), (1,7), (5,5)$, entre otros muchos puntos. 
6. Use la misma estrategia con el <i>applet</i> para resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$	Como se puede apreciar por la visualización del applet (lado derecho), el sistema de ecuaciones lineales asociado tiene solución vacía. 
7. Si usamos la notación matricial del sistema anterior, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determine una relación entre los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ para que suceda la situación anterior.	Los vectores columna de la matriz asociada tienen igual dirección o en otras palabras, uno es el ponderado del otro. Esta situación sumada a que el vector solución tiene otra dirección distinta a los vectores anteriores determina la insolubilidad del sistema asociado.
8. Usando la relación anterior, construya un sistema de ecuaciones en el que suceda lo mismo que en el caso anterior.	Para construir este sistema de ecuaciones lineales bastará que los vectores columna de la matriz asociada tengan igual dirección, pero el vector solución tenga dirección distinta a la anterior. Evidentemente, cada estudiante puede construir un SEL diferente.

Plan de la clase 1

Objetivo de la clase: Relacionar los SEL con los vectores y matrices.

Momento de la clase (tiempo asignado)	Tareas matemáticas	Estrategias de resolución de los estudiantes y Posibles dificultades y errores.	Intervenciones del profesor y Devoluciones ante las posibles dificultades y errores de los estudiantes
Inicio (15 min.)	0. Inicio de la clase y presentación del objetivo de la clase. "Entendiendo los SEL a partir de los vectores y matrices." 1. Puesta en juego de conocimientos previos. 1.1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ 1.2. Determine los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la matriz para que la siguiente expresión sea igual al sistema de ecuaciones anterior. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	1.1. Los estudiantes resuelven el SEL mediante cualquiera de los métodos conocidos (sustitución, igualación, reducción, gráfico, regla de Cramer). 1.2. Los estudiantes relacionan los SEL con la escritura matricial aprendida en la unidad anterior. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no recuerden la forma de multiplicar matrices.	0. Explicar el sentido de esta nueva sub-unidad, los tiempos y la forma de evaluación. Escribir el objetivo y compartir primeras impresiones de los estudiantes (<i>¿Qué entienden del objetivo? ¿Qué creen que vamos a aprender?</i>) 1.2. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación el profesor muestra (usando otro ejemplo) cómo se multiplica una matriz por un vector columna. Como por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b \\ 3 \cdot a + 4 \cdot b \end{pmatrix}$
Desarrollo (60 min. Aprox. 10 min en cada tarea)	2. Planteamiento de los problemas principales de la clase. 2.1. Mediante el <i>applet</i> de Geogebra determine la relación entre los vectores $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ y los valores solución de x e y.	2.1. Los alumnos pueden visualizar que la solución son las veces que se usa un determinado vector para llegar al vector solución.	2.1. Si no queda claro el sentido de la tarea, unas posibles preguntas serían la siguientes: <i>¿Podemos llegar al punto (o vector) solución solo usando los vectores columna de la matriz? ¿Cuántas veces tenemos que usar cada vector? ¿Esta cantidad de veces estará relacionada con la solución del SEL?</i>

2.2. Solo usando el *applet* y la relación encontrada en la pregunta anterior determine los valores solución de x e y del siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

2.3. Usando el *applet* determina valores de a y b tales que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases}$$

tenga como solución números enteros.

2.4. Use la misma estrategia con el *applet* para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

2.2. Los estudiantes deben visualizar en la proyección una ruta desde el origen hasta el punto solución usando los vectores columna de la matriz, igual que en la tarea anterior.

Posible dificultad o error:

Es posible que algunos estudiantes no visualicen la “ruta” desde el origen hasta el punto solución usando los vectores columna.

Por otro lado, otra dificultad es que no consideren como (-1) vez el vector cuando lo usamos en el sentido contrario.

2.3. Se espera que los estudiantes elijan un nuevo punto entre aquellos donde el *applet* representa una nueva intersección de los nuevos “ejes” formados por los vectores (líneas punteadas).

Posible dificultad o error:

Es posible que algunos estudiantes no comprendan que los puntos que se deben escoger son las intersecciones de las rectas representadas en el *applet*.

2.4. Se espera que los estudiantes se den cuenta de la imposibilidad de la situación y la justifiquen mediante la representación

2.2.

Devolución ante la posible dificultad o error:

Una forma de abordar esta dificultad es pedirle a algún alumno voluntario que dibuje en la pizarra la ruta que él está considerando. A partir de esta ayuda, lo restante es contar las veces que usamos cada vector columna.

Por otro lado, mostrar que (-1) por el vector hace que avance en la misma dirección del vector pero en sentido contrario (como retrocediendo). Si aun no queda claro, se puede explicar con un vector concreto, por ejemplo $\vec{v} = (1,2)$ y luego ver que $(-1) \cdot \vec{v} = (-1,-2)$, justamente *retroceder* en la dirección del vector $\vec{v}$.

2.3.

Devolución ante la posible dificultad o error:

Si a uno o varios alumnos le dificulta escoger los valores de a y b apropiados, se le puede preguntar a algún alumno que haya visualizado esta estrategia con el *applet* y pedirle que explique su estrategia de resolución. De este modo los estudiantes tienen un ejemplo guía para resolver la tarea planteada.

Si no hay un alumno que explique su procedimiento, el profesor puede entregar un ejemplo para explicar el objetivo de la tarea.

2.4. Dar énfasis a la estrategia del *applet* y de la “ruta” desde el origen al punto solución usando los vectores columna de

	$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ 2.5. Si usamos la notación matricial del sistema anterior, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determine una relación entre los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ para que suceda la situación anterior. 2.6. Usando la relación anterior, construya un sistema de ecuaciones en el que suceda lo mismo que en el caso anterior.	gráfica, en donde no es posible llegar al punto (2,1) usando como “ruta” los vectores (2, -4) y (-3,6). Otra posible estrategia es que resuelvan algebraicamente el SEL y expongan que tiene solución vacía. 2.5. Una posible estrategia es graficar estos vectores y que noten que estos vectores tienen la misma dirección (no necesariamente el mismo sentido). Otra posible estrategia es que los alumnos noten que ambos vectores son solo ponderaciones del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2.6. Basta que el estudiante determine dos vectores linealmente dependientes (uno el ponderado del otro) y construya el SEL asociado usando estos valores en la matriz. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no comprendan que adicionalmente a que los vectores columna de la matriz tengan igual dirección, el vector solución tiene que tener dirección distinta a la anterior.	la matriz asociada al SEL. Si algún alumno desarrolló el SEL de forma algebraica se puede volver la atención a la representación gráfica con preguntas del tipo: <i>¿Cómo se refleja esta situación de los vectores columna en la gráfica? ¿Puedo saber que va a pasar esta situación en el SEL solo observando la gráfica de los vectores columna de la matriz? ¿Qué debe pasar en la gráfica?</i> Notar que esta última pregunta conecta esta tarea con la siguiente. 2.5. Si no surge la estrategia de graficar estos vectores se le puede sugerir a los estudiantes el por qué se le adjuntó un plano cartesiano en la parte del desarrollo de la tarea. Luego se le pide a los alumnos que describan con sus palabras lo que ven en la gráfica anotando las estrategias relevantes en pizarra. 2.6. Se le piden ejemplos a los alumnos y su posterior justificación. A partir de estas justificaciones se van incorporando en pizarra las estrategias más relevantes de los alumnos al resolver esta tarea. Devolución ante la posible dificultad o error: Si algún estudiante incurre en este error, se podría resolver de forma algebraica el SEL asociado. Luego al observar la infinitud de soluciones se pasaría a explicar mediante la visualización del applet esta infinitud de soluciones.
Cierre (15 minutos)	3. Sintetizar ideas Explique con sus propias palabras o con algún esquema lo que aprendió en esta sesión sobre los siguientes conceptos: Sistemas de ecuaciones	3. Los estudiantes desarrollan una síntesis de lo aprendido en la sesión. Esta síntesis es libre, por lo que pueden emplear esquemas, dibujos, párrafos, etc.	3. El docente dará plena libertad a los estudiantes para que desarrollen su síntesis y evitará dar juicios de valor sobre las relaciones o la forma de representar este conocimiento por parte

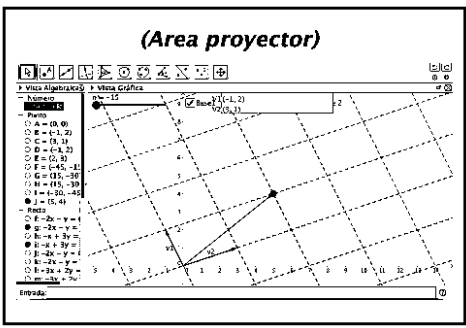
	lineales. • Matrices. • Vectores en el plano. • Existencia de soluciones.		del alumno. Si algún alumno insiste en conseguir alguna validación el profesor se limitará a responder: <i>En la próxima sesión conversaremos de estas síntesis.</i>
--	---	--	--

Pizarra de la clase

Fecha:

Objetivo:

(Area proyector)



Comentarios o estrategias relevantes:

Conclusiones finales:

El esquema de la pizarra de la imagen anterior será usado en todas las sesiones. Por esta razón solo lo expondremos explícitamente en esta ocasión.

Material complementario: *Applet* de Geogebra (documento adjunto) y guía de trabajo para el alumno (Sesión 1, en anexos)

44

CLASES 3 Y 4

Descripción de la secuencia de las clases 3 y 4

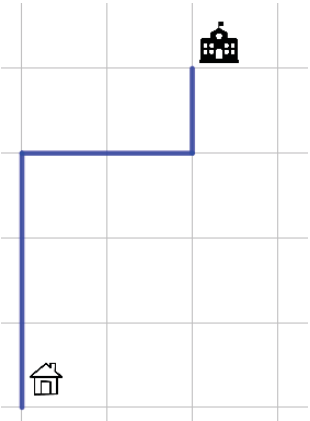
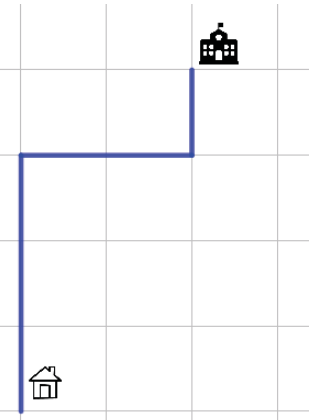
La sesión 3 está compuesta por 8 tareas y una actividad de síntesis. Entre las tareas propuestas está la resolución de un problema de modelización. A partir de estas tareas se buscará conectar estas estrategias con las de las sesiones anteriores. A partir de las respuestas de los estudiantes en la última tarea de síntesis, se procederá a definir lo que es una *combinación lineal* de vectores en el plano.

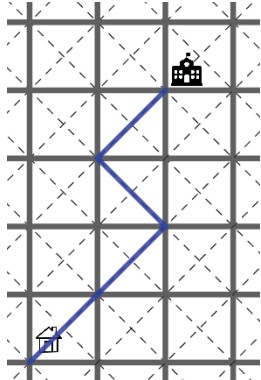
En estas sesiones se espera que los estudiantes:

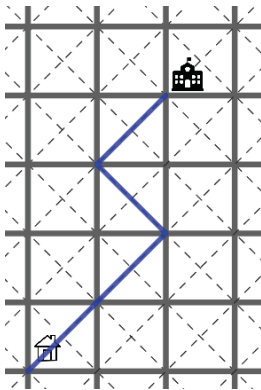
- Construyan rutas que comiencen en el origen del plano cartesiano y lleguen a algún punto particular. Luego cuenten las veces en que avanzaron en una determinada dirección. De este modo, la cantidad de veces que avanzaron en una dirección estará relacionada con el coeficiente numérico que ponderará al vector para llegar al punto de destino (desarrollo intuitivo de la noción de combinación lineal).
- A partir de estas “rutas” construyan una ruta desde el origen hasta el vector solución en función de los vectores en los que avanza (combinación lineal).
- Conjeturen características que deben cumplir los vectores con los que avanzan para que siempre se pueda llegar a cualquier punto del plano. Esta característica la pueden desarrollar usando la idea gráfica de la dirección de los vectores, aunque implícitamente se está desarrollando la idea de independencia lineal y de vectores generadores del plano.
- Relacionen la dirección de los vectores con la posibilidad de expresar cualquier otro vector del plano como combinación lineal de los vectores iniciales.
- Relacionen las direcciones de los vectores con el valor numérico del determinante de la matriz construida a partir de estos vectores. De manera que concluyan que si los vectores tienen distinta dirección, el determinante debe ser no nulo, y por otro lado, si los vectores tienen igual dirección, el determinante es cero.

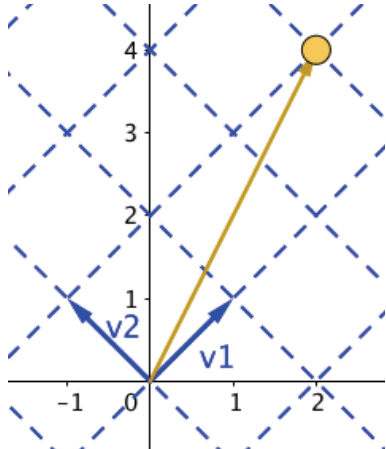
Observación: Resulta particularmente importante destacar que en las tareas desarrolladas en la clase 3 se le da un mayor énfasis a los escalares que conforman la combinación lineal y su unicidad, dejando en un segundo plano el estudio de los vectores. En términos algebraicos, si consideramos la combinación lineal como $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$, las tareas de esta clase se enfocan en que el estudiante logre descubrir que los escalares α y β son únicos para determinados vectores (o caminos) fijos. Por esta misma razón es que se analizan los caminos, o vectores, más simples en el plano, como por ejemplo $\vec{v}_1 = (0,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,0)$ o bien $\vec{v}_1 = (1,1)$ y $\vec{v}_2 = (-1,1)$, para darle una mayor prioridad al análisis de la unicidad de los escalares que acompañan a cada vector independiente de la ruta que haya construido cada estudiante.

Respuesta experta de las tareas planteadas en la clase 3

Tarea Matemática	Respuesta Experta
1. Imagine que tiene que ir desde su casa a la escuela. La ubicación de estos lugares se encuentra representada en la imagen del lado derecho. Construya gráficamente dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela avanzando por las calles representadas.	Se debe construir una ruta que siga las direcciones de las cuadradas de la imagen. Un ejemplo de estas posibles rutas es la del lado derecho. 
2. Cunte las cuadras que avanzó a la derecha ($\rightarrow$) y las que avanzó hacia arriba ($\uparrow$). Si en algún momento avanzó a la izquierda considere que se movió (-1) cuadras a la derecha (o retrocedió). Del mismo modo, si avanzó hacia abajo considere que se movió (-1) cuadra hacia arriba (o retrocedió). <i>Ejemplo: Si se movió dos cuadras hacia arriba y una hacia abajo, en total se movió $2 + (-1) = 1$, es decir una cuadra hacia arriba.</i>	El estudiante debe contar las cuadras que avanzó en cada dirección. En el ejemplo del lado derecho estos valores serían: $3 + 1 = 4$ veces ($\uparrow$) 2 veces ($\rightarrow$) 

3. Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes? Compare los resultados de su tarea 2 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 2) son diferentes? Proponga una respuesta justificada de esta situación.	Los resultados de la tarea anterior debiesen ser iguales, es decir 4 veces (↑) y 2 veces (→). Por otro lado, estos valores debiesen ser iguales para todos los estudiantes. Una explicación a este hecho es dividir el movimiento en la dirección vertical (↑) y en la dirección horizontal (→). De este modo sea cual sea la ruta construida, se debe avanzar en total 4 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia la derecha. Otra forma de verlo es entender estos valores numéricos como los ponderadores de una combinación lineal del tipo $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ Donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los vectores que indican las direcciones en las que puedo avanzar y $\vec{v}_3$ indica el vector al cual quiero llegar. En este sentido como trabajamos en $\mathbb{R}^2$ y los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, entonces los ponderadores α y β serán únicos. Esto se puede entender como expresar el vector $\vec{v}_3$ (expresado en la base canónica) en la nueva base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
4. Imagine que ahora tiene que ir nuevamente desde la casa a la escuela pero puede moverse solo por las diagonales de las manzanas (y no por las calles). Construya gráficamente dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela avanzando por estas diagonales. Observación: No puede cambiar de dirección en el centro de la manzana. Debe completar cada diagonal, es decir, no se puede hacer esto:	Se debe construir una ruta que siga las direcciones de las diagonales de las manzanas de la imagen. Un ejemplo de estas posibles rutas es la del lado derecho. 

	
5. Al igual que en la tarea 2, cuente las veces que avanzó en cada diagonal (↗ o ↘) para cada ruta que construyó en la tarea 4. Nuevamente, si tuvo que avanzar en la dirección (↖) considérelolo como (-1) vez la diagonal (↘). Del mismo modo, si tuvo que avanzar en la dirección (↙) considérelolo como (-1) vez la diagonal (↗)	El estudiante debe contar las diagonales que avanzó en cada dirección. En el ejemplo del lado derecho estos valores serían: $2 + 1 = 3$ veces (↗) 1 vez (↘) 
6. Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes? Compare los resultados de su tarea 5 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 5) son diferentes con los de su compañero? Proponga una respuesta justificada de esta situación.	Los resultados de la tarea anterior debiesen ser iguales, es decir 3 veces (↗) y 1 vez (↘). Por otro lado, estos valores debiesen ser iguales para todos los estudiantes. Una explicación a este hecho es dividir el movimiento en la dirección de la primera diagonal (↗) y en la dirección de la segunda diagonal (↘). De este modo sea cual sea la ruta construida, se debe avanzar en total 3 unidades en dirección (↗) y 1 unidad en dirección (↘). Otra forma de verlo (similar a la tarea 3) es entender estos valores numéricos como los ponderadores de una combinación lineal del tipo $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ Donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los vectores que indican las direcciones en las que puedo avanzar y $\vec{v}_3$ indica el vector al cual quiero llegar. En este sentido como trabajamos en $\mathbb{R}^2$ y los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, entonces los ponderadores α y β serán únicos. Esto se puede entender como expresar el vector $\vec{v}_3$ (expresado en la base canónica) en la nueva base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

7. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	El SEL asociado se puede resolver por el método que el estudiante desee, ya sea gráfico o algebraico. De cualquier modo, la solución del sistema es $x = 3$, $y = 1$.
8. Los vectores columna de la matriz de la tarea anterior son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compare estos vectores con las indicaciones para avanzar de la tarea 4. A su vez compare los resultados de la tarea 5 con la solución del sistema de ecuaciones de la tarea 7. ¿Qué conclusión puede obtener? Justifique su respuesta.	La solución del SEL asociado es igual a los valores encontrados en la tarea 5 y 6, es decir 3 y 1. Esta relación se justifica por la nueva comprensión del SEL escrito de forma matricial como búsqueda de los <i>ponderadores</i> de los vectores columna de la matriz asociada para llegar al vector solución. La visualización de este hecho se puede hacer mediante el applet (imagen del lado derecho) 

Plan de la clase 3

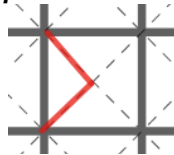
Objetivo de la clase: Construir “rutas” en el plano usando vectores.

Momento de la clase (tiempo asignado)	Tareas matemáticas	Estrategias de resolución de los estudiantes y Posibles dificultades y errores.	Intervenciones del profesor y Devoluciones ante las posibles dificultades y errores de los estudiantes
Inicio (15 min.)	0. Inicio de la clase y presentación del objetivo de la clase. “Construyendo “rutas” en el plano usando vectores” 1. Puesta en juego de conocimientos previos. 1.1. Imagine que tiene que ir desde su	1.1. Los estudiantes proponen al menos dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela.	0. Explicar el sentido de esta nueva sub-unidad, los tiempos y la forma de evaluación. Escribir el objetivo y compartir primeras impresiones de los estudiantes (¿Qué entienden del objetivo? ¿Qué creen que vamos a aprender?)

	casa a la escuela. La ubicación de estos lugares se encuentra representada en la imagen del lado derecho. Construya gráficamente dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela avanzando por las calles representadas. 1.2. Cuente las cuadras que avanzó a la derecha (→) y las que avanzó hacia arriba (↑). Si en algún momento avanzó a la izquierda considere que se movió (-1) cuadras a la derecha (o retrocedió). Del mismo modo, si avanzó hacia abajo considere que se movió (-1) cuadra hacia arriba (o retrocedió). <i>Ejemplo: Si se movió dos cuadras hacia arriba y una hacia abajo, en total se movió $2 + (-1) = 1$, es decir una cuadra hacia arriba.</i> 1.3. Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes? Compare los resultados de su tarea 2 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 2) son diferentes? Proponga una respuesta justificada de esta situación.	1.2. Los estudiantes cuentan las veces que avanzaron hacia “arriba” y que avanzaron a la “derecha”. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no entiendan que bajar es avanzar (-1) hacia arriba. Del mismo modo avanzar a la izquierda es avanzar (-1) a la derecha. 1.3. Los estudiantes comparan los resultados y concluye que todos son iguales. Un posible explicación de esto es analizar cada ruta en función de lo que sube o baja separadamente de los que avanza a la derecha o izquierda. De este modo se puede observar la regularidad. Posible dificultad o error: Es posible que algún estudiante llegue a un resultado diferente.	1.2. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es construir una ruta concreta en la pizarra (una que tenga estos movimientos, es decir, avanzar hacia abajo y hacia la izquierda) y completar la tarea de contar de forma grupal dando hincapié al hecho de considerar (-1) si se retrocede en el sentido del vector usado. 1.3. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es que el profesor le pide que comparta en pizarra la ruta que construyó de la casa al colegio y luego de forma grupal se calculan los valores de la tarea 3.
Desarrollo (60 min. Aprox. 12 min en cada tarea)	2. Planteamiento de los problemas principales de la clase. 2.1. Imagine que ahora tiene que ir nuevamente desde la casa a la escuela pero puede moverse solo por las diagonales de las manzanas (y no por	2.1. Los estudiantes proponen al menos dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela.	2.1. El profesor verifica que los estudiantes siguen las instrucciones correctamente, es decir no cometen el error descrito en la imagen

las calles). Construya gráficamente **dos rutas diferentes** para ir desde la casa a la escuela avanzando por estas diagonales.

Observación: No puede cambiar de dirección en el centro de la manzana. Debe completar cada diagonal, es decir, no se puede hacer esto:



2.2. Al igual que en la tarea 2, cuente las veces que avanzó en cada diagonal ($\nearrow$ o $\nwarrow$) para cada ruta que construyó en la tarea 4.

Nuevamente, si tuvo que avanzar en la dirección ($\swarrow$) considérelolo como (-1) vez la diagonal ($\nwarrow$). Del mismo modo, si tuvo que avanzar en la dirección ($\searrow$) considérelolo como (-1) vez la diagonal ($\nearrow$)

2.3. Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes?

Compare los resultados de su tarea 5 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 5) son diferentes con los de su compañero?

Proponga una respuesta justificada de esta situación.

2.2. Los estudiantes cuentan las veces que avanzaron en una diagonal ($\nearrow$) o en la otra ($\nwarrow$).

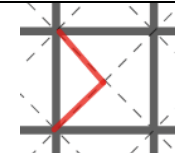
Posible dificultad o error:

Es posible que algunos estudiantes no entiendan cuando *retroceden* en la dirección del vector dado, es decir cuando usan (-1) vez el vector empleado.

2.3. Los estudiantes comparan los resultados y concluye que todos son iguales. Un posible explicación de esto es analizar cada ruta en función cada diagonal por separado. De este modo se puede observar la regularidad.

Posible dificultad o error:

Es posible que algún estudiante llegue a un resultado diferente.



2.2.

Devolución ante la posible dificultad o error:

Ante esta situación una posibilidad es construir una ruta concreta en la pizarra (una que tenga estos movimientos, es decir, avanzar hacia ($\swarrow$) y hacia ($\searrow$)) y completar la tarea de contar de forma grupal dando hincapié al hecho de considerar (-1) si se retrocede en el sentido del vector usado.

2.3.

Devolución ante la posible dificultad o error:

Ante esta situación una posibilidad es que el profesor le pide que comparta en pizarra la ruta que construyó de la casa al colegio y luego de forma grupal se calculan los valores de la tarea 6.

	2.4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 2.5. Los vectores columna de la matriz de la tarea anterior son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compare estos vectores con las indicaciones para avanzar de la tarea 4. A su vez compare los resultados de la tarea 5 con la solución del sistema de ecuaciones de la tarea 7. ¿Qué conclusión puede obtener? Justifique su respuesta.	2.4. Se espera que los estudiantes resuelvan el sistema de ecuaciones lineales, transformando esta expresión a las ecuaciones y tradicionales y resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos que ya conocen. 2.5. Se espera que los estudiantes observen que todos estos resultados son iguales. Esto permitirá la solución del SEL con los ponderadores de los vectores en que avanzamos (o las veces que usamos cada vector).	2.4. El profesor verifica que transforman correctamente el sistema expresado en forma algebraica a su expresión en ecuaciones lineales. 2.5. El profesor sugiere la relación de estas cantidades y su explicación con la representación gráfica. Por ejemplo: <i>Estos números (la solución del SEL), ¿qué representan en el dibujo?</i>
Cierre (15 minutos)	3. Sintetizar ideas Explique con sus propias palabras o con algún esquema qué relación existe entre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (ya sea en su escritura tradicional o matricial) y las rutas en las direcciones de los vectores que analizamos en esta sesión.	3. Los estudiantes desarrollan una síntesis de lo aprendido en la sesión. Esta síntesis es libre, por lo que pueden emplear esquemas, dibujos, párrafos, etc. La idea es que los alumnos hagan la relación entre la resolución de los SEL y la ruta que deben hacer desde el origen al punto solución usando los vectores columna de la matriz asociada.	3. El docente dará plena libertad a los estudiantes para que desarrollen su síntesis y evitará dar juicios de valor sobre las relaciones o la forma de representar este conocimiento por parte del alumno. Si algún alumno insiste en conseguir alguna validación el profesor se limitará a responder: <i>En la próxima sesión conversaremos de estas síntesis.</i> A partir de los ejemplos vistos y de la síntesis entregada por cada alumno en la sesión se procede a institucionalizar el concepto de <i>combinación lineal</i> entre vectores, tanto en su forma algebraica, como en su representación gráfica.

Material complementario: *Applet* de Geogebra (documento adjunto) y guía de trabajo para el alumno (Sesión 3, en anexos)

CLASES 5 Y 6

Descripción de la secuencia de las clases 5 y 6

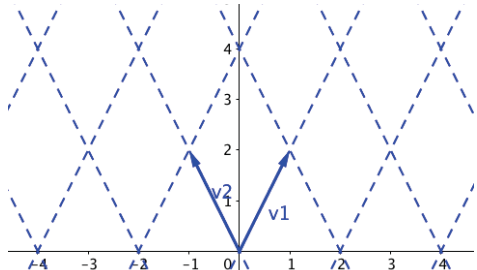
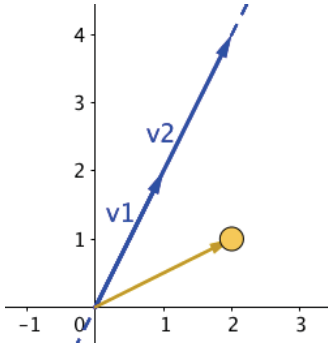
La sesión 5 está compuesta por 7 tareas y una actividad de síntesis. Entre las tareas propuestas está la construcción de combinaciones lineales entre diferentes vectores. Se estudiarán casos en los que es posible hacer la combinación pedida y casos en los que no es posible. A partir de estas dos situaciones se estudiarán las matrices asociadas a cada uno de estos casos y su relación con el valor del determinante de cada una de estas matrices. Finalmente, a partir de las respuestas en la actividad de síntesis se procederá a definir el *conjunto generador del plano*.

En estas sesiones se espera que los estudiantes:

- Construyan combinaciones lineales de vectores dados. A partir de estas combinaciones analicen las características de los vectores para poder construir o no la combinación lineal.
- A partir de estas combinaciones relacionen las direcciones de estos vectores con el resultado del determinante de la matriz asociada al SEL.
- Construyan el concepto de dependencia lineal, en base a la proporcionalidad de vectores o como las rutas entre dos vectores. Del mismo modo, definan la independencia como la imposibilidad de construir esta ruta entre el origen y cualquier otro vector del plano.
- Conjeturen relaciones entre la cantidad de vectores en el plano y las características que tienen que cumplir para llegar a cualquier punto del mismo plano (desarrollo intuitivo del concepto de conjunto generador del plano).
- Concluyan que bastan 2 vectores con diferente dirección para construir una ruta desde el origen a ese punto del plano.

Respuesta experta de las tareas planteadas en la clase 5

Tarea Matemática	Respuesta Experta
1. El vector (4,3) puede ser considerado como combinación lineal de la base canónica como $4 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. El mismo punto, ¿se podrá expresar como combinación lineal de los vectores (1,1) y (1,0)?	Se buscan los valores de α y β tales que $\alpha(1,1) + \beta(1,0) = (4,3)$ lo cual se puede relacionar con el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha = 3 \end{array} \right\}$ La solución de este sistema es igual a $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. Por lo tanto el vector (4,3) se puede expresar como: $3 \cdot (1,1) + 1(1,0) = (4,3)$

2. Determine dos vectores con los cuales se pueda construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta combinación tanto de forma algebraica como de forma gráfica.	Bastará con tomar dos vectores con diferente dirección. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 
3. Determine dos vectores con los cuales NO SE PUEDA construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta situación tanto de forma algebraica como de forma gráfica.	Bastará con tomar dos vectores con igual dirección. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 
4. Establezca una relación entre los vectores de la Tarea 2, los vectores de la Tarea 3 y el uso del determinante de la matriz (la matriz construida con los vectores determinados en la tarea 2 y 3).	El determinante de la matriz de la tarea 2 debe ser no nulo (ya que los vectores son independientes). Por otro lado el determinante de la matriz de la tarea 3 debe ser nulo (ya que los vectores son dependientes).
5. ¿Cómo se representa gráficamente la dependencia o independencía lineal de los vectores que propuso en la tarea anterior?	La dependencia lineal de dos vectores en $\mathbb{R}^2$ se ve gráficamente como la ponderación de un vector para conseguir el otro. Dicho de otro modo, cuando los vectores tienen igual dirección serán dependientes, en caso contrario la pareja de vectores será independiente.
6. Dibuje dos vectores sobre el plano y un tercero que sea combinación lineal de los dos primeros. Si algebraicamente la combinación lineal de vectores es	Un ejemplo de lo pedido lo podemos representar como en la siguiente imagen:

$\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ¿qué representan los escalares α y β en la representación en el plano cartesiano?	Los escalares α y β serían las veces que es usados cada vector (si lo consideramos en $\mathbb{Z}$) o como el factor por el cual ponderamos cada vector (si lo consideramos en $\mathbb{R}$).	
7. ¿Qué característica deben tener estos vectores para poder construir un camino hacia cualquier otro punto del plano? ¿Cuántos vectores con esta característica son necesarios para llegar a cualquier punto del plano?	Los vectores deben ser independientes, es decir, al menos en $\mathbb{R}^2$ deben tener diferente dirección. Con dos vectores, que cumplan esta característica, se consigue llegar con una ruta (o con una combinación lineal) a cualquier otro punto del plano. Ahora bien, dependiendo de los vectores columna de la matriz asociada y el vector solución, los ponderadores de estos vectores pueden ser valores reales no enteros.	

Plan de la clase 5

Objetivo de la clase: Analizar la posibilidad de llegar a cualquier punto del plano usando vectores para avanzar.

Momento de la clase (tiempo asignado)	Tareas matemáticas	Estrategias de resolución de los estudiantes y Posibles dificultades y errores.	Intervenciones del profesor y Devoluciones ante las posibles dificultades y errores de los estudiantes
Inicio (15 min.)	0. Inicio de la clase y presentación del objetivo de la clase. “Analizar la posibilidad de llegar a cualquier punto del plano usando vectores para avanzar.” 1. Puesta en juego de conocimientos previos.	1.1. Los estudiantes construyen la combinación lineal pedida, ya sea de	0. Explicar el sentido de esta nueva sub-unidad, los tiempos y la forma de evaluación. Escribir el objetivo y compartir primeras impresiones de los estudiantes (<i>¿Qué entienden del objetivo? ¿Qué creen que vamos a aprender?</i>) 1.1. El profesor sugiere el uso de la representación gráfica proponiendo

	1.1. El vector (4,3) puede ser considerado como combinación lineal de la base canónica como $4 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. El mismo punto, ¿se podrá expresar como combinación lineal de los vectores (1,1) y (1,0)?	modo algebraico o geométrico (gráfico). Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no relacione el problema con la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	representar los vectores dados en el plano. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es recordar que una combinación lineal es del tipo $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2$, luego pedir que reemplacen los valores de los vectores y que desarrollen la multiplicación por el ponderador y a suma de vectores. Esto permitirá evidenciar el sistema de ecuaciones lineales asociado.
Desarrollo (60 min. Aprox. 10 min en cada tarea)	2. Planteamiento de los problemas principales de la clase. 2.1. Determine dos vectores con los cuales se pueda construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta combinación tanto de forma algebraica como de forma gráfica. 2.2. Determine dos vectores con los cuales NO SE PUEDA construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta situación tanto de forma algebraica como de forma gráfica. 2.3. Establezca una relación entre los vectores de la Tarea 2, los vectores de la Tarea 3 y el uso del determinante de la matriz (la matriz construida con los vectores determinado en la tarea 2 y 3).	2.1. Los estudiantes proponen dos vectores con diferente dirección y representan estos vectores en el plano. 2.2. Los estudiantes proponen dos vectores con igual dirección. Justifican la imposibilidad de llegar a cualquier otro punto usando la representación gráfica adjunta. 2.3. Los estudiantes calculan los determinantes de las matrices asociadas a los SEL estudiados en las tareas anteriores y concluyen que cuando los vectores tienen igual dirección, el determinante de la matriz asociada es igual a 0, cosa que no ocurre cuando los vectores tienen distintas direcciones. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no recuerden como calcular el	2.1. El profesor pide justificaciones del tipo: <i>¿Por qué ese par de vectores sirve? ¿Qué características tienen? ¿Todos tienen vectores con la misma característica?</i> 2.2. Si un estudiante no queda satisfecho con la argumentación gráfica se le puede sugerir resolver el SEL asociado a los vectores que se están analizando. De este modo observará de forma algebraica la imposibilidad de llegar a cualquier punto del plano. 2.3. Si algún estudiante no comprende la tarea, se trabaja un ejemplo construido por el profesor y se procede a calcular el determinante de la matriz asociada para recordar y poner en común la manera de calcular el determinante de una matriz. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es mostrar con un ejemplo cómo se calcula el determinante de una matriz.

	2.4. ¿Cómo se representa gráficamente la dependencia o independencia lineal de los vectores que propuso en la tarea anterior? 2.5. Dibuje dos vectores sobre el plano y un tercero que sea combinación lineal de los dos primeros. Si algebraicamente la combinación lineal de vectores es $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$, ¿qué representan los escalares α y β en la representación en el plano cartesiano?	determinante de una matriz. 2.4. Los estudiantes concluyen mediante la representación gráfica que cuando los vectores tienen igual dirección (o uno es el ponderado del otro), la matriz asociada tendrá determinante igual a cero. 2.5. Los estudiantes dibujan un vector en el plano como la suma de dos vectores, formando un “triángulo” con los vectores en el plano. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes usen una representación vectorial donde los ponderadores escalares sean ambos 1. De este modo no se vería claramente la relación entre la representación gráfica y los ponderadores escalares.	Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$ 2.4. El profesor verifica que las representaciones gráficas corresponden a los vectores que propusieron en la tarea anterior. 2.5. El profesor sugiere la relación entre la combinación lineal de vectores y la representación gráfica de la suma de vectores. Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es desarrollar las siguientes preguntas con los estudiantes: <i>Y si ahora te pido que construyas gráficamente una combinación lineal donde los escalares sean 2 y 1, ¿cómo lo harías? Y si fueran 3 y 2, ¿cómo lo harías?</i>
	2.6. ¿Qué característica deben tener estos vectores para poder construir un camino hacia cualquier otro punto del plano? ¿Cuántos vectores con esta característica son necesarios para llegar a cualquier punto del plano?	2.6. Los estudiantes concluyen que bastan solo dos vectores con diferente dirección para construir una ruta desde el origen a cualquier otro punto del plano. Posible dificultad o error: Es posible que algunos estudiantes no relacionen las direcciones de los vectores o no entiendan que la característica entre los vectores debe asegurar llegar a cualquier otro punto del plano y no solo a uno en particular.	2.6. Se hace hincapié que en este caso general podemos tomar “partes” o “fracciones” de un determinado vector. Por ejemplo si consideramos los vectores (0,1) y (1,0) necesitaremos tomar parte de cada uno de estos vectores para construir una ruta que conecte el origen del plano con el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ Devolución ante la posible dificultad o error: Ante esta situación una posibilidad es desarrollar las siguientes preguntas con los estudiantes: <i>¿Vimos ejemplos donde no se podía construir la ruta en esta clase? ¿Cómo</i>

			eran las direcciones de los vectores? ¿Cuánto era el determinante de la matriz asociada? Luego, en el mismo sentido preguntar sobre los casos en que si se podía construir la ruta. Finalmente preguntar por posibles conclusiones de este pequeño análisis.
Cierre (15 minutos)	3. Sintetizar ideas Explique con sus propias palabras o con algún esquema qué relación existe entre los siguientes conceptos: • Sistemas de ecuaciones lineales. • Vectores generadores del plano. • Combinación lineal. • Construcción de una ruta. • Puntos en el plano.	3. Los estudiantes desarrollan una síntesis de lo aprendido en la sesión. Esta síntesis es libre, por lo que pueden emplear esquemas, dibujos, párrafos, etc. La idea es que los alumnos hagan la relación entre la combinación lineal, la independencia lineal de vectores en el plano, las rutas construibles y los vectores generadores del plano.	3. El docente dará plena libertad a los estudiantes para que desarrollen su síntesis y evitará dar juicios de valor sobre las relaciones o la forma de representar este conocimiento por parte del alumno. Si algún alumno insiste en conseguir alguna validación el profesor se limitará a responder: <i>En la próxima sesión conversaremos de estas síntesis.</i> A partir de los ejemplos vistos y de la síntesis entregada por cada alumno en la sesión se procede a institucionalizar el concepto de <i>independencia lineal</i> y <i>conjunto generador del plano</i>, tanto en su forma algebraica, como en su representación gráfica (conceptos trabajados en la secuencia de tareas de la sesión).

Material complementario: *Applet* de Geogebra (documento adjunto) y guía de trabajo para el alumno (Sesión 5, en anexos)

REFLEXIONES FINALES

Al finalizar esta secuencia didáctica destaco algunos aspectos relevantes sobre la elección del objeto matemático estudiado y sobre el tipo de actividades que asociamos a esta área de la matemática.

La clase inicial fue desarrollada bajo la metodología del Estudio de Clases. Esto favorece una profunda reflexión de parte de los docentes de las posibles dificultades que pueden emerger de las tareas y actividades propuestas, lo cual conlleva un arduo trabajo colaborativo de planificación, observación y modificación de las tareas matemáticas. Todo este trabajo tuvo sus frutos, ya que al implementar en diferentes contextos la clase inicial, los elementos del análisis a priori iban emergiendo, hecho que le dio consistencia a nuestro análisis previo.

Por otro lado, como se mencionó en la introducción, las unidades que están planificadas para III medio en su plan de formación diferenciada en matemática son la profundización en lenguaje algebraico, lugares geométricos y programación lineal (MINEDUC, 2001). Por otro lado en IV medio está contemplado el estudio de los procesos infinitos, funciones polinomiales y funciones trigonométricas (MINEDUC, 2002). De manera que el énfasis está puesto en el análisis de funciones y expresiones algebraicas. Si contrastáramos estas unidades con los cuatro ejes del currículo de matemática, a saber Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar, podemos observar que se potencia principalmente el eje de Álgebra. Es posible que después de 15 años de implementación de este programa de estudios sea necesario revisarlo y volver a pensar el sentido de este plan diferenciado. Esto podría abrir la mirada a la profundización de otras áreas o ejes del currículo, como por ejemplo, Geometría o Datos y Azar.

Por último, y en relación con el punto anterior, el Estudio de Clases permitió evidenciar la dificultad que presentan los estudiantes en conectar el modo SG de los SEL con el modo AA, y más aun con el AE. Esta problemática observada fue la que motivó la creación de la posterior secuencia didáctica enfocada principalmente en fortalecer estas conexiones, a saber, entre el modo SG con los modos analíticos, ya sea el modo AA o bien el modo AE. Para abordar esta última conexión, la secuencia se enfoca en estudiar los conceptos básicos del Álgebra Lineal a partir de los sistemas de ecuaciones lineales ayudados del análisis gráfico de diferentes situaciones. La representación gráfica está presente en todas las actividades de la secuencia. Esto permite que el estudiante haga generalizaciones o conjeturas sobre las tareas que se le presentan. Este énfasis visual no debe entenderse como una simple estrategia escolar, ya que el Álgebra Lineal surgió en la complementariedad de diversos modos de pensamiento, entre ellos el sintético-geométrico. Por tanto, al entender que los conceptos del Álgebra Lineal surgieron mediante esta combinación de modos de pensamiento se valida la idea que la representación gráfica de estos conceptos debiese ser una práctica fundamental no solo a nivel escolar, sino también a nivel universitario. No obstante, el análisis gráfico sobre el plano cartesiano no es equivalente al modo SG pues en el plano ya existen elementos del modo AA como las coordenadas de los puntos o el coeficiente de posición. De todos modos, el uso de Geogebra permitió poner de relieve aspectos geométricos de las tareas planteadas, con ciertos matices algebraicos o aritméticos.

En definitiva, la secuencia didáctica busca contribuir a fortalecer la relación entre el modo SG y los modos analíticos. De modo que se puedan integrar la perspectiva geométrica con la perspectiva algebraica al estudiar los primeros conceptos del Álgebra Lineal. Esta integración no solo acercaría al estudiante al contexto epistemológicos de donde emergieron estos conceptos, sino que también le permitiría ir descubriendo, mediante la secuencia de actividades y tareas, intuiciones geométricas que, usualmente, pasan por alto algunos textos clásicos de Álgebra Lineal.

REFERENCIAS

- Bell, E. T. (2016). *Historia de las matemáticas*. Ciudad de México, México: Fondo de cultura económica.
- Bozalla, A. y García, S. (2014). Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 . En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1031-1039). Distrito Federal, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Casalderrey, F. (2000). *Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madrid, España: Nivola libros y ediciones.
- De Burgos Román, J. (1993). *Álgebra Lineal*. España: Mcgraw-Hill Interamericana de España.
- Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. *New ICMI studies series*, 7, 255-274.
- Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* (tesis de magister). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.
- Galasso, B., Maldonado, L. y Marambio, V. (2016). *Matemática 1° Medio. Texto del estudiante*. Santiago, Chile: Santillana.
- Hoffman, K., Kunze, R. y Finsterbusch, H. E. (1973). *Álgebra Lineal*. Ciudad de México, México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Jácome, M., Torres, C. y Araujo, C. (2017). Enseñanza del procesamiento digital de imágenes a través de objetos virtuales de aprendizaje en entornos e-learning. *Revista colombiana de tecnologías de avanzada (RCTA)*, 2 (28), 72-76.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* (3). Madrid, España: Alianza.
- Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE)*, 13, 105-132.
- MINEDUC (2011). *Ajuste curriculares*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
- MINEDUC (2015). *Bases Curriculares*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
- MINEDUC (2016). *Programa de estudio Matemática Primer año medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
- Muñoz, G., Rupin, P. y Jiménez, L. (2016). *Matemática 2° Medio. Texto del estudiante*. Santiago, Chile: Ediciones SM Chile.
- Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas* (tesis de doctorado). CICATA-IPN, Ciudad de México, México.

- Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. Ciudad de Mexico, Mexico: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Regalado, A., Delgado, F., Martínez, R. y Peralta, E. (2014). Balanceo de Ecuaciones Químicas Integrando las Asignaturas de Química General, Álgebra Lineal y Computación: Un Enfoque de Aprendizaje Activo. *Formación universitaria* , 7 (2), 29-40.
- Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 7 (1), 49-78.
- Sierpiska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht, Netherlands: Springer.

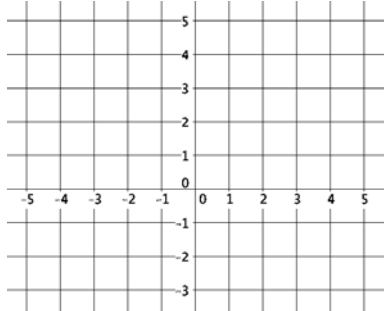
ANEXOS

Material para el estudiante. Guías de trabajo desde la sesión 1 a la 6

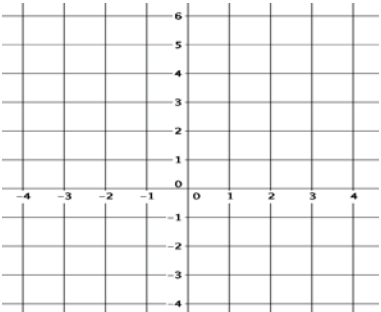
SESIÓN 1

Nombre: _____

Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$	<u>Estrategia y desarrollo</u> 
Tarea 2 Determine los coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la matriz para que la siguiente expresión sea igual al sistema de ecuaciones anterior. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	<u>Estrategia y desarrollo</u>
Tarea 3 Mediante el <i>applet</i> de Geogebra determine la relación entre los vectores $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ y los valores solución de x e y.	<u>Estrategia y desarrollo</u>

Tarea 4 Solo usando el <i>applet</i> y la relación encontrada en la pregunta anterior determine los valores solución de x e y del siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$	<u>Estrategia y desarrollo</u>
Tarea 5 Usando el <i>applet</i> determina valores de a y b tales que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + 2y = a \\ 3x + 4y = b \end{cases}$ tenga como solución números enteros.	<u>Estrategia y desarrollo</u>
Tarea 6 Use la misma estrategia con el <i>applet</i> para resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$	<u>Estrategia y desarrollo</u>

Tarea 7 Si usamos la notación matricial del sistema anterior, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determine una relación entre los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ para que suceda la situación anterior.	Estrategia y desarrollo 
Tarea 8 Usando la relación anterior, construya un sistema de ecuaciones en el que suceda lo mismo que en el caso anterior.	Estrategia y desarrollo
Síntesis de la sesión Explique con sus propias palabras o con algún esquema lo que aprendió en esta sesión sobre los siguientes conceptos: • Sistemas de ecuaciones lineales. • Matrices. • Vectores en el plano. • Existencia de soluciones.	

SESIÓN 2

Nombre: _____

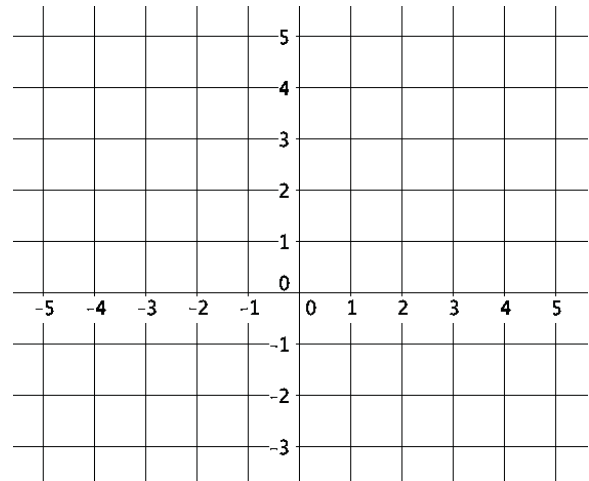
Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1

Construya un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial y resuélvalo usando la estrategia de los vectores columna de la matriz.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Estrategia y desarrollo:

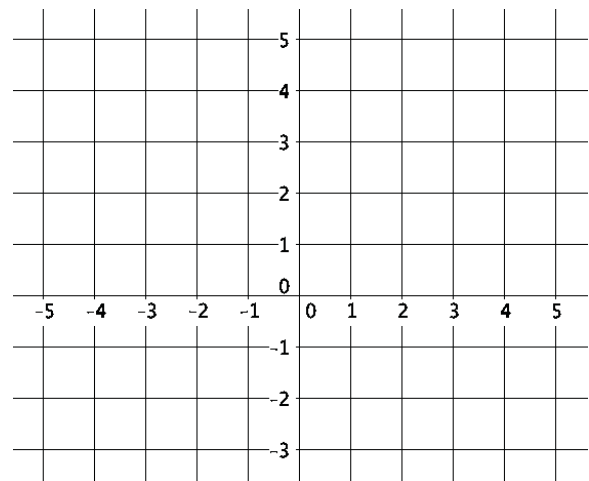


Tarea 2

Construya un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial que **TENGA SOLUCIÓN VACÍA**. Explique por qué se cumple esta condición usando los vectores columna de la matriz.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Estrategia y desarrollo:

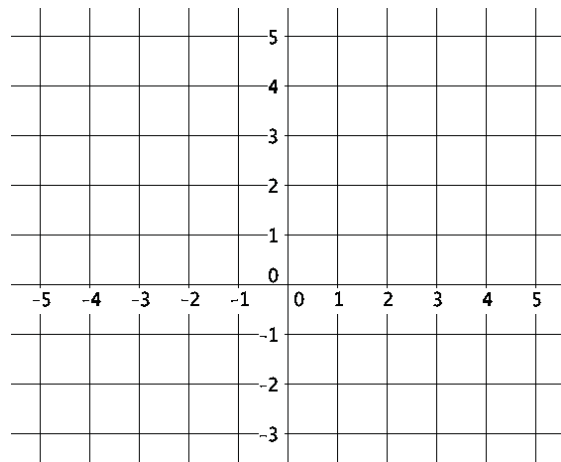


Tarea 3

Construya un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial que **TENGA INFINITAS** soluciones. Explique la infinitud de soluciones usando los vectores columna de la matriz.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Estrategia y desarrollo:



Tarea 4

Establezca una relación entre los vectores columna de la matriz del sistema de ecuaciones lineales y la cantidad de soluciones. Es decir, determine una relación entre los vectores columnas de la matriz para que el sistema de ecuaciones lineales asociado tenga 0, 1 o infinitas soluciones.

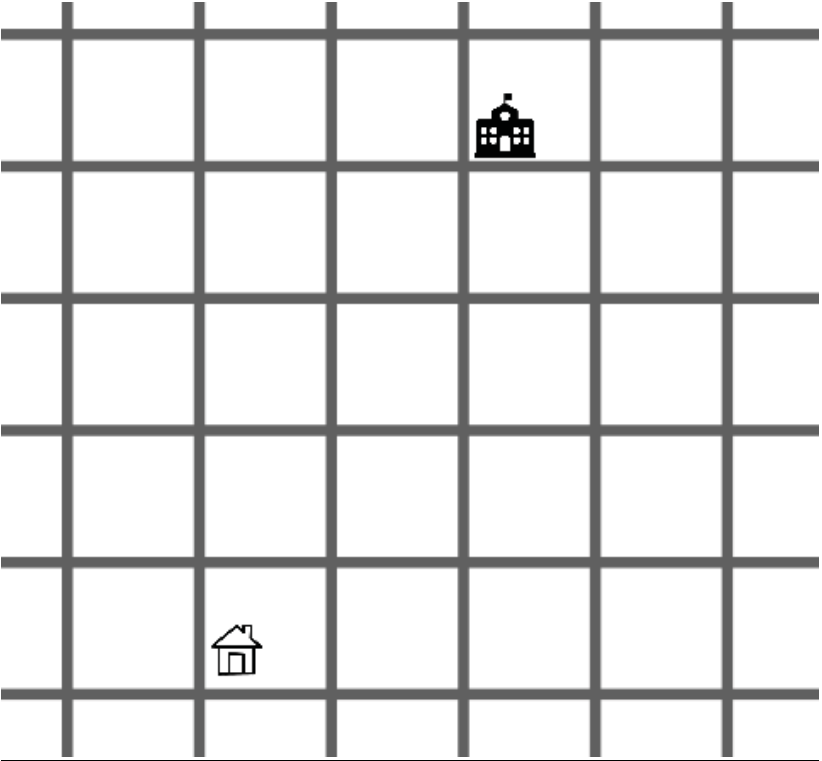
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

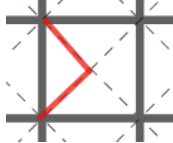
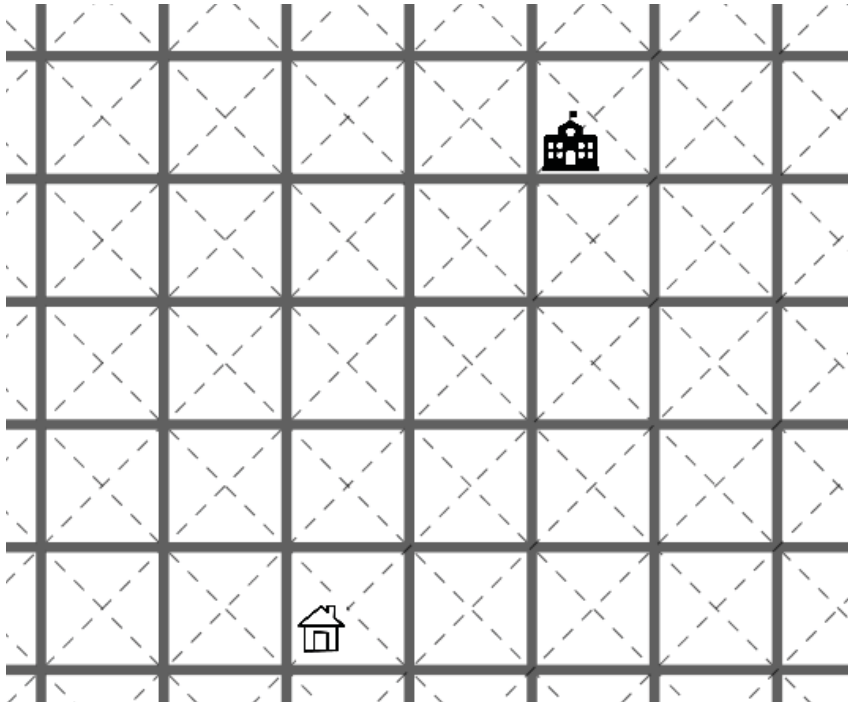
Cantidad de soluciones	Característica de los vectores $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$
0 soluciones.	
1 solución.	
Infinitas soluciones.	

SESIÓN 3

Nombre: _____

Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1 Imagine que tiene que ir desde su casa a la escuela. La ubicación de estos lugares se encuentra representada en la imagen del lado derecho. Construya gráficamente dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela avanzando por las calles representadas.	Estrategia y desarrollo 																
Tarea 2 Cuente las cuadras que avanzó a la derecha (→) y las que avanzó hacia arriba (↑). Si en algún momento avanzó a la izquierda considere que se movió (-1) cuadras a la derecha (o retrocedió). Del mismo modo, si avanzó hacia abajo considere que se movió (-1) cuadra hacia arriba (o retrocedió). <i>Ejemplo: Si se movió dos cuadras hacia arriba y una hacia abajo, en total se movió $2 + (-1) = 1$, es decir una cuadra hacia arriba.</i>	Estrategia y desarrollo <table border="1" data-bbox="597 1287 1425 1417"> <thead> <tr> <th colspan="2">RUTA 1</th> <th colspan="2">RUTA 2</th> </tr> <tr> <th>Dirección</th> <th>Total</th> <th>Dirección</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(→)</td> <td></td> <td>(→)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(↑)</td> <td></td> <td>(↑)</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	RUTA 1		RUTA 2		Dirección	Total	Dirección	Total	(→)		(→)		(↑)		(↑)	
RUTA 1		RUTA 2															
Dirección	Total	Dirección	Total														
(→)		(→)															
(↑)		(↑)															

Tarea 3 Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes? Compare los resultados de su tarea 2 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 2) son diferentes? Proponga una respuesta justificada de esta situación.	Estrategia y desarrollo																
Tarea 4 Imagine que ahora tiene que ir nuevamente desde la casa a la escuela pero puede moverse solo por las diagonales de las manzanas (y no por las calles). Construya gráficamente dos rutas diferentes para ir desde la casa a la escuela avanzando por estas diagonales. Observación: No puede cambiar de dirección en el centro de la manzana. Debe completar cada diagonal, es decir, no se puede hacer esto: 	Estrategia y desarrollo 																
Tarea 5 Al igual que en la tarea 2, cuente las veces que avanzó en cada diagonal ($\nearrow$ o $\nwarrow$) para cada ruta que construyó en la tarea 4. Nuevamente, si tuvo que avanzar en la dirección ($\swarrow$) considérelolo como (-1) vez la diagonal ($\nwarrow$). Del mismo modo, si tuvo que avanzar en la dirección ($\searrow$) considérelolo como (-1) vez la diagonal ($\nearrow$)	Estrategia y desarrollo <table><tr><th colspan="2">RUTA 1</th><th colspan="2">RUTA 2</th></tr><tr><th>Dirección</th><th>Total</th><th>Dirección</th><th>Total</th></tr><tr><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td></td></tr><tr><td>$\nwarrow$</td><td></td><td>$\nwarrow$</td><td></td></tr></table>	RUTA 1		RUTA 2		Dirección	Total	Dirección	Total	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nwarrow$		$\nwarrow$	
RUTA 1		RUTA 2															
Dirección	Total	Dirección	Total														
$\nearrow$		$\nearrow$															
$\nwarrow$		$\nwarrow$															

Tarea 6 Compare los resultados de las rutas de la tarea anterior. ¿Los resultados son diferentes? Compare los resultados de su tarea 5 con los de sus compañeros. ¿Hicieron la misma ruta? ¿Estos resultados (de la tarea 5) son diferentes con los de su compañero? Proponga una respuesta justificada de esta situación.	<u>Estrategia y desarrollo</u>
Tarea 7 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones expresado en forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	<u>Estrategia y desarrollo</u>
Tarea 8 Los vectores columna de la matriz de la tarea anterior son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compare estos vectores con las indicaciones para avanzar de la tarea 4. A su vez compare los resultados de la tarea 5 con la solución del sistema de ecuaciones de la tarea 7. ¿Qué conclusión puede obtener? Justifique su respuesta.	<u>Estrategia y desarrollo</u>

Síntesis de la sesión

Explique con sus propias palabras (o con algún esquema) qué relación existe entre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (ya sea en su escritura tradicional o matricial) y las rutas en las direcciones de los vectores que analizamos en esta sesión.

SESIÓN 4

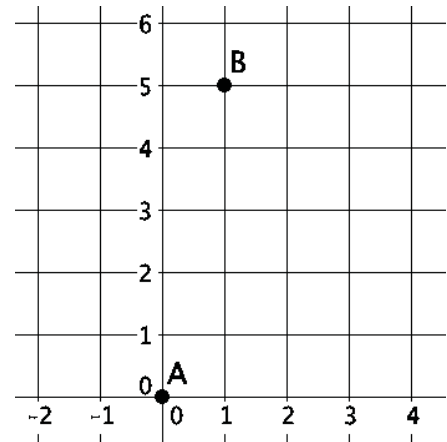
Nombre: _____

Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1

Expresa el vector $(1,5)$ como *combinación lineal* de los vectores $(1,2)$ y $(-1,1)$. Expresa esta combinación tanto de forma algebraica como gráfica, si no es posible, justifica esta imposibilidad.

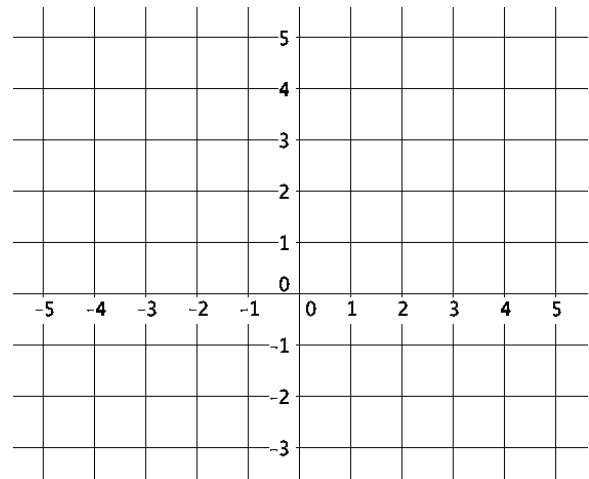
Estrategia y desarrollo:



Tarea 2

Expresa el vector $(2,3)$ como combinación lineal de los vectores $(2,1)$ y $(4,2)$. Expresa esta combinación tanto de forma algebraica como gráfica, si no es posible, justifica esta imposibilidad.

Estrategia y desarrollo:



Tarea 3

¿Qué característica tienen que cumplir los vectores para poder construir una combinación lineal del cualquier otro vector del plano?

Estrategia y desarrollo:

Tarea 4

¿Qué relación existe entre los ponderadores de la combinación lineal con la solución del sistema de ecuaciones asociado? Para responder a esta pregunta resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Compara el resultado de este sistema con lo expuesto en la Tarea 1.

Estrategia y desarrollo:

Tarea 5

Suponga que tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

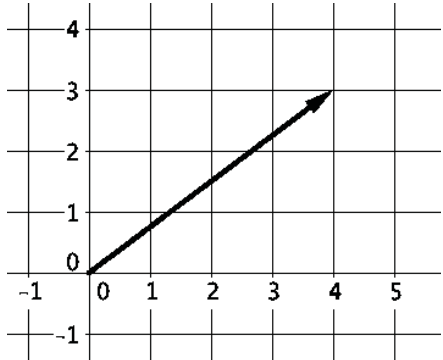
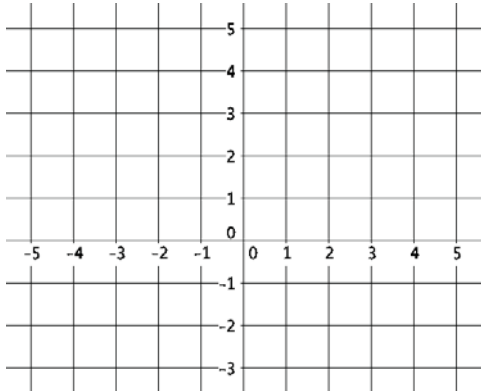
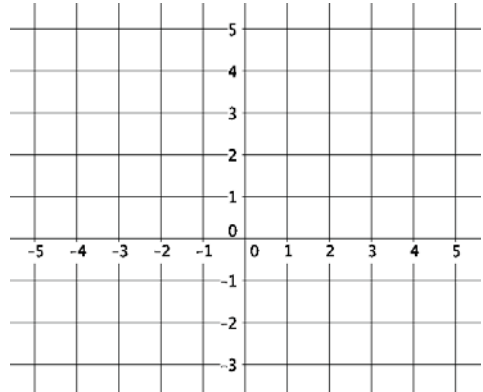
¿Qué relación debe existir entre los vectores $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ para que el sistema tenga una única solución? ¿Y para que tenga infinitas soluciones? ¿Y para que tenga solución vacía?

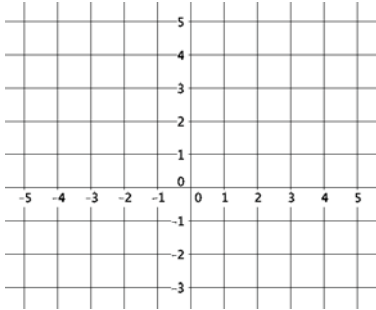
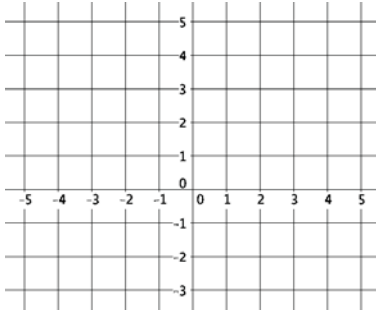
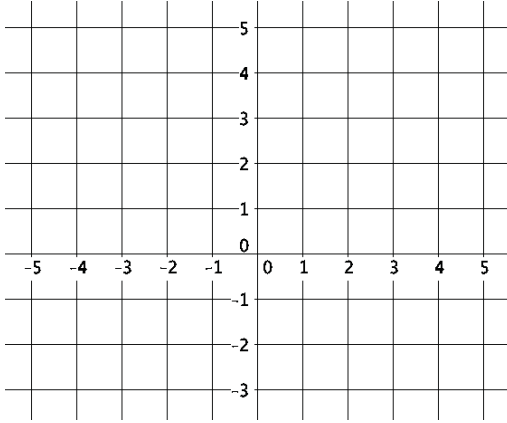
Estrategia y desarrollo:

SESIÓN 5

Nombre: _____

Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1 El vector $(4,3)$ puede ser considerado como combinación lineal de la base canónica como $4 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. El mismo punto, ¿se podrá expresar como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$?	Estrategia y desarrollo 
Tarea 2 Determine dos vectores con los cuales se pueda construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta combinación tanto de forma algebraica como de forma gráfica.	Estrategia y desarrollo 
Tarea 3 Determine dos vectores con los cuales NO SE PUEDA construir (mediante combinación lineal) cualquier otro vector del plano. Represente esta situación tanto de forma algebraica como de forma gráfica.	Estrategia y desarrollo 

Tarea 4 Establezca una relación entre los vectores de la Tarea 2, los vectores de la Tarea 3 y el uso del determinante de la matriz (la matriz construida con los vectores determinado en la tarea 2 y 3).	Estrategia y desarrollo <table border="1"> <tr> <td data-bbox="621 247 1027 369">Vectores de la tarea 2</td><td data-bbox="1027 247 1430 369">Vectores de la tarea 3</td></tr> <tr> <td data-bbox="621 369 1027 525">Matriz asociada</td><td data-bbox="1027 369 1430 525">Matriz asociada</td></tr> <tr> <td data-bbox="621 525 1027 737">Determinante de la matriz</td><td data-bbox="1027 525 1430 737">Determinante de la matriz</td></tr> </table>	Vectores de la tarea 2	Vectores de la tarea 3	Matriz asociada	Matriz asociada	Determinante de la matriz	Determinante de la matriz
Vectores de la tarea 2	Vectores de la tarea 3						
Matriz asociada	Matriz asociada						
Determinante de la matriz	Determinante de la matriz						
Tarea 5 ¿Cómo se representa gráficamente la dependencia o independencia lineal de los vectores que propuso en la tarea anterior?	Estrategia y desarrollo Vectores Tarea 2  Vectores Tarea 3 						
Tarea 6 Dibuje dos vectores sobre el plano y un tercero que sea combinación lineal de los dos primeros. Si algebraicamente la combinación lineal de vectores es $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ ¿qué representan los escalares α y β en la representación en el plano cartesiano?	Estrategia y desarrollo 						

Tarea 7 ¿Qué característica deben tener estos vectores para poder construir un camino hacia cualquier otro punto del plano? ¿Cuántos vectores con esta característica son necesarios para llegar a cualquier punto del plano?	Estrategia y desarrollo
Síntesis de la sesión Explique con sus propias palabras o con algún esquema qué relación existe entre los siguientes conceptos: • Sistemas de ecuaciones lineales. • Vectores generadores del plano. • Combinación lineal. • Construcción de una ruta. • Puntos en el plano.	

SESIÓN 6

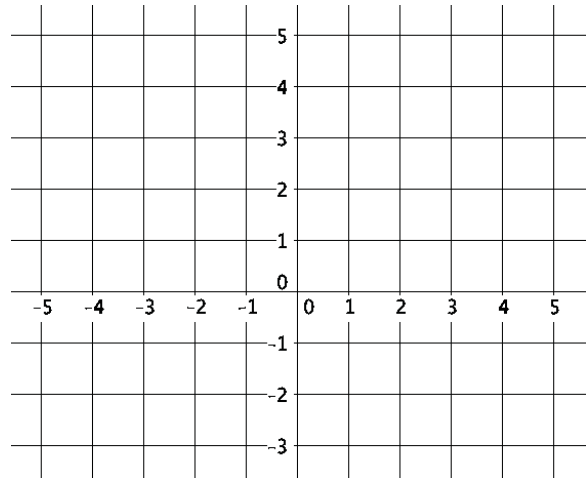
Nombre: _____

Responda las siguientes actividades en el espacio indicado. Deje por escrito su estrategia de resolución y desarrollo.

Tarea 1

Determine y represente dos vectores en el plano que sean linealmente dependientes. ¿Cómo se justifica algebraicamente esta dependencia?

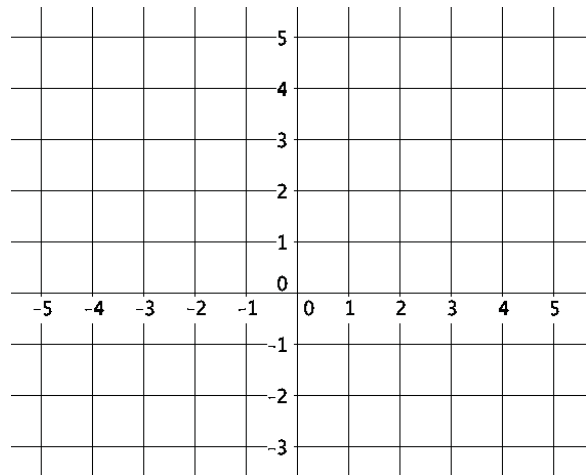
Estrategia y desarrollo:



Tarea 2

Determine y represente dos vectores en el plano que sean linealmente *independientes*. ¿Cómo se justifica algebraicamente esta independencia?

Estrategia y desarrollo:

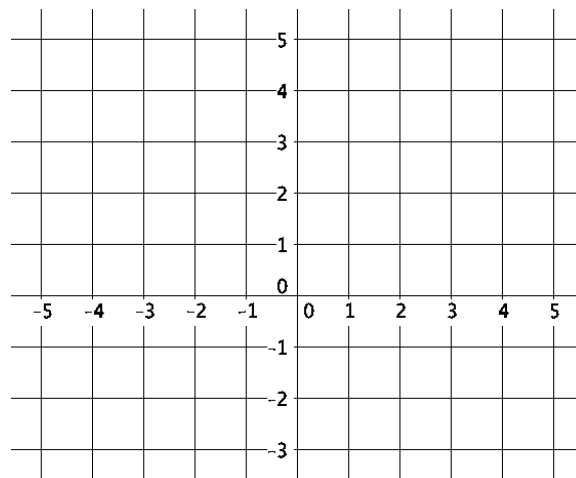


Tarea 3

Suponga que tiene los vectores $(2,3)$ y $(3,5)$. ¿Se podrá llegar a cualquier punto del plano avanzando en la dirección de estos vectores?

Si su respuesta es afirmativa entregue el punto al que no pueden llegar y justifique esta imposibilidad. Si su respuesta es negativa justifique su imposibilidad mediante la representación en el plano o algún argumento algebraico.

Estrategia y desarrollo:



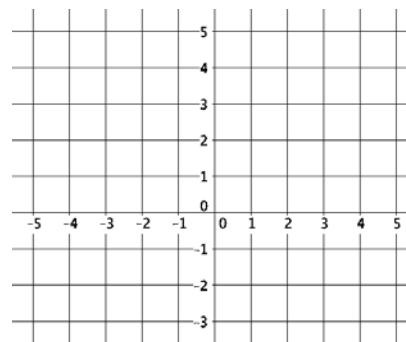
Tarea 4

Si queremos poder construir siempre alguna ruta desde el origen hasta cualquier punto del plano avanzando en la dirección de un conjunto de vectores, ¿Cuántos vectores (como máximo) son necesarios y que característica deben cumplir para asegurar que siempre se podrá construir esta ruta?

Estrategia y desarrollo:

Tarea 5

Determine un conjunto de **tres** vectores en el plano que sean linealmente independientes entre sí. Exponga su ejemplo, tanto de forma algebraica como gráfica, o justifique la imposibilidad de la situación.



Plan de clases sesión 0

Profesor..... Colegio/Liceo

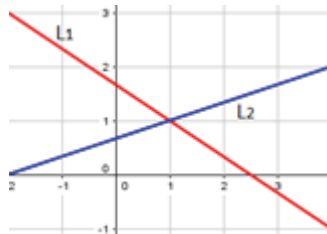
Tema del estudio de la clase	Desarrollar el análisis de la representación gráfica del conjunto solución en Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 y de 3x2.
------------------------------	--

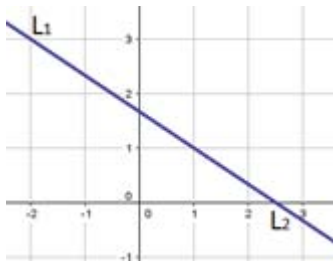
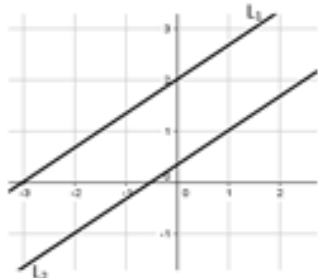
Clase 0

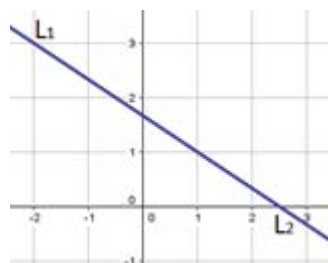
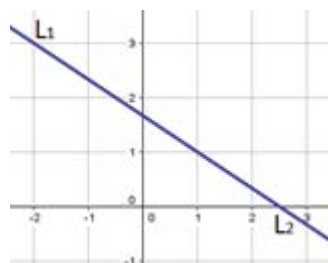
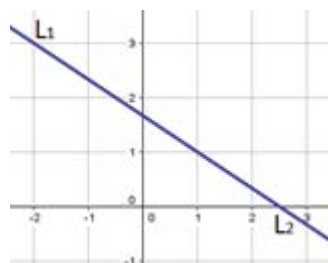
Objetivo de la clase: ¿De cuántas maneras se pueden representar dos o tres rectas en el plano cartesiano?

Tiempo de la clase Minutos	Tarea matemática	Rol del estudiante/posibles respuestas.	Rol del profesor/devoluciones.
0 – 5	Inicio de la clase: Acogida y normalización. Indicaciones de la clase: forma de trabajo y conformación de grupos (3 personas).	• Escuchar atentamente al profesor. • Formar los grupos de trabajo indicados. • Iniciar trabajo grupal de forma autónoma.	• Generar clima de clase adecuado a la actividad. • Dar las indicaciones de la clase. • Recordar los grupos que han sido previamente confeccionados en la clase anterior por el docente (se proyectan en PPT) y la distribución del espacio al interior de la sala de clases. • Entregar material impreso a cada grupo (Guía).
5 – 10	Actividad 1: Decide si la siguiente afirmación es cierta o no: Una ecuación de primer grado con dos incógnitas representa siempre una recta.	Cada grupo debate acerca de la veracidad de la afirmación propuesta. Se espera que la mayoría concluyan que la afirmación es verdadera. Respuesta experta: Las ecuaciones lineales de varias variables admiten también interpretaciones geométricas, cuando los coeficientes de la ecuación pertenecen a un cuerpo. Así una función lineal de	El profesor observa a cada grupo y luego de 3 minutos realiza un pequeño plenario entorno a la pregunta, escuchando los argumentos y confirmando que la afirmación es verdadera. Ante el olvido de algún grupo que no recuerde qué es una ecuación de primer grado de dos incógnitas, el profesor puede guiar con las siguientes preguntas:

		dos variables de la forma $ax + by = c$ representa una recta en un plano. Posibles respuestas: • Sí, porque la ecuación es lineal. • Sí, porque si se dan valores a la variable y se gráfica, representa una línea en el plano. • No, porque la solución de una ecuación es un número. • No, porque una ecuación no se puede graficar. Estrategias: • Asignar valores a las constantes m y n de una ecuación lineal de la forma $y = mx + n$ y graficar en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores". Posibles Dificultades: • No reconocer cuando una variable (x o y) toma el valor nulo, igualmente corresponde a una recta paralela a los ejes coordenados, según corresponda. • No reconocer de qué forma es una ecuación de primer grado. • Los estudiantes se quedan con las ecuación de primer grado y no consideran el resto del enunciado, así ven ecuaciones como $2x - 3 = 5$. Posibles Errores • Considerar como ecuación de primer grado a una ecuación del tipo $xy = c$ • Asignar valores y equivocarse en el tratamiento algebraico de manera que el gráfico no represente una recta.	• ¿Puedes dar un ejemplo de una ecuación de primer grado con una incógnita? • ¿Puedes crear otra ecuación de primer grado pero con dos incógnitas? • La ecuación que me acabas de entregar, ¿cuántas soluciones tiene? ¿Por qué? • ¿Cómo se representan en el plano estas soluciones? Por otro lado, si un grupo cree que la solución de la ecuación es un único par ordenado, la mediación del profesor puede ser: • Si cambiamos el valor de una de las incógnitas, por ejemplo el sucesor del número encontrado. La otra incógnita, ¿qué valor tendría que tomar para que la igualdad se siguiera cumpliendo?
10 – 25	Actividad 2: ¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 2×2, es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?	Se espera que los grupos logren identificar que un sistema de ecuaciones de 2×2 representa dos rectas en el plano y luego en la actividad 3 logren visualizar los 3 casos posibles (secantes, paralelas o coincidentes). Respuesta experta: Cada una de las ecuaciones pertenecientes al sistema representa una recta en el plano cartesiano. Por lo que el	• El docente entrega una hoja tamaño carta con planos cartesianos para que el grupo pueda realizar la actividad 3 y observa el trabajo de los grupos, les da unos 3 min para la actividad 2.

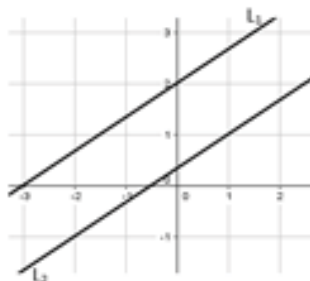
		sistema de ecuaciones 2x2 representa dos rectas en el plano. Posibles respuestas: - El sistema representará lo que determine su conjunto solución. - El sistema representa dos rectas en el plano. - La representación gráfica dependerá de cómo sean las ecuaciones del sistema. Estrategias: - Los estudiantes crean un sistema de ecuaciones lineales y asignan valores a las constantes m y n de cada ecuación de la forma $y = mx + n$ y grafican en el plano cartesiano con el uso de una "tabla de valores". - Infieren de la actividad 1. Una ecuación lineal se representa gráficamente a través de una recta, entonces dos ecuaciones se representarán como dos rectas. Posibles Dificultades: - Los estudiantes observan al sistema de ecuaciones como un solo objeto y no reconocen que está formado por dos rectas. Posibles Errores: - Representan gráficamente el sistema de ecuaciones a través de su solución. - Asignan valores y se equivocan en el tratamiento algebraico de manera que el gráfico no represente dos rectas.	Posibles devoluciones durante la actividad 2, según las dificultades y errores explicitados: ¿Nos están preguntando por el conjunto solución? ¿Cuántos elementos forman el sistema de ecuaciones? ¿Qué representa cada uno de esos elementos? Luego el docente incentiva a que busquen otras representaciones
	Actividad 3: Representa gráficamente de todas las formas posibles dos rectas en el plano cartesiano.	Respuesta experta: Forma 1: 	Posibles devoluciones durante la actividad 3, según las dificultades y errores explicitados: (1) No considerar rectas coincidentes: el profesor puede guiar la reflexión mediante las siguientes preguntas. La suma de dos números es igual a 5, ¿cuáles son los posibles números?

		Forma 2:  Forma 3:  Posibles respuestas: • Graficar las tres formas posibles • Considerar solo las formas 1 y 3, pues en estas aparecen las dos rectas visibles. Estrategias: • Trazar distintas rectas (de a pares) en el plano al azar. • Trazar las rectas considerando sus posiciones relativas: paralelas o secantes. Posibles Dificultades: • No considerar que las rectas puedan ser coincidentes. • Considerar que siempre dos rectas se intersectan. • Considerar como casos distintos los que tienen el mismo tipo de conjunto solución, por ejemplo rectas paralelas con pendiente positiva versus rectas	• La suma del doble de un número con el doble de otro número es igual a 10, ¿cuáles son los posibles números? De este modo, con un caso sencillo el alumno podrá visualizar que estos dos casos tienen iguales soluciones, es decir son ecuaciones cuyo conjunto solución son iguales. Ahora bien: ¿cómo se graficaría el conjunto solución de cada caso en el plano? (2) Considerar solo un punto como la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales (rectas secantes): el profesor puede recordar que la solución del sistema serán los puntos que son comunes a ambas rectas, o de otro modo, que satisfagan ambas ecuaciones. En general no sabemos este punto a priori y por este motivo graficamos cada recta y visualizamos si tienen puntos comunes o no. Plenario: en el minuto 20, el docente realiza una puesta en común respecto de la actividad 3, para ello pide a un representante de algunos grupos que salga a la pizarra a mostrar una de las formas encontradas. El docente proyectará 3 planos cartesianos para completar.
--	--	---	---

		paralelas con pendientes negativas, o si se encuentran en distinto cuadrantes. Posibles Errores: - Pensar que un sistema de ecuaciones de 2×2 se representa gráficamente como un punto (solo considerar dos rectas secantes y pensar en el conjunto solución). - Considerar como casos distintos dos rectas perpendiculares y dos rectas secantes que no forman un ángulo recto.					
25 – 50	Actividad 4: Describe el conjunto solución de los sistemas graficados en la actividad 3 y asócialo a una representación geométrica, según la posición de las rectas.	Respuesta experta: <table> <tr> <td> Descripción conjunto solución Forma 1: El conjunto solución es el punto donde se intersectan las dos rectas en el plano cartesiano. . </td> <td> Representación geométrica  </td> </tr> <tr> <td> Forma 2: El conjunto solución es la recta que representa ambas ecuaciones en el plano cartesiano, ya que estas son coincidentes. </td> <td>  </td> </tr> </table>	Descripción conjunto solución Forma 1: El conjunto solución es el punto donde se intersectan las dos rectas en el plano cartesiano. .	Representación geométrica 	Forma 2: El conjunto solución es la recta que representa ambas ecuaciones en el plano cartesiano, ya que estas son coincidentes.		El docente se traslada por la sala verificando que los grupos estén empleando los conceptos geométricos apropiados para cada conjunto solución, por ejemplo, punto, recta o vacío. En caso que el estudiante solo describa la cantidad de soluciones y no su representación gráfica, por ejemplo, en el caso de rectas coincidentes que el estudiante diga que tiene infinitas soluciones, el profesor le puede sugerir la siguiente pregunta: Si tiene infinitas soluciones entonces ¿todos los puntos que están sobre el plano son solución? Si el estudiante dice que sí, se le puede preguntar por un punto específico que no satisfaga las ecuaciones. Si el estudiante dice que no, entonces se le puede preguntar por la forma que tienen sobre el plano el conjunto de estos puntos.
Descripción conjunto solución Forma 1: El conjunto solución es el punto donde se intersectan las dos rectas en el plano cartesiano. .	Representación geométrica 						
Forma 2: El conjunto solución es la recta que representa ambas ecuaciones en el plano cartesiano, ya que estas son coincidentes.							

Forma 3:

El conjunto solución es vacío ya que las rectas no se intersectan.



Posibles respuestas:

- Describir una solución particular para cada una de las formas.
- Mencionar la cantidad de soluciones que tiene cada forma.
- El sistema de la forma 3 tiene solución vacía.

Estrategias:

- Analizar los puntos comunes de ambas rectas como objetos geométricos (puntos, rectas, segmentos, líneas, etc.)

Posibles Dificultades:

- Confundir el describir geoméricamente la solución de un sistema de ecuaciones con encontrar explícitamente los valores solución. Es posible que algunos estudiantes, con el afán de encontrar explícitamente las soluciones se creen ecuaciones que describan las rectas dibujadas (similar a la actividad 5).
- No reconocer que la solución gráfica de un sistema de ecuaciones está representada por la intersección de las todas rectas del sistema.
- No reconocer que un sistema de ecuaciones posee un conjunto solución.
- No reconocer gráficamente la solución.

		Posibles Errores: - No describir el conjunto solución y basar la respuesta en la cantidad de soluciones que tiene cada forma. - Mencionar que el sistema de la forma 3 no tiene solución. - Identificar como un mismo caso la forma 2 y la forma 3, pues ambas poseen la misma pendiente. - Mencionar que el sistema de la forma 2 no tiene solución. - Describir solamente la gráfica y no el conjunto solución.	
	Actividad 5: Escribe un sistema de ecuaciones para cada uno de los casos dibujados en la actividad 3.	Respuesta experta: Caso 1: Para que el conjunto solución sea un punto, las pendientes de las rectas deben ser diferentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ Con $\frac{-A}{B} \neq \frac{-D}{E}$ Caso 2: Para que el conjunto solución sea una recta, las rectas deben ser coincidentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ Con $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$ Caso 3: Para que el conjunto solución sea vacío, las rectas deben ser paralelas y no coincidentes. Las ecuaciones posibles son de la forma: $Ax + By + C = 0$ $Dx + Ey + F = 0$ Con $\frac{-A}{B} = \frac{-D}{E}$	El profesor verifica que cada grupo logre construir un sistema de ecuaciones para cada gráfica de la actividad anterior. Si a los estudiantes se les dificulta la construcción algebraica de estas rectas se le puede recordar la ecuación particular de la recta $y = mx + n$, donde m es la pendiente de la recta y n es el coeficiente de posición. Para los estudiantes que creen que si los coeficientes son todos distintos entonces el sistema de ecuaciones es del tipo 1, se les puede sugerir estudiar el sistema formado por las ecuaciones $x + 2y = 3$ y otra $4x + 8y = 12$. Para aquellos grupos de estudiantes que tengan mal asociado un sistema de ecuaciones con un determinado tipo de representación gráfica, se le puede sugerir al grupo que reescriban cada ecuación del modo particular de la recta. De esta forma es más sencillo visualizar la relación entre los coeficientes y el paralelismo de las rectas, o si son coincidentes o secantes.

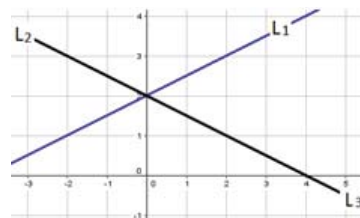
		Posibles respuestas: Los sistemas de ecuaciones de 2 x 2 que representan los casos de la actividad 4. Los sistemas pueden estar representados de las siguientes formas: Forma 1: $\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$ Forma 2: $\begin{aligned} Ax + By &= C \\ Dx + Ey &= F \end{aligned}$ Forma 3: $\begin{aligned} y &= Ax + B \\ y &= Dx + F \end{aligned}$ Estrategias: • Escribir un sistema en particular y encontrar el conjunto solución y asignar ese sistema a una de las formas posibles. • Escribir una solución e idear un sistema donde tal solución satisfaga las dos ecuaciones. • Es muy probable que algunos estudiantes no usen la forma general de la ecuación de la recta ($Ax + By = C$) y usen por comodidad la ecuación particular de la recta ($y = mx + n$) • Graficar las rectas y de ahí sacar las ecuaciones que representan esas rectas. • Usar la ecuación particular de la recta modificando los valores de m y n para cada ecuación lineal de cada caso. • Ensayo y error. Posibles Dificultades: • Considerar que deben encontrar el sistema de ecuación exacto de su representación gráfica entregada, aun no entendiendo que se le pide un sistema de ecuaciones que represente ese caso (por ejemplo, que el conjunto solución sea un punto).	Finalmente en el minuto 40 se realiza un plenario, en donde se escogen algunos representantes de cada grupo y entregan un ejemplo para cada tipo de sistema.
--	--	--	---

		- No vincular la pendiente con la posición relativa de las rectas en el plano. - Escribir las ecuaciones del sistema en forma general y no poder determinar las pendientes de forma correcta. Posibles Errores - Considerar que cuando dos rectas tienen la misma pendiente son solamente paralelas. - Escribir cualquier sistema de ecuación sin corroborar que cumple con la forma asignada. - Considerar que si las ecuaciones tienen todos los coeficientes distintos el sistema de ecuaciones representará la forma 1. - Determinar de manera errónea la pendiente de las rectas.	
50 – 70	Actividad 6: Representa gráficamente un sistema de ecuaciones de 3×2, es decir, tres ecuaciones y dos incógnitas.	Se espera que los grupos identifiquen que un sistema de ecuaciones de 3×2 representa tres rectas en el plano y luego en la actividad 7 logren visualizar los 7 casos posibles. Respuesta experta: La respuesta experta de esta actividad también corresponde a la de la actividad número 7, ya que en ésta a los estudiantes se les pide sólo hacer una representación de las siete posibles, por lo que podrían hacer cualquiera de las siguientes: Forma 1: 	El docente entrega una hoja tamaño carta con planos cartesianos para que el grupo pueda realizar la actividad 6 y 7. Se darán 2 minutos para que dibujen libremente la representación del sistema de ecuaciones. El docente supervisa el trabajo de los estudiantes buscando aquellas que el conjunto solución sea de la misma forma (un punto, una recta o el conjunto vacío). Se revisarán en plenario las representaciones realizadas, poniendo en relieve los conjuntos solución en cada caso. Se revisan máximo dos casos de igual conjunto solución en la pizarra.

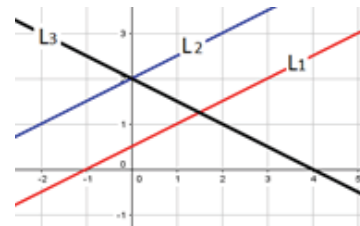
Forma 2:



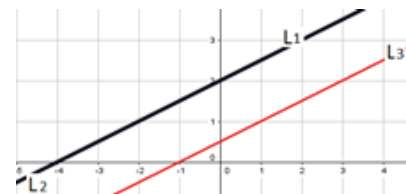
Forma 3:



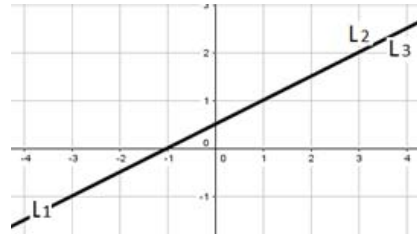
Forma 4:



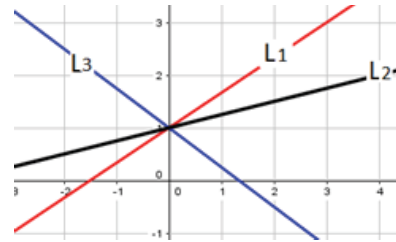
Forma 5:



Forma 6:



Forma 7:



Posibles respuestas:

- Dibujar tres rectas que se intersectan en un punto.
- Dibujar dos rectas secantes y la tercera coincidente a cualquier de las otras dos.
- Dibujar tres rectas secantes sin un punto de intersección en común
- Dibujar tres paralelas no coincidentes.
- Dibujar dos rectas coincidentes y una transversal a estas.

Estrategias:

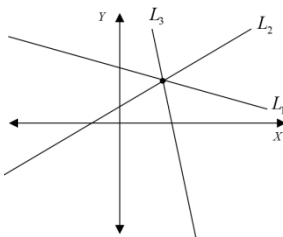
- Dibujar tres rectas cualesquiera en el plano.

Posibles Dificultades:

- Considerar que es necesario que las tres rectas sean visibles en cada uno de los casos.

Posibles Errores:

- Presentar tres rectas distintas en distintos planos cartesianos.

	Actividad 7: Representa gráficamente de todas las formas posibles tres rectas en el plano cartesiano.	Posibles respuestas: - Dibujar tres rectas en el plano y sus 7 posibilidades. - Dibujar tres rectas en el plano sin considerar los 7 casos. Estrategias: - Fijar una recta e ir modificando las otras dos para obtener las distintas formas. Posibles Dificultades: - No considerar que las tres rectas pueden ser coincidentes. - No considerar como válido que dos pueden coincidir y que esta recta se intercepte con la tercera. - Considerar como formas distintas cuando dos rectas son paralelas y la tercera recta transversal perpendicular a estas y cuando dos rectas son paralelas y la tercera recta transversal forma un ángulo distinto al ángulo recto con las otras rectas. - Considerar como casos distintos los que tienen el mismo tipo de conjunto solución, por ejemplo, rectas paralelas con pendiente positiva versus rectas paralelas con pendientes negativas, o si se encuentran en distintos cuadrantes. Posibles Errores: Considerar como la misma forma cuando las rectas son paralelas y cuando son coincidentes.	El docente incentiva a los estudiantes a dibujar los distintos casos, reflexionando cuando los estudiantes consideren casos similares como casos distintos, por ejemplo tres rectas paralelas con pendiente positiva y tres rectas paralelas con pendiente negativa, ver que en ambos casos el conjunto solución tiene la misma "forma o cantidad de soluciones". En este caso recordar la reflexión realizada en la actividad 3. En el minuto 60 se revisa las distintas representaciones efectuadas por los estudiantes en forma plenaria, recogiendo las 7 representaciones posibles, invita a los estudiantes a evidenciar las diferencias entre ellas.
70– 90	Actividad 8: En la figura, el punto de intersección satisface a cada una de las ecuaciones del sistema, 	Se espera que los grupos logren visualizar la naturaleza del conjunto solución de cada uno de los 7 casos, según su representación en el plano cartesiano. Respuesta experta: En la forma 1, 2 , 4 y 5 no existe ningún punto de intersección para las tres rectas. Es decir, ningún punto satisface las tres ecuaciones, por lo que el conjunto solución del sistema de ecuaciones es vacío. En la forma 3 y 7 existe un punto de intersección para las tres rectas. Es decir, ese punto satisface las tres ecuaciones, por lo que el conjunto solución del sistema es un punto.	El docente va guiando las discusiones de cada grupo, comprobando que las clasificaciones sean en los siguientes tipos: El conjunto solución es vacío, tiene una única solución, el conjunto solución tiene infinitos elementos. Si los estudiantes describen cada sistema según la posición relativa de las rectas y no según la cantidad de soluciones, se puede hacer explícita la instrucción de clasificar los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales en función de la cantidad de soluciones que tengan.

	¿Qué ocurre en cada una de las distintas formas graficadas en la actividad 7?	En la forma 6 las tres rectas son coincidentes, por lo que existen infinitos puntos colineales que pertenecen a la intersección de las tres rectas. Es decir, el conjunto solución es una recta que representa a las 3 ecuaciones del sistema y por ende contiene infinitos puntos. Posibles respuestas: • Describir cada sistema según la cantidad de intersecciones que presenten las rectas. • Describir cada sistema según la posición relativa de las rectas. • Mencionar que solamente en la forma 7 el conjunto solución es único y no vacío. • Mencionar que en la forma 6 el sistema tiene infinitas soluciones. Estrategias: • Categorizar los sistemas según la cantidad de soluciones que presente el sistema. Posibles Dificultades: • No comprender que solo un par ordenado pertenece al conjunto solución cuando este pertenece a las tres rectas. • No comprender que un punto que satisface a las tres ecuaciones pertenece al conjunto solución Posibles Errores: • Considerar que en la forma 1, el sistema tiene tres soluciones, pues "aparecen tres puntos de intersección" • Considerar que en la forma 4, el sistema tiene dos soluciones, pues "aparecen dos puntos de intersección"	Si un estudiante plantea que algún sistema tiene 2 o 3 soluciones, el profesor puede mediar con las siguientes preguntas: • La solución de un sistema, ¿qué condición debe cumplir?. • El docente puede poner de ejemplo un punto que pertenezca solo a una recta y preguntar ¿Puede ser este punto la solución del sistema?, ¿Por qué? • De la misma forma que la pregunta anterior, ¿Por qué este punto (indicarlo en el gráfico) es solución del sistema?, ¿cumple con la condición definida anteriormente? Finalmente en el minuto 80, se realiza el último plenario, compartiendo cuáles sistemas tienen solución vacía, tienen solución única y tienen infinitas soluciones. También se realiza la reflexión en torno a la importancia del análisis del conjunto solución mediante la representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.
--	--	--	--