Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Inecuaciones en Educación Superior una mirada desde la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval

TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA

De: Pedro Alberto Garrido Valenzuela

Profesores Guías: Sr. Arturo Mena Lorca
Sr. Manuel Goizueta
Sr. Raimundo Olfos Ayarza
Sra. Elisabeth Ramos Rodríguez
Sra. Patricia Vásquez Saldías

2017

ÍNDICE

RESUMEN

El presente trabajo da cuenta de una problemática inherente principalmente en alumnos que ingresan a estudiar una carrera afín al área de las ciencias, asociada al objeto matemático de las inecuaciones, considerándolas y tratándolas como ecuaciones, lo que se ha identificado al momento en que alumnos de primer año de educación superior encuentran el conjunto solución de inecuaciones racionales formadas por expresiones algebraicas de 1er grado.

Se realizó un análisis descriptivo de los registros utilizados por los alumnos, lo que motivó a que nos interesáramos en identificar cómo llegan a encontrar el conjunto solución de este tipo de inecuaciones, así también las diferentes representaciones utilizadas orientadas por el Marco Teórico de Raymond Duval, Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS).

Al mismo tiempo, se utilizó la metodología del estudio de clases, la cual, en este caso, permitió realizar una reflexión sobre las practicas que llevamos a cabo en el aula, desde la planificación, la observación, revisando la forma como nosotros los docentes entregamos las herramientas a nuestros alumnos para trabajar el objeto de las inecuaciones.

Como grupo de trabajo decidimos realizar e implementar un estudio de clases en el que planteamos varias actividades que dieran cuenta de cómo resuelven las inecuaciones nuestros alumnos, para posteriormente en forma individual generar nuevas propuestas.

Individualmente se creó una secuencia didáctica con tres clases, de la cuales se ejecutó sólo una de ellas, la segunda específicamente en primera opción, todas fueron orientadas y desarrolladas precisamente en alumnos de primer año de educación superior, en carreras afines a las ciencias. Dicha secuencia fue originada a partir de la experiencia de ser implementada la clase. Posterior a esta implementación se sugirió una clase previa y otra posterior.

La clase fue implementada en el programa de la asignatura de Cálculo, de la carrera de Ingeniería en Prevención de Riesgos en una institución de educación superior privada, curso inicial para cualquier carrera profesional del área, en la unidad identificada como Números Reales; fundamentos básicos, cuyo aprendizaje esperado indica justamente resolver inecuaciones lineales.

INTRODUCCIÓN

Al solicitar a cualquier grupo de personas que realice un pequeño barrido por los conocimientos matemáticos adquiridos en educación media, según mi experiencia, la mayoría de ellas postula que mucho de los tópicos que fueron revisados en sus establecimientos educacionales, jamás fueron retomados y aplicados nuevamente. Pero esta respuesta, casi inmediata para algunos, se contrapone cuando lo ponemos en situaciones un tanto elaboradas, en cuyo caso, los cálculos aritméticos afloran y las personas son capaces de tomar decisiones considerando sus cuentas.

Es así como, por ejemplo, desde lo más trivial - como lo es comprarse un par de zapatos si se cuenta con un cierto monto de dinero - u otra acción con un grado de complejidad mayor, - como lo sería saber qué cantidad de artículos son necesario producir para generar cierta utilidad en un negocio-, requieren de por lo menos una herramienta matemática para dar respuesta a cada inquietud. En el primer caso una simple resta, pero en el segundo se requiere cruzar información originando operaciones aritméticas y algebraicas

Sin duda alguna, a cada una de estas situaciones se le podría dar respuesta a través de las inecuaciones, sin embargo, las personas ¿reconocen que son las inecuaciones?, ¿qué significado se les da a las inecuaciones?, ¿cómo se realiza la transformación desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico una inecuación?

Muy probablemente, a quienes tuvieron la posibilidad de revisar esté objeto matemático mientras estudiaban en educación media o en educación superior, le fueron entregados como estructura asociada al álgebra, símbolos y tablas cuyo significado se veía reflejado en intervalos, pero claramente es mucho más que eso.

La invitación es a reconocer y visualizar este objeto bajo una mirada de diferentes registros de representación del conjunto solución de éstas.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Sin duda alguna, al mencionar el concepto de inecuaciones, suelen surgir ciertas aproximaciones al fenómeno, ideas y símbolos que van asociados a ciertos registros, así llamados por Duval (1998), que dan cuenta de este término. Pero la realidad chilena indica que, de esta variedad de registros, la mayoría de los alumnos llegan a transitar por a lo más dos de ellos, registro algebraico y registro tabular, y unos pocos, que acceden a mejores recursos, son capaces de transitar por el método gráfico (MINEDUC, 2015a). Esto se puede ver a través de los textos escolares entregados por el Ministerio.

No obstante, los últimos años se han realizado diferentes investigaciones que dan cuenta la importancia del estudio de las representaciones (Tamayo, 2006), es así que hoy en día es difícil encontrar o más bien cuesta considerar un estudio de un fenómeno sin recurrir a sus representaciones. Lo que avala la importancia de generar un conocimiento en profundidad ante el fenómeno de las inecuaciones en función de estos registros de las representaciones.

Alumnos que ingresan a estudiar alguna carrera del área de las ciencias, en instituciones de educación superior, se encuentran con el estudio de las inecuaciones y por la forma de cómo se han visto y el énfasis que se ha puesto sobre las ecuaciones, en los cursos de Educación Media, es que llegan a Educación Superior encontrando el conjunto solución de la inecuación tal cual como lo hicieran al momento de resolver una ecuación, sin considerar para ello los axiomas del cuerpo de los números reales (Monje, 2017).

ANTECEDENTES DE INNOVACIÓN

Sin duda alguna que no son pocas las personas que han trabajado el objeto de las inecuaciones, tanto a nivel nacional como en el extranjero, cada uno de ellos han encontrado alguna problemática asociada a este objeto. Según Triana y Moreno (2013), uno de los factores que inciden en la resolución de inecuaciones tiene que ver con la forma de presentar esta solución, es más bien, por lo que indica la TRRS quien plantea que debe ser con lenguaje propio y comprensible y a su vez fomentar la diversidad en los registros con que los alumnos determinan la solución de la inecuación. Apoyados en el software Geogebra les permitió a sus alumnos que pudieran lograr una mejor visualización.

Por su parte, Boero (1998), propone que el docente sea capaz de coordinar los esquemas algebraicos con las construcciones mentales frente a la resolución gráfica y la interpretación de éstos, de esta forma el alumno, valorará las equivalencias cuando se produzcan. El autor considera pertinente que el alumno este apoderado del objeto función antes de comenzar a trabajar con inecuaciones. Para ello, se plantea como propósito presentar un conjunto de construcciones mentales, en donde los alumnos puedan entender el concepto de inecuación.

Tapia (1998), realiza una investigación dirigida a alumnos de primer año de educación superior, cuyo objetivo era poder analizar el tránsito de los registros utilizados, para ello se les solicito poder responder un cuestionario que presentaba problemas en distintas formas de representar las inecuaciones ya sea a través de registros algebraicos, gráficos y en el lenguaje natural. Dicho estudio dio cuenta de las estrategias utilizadas por los alumnos al determinar el conjunto solución de una inecuación, interpretar los diferentes registros utilizados, reconocer las unidades significativas en la representación gráfica de una inecuación y confrontar las respuestas entregadas, generando dentro de sus conclusiones que los alumnos tienen una tendencia a trabajar con el registro algebraico, aunque intentan resolver con más confianza problemas que involucran el tránsito entre el registro algebraico y el registro gráfico.

Monje (2017), manifiesta que el currículo chileno y los textos escolares entregados por el Ministerio de Educación de Chile, no consideran todos los requerimientos necesarios para la enseñanza de las inecuaciones, considerando además, una superficial visión de aquellas inecuaciones racionales e inecuaciones cuadráticas.

PROBLEMÁTICA

Según Arévalo y Rojas (2016), el currículo privilegia el tratamiento algebraico de la inecuación, lo que lleva a los estudiantes a centrarse en las técnicas de solución y no en el uso de los axiomas de orden de los reales. A partir de esta premisa, los alumnos en los primeros niveles en Educación Superior cuando resuelven inecuaciones, manifiestan esta realidad en donde existen problemas arraigados a los conocimientos previos que parecieran no existir y que afloran al momento de plantear una desigualdad. Como, por ejemplo, el considerarla como una ecuación al momento de encontrar el conjunto solución que a su vez les impide reconocer, en particular en las inecuaciones racionales, el uso de los axiomas de orden del cuerpo de los números reales.

Si los alumnos tuviesen este conocimiento previo, ellos podrían procesar que trabajar una expresión positiva o negativa en su recíproco, mantiene dicha condición, de modo que:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \left(x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0 \right)$$

Por otro lado, Alvarenga (1999) formula la inexistencia de actividades didácticas dirigidas a la interpretación del concepto de inecuación en el contexto gráfico, permitiendo de este modo el análisis de las transformaciones realizadas sobre la inecuación inicial y sus repercusiones sobre el conjunto solución buscado. Esto debido a una carencia en la interpretación, por parte de los alumnos, del objeto de las inecuaciones y sus características tanto algebraicas como gráficas.

Boero (1998), por su parte hace notar la limitación de las técnicas de resolución de inecuaciones que se enseñan tradicionalmente y plantea ciertas interrogantes que permiten la reflexión sobre posibles cambios en la enseñanza-aprendizaje de este concepto. Por ejemplo, el sistema de enseñanza ¿se encuentra en una apatía ante la forma de enseñar, generada por los mismos docentes, las políticas educacionales, los textos de estudios entre otros?, ¿se está en presencia de un obstáculo Ontogenético, lo que imposibilita que nuestros alumnos adquieran este conocimiento?

A la luz de estos antecedentes, se plantea articular los diferentes tipos de registros que conocen los alumnos de primer año en educación superior, con énfasis en los registros gráficos, dando relevancia al uso de los axiomas de orden del cuerpo de los reales.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿Se producen evidencias de aprendizaje sobre la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado en los alumnos de primer año de educación superior cuando usan los axiomas de orden del cuerpo de los números reales en las actividades de aprendizaje?

¿Qué tipo de registros utilizan los alumnos de primer año de educación superior para determinar el conjunto solución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado con una incógnita frente a tareas en que deben usar axiomas de orden del cuerpo de los números reales?

¿Existirá forma de reconocer en los alumnos de primer año de educación superior, que para encontrar el conjunto solución de inecuaciones, deben utilizar los axiomas de orden y las propiedades de compatibilidad con las operaciones del cuerpo de los números reales?

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

OBJETIVO GENERAL

Proponer una clase, que permita a los alumnos de primer año de Educación Superior, reconocer el uso de los axiomas de orden y las propiedades de compatibilidad con las operaciones del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado, a partir del tratamiento y conversiones de los diferentes registros de representaciones.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Diseñar e implementar una clase que permita a los alumnos de primer año de Educación Superior, reconocer el uso de los axiomas de orden y las propiedades de compatibilidad con las operaciones del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado, en sus diferentes registros.

Analizar la clase implementada a la luz de las diferentes representaciones utilizadas por los alumnos de primer año de educación superior, con énfasis en el uso de los axiomas de orden del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado.

Reformular la clase, incorporando dos clases complementarias, considerando las observaciones generadas en la clase implementada, en que los alumnos de primer año de educación superior reconocen el uso de los axiomas de orden del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado.

CAPÍTULO 2

OBJETO MATEMÁTICO

DEFINICIÓN ESCOLAR Y ERUDITA

SABER SABIO

Cuando se habla de números reales, se considera que es un cuerpo ordenado, es decir, bajo dos operaciones como son la adición y el producto en los reales, cumple con los axiomas de cuerpo; asociatividad, elemento neutro, elemento inverso, conmutatividad y distributividad, como también con los axiomas de orden:

Axioma 1: $(\forall x \in \mathbb{R})\left(x \in \mathbb{R}^{+} \vee x=0 \vee -x \in \mathbb{R}^{+}\right)$

Axioma 2: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^{+}\right)\left(x+y \in \mathbb{R}^{+}\right)$

Axioma 3: $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^{+}\right)\left(x \cdot y \in \mathbb{R}^{+}\right)$

Con estos axiomas se demuestra que es posible resolver inecuaciones.

Para ello, se debe definir los símbolos $<,>,\leq y \geq$, denominados menor que, mayor que, menor e igual que y mayor o igual que, respectivamente (Apostol, 1976). Es así como $a<b \Leftrightarrow 0<(b-a) \Leftrightarrow (b-a) \in \mathbb{R}^{+}$, de igual forma se puede definir la expresión $a \leq b \Leftrightarrow (a<b \vee a=b)$. Con todo ello, se establece una relación, denominada de orden, cumpliendo las siguientes propiedades:

Propiedad Refleja: $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq x)$

Propiedad Antisimétrica: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x=y)$

Propiedad Transitiva: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

Y además con las propiedades de compatibilidad con las operaciones de la adición y multiplicación

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)\left(\forall z\in\mathbb{R}\right)\left(x\le y\Leftrightarrow x+z\le y+z\right)$$

Demostración:

Si $x\le y$

$\Leftrightarrow 0\le y-x$	Definición
$\Leftrightarrow 0\le y+0-x$	Elemento neutro aditivo
$\Leftrightarrow 0\le y+z-z-x$	Inverso aditivo
$\Leftrightarrow 0\le (y+z)-(z+x)$	Asociatividad
$\Leftrightarrow x+z\le y+z$	Definición

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}\right)\left(\forall z\in\mathbb{R}^{+}\right)\left(x\le y\wedge z>0\Rightarrow x\cdot z\le y\cdot z\right)$$

Demostración:

$x\le y\wedge z>0$

$\Leftrightarrow 0\le (y-x)\wedge z>0$	Definición
$\Rightarrow 0\le (y-x)\cdot z$	Axioma orden
$\Leftrightarrow 0\le y\cdot z-x\cdot z$	Distributividad
$\Leftrightarrow \mathrm{x\cdot z\le y\cdot z}$	Definición

Se puede decir entonces, que los reales son un cuerpo ordenado con las operaciones de la adición y la multiplicación $\left(\mathbb{R},+,\cdot\ ,<\right)$

$\mathbb{R}$	
Lógica	Conjunto
$p(x)$	$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,p(x)\right\}$
$q(x)$	$T=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,q(x)\right\}$
$p(x)\Rightarrow q(x)$	$S\subseteq T$
$p(x)\Leftrightarrow q(x)$	$S=T$

Por otra parte, considérese las siguientes funciones

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ definida por $f(x)=ax+b$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ definida por $g(x)=cx+d$

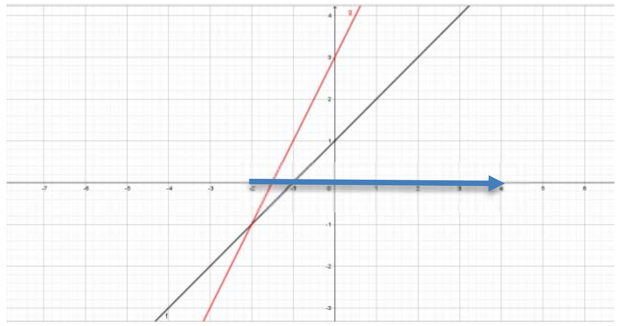
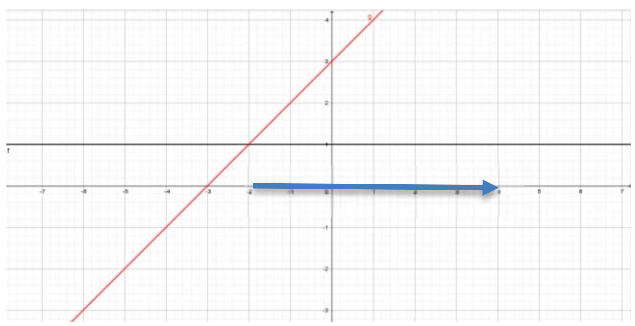
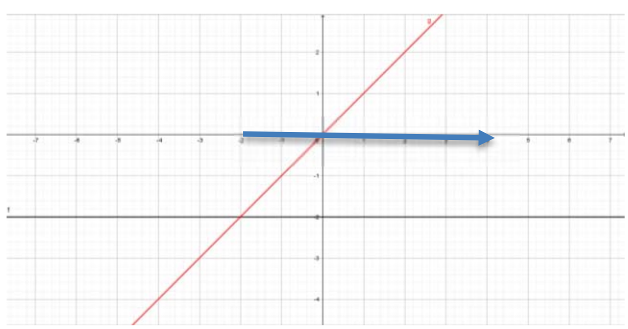
Las cuales dan paso a enunciar una función proposicional con la condición $p(x): f(x)\le g(x)$, cuya interpretación geométrica corresponde en determinar los valores de la imagen de la función f que son menores a los valores de la imagen de la función g . Lo que se fundamenta en el axioma de verificación

$\mathbb{R}x\mathbb{R}$	
Lógica	Conjunto
$p(x,y): x\le y$ $x\Re y: x\le y$	$G_R:\{(x,y)\in\mathbb{R}x\mathbb{R}/x\le y\}$

Por ejemplo, para el conjunto $[-2,+\infty[$, bajo un registro tabular se tendrá

	$x<-2$	$x=-2$	$x>-2$
$x+1\le 2x+3$	Cumple la condición	Cumple la condición	No cumple la condición

Y bajo un registro lógico y gráfico, considerando las equivalencias, se tiene:

<table>
<tr><th>Lógica</th><th>Grafica</th></tr>
<tr><td>$p(x): x+1 \leq 2x+3$</td><td>
$y = x+1$
$y = 2x+3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x \Uparrow \ \Downarrow (-x)$</td></tr>
<tr><td>$p(x): 1 \leq x+3$</td><td>
$y = 1$
$y = x+3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$3 \Uparrow \ \Downarrow (-3)$</td></tr>
<tr><td>$p(x): -2 \leq x$</td><td>
$y = -2$
$y = x$</td></tr>
</table>

SABER ESCOLAR

De acuerdo a los textos de estudio entregados por el Ministerio de Educación para séptimo básico (Merino et al, 2017), antes de incorporar el concepto de inecuación, han trabajo el concepto de ecuación, ejemplificando con el dibujo de una balanza en equilibrio. Dan a conocer propiedades de la igualdad diciendo,

Si $a,b,c \in \mathbb{N}_o$, entonces se cumple que:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$
3. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$
4. Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a : c = b : c$

Definiendo la ecuación como una transformación, usando propiedades de la igualdad, dejando otra equivalente, con el fin de encontrar los valores de las incógnitas.

En tanto al trabajar inecuaciones, también se apoya en el registro gráfico de la balanza, pero esta vez en desequilibrio, y cuya solución dependerá de propiedades de la desigualdad, como lo son, según el texto para séptimo básico (Merino et al, 2017),

Si $a,b,c \in \mathbb{N}_o$, entonces se cumple que:

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
2. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a : c = b : c$

El objetivo de la inecuación se reduce en determinar un conjunto de valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad y se apoyan en la representación de la recta numérica para visualizar el conjunto solución de una inecuación.

De ninguna forma manifiestan una gran diferencia, por parte del texto, de cómo encontrar la solución entre una ecuación y una inecuación.

En el texto del estudiante de cuarto medio (Muñoz et al, 2015), entregado por el Ministerio de Educación se presenta la unidad de inecuación y desigualdades, indicando como aprendizaje previo resolución de ecuaciones lineales y operatoria de conjuntos. Menciona que los símbolos $<,>,\leq y \geq$, son utilizados para representar relaciones de orden, sin especificar que es una relación de orden, presenta la ley de tricotomía como un elemento de alerta y a considerar. Define una desigualdad como una relación de orden que se establece entre números reales u otras expresiones matemáticas, mediante el uso de los símbolos indicados. Como aplicación de las desigualdades es presentada en escritura conjuntista como un conjunto por comprensión y las compara en base a los conectores conjuntista de la unión e intersección, para posteriormente establecer un cambio de registro a intervalos, presentando los diferentes tipos de intervalos: cerrado, abiertos, semi-abiertos, infinitos o no acotados. Estableciendo una analogía con la operatoria de conjuntos y la relación conjuntista entre los tipos de intervalos.

Presentan las propiedades de la transitividad y como nota indica que una desigualdad no cambiara si se suma o resta por un mismo número real a ambos lados de la desigualdad, compatibilidad para la suma

$$\text{Si } a < b \text{ , } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces, } a + c < b + c$$

$$\text{Si } a < b \text{ , } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces, } a - c < b - c$$

Posteriormente, verifican la propiedad de multiplicar una desigualdad por un número que sea positivo y otro negativo, compatibilidad para el producto, y de esta forma poder concluir con otra nota que indica

$$\text{Si } a < b, \ y \ c \in \mathbb{R}^{+}, \text{ entonces } a \cdot c < b \cdot c$$

$$\text{Si } a < b, \ y \ c \in \mathbb{R}^{+}, \text{ entonces } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Y por otra parte

$$\text{Si } a < b, \ y \ c \in \mathbb{R}^{-}, \text{ entonces } a \cdot c > b \cdot c$$

$$\text{Si } a < b, \ y \ c \in \mathbb{R}^{-}, \text{ entonces } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

De esta forma logran definir una inecuación como una desigualdad que tiene una o más incógnitas; para resolver es necesario determinar los valores que hacen que la desigualdad se cumpla, y de igual forma, el conjunto solución podrá ser representado mediante un intervalo o bien en la recta numérica.

La mayoría de las inecuaciones tratadas en este texto, responde a inecuaciones lineales las cuales pueden ser tratadas con las propiedades descritas anteriormente. Posteriormente realiza un apartado de cómo resolver sistemas de inecuaciones lineales, tanto por intersección de intervalos como representación en la recta numérica. Al final del capítulo presenta una inecuación racional comparada con cero, la cual es tratada bajo condiciones de un cociente para que este cumpla con la condición.

Es decir, si

$$\frac{a}{b} > 0, \text{ entonces } \left[a > 0 \wedge b > 0\right] \vee \left[a < 0 \wedge b < 0\right]$$

$$\frac{a}{b} < 0, \text{ entonces } \left[a > 0 \wedge b < 0\right] \vee \left[a < 0 \wedge b > 0\right]$$

De esta forma se puede considerar la solución de este tipo de inecuaciones como la intersección de conjuntos soluciones de inecuaciones.

ANÁLISIS DE TEXTOS

A diferencia de lo que sucede en la Educación Escolar Básica y Media donde los planes y programas están definidos por el Ministerio de Educación, en la Educación Superior los objetos de enseñanza están definidos por el sistema educativo de cada casa de estudio, donde cada una de ellas ofrece distintas mallas curriculares dependientes del título al cual se desea optar.

Consecuente con lo anterior se han revisado algunos programas de estudio de matemáticas de las diferentes carreras del área científica y administración, observándose que en cada uno de ellos está presente el Objeto Matemático "Inecuación".

El análisis del saber escolar de inecuaciones se hará en base a dos textos, el primero corresponde a Cálculo con Geometría Analítica de Earl Swokowski (1988) y el segundo al texto llamado Algebra de Charles Lehmann (1989), toda vez que es uno de los dos textos más utilizados en las sugerencias bibliográficas de los programas de estudio de Álgebra y Cálculo.

El objeto matemático "inecuaciones", en Swokowski (1988), es tratado en las primeras páginas a partir de la definición de desigualdad, con base en la comparación de dos expresiones de un conjunto, otorgando el concepto de "sentido positivo" y "sentido negativo". Define en primera instancia los símbolos $<$ y $>$ para luego precisar una desigualdad a partir de números reales cualesquiera a y b, recurriendo al registro gráfico de las funciones para su representación y a la entrega de propiedades y definiciones como son: propiedad de las desigualdades, propiedades del valor absoluto y definición de intervalo y su representación gráfica, no presentando ningún teorema en su concepción.

Con las definiciones y propiedades entregadas se procede a resolver inecuaciones en los números reales en el registro algebraico apoyado en registros gráficos que resultan, a mi juicio, ser más clarificadoras para el alumno,

No obstante, pese a la preocupación de Swokowski de presentar el desarrollo de las inecuaciones en el registro gráfico, existe una tendencia en la resolución de ejercicios marcada por el registro algebraico.

Un segundo texto, también conocido por los docentes, tanto de Educación Básica como de Educación Superior, es Algebra de Charles Lehmann (1989), que dedica todo el capítulo 6 al objeto inecuación y desigualdad. Da referencia a las definiciones y teoremas fundamentales otorgando explicación algebraica de cada uno de ellos. Posteriormente, desarrolla el tema, muy escuetamente, de inecuaciones de primer grado o lineales con una incógnita, en donde desarrolla una inecuación, bajo un registro algebraico inicialmente y posteriormente uno gráfico, pero sin alusión a los axiomas del cuerpo de los reales.

A continuación, desarrolla el tema de inecuaciones de segundo grado o cuadráticas, considerando para ello expresiones que son factorizables, su resolución se base en el análisis de condiciones factibles para las expresiones, apoyado por un registro tabular a partir del concepto de valores críticos. Induce a lector a que la expresión cuadrática que forma la inecuación, sea considerada como función cuadrática y a partir de ésta, realiza una descripción de lo que sucede con el discriminante de ésta. Concluye que si el discriminante de la "función cuadrática" es positivo la expresión será factorizable y en caso contrario la inecuación formada por esta esta expresión será siempre positiva si el coeficiente que acompaña al término que contiene cuadrático es positivo y en caso contrario será siempre negativo, si el coeficiente que acompaña al término cuadrático sea negativo.

Confirma esto a través del siguiente teorema:

> Si la función cuadrática $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$ tiene su discriminante b^2-4ac negativo, la función será positiva para todo valor de x si $a>0$ y será negativa si $a<0$
>
> (Lehmann, 1989)

Elabora un ejercicio en donde la inecuación está formada por expresiones racionales y nuevamente su desarrollo se basa en la explicación apoyada por los teoremas antes descritos, para finalmente reducir a un registro tabular. Finaliza el capítulo con el tema de inecuaciones con valor absoluto, dando a conocer solo ejemplos y dejando ejercicios al lector.

Por ejemplo, al resolver la inecuación $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x-1)}>0$ realiza la siguiente tabla:

Hipótesis	Signos del numerador y del denominador	Signos de la fracción	Solución
$x>\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{+}{+\ +}$	>0	$x>\dfrac{5}{2}$
$x>-2$	$\dfrac{-}{+\ -}$	>0	$x>-2$
$x>1$	$\dfrac{-}{+\ +}$	<0	$x<1$

Por tanto la solución será $x>\dfrac{5}{2}\cup -2<x<1.$ (Lehmann, 1989)

Al igual que en el texto anterior, existe una tendencia a resolver inecuaciones bajo dos registros; algebraico y tabular.

ANÁLISIS CURRICULAR

Este análisis tiene por objetivo estudiar el Objeto Matemático a través del currículo escolar, con el propósito de armar una estructura lógica entre los procesos cognitivos del alumno, los conocimientos previos requeridos para lograr el conocimiento en él e incluir también los recursos académicos y físicos en su implementación.

Según el currículo escolar chileno, desde la educación parvularia nos encontramos con el acercamiento a los conceptos de inecuación y desigualdad. Considerando el núcleo relaciones lógicas-matemáticas y cuantificación emitido por el MINEDUC (2005c), confiere un mapa de razonamiento lógico-matemático que distribuye por tramo diferenciados por la edad del alumno, el cual a partir del tramo III (hacia los 3años) indica que se espera que el alumno realice comparaciones entre dos elementos, en función de su tamaño, de manera que en forma gradual, en los siguientes tramos dicha comparación se genere en base a otros atributos, como son longitud, forma , color y uso, como así también poder ordenar secuencias de objetos en virtud de dichos atributos.

Al ingresar a primeros básico, el alumno se enfrenta al eje de medición en donde deberá ser capaz de comparar, ordenar e identificar las características de los objetos y cuantificarlos. Como así también, en el eje de números y operaciones, se espera que puedan desarrollar estrategias de cálculos mentales, manipulando material concreto o didáctico, pasando por representaciones pictóricas que posteriormente por símbolos.

Ya en segundo básico, a través de un modelamiento muy sencillo, se propone formular ecuaciones que involucren adiciones en situaciones de la vida cotidiana, como así también, demostrar, explicar y registrar una igualdad y una desigualdad en forma concreta y pictórica con números del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos que dan referencia a que no es igual (<,>). Se extiende este objetivo en tercero básico, incorporando la resolución de ecuaciones que involucran adiciones y sustracciones utilizando representaciones para expresar un número desconocido tanto pictórica como simbólica; como también la comparación de números naturales hasta el 1000 en la recta numérica o tabla posicional ya sea en forma manual o apoyada con algún software educativo.

No es sino hasta cuarto y quinto básico, que se pide a los alumnos resolver ecuaciones e inecuaciones en un paso, que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica, aplicando relaciones inversas entre la adición y sustracción, extendiendo dicho concepto en la comparación del cálculo de áreas de figuras regulares e irregulares. Se llega así a sexto básico, con el propósito de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita utilizando diferentes tipos de registros, dentro de ellos el algebraico.

A partir de 2015 en la educación chilena, se comienza hablar de un nuevo ajuste curricular; esta vez se involucra los programas desde séptimo hasta segundo medio. En los cursos de los dos primeros años de esta secuencia, séptimo y octavo básico, uno de los ejes temáticos, se centra en la operatoria algebraica, extendiendo dicha operatoria desde el conjunto de los números naturales, pasando por los enteros, para llegar finalmente a los números racionales, considerando como base la construcción de ecuaciones, estableciendo formulas, reglas y propiedades, modelando situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas. Resuelven inecuaciones lineales con coeficientes racionales, apoyándose con representaciones como gráficos, tablas, símbolos y algún software educativo.

Ya en primero y segundo medio, el programa de la asignatura, se orienta hacia los números reales, cálculo y estimaciones de raíces y potencias, el trabajo algebraico, funciones lineales y cuadráticas, dejando de lado la visión explícita de las inecuaciones. (MINEDUC, 2015b)

Tercero medio, por su parte, es donde amplían su conocimiento a un nuevo sistema numérico como son los números complejos. Ya en cuarto medio, vuelven a retomar el objeto inecuación proponiendo como aprendizaje esperado el resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales, apoyados fuertemente por el registro gráfico de intervalos.

Cabe hacer presente que los intervalos (abiertos, cerrados, semi-abiertos, intervalos infinitos) pertenecen al objetivo de aprendizaje de séptimo básico, el cual pasa a formar parte de los conocimientos previos del alumno para entrar a la unidad de inecuaciones. Entonces se observa que aún falta algo, que no aparece en ninguno de los programas del currículum escolar y es el uso de los conectivos lógicos presentes en estas propiedades, el cual podría ser un motivo por el cual los alumnos trabajan como si fueran ecuaciones tomando como principio los axiomas de cuerpo.

En educación superior, los planes de estudios cuyos programas contempla la asignatura de matemática, sea Técnica, Profesional o Universitaria, con nombres como Matemática I, Introducción al Cálculo, o simplemente Cálculo, incluyen como temática el considerar el tópico de los números reales y con ello el objeto matemático de las inecuaciones. Lamentablemente si bien los programas indican el estudio de la parte axiomática de cuerpo y orden en los reales, estos no son articulados al momento de revisar el objeto de las inecuaciones, como tampoco el transitar por diferentes registros al momento de estudiarlos.

VISIÓN EPISTEMOLÓGICA DEL OBJETO MATEMÁTICO

Poco se sabe del origen de las inecuaciones, pero las desigualdades están presentes en la historia del hombre desde sus inicios, cuando comenzó el proceso de comparar y acotar. Así, por ejemplo, cuando se trata de buscar la optimización de un problema, qué ruta tomar para llegar a un lugar determinado, qué persona es más longeva, que familia tiene más hijos, etc., en cada uno de estas situaciones están presentes las inecuaciones y las desigualdades.

A inicios de las grandes civilizaciones antiguas, se distinguen dos tipos de enfoques; uno el empírico y el otro denominado deductivo, el primero desarrollado principalmente en Babilonia y Egipto, mientras que el segundo desarrollado en Grecia. En el razonamiento empírico o conocido también como inductivo no eran aceptados los descubrimientos y postulados sino hasta cuando fueran demostrados, mientras que en el pensamiento deductivo, caracterizado por la formalidad y lo práctico, eran capaces de abstraer y formular demostraciones.

Se sabe que para los griegos la Geometría tuvo gran relevancia al momento de interpretar la realidad, dio inicio a otras disciplinas, incorporando y creando símbolos para la resolución de ecuaciones, todo esto estableciendo una nomenclatura adecuada.

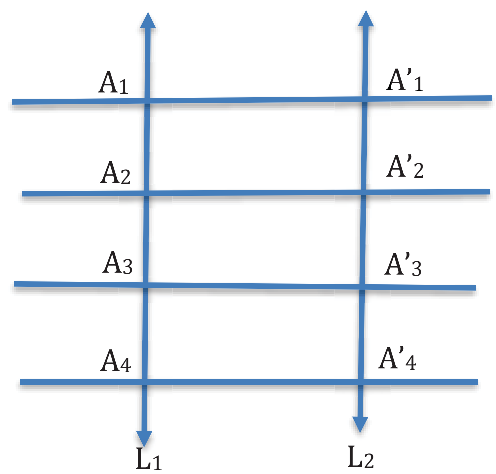
En esta época, grandes avances hubo en lo que respecta a la agricultura, la música y la astronomía, destacándose entre ellos a muchos matemáticos como Tales de Mileto (624-546 AC), Eudoxo de Cnido (408-355 AC), Euclides (325-265 AC) entre otros.

Por una parte, Tales apoyado por los axiomas de incidencia, ordenación y métricos del plano, el que se basa en el teorema sobre proyecciones oblicuas:

> "Sean dos rectas $L_1 \text{ y } L_2$ y una dirección δ a la cual no pertenecen $L_1 \text{ ni } L_2$. Si $A_1, A_2, A_3, A_4 \in L_1$ cumpliendo que $d(A_1, A_2) = d(A_3, A_4)$ y formamos $A_i^{'} = P_{\delta, L_2}(A_i)$ las proyecciones de dichos puntos paralelamente a δ sobre la recta L_2, entonces $d(A_1^{'}, A_2^{'}) = d(A_3^{'}, A_4^{'})$ " (Sánchez, 2011)

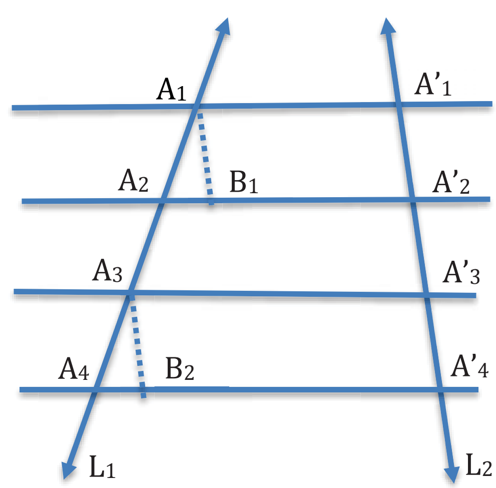
La demostración a este teorema, se debe desarrollar bajo dos consideraciones:

- L_1 y L_2 son paralelas



Entonces $A_1, A_2, A_1^{'}, A_2^{'}$ forman un paralelogramo y entonces se cumple que $d(A_1, A_2) = d(A_1^{'}, A_2^{'})$ y de igual forma se cumple que $d(A_3, A_4) = d(A_3^{'}, A_4^{'})$.

- L_1 y L_2 no son paralelas, con $\overline{A_1 B_1}$ en dirección δ



Considere un segmento paralelo a L_2 desde A_1 el cual corta al segmento $\overline{A_2A_2^{'}}$ en B_1, y la paralela a L_2 desde A_3 el cual corta al segmento $\overline{A_4A_4^{'}}$ en B_2. Se puede demostrar que los triángulos $\Delta A_1A_2B_1$ y $\Delta A_1A_2B_1$ son congruentes y a partir de ello llegar a indicar que $d(A_1,B_1)=d(A_3,B_2)$, de esta forma por la condición de paralelogramo nuevamente se infiere que $d(A_1^{'},A_2^{'})=d(A_3^{'},A_4^{'})$.

Bajo estas condiciones Tales plantea su teorema, el cual postula…

Sean dos rectas L_1 y L_2 y una dirección δ a la cual no pertenecen L_1 ni L_2. Tomamos tres puntos distintos A, B, C $\in L_1$ y llamamos A', B', C' a sus proyecciones paralelamente a δ sobre la recta L_2. Entonces se tiene que:

$$\frac{d(A,B)}{d(B,C)}=\frac{d(A',B')}{d(B',C')}$$ (Sánchez, 2011, p. 6)

A través de la comparación de segmentos, permite desarrollar una igualación que posteriormente da paso a la Teoría de Proporciones de Eudoxo, la cual plantea:

"Dícese de dos magnitudes que es ellas están en razón, si es posible, al tomar un múltiplo de la una, sobrepasar a la otra" (Corry, 1994, p. 1).

Lo que para traducir a notación de algebra moderna, necesariamente debe utilizar simbología asociada a desigualdades y se interpreta de la siguiente forma: $a:b=c:d$, si para todo par de enteros m,n, se tiene $ma>nc$ (o $ma<nc, ma=mc$) si y solo si $mb>nd$ (o $mb<nd$, o $mb=nd$) respectivamente (Corry, 1994, p. 2).

Los alcances de Eudoxo (408-355 AC) le permiten formular una estrategia de demostración llamada doble reductio ad absurdum, como también llamada el Método de Exhaución, cuyo objetivo es evitar el uso del infinito en las demostraciones, tomando como base la aproximación por defecto y por exceso.

El método de Exhaución nace del problema de comparar las figuras curvilíneas y las rectilíneas. Uno de los grandes problemas de la Antigüedad era cómo reducir el círculo, o longitudes curvas, a segmentos de recta, y otro: cómo reducir cualquier línea curva a líneas rectas y círculos (esto se traduce como la construcción de figuras curvas usando solo regla y compás).

Basándose en este método, los matemáticos del siglo XVII, introdujeron el concepto más general de integral definida de una función, el cual fue mejorado por Cauchy y Riemann, en el cálculo de áreas que hay en una función $f(x)$ y el eje X.

Euclides por su parte, toma los aportes de Eudoxo y plantea la teoría general de proporciones y desarrolla la teoría de triángulos semejantes, conocido como el Teorema de Tales, dando una fundamentación más clara del uso de desigualdades.

Luego Arquímedes, reconocido como el primer matemático moderno, y los alcances hechos por Euclides y Eudoxo, realizó grandes aportes como son el conocido Axioma de Arquímedes el cual es enunciado como:

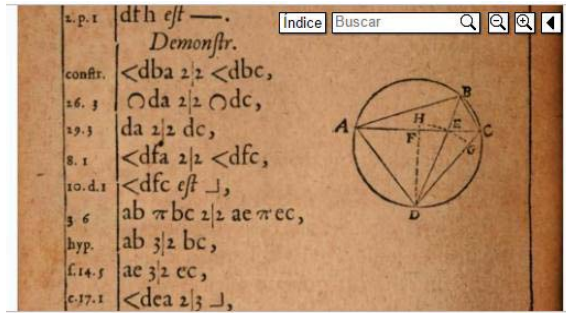
> “Cualquier cantidad, por más pequeña que sea, puede hacerse tan grande como se quiera multiplicándose por un número suficientemente grande. Esto se puede reformular de la siguiente manera: Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$) existe entonces:
>
> • un número n tal que $n\beta > \alpha$. (Esté definición se encuentra en el Libro V de los Elementos de Euclides).
>
> • un número n tal que $n(\alpha-\beta) > \gamma$, donde γ es cualquier magnitud de la misma clase. (Este es el llamado axioma de Arquímedes y se encuentra en su trabajo sobre la esfera y el cilindro, Libro I).” (Parra, 2009, p.31)

Hasta el siglo XVI, el Álgebra estaba conectada con la Geometría, y la incógnita utilizada daba referencia a la longitud de segmentos, las potencias a cuadrados, el área a superficies y el cubo al volumen de un cuerpo. En este mismo periodo se inicia el cálculo literal del álgebra simbólica mediante la introducción de los parámetros, que permiten obtener la solución general de las ecuaciones mediante fórmulas que expresan las incógnitas por François Viète (1540-1603) y la simbología de la igualdad como la conocemos hoy por Robert Recorde (1510-1558) ya que antes de ello se utilizaba la palabra igual (aequales, aequantur, esgale o bien en forma abreviada como aeq) claro que con algunos alcances debido a que originalmente el símbolo de la igualdad formulado por Recorde era ==, símbolo que por más de cien años no fue reconocido como tal.

Posteriormente, Rene Descartes (1596-1650) incorpora en su obra La Geometría, el concepto de Algebratización de la Geometría o también llamado Geometría Analítica, donde el símbolo “æ” es utilizando como igualdad, debido a la abreviación de la palabra latina aequales (igualdad), pero gracias a las influencias de Newton y en especial Leibniz, por sus influencias a fines del siglo XVII se populariza el simboliza = que hoy conocemos.

En 1630, Pierre Hérigone (1580-1643) en su obra “Curso matemático, demostrado con un nuevo, breve, y claro método de notaciones reales y universales, que pueden ser entendidas fácilmente sin usar ninguna lengua.”, realiza un acercamiento a las desigualdades (Figuras 1 y 2).

NOTACIÓN DE HÉRIGONE	NOTACIÓN ACTUAL
$a = c$	a es paralela a c
$a\ 2\|2\ c$	$a = c$
$a\,\pi\,b\ \ 2\|2\ \ c\,\pi\,d$	$a/b = c/d$
$\begin{array}{c\|c} a\ \pi & b \\ c\ \pi & d \end{array}$	$a/b = c/d$
$\square a, b\ \ 3\|2\ \ \square c, d$	$a \cdot b > c \cdot d$


2.p.1 | dfh *est* —.
Demonstr.
constr. | <dba 2|2 <dbc,
26. 3 | ◠da 2|2 ◠dc,
29.3 | da 2|2 dc,
8. 1 | <dfa 2|2 <dfc,
10.d.1 | <dfc *est* ⅃,
3 6 | ab π bc 2|2 ae π ec,
hyp. | ab 3|2 bc,
f.14.5 | ae 3|2 ec,
c.17.1 | <dea 2|3 ⅃,

Figuras 1 y 2 extraídas del *Cursus mathematicus. Cours mathematique*, Pierre Herigone volumen 1. Apolonio (2013)

La estructura de los números reales como cuerpo ordenado sólo se formalizó en el siglo XIX, por Cantor a través de las sucesiones de Cauchy y Dedekind quien se basa en lo que define como cortadura, es decir, un subconjunto A de $\mathbb{Q}$ es una cortadura de Dedekind si y solo si:

1. $A \neq \phi$ y $A \neq \mathbb{Q}$

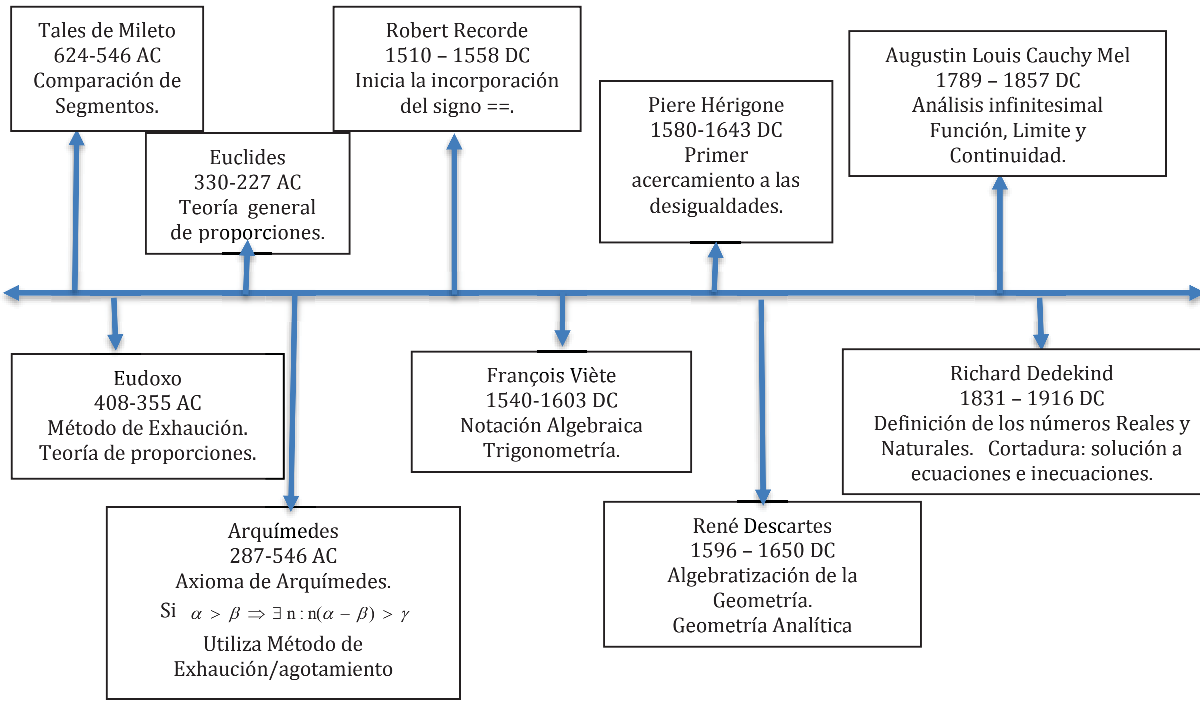
2. Si $a \in A$ y $b \in \mathbb{Q}$ verificando que $b < a$, entonces $b \in A$

3. Para todo $a \in A$, existe otro $a' \in A$ de modo que $a < a'$

Al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}$ se denota por $\mathbb{R}$. Dando paso a la definición de conjuntos acotados y en particular al axioma del Supremo:

Si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces γ es el supremo de $A \Leftrightarrow \gamma$ es una cota superior de A y $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}+, \exists\, x \in A$ tal que $\gamma \cdot \varepsilon <$ x

LINEA DE TIEMPO



ORGANIZADOR GRÁFICO

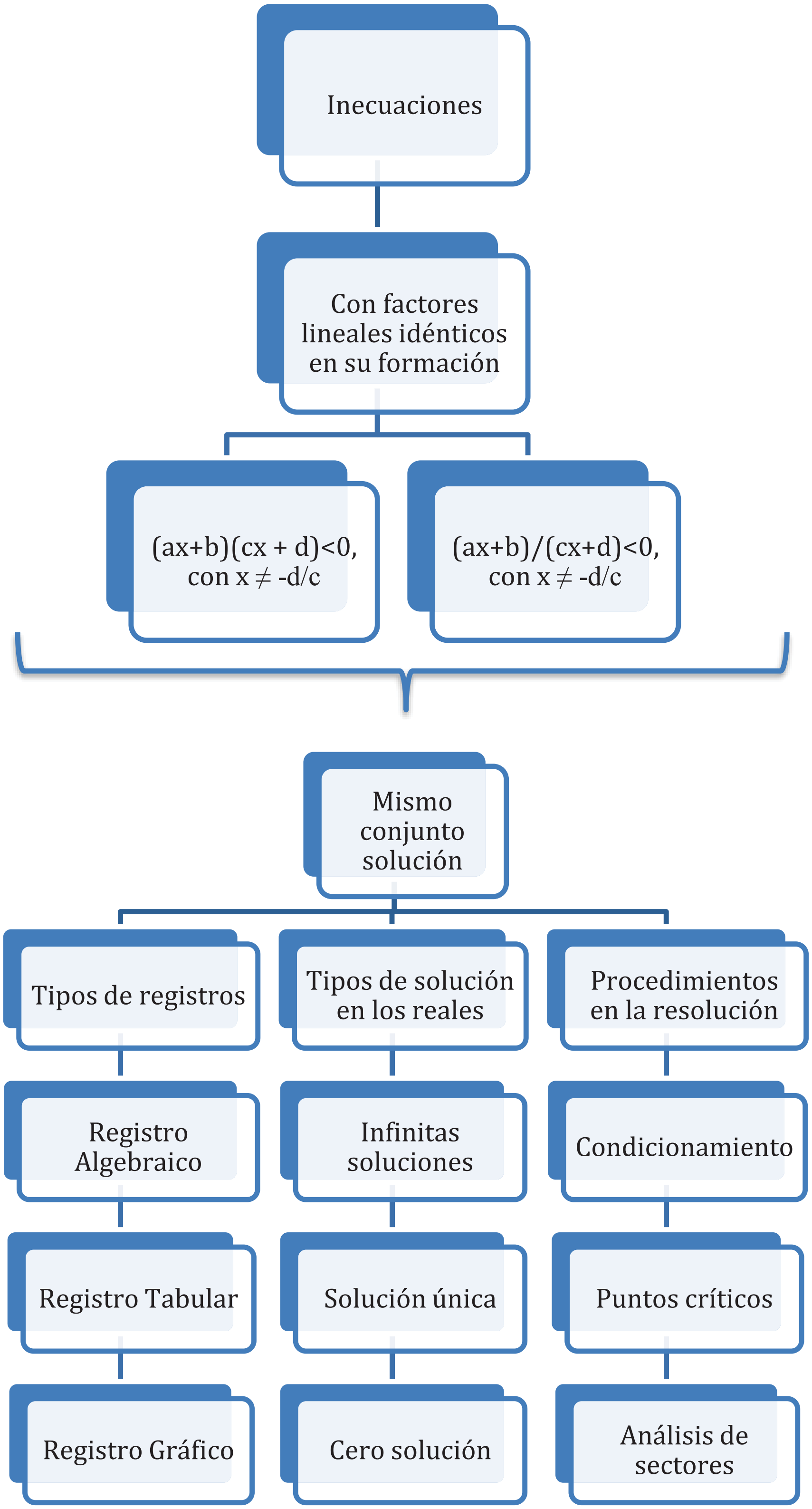


Diagrama de Elaboración propia.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

TEORÍA DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Una de las preguntas importantes en educación es saber si nuestros alumnos adquieren el conocimiento o de qué forma aprenden. Según lo planteado por Duval (2004), no existiría conocimiento de la matemática si la persona no fuera capaz de poder trasladar o movilizar este fenómeno de una representación a otra. Pero, ¿qué es una representación? Para Duval (2004), este concepto lo podemos entender de tres formas, que a priori podrían ser consideradas distintas, pero a la larga son complementarias. La primera como una construcción mental a partir de las creencias y explicaciones que puede tener el individuo en referencia a los fenómenos naturales y físicos. La segunda visión considera la representación como una construcción interna, similar a la ejecutada en un sistema de información en donde los conjuntos de todos sus elementos están orientados al tratamiento y administración de datos e información, se encuentran organizados de tal forma que puedan reproducirse al momento de una cierta necesidad. La tercera forma de entender la representación sería a través de una construcción semiótica, es decir, cuya principal forma es a través de los signos, ya sean el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos en el plano cartesiano; pero no siempre estas representaciones que pudieran ser equivalentes, tienen el mismo significado para las personas que las utilizan.

Esta representación semiótica como actividad cognitiva, en que intervienen el estímulo y la respuesta del individuo, da cuenta de cómo el individuo aprende. Pero en este proceso es necesario hacer notar ciertos términos que irían asociados a cómo el individuo codifica, almacena y recupera esta información. Es así que primero es necesario reconocer en qué consiste un sistema semiótico, y como tal, saber que como requerimiento deben cumplirán tres actividades cognitivas que son propias de las representaciones: identificación, transformación y conversión.

La identificación es un proceso perceptivo que permita distinguir los estímulos, generando una discriminación no solo por su forma, color o tamaño, sino que permita una clasificación perteneciente a una determinada categoría. La transformación es una actividad en la que se utilizan las mismas reglas del registro, de modo de obtener nuevas representaciones que signifiquen una mejora con respecto al conocimiento inicial. Finalmente, la conversión es el proceso en que las representaciones realizas bajo un tipo de registro cambian a un nuevo registro, en donde éstas últimas puedan realizan nuevos aportes significativos a los ya generados. A todas las representaciones semióticas que cumplan estas tres actividades cognitivas se les denomina, según Duval (2004), registro de representación semiótica.

El ser capaz de reconocer un objeto matemático y a su vez utilizarlo en la resolución de alguna situación matemática, se basaría principalmente en dos características; el uso de más de un registro de representaciones semióticas y por otro lado, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos que den cuenta que se ha adquirido el conocimiento (Duval, 2004).

Según Godino (2003), la contribución teórica de Duval se inscribe dentro de la línea de investigación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático y que atribuye un papel esencial en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis) al lenguaje, en todas las formas de expresarlo. Mientras exista las diversas formas de representación, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos, pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es inmediata y el principal objetivo de la enseñanza debe ser éste.

A partir de ello, es necesario consensuar ciertos términos que permitirá un mejor entendimiento ante lo expuesto. Es así como, Oviedo et al. (2012), entienden que Registro de Representación Semiótica sería cualquier forma diferente de expresar relaciones paralelas al lenguaje natural; escrituras algebraicas, operaciones, expresiones gráficas, diagramas de barras, etc. Es decir, corresponde a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos.

En conclusión, a la luz de la problemática presentada en el capítulo anterior, genera significación poder analizar los tipos de registros que manifiestan los alumnos ante la determinación del conjunto solución de las inecuaciones, con el objeto de poder reconocer si realizan tratamientos y conversiones ante este objeto.

ESQUEMA DE REGISTRO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

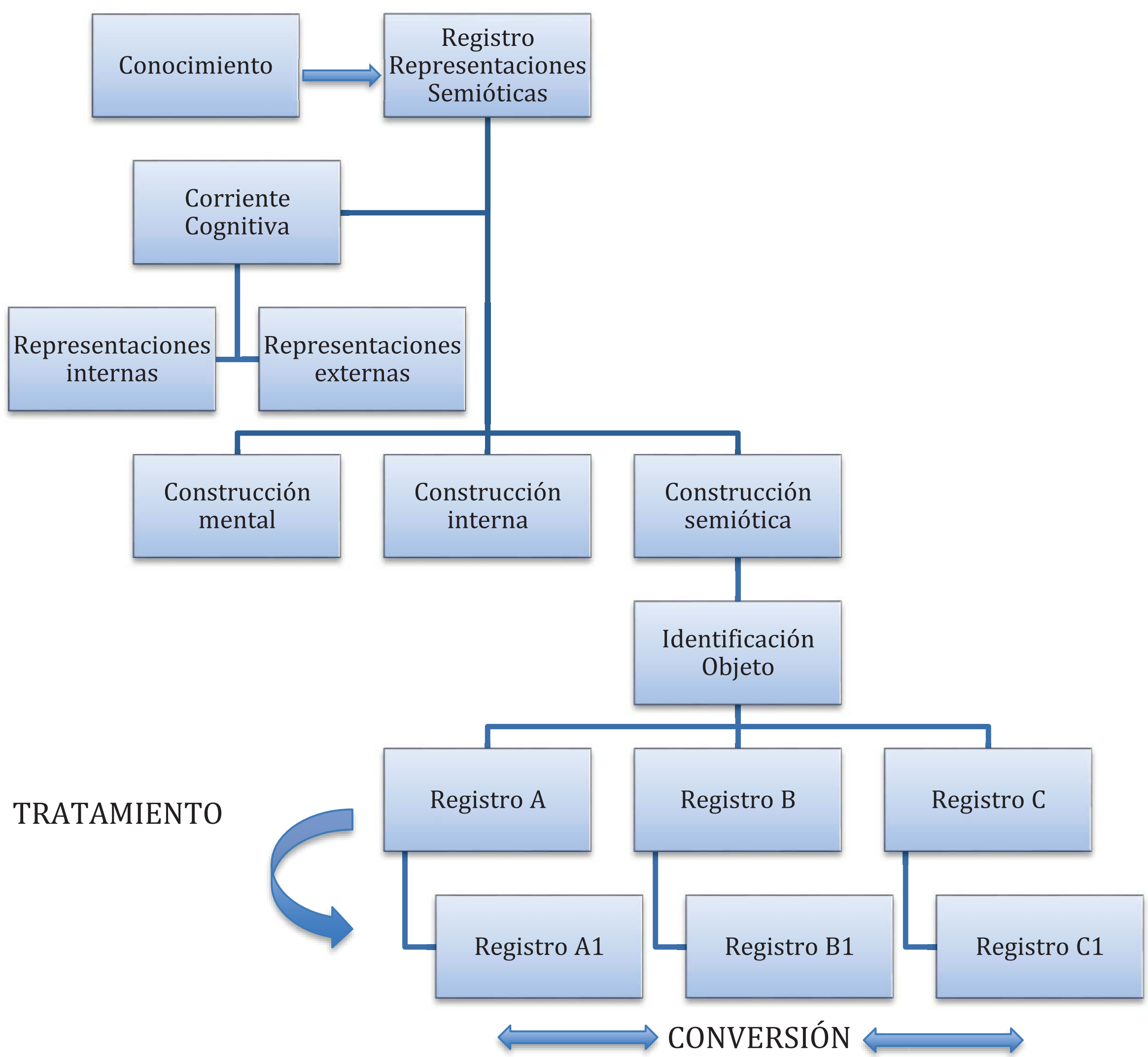


Diagrama de Elaboración propia.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El presente estudio se enmarca bajo un paradigma interpretativo, el cual intenta entender la realidad como una estructura dinámica y diversa, trata de direccionarse al significado de las acciones humanas y por eso es que también se le denomina como estudio cualitativo.

Este estudio busca indagar la forma en que alumnos de primer año de educación superior son capaces de encontrar el conjunto solución de inecuaciones, en particular aquellas que son racionales constituidas por expresiones lineales, con el objeto de verificar si utilizan los axiomas de orden de los reales en su resolución.

Para tal efecto se utilizó la metodología del estudio de clases japonés, el cual involucra a profesores y alumnos como agentes relevantes para la metodología, donde los docentes comparten sus experiencias y a su vez aportan también como investigadores del proceso educativo, esto con el objeto de que los profesores puedan mejorar las practicas pedagógicas y puedan seguir creciendo en su quehacer.

Si bien esta metodología comienza a implementarse en nuestro país a partir del 2007-2008, se debió considerar en ella algunas variaciones y adaptaciones hechas por las instituciones que participaron de la convocatoria para conocer esta metodología, como lo son el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigación Pedagógica (CPEIP) y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), propio por el cambio cultural que significa Japón y Chile.

Quizás uno de los procesos innovadores a considerar en este estudio, da referencia a que esta metodología ha sido pensada inicialmente para profesores de Educación Básica y Educación Media, pero en este caso se ha implementado en profesores que realizan clases en Educación Superior. Se ha diseñado una clase a partir de errores que se consideran persistentes a lo largo del programa de estudio y se ha puesto en común para que se evalúe la práctica docente y los aspectos de la didáctica de la matemática a considerar.

Una vez identificada la problemática, que en este caso tiene relación con el objeto matemático de las inecuaciones, se planificó un plan de clases que diera cuenta de cómo los alumnos de primer año de educación superior usan los axiomas de orden del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales formada por expresiones lineales, la cual junto con su implementación fue también grabada de acuerdo al desarrollo programado. En ésta, se les dio a conocer a los alumnos la forma de reconocer el conjunto solución de una inecuación cuadrática la que se puede descomponer factorialmente por dos expresiones lineales, pasando por los registros algebraicos, tabulares y gráficos, para posteriormente poder compararlos con el conjunto solución de otra inecuación que esta vez es racional y se encuentra formada por las mismas expresiones lineales que estaba constituida la expresión cuadrática. Cabe hacer notar que en cada una de estas conversiones las expresiones cuadráticas son trabajadas como funciones, lo que permite poder realizar la gráfica de ellas.

El estudio de clase ha sido orientado a desarrollarse en alumnos de primer año de educación superior, en carreras afines a las ciencias, específicamente en la carrera de Prevención de Riesgos de una casa de estudios en la ciudad de La Serena, instaurado en su Programa de Calculo, curso inicial en su carrera profesional, en la unidad denominada "Números Reales; fundamentos básicos", cuyo aprendizaje esperado es resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y con valor absoluto.

En la oportunidad se consideraron una muestra de 15 alumnos que participaron de la clase, todos ellos pertenecientes a la misma carrera y a la misma jornada de estudio, que en este caso es la jornada vespertina, sus clases son de lunes a viernes desde las 19 a 23 horas, con bloques de clases de 40 minutos. La mayoría de ellos trabajadores y con una data mayor de cinco años desde que no estudiaban formalmente.

De acuerdo a la secuencia didáctica propuesta, ésta corresponde a la segunda clase, en la que se plantea como objetivo, que el alumno pueda visualizar que el conjunto solución de una inecuación formada como producto de expresiones lineales es el mismo para una inecuación que está formada como el cociente de las mismas expresiones.

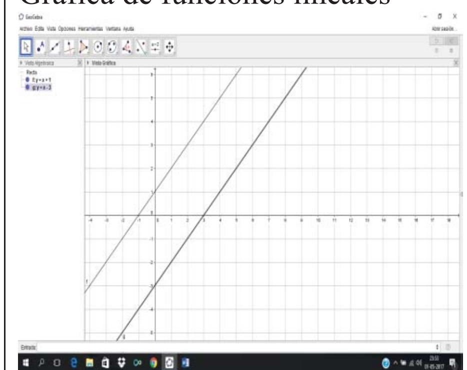
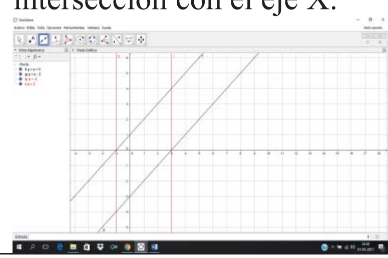
Visualizar esto, es reconocer que puede realizar conversiones desde el lenguaje algebraico y pasar por la representación geométrica de funciones lineales, cuadráticas y racionales, hasta llegar a encontrar la solución de la inecuación planteada. Inicialmente la actividad no contempla que los alumnos puedan apoyarse con algún software educativo sino que toda representación gráfica debe ser realizada solo con lápiz, goma, regla más la planilla cuadriculada entregada en la implementación.

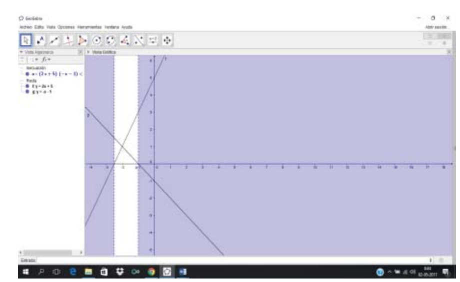
PLANIFICACIÓN DE SECUENCIA DIDÁCTICA

Asignatura	**Cálculo**	**Código**	**MAT-300**
Docente	**Pedro Garrido Valenzuela**	**Jornada**	**Vespertina**
N° Horas semestral /semanales	**108/6**	**Carrera**	**Ing. en Prevención de Riesgos**

Nombre de la unidad	**Introducción al Cálculo.**
Aprendizaje esperado	**Expresar el conjunto solución de una inecuación como intervalo.**
Recurso de apoyo	**Software GEOGEBRA.**
Institución	**Instituto Profesional – Sede La Serena.**

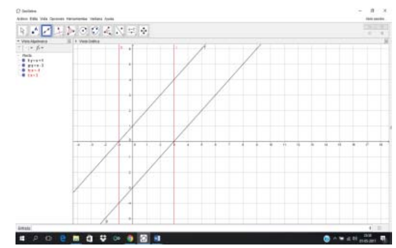
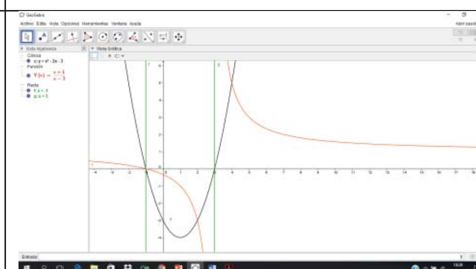
Objetivo de la clase: "Verificar gráficamente que el conjunto solución de una inecuación generada como producto de dos expresiones lineales con una incógnita comparada con cero y otra inecuación constituida por el cociente de las mismas expresiones comparada con cero, tienen el mismo conjunto solución"

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
El Profesor da a conocer el Objetivo de la clase para el conocimiento de los alumnos **Graficar inecuaciones apoyados con software Geogebra.** Tiempo: 5' 1. **Planteamiento del problema:** Se les solicita a los alumnos que dibujen las siguientes ecuaciones: $y = x + 1 \;\wedge\; y = x - 3$	El profesor insta a los alumnos a elaborar la gráfica a partir de dos puntos, donde dichos puntos sean aquellos en los que las rectas intersectan a los ejes.	El Profesor se pasea por los puestos y observa los registros de los alumnos en sus cuadernos, llevando un registro que luego servirá al momento de institucionalizar el conocimiento.	Grafica de funciones lineales 
	Habilidades en juego: razonamiento inductivo, deductivo y reproducción de		
Tiempo: 5' 2. **A partir de las gráficas** se les solicita a los alumnos que las **analicen** con referencia al valor de las abscisas en que intersectan al eje X. Como apoyo visual se les solicita trazar las ecuaciones X = valor de las abscisas generadas en la intersección con el eje X.	El docente pide a los alumnos que tracen rectas paralelas al eje Y en los puntos de intersección con el eje X. 	El docente pregunta a sus alumnos: ¿qué pueden observar con respecto a la posición de la recta que se encuentra a la izquierda y a la derecha de la intersección con el eje X?, ¿Cómo es el valor de la ordenada en cada uno de estos sectores?	Se espera que los alumnos logren visualizar que, si la recta es creciente, sobre la intersección con el eje X, todas las imágenes serán positivas y recíprocamente bajo la intersección serán negativas y en el caso de que la recta fuera decreciente se daría esta relación en forma inversa.
		Habilidades en juego: Oportunidad de desarrollar las habilidades de comunicación	

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE</th><th>INTERVENCIÓN DOCENTE</th><th>EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE</th><th>POSIBLES RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>3. Los alumnos deben registrar los intervalos en que divide el eje X los puntos de intersección de las rectas</td><td>¿Cuáles son los intervalos que se generaron en el eje X, al realizar esta división?</td><td>Identifican los intervalos generados</td><td>Logran determinar los intervalos :
$(-\infty, x_1); (x_1, x_2); (x_2, +\infty)$
$x_1 = -1$; $x_2 = 3$</td></tr>
<tr><td>4. Se les solicita a los alumnos que identifiquen y registren en cada intervalo, la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas involucradas</td><td>¿Qué valor considera la imagen de las funciones presentes en cada uno de los intervalos? ¿Qué característica se ven presente en ellas?</td><td>Elaboran una estrategia para registrar la condición de positiva o negativa de cada una de las rectas por intervalo</td><td>Construyen algún tipo de registro similar a:
<table><tr><th></th><th>$(-\infty, x_1)$</th><th>(x_1, x_2)</th><th>$(x_2, +\infty)$</th></tr><tr><td>F1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>F2</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="4">Habilidades en juego: razonamiento, poniendo en juego la lógica, la estrategia y la</td></tr>
<tr><td>5. A partir del método establecido el alumno puede resolver la inecuación
$$(x+1)(x-3) < 0$$</td><td>¿Cómo lograría dar solución a esta inecuación a partir de los registros establecidos? ¿De qué manera estos registros permiten dar solución a esta inecuación?</td><td>A partir de los registros los alumnos identifican el producto de las funciones en cada intervalo y dan solución gráfica a la inecuación.</td><td></td></tr>
<tr><td>6. Luego, con el método trabajado se les pide resolver la siguiente inecuación
$$(2x+5)(-x-1) < 0$$</td><td>A partir del procedimiento gráfico, ¿Cómo resolverían esta inecuación?</td><td>Repiten el procedimiento elaborado anteriormente y dan respuesta correcta a la inecuación.</td><td>Gráfica de la función
</td></tr>
</table>

Tiempo: 10’

Tiempo: 5’

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
7. Resolver $\frac{x+1}{x-3} < 0$	¿Qué elementos vistos anteriormente, permiten resolver este tipo de inecuaciones?	Reconocen que un cociente es el producto de un término con el inverso multiplicativo de otra expresión. El signo de una expresión es la misma que la de su inverso multiplicativo	$\frac{x+1}{x-3} < 0$ $(x+1) \cdot \frac{1}{x-3} < 0$ $(x+1)(x-3) < 0$ 
8. Cierre : Relacionar las inecuaciones planteadas a la luz del conjunto solución.	Se institucionaliza a partir de los términos que aparecieron en la clase, llevando la terminología del alumno al concepto que el profesor quiere institucionalizar, de modo que les resulte más familiar a su entender, para esto el docente pregunta ¿Qué conclusiones se puede obtener a partir de ambas inecuaciones?	Reconocen que ambas soluciones son equivalentes	

Tiempo: 5'

Habilidades en juego razonamiento, poniendo en juego la lógica, la estrategia y la

Tiempo: 10'

ANÁLISIS A PRIORI

A partir del objetivo planteado, el cual indicaba la resolución de una inecuación racional formada con expresiones lineales de primes grado con una incógnita, por el método gráfico, reconociendo en ello los axiomas de cuerpo y orden de los reales, era necesario que los alumnos debieran saber graficar rectas, para que con ayuda de ellas pudiese encontrar el conjunto solución de la inecuación solicitada.

Se les solicita, por tanto, el poder graficar un par de rectas entregadas en su forma analítica.

ACTIVIDAD 1

El objetivo de esta actividad es graficar un par de rectas a partir de las ecuaciones entregadas en forma analítica, reconociendo en ello los aspectos esenciales que se requieren para su construcción

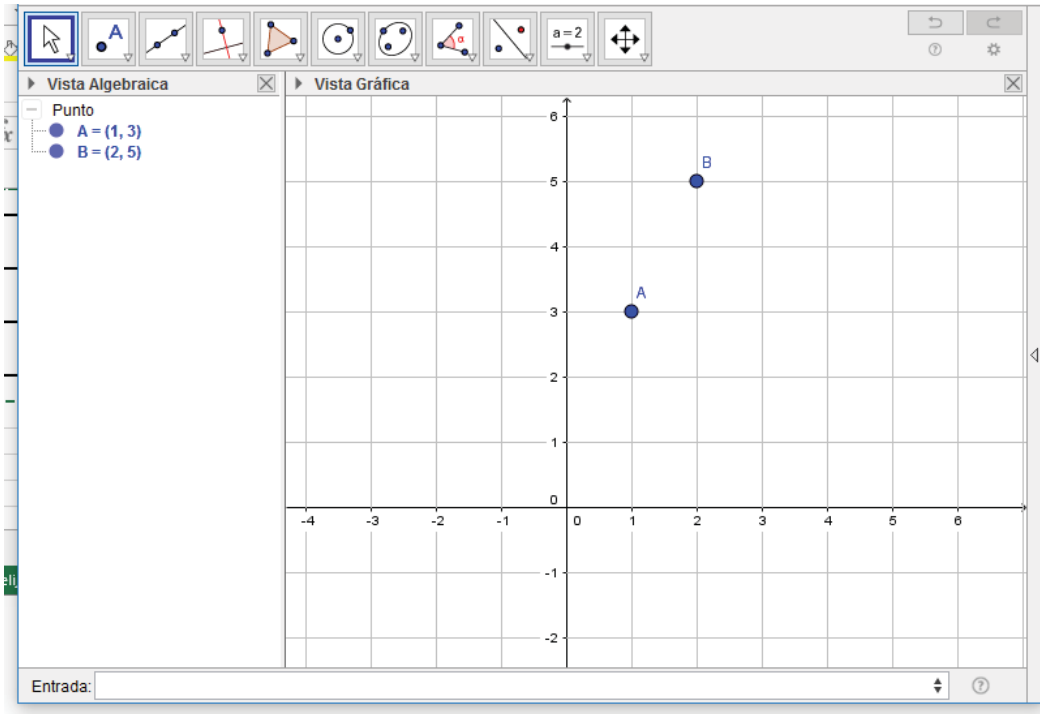
Dibujar las siguientes rectas:

$$L_1: y = x + 1 \qquad ; \qquad L_2: y = x - 3$$

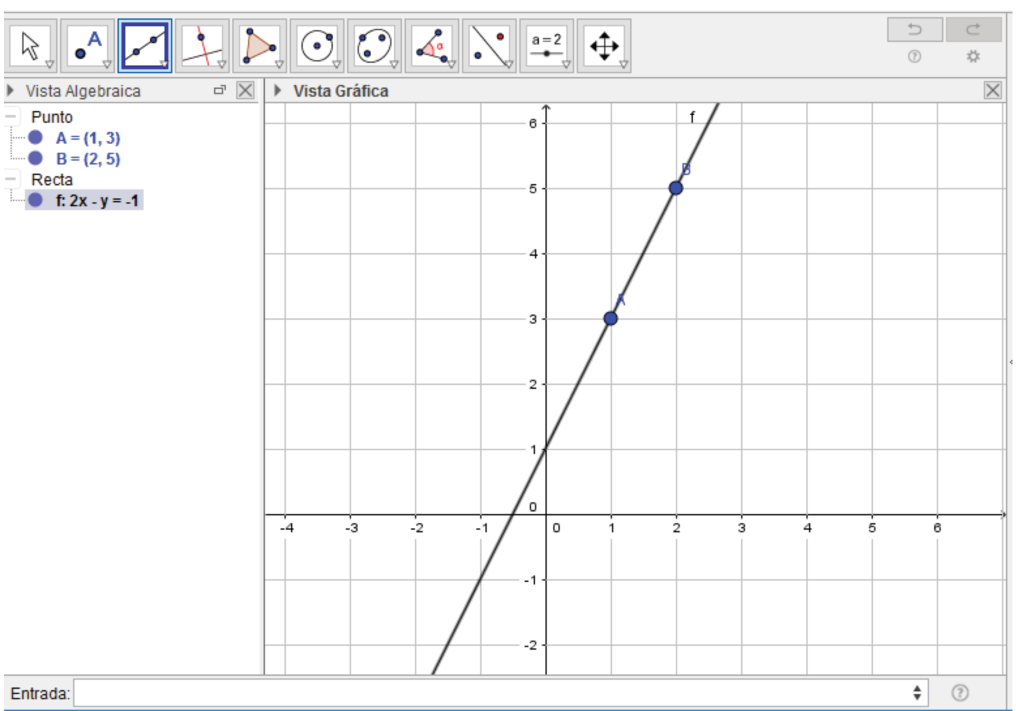
ASIGNACIÓN DE PUNTOS

X	Y
1	2
2	3

$L_1: y = x + 1$



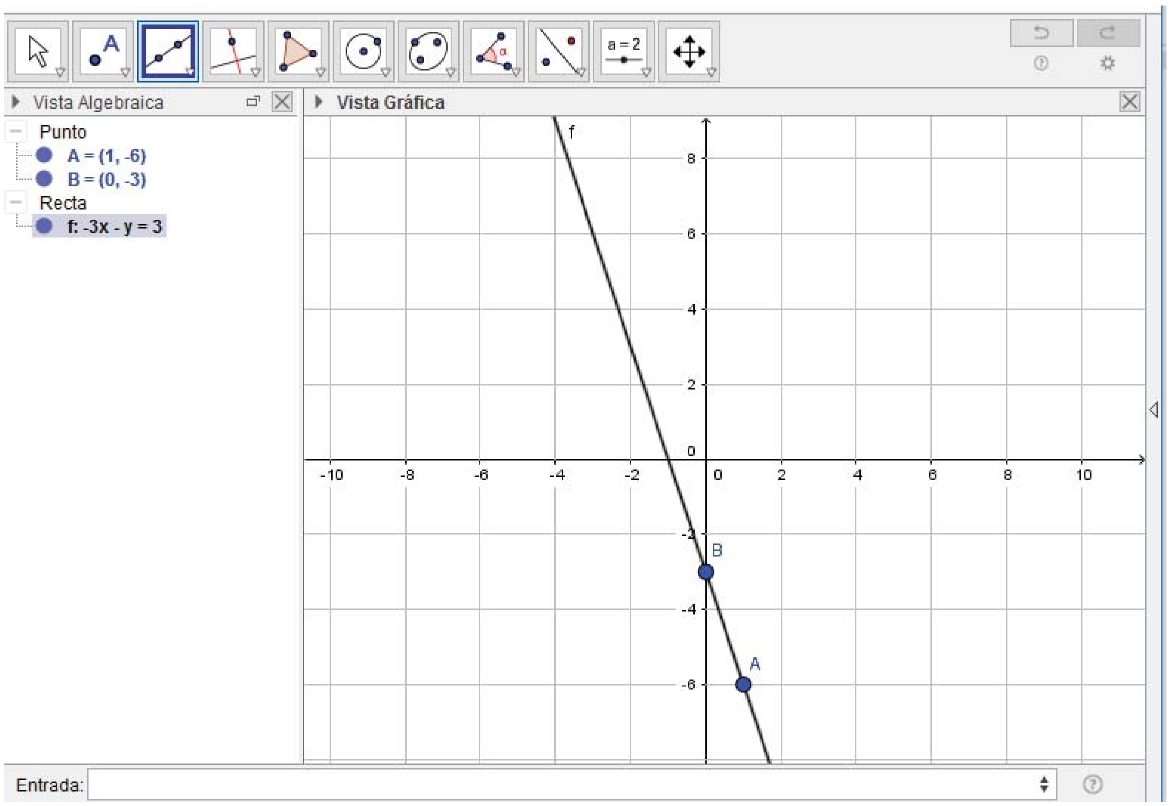
A partir de estos dos puntos se puede trazar la recta solicitada



Análogamente, se puede graficar la segunda ecuación de la y = -3x – 3

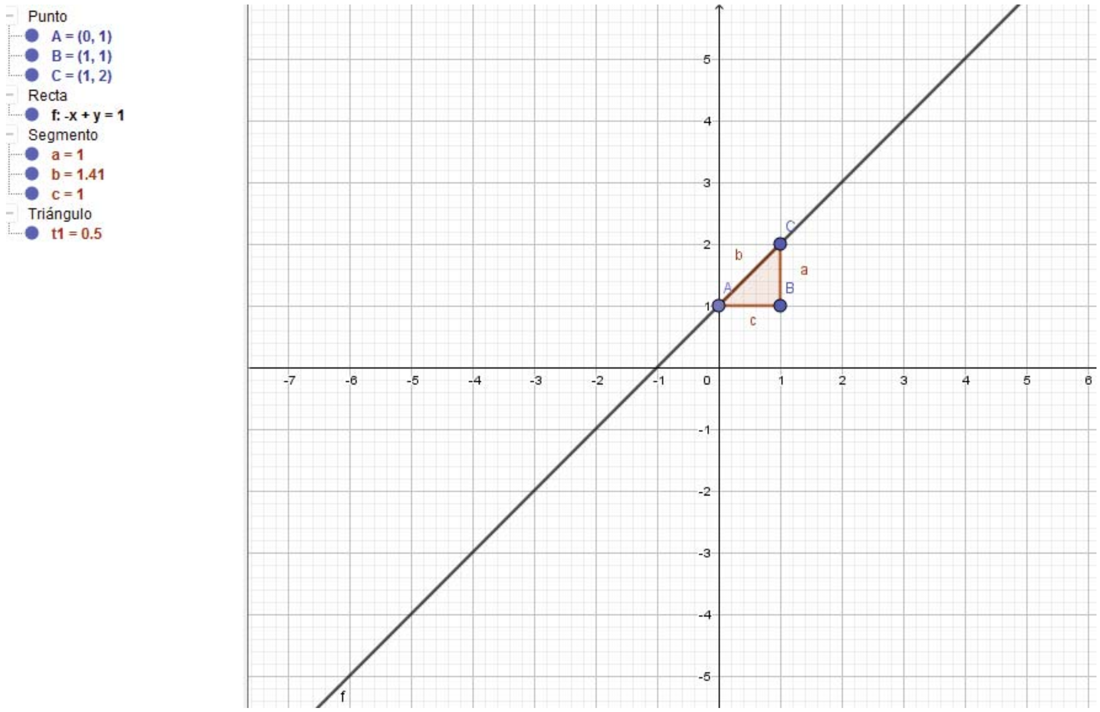
X	Y
1	-6
0	-3

y = -3x -3

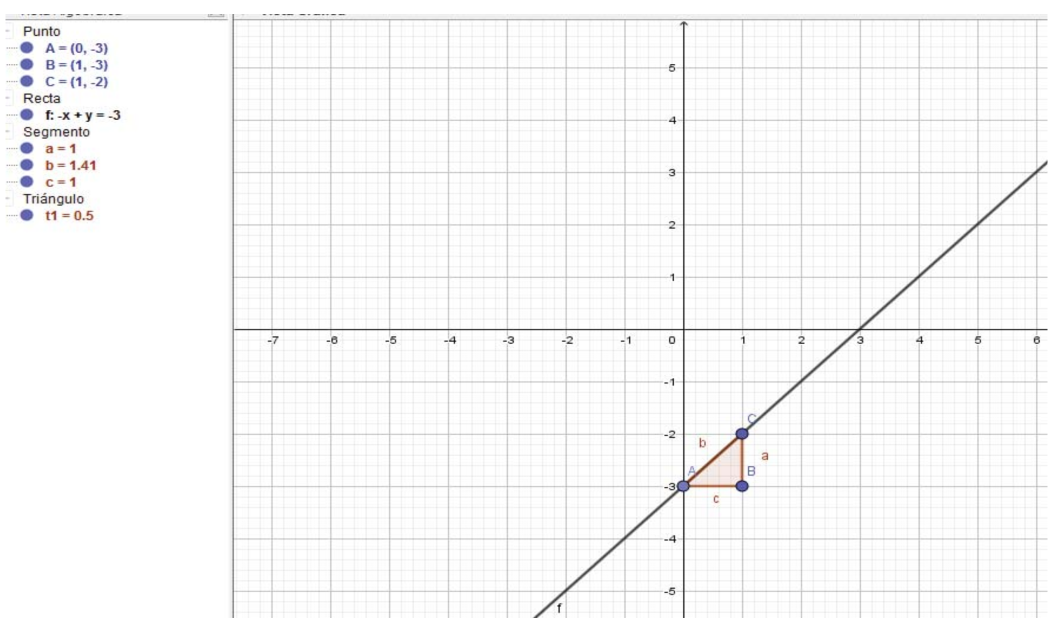


UTILIZANDO PENDIENTE Y COEFICIENTE DE POSICIÓN DE UNA RECTA

$y = x + 1$ Pendiente m = 1 intersección eje Y (0,1)

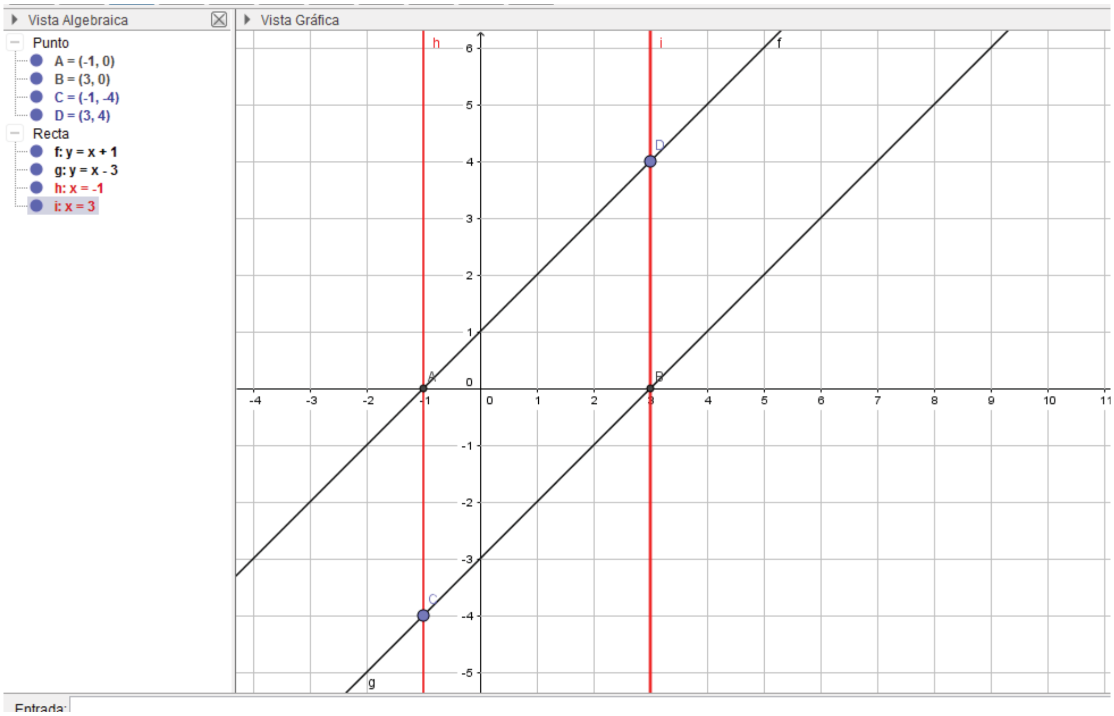


El mismo procedimiento para $y = x - 3$, cuya pendiente m = 1 y el punto de intersección con el eje Y es (0,-3).



ACTIVIDAD 2

A partir de los punto de intersección de las rectas con el eje X, trazar rectas paralelas al eje Y (perpendicular al eje X)



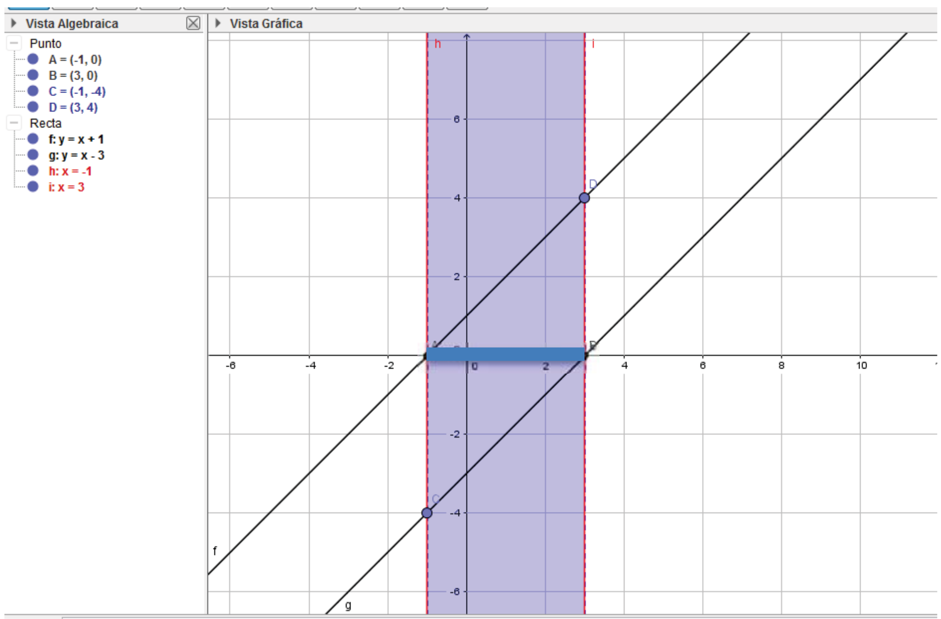
ACTIVIDAD 3

Registrar los intervalos en que se divide, estos puntos de intersección, al eje X.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
y = x + 1	**-**	**+**	**+**
y = x - 3	**-**	**-**	**+**

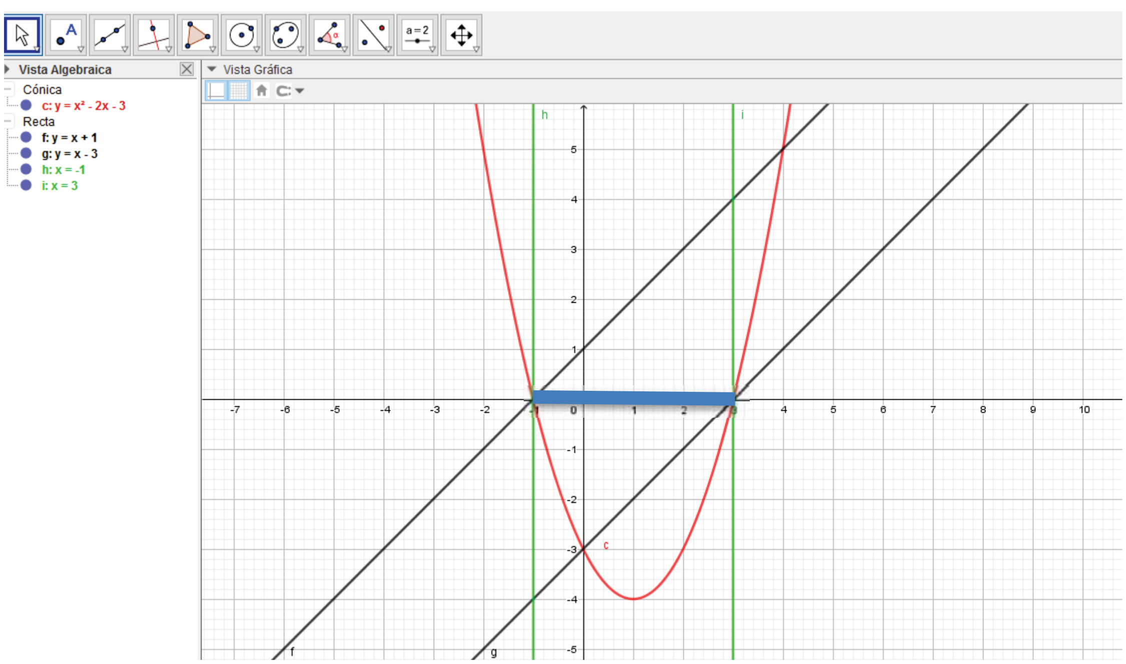
ACTIVIDAD 4

Dar respuesta a la siguiente inecuación $(x+1)(x-3) < 0$ a la luz de los resultados obtenidos.



Solución: $\mathrm{x} \in \mathrm{R}/(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-3) < 0 \;\; \mathrm{ssi} \;\; \mathrm{x} \in (-1\,,3)$

Logran visualizar el conjunto solución desde lo planteado por las funciones lineales y a su vez con la función cuadrática.

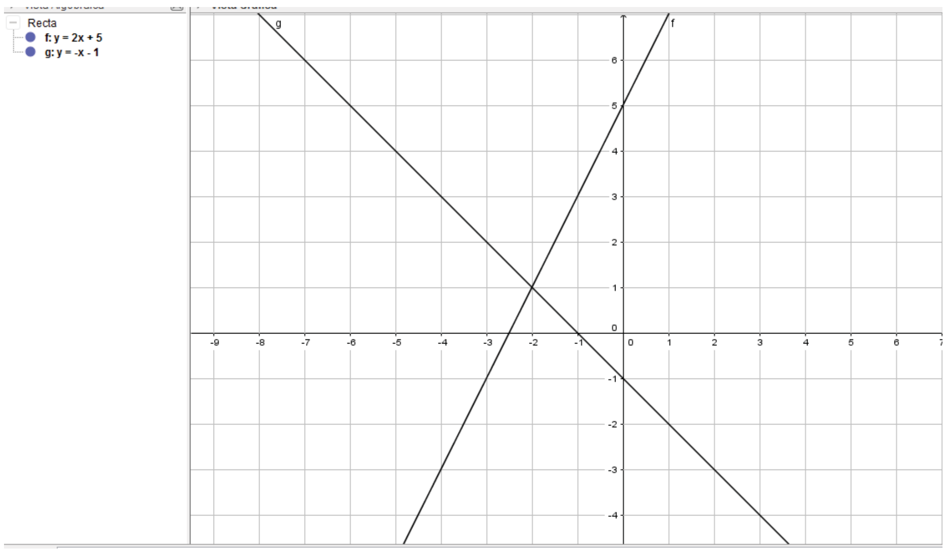


ACTIVIDAD 5

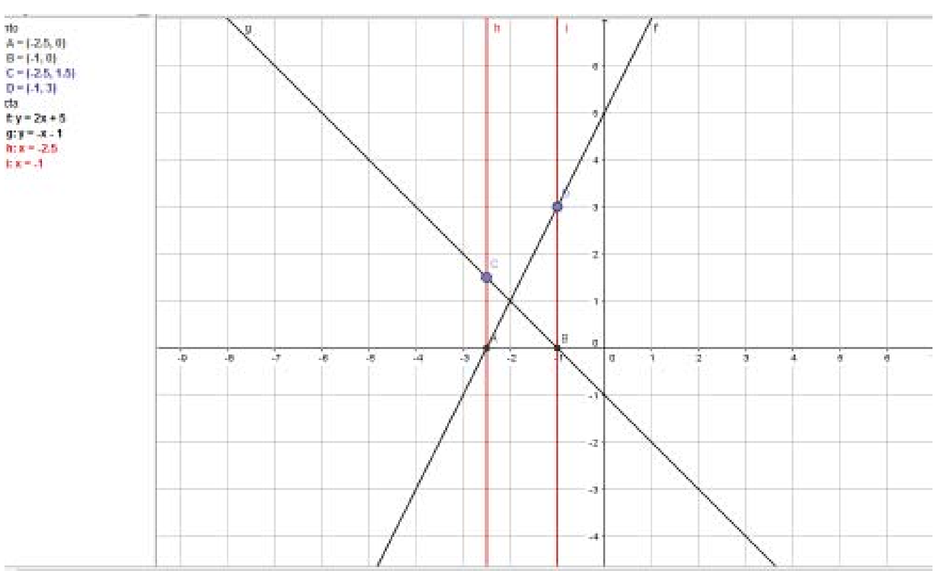
Repetir procedimiento para encontrar solución a la inecuación

$$(2x + 5)(-x - 1) < 0$$

Primero representar gráficamente las rectas $y = 2x + 5$ y luego $y = -x - 1$

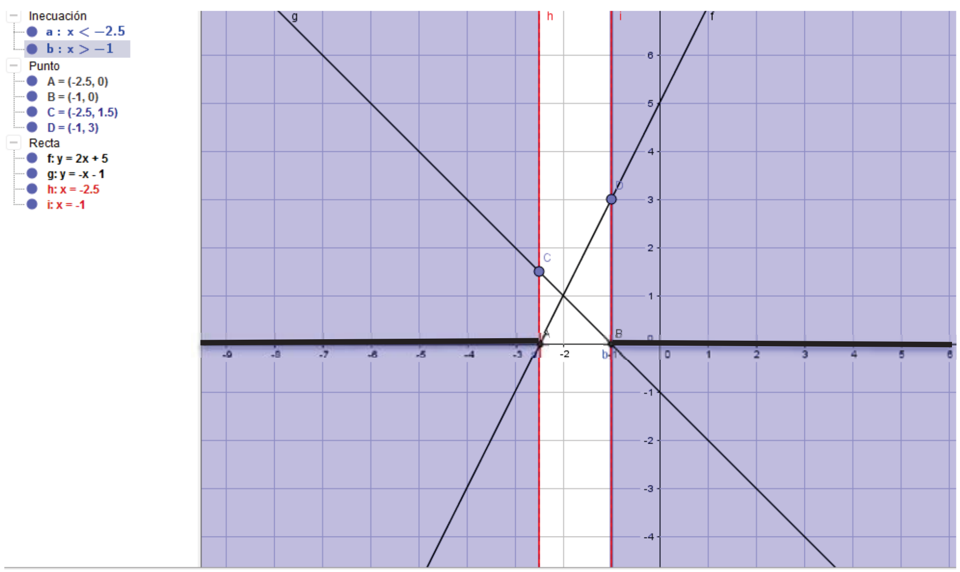


Dividir por sectores a partir de los puntos de intersección de las rectas con el eje X



Registrar el signo de la imagen de cada función generados a partir del análisis gráfico.

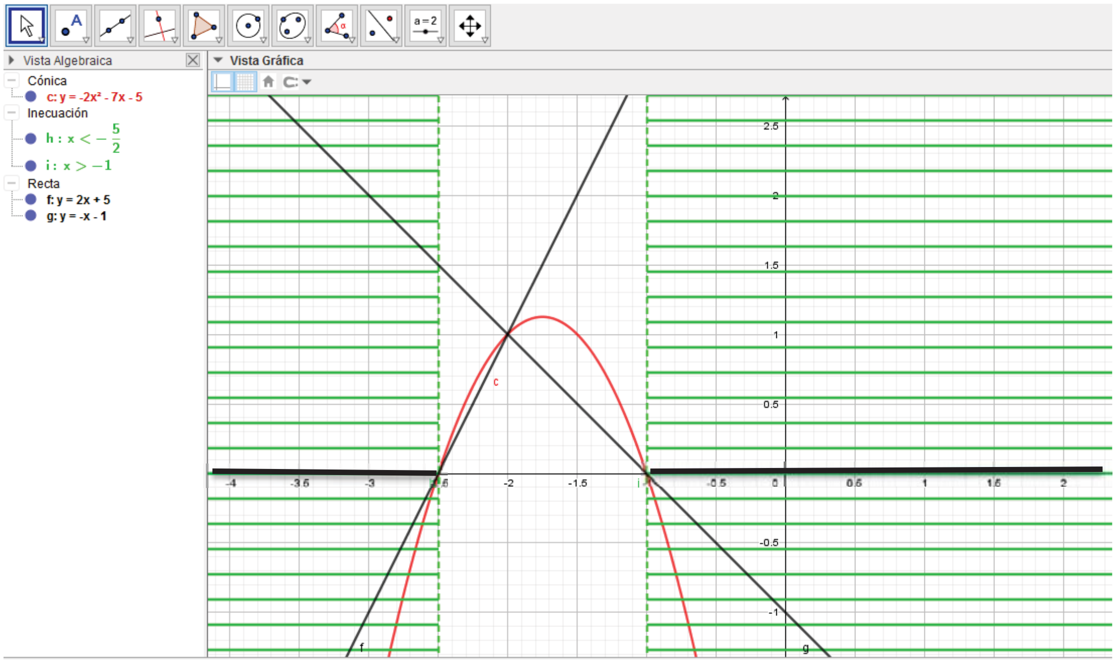
	$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$	$(-1, +\infty)$
y = -x - 1	**+**	**+**	**-**
y = 2x + 5	**-**	**+**	**+**



El conjunto solución de la inecuación $(2x + 5)(-x - 1) < 0$ será:

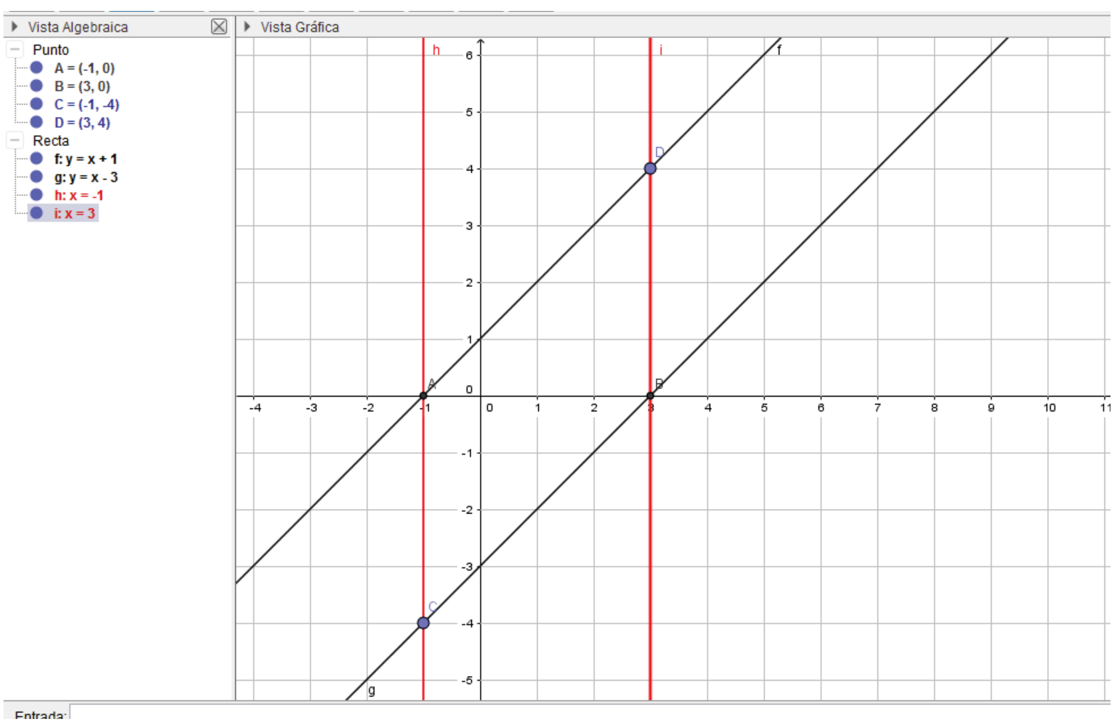
$$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, +\infty)$$

Al igual que en la expresión anterior, logran visualizar el conjunto solución de la inecuación planteada, comparándola con la gráfica de las funciones lineales y la función cuadrática.



ACTIVIDAD 6

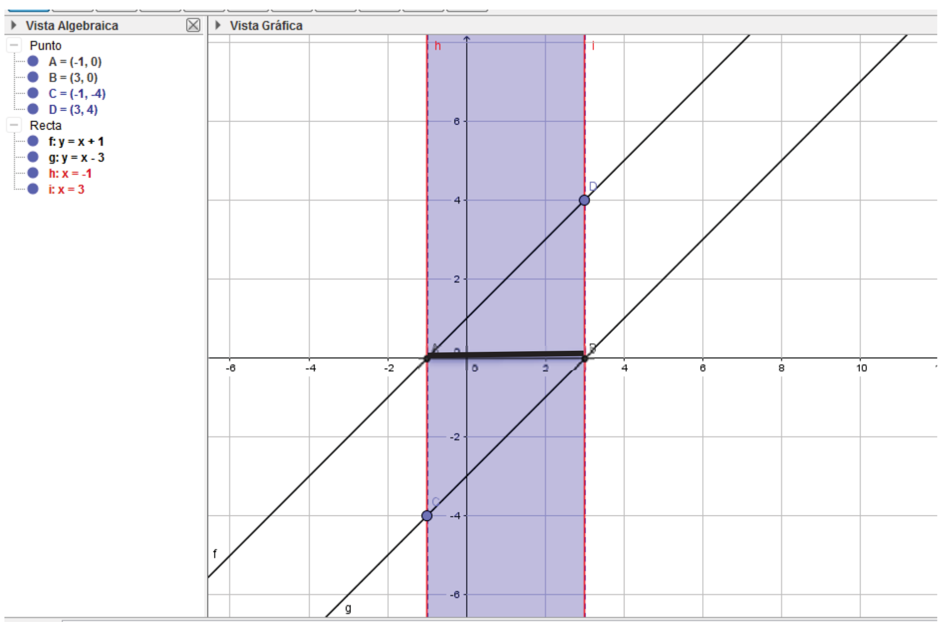
Finalmente resolver la inecuación $\frac{x+1}{x-3} < 0$



Registrar los intervalos en que se divide, estos puntos de intersección, al eje X.

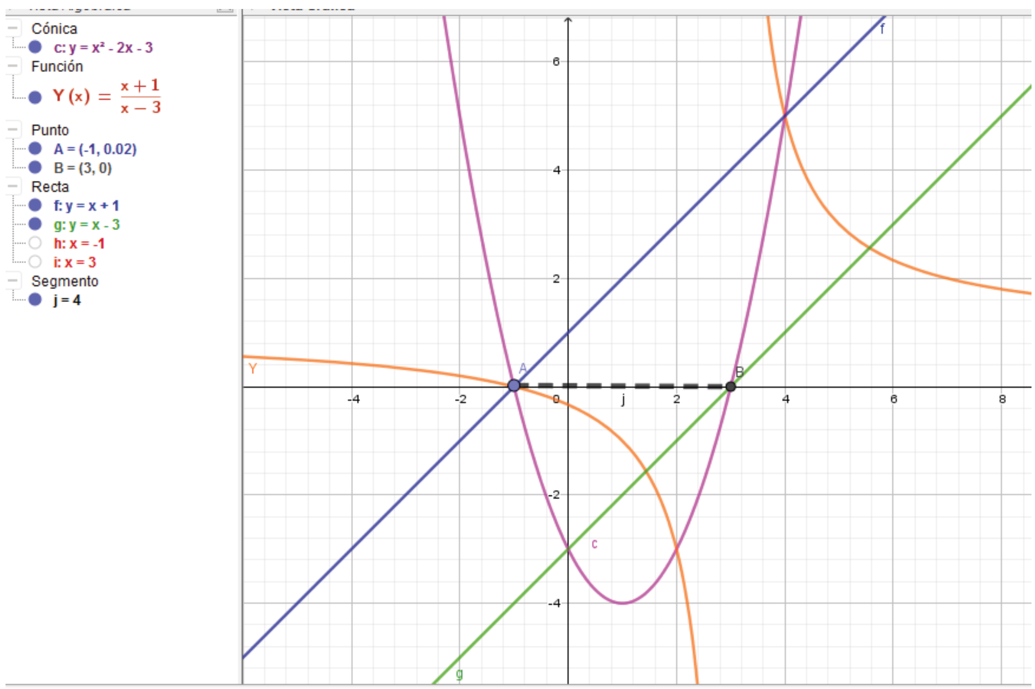
	$(-\infty, -1)$	$(-1,3)$	$(3, +\infty)$
y = x + 1	-	+	+
y = x - 3	-	-	+

Dar respuesta a la siguiente inecuación $\frac{x+1}{x-3} < 0$ a la luz de los resultados obtenidos.



Solución: $\quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}/\frac{x+1}{x-3} < 0 \;\; \mathrm{ssi} \;\; \mathrm{x} \in (-1\,,3)$

Bajo el mismo análisis hecho anteriormente, se puede verificar que el conjunto solución de esta inecuación es el intervalo $(-1\,,3)$



Observan que el conjunto solución de la inecuación planteada como un producto de funciones lineales, el cual forma una expresión cuadrática obviamente factorizable y la hipérbola formada por los mismos factores de la expresión cuadrática, tienen el mismo conjunto solución.

APLICANDO CONDICIONES PARA RESOLVER LA INECUACIÓN

$$(x+1)(x-3)<0$$

$$\{x+1<0 \wedge x-3>0\} \vee \{x+1>0 \wedge x-3<0\}$$
$$\{x<-1 \wedge x>3\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{\phi\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{x>-1 \wedge x<3\}$$

Situación análoga se produce cuando $\frac{x+1}{x-3}<0$

$$\{x+1<0 \wedge x-3>0\} \vee \{x+1>0 \wedge x-3<0\}$$
$$\{x<-1 \wedge x>3\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{\phi\} \vee \{x>-1 \wedge x<3\}$$
$$\{x>-1 \wedge x<3\}$$

POSIBLES ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES

1. Construir una tabla de valores en la que se asignen valores para la variable x o para la variable y, con el objeto de determinar puntos que satisfagan las ecuaciones planteadas.
2. Trazar las rectas a partir de los puntos obtenidos.
3. Ubicar puntos de intersección con el eje X, considerando para ello $y = 0$.
4. Identificar los sectores o intervalos en los cuales se divide el eje x a partir de los puntos de intersección.
5. Reconocer el valor de la imagen de cada recta en cada sector identificado, proyectando la recta sobre el eje Y.
6. Deducir la respuesta a la inecuación planteada considerando los valores encontrados por las imágenes en cada sector.
7. Dar respuesta a la inecuación a partir de la gráfica elaborada.
8. Comparar las soluciones de las inecuaciones expresadas en forma de producto y en forma de cociente.
9. Desarrollar algebraicamente la inecuación aplicando propiedades y condiciones.

POSIBLES DIFICULTADES - LAS PREGUNTAS DE DEVOLUCIÓN

1. La resolución de Inecuaciones de primer grado con una incógnita está intrínsecamente unida al conocimiento de los intervalos y su representación en la recta real, por ser esta la manera de indicar sus soluciones, es en este sentido que aparece la representación a través de intervalos como primera dificultad.

2. Otra dificultad que podría estar latente es la falta de conocimientos previos, los que de ser requeridos se convertirían en una dificultad para el desarrollo de la situación.
3. Dificultades para obtener información espacial al no reconocer los intervalos infinitos y finito, abiertos y cerrados
4. No recordar como asignar puntos de una recta, es decir si $x = 1$, ¿qué valor toma y?
5. No lograr identificar cuál es el valor que le corresponde a la abscisa y a la ordenada

   ¿Qué letras están asociados a los ejes coordenados?, regularmente, ¿cómo se identifica un punto, en términos de sus coordenadas?
6. No identificar el valor de intersección con el eje X

   ¿Qué tipo de puntos es el que se crea en la intersección con el eje X?
7. No utilizar reglas de signos para la suma y multiplicación de números. ¿Cómo se suman dos números reales en términos del signo de la suma?¿Qué regla de signo se utiliza para poder multiplicar dos números reales?
8. No identificar la representación gráfica de una función lineal, una función cuadrática, una función racional, la función valor absoluto. ¿Qué características gráficamente debe tener los diferentes tipos de funciones para su reconocimiento?
9. No identificar la finalidad del discriminante al momento de tener que factorizar una expresión cuadrática. ¿Qué significado tiene el discriminante de una expresión cuadrática si es nulo, positivo o negativo?
10. No reconocer la definición de una función por intervalos. ¿Qué significado le otorga a una función que está definida para valores mayores o menores?
11. No identifica lo que es una asíntota en la representación gráfica de una expresión racional. ¿Qué sucede con el valor de la variable que hace que la expresión sea cero en el denominador? ¿Cómo se podrá representar geométricamente?

POSIBLES ERRORES

Algunos de los errores que podrían aparecer son:

1. Sustituir el signo mayor y menor, por el signo igual, siendo esto un error ya que el tratamiento de desarrollo de las inecuaciones no es el mismo que de las ecuaciones.
2. No utilizar lenguaje matemático correctamente, lo que puede llevar a errores conceptuales al momento de resolver un ejercicio.
3. No reconocer la notación con desigualdades que corresponde a los intervalos infinito abierto, finito, semi-abierto y cerrado.
4. No reconocer la representación gráfica que corresponde a una notación con desigualdades
5. No reconocer la notación con desigualdades que corresponde a una determinada representación gráfica,
6. No lograr identificar el tipo de intervalo que corresponde a una determinada representación gráfica
7. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad cuando a ambos miembros de la desigualdad se les suma o resta por el mismo número positivo
8. No saber que ocurre con el sentido de la desigualdad si es que a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por el mismo número negativo.
9. Identificar el valor absoluto solo como un número que siempre es positivo.
10. Multiplicar en forma cruzada una inecuación racional, sin considerar qué valor tiene el denominador; si es positivo o negativo.
11. Aplicar raíz cuadrada para resolver una inecuación cuadrática.
12. Confundir conectores lógicos $(\wedge, \vee)$ al relacionar inecuaciones.
13. Identificar en forma errónea los símbolos mayor que (>) y menor que (<).
14. Realizar el tratamiento de una inecuación como si fuera una ecuación.

MATEMÁTICAS EN JUEGO

- Ubicación de puntos en el plano cartesiano
- Relaciones y Funciones
- Asignación de puntos que pertenecen a una función lineal;
- Evaluación de funciones
- Grafica de una función lineal
- Grafica de una función cuadrática.
- Grafica de expresiones racionales.
- Valor absoluto y su grafica
- Reconocer una función lineal; pre-imagen e imagen
- Tipos de intervalos
- Álgebra de los números reales
- Axioma de cuerpo de los números reales.
- Axioma de orden de los reales
- Axioma de completitud en los números reales
- Lógica proposicional
- Operatoria algebraica
- Factorización de expresiones algebraicas
- Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.
- Inecuaciones Lineales

ANALISIS A POSTERIORI

Al momento de generar la implementación, en el curso se encontraban 15 personas, todas estudiantes de primer año de Ingeniería en Prevención de Riesgos de un Instituto Profesional con sede en la ciudad de La Serena. El estudio planteado se enmarca en un estudio de caso descriptivo, el cual a través del desarrollo de tareas específicas y la observación se detectan la forma de representar la solución de inecuaciones y el uso de los axiomas en este proceso.

Del total de alumnos que participaron de la actividad sólo 2 de ellos lograron el objetivo de la sesión, dando a conocer que la solución gráfica de una inecuación formada por un producto es idéntico al conjunto solución de la inecuación formada por las mismas expresiones pero esta vez como cociente.

La propuesta e implementación de las actividades fue contemplada con muchos supuestos que debían cumplir los alumnos, partiendo por el hecho que los conocimientos que debían emerger al momento de comenzar la actividad iban aflorar naturalmente. De ahí el primer error, los alumnos debían comenzar con la gráfica de funciones lineales, activar ese conocimiento fue esencial.

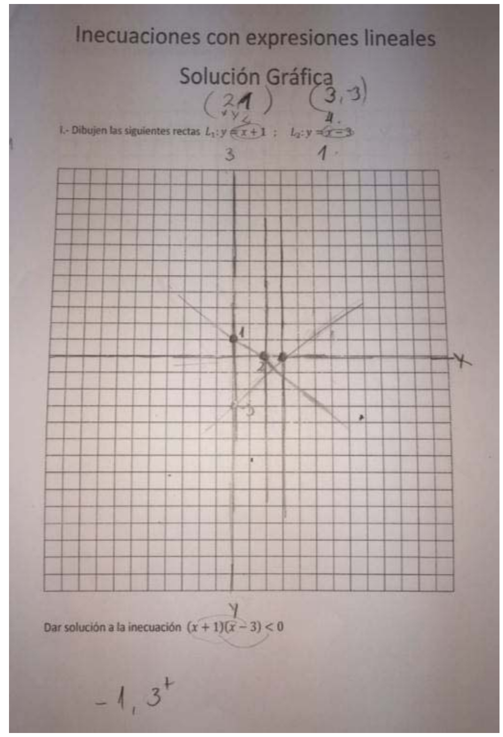
Llama la atención que del total de alumnos, la mayoría de ellos tuviera problemas con la representación gráfica de una recta, situación que si bien estaba contemplada en el análisis a priori, nunca se dimensionó que afectara tanto en el transcurso de la actividad, considerando inclusive la reformulación de ésta, para una segunda implementación. Con mucha direccionalidad por parte del docente, se culmina la actividad con el reconocimiento por parte de los estudiantes que el método desarrollado permite "visualizar", la solución de una inecuación.

Se les solicitó pudieran plasmar sus conocimientos en un documento cuadriculado (Anexo 1), apoyados por unas diapositivas (Anexo 2), que iban avanzando en la medida que transcurría la actividad. No todos los alumnos alcanzan a terminar las actividades en los tiempos asignados, remitiéndose particularmente a las imágenes de apoyo que fueron presentadas y a partir de ellas logran llegar a indicar la solución de la inecuación.

Se describirán 6 casos en que dan cuenta del trabajo realizado y las dificultades que se encontraron en su desarrollo.

Caso 1:

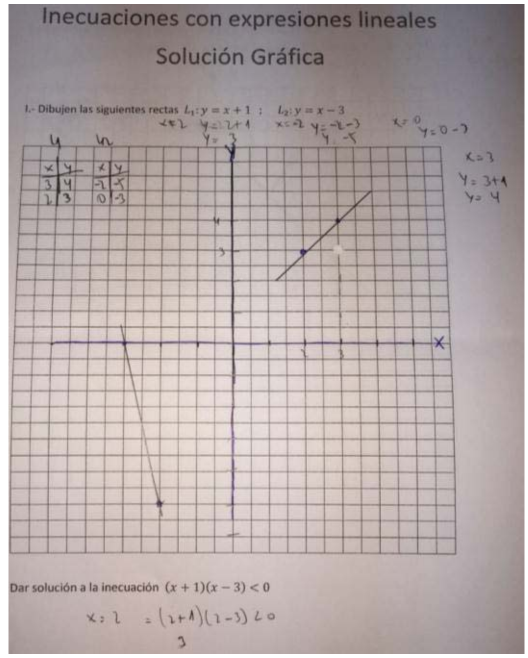
El alumno no es capaz de graficar el par de rectas en forma correcta, se evidencia que si bien sabe que debe reconocer dos puntos de la rectas para poder graficarlas, estos no logran satisfacer las condiciones de la recta que desea dibujar, confunde los coeficientes de posición representándolos como intersecciones con el eje Y. No se da cuenta que ambas rectas tienen la misma pendiente, por tanto deberían ser paralelas y tener la misma posición relativa en el plano. Todo ello dificulta el buen entendimiento de la situación que se desea realizar, por tanto se sugiere modificar la actividad propuesta, entregando las gráficas de las rectas en la segunda implementación.



Por la naturaleza de lo solicitado, el alumno debía reactivar conocimientos de función lineal y su gráfica, indicar la cantidad de puntos necesarios para poder graficar una recta, como así también el poder ubicar estos puntos en el plano cartesiano para poder trazar la gráfica solicitada.   A nivel algebraico no presenta ningún cálculo que dé cuenta de conocimiento que tenga de cómo resolver una inecuación de esta categoría.

Caso 2:

En este caso el alumno reconoce que para poder graficar una recta se requieren dos puntos, lamentablemente, si bien es capaz de asignar y evaluar los valores en las ecuaciones en forma correcta, se equivoca en la ubicación de los puntos en el plano cartesiano, por tanto, no le permite continuar con la actividad en forma adecuada, identificando la intersección de ambas rectas con el eje x, de forma de no reconocer cuales serían los intervalos en los cuales se trabaja el análisis gráfico.

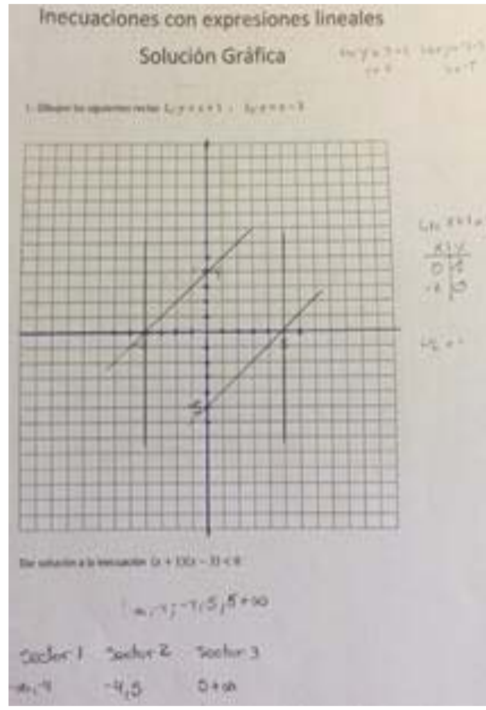


El alumno puede realizar un cálculo de los puntos de cada una de las rectas, pero comente un error al momento de ubicarlos en el plano cartesiano, no existe por parte de él un acto consciente de lo que está realizando sino más bien un actuar impulsivo no permitiendo darse cuenta del error realizado. El alumno es capaz de lograr hacer una buena evaluación de cada una de las funciones lineales, lamentablemente no prosigue con el ejercicio.

Caso 3:

Realizando una primera y rápida visión del gráfico presentado por el alumno, se logra apreciar que dibuja rectas paralelas las cuales pareciera corresponder a las rectas solicitadas, pero siendo más riguroso en la observación, se aprecia que si bien logra realizar una buena evaluación de acuerdo a la construcción del registro de la tabla de valores, éstos no son bien graficados.

En la parte superior derecha realiza dos evaluaciones para $x = 3$ en la primera ecuación y posteriormente $x = -2$ para la segunda ecuación.



Para la primera evaluación se origina el valor $y = 4$ y en el caso de la segunda evaluación se originó el valor $y = -5$. Esto le lleva a cometer el error al graficar estos puntos considerándolos como la intersección con el eje Y, pese a que los puntos deberían ser $(3,4)$ y $(-2,-5)$, respectivamente.

El alumno realiza la identificación de intervalos en que el eje X es dividido por las rectas graficadas, aunque no corresponden a la respuesta correcta. Utiliza el registro tabular para otros dos puntos, pero estos no son representados en el gráfico. No logró determinar la respuesta al ejercicio planteado.

Caso 4:

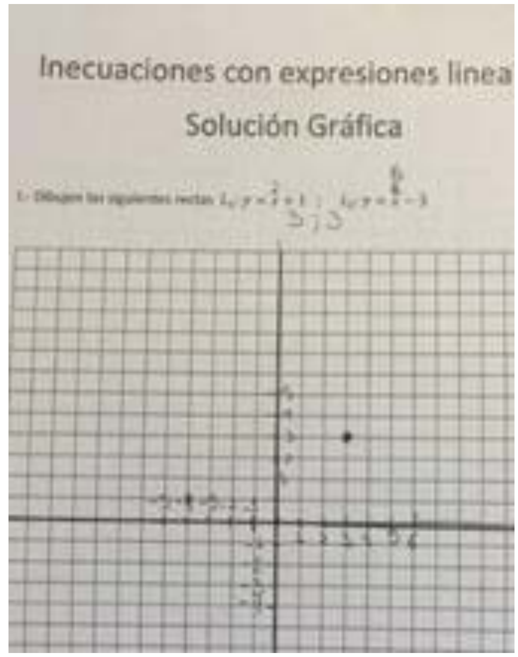
Se evidencia que el alumno realiza un registro tabular pese a que en el primer caso la evaluación de $x=0$ comete un error obteniendo $y=-1$, pero esto no se reflejado en la representación gráfica, sino que lo que representa es el punto $(0,1)$.

Si bien los puntos que se originaron de la evaluación en las rectas planteadas son graficados, al trazar dichas rectas que pasan por estos puntos, no se realiza con la prolijidad necesaria para darse cuenta que ambas rectas debían ser paralelas.

El alumno escribe en la parte de la izquierda del grafico la palabra negativa, en ambas rectas, dando alusión al valor de la imagen de ambas rectas en ese sector de las rectas, situación que fue inducida por el docente para generar un acercamiento en encontrar una solución de la inecuación. Para ello, él intenta construir una representación tabular a partir de los intervalos generados por la intersección de las rectas con el Eje X, pero no completa esta tarea. Si bien todos estos esbozos fueron con el objeto de lograr encontrar el conjunto solución de la inecuación planteada, el alumno no logra dar respuesta.

Así como se presentó en la mayoría de los casos, los alumnos no generaron autonomía en el proceso para realizar la actividad planteada, fueron guiados por el docente, pero aun así, se presentó gran dificultad al momento de realizar el registro gráfico. Esto no permitió poder profundizar en la variedad de registros como tampoco que los alumnos pudieran reconocer el uso de los axiomas al determinar el conjunto solución de las inecuaciones.

Caso 5:

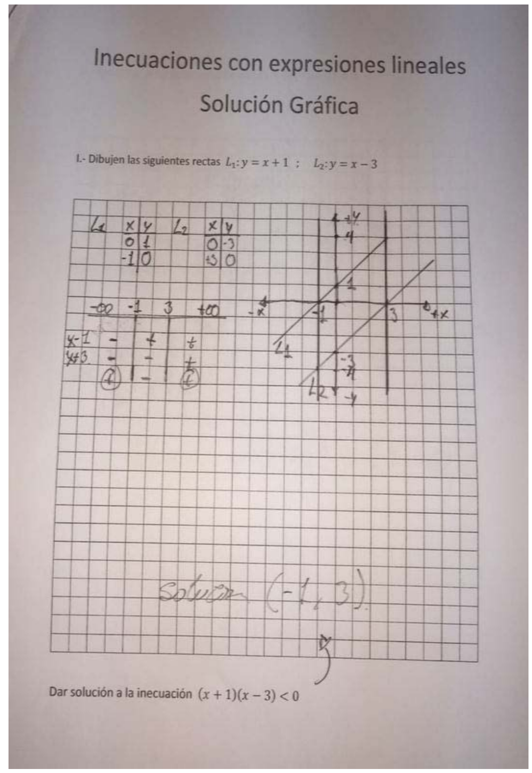


Considerando que todos los alumnos recibieron las mismas instrucciones y recibieron la misma documentación, pero claramente en este caso no se acerca a alguna noción de registro o conversión para entender una inecuación. Tratando de interpretar el quehacer del alumno, se aprecia que busco encontrar un valor de la ordenada en la que ambos coincidieran. Es así como en la primera función evalúa el valor de $x=2$ y para la segunda función considera el valor $x=6$ obteniendo en ambos casos el valor de la ordenada $y=3$.

Debido a que en ambas evaluaciones originó el valor 3, el alumno interpreta estos valores como si fuera un solo punto de coordenadas $(3,3)$, el cual trato de representar, aun así al momento de dibujar el punto, no es capaz de asignar los valores a los ejes correctamente. El valor para el eje de las ordenadas en el sentido positivo, no comienza la secuencia respetando su orden, esto evidencia que para el alumno no realza importancia al momento de ubicar los puntos en el eje coordenadas o bien desconoce que para poder realizar una representación de esta índole es necesario mantener un orden en los valores asignados a cada eje, tanto para valores positivos como para valores negativos. El alumno no logra reconocer el conjunto solución de una inecuación, y mucho menos el darse cuenta del uso de axiomas del cuerpo de los reales o de utilizar diferentes registros, tratamientos o conversiones en su búsqueda del conjunto solución.

Caso 6:

Este alumno alcanzó el objetivo planteado para la sesión, no generando dificultad en la representación gráfica de la función lineal, como tampoco en la identificación de los intervalos, apoyándose en el registro tabular. Pudo realizar la conversión entre los registros algebraicos y geométricos entregando la solución de la inecuación planteada, siguiendo las instrucciones entregadas para la actividad y siendo el único de los alumnos que logró realizar las actividades planteadas.



Si bien este alumno da cuenta que es factible poder llegar a encontrar la solución a través de la forma gráfica, indica verbalmente también, que echaba de menos poder realizar los cálculos algebraicos que estaba acostumbrado al momento de realizar este tipo de ejercicios.

Tal como se indicó, fueron solo dos alumnos los que logran el objetivo de la sesión, es decir lograron determinar gráficamente el conjunto solución de una inecuación como producto de expresiones lineales y verificaron que otra inecuación esta vez expresada como un cociente de las mismas expresiones lineales utilizadas, tienen el mismo conjunto solución pero no logran determinar la presencia de axiomas en sus conversiones y tratamientos.

Por esta razón se realiza un replanteamiento de la actividad en la cual esta vez se les hace trabajar con apoyo de un software educativos como es el GEOGEBRA, el cual, de acuerdo a lo observado, les permitió realizar la gráfica en forma más rápida y precisa, obviando el obstáculo de realizar la gráfica en forma manual para poder encontrar el conjunto solución de las inecuaciones constituidas por expresiones lineales ya sea como cociente o producto entre ellas.

CAPÍTULO 5

SECUENCIA DIDACTICA

DESCRIPCIÓN Y EXPLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Revisando el requerimiento del programad de Cálculo, diseñado por la institución de educación superior en la cual se realizó la implementación y habiendo superado en parte, el obstáculo de la construcción de las funciones implementación del plan de clases, se ha pensado en desarrollar una secuencia atendiendo el aprendizaje esperado del problema, el cual indica resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y con valor absoluto, determinando un criterio de evaluación para dicho aprendizaje el aplicar propiedades de las desigualdades en la resolución de inecuaciones lineales y cuadráticas y resolver inecuaciones con valor absoluto.

Se plantea para ello dos clases más a la implementada, una antes y otra después, siendo identificadas como clase 1 y clase 3 respectivamente. Generando los siguientes objetivos para dichas clases:

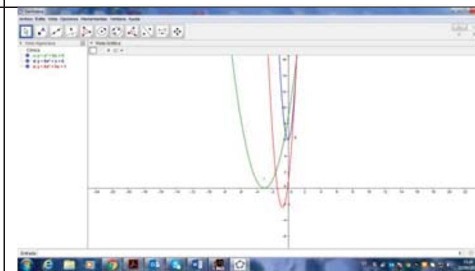
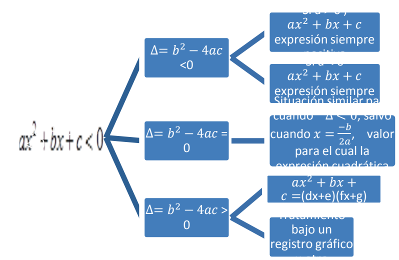
- Determinar el conjunto solución de una inecuación formada por una expresión cuadrática, a partir de su discriminante.

- Resolver las inecuaciones formada por expresiones lineales tanto como producto como cociente con valor absoluto, considerando los métodos estudiados en las clases anteriores

En ambas clases, se propone priorizar los diferentes registros de representaciones que da cuenta el alumno al momento de generar la solución de la inecuación ya sea desde la inecuación cuadrática hasta llegar a aquella que tiene valor absoluto.

(Clase 1)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
Tiempo: 5' **1.** El Profesor da a conocer el **Objetivo de la Clase** “Determinar el conjunto solución de una inecuación formada por una expresión cuadrática, a partir de su discriminante”. **Inicio:** **Planteamiento del problema:** Se les solicita a los alumnos que identifiquen las características en que se asimilan y/o diferencian las expresiones presentadas	¿Qué características logran reconocer en las inecuaciones presentadas, ya sean similitudes o diferencias? $x^2+6x+9<0$ $9x^2+x+6<0$ $6x^2+9x+1<0$	A partir de una lluvia de ideas los alumnos mencionan algunas características que logran identificar en las expresiones entregadas	Los alumnos indican que: - Son expresiones cuadráticas - Los coeficientes que acompañan a las variables son números reales. - Tienen los mismos coeficientes que acompañan a la variable
Habilidades en juego: razonamiento inductivo, deductivo y reproducción de			
Tiempo: 15' **2.** Descomponer las expresiones cuadráticas en factores constituidas por factores de primer grado, si es que fuera posible	¿Será posible realizar una descomposición factorial de las expresiones cuadráticas presentadas?	Los alumnos determinan el valor del discriminante de cada una de las expresiones cuadráticas y de esta forma verifican si es posible realizar la descomposición factorial y comienzan a realizar la descomposición cuando sea posible	Determinan el discriminante de cada expresión ($\Delta=b^2-4ac$) llegando a la conclusión que: $x^2+6x+9<0 \quad \Delta=0$ $9x^2+x+6<0 \quad \Delta<0$ $6x^2+9x+1<0 \quad \Delta>0$ Obteniendo $(x+3)^2<0$ $9x^2+x+6<0$ $(6x+0,72)(x+1,38)<0$
Habilidades en juego: razonamiento, poniendo en juego la lógica, la estrategia y la resolución de problemas.			

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
3. Desarrollo: Representar graficamente las expresiones cuadráficas como función cuadrática $x^2+6x+9=y$ $9x^2+x+6=y$ $6x^2+9x+1=y$	¿Cuál será la representación de dichas expresiones como funciones cuadráticas?	Grafican las parábolas	
4. A partir de las gráficas de parábolas dar respuesta a las inecuaciones planteadas originalmente	¿En qué valor de la imagen de las funciones presentes, ésta es positiva o negativa?	Elaboran una estrategia para registrar la condición de positiva o negativa de cada una de las parábolas	Reconocer puntos críticos de la parábola si es que existen y a partir de ello dar respuesta a las inecuaciones
5. Encontrar el conjunto solución de aquella inecuación que es factorizable	¿De qué otra forma lograría dar solución a esta esta inecuación?	A partir de los registros de los alumnos de cómo llegan a dar solución a la inecuación.	A partir de la visualización gráfica logran encontrar el conjunto solución de la inecuación planteada
6. Cierre Generalizar como identificar el conjunto solución de una inecuación formada por expresiones cuadráticas	Construya un organizador gráfico para determinar el conjunto solución de una inecuación formada por expresiones cuadráticas	En forma grupal elaboran un organizador gráfico con la información desarrollada en clases, que de testimonio de cómo guiarse para encontrar el conjunto solución de una inecuación cuadrática.	Organizador Gráfico 

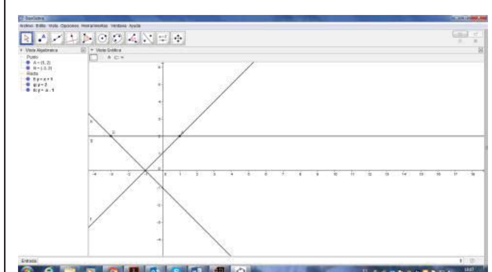
Tiempo: 15'

Habilidades en juego: razonamiento, poniendo en juego la lógica, la estrategia y la resolución de problemas.

Tiempo: 10'

Habilidades en juego: Oportunidad de desarrollar las habilidades de

(Clase 3)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
Tiempo: 5' 1. El Profesor da a conocer el **Objetivo de la Clase** “Determinar conjunto solución de una ecuación con valor absoluto” 2. **Planteamiento del problema:** ¿Qué determinaría el conjunto solución de la inecuación $\lvert x+1\rvert < 2 \ \vee \ \lvert x+1\rvert < 2$?	¿Qué recuerdan de la función Valor Absoluto?, ¿Cómo estaba definida? A partir de esta consulta, la idea es reconocer cuales son las conductas de entrada de los alumnos ante esta función.	Registrar a partir de una lluvia de ideas, aquellos conceptos que recuerdan de la función valor absoluto	- Indicar que el valor resultante es siempre positivo. - Corresponde a una distancia. - Representa Gráficamente una V Son algunas de las posibles respuestas que podrían dar
Habilidades en juego: Oportunidad de desarrollar las habilidades de			
Tiempo: 10' 3. A partir de la definición por intervalo de la función valor absoluto determinan la solución de la ecuación $\lvert x+1\rvert = 2$	¿Cuántos métodos conocen que podrían dar respuesta a esta ecuación?	A partir del trabajo grupal, los alumnos tratan de dar respuesta a la ecuación planteada	Se espera que los alumnos den respuesta por lo menos en su forma algebraica y en forma gráfica a esta ecuación 
Habilidades en juego: razonamiento inductivo, deductivo y reproducción de			

Tiempo: 20'

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE	POSIBLES RESPUESTAS
4. Determinar el conjunto solución de la inecuación $\lvert x+1\rvert < 2$	¿Cuáles son los intervalos que satisfacen la condición dada?	En forma individual y posteriormente en forma grupal proponen el conjunto solución de la inecuación planteada	En forma algebraica y geométricamente, grafican funciones y los alumnos pueden dar a conocer el conjunto solución de la inecuación.
5. A partir de las propiedades del valor absoluto determinar el conjunto solución de $\left\lvert \frac{x+1}{x+3} \right\rvert < 1$; $\lvert x^2-3\rvert < 1$	¿Qué método utilizaría para resolver estas inecuaciones?	Fortalecer la idea de que a través del registro gráfico puede llegar a encontrar el conjunto solución de las inecuaciones planteadas.	Registro Algebraico Registro Tabular Registro Grafico
Habilidades en juego: razonamiento, poniendo en juego la lógica, la estrategia y la			
6. Cierre: Tiempo: ...acionar las inecuaciones ...nteadas, considerando la ...na de encontrar el conjunto ...ción	Considerando que el alumno ha sido capaz de transitar por más de una representación. ¿qué métodos le permiten poder encontrar el conjunto solución de una inecuación?	A través de trabajo grupales dar a conocer técnicas para encontrar el conjunto solución de inecuaciones con valor absoluto	Los alumnos manifiestan a través del registro gráfico de funciones, con apoyo del Software Geogebra, el conjunto solución de inecuaciones con valor absoluto.

ACTIVIDAD CLASE 1

Dado que el objetivo de la clase responde a determinar el conjunto solución de inecuaciones cuadráticas considerando su discriminante. La primera actividad a desarrollar será determinar los discriminantes de las expresiones cuadráticas. Siendo así, se obtiene

$$x^2+6x+9 \qquad \Delta = 36-4\cdot 1\cdot 9 = 0$$

$$9x^2+x+6 \qquad \Delta = 1-4\cdot 9\cdot 6 < 0$$

$$6x^2+9x+1 \qquad \Delta = 81-4\cdot 6\cdot 1 > 0$$

A partir de las expresiones y sus discriminantes, se realiza la descomposición factorial de aquellas cuyo discriminante sea mayor o igual a cero, generando los siguientes términos

$$(x+3)^2 < 0$$

$$9x^2+x+6 < 0$$

$$(6x+0,72)(x+1,38) < 0$$

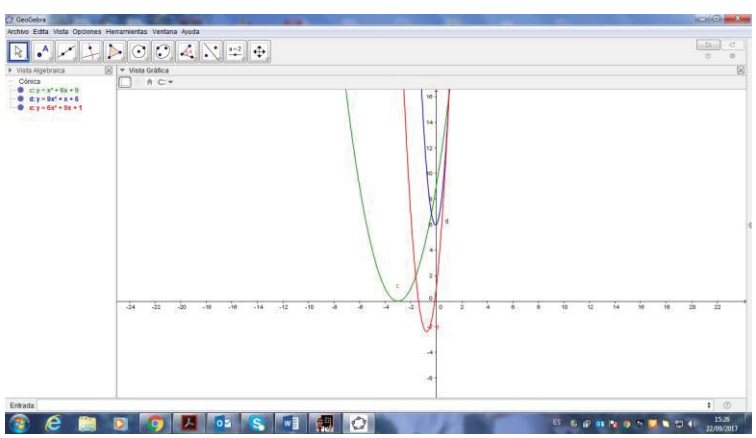
La primera y la tercera son expresiones factorizables mientras que la segunda no, esto se puede inferir gracias al conocimiento que se tiene del discriminante.

Se les solicita que consideren las expresiones cuadráticas como funciones cuadráticas y puedan relacionarlas con la representación gráfica de las funciones que tienen esta forma, es decir, grafican parábolas

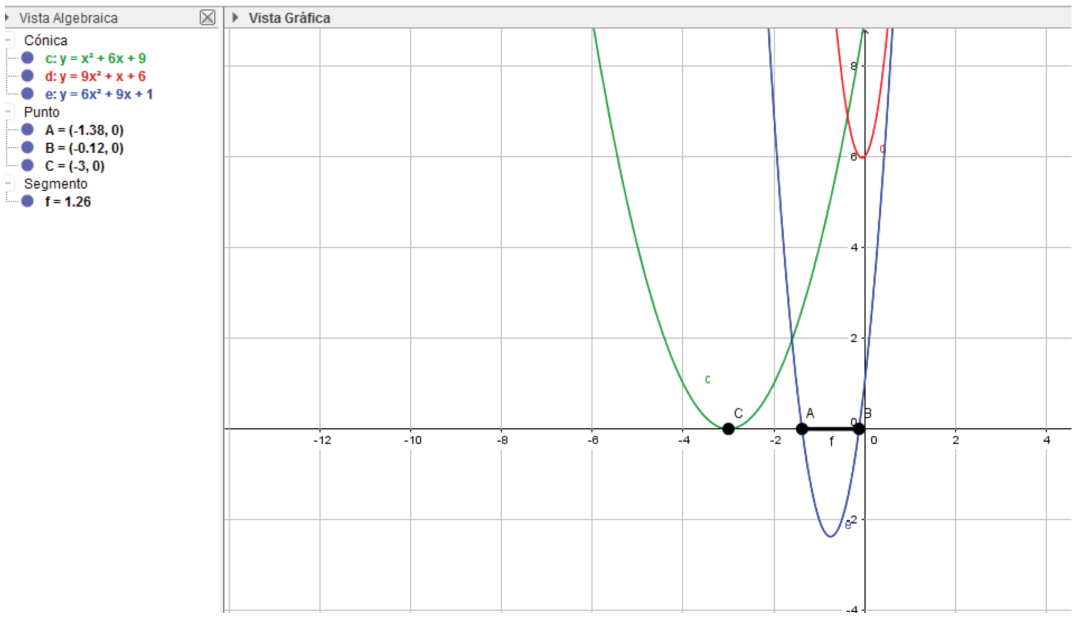
$$x^2+6x+9 = y$$

$$9x^2+x+6 = y$$

$$6x^2+9x+1 = y$$



Con ayuda del software Geogebra, realizan la actividad y se les pregunta ¿para qué valores de la imagen de cada una de las funciones ésta es positiva o negativa?, ¿qué estrategias utilizarían para registrar la condición indicada? ¿qué sucedería si el coeficiente que acompaña a la variable que se encuentra al cuadrado fuera negativa? Todas estas preguntas se espera que el alumno pueda responder con ayuda del software y a partir de la representación gráfica.



Para un mejor análisis se identificarán las parábolas de la siguiente forma

$$x^2+6x+9=y \qquad (1)$$

$$9x^2+x+6=y \qquad (2)$$

$$6x^2+9x+1=y \qquad (3)$$

La ecuación (1) toca al eje X en un solo punto que es donde se produce la igualdad $y=0$, para el resto de gráfica la imagen de la función será siempre positiva. En la gráfica (2) se observa que ningún punto toca al eje X y las imágenes de la función son siempre positivas. Finalmente en la gráfica (3) se aprecia que son dos los puntos en que intersecta la eje X, de esta forma aquellos valores que se encuentran entre el segmento formado por los puntos de intersección con el eje X, la función es negativa, en los puntos la expresión se hace $y=0$, y los valores de la imagen de los puntos restantes serán siempre positivos.

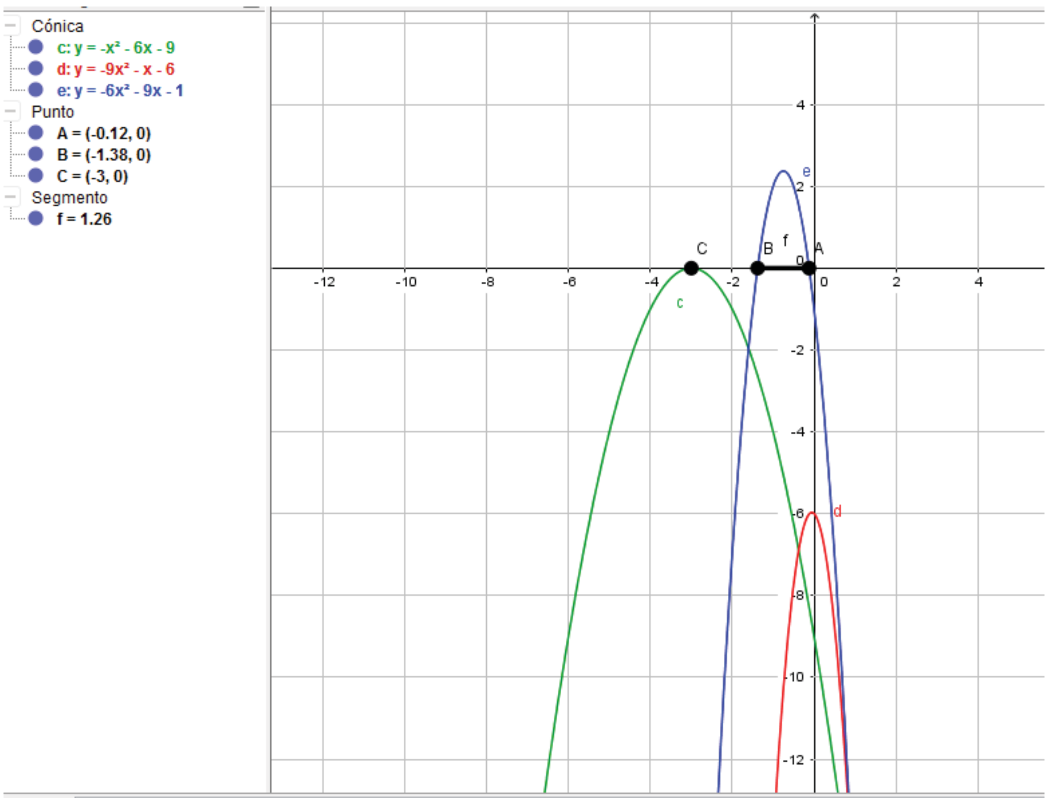
A partir de este análisis y la visualización en la gráfica, se espera que los alumnos puedan encontrar el conjunto solución de aquellas inecuaciones planteadas originalmente.

Situación similar, se plantea al tener que graficar las siguientes funciones

$$-x^2 - 6x - 9 = y \qquad (4)$$

$$-9x^2 - x - 6 = y \qquad (5)$$

$$-6x^2 - 9x - 1 = y \qquad (6)$$



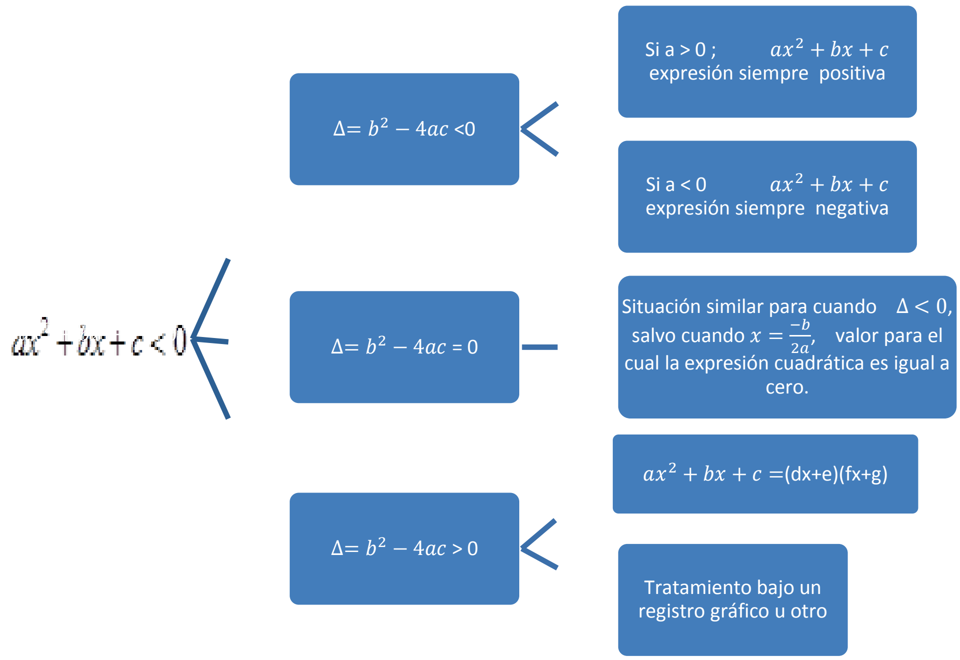
Al realizar la gráfica de las funciones cuadráticas con coeficientes negativos para aquellos que acompañan a la variable al cuadrado, notan que los valores de las imágenes de las funciones invierten su condición. La ecuación (4) toca al eje X en un solo punto que es donde se produce la igualdad $y = 0$, para el resto de gráfica la imagen de la función será siempre negativa. En la gráfica (5) se observa que ningún punto toca al eje X y las imágenes de la función son siempre negativas. Finalmente en la gráfica (3) se aprecia que son dos los puntos en que intersecta la eje X, de esta forma aquellos valores que se encuentran entre el segmento formado por los puntos de intersección con el eje X, la función es positiva, en los puntos la expresión se hace $y = 0$, y los valores de la imagen de los puntos restantes serán siempre negativa.

Pudiendo generalizar

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \cdot/(-1)$$

$$-ax^2 - bx - c > 0$$

La clase finaliza cuando se les solicita a los alumnos poder reunir los conocimientos adquiridos y los puedan plasmar en un organizador gráfico.



ACTIVIDAD CLASE 3

En esta clase se procura que el alumno pueda asociar contenidos vistos en clases y pueda resolver inecuaciones con valor absoluto.

Al resolver la ecuación $|x+1|=2$, deberá considerar la definición de valor absoluto.

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -x-1 & x<-1 \end{cases}$$

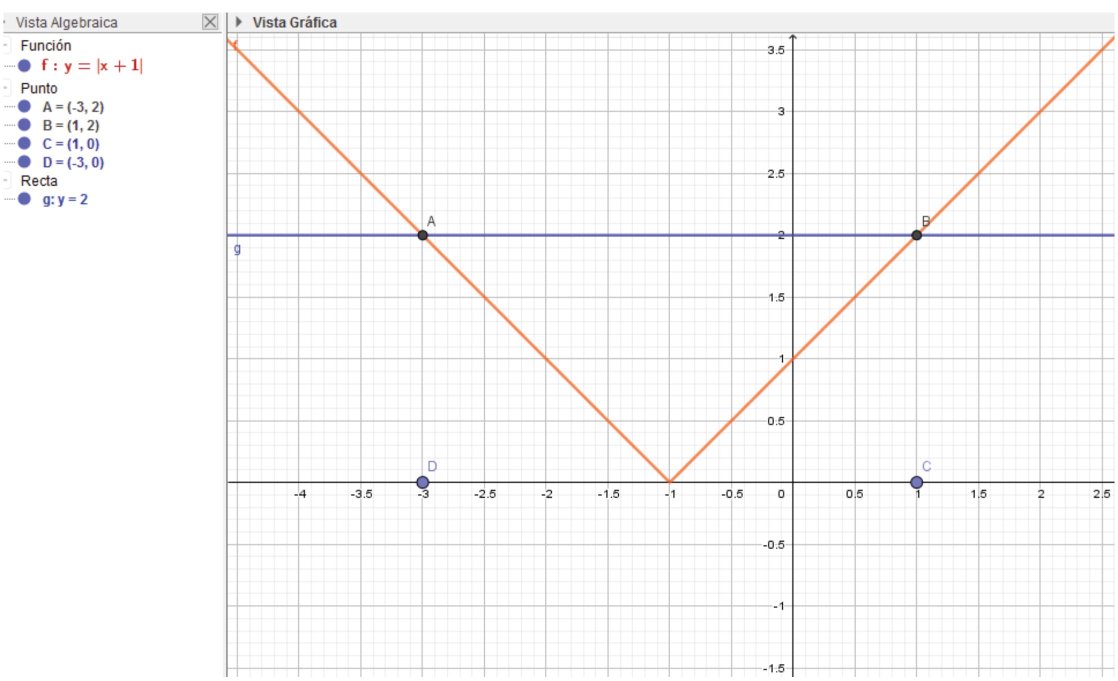
De ser así, una posible respuesta algebraica

$$x\geq -1 \Rightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$$
$$x<-1 \Rightarrow -x-1=2 \Leftrightarrow x=-3$$

Bajo un registro tabular será

	$x<-1$	$x=-1$	$x>-1$
$\lvert x+1\rvert=2$	$x=-3$	Cero (O) solución	$x=1$

Por el registro gráfico, resulta



En cualquiera de los tres registros, se observa que la solución a dicha ecuación son los valores $x=-3 \quad \wedge \quad x=1$

Para encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, se deberá poder transitar por 3 registros, como son el algebraico, el tabular y el grafico con sus respectivos tratamientos y conversiones

i) $\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|<1$

Si $\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|<1 \Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)<1 \wedge \left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)>-1\right]$, luego

$$\frac{-3}{x+3}<0 \wedge \frac{2x+4}{x+3}>0$$

$$\Rightarrow x+3>0 \wedge \frac{x+2}{x+3}>0$$

$$x>-3 \wedge \left[\left(x+2>0 \wedge x+3>0\right) \vee \left(x+2<0 \wedge x+3<0\right)\right]$$

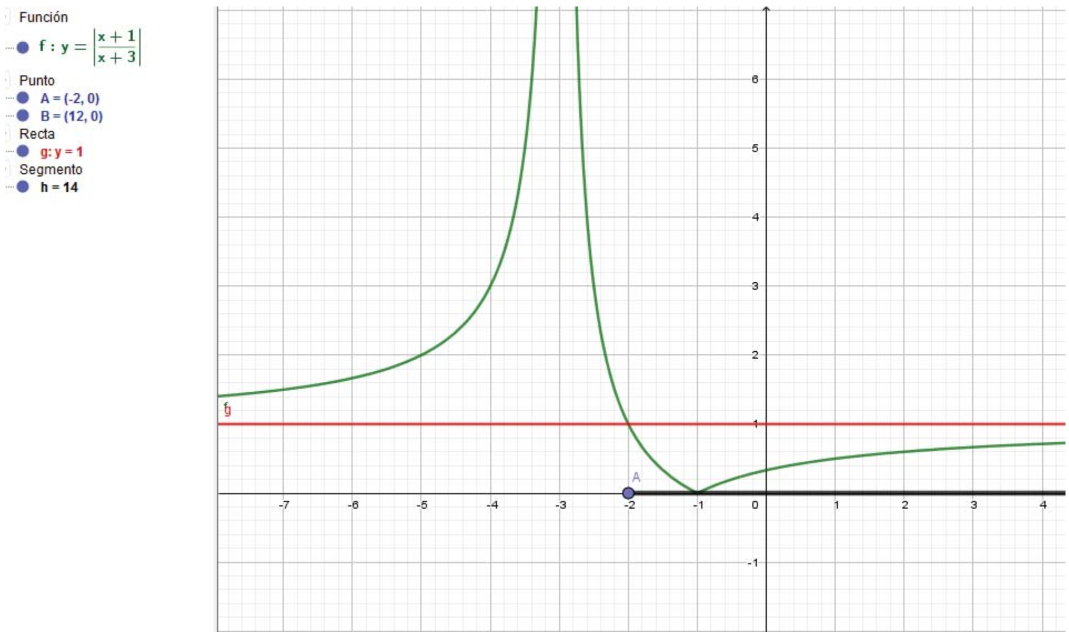
$$x>-3 \wedge \left[\left(x>-2 \wedge x>-3\right) \vee (x<-2 \wedge x<-3)\right]$$

$$x>-3 \wedge \left[x>-2 \vee x<-3\right]$$

$$x>-2$$

$$Sf:\left(x \in \mathbb{R}\right)(x>-2)$$

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<-2$	$x=-2$	$x<-2$
$\left\|\dfrac{x+1}{x+3}\right\|<1$	No cumple la condición	Asíntota para este valor	No cumple esta condición	Se produce la igualdad con 1	Se cumple la condición

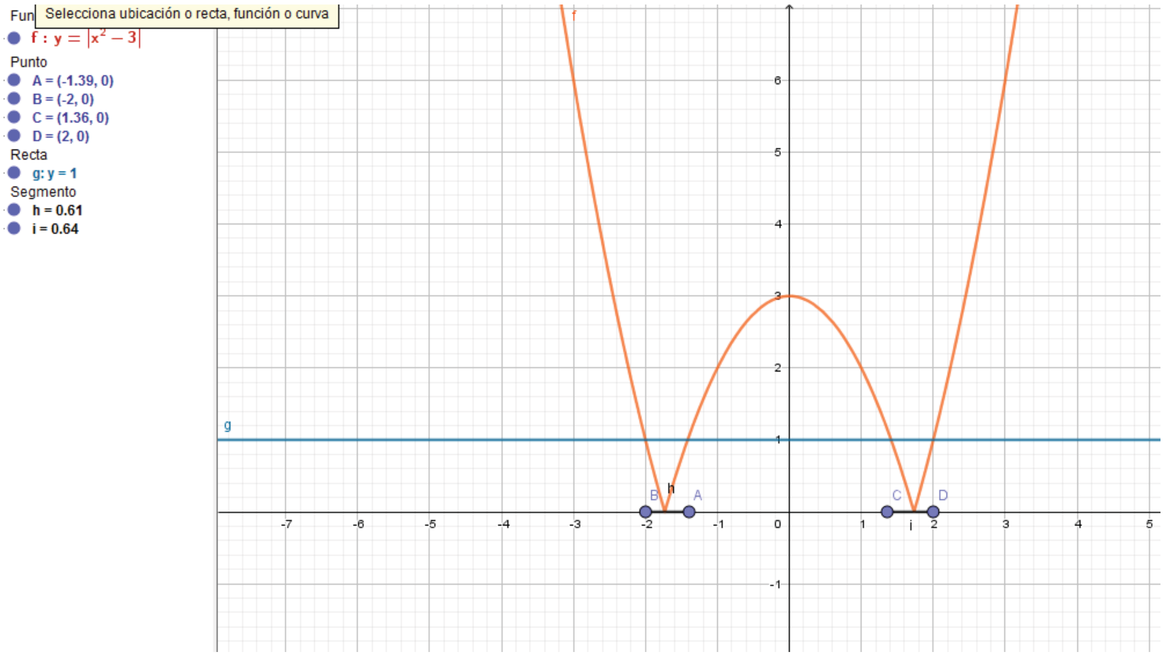


ii) $\left|x^2 - 3\right| < 1$

$$x^2 - 3 < 1 \wedge x^2 - 3 > -1$$
$$x^2 - 4 < 0 \wedge x^2 - 2 > 0$$
$$(x-2)(x+2) < 0 \wedge (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$$
$$\left[x > -2 \wedge x < 2\right] \wedge \left[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\right]$$
$$Sf : \left(x \in \mathbb{R}\right)\left(\left[x > -2 \wedge x < -\sqrt{2}\right] \vee \left[x > \sqrt{2} \wedge x < 2\right]\right)$$

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -\sqrt{2}$	$x = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$x = \sqrt{2}$
$\left|x^2 - 3\right| < 1$	No cumple la condición	Se produce la igualdad con 1	Cumple con la condición	Se produce la igualdad con 1	No cumple la condición	Se produce la igualdad con 1

	$\sqrt{2} < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$\lvert x^2 - 3 \rvert < 1$	Cumple con la condición	Se produce la igualdad con 1	No cumple la condición



CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Al elaborar la propuesta de clase, se pretende que los alumnos alcancen a evidenciar los diferentes tipos de registros de representaciones, para dar significado al conjunto solución de inecuaciones racionales, formada por expresiones algebraicas de primer grado, utilizando los axiomas de orden, pero claramente es necesario considerar algunos hechos que surgieron de esta implementación.

Para dar cuenta de ello, se ha utilizado la metodología del estudio de clase, precisamente para poder privilegiar las experiencias en la sala de clases y las estrategias utilizadas por el docente para mejorar su práctica y como consecuencia de ello el mejoramiento de los aprendizajes de nuestros estudiantes. Todo ello en el marco de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, la que tiene como principio dar cuenta del conocimiento en la medida que pueda ser capaz de elaborar por más de una representación con sus diferentes tránsitos y conversiones.

En un principio y a partir de la primera implementación, los alumnos, si bien conocen más de un registro para encontrar el conjunto solución de una inecuación de este tipo, como lo son el registro algebraico, tabular y gráfico, su dominio no es el óptimo, generan gran dificultad principalmente en la representación gráfica, originando un obstáculo en su producción.

A partir de la ejecución de este Plan de Clase se detectó un aspecto importante a considerar a la hora de resolver inecuaciones, el cual de pensar que es un conocimiento adquirido por los alumnos, deja de ser tratado como lo es hasta ahora, donde se reduce a un algoritmo repetitivo, en que se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones.

Los alumnos no logran asimilar el concepto de función lineal y esto les impide poder continuar con el proceso de la solución grafica de una inecuación. En estudios similares como lo es en los presentados por Peralta (2003), ciertas nociones como lo son pendiente de una función lineal presentan dificultad para lograr la conversión de la forma algebraica al registro gráfico.

Es por ello que esta propuesta de enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque gráfico (plano cartesiano) da significado a las inecuaciones lineales, justificando otro método distinto al algebraico para encontrar el conjunto solución de la inecuación.

Claro está que la propuesta inicial no involucraba el apoyo de algún software educativo, como es el Geogebra, sino más bien que los alumnos pudieran desarrollar el registro grafico sólo con sus propios recursos y conocimientos. Se les entrego una guía de apoyo con una cuadrícula para facilitar su gráfica, pero no se contaba que ésta autonomía pudiera generar un obstáculo para poder continuar con la propuesta.

La actividad promueve que los alumnos puedan expresar diferentes registros para encontrar el conjunto solución de una inecuación, pero la tendencia en ellos es utilizar el registro algebraico y tabular.

En cualquiera de los registros abordados, los alumnos no dan cuenta que al resolver una inecuación, en particular las inecuaciones racionales, deberían utilizar los axiomas de orden de los números reales, de manera inconsciente resuelven, en su mayoría, como si estuvieran trabajando con ecuaciones. Existe ausencia de conectores lógicos y más aún de restricciones sobre las inecuaciones.

Consecuente con lo anterior, se podría concluir que es un paso importante, para llegar a reconocer el uso de los axiomas de orden del cuerpo de los números reales en la resolución de inecuaciones racionales con expresiones algebraicas de 1er grado, el que puedan elaborar restricciones sobre las inecuaciones.

En ayuda de esta gestión, es reformulado el instrumento que recogerá información de los alumnos, tanto para la recepción de los registros, desarrollando un paso a paso de las acciones a realizar, como así también, en las diapositivas propuestas de apoyo que se explicitan los resultados deseados.

Al finalizar la activad propuesta, si bien los alumnos no logran llegar por si solos si no es con gran direccionalidad por parte del docente, se les muestra gráficamente la función asociada a la inecuación y a partir de ella se les invita a reconocer la solución de la inecuación solicitada, logrando visualizar el conjunto solución en su mayoría, generando una incertidumbre respecto de lo planteado, pues si bien los alumnos le dificulta poder construir gráficamente la función asociada a la inecuación si logran encontrar la solución de esta.

Hoy en día existen muchas alternativas tecnológicas que podrán servir de apoyo para graficar funciones pero sin duda alguna el desafío se encuentra en realizar la conversión entre estos registros.

REFERENCIAS

Alvarenga, B. (1999) *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de Estudiantes*. Tesis doctoral no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, CDMX, México.

Apolonio. (2013). *La notación universal de Hérigone*. Recuperado de http://apolonio.es/guirnalda/la-notacion-universal-de-herigone/

Apostol, T. (1976) *Análisis Matemático*. Segunda edición. Barcelona. Editorial Reverté, S. A.

Arévalo, B. Rojas, T (2016) *Un estudio de las inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo matemático.* Recuperado de http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2016.pdf

Boero, P. (1998) Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifis, Acta de Seminario - SFIDA X, vol. III, Génova, L'IREM de Nice, pp. X 3-7.

Corry, L. (1994) *La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind.* Mathesis 10: 35-68. Recuperado de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. Colombia.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf

Gutiérrez, S. (2008). *Robert Recorde: el creador del signo igual.* Revista Suma. 89-95. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/57/089-095.pdf

Lehmann, Ch. (1989). *Algebra*. Vigesimoprimera Edición. Editorial Limusa, México.

Merino, R. Muñoz, V. Pérez, B. Rupín, P. (2017). *Texto del estudiante 7° básico.* Ministerio de Educación. Chile.

Ministerio de Educación Chile. (2015a*). Curriculum en línea.* Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl

Ministerio de Educación Chile. (2015b). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio.* Recuperado de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación Chile. (2015c). *Programa de Estudio 4° Medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. Chile.

Ministerio de Educación Chile. (2005). *Núcleo relaciones Lógico-Matemáticas y cuantificación.* Recuperado de http://parvularia.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/34/2016/05/Mapa-Nucleo-Relaciones-L%C3%B3gico-Matematicas-y-Cuantificaci%C3%B3n.pdf

Monje, Y. (2017). *Tratamiento de la inecuación en el contexto escolar de Chile y Rusia.* Tesis para optar grado de Magister en didáctica de la matemática. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.

Muñoz, G., Gutiérrez, V., y Muñoz, S. (2015). *Texto del estudiante 4° Medio.* Ministerio de Educación. Chile.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012) Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36.

Parra, E (2009). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista Digital Matemática*. Educación e internet, 9, 1-40. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8085/2/Parra2009Arquimedes.pdf

Sánchez, J. (2011). Historias de Matemáticas; Las Escuelas Jónicas y Pitagórica. *Revista de Investigación Pensamiento Matemático*, 1, 1-24. ISSN 2174-0401. Recuperado de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/las_escuelas_jonica_y_pitagorica.pdf

Swokowski, E (1988). *Calculo con Geometría Analítica*, 2ª Edición,Mexico. Grupo Editorial Iberoamérica S.A.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas, *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, 8, 37-49.

Tapia, X. (1998). *Pasaje de Registros: Inecuaciones.* Tesis para grado de Magister en Didáctica de la Matemática. Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Ticona, J. (2014). *Fundamentos de la Epistemología*. Recuperado https://prezi.com/wg4wrn0nborr/fundamentos-de-la-epistemologia/

Triana, J. Moreno, M. (2013). *Una propuesta de enseñanza para la resolución de inecuaciones por el método gráfico, a través del software Geogebra.* Tesis para grado de especialista en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Bogotá D.C. Colombia

Torres, C. (2009). *La matemática en la antigua Grecia*. Recuperado https://edualgebra.wordpress.com/2009/04/09/la-matematica-en-la-antigua-grecia/