

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas



**Una secuencia didáctica para el tratamiento de la
circunferencia como lugar geométrico,
considerando métricas discretas y la euclidiana**

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGISTER EN DIDACTICA DE LA MATEMATICA**

De: Camila Hernández Ereche

Profesora Guía: Sra. Patricia Vásquez Saldías

2017

Presentación

La secuencia didáctica consiste en la planificación de tres clases. Una de las clases se desarrolló con estudiantes de tercer año medio en un colegio particular subvencionado de la ciudad de Coquimbo, para llevar a cabo este estudio se consideraron los criterios metodológicos de un Estudio de Clase lo que permitió realizar la planificación, ejecución y reflexión de la segunda clase de la secuencia didáctica.

El estudio de clase se realizó de acuerdo al marco teórico los Modos de Pensamiento de Anna Sierpiska (2000), a partir de los resultados obtenidos se analiza cómo los estudiantes comprenden la circunferencia de acuerdo a los modos de pensar que propone el marco teórico. Los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas de la secuencia didáctica pueden presentar la activación o el tránsito por los modos Sintético – Geométrico, Analítico – Aritmético y Analítico – Estructural.

La propuesta de innovación permite a los estudiantes desarrollar la *circunferencia* como *lugar geométrico* por medio de la métrica continua como es la Euclídiana y métricas discretas tales como la distancia de Manhattan y la distancia de Chevyshov, también conocidas como la distancia del taxista y la distancia del tablero de ajedrez.

Índice

Contenidos	N° de página
Presentación	2
Índice	3
1. Introducción	5
2. Problemática	6
2.1 Objetivo general	7
2.2 Objetivos específicos	7
2.3 Antecedentes	8
3. Objeto matemático	9
3.1 Saber erudito	9
3.2 Saber escolar	9
3.3 Diferentes definiciones de la circunferencia	10
3.4 Barrido curricular	11
3.5 Análisis de textos	13
3.6 Aspecto epistemológico	14
4. Marco teórico: Los Modos de Pensamiento	16
4.1 Justificación del marco teórico	16
4.2 Descripción del marco teórico	17
5. Secuencia didáctica	20
5.1 Clase N° 1	20
5.2 Análisis a priori de la clase N° 1	21
5.2.1 Respuesta experta	21
5.2.2 Posibles estrategias	23
5.2.3 Matemática en juego	26
5.2.4 Dificultades, errores y devoluciones	27
5.3 Plan de clase	29
5.4 Clase N° 2	30
5.5 Análisis a priori de la clase N° 2	32

5.5.1	Respuesta experta	32
5.5.2	Posibles estrategias	33
5.5.3	Matemática en juego	34
5.5.4	Dificultades, errores y devoluciones	35
5.6	Plan de clase	37
5.7	Clase N° 3	38
5.8	Análisis a priori de la clase N° 3	39
5.8.1	Respuesta experta	39
5.8.2	Posibles estrategias	40
5.8.3	Matemática en juego	41
5.8.4	Dificultades, errores y devoluciones	42
5.9	Plan de clase	43
5.10	Objetivos de las clases	45
6.	Estudio de clase: Clase N° 2	46
6.1	Metodología	46
6.2	Sujetos de investigación	47
6.3	Recogida de datos	47
6.4	Categorías de análisis	48
6.5	Intención de la clase implementada	50
6.6	Análisis de resultados	51
6.7	Resultados principales	60
7.	Conclusiones	61
	Bibliografía	63
	Anexos	66
	Tabla 9	66
	Situación N° 1	68
	Situación N° 2	69
	Situación N° 3	70

1. Introducción

El objeto matemático que se desarrolla durante la secuencia didáctica es la *circunferencia* como *lugar geométrico*, cada clase está planificada para ser realizada en 45 minutos con el propósito de desarrollar la circunferencia desde distintas perspectivas, es decir, utilizando la métrica euclidiana, la métrica de Manhattan y Chebyshev. En el presente documento se detallan seis capítulos los cuales abordan los temas siguientes:

- Problemática, objetivo general, objetivos específicos y antecedentes que sustentan la secuencia didáctica.
- Objeto matemático, saber erudito, saber escolar, diferentes definiciones de la circunferencia, barrido curricular, análisis de textos y aspectos epistemológicos.
- Justificación del marco teórico y descripción del marco teórico los Modos de Pensamiento.
- Clase, análisis a priori (respuesta experta, posibles respuestas, matemática en juego, dificultades, errores y devoluciones), plan de estudio y los objetivos de cada clase involucrada en la secuencia didáctica.
- Estudio de clase, metodología, sujetos de investigación, recogida de datos, categorías de análisis, intención de la clase implementada, análisis de resultados se elabora en dos etapas, la primera corresponde al análisis de las producciones escritas de los estudiantes y en la segunda etapa se analizan las evidencias audio/visuales, posteriormente se estipulan los principales resultados.
- Conclusiones, bibliografía, anexos que incluyen algunas producciones de los estudiantes evidenciando las categorías de análisis de acuerdo al marco teórico y las situaciones para desarrollar las clases de la secuencia didáctica.

2. Problemática

La problemática presente que motiva a diseñar una secuencia didáctica está focalizada en estudiantes de tercer año medio que no logran establecer una comprensión sobre el concepto de *lugar geométrico* en la definición de *circunferencia*.

Molfino y Ledezma (2011) señalan que los estudiantes presentan dificultades al momento de reconocer la figura hallada como un lugar geométrico, sin embargo otros estudiantes no relacionan sus propiedades algebraicas con su representación geométrica o no reconocen que la figura pueda representarse de manera analítica y aritmética.

El currículo no hace alusión al tratamiento de los elementos de la geometría analítica se trabajen con diferentes distancias, pero la literatura indica que la definición de la circunferencia más recurrente es la señalada por Chamorro (2013): “una circunferencia, de centro O y radio r , es, en el plano, el conjunto de puntos situados a una distancia r de O .” (p. 59). Los estudiantes acceden a comprender la circunferencia desde una sola perspectiva y sólo en la geometría euclidiana, reduciendo las posibilidades de entender la circunferencia como un lugar geométrico de manera más acabada.

Por lo tanto, con base a lo señalado se hace necesario buscar estrategias que permitan diseñar una secuencia didáctica que involucre el objeto matemático de la circunferencia que proporcione a los estudiantes conocerla y comprenderla desde otras representaciones, considerando una perspectiva más amplia.

2.1 Objetivo general

El objetivo general de la secuencia didáctica es *proponer una secuencia didáctica para la enseñanza de la circunferencia en estudiantes de tercer año medio.*

2.2 Objetivos específicos

A continuación se detallan los objetivos específicos de la presente investigación.

- Diseñar una secuencia didáctica que permita desarrollar el concepto de circunferencia en estudiantes de tercer año medio.
- Implementar la segunda clase de la secuencia didáctica para la obtención de resultados.
- Analizar la clase implementada utilizando instrumentos que permitan objetivizar la actividad realizada.
- Indagar los modos de pensar que tienen los estudiantes con base a los resultados obtenidos.

2.3 Antecedentes

El siguiente estudio es relevante para esta investigación debido a que desarrolla parte de nuestra problemática, considera que los estudiantes no reconocen la representación geométrica como un conjunto de puntos.

Molfino, V. y Ledezma, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Revista Educación matemática*, 23(1), 37-61.

La investigación de Oller reafirma la necesidad de proporcionar a los estudiantes diversas perspectivas sobre el desarrollo de la circunferencia con el fin de comprenderla como un lugar geométrico. El autor plantea una situación problemática que permite desarrollar el concepto de lugar geométrico utilizando la geometría analítica y sintética.

Oller, A. (2009). Otra manera de ver la circunferencia. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, 72, 57-62

El siguiente antecedente considera que los estudiantes deben transitar por los tres modos de pensamiento planteados por Sierpinska, para así lograr comprender el concepto de lugar geométrico.

Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2013). Las cónicas en la geometría del taxista, una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 666.

3. Objeto Matemático

El objeto matemático a estudiar es la *circunferencia*, el saber erudito fue tomado del texto:

- Cárdenas, R. (2013). *Estudio de la métrica de Manhattan. segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista* (tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

El saber escolar fue extraído del texto:

- Blanco, M., Cáceres, C., Calderón, F. y Jiménez, M. (2009). *Texto del alumno matemática 8° básico*. Santiago, Chile: Santillana

3.1 Saber erudito

Definición: Sea O es un punto del plano y r un número real positivo, la circunferencia es el conjunto de puntos $P(x,y)$ tal que la distancia P a O es igual a r , donde O es el centro y r es el radio de la circunferencia, esto se puede expresar como:

$$C = \{P(x,y)/d(P,O) = r\}$$

3.2 Saber escolar

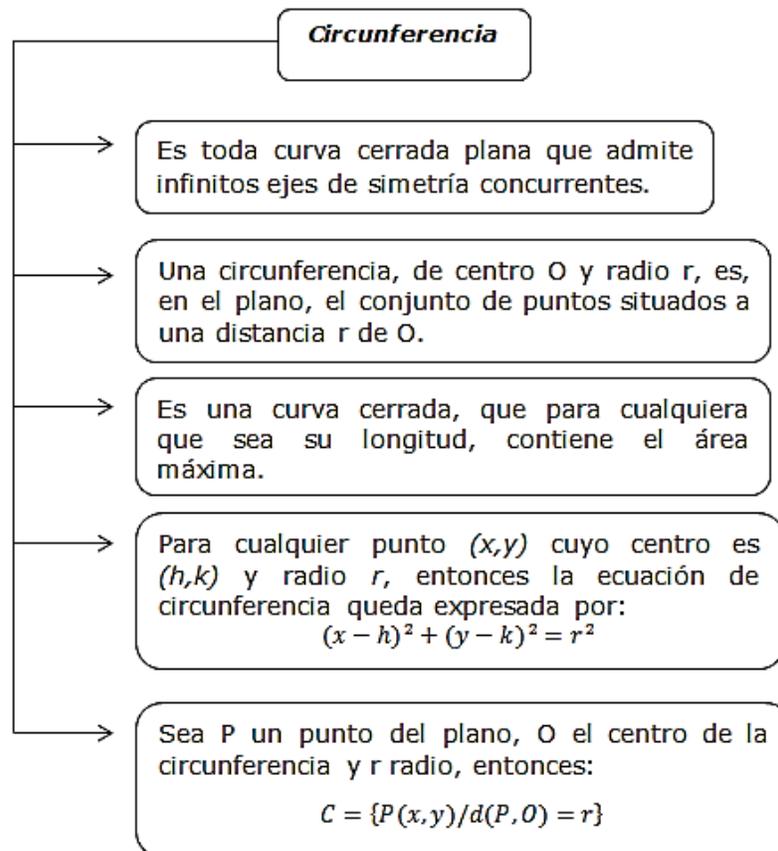
Definición: Una circunferencia está formada por todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (O).

Se puede observar que la distancia entre ambos saberes resulta ser alejada ya que la circunferencia desde el saber sabio se define en notación de conjunto y existe una clara precisión de los elementos de la circunferencia como el radio, en cambio en el saber escolar se deduce esta información. Ambas definiciones hacen referencia a que la circunferencia es un lugar geométrico señalando que es un conjunto de puntos.

3.3 Diferentes definiciones de la circunferencia

Considerando la distancia euclidiana se presentan algunas de las tantas definiciones asociadas a la circunferencia, estas se establecen de acuerdo al contexto en que se estudian.

Esquema 1



La circunferencia se puede comprender bajo distintos conceptos matemáticos según el contexto o la temática abordada, como las transformaciones isométricas, áreas de figuras planas y en cursos más abstractos desde su analítica.

3.4 Barrido curricular

El objeto matemático estudiado tiene un tratamiento progresivo a lo largo del actual currículum chileno. Por lo anterior, para realizar una propuesta acorde, fue necesaria una revisión detallada de cada programa de estudio correspondiente al año 2017.

A continuación se presenta un resumen del tratamiento del objeto matemático a lo largo de la escolaridad chilena.

Tabla 1: *Barrido curricular*

Nivel	Tratamiento de objeto
1° básico	Los estudiantes identifican los círculos como “una línea curva” e identifican objetos.
2° básico	Los estudiantes construyen circunferencias con materiales concretos y se agrega el concepto de semi-círculo.
3° básico	Los estudiantes comprenden la relación entre las figuras 2D y 3D, como cilindros, conos y esferas, los cuales están formados por caras curvas.
4° básico a 6° básico	No hay objetivos de aprendizajes en relación a la circunferencia.
7° básico	Se define el círculo, circunferencia y sus elementos, calculan el área y longitud aplicando una fórmula.
8° básico	Calculan áreas y volúmenes de los tres cuerpos redondos trabajados en 3° básico.
1° medio	No se encuentran objetivos relacionados con la circunferencia.
2° medio	Estudian teoremas de los ángulos y demuestran teoremas de las cuerdas, tangentes, secantes en la circunferencia.
3° medio	En su plan electivo se estudia la circunferencia de manera analítica.
4° medio	Calculan volúmenes de cuerpos generados por la rotación de rectángulos y triángulos rectángulos.

En la *tabla 1* se puede apreciar que los aprendizajes esperados están progresivamente ordenados, sin embargo existen años de la escolaridad que abandonan el estudio continuo de la circunferencia, cabe señalar que en un comienzo de la escolaridad no se especifica la diferencia entre círculo y circunferencia, sólo se enseña de manera concreta, en 7° básico se establece dicha diferencia.

3.5 Análisis de textos

A continuación se detallan las definiciones de la circunferencia que se encuentran en algunos textos de estudios para la enseñanza básica.

- *Texto: "Puentes del saber Matemática 7mo Básico" (2014) Editorial Santillana*

El texto comienza la unidad con ejemplos de la vida cotidiana, específicamente lo asemejan a una rueda de la fortuna.

- *Texto: "Se protagonista, Matemática 7° Básico". (2014). Editorial SM*

A diferencia de los otros textos de estudio, en este se comienza directamente con las definiciones, para luego realizar cálculos de área y perímetro con las fórmulas dadas.

- *Texto: "Matemática 8° básico." (2014) Editorial Galileo*

Si bien, junto con la definición de circunferencia se realiza una notación en conjuntos, pero muestra un error en la definición de círculo, ya que considera todos los puntos menores a una constante y no menor igual.

- *Texto: "Geometría octavo año básico" (2016)*

En este texto de estudio, al ser de apoyo complementario a los textos oficiales, se definen los conceptos de círculo y circunferencia sin luego avanzar hacia el cálculo de área y perímetro.

En relación a los textos escolares seleccionados se observa que las definiciones de circunferencia son muy similares entre sí, pues la consideran como el conjunto de puntos o lugar geométrico que equidistan de un punto fijo llamado centro. Sin embargo, la introducción que tiene los estudiantes de enseñanza básica para este objeto matemático puede ser contextualizando la definición a la cotidianidad, o bien señalar directamente su definición para luego desarrollar cálculos de longitud.

3.6 Aspecto epistemológico

El origen de la palabra *circunferencia* proviene del latín *circumferentia* lo que hace referencia al contorno de una superficie puesto que la circunferencia es la longitud más pequeña que encierra a una superficie plana. Como señalan Sales y Banyuls (2010) en curvas peligrosas, para los Dioses de la antigüedad, la circunferencia era considerada la curva más perfecta, y Aristóteles la apreciaba como la forma de las cosas más sagradas refiriéndose a las orbitas de los astros, la Tierra y el Universo.

Las antiguas civilizaciones desarrollaron importantes avances en la matemática, Maza (2010) señala que los matemáticos consideraban la geometría egipcia superior a la mesopotámica, hasta que descubrieron las tablillas de Susa y confirmaron lo contrario. En las tablillas se encontró no solo que la aproximación que daban los babilonios para la razón del perímetro del hexágono regular a la longitud de la circunferencia circunscrita era tan aceptable como la de los egipcios, es más, también daban valores con dos cifras decimales correctas en algunas de las comparaciones entre las áreas y los cuadrados de los lados de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis y siete lados.

Carmona (2011) cuenta que Hippias de Elis, Peloponeso y Dinostrato hermano de Menecmo y discípulo de Platón se asocian para resolver el problema de la cuadratura del círculo utilizando una curva mecánica llamada Cuadratriz. Sin embargo, esta curva se construye con métodos mecánicos y fue también muy criticada por suponer, en primer lugar, como conocida la propiedad buscada, ya que se requería saber la relación entre una línea y un arco de círculo. Está claro que Dinostrato nunca proclamó que la cuadratriz fuera un método plano para cuadrar el círculo. Aristóteles en el siglo IV a.C. en su obra *De Caelo* sustenta el porqué de la

esfericidad de la tierra y cita un valor muy cercano al real, en sus palabras: "Además, todos deben ser similares a uno de ellos, y a simple vista se comprueba que la luna es esférica: si no, en efecto, no crecería ni menguaría adoptando la mayor parte de las veces forma de lúnula o biconvexa, y una sola vez, de semicírculo. De modo que, si uno de los astros lo es, está claro que también los otros serán esféricos."

Euclides (300 a.C) en su Libro Los Elementos en el volumen III trata los Teoremas relativos a la circunferencia, las cuerdas, las tangentes y la medición de ángulos. Consta de 11 definiciones y 37 proposiciones, 5 de las cuales son problemas y las otras teoremas. El Libro IV tiene 16 proposiciones, donde hay figuras inscritas y circunscritas en círculos.

Para el desarrollo de la humanidad la circunferencia está relacionada con uno de los inventos más importante: la rueda, permitiendo el traslado de objetos pesados. A lo largo de la historia la rueda ha sido mejorada de acuerdo a las distintas necesidades que le han surgido al ser humano. En el año 8.000 a.C los sumerios la utilizaron en trineos, luego en el año 2.000 a.C. los egipcios y la cultura Andronovo mejoraron la rueda para que su uso se diera en la India y en Europa alrededor del año 1.400 a.C.

Se puede observar que la circunferencia otorga soluciones para la sociedad que marcan hitos importantes en el progreso de la humanidad.

4. Marco teórico: Los Modos de Pensamiento

4.1 Justificación del Marco Teórico

De acuerdo a las distintas posibilidades que se tienen para abordar el objeto matemático de la circunferencia como lugar geométrico, y considerando la estrategia didáctica que se ha elegido en este estudio de clases, el marco teórico Teoría de los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000) logra abordar la naturaleza de la problemática. Parraguez (2012) señala que “los modos de pensamiento no sólo constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, sino que también actúan como herramientas heurísticas al resolver problemas”. (p.17)

La circunferencia como un lugar geométrico, es decir, un conjunto de puntos que cumplen la característica de encontrarse a igual distancia de un punto fijo. Asimismo, las relaciones que se pueden enunciar dadas las distintas posiciones de la configuración de puntos en el plano y las relaciones aritméticas que se pueden activar bajo una métrica establecida, en este caso la distancia del taxista, nos posicionan en los distintos modos que esta teoría cognitiva propone para el estudio de la comprensión de un concepto matemático en estudiantes de enseñanza media.

La enseñanza tradicional chilena enfatiza en reconocer la circunferencia desde una mirada analítica. Bonilla, Parraguez y Solanilla (2013) consideran que el enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas propicia la pérdida de sus definiciones como lugares geométricos. La teoría Modos de Pensamiento proporciona a los estudiantes comprender la circunferencia desde distintas dimensiones.

4.2 Descripción del Marco Teórico

En el desarrollo del pensamiento algebraico, los modos de pensar planteados por Sierpinska (2000) no tienen un orden secuencial que permita priorizar un modo de otro, es importante considerar que los modos de pensar se deben utilizar de acuerdo al contexto matemático. Sin embargo, la interacción entre los tres modos de pensamiento proporciona una mayor comprensión del objeto matemático.

Asimismo, la teoría proporciona una comprensión desde distintas perspectivas del objeto, considerando el pensamiento práctico desde su representación gráfica, y el pensamiento teórico como el álgebra y las propiedades que describen el objeto.

A continuación se esquematizan los modos de pensar:

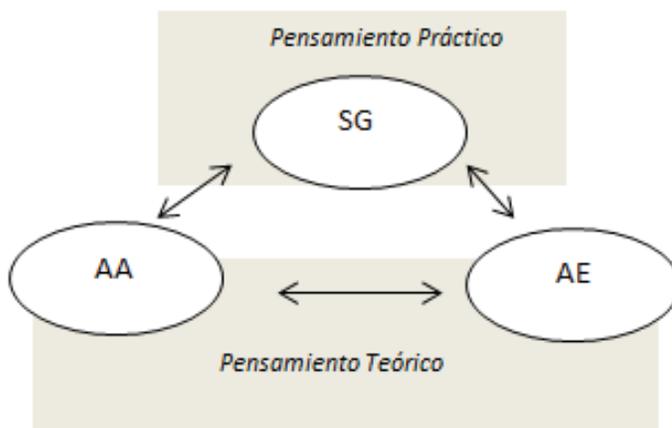


Figura 1: Representación de los modos de pensamiento de acuerdo a su perspectiva teórica o práctica.

Astorga (2015) define los modos de pensar como:

- *Sintético – Geométrico (SG)*: Modo desde el pensamiento práctico, el cual describe el objeto en su forma, desde la representación gráfica convencional, utilizando elementos de la geometría como puntos, líneas, curvas, planos, por mencionar algunos.
- *Analítico – Aritmético (AA)*: Modo adscrito al pensamiento teórico, utiliza el álgebra para describir el objeto, a través de fórmulas, relaciones numéricas o ecuaciones.
- *Analítico – Estructural (AE)*: Modo de pensamiento teórico, que utiliza la axiomática, propiedades o invariantes para describir el objeto.

En relación a la situación implementada a los estudiantes de tercer año medio sobre la comprensión de la *circunferencia* como *lugar geométrico* utilizando la métrica del taxista, interpretamos los modos de pensamiento, desde la teoría de Sierpinska, como:

- *Sintético – Geométrico (SG)*: Modo en que la circunferencia se representa gráficamente como un conjunto discreto de puntos que equidistan de un punto fijo.

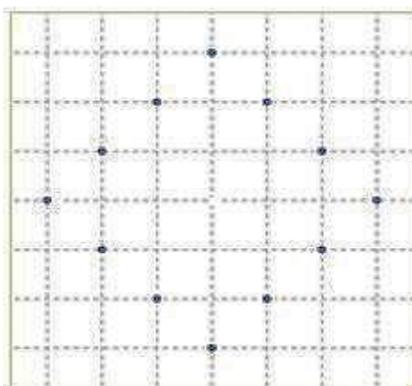


Figura 2: Representación de los modos de pensamiento de acuerdo a su perspectiva teórica o práctica.

- *Analítico - Aritmético (AA)*: Modo en que la circunferencia es concebida como un conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación $|x - h| + |y - k| = r$, donde (h,k) es el centro y r es el radio de la circunferencia. Este modo permite utilizando una fórmula para calcular.
- *Analítico - Estructural (AE)*: Modo en que la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto que está fijo, que se denomina el centro de la circunferencia. La distancia constante se conoce como radio de la circunferencia. Este modo proporciona definir la circunferencia de acuerdo a sus características o propiedades.

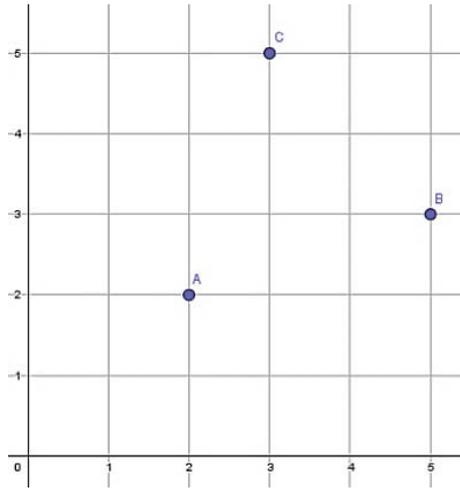
5. Secuencia didáctica

5.1 Clase N° 1

Las actividades matemáticas que se proponen en la clase son las siguientes.

Situación

En un condominio contratan una alarma comunitaria que abarca todos los puntos que se encuentran a menor e igual distancia del aparato, el sector de seguridad fue limitado y coincide con la longitud que se forma con las tres casas ubicadas en el siguiente plano. Ayuda a los ciudadanos a ubicar el aparato de seguridad para que abarque hasta las casas señaladas en la siguiente imagen.



- Ubica el aparato de seguridad
- ¿Cuál es la distancia que existe desde el aparato de seguridad al límite formado por las casa?
- En el límite de seguridad ubica una cuarta casa

5.2 Análisis a priori de la Clase N° 1

5.2.1 Respuesta experta

- **Pregunta a):** Ubica el aparato de seguridad
- **Respuesta experta:** El aparato de seguridad se encuentra en el punto con coordenadas $\left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$

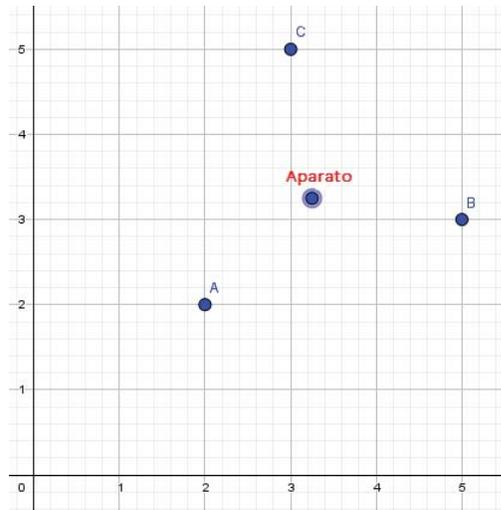


Figura 3: El centro de la circunferencia formado por tres puntos es representado por el aparato ubicado en el plano cartesiano

- **Pregunta b):** ¿Cuál es la distancia que existe desde el aparato de seguridad al límite formado por las casa?
- **Respuesta experta:** La distancia que existe entre el aparato de seguridad y el límite formado por las casas es de $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ unidades.
- **Pregunta c):** En el límite de seguridad ubica una cuarta casa
- **Respuesta experta:** Pueden ubicar infinitas casas sobre la circunferencia formada por tres puntos (casas)

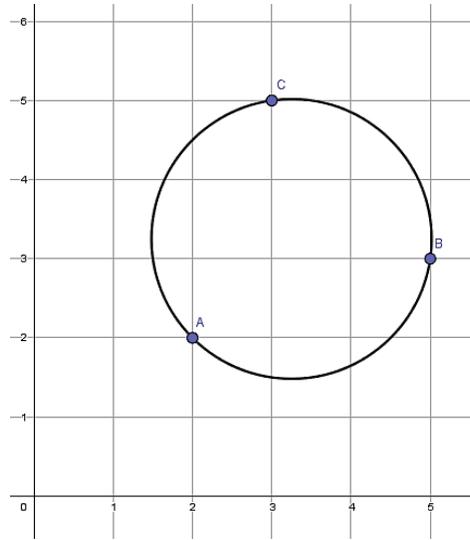


Figura 4: Se encuentra representada la circunferencia formada por tres puntos planteados en la situación problemática.

5.2.2 Posibles estrategias

Estrategia N° 1:

Los estudiantes utilizan la mediatriz entre los puntos AB, BC y CA. Puede ser que utilice dos o tres mediatrices. En la intersección de las mediatrices ubican el aparato de seguridad, este punto se entiende como el centro de la circunferencia, pues equidista de los tres puntos A, B y C.

Los estudiantes pueden ayudarse con herramientas de medición o con un procesador geométrico como GeoGebra.

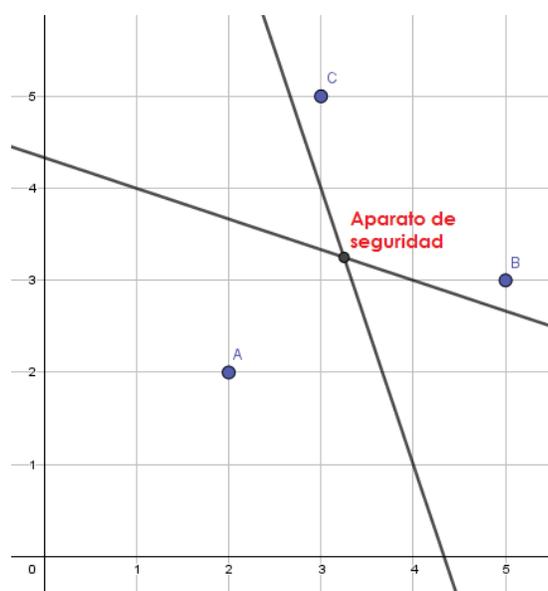


Figura 5: Representación de la estrategia N° 1 utilizando el software GeoGebra

Estrategia N° 2:

La actividad puede desarrollarse de manera algebraica, considerando que los puntos A, B y C satisfacen la ecuación de la circunferencia, para esto se establece lo siguiente:

- Ecuación de la circunferencia que satisface al punto A:

$$(2 - x)^2 + (2 - y)^2 = r^2$$

- Ecuación de la circunferencia que satisface al punto B:

$$(5 - x)^2 + (3 - y)^2 = r^2$$

- Ecuación de la circunferencia que satisface al punto C:

$$(3 - x)^2 + (5 - y)^2 = r^2$$

Luego, determinan las ecuaciones de las mediatrices:

- Ecuación de la mediatriz entre los puntos A y B: $3x + y = 13$
- Ecuación de la mediatriz entre los puntos B y C: $x - y = 0$
- Ecuación de la mediatriz entre los puntos C y A: $x + 3y = 13$

Desarrollando los sistemas de ecuaciones, se determina el punto de intersección de las mediatrices correspondiente al centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. A través de un sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\text{centro de la circunferencia: } \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right) = (3,25; 3,25)$$

Finalmente, ubica el aparato de seguridad en el plano.

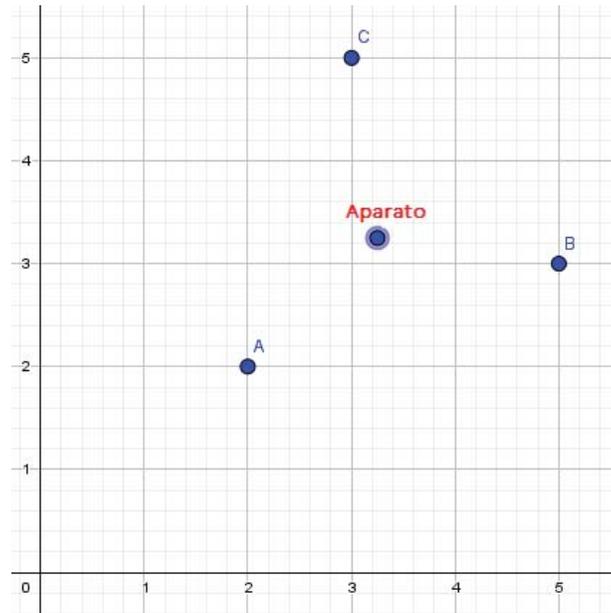


Figura 6: Se ubica el aparato en el centro de la circunferencia, el que fue determinado de manera algebraica.

5.2.3 Matemática en juego

La matemática en juego corresponde a la definición de circunferencia que se utilizó en la clase implementada (ver página 34). Lo que diferencia a la clase N° 1 con las otras dos clases es la distancia, es que en este caso la métrica utilizada es euclidiana, para esto se consideran los puntos $A(x_1, y_2)$ y $B(x_2, y_2)$ entonces la distancia queda definida por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Los estudiantes pueden involucrar la siguiente matemática:

- Definición de la circunferencia
- Elementos de la circunferencia como el centro y radio
- Distancia entre dos puntos
- Mediatriz
- Ecuación de la circunferencia
- Sistema de ecuaciones

5.2.4 Dificultades, Errores y Devoluciones

En las situaciones problemáticas que se proponen para la secuencia didáctica, los estudiantes pueden cometer dificultades y/o errores de la misma índole, puesto que en cada clase se desarrolla el mismo objeto matemático: la *circunferencia* desde distintas perspectivas, uno de los errores identificados por Rico (1995) son los datos mal utilizados, para esto considera que el estudiante olvida algún dato necesario para la solución o se le asigna a una parte de la información un significado inconsciente o bien se hace una lectura incorrecta del enunciado. Los estudiantes pueden mal interpretar la distancia entre dos objetos, es posible que cometan errores al calcular la distancia por tener la dificultad de no haber trabajado con una distancia distinta a la euclidiana.

A continuación se especifican las dificultades y errores con sus respectivas devoluciones, las que se encuentran detalladas en la siguiente tabla.

Tabla 2: *Dificultades, errores y devoluciones para la clase N° 1*

Dificultades	Errores	Devoluciones
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en reconocer el centro de la circunferencia 	<ul style="list-style-type: none"> • No encontrar el centro de la circunferencia 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿De qué forma el aparato proporciona seguridad?
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en ubicar el aparato de manera visual 	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicar puntos en el plano cartesiano 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo ubicar el aparato de manera que proporcione seguridad de manera equitativa?
<ul style="list-style-type: none"> • Confundir la unidad de medida 	<ul style="list-style-type: none"> • Medir la distancia con regla 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo puedes probar que el aparato se encuentra en la ubicación correcta?
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en no recordar la ecuación de la circunferencia 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar cálculos incorrectos 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué conceptos involucra la ecuación de la circunferencia?
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en recordar la distancia entre dos puntos 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar cálculos incorrectos 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo puedes deducir la distancia que existe entre dos puntos?
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en recordar la definición de circunferencia 	<ul style="list-style-type: none"> • No reconocer el conjunto de puntos como lugar geométrico 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué elemento forma la circunferencia?

5.3 Plan de clase

El plan de clase propuesto para el desarrollo de la clase N° 1, es el siguiente:

Inicio (5 min)

El profesor comienza la clase preguntando a los estudiantes: ¿Qué geometría conocen?, se espera que los estudiantes respondan que conocen la geometría euclidiana. Luego, se le pide a un estudiante que lea el problema en voz alta, el profesor pregunta si existe alguna duda con respecto a lo leído.

Desarrollo (30 min)

El profesor recorre la sala escuchando las posibles estrategias y soluciones de los estudiantes. En relación a la primera pregunta, se sugiere pedir dos voluntarios para explicar sus posibles soluciones y proporcionar al curso una discusión para validar dichos procedimientos. Luego, el profesor pregunta a los estudiantes ¿cuántas casas pueden ubicar sobre el límite de seguridad?, se espera que los estudiantes contesten que sean infinitas casas debido a que el límite de seguridad es una circunferencia formada por infinitos puntos.

Cierre (10 min)

Finalmente, el profesor institucionaliza la situación problemática, comentando: el límite de seguridad es una circunferencia, pueden visualizar que es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, en este caso, el conjunto de puntos son las casas que se encuentran a $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ unidades de un punto fijo donde se ubica el aparato de seguridad.

Durante la clase N° 1, se sugiere utilizar el siguiente **material complementario**:

- La situación se entrega a cada estudiante como guía de trabajo
- El profesor proyecta en la pizarra el plano que se encuentra en la guía

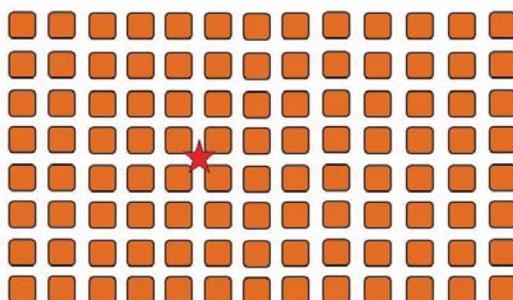
5.4 Clase N° 2

En la segunda clase de la secuencia didáctica se permite desarrollar la circunferencia utilizando la Geometría del taxista. Se propone la siguiente situación problemática:

Situación

El planeta Cabbie, que se encuentra a 179 millones de años luz de la Tierra, posee una gran particularidad, ya que la superficie de su terreno se encuentra lleno de microorganismos que le proveen oxígeno a todo el planeta (recuadros blancos). Y, en la intersección de las cuadras hay una sola casa. Por esta razón, los habitantes de Cabbie han debido idear una estrategia para movilizarse por el territorio sin dañar a los microorganismos.

Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.



- Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar
- ¿Cuántas casas son?
- ¿Qué característica tienen en común todas las casas?

5.5 Análisis a priori de la Clase N° 2

5.5.1 Respuesta Experta

- **Pregunta a):** *Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar*
- **Respuesta experta:** Los puntos a los que debe censar Muff son todos los puntos que están a una distancia mínima de tres cuadras, se encuentran representados en el plano de Cabbie

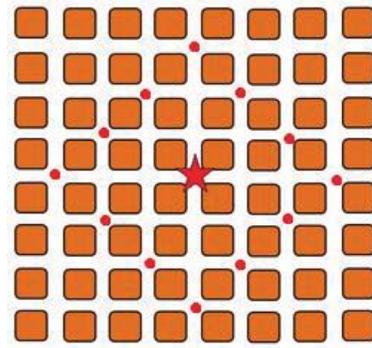


Figura 7: Representación de la circunferencia utilizando la métrica del taxista

- **Pregunta b):** *¿Cuántos puntos son?*
- **Respuesta experta:** *12 puntos*
- **Pregunta c):** *¿Qué característica tienen en común todos estos puntos?*
- **Respuesta experta:** *Todas las casas equidistan de un punto fijo (local de censo), al igual que la definición de la circunferencia.*

5.5.2 Posibles Estrategias

Estrategia N° 1: Los estudiantes marcan el recorrido de las tres cuadras por el planeta de Cabbie y luego marcan el punto donde Muff debe censar. Posteriormente, cuenta la cantidad de puntos lo que corresponde a 12.

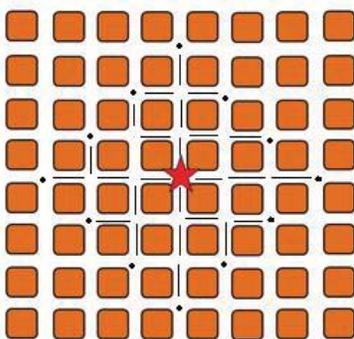


Figura 8: Se representa por segmentos negros los recorridos que marcan los estudiantes para avanzar tres cuadras desde el local del censo hasta todas las casas que Muff debiese censar.

Estrategia N° 2: Los estudiantes sólo cuentan las tres cuadras y marcan los puntos a los que debe censar Muff. Posteriormente, cuenta la cantidad de puntos lo que corresponde a 12.

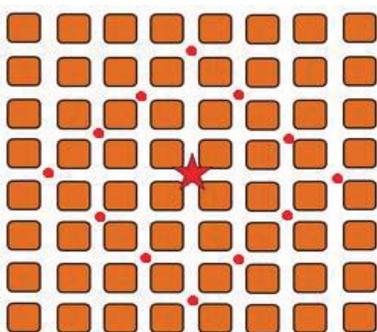


Figura 9: Los estudiantes no marcan los recorridos realizados para representar las tres cuadras que se encuentran del local de censo, sin embargo cuentan tres cuadras y dibujan los puntos.

5.5.3 Matemática en Juego

La circunferencia

Los conceptos matemáticos que se involucra en la secuencia didáctica es la circunferencia. Para esto la definiremos como: Sea O es un punto del plano y r un número real positivo, la circunferencia es el conjunto de puntos $P(x,y)$ tal que la distancia P a O es igual a r , donde O es el centro y r es el radio de la circunferencia, esto se puede expresar como:

$$C = \{P(x,y)/d(P,O) = r\}$$

Distancia mínima

La distancia mínima también conocida como la distancia del taxista se define para los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

En general la distancia del taxista puede definirse como la trayectoria mínima circulable entre dos puntos del territorio.

Los estudiantes pueden involucrar la siguiente matemática:

- Definición de la circunferencia
- Elementos de la circunferencia como el centro y radio
- Distancia entre dos puntos
- Intersección entre rectas

5.5.4 Dificultades, Errores y Devoluciones

Las dificultades que se pueden presentar en la secuencia didáctica son variadas, la gran mayoría tienen relación con los cálculos al momento de contar la distancia entre dos puntos, las dificultades que permiten cometer error están relacionadas con la situación planteada a los estudiantes debido a la forma implícita en que se les permite desarrollar cierta métrica. Clements (2004) y Weill-Fassina y Rachedi (1993) (como se citó en Gonzato, Fernández y Díaz, 2011) identifican dos dificultades asociadas a la manipulación y representatividad del plano estas son:

- Dificultad para orientar un mapa a través de elementos en la realidad, es decir, dificultad para considerar y poner en congruencia dos sistemas de referencia diferentes.
- Dificultad para comprender el lenguaje simbólico, es decir, dificultad para entender que un mapa representa sólo algunos aspectos de la realidad y no es la realidad en miniatura.

(Gonzato, Fernández y Díaz, 2011, p.114)

A continuación se especifican las dificultades y errores que se pueden presentar al desarrollar la clase N° 2 de la secuencia didáctica y las respectivas devoluciones.

Tabla 3: *Dificultades, errores y devoluciones para la clase N° 2*

Dificultades	Errores	Devoluciones
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en comprender el concepto de distancia 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular la distancia de manera incorrecta 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es el punto inicial? • Identifica las cuadras recorridas • ¿Cuántas cuadras son?
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultad en comprender la métrica discreta 	<ul style="list-style-type: none"> • Atravesar de manera diagonal • Utilizar la métrica continua 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Puedes pisar los terrenos donde se encuentran los microorganismos?
<ul style="list-style-type: none"> • No comprender la situación problemática 	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicar puntos a distancia menor e igual a tres cuadras 	<ul style="list-style-type: none"> • releer el enunciado

5.6 Plan de clase

El plan de clase propuesto para el desarrollo de la clase N° 2, es el siguiente:

Inicio (5 min): Se le pide a un estudiante que lea el problema en voz alta, el profesor pregunta si existe alguna duda con respecto a lo leído. Luego les proporciona un momento para que se familiaricen con la situación y comenten las posibles estrategias de solución.

Desarrollo (30 min): El profesor pide a un estudiante de manera voluntaria que ubique las casas en la proyección del mapa que se visualiza en la pizarra, para esto se utilizan casas impresas con cinta adhesiva en la parte trasera que permite al estudiante ubicar sus casas de manera fácil.

Cierre (10 min): Finalmente, el profesor institucionaliza la situación problemática, comentando: "Lo que han construido es una circunferencia, pueden visualizar que es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, en este caso, el conjunto de puntos son las casas que se encuentran a 3 cuadras de un punto fijo que es el local del censo". En este caso han trabajado utilizando la geometría del taxista, es una situación distinta a la que han trabajado en los años escolares.

Durante la clase N° 2, se sugiere utilizar el siguiente **material complementario**:

- La situación se entrega a cada estudiante como guía de trabajo
- El profesor proyecta en la pizarra el plano del planeta Cabbie
- Casas impresas con adhesivo

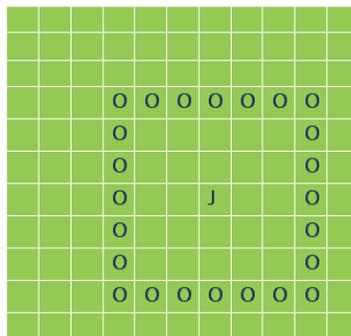
5.7 Clase N° 3

En la tercera clase de la secuencia didáctica se permite desarrollar la circunferencia utilizando la Geometría de Chebyshev. Se propone la siguiente situación problemática:

Situación

Un terreno cuadrado se encuentra subdividido en cuadrados pequeños. José, quien entrena a las ovejas, las ubica diariamente a igual distancia de él, es decir, a igual cantidad de movimientos, para esto es necesario considerar el mínimo de movimiento para que las ovejas no se agoten antes de tiempo, los movimientos pueden ser en dirección vertical, horizontal o diagonal.

A continuación se muestra la ubicación de las ovejas en el terreno, representado por la letra **O**, y la ubicación de José, representado por la letra **J**.



- ¿A qué distancia se encuentra José de las ovejas?
- Considerando la distancia de la pregunta anterior, ¿Cuántas ovejas se encuentran a igual distancia de José?
- ¿Qué características tienen las ubicaciones de José y de las ovejas en el terreno?

5.8 Análisis a priori de la Clase N° 3

5.8.1 Respuesta Experta

- **Pregunta a):** ¿A qué distancia se encuentra José de las ovejas?
- **Respuesta experta:** José se encuentra a distancia tres de las ovejas
- **Pregunta b):** Considerando la distancia de la pregunta anterior, ¿Cuántas ovejas se encuentran a igual distancia de José?
- **Respuesta experta:** Existen 24 ovejas que se encuentran a distancia tres de José.
- **Pregunta c):** ¿Qué características tienen las ubicaciones de José y de las ovejas en el terreno?
- **Respuesta experta:** Todas las ovejas equidistan de un punto fijo (José), al igual que la definición de la circunferencia.

5.8.2 Posibles Estrategias

Estrategia N°1

El estudiante cuenta las casillas entre José y una oveja lo que corresponde a una distancia de tres unidades. Posteriormente, cuenta la cantidad de ovejas representadas por la letra O y determina que son 24 ovejas.

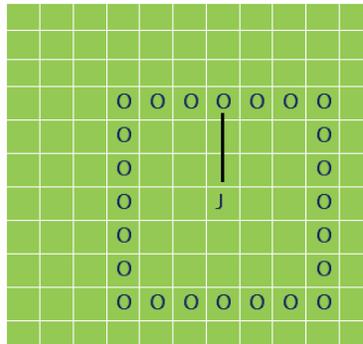


Figura 10: El estudiante marca y cuenta directamente la distancia entre José y las ovejas.

Estrategia N° 2:

El estudiante mezcla las direcciones de los movimientos a realizar y cuenta que se encuentran a distancia tres. Posteriormente, cuenta la cantidad de ovejas representadas por la letra O y determina que son 24 ovejas.

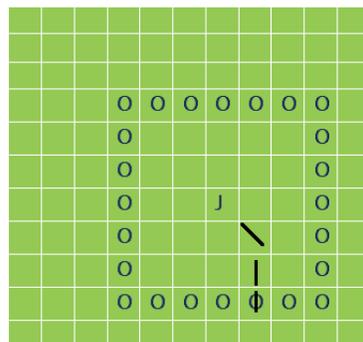


Figura 11: El estudiante marca los movimientos realizados y cuenta tres unidades

5.8.3 Matemática en juego

La matemática en juego corresponde a la definición de circunferencia que se utilizó en la clase implementada (ver página 34). La distancia máxima es la utilizada en la última clase, se define para los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la distancia máxima como:

$$d(A, B) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

Los estudiantes pueden involucrar la siguiente matemática:

- Definición de la circunferencia
- Elementos de la circunferencia como el centro y radio
- Distancia entre dos puntos

5.8.4 Dificultades, errores y devoluciones

Los errores que cometen los estudiantes son causas de alguna dificultad, de las cuales se han argumentado en las reseñas de las clases anteriores. Para la última clase de la secuencia didáctica se expone en la siguiente tabla las dificultades, errores y respectivas devoluciones.

Tabla 4: *Dificultades, errores y devoluciones para la clase N° 3*

Dificultades	Errores	Devoluciones
<ul style="list-style-type: none">• Dificultad en comprender el concepto de distancia	<ul style="list-style-type: none">• Calcular la distancia de manera incorrecta	<ul style="list-style-type: none">• ¿Cuál es el punto inicial?• Identifica las cuadras recorridas• ¿Cuántas cuadras son?
<ul style="list-style-type: none">• Dificultad en considerar más direcciones	<ul style="list-style-type: none">• No entender el concepto de distancia	<ul style="list-style-type: none">• ¿Cuáles son los movimientos para desplazarse?
<ul style="list-style-type: none">• Dificultad en recordar la definición de circunferencia	<ul style="list-style-type: none">• No reconocer el conjunto de puntos como lugar geométrico	<ul style="list-style-type: none">• ¿Qué elemento forma la circunferencia?

5.9 Plan de clase

El plan de clase propuesto para el desarrollo de la clase N° 3, es el siguiente:

Inicio (5 min)

El profesor introduce la clase recordando la clase anterior, considerando la construcción de la circunferencia utilizando la geometría del taxista. Luego, se le pide a un estudiante que lea el problema en voz alta, el profesor pregunta si existe alguna duda con respecto a lo leído.

Desarrollo (30 min)

El profesor recorre la sala escuchando las posibles estrategias y soluciones de los estudiantes, luego pide dos voluntarios para explicar sus posibles soluciones y proporcionar al curso una discusión para validar dichos procedimientos. Los estudiantes, participan de manera individual aportando sobre las características de cada figura y descartando que la formada en el terreno sea un cuadrado, un rectángulo, una cruz, etc. El profesor pregunta a los estudiantes ¿cuál es la definición de circunferencia?, ¿tiene algo en común con lo que han desarrollado?

Cierre (10 min)

Finalmente, el profesor institucionaliza la situación problemática, comentando: "lo que han construido es una circunferencia, pueden visualizar que es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro, en este caso, el conjunto de puntos son las ovejas que se encuentran a 3 movimientos de un punto fijo que es José". A diferencia de las clases anteriores, en este caso han trabajado utilizando la distancia del tablero de ajedrez.

Durante la clase N° 3, se sugiere utilizar el siguiente **material complementario**:

- La situación se entrega a cada estudiante como guía de trabajo
- El profesor proyecta en la pizarra el terreno y las ubicaciones respectivas

5.10 Objetivos de las clases

Los objetivos de cada clase tienen relación con el desarrollo del concepto de la circunferencia según la métrica utilizada. Los objetivos establecidos se organizan de la siguiente manera:

- **Objetivo Clase N° 1:** Comprender la circunferencia utilizando la distancia euclidiana
- **Objetivo Clase N° 2:** Comprender la circunferencia utilizando la distancia de Manhattan
- **Objetivo Clase N° 3:** Comprender la circunferencia utilizando la distancia de Chebyshev

Los objetivos de cada clase están diseñados de acuerdo al marco teórico para que los estudiantes puedan transitar entre los distintos modos de pensamiento, es decir: SG, AA y AE, a través de la representación geométrica que permite cada situación problemática, el cálculo relacionado a cada distancia y las propiedades que involucra el conjunto de puntos que representa la circunferencia.

6. Estudio de Clase: Clase N° 2

6.1 Metodología

Este estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo, privilegiando los alcances interpretativo o hermenéutico, mediante la aplicación de la metodología de Estudio de Clase, con sus tres fases: planeación, ejecución y reflexión.

La metodología utilizada en esta investigación es enriquecedora para la labor docente, en consecuencia favorece el aprendizaje de los estudiantes. Para Kemmis y McTaggart (como se citó en Murillo, 2011) considera que los principales beneficios de la investigación-acción son la mejora de la práctica, la comprensión de la práctica y la mejora de la situación en la que tiene lugar la práctica.

Mediante la primera fase del Estudio de Clases, se prepara con antelación cada paso a desarrollar y se planifica dentro del currículo programático del curso tercer año medio, en una clase de 45 minutos. Se diseña una situación problemática que permite el desarrollo de la circunferencia, posteriormente para su aceptación se discute en conjunto con profesores de matemática y especialistas en didáctica de la matemática.

6.2 Sujetos de investigación

Durante la fase de ejecución, se desarrolla la clase en un colegio particular subvencionado de carácter científico - humanista de la ciudad de Coquimbo, con la participación de 30 estudiantes, en edad cronológica entre 16 y 17 años, de ambos sexos. Se tiene antecedentes de cada estudiante del curso, tanto de su trayectoria escolar como de su contexto familiar, cultural y social ya que la profesora encargada de desarrollar la clase es quien enseña matemática en plan común durante su año escolar.

6.3 Recogida de datos

Durante la grabación de la clase, se les presentó a los estudiantes el material didáctico que consistió en una guía con la situación que debían analizar y desarrollar, en paralelo se proyecta la situación en la pizarra. En el inicio de la clase se le pidió a un estudiante voluntario leer la situación problemática en voz alta, luego se les otorgó un momento de reflexión y algunos estudiantes expusieron sus estrategias de resolución donde discutían y validaban algunos procedimientos.

Los datos en la investigación han sido recogidos de forma escrito y por medio de grabación. El material didáctico impreso son los registros escritos de las respuestas a las tres preguntas que conforman el cuestionario. El registro audio/visual de la clase grabada permite transcribir la reflexión que realizan los estudiantes en el momento de la institucionalización.

6.4 Categorías de análisis

Las categorías de análisis para esta investigación surgen desde la teoría Modos de Pensamiento por Sierpinska (2000). El sentido en que los modos de pensar transitan no resultan ser tajante, pues el estudiante puede transitar desde un modo a otro o viceversa, por ejemplo en el caso de esta investigación, para el tránsito entre SG y AA el estudiante puede establecer un conjunto de puntos en el plano y luego identificar los que cumplen una cierta característica, considerando que son sólo los puntos que están de un punto fijo a una distancia mínima de tres unidades, sin embargo puede suceder que el estudiante comience contando y luego ubica los puntos que cumplen la característica mencionada anteriormente. En este estudio de clase la situación planteada a los estudiantes se desarrolla bajo la métrica del taxista y consiste en responder tres preguntas, de acuerdo a la pregunta se asiente de manera intencional el tránsito de algunos modos de pensar.

La nomenclatura de las preguntas se establece de acuerdo a lo siguiente:

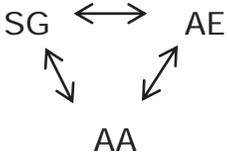
P₁: Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar

P₂: ¿Cuántas casas son?

P₃: ¿Qué característica tienen en común todas las casas?

A continuación se consideran las siguientes categorías de análisis.

Tabla 5: *Categorías de análisis*

Pregunta	Categorías	Descripción
$P_1 - P_2$	SG	El estudiante marca puntos en el plano
$P_1 - P_2$	AA	El estudiante realiza cálculos para ubicar casas que se encuentren a igual distancia de un punto fijo.
P_3	AE	El estudiante expresa de manera escrita o verbal que existe un conjunto de puntos discretos que se encuentran a igual distancia de un punto fijo (local del censo).
$P_1 - P_2 - P_3$	SG \longleftrightarrow AA	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.
$P_2 - P_3$	AA \longleftrightarrow AE	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante realiza cálculos y expresa que existe un conjunto de puntos discretos que se encuentran a igual distancia de un punto fijo.
$P_1 - P_3$	SG \longleftrightarrow AE	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante reconoce que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano.
P_3		El tránsito entre estos modos permite identificar que el estudiante reconocer que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano y se considera una circunferencia de acuerdo a sus propiedades.

6.5 Intención de la clase implementada

La clase n° 2 tiene por objetivo *comprender la circunferencia utilizando la distancia mínima*.

Las intenciones de las preguntas propuestas permiten a los estudiantes el tránsito por algunos modos, es decir:

- P_1 : *Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar*: La primera pregunta proporciona a los estudiantes activar y transitar en los modos de pensar Sintético Geométrico (SG) y Analítico Aritmético (AA) ya que permite representar la circunferencia en la geometría del taxista, a su vez la representación está relacionada con el acto de calcular.
- P_2 : *¿Cuántas casas son?*: Esta pregunta está estrechamente relacionada con la pregunta anterior, por ende permite el mismo tránsito por los modos de pensar SG y AA. Paralelamente, se hace énfasis al concepto de *lugar geométrico* de manera implícita para los estudiantes.
- P_3 : *¿Qué característica tienen en común todas las casas?*: Esta pregunta permite a los estudiantes el tránsito entre los tres modos de pensar, es decir SG, AA y AE, ya que considerando las características desarrolladas en la situación didáctica el estudiante puede visualizar que lo resuelto cumple es una circunferencia.

6.6 Análisis de resultados

Los datos recogidos en la implementación de la clase y, que dan forma a este reporte de investigación, se presentarán de acuerdo al registro utilizado en dos etapas:

- *Etapa I:* corresponde a las producciones escritas de los estudiantes, quienes dan respuesta al cuestionario aplicado.
- *Etapa II:* hace referencia al registro audio/visual, esta observación es imprescindible para el análisis de datos debido a la discusión reflexiva que desarrollan los estudiantes con respecto a las características que debe tener una circunferencia.

De acuerdo a las categorías de análisis previamente establecidas, se puede situar a los estudiantes de tercer año medio en los tránsitos de los modos de pensar con respecto a la concepción de la circunferencia.

La nomenclatura utilizada para designar a un estudiante se dará por $E_1, E_2, E_3, \dots, E_{30}$.

Etapa I

A continuación se presentan los análisis de resultados por medio de las síntesis panorámicas globales según la pregunta del cuestionario.

En el desarrollo del cuestionario, la pregunta N° 1: *Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar* los estudiantes evidencian el tránsito en los modos SG y AA, siendo el primer modo el que predomina en el curso, no se presentó un tránsito en el modo AE lo que no resulta extraño ya que la pregunta se diseñó para transitar entre los modos SG y AA.

Tabla 6: Análisis de la pregunta N°: 1 *Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar.*

Síntesis panorámica global – P₁		
Categoría	Estudiante	Descripción
SG	E ₁ -E ₂ -E ₄ -E ₆ -E ₇ -E ₈ - E ₁₂ -E ₁₃ -E ₁₄ -E ₁₅ -E ₁₈ - E ₁₉ -E ₂₀ -E ₂₁ -E ₂₂ -E ₂₄ - E ₂₅ -E ₂₆ -E ₂₇ - E ₂₈ -E ₃₀	El estudiante marca puntos en el plano
AA	E ₂₉	El estudiante realiza cálculos para ubicar casas que se encuentren a igual distancia de un punto fijo.
SG ↔ AA	E ₃ -E ₅ -E ₉ -E ₁₀ -E ₁₁ - E ₁₆ -E ₂₃	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.
SG ↔ AE	No se registra	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante reconoce que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano.

En la tabla 6 se puede observar que existen siete de treinta estudiantes transitan entre los modos SG y AA.

La pregunta N° 2 del cuestionario tiene una relación directa con el desarrollo de la pregunta anterior, ya que se les pregunta a los estudiantes *¿Cuántas casas son?*, para esto debían sólo contar los puntos que ya habían ubicado en el plano, es por esta razón que el análisis de la pregunta N° 2 coincide con el análisis de la pregunta n°1, lo que se resume y se expone en la tabla 7.

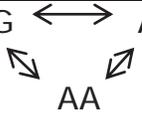
Tabla 7: Análisis de la pregunta N° 2: *¿Cuántas casas son?*

Síntesis panorámica global – P₂		
Categoría	Estudiante	Descripción
SG	E ₁ -E ₂ -E ₄ -E ₆ -E ₇ -E ₈ - E ₁₂ -E ₁₃ -E ₁₄ -E ₁₅ -E ₁₈ - E ₁₉ -E ₂₀ -E ₂₁ -E ₂₂ -E ₂₄ - E ₂₅ -E ₂₆ -E ₂₇ - E ₂₈ -E ₃₀	El estudiante marca puntos en el plano
AA	E ₂₉	El estudiante realiza cálculos para ubicar casas que se encuentren a igual distancia de un punto fijo.
SG ↔ AA	E ₃ -E ₅ -E ₉ -E ₁₀ -E ₁₁ - E ₁₆ -E ₂₃	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.
SG ↔ AE	No se registra	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante reconoce que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano.

En el caso de la última pregunta del cuestionario, se esperaba en el mejor de los casos que los estudiantes reconocieran la circunferencia como un conjunto de puntos y de esta manera hacer énfasis al concepto de *lugar*

geométrico, sin embargo esto no se manifiesta en los registros escritos de los estudiantes, sólo logran reconocer que las casas ubicadas se encuentran a una misma distancia de un punto fijo, es por este motivo que todo el curso se sitúa en el tránsito de los modo de pensar SG – AA. El análisis de la pregunta N° 3 se presenta en la tabla 8.

Tabla 8: Análisis de la pregunta N° 3: ¿Qué característica tienen en común todas las casas?

Síntesis panorámica global – P₃		
Categoría	Estudiante	Descripción
AE	No se registra	El estudiante expresa de manera escrita o verbal que existe un conjunto de puntos discretos que se encuentran a igual distancia de un punto fijo (local del censo).
SG ↔ AA	Todos los estudiantes	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.
AA ↔ AE	No se registra	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante realiza cálculos y expresa que existe un conjunto de puntos discretos que se encuentran a igual distancia de un punto fijo.
SG ↔ AE	No se registra	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante reconoce que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano.
SG ↔ AE 	No se registra	El tránsito entre estos modos permite identificar que el estudiante reconocer que el conjunto de puntos son las casas ubicadas en el plano y se considera una circunferencia de acuerdo a sus propiedades.

La pregunta n°3 del cuestionario se diseñó para intencionar el tránsito en el modo AE, se puede observar en la tabla 8 que no hay estudiantes que transiten en ese modo de pensar.

Etapa II

A continuación se registran los momentos en que los estudiantes realizan sus puestas en escenas, reflexionan y discuten ante sus estrategias para ubicar puntos en el plano de tal manera que se encuentren a una distancia de tres unidades de un punto fijo considerado como el local de censo.

- **Análisis del registro audio/visual**

En la clase se les permite un instante de reflexión y trabajo individual, donde la profesora se dedica a observar y a entregar devoluciones a los estudiantes. La profesora pide que entreguen los desarrollos que evidencian los registros escritos un momento antes de que los estudiantes expongan sus estrategias.

En el momento del video 00:24:43 la estudiante E₉ expone su estrategia para ubicar casas en el plano, cabe señalar que la estudiante se encuentra transitando en los modos de pensar SG – AA ya que marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.

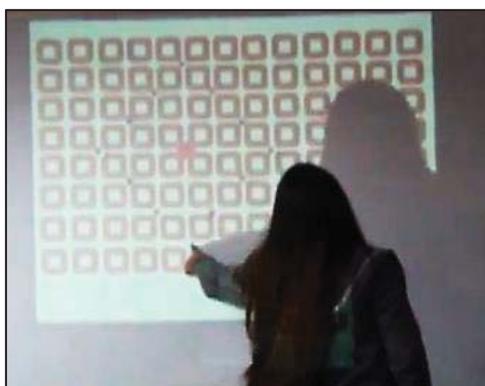


Figura 12, la estudiante E₉ ubica las 12 casas que se encuentran a tres cuadras del local de censo.

Luego, en el momento del video 00:25:09 la profesora guía la clase con las siguientes interrogantes:

Profesora: ¿están todos de acuerdo que esas son las casas que deben ubicar?

E₂₅: faltan más

Profesora: ¿a ver, cuáles faltan?

E₂₅: dice que deben estar a 3 cuadras

Profesora: si, tres cuadras

E₂₅: ¿no importa para dónde?

Profesora: no importa para dónde, ubique la casa que falta



Figura 13, el estudiante E₂₅ ubica una casa que se encuentra a distancia mínima de una cuadra del local de censo.

Posteriormente, el estudiante E_5 argumenta que el estudiante E_{25} se encuentra en un error, considerando el momento de la clase 00:27:26

E_5 : Su supervisor le ha designado todas las casas que se encuentran a tres cuadras de su local, entonces si pone una casa a una cuadra del local no se estaría cumpliendo lo que se pide

Profesora: Le pregunta a E_{25} ¿la casa que ubicó a cuantas cuadras esta del local?

E_{25} : a una

Profesora: las otras casas que ubicó E_9 , ¿a cuantas cuadras están?

Curso responde: a tres

Profesora: ¿sólo tres?

E_3 : de donde la miren, siempre está a tres cuadras

En el momento de la pregunta n° 3, la profesora entrega un papel donde los estudiantes deben redactar las características que tienen en común todas las casas, les otorga unos minutos para que redacten su respuesta y luego retira el registro.

La profesora pregunta al curso ¿qué características tienen en común todas las casas?, los estudiantes responden en primera instancia que se forma un rombo, otros que se forma un cuadrado o que tiene forma de diamante. *En un principio, nadie describió las casas como un conjunto de puntos de una circunferencia*, fue necesario que la profesora preguntara a los estudiantes las características que cumple una circunferencia, considerando que han estudiado la geometría euclidiana, los estudiantes comienzan a nombrar los elementos de la circunferencia como el centro de la circunferencia, radio y conjunto de puntos. Finalmente, para lograr un tránsito entre los tres modos de pensar SG, AA y AE se escuchan las siguientes reflexiones:

...

Profesora: ¿podemos unir los las casas para formar un rombo?

E₂₀: no porque hay microorganismos que no se pueden pisar

De manera implícita se hace referencia a la métrica discreta que se desarrolla en la geometría del taxista.

El momento del video 00:40:07 se evidencia la *siguiente dinámica*:

...

Profesora: de todas las figuras que nombraron, las casas que ubicaron en el plano ¿Qué figura es?, al menos que tengan otra en mente...

E₂₈: Ninguna de ellas

E₁₀: un círculo

Profesora: ¿Por qué un círculo?

E₂₅: que todas las casas están a tres cuerdas, en la que se puede verificar, en la que se respeta eso es en el círculo

E₁₆: En el círculo se respeta que todos los radios son iguales, igual que en la otra (señala la pizarra), que dice que todas las casas están a tres cuerdas, entonces el radio es igual

Se evidencia que los estudiantes no recuerdan la diferencia entre círculo y circunferencia, considerando ambos conceptos matemáticos como sinónimos.

Finalmente se les explica a los estudiantes que el planeta ficticio fue intencionado para trabajar la geometría del taxista, es por esta razón que las casas *no forman una circunferencia* conocida por ellos como se representa en la geometría euclidiana.

6.7 Resultados principales

- De acuerdo a la pregunta N° 3, todos los estudiantes logran describir que los puntos cumplen una sola condición, estar a tres cuerdas de un punto fijo. Esto permite identificar que todos los estudiantes del curso logran transitar entre los modos SG y AA.
- En un principio, los estudiantes *no evidencian ningún tránsito que involucre el modo de pensar AE*, debido a que ningún estudiante reconoce la ubicación de casas como un lugar geométrico, esta situación puede deberse porque no han desarrollado otra geometría más que la euclidiana y relacionan la circunferencia a su representación propia de la geometría euclidiana, o bien no recuerdan la definición de circunferencia. Todas las categorías que involucran *el tránsito por el modo AE no se registran*.

Posteriormente, al momento en que la profesora recuerda los conceptos y hace una puesta en común de las características que forman las casas, recién algunos estudiantes logran visualizar que las casas son puntos que forman las características de una circunferencia. Sin embargo, en el momento final de la clase los estudiantes logran transitar entre los tres modos de pensar debido a que logran visualizar que la circunferencia está formada por un conjunto de puntos que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

- Los estudiantes no asocian la circunferencia como un *lugar geométrico*, es decir, no expresan de manera escrita que las casas representadas en la situación es un conjunto de puntos que están a igual distancia de un punto fijo, en este caso el local de censo.

7. Conclusiones

La clase implementada permite a los estudiantes ampliar sus visiones con respecto a la aplicación de la geometría en situaciones cotidianas y ficticias, debido a que el concepto de distancia se puede situar en diversos contextos de acuerdo a la métrica que se decida utilizar. Del mismo modo, permite a los estudiantes comprender la circunferencia como un lugar geométrico desde una métrica discreta.

El método Estudio de Clase resulta enriquecedor para el aprendizaje y reflexión de los docentes de este modo crear conciencia por mejorar sus prácticas pedagógicas ya que el detenerse a escuchar lo que dice cada estudiante establece una gran responsabilidad en lo importante que es enseñar matemática. Para los profesores de matemática es relevante entender como los estudiantes aprenden distintos objetos matemáticos, la Teoría los Modos de Pensamientos proporciona a los maestros información sobre el razonar de los estudiantes y permite enseñar la matemática en su desarrollo más amplio, de tal manera que los estudiantes comprendan el objeto matemático desde distintas perspectivas, es decir, desde un pensamiento práctico y/o teórico, considerando su representación geométrica, su aritmética y sus axiomas.

En otras investigaciones la enseñanza de las matemáticas predomina la enseñanza de la geometría sintética y en algunos niveles se encuentra complementada por la geometría analítica, considerando esta situación sería pertinente replantearse el desarrollo de distintas geometrías en la enseñanza escolar, el tratamiento de diversas geometrías favorece el aprendizaje de los estudiantes y da las posibilidades de ver la matemática como un aporte a la resolución de problemas en contextos reales y sociales, como por ejemplo relacionar las distancias con las leyes

establecidas en el país para ubicar locales de servicios considerando sus restricciones.

El barrido curricular detallado en esta investigación proporciona la necesidad de abarcar la circunferencia en los distintos niveles de la enseñanza escolar para lo que es esencial estar consciente de sus distintas definiciones según los contextos matemáticos en los que se enseña, de esta manera complementar y proveer distintas definiciones para los textos escolares. Tomando en consideración los aspectos epistemológicos que se desarrollan en la secuencia didáctica, la que permite a los estudiantes construir y robustecer sus conocimientos acerca de la circunferencia, potenciando la habilidad de la creatividad, la que proporciona a los estudiantes de hoy dar soluciones a problemas sociales aportando al progreso del ser humano.

La secuencia didáctica resulta interesante debido a que involucra un marco teórico de enfoque cognitivo contribuyendo en su diseño. Este estudio resulta ser diferente a otras investigaciones por plantear una propuesta para el desarrollo de la circunferencia con métricas discretas y continuas como las distancias Euclidiana, Manhattan y Chebyshev.

Una proyección de la investigación es dar respuesta a la pregunta: ¿qué dificultades pueden presentar los estudiantes al no comprender la circunferencia como lugar geométrico?, como se especifica en uno de los antecedentes de esta investigación, existen dificultades relacionadas al realizar demostraciones ya que los estudiantes no logran comprender que la figura hallada es un lugar geométrico, pueden existir otras dificultades relacionadas a la cotidianidad de los estudiantes o bien en otras áreas de la enseñanza.

Bibliografía

- Alsina, C. (2006). Homenaje a Maurice Fréchet en el centenario del concepto general de distancia. *Suma*, 51, 73 – 76.
- Astorga, M. (2015). *Comprensión de las cónicas desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Blanco, M., Cáceres, C., Calderón, F. y Jiménez, M. (2009). *Texto del alumno matemática 8° básico*. Santiago, Chile: Santillana
- Bonilla, D., Parraguez, M. y Solanilla, L. (2013). Las cónicas en la geometría del taxista, una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 666.
- Cárdenas, R. (2013). *Estudio de la métrica de Manhattan. segmentos, rectas, rayos, circunferencias y algunos lugares geométricos en la geometría del taxista* (tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
- Carmona, J. (2011). La circunferencia, una propuesta didáctica usando modelos de Van Hiele y Geometría dinámica. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.

- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?. *Suma*, 39, 13-25.
- Gonzato, M., Fernández, M., & Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99-117.
- Marín, L.(2007). The Notion of Paradigm. *Signo y pensamiento*, (50), 34-45.
- Maza, C. (2010). Matemáticas en Mesopotamia
Recuperado de <http://ieslagunatollon.blogspot.cl/2011/11/la-matematica-en-mesopotamia-areas.html>
- Molfino, V. y Ledezma, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Revista Educación matemática*, 23(1), 37-61.
- Murillo, F. (2011). Investigación acción. *Métodos de investigación en educación especial. 3ª Educación Especial. Curso*.
- Oller, A. (2009). Otra manera de ver la circunferencia. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, 72, 57-62
- Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento, Didáctica de la matemática*. Valparaíso: Ediciones Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

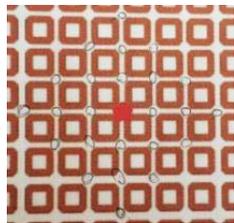
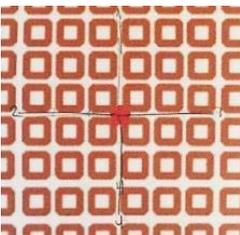
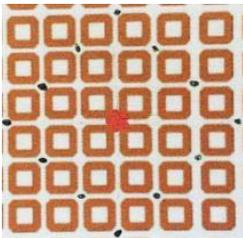
Rico, L. (1995). *Curso didáctica de las matemáticas y licenciatura matemática: Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.*

Sales, J. y Banyuls, F. (2010). *Curvas peligrosas.* Villatuerta, España: Editec

Anexos

A continuación se evidencian algunas producciones de los estudiantes durante el desarrollo de la clase grabada.

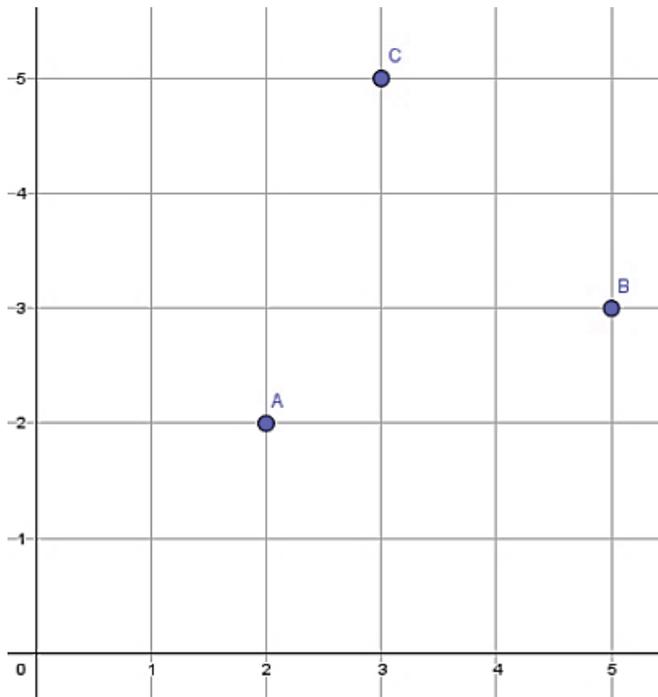
Tabla 9: Producciones escritas

Pregunta	Estudiante	Producciones	Categoría	Descripción
P ₁	E ₇		SG	El estudiante marca puntos de acuerdo a lo establecido en la situación. Sin embargo, no considera la cantidad mínima de cuadras.
P ₁	E ₂₉		AA	<i>El estudiante realiza cálculos de tres unidades, no logra ubicar casas, sólo dibuja los sentidos en que transita por las cuadras.</i>
P ₁	E ₅		SG ↔ AA	El tránsito entre estos modos se manifiesta en que el estudiante marca las casas en el plano y considera el cálculo para ubicar sólo las casas que se encuentran a la misma distancia del punto fijo.

P₂	E₁	¿Cuántas casas son? <u>24</u>	SG	La pregunta N° 2 tiene estrecha relación con la pregunta N° 1, en general los estudiantes respondieron a esta pregunta de acuerdo a la representación gráfica.
P₃	E₉	<u>Que todas se encuentran a 3 cuadras del total del censo.</u>	SG ↔ AA	Todos los estudiantes describieron las casas de manera similar a como se muestra en la producción, haciendo énfasis a puntos y equidistancia. Ningún estudiante reconoce que las casas representan un lugar geométrico.

Situación N° 1

En un condominio contratan una alarma comunitaria que abarca todos los puntos que se encuentran a menor e igual distancia del aparato, el sector de seguridad fue limitado y coincide con la longitud que se forma con las tres casas ubicadas en el siguiente plano. Ayuda a los ciudadanos a ubicar el aparato de seguridad para que abarque hasta las casas señaladas en la siguiente imagen.



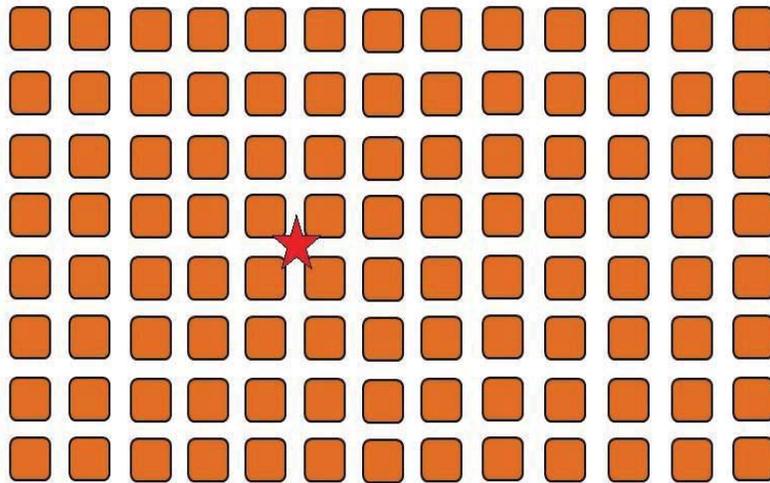
- Ubica el aparato de seguridad
- ¿Cuál es la distancia que existe desde el aparato de seguridad al límite formado por las casa?

- En el límite de seguridad ubica una cuarta casa

Situación N° 2

El planeta Cabbie, que se encuentra a 179 millones de años luz de la Tierra, posee una gran particularidad, ya que la superficie de su terreno se encuentra lleno de microorganismos que le proveen oxígeno a todo el planeta (recuadros blancos). Y, en la intersección de las cuadras hay una sola casa. Por esta razón, los habitantes de Cabbie han debido idear una estrategia para movilizarse por el territorio sin dañar a los microorganismos.

Este año se decidió realizar un Censo en el planeta Cabbie y Muff no quiso estar ausente, por lo que voluntariamente se inscribió. Su supervisor le asignó todas las casas que se encuentran a tres cuadras de su local, el que está marcado con una estrella roja.



a) Marca todos los puntos a los que Muff debiera censar

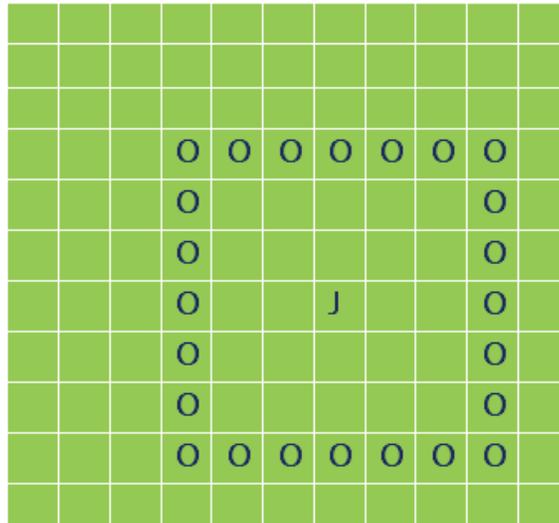
b) ¿Cuántas casas son?

c) ¿Qué característica tienen en común todas las casas?

Situación N° 3

Un terreno cuadrado se encuentra subdividido en cuadrados pequeños. José, quien entrena a las ovejas, las ubica diariamente a igual distancia de él, es decir, a igual cantidad de movimientos, para esto es necesario considerar el mínimo de movimiento para que las ovejas no se agoten antes de tiempo, los movimientos pueden ser en dirección vertical, horizontal o diagonal.

A continuación se muestra la ubicación de las ovejas en el terreno, representado por la letra **O**, y la ubicación de José, representado por la letra **J**.



a) ¿A qué distancia se encuentra José de las ovejas?

b) Considerando la distancia de la pregunta anterior, ¿Cuántas ovejas se encuentran a igual distancia de José?

c) ¿Qué características tienen las ubicaciones de José y de las ovejas en el terreno?
