Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS ES UNA ¿ROTACIÓN?, UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA LOS MODOS DE PENSAMIENTO.

Tesis para optar al Grado de
Magíster en Didáctica de la Matemática

De: Károl Lisette Rueda Gómez.

Profesor Guía: Dra. Marcela Parraguéz

2013

AGRADECIMIENTOS

A DIOS por creer en mí y darme la fuerza y la fe para correr el riesgo de vivir este sueño, que a mis ojos era imposible, pero que hoy es un hecho. Además, por ser ese padre, ese amigo y ese todo que me ha enseñado el valor de las cosas más simples. En resumidas palabras gracias porque en este tiempo he conocido en realidad el pastor del SALMO 23.

A mi FAMILIA porque son el tesoro más grandes que Dios me ha dado y que a pesar de todos los infortunios que han vivido en este tiempo he recibido lo mejor de cada uno. Gracias Papá, Mamá, hermanita Lenis, hermanita Yeny y Cuñis, los AMO.

A mi profe MARCELA por inspirarme con su carisma, su pasión y entrega. Además, porque en cada desafío me ha enseñado a no tener miedo de equivocarme. Dios la bendiga con gozo, paz y armonía familiar, TE QUIERO MUCHO.

A mi profe ALEJANDRO por desafiarnos académicamente con sus palabras y con sus hechos, porque la excelencia es uno de sus sellos. Lo admiro mucho. Bendiciones.

A todos mis AMIGOS porque he sido muy afortunada de conocerlos y en cada momento compartido me han hecho sentir una persona más que especial con todo su cariño, dedicación, consejos y oraciones. En realidad son un pilar de este significativo logro. Gracias por su invaluable afecto. Bendiciones.

Índice General

RESUMEN ... 7

Summary ... 9

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACION. ... 15

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN. ... 17

ENSEÑANZA EN CHILE. ... 18

TEXTOS DE ESTUDIO. ... 20

DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA ... 22

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN ... 24

CAPÍTULO II: LA COMPONENTE HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA. ... 25

LA COMPONENTE HISTÓRICA & EPISTEMOLÓGICA. ... 27

GEOMETRÍA EUCLIDIANA O SINTÉTICA ... 27

GEOMETRÍA ANALÍTICA ... 31

UNIFICACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS ... 32

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO ... 35

JUSTIFICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO. ... 37

DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO ... 37

EJEMPLO QUE ILUSTRAR EL MARCO TEÓRICO ... 40

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN ... 43

MARCO METODOLÓGICO: ... 45

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN. ... 45

PRIMERA ETAPA: CUESTIONARIO EXPLORATORIO. ... 46

EL CUESTIONARIO EXPLORATORIO ... 46

LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPLORATORIO ... 46

SEGUNDA ETAPA: ANÁLISIS DOCUMENTAL ... 47

TERCERA ETAPA: DISEÑO Y APLICACIÓN CUESTIONARIO MODOS DE PENSAR LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES. ... 47

DESCRIPCIÓN Y FUNDAMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO ... 48

EL CASO EN ESTUDIO ... 48

CAPITULO V: ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS ... 49

ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO EXPLORATORIO. ... 51

ÁNALISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO EXPLORATORIO ... 59

CONCLUSIONES EN RELACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN................. 67

CAPÍTULO VI: INTENCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA 69

INDICADORES A PRIORI DE TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE COMPRENDER LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES EN EL CUESTIONARIO........... 71

DESCRIPCIÓN GENERAL E INTENSIÓN DE LAS ACTIVIDADES....................................... 75

ANÁLISIS A- PRIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA. 76

CAPÍTULO VII: APLICACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA 97

ANÁLISIS A POSTERIORI. 99

CONCLUSIONES DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA... 126

***CAPÍTULO VIII*: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS**................................. 127

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS.. 129

CONCLUSIONES TEÓRICAS Y REFLEXIONES FINALES 130

BIBLIOGRAFÍA 133

ANEXOS... 135

ANEXO I CUESTIONARIO EXPLORATORIO 137

ANEXO II CUESTIONARIO A DOCENTES 139

ANEXOS PONENCIAS 145

SÉPTIMA REUNIÓN LATINO AMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. RELME 27 149

RESUMEN

La investigación que reportamos, da cuenta de un estudio sobre la comprensión del concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes que se ha instalado sobre docentes en formación, bajo un enfoque cognitivo, donde se utiliza los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y, estudio de casos como diseño metodológico. La compuesta de dos simetrías con ejes secantes se encuentra inmersa en los temas de transformaciones isométricas, los cuales forman parte de los contenidos propuestos en los programas oficiales de Chile, con un marcado énfasis en las técnicas prácticas o artísticas. Nuestra problemática de investigación se sitúa al abordar este concepto matemático solamente a través de forma práctica y algunos intentos por recurrir a lo analítico. Afirmamos que estas técnicas no son suficientes para lograr una comprensión profunda del concepto, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando que el docente pueda comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en los modos: *Sintético Geométrico* (Movimiento rígido en el plano), el *Analítico Aritmético (*Transformación isométrica*) y* el *Analítico Estructural (*Rotación). Desde la teoría de los modos de pensamiento y utilizando antecedentes históricos epistemológicos podemos evidenciar que los docentes presentan grandes dificultades para comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde un pensamiento sistémico, el cual forma parte del pensamiento teórico (Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A.., 2002).

Como resultado del estudio, damos sugerencias didácticas que permitan una comprensión profunda del concepto, es decir donde interactúan los tres modos de pensar que hemos documentado.

Palabras claves: La teoría de los modos de pensamiento, Simetría, rotación, composición de funciones.

Summary

The research we are reporting, gives account to a study on the understanding of the concept composed of two symmetries with intersecting axes that have been taught to teachers in training. The concept focuses on a cognitive approach including Anna Sierpinska's theoretical framework, and case studies on methodological design. The composition of two symmetries with intersecting axes were found immersed within the subjects of isometric transformations, those of which form part of the content in the official Chilean programs with a strong emphasis on technical or artistic practices.

Our research is centered around the mathematical concept only through the practical form and some intentions to reoccur analytically. We confirm that these techniques are insufficient to achieve a profound understanding of the concept. When we say profound understanding, we believe teachers can understand the composition of two symmetries with intersecting axes in the following ways: *Synthetic Geometry* (Rigid movement in the plane), *Analytic Arithmetic* (Isometric transformation) and *Analytical Structure* (Rotation). From these theories and the use of historical antecedents, we can conclude that the teachers face great challenges to comprehend the composition of two symmetries with intersecting axes from a systematic perspective, which form part of the theory.

As a result of the study, we suggest didactics that allow a deeper understanding of the concept, in other words, the three theories we have documented.

Keywords: theories, symmetry, rotation, composition of functions

INTRODUCCIÓN

No es un secreto que aprender matemática es un dolor de cabeza para la mayoría de los estudiantes. Al paso del tiempo han surgido diversas respuestas al problema, desde la educación matemática, Gascón (2002), menciona que "una de estas respuestas fue crear una separación radical entre la actividad matemática y la enseñanza de las matemáticas, suponiendo esencialmente independiente hacer matemática[1] y enseñar matemática (p. 5)". "Otra solución ha sido la implementación del Modelo popular de la matemática[2] el cual influye poderosamente sobre las características del modelo docente (p. 8)" el fracaso de estos dos enfoques es evidente, puesto que ninguno logró la construcción de conocimiento que se necesita en esta área.

Durante cuatro décadas se ha venido construyendo el programa de investigación científica Didáctica de la Matemática (DDM), cuyo objeto de estudio es la integración sistemática de la matemática y la enseñanza de la matemática. Uno de los principales enfoques de los diferentes marcos teóricos existentes en didáctica de la matemática es el **Programa cognitivo**[3], el cual aborda el objeto de estudio de la DDM desde la necesidad de modelizar el aprendizaje matemático del alumno, para ello se deben construir y constatar empíricamente modelos de la estructura cognitiva asociada a un concepto y al desarrollo del pensamiento matemático del sujeto.

Así, por ejemplo, Sierpinska (2000) desarrolla su teoría Los Modos de Pensamiento, a partir de la explicitación de los modos de pensamiento "práctico" y "teórico". Los modos de pensamiento que ella propone en su teoría no sólo **constituyen** formas de pensar y entender los objetos matemáticos, sino que también actúan como herramientas heurísticas al resolver problemas. Cada uno de los modos de pensamiento **constituye** una vía de acceso a los objetos matemáticos

[1] Arturo Mena (No publicado)." Entendiendo por tal ya sea la teoría matemática, la práctica que origina las categorías, conceptos y resultados de la matemática".
[2] El Modelo Popular de las matemáticas. Es una forma ingenua y simplista de interpretar el conocimiento científico.
[3] El acta de nacimiento suele situarse en el *International Group of the Psychology of Mathematics Education* (*PME*) (Bauersfeld y Skowronek 1976), que reivindicó la necesidad de tomar en consideración una especie de "*aprendizaje específicamente matemático*". Los investigadores de este grupo tomaron el aprendizaje *matemático* del alumno como nuevo objeto primario de investigación, y empezaron a construir instrumentos para describirlo (modelizarlo).

aunque la coordinación y tránsito entre ellos permite, por un lado, un pensamiento más versátil, y por otro, ver diferentes facetas de comprender un objeto matemático.

La presente investigación busca comprender y analizar, desde un punto de vista cognitivo, la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde la mirada de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000).

Organizamos nuestro trabajo en ocho capítulos como se describe a continuación:

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA, OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES.

En este capítulo mostramos los enfoques predominantes en la enseñanza del concepto composición de dos simetrías con ejes secantes, ya sea, en el programa de estudio y en los textos utilizados por los docentes como apoyo a la asignatura, a partir de estos antecedentes damos cuenta de nuestra problemática nos planteamos preguntas y definimos objetivos que guiaran nuestra investigación.

CAPITULO II: ANTECEDENTES EPISTEMOLOGICOS.

En busca de los elementos que permitan conectar las distintas definiciones de la composición de dos simetrías con ejes secantes, Realizamos un estudio epistemológico de las transformaciones isométricas, enfocándonos en aquellas etapas de la historia donde se presentan los distintos modos de pensar este objeto matemático.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO.

En este capítulo, justificamos la elección del marco teórico que guiará nuestra investigación, describimos los elementos más importantes de la teoría de los modos de pensamiento (Sierpinska 2000) y presentamos ejemplos que ilustran la teoría.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En esta sección damos cuenta del diseño metodológico de estudio de caso, que dan sustento empírico a nuestra investigación. Fundamentando, el diseño de los instrumentos y la elección de las unidades de análisis.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS DEL ESTUIO EXPLORATORIO.

En este capítulo, evidenciamos a través del estudio de un caso, la falta de un aprendizaje sistémico que permita comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en un modo analítico estructural, el cual contribuye con evidencias empíricas que sustentan la problemática planteada.

CAPÍTULO VI: INTENSIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI Y DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA

En capítulo realizamos un análisis a priori del cuestionario que construimos a partir de nuestros hallazgos (capítulo II) y desde la teoría de los modos de pensamiento para analizar los modos en que puede ser comprendida la compuesta de dos simetrías con ejes secantes

CAPÍTULO VII: APLICACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA

En este capítulo obtenemos las evidencias empíricas las cuales se analizan a partir del análisis a priori. Evidenciamos que la mayoría de los docentes de matemáticas no comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes cuando se da fuerza al tránsito SG- AE y AA - AE. Estos resultados son fundamentales para establecer las conclusiones de nuestra investigación.

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES

Finalmente establecemos las conclusiones del objetivo general a partir de la evidencia empírica con sustento teórico obtenido en el capítulo anterior. Presentamos conclusiones teóricas y sugerencias didácticas, en relación al aporte de nuestra investigación para investigaciones posteriores o secuencias de aprendizaje.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACION.

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN.

El término transformación isométrica o isometría[4], asociado a la transformación de una figura (o un cuerpo geométrico) que conserva forma, dimensiones y ángulos, corresponde a una clasificación derivada del concepto de transformación geométrica[5], el cual está estrechamente ligado a Algebra Lineal[6].

Por alguna razón este hecho había sido ignorado en los programas de estudio, asociando el tema solo a representaciones artísticas, sin profundizar en su trasfondo conceptual y su gran cantidad de aplicaciones.

Las isometrías fueron introducidas en los programas de estudio de matemática de 1998 como la unidad Transformaciones isométricas ubicada en primero medio (MINEDUC, 1998). En ese entonces se planteaba que los estudiantes debían: Caracterizar la traslación, simetría y rotación de figuras en un plano, Diseñar composiciones sencillas que incorporan traslaciones, simetrías y rotaciones, y Reconocer simetrías, rotaciones y traslaciones en la naturaleza y en obras de arte tales como las de M.C.Escher[7], lo que claramente asociaba el contenido con la asignatura de Artes Visuales, pero no con otro ámbito de la propia disciplina.

Por lo tanto, estudiaremos las consideraciones que el curriculum educacional chileno tiene con respecto al saber enseñar de este objeto matemático. Para ello analizaremos el actual Marco Curricular (MINEDUC, 2009) y los textos del estudiante, con el propósito de establecer aquellas propiedades que prevalecen en los diferentes contextos en que es trabajada.

---

[4] La palabra isometría proviene del griego iso (prefijo que significa igual o mismo) y metria (que significa medir). Por ello, una definición adecuada para isometría sería igual medida.

[5] Las transformaciones geométricas son una aplicación (función) que permite crear una nueva figura a partir de una previamente dada.

[6] El álgebra lineal estudia conjuntos denominados espacios vectoriales, los cuales constan de un conjunto de vectores y un conjunto de escalares.

[7] Maurits Cornelis Escher (1898-1972), es un artista gráfico del siglo XX, sus obras muestran una profunda comprensión de los conceptos geométricos de espacios curvos y división del plano en figuras iguales.

ENSEÑANZA EN CHILE.

De acuerdo al actual Marco Curricular (MINEDUC, 2009), el concepto de transformación isométrica es tratado en los niveles, 8º básico y 1º año medio. Con los siguientes **objetivos fundamentales** y **contenidos mínimos obligatorios planteados**:

- En el nivel de 8º básico uno de los objetivos fundamentales planteados es: "Caracterizar y efectuar transformaciones isométricas de figuras geométricas planas, reconocer algunas de sus propiedades e identificar situaciones en contextos diversos que corresponden a aplicaciones de dichas transformaciones." (MINEDUC, 2009, p.176). Este objetivo fundamental es además un **objetivo fundamental transversal** (OFT) el cual indica que la enseñanza de este objeto matemático debe centrarse en: "El interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento" (MINEDUC, 2009, p.176).

  Este objetivo fundamental y a la vez transversal se reduce a dos contenidos mínimos obligatorio en el eje de **Geometría**, los cuales son:

  - ✓ "Realización de traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras geométricas planas a través de construcciones con regla y compás y empleando un procesador geométrico, discusión acerca de **las invariantes** que se generan al realizar estas transformaciones" (MINEDUC, 2009, p.179).
  - ✓ "Construcción de teselaciones regulares y semirregulares y argumentación acerca de las transformaciones isométricas utilizadas en dichas teselaciones" (MINEDUC, 2009, p.179).

Según lo propuesto por el curriculum, en este año los estudiantes deben aprender el concepto desde un **enfoque visual** donde predomina la **geometría sintética** y también el reconocimiento de **invariantes** que caracteriza a cada transformación.

- En el nivel de 1º año medio dos de los **objetivos fundamentales** son referentes a este objeto matemático, los cuales indica que los alumnos sean capaces de:

  "Identificar **regularidades** en la realización de transformaciones isométricas en el **plano cartesiano**, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas." (MINEDUC, 2009, p.180). Este objetivo fundamental es además un **objetivo fundamental transversal** (OFT) el cual indica que la enseñanza de este objeto matemático debe centrarse en: "Comprender y valorar la perseverancia, el rigor y el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad" (MINEDUC, 2009, p.180).

"Comprender los conceptos y propiedades de la **composición de funciones** y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas" (MINEDUC, 2009, p.180).

Estos dos objetivos fundamentales están inmersos en el eje de Geometría y en el eje de Álgebra en los siguientes contenidos mínimos obligatorios:

Geometría:

- ✓ Formulación de **conjeturas** respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el **plano cartesiano** y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente.
- ✓ Relación del concepto de **congruencia** de figuras planas con las transformaciones isométricas; formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de **criterios de congruencia** en triángulos; y, utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.

Álgebra:

- ✓ Estudio de la **composición de funciones**, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.

Según lo propuesto por el curriculum, en este año los estudiantes deben aprender el concepto desde un enfoque **visual**, **algebraico y sistémico** donde predomina la **geometría sintética, la geometría analítica** y el reconocimiento de **invariantes** que caracteriza a cada transformación isométrica y las composiciones que se establezcan entre ellas.

TEXTOS DE ESTUDIO.

En la presente investigación, el análisis de textos escolares tiene por finalidad mostrar el contexto en que está situada la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en primer año medio, puesto que en este año se inicia el estudio de la composición de transformaciones isométricas.

A continuación se presenta una síntesis del análisis de dos textos para el estudiante, en los que se enseña la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, textos actuales que cumplen con la normativa exigida por el ministerio de educación.

1. *Matemática Activa texto para el estudiante 1° Medio editorial Mare Nostrum (2001).* En primer lugar, se inicia con un repaso de las propiedades de la simetría y simultáneamente se va introduciendo la idea de componer dos o más simetrías. Posterior a ello, se definen formalmente cada caso de la composición según la posición de los ejes de simetría; tales definiciones aparecen en un lenguaje natural apoyado de gráficos. En cuanto a la definición de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes se muestra de la siguiente forma:

   En la ilustración los ejes de simetría r y s se intersecan en el punto O formando un ángulo $\propto$. La imagen de F por la reflexión que tiene eje de simetría r es F_1, pero si a continuación aplicas a F_1 la reflexión cuyo eje de simetría es s, obtienes F_2. Observa que la composición de estas dos reflexiones produce el mismo efecto que si hubiese aplicado a F una rotación con centro O y ángulo de rotación $2\propto$. Figura 1.

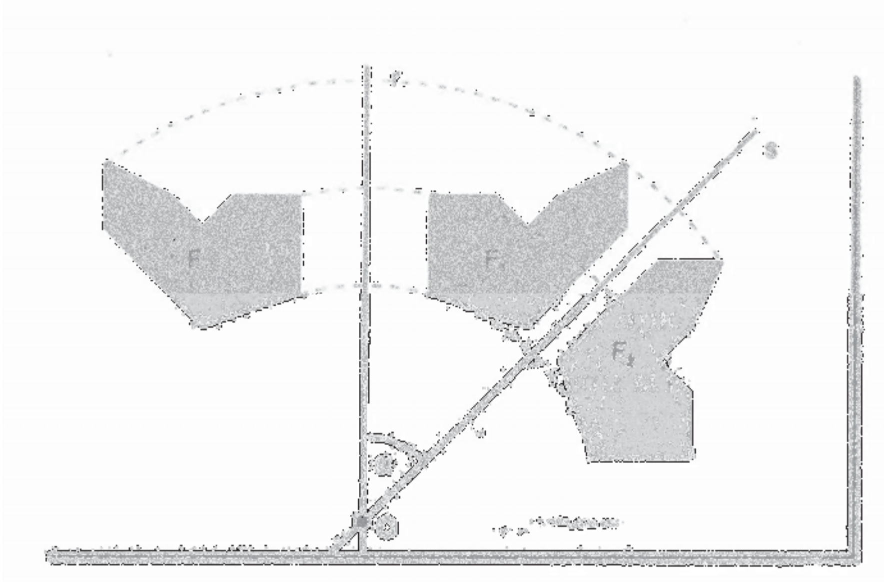
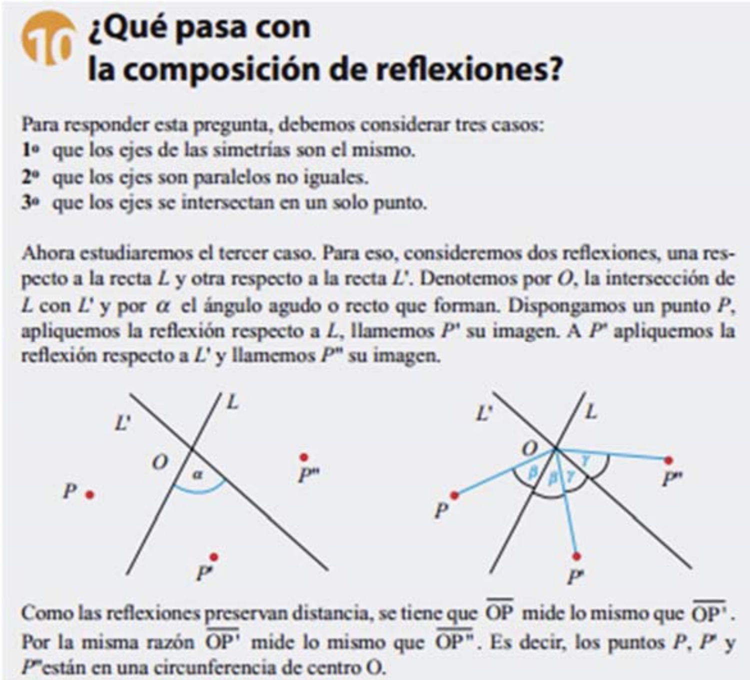


Figura 1. *Matemática Activa 1° medio, Mare Nostrum*

En los ejercicios de aplicación la única pregunta planteada en cuanto a la composición de simetrías es: ¿Qué obtienes cuando reflejas dos veces una figura con respecto al mismo eje? , y de hecho no está enfocada a **ejes secantes**.

2 *Matemática texto del estudiante 1er Año Medio editorial Mc Graw-Hill Interamericana (2009).*

En primer lugar, aparece un repaso de la definición de los movimientos rígidos, incluido el de simetría axial. Luego, se introduce el concepto de composición de cada uno de los movimientos, incluido el de composición de simetría. Al mismo tiempo, se analiza el resultado de componer: una simetría con una traslación, una traslación con una rotación y una simetría con una rotación. En este texto, el estudio de la composición de simetría axial se presenta de forma no aislada, ya que el autor la relaciona con la composición de traslación y la composición de rotación. Además, nombran los tres casos que se pueden dar en la composición de dos simetrías (ejes iguales, ejes paralelos y ejes secantes), pero solo define el tercer caso. Antes de enunciar la definición como tal, se hace un estudio de la misma mediante la visualización de la propiedad, posteriormente se realiza una demostración de ésta, la cual se fundamenta en la geometría euclidiana. Figura 2.



10 ¿Qué pasa con la composición de reflexiones?

Para responder esta pregunta, debemos considerar tres casos:
1° que los ejes de las simetrías son el mismo.
2° que los ejes son paralelos no iguales.
3° que los ejes se intersectan en un solo punto.

Ahora estudiaremos el tercer caso. Para eso, consideremos dos reflexiones, una respecto a la recta L y otra respecto a la recta L'. Denotemos por O, la intersección de L con L' y por α el ángulo agudo o recto que forman. Dispongamos un punto P, apliquemos la reflexión respecto a L, llamemos P' su imagen. A P' apliquemos la reflexión respecto a L' y llamemos P'' su imagen.

Como las reflexiones preservan distancia, se tiene que $\overline{OP}$ mide lo mismo que $\overline{OP'}$. Por la misma razón $\overline{OP'}$ mide lo mismo que $\overline{OP''}$. Es decir, los puntos P, P' y P'' están en una circunferencia de centro O.

Figura 2. *Matemática 1° medio, Mc Graw-Hill Interamericana.*

DESCRIPCIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

En los dos textos analizados, se evidencia un exhaustivo trabajo en comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes a través de un enfoque geométrico. También las propiedades y características son abordadas de este modo geométrico.

El objetivo planteado en el nivel de 1º año medio que los alumnos sean capaces de "Comprender los conceptos y propiedades de la **composición de funciones** y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas" (MINEDUC, 2009, p.180) no ha sido alcanzado en los textos para el estudiante, puesto que los textos se centran únicamente en lo geométrico y algunos intentos por recurrir a lo algebraico. Además, en el estudio exploratorio que se realizó a 58 estudiantes de buen rendimiento académico[8] que cursan tercero medio en diversos colegios de la región metropolita de Santiago (ver Anexo 1 página 119) se evidenció

[8] En la escala de 1 a 7, promedio académico mayor a 5,5

una fuerte carencia en definir la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde sus propiedades. Los estudiantes realizan la composición de dos simetrías con ejes secantes, como lo proponen los textos de forma geometría y también realizan una rotación, pero a la hora de establecer una relación entre estos dos conceptos se evidencian conjeturas hechas a partir de lo visual, más no de la definición, que se supone ya la debieran comprender. Por lo expuesto anteriormente consideramos que los estudiantes no alcanzan la ***comprensión profunda del concepto composición de dos simetrías con ejes secantes***, cuando decimos comprensión profunda, estamos pensando en que el estudiante pueda relacionar las distintas formas de comprender este objeto matemático, ya sea a través de, Movimiento Rígido, como una transformación isométrica o como una rotación la cual está determinada por los elementos que permanecen invariantes respecto al punto de intercepción de los ejes. Lo que centra nuestra atención en un posible obstáculo didáctico.

A partir de lo expuesto en la problemática, surgen las siguientes preguntas que irán guiando la investigación:

- El concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes que prevalece en los Docentes de matemática que imparten la asignatura en estos niveles ¿permite movilizar este objeto matemático, entre sus diferentes definiciones como: Movimiento Rígido, transformación isométrica o como una rotación?
- ¿Qué elementos Matemáticos contribuyen a lograr un tránsito entre los diferentes modos de pensar este objeto matemático?

Para precisar a qué nos se referimos cuando mencionamos, los diferentes modos de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, diseñamos la figura 3, con la intensión de mostrar que el tránsito entre estos, permitirá que el estudiante logre una comprensión profunda del concepto en estudio.

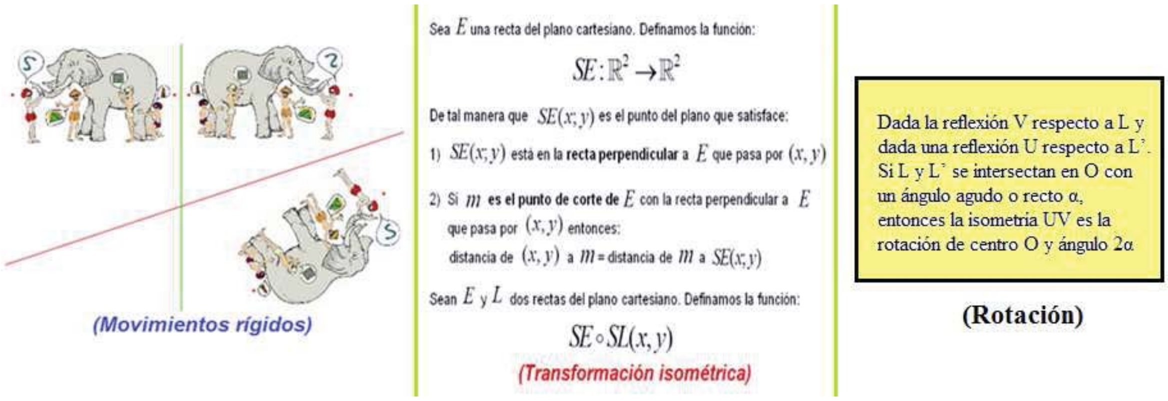


Figura 3. *Muestra los tres modos de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes.*

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

A partir de las interrogantes planteadas y la problemática descrita, se determinan los siguientes objetivos de investigación:

OBJETIVO GENERAL:

Ofrecer un conjunto de sugerencias didácticas basadas en nuestra investigación para la enseñanza del Concepto compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Indagar en los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes que prevalecen en los Docentes de matemáticas, y explorar si estos modos permiten movilizar este objeto matemático en sus distintas definiciones.
- Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las distintas definiciones de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como: Movimiento rígido, transformación isométrica y como una rotación.

CAPÍTULO II: LA COMPONENTE HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA.

LA COMPONENTE HISTÓRICA & EPISTEMOLÓGICA.

Los aspectos teórico matemáticos, históricos y epistemológicos no son en absoluto disjuntos. A continuación, describiremos de manera general la epistemología de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, centrándonos en épocas donde se evidencia un cambio de mirada al comprender este concepto y enfocándonos particularmente en aspectos del objeto matemático que consideramos importantes, como por ejemplo, el surgimiento de enfoques analíticos, sintéticos y estructurales a través de la historia, prestando atención en los elementos de la matemática que permiten su interacción.

De lo anterior, cabe resaltar que el estudio de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes lo veremos inmerso dentro del concepto "transformaciones isométricas", por ser ésta un caso particular de la composición de ellas.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA O SINTÉTICA

Inicialmente el estudio de las transformaciones isométricas se origina, como lo veremos, mediante el estudio de sus propiedades geométricas, en el cual los objetos matemáticos son pensados mediante, figuras o conjunto de puntos.

Así, sin haberlo hecho explicito, los griegos manejaban intuitivamente el concepto de transformación rígida; por ejemplo, en la geometría de Euclides, desde lo que plantea el IV postulado: "todos los ángulos rectos son iguales entre sí" (Vallejo, 1819, p. 193), en la palabra "iguales" se incluye la idea de que se puede mover uno hasta traslaparse sobre el otro.

De lo anterior, mucho se ha discutido, tanto la verdadera significación de este postulado, como el hecho de encontrarse en este lugar, siendo ocasionadas estas discusiones, sobre todo por la duda de si Euclides utiliza o no la *noción de movimiento.* Si esta se acepta como primitiva, como lo ha considerado el *Programa Erlangen, 1872 en el capítulo III "sistematización y fundamentos de la geometría"* (Klein, 1921, p. 460) en el cual la propiedad de ser iguales todos los ángulos rectos resulta como una consecuencia lógica necesaria, y no puede tener su puesto entre los postulados. Algunos comentadores, apoyándose en que Euclides no hace mención explícita del movimiento en las proposiciones fundamentales, opinan que el postulado cuarto, tiene precisamente por objeto introducir la *noción de movimiento*, como debe ser admitida para lo sucesivo, aunque de un modo incompleto.

Otro grupo **de comentadores** que forma parte de la mayoría, cree, por el contrario, que una de las tendencias más esenciales de Euclides, es desterrar de la Geometría la *noción de movimiento*, pero para ello le sería preciso colocar en primer término el *concepto abstracto de congruencia.* En este caso el postulado cuarto sería la *base teórica de la congruencia*, entonces podría preguntarse por qué no hace consideraciones análogas sobre la congruencia de segmentos, **aceptando una como otra de las dos interpretaciones del método de Euclides**, se presentan en su desarrollo grandes dificultades como se explicitará a continuación.

Para ello, tomamos como referencia las *proposiciones fundamentales o axiomas*, según edición de los elemento de Euclides publicado por Heiberg en Copenhague (Leipzig, 1883), las cuales son:

a) Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí; si a=b y b=c, entonces a=c

b) Si a dos cosas iguales se les aumentan otras dos también iguales, se obtienen sumas iguales. S a=b y c=d, entonces a+c = b+d.

c) Si a=b y c=d, entonces, a-c=b-d

d) Dos cosas que coinciden son iguales.

e) El todo es mayor que sus partes: a> a-b.

f) Cuatro de estas proposiciones son de naturaleza lógica y válidas para todas las magnitudes geométricas que después se estudian (segmentos, ángulos, áreas, etc.); la cuarta expresa que la *congruencia o superponibilidad* ha de servir de criterio para la igualdad y la desigualdad, pero deja subsistir la duda de si se presupone o no la noción de movimiento.

g) Las tres primeras proposiciones tienen por objeto la resolución del siguiente problema: *Llevar un segmento dado AB sobre otro CD, a partir de uno de sus extremos C.* Naturalmente, esta construcción puede hacerla prácticamente cualquiera por medio de un compás o de una tira de papel, es decir, por el movimiento de un cuerpo rígido sobre el plano, pero Euclides procede descomponiéndola en series de complicadas construcciones, tales como:

1ra. *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.*

2do. *Tomar un segmento, a partir de un punto C que sea igual a un segmento dado AB.*

3ro. *Dados dos segmentos AB y CF, llevar sobre CF, a partir de C, un segmento igual al AB < CF.*

Después de resuelto el problema, Euclides establece el *primer teorema de congruencia* enunciado del siguiente modo: Dados dos triángulos ABC y A´B´C´, si dos lados del primero son iguales a dos del segundo (AB = A´B´, AC=A´C´) y el ángulo comprendido por aquéllos es igual al comprendido por éstos (A=A´), los dos triángulos tienen respectivamente iguales todos sus elementos. Para demostrarlo, imagina el triángulo A´B´C´ sobre el ABC, de modo que, A´B´ coincida con AB, A´C´ con AC, y el ángulo A´ con el A. Esta demostración supone una grave inconsistencia con el método; en efecto, el autor no dice absolutamente nada respecto al transporte del ángulo, utilizado como el del segmento, en la demostración del teorema de congruencia. Tampoco se menciona la razón de que el tercer lado B´C´ *continúe siendo una recta* después de transportarlo. Claro ésta, que ello es intuitivamente cierto, pero hay que tener en cuenta que el principal objetivo de Euclides es obtener deducciones completamente *lógicas* y en este punto no es consecuente con sus propósitos. En realidad lo que hace Euclides, es suponer implícitamente la posibilidad del **movimiento de figuras geométricas**, **sin alteración de su magnitud ni de su forma,** o sea, esta demostración indica que puede incluirse a Euclides entre los que aceptan como legítima la idea de movimiento; sin embargo es de extrañar que no la haya mencionado en los fundamentos.

La razón de analizar lo anterior, es que la idea de movimiento rígido no aparece explícita en los elementos de Euclides, y que evidentemente es utilizada solo para dar sustento a un concepto menos intuitivo como lo es el concepto abstracto de congruencia. Y lo más caótico es que sin aceptar como primitiva la idea de movimiento no se puede demostrar el primer Teorema de congruencia y es, por consecuente, necesario definirlo como axioma, como se explicita en Klein (1921, p. 460). En conclusión, de los aspectos explícitos e implícitos de este momento histórico podemos definir las transformaciones isométricas como movimientos rígidos en el plano, a modo de ejemplo, en este momento histórico la compuesta de dos simetrías con ejes secantes es comprendida como indica la figura 4.

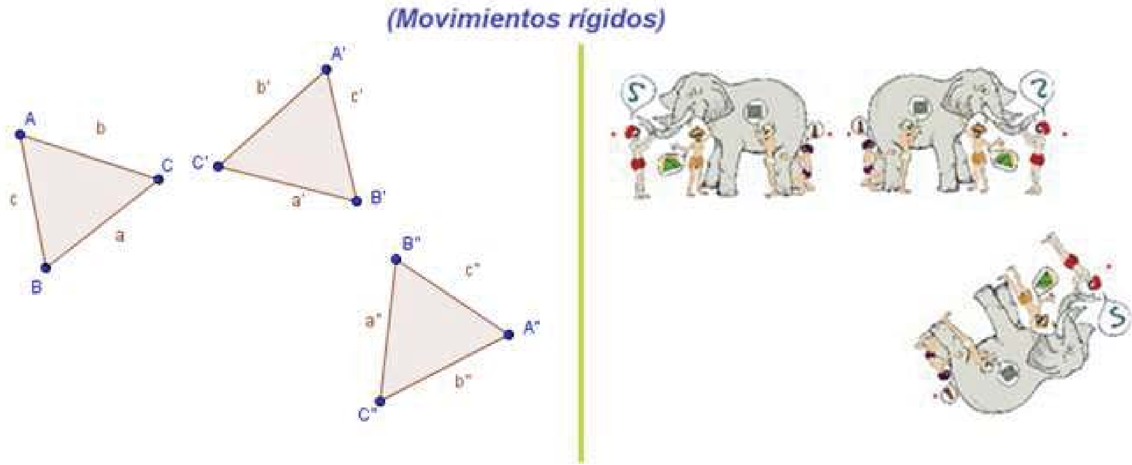


Figura 4. *Movimiento rígido*

Las propiedades que identifican la compuesta de dos simetrías con ejes secantes son:

- La figura y su simétrica a través de la composición conservan tamaño y forma.
- La imagen de una figura a través de la composición de dos simetrías con ejes secantes conserva el mismo sentido de orientación.
- La compuesta preserva distancia y ángulos.

Un hecho que hay que resaltar de este momento histórico es que los griegos no poseían ni *aritmética independiente*, ni fracciones decimales que tanto facilitan el cálculo numérico, ni el cálculo literal general, que son, invenciones del Renacimiento; solamente tenían un *Cálculo en forma geométrica*, en la cual en vez de operar con números, se operaba por medio de construcciones con segmentos y otras magnitudes geométricas, lo que naturalmente, era extraordinariamente más complicado que la Aritmética actual. También carecían del conocimiento de los números negativos y de los imaginarios, que tanta flexibilidad dan a la Aritmética y al Álgebra, y como consecuencia de ello les faltaba la generalidad del método que permite reunir en una sola fórmula todos los casos posibles, de modo que se encontraban continuamente atascados por la consideración de numerosos casos particulares.

En la geometría estas diferencias se acentúan más aún donde basta emplear el auxilio de medios analíticos para lograr una generalidad completa y evitar la discusión de casos particulares como lo estudiaremos a continuación.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Podemos evidenciar históricamente que una segunda forma de ser estudiada la geometría es a través de la aritmetización del espacio, en la que tuvo lugar el pasar de la geometría sintética a la geometría analítica en Rn, la cual, considera los sistemas matemáticos a partir de relaciones numéricas.

Por su parte, el arquitecto e ingeniero francés Gerard Desargues (1591-1661), fue un precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de **propiedades invariantes.** Sus trabajos se inscriben particularmente en el marco de la teoría de las cónicas. Pascal (1623- 1662), siguiendo a Desargues, retoma los métodos proyectivos de este último para redactar su tratado de las cónicas. Como Desargues, Pascal continúa expresando las cónicas como **imagen** de la circunferencia del círculo estableciendo de nuevo el lazo con la perspectiva. En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, pero quedan en el contexto de las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prima la noción de invariante.

En el siglo XVII se produce la alegebrización de la geometría, también llamada el "método de las coordenadas" introducido paralelamente por Fermat (1601–1665) y por Descartes (1596–1650), gracias a ello las propiedades de las transformaciones pasan a ser demostrables algebraicamente y el trabajo de las figuras puede desarrollarse desde las coordenadas de sus puntos. Stone (1961), afirma que los griegos eran conscientes de realizar ciertas operaciones y tratan de resolver problemas algebraicos desde la geometría. La carencia de técnicas algebraicas sencillas y la falta de nivel de abstracción adecuado tropiezan con dificultades, las cuelas desaparecen con la aparición de la geometría cartesiana en el siglo XVII.

En este momento histórico las transformaciones isométricas dejan de ser objetos matemáticos implícitos e inician a ser reconocidas y estudiadas bajo el concepto de funciones biyectivas, de donde podemos comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde de la siguiente forma, figura 5.

(Transformación isométrica)

Sea E una recta del plano cartesiano. Definamos la función:

$$SE : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

De tal manera que $SE(x; y)$ es el punto del plano que satisface:

1) $SE(x; y)$ está en la **recta perpendicular** a E que pasa por (x, y)

2) Si m **es el punto de corte de** E con la recta perpendicular a E que pasa por (x, y) entonces:
distancia de (x, y) a m = distancia de m a $SE(x; y)$

Sean E y L dos rectas del plano cartesiano. Definamos la función:

$$SE \circ SL(x, y)$$

Figura 5. *Transformación Isométrica.*

UNIFICACIÓN DE LAS GEOMETRÍAS.

En este momento histórico siglo XIX se produce la desaritmetización del espacio a su estructuración con la que los vectores abandonan las coordenadas que los anclaban al dominio de los números y se convierten en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas.

En consecuencia, Klein invita el surgimiento del modo de pensar analítico-estructural de las transformaciones, cuando a fines del siglo XIX, surge la noción de grupo que tiene su origen en el estudio de las sustituciones de las raíces de una ecuación algebraica, desarrollada por Galois (1811–1832). Fue en ese momento donde se establecen las relaciones propuestas por Klein (1849– 1925), en donde indica que las propiedades geométricas se caracterizan por su invariabilidad al ser sometidas a un grupo de transformaciones. Es decir, cada tipo de geometría posee su propio grupo; sin embargo, dentro del marco de ese grupo, cada geometría se desarrolla siguiendo líneas similares. Por lo tanto, se logra establecer la unificación de las diferentes geometrías a través de la teoría de grupos.

"El programa Erlangen desarrollado por Klein en 1872, libera el pensamiento geométrico de toda intuición, enriquece la geometría abstracta". (Jahn, 1998 p. 48). En resumen, una geometría es el estudio de las propiedades invariantes por un grupo operado sobre un espacio y ese grupo determina la estructura de la geometría. Así, para Klein, las transformaciones actúan sobre un espacio y no solamente sobre las figuras. "Considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del programa de Erlangen" (Jahn, año, p. 49).

De lo cual, podemos comprender según este momento histórico la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, como se expone a continuación:

> Dada la reflexión V respecto a L y dada una reflexión U respecto a L'.
>
> Si L y L' se intersectan en O con un ángulo agudo o recto α, entonces la isometría UV es la rotación de centro O y ángulo 2α.

Demostración:

Sea **P** un punto, al cual se le aplica la reflexión V y llamemos **P'** su imagen.
A **P'** apliquemos la reflexión U y llamemos **P''** su imagen.

Como las reflexiones preservan distancia, se tiene que $\overline{\mathbf{OP}}$ mide lo mismo que $\overline{\mathbf{OP'}}$.
Por la misma razón $\overline{\mathbf{OP'}}$ mide lo mismo que $\overline{\mathbf{OP''}}$. Es decir **P, P'** y **P''** están en una circunferencia de centro **O.**

Como las reflexiones también preservan ángulos, se tiene que la medida del ángulo entre $\overline{\mathbf{OP}}$ y L es la misma que el ángulo entre L y $\overline{\mathbf{OP'}}$. Llamemos β ese ángulo.

Del mismo modo la medida del ángulo entre L' y $\overline{\mathbf{OP'}}$ es la misma del ángulo entre L' y $\overline{\mathbf{OP''}}$. LLamemos θ a ese ángulo. Por lo tanto el ángulo $\angle$**POP''** mide 2β + 2θ.

Pero, por definición β + θ=α, por lo tanto $\angle$**POP''** mide 2α.

En conclusión, el estudio histórico epistemológico nos brinda diferentes perspectivas con las cuales han sido comprendidas las transformaciones isométricas. Además, nos provee uno de los elementos de la matemática que está articulando o interactuando con cada una de las formas de comprender este objeto matemático, el cual es el de **invariante**. Sin embargo, cabe aclarar que en el contexto de esta investigación, enfocamos nuestro interés en un caso particular de las transformaciones isométricas el cual es la simetría y más específicamente la composición de dos simetrías con ejes secantes.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

JUSTIFICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO.

Desde que son planteadas las preguntas y los objetivos de investigación, se hace necesario contar con un marco teórico que nos provea de herramientas teóricas que permitan mirar la formas de comprender el objeto matemático homotecia en el plano. La teoría modos de pensamiento propuesta por Anna Sierpinska (2000), es apropiada para muestra investigación ya que establece tres formas de comprender un objeto matemático (geométrico, analítico y estructural), además permite establecer las conexiones existente entre estas. Aunque este marco teórico nace y se desarrolla para dar respuestas a problemáticas propias del ámbito del álgebra lineal, se ha podido utilizar en otras investigaciones cuyos objetos matemático de estudio no son necesariamente de ese campo, pero se prestan para ser descritas desde lo geométrico, analítico y estructural, por ejemplo, en el estudio de la elipse (Bonilla, 2011).

DESCRIPCIÓN DEL MARCO TEÓRICO

Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000), es una teoría que nace en el seno del Álgebra Lineal, con la intención de hacer más explícito el pensar teóricamente los conceptos que la componen, proponiendo para ello tres modos de pensamiento, que se pueden reportar desde el desarrollo histórico epistemológico del álgebra lineal y que están presentes en otros conceptos matemáticos hoy en día:

- El modo de pensamiento sintético-geométrico (SG) utiliza la representación gráfica de los objetos, es así por ejemplo como visualmente se tienen puntos, líneas, planos, figuras y cuerpos geométricos.
- En el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son dados a través de relaciones numéricas. Por ejemplo los vectores pasan a ser representados en n-uplas, las rectas por ecuaciones lineales, los planos por sus sistemas de ecuaciones lineales y una figura geométrica por sistema de inecuaciones lineales.
- En el modo analítico–estructural (AE) los objetos quedan representados a través de las propiedades que estos poseen o los axiomas que permiten explicarlos.

Cada uno de los modos de pensamiento permite una mirada diferente del objeto matemático, lo cual conduce a distintas comprensiones del mismo; cada uno de ellos no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que por el contrario, son igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y sobre todo cuando están interactuando.

La problemática fundamental, en la cual se enmarca esta teoría, es alcanzar niveles superiores de abstracción para enriquecer el aprendizaje del objeto matemático en estudio, a través de la conexión entre los distintos modos de pensamiento, debido a que, como se mencionó anteriormente, los modos de pensamiento son formas de ver el objeto y solo se llega a una comprensión de éste cuando se logra alcanzar la abstracción del mismo, a través de una articulación entre SG, AA y AE.

La presente investigación utiliza como marco teórico, la teoría de modos de pensamiento de Anna Sierpinska (2000), la cual indica que para comprender plenamente un objeto matemático, éste debe ser pensado en tres modos; el SG, el AA y el AE y además se hace necesario explicitar los elementos de la matemática que están propiciando el tránsito de un modo de pensamiento a otro. Aunque este marco teórico se aboca mayoritariamente al estudio de conceptos ligados al álgebra lineal, sin embargo a partir del estudio histórico-epistemológico que se realizó para las Transformaciones Isométricas en el Capítulo II (p. 19) es posible representar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en dichos modos de pensamiento.

El modo de pensamiento SG para la compuesta de dos simetrías con ejes secantes: utiliza la representación gráfica del movimiento rígido de los objetos en el plano Euclidiano. Por ejemplo, ver figura 6.

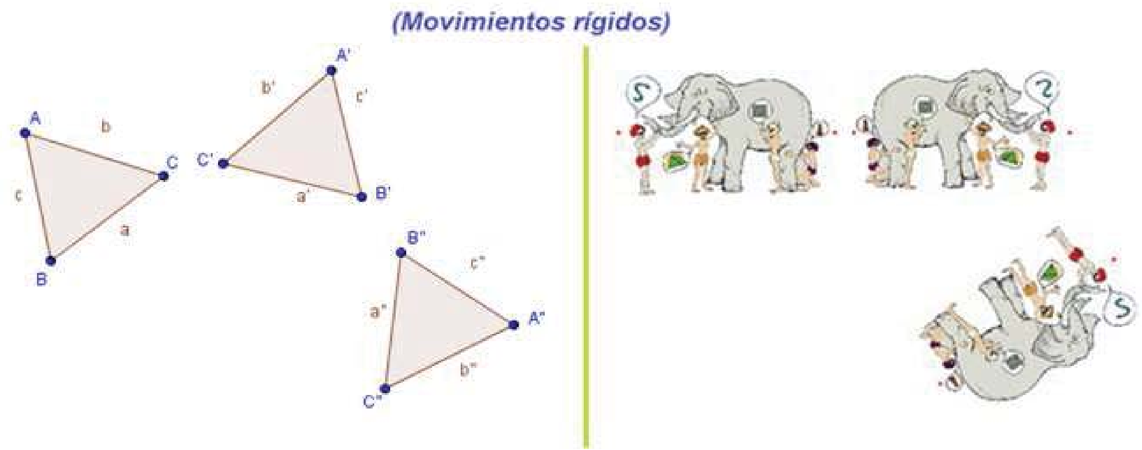
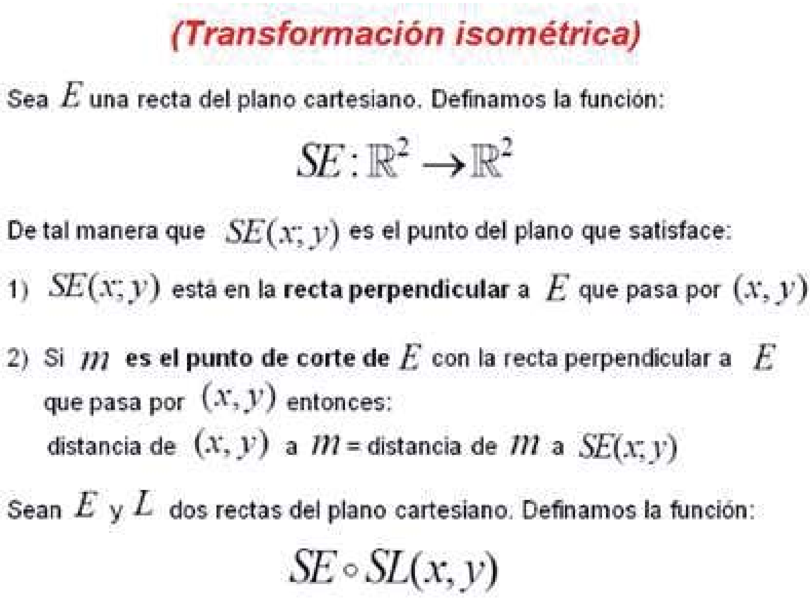


Figura 6. *Movimiento rígido de una figura plana según el modo de pensamiento SG.*

En el modo AA para la compuesta de dos simetrías con ejes secantes: los objetos se dan indirectamente, ellos se construyen por la definición de sus elementos. Por ejemplo las figuras pasan a ser representadas por un conjunto de pares ordenados (x, y), los ejes de simetría son representados por ecuaciones generales de las rectas $y = mx + b$ y las imágenes simétricas son pares ordenados (x_o, y_o) que cumplen condiciones establecidas. Por ejemplo, Figura 7


(Transformación isométrica)

Sea E una recta del plano cartesiano. Definamos la función:

$$SE : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

De tal manera que $SE(x; y)$ es el punto del plano que satisface:

1) $SE(x; y)$ está en la **recta perpendicular** a E que pasa por (x, y)

2) Si m **es el punto de corte de** E con la recta perpendicular a E que pasa por (x, y) entonces:
distancia de (x, y) a m = distancia de m a $SE(x; y)$

Sean E y L dos rectas del plano cartesiano. Definamos la función:

$$SE \circ SL(x, y)$$

Figura 7. *Transformación Isométrica en R^2según el modo de pensamiento AA.*

Debemos señalar la importancia de los invariantes que definen a la simetría para poder transitar del modo SG al AA, como los son: distancia, tamaño, forma y perpendicularidad.

El Modo AE para la compuesta de dos simetrías con ejes secantes: Sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales, en otras palabras, los objetos se describen a través de las propiedades que estos poseen o los axiomas que permiten explicarlos.

Según el estudio epistemológico y matemático realizado la (p. 20) indica que ésta puede ser comprendida como: Dada la reflexión V respecto a L y dada una reflexión U respecto a L'. Si

L y L' se intersectan en O con un ángulo agudo o recto α, entonces la isometría UV es la rotación de centro O y ángulo 2α.

Debemos señalar la importancia de los invariantes respecto al punto de intersección de los ejes de simetría para poder transitar del AE al SG o del AE al AA o para la articulación de los tres modos simultáneamente.

EJEMPLO QUE ILUSTRAR EL MARCO TEÓRICO

Un ejemplo que permite ilustrar el marco teórico en el objeto matemático composición de dos simetrías con ejes secantes.

1.- Sea A el punto (-3,5) y sea B el simétrico de A respecto a la recta y= -3x. Sea C el simétrico de B respecto a la recta y= 2x

a) Hallar las coordenadas exactas de B.

b) Hallar las coordenadas exactas de C.

Esta pregunta tiene por objetivo explorar los posibles tránsitos que realiza el docente entre los modos AA y SG de la compuesta de dos simetría con ejes secantes. Se espera que los docentes puedan pensar este objeto matemático a partir de un desarrollo principalmente aritmético, es decir, dado un punto (x, y) y las **ecuaciones** de dos rectas secantes hallar las coordenadas exactas del simétrico de (x, y) mediante la composición de dos simetrías tomando como ejes las rectas secantes dadas. Un docente puede situar en un modo:

SG: El docente puede recurrir al modo Sintético - geométrico para gráfica los puntos y los ejes de simetría en el plano cartesiano, pero este modo de pensar no le será suficiente para poder hallar las coordenadas **exactas** de B, a lo sumo llegará a una aproximación de las coordenadas de B. Figura 8

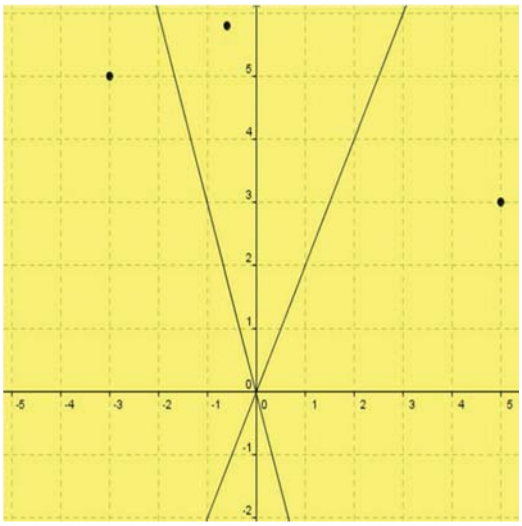


Figura 8.

Teniendo en cuenta lo siguiente definiremos los diferentes modos AA en que puede ser abordada la actividad. Si el docente recurre al grafico para verificar que sus resultados analíticos son apropiados, entonces se propiciará un tránsito $SG \leftrightarrow AA$ si no recurre al gráfico entonces estará situado únicamente desde AA.

AA (1):

- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y_1 = -3x$ y que pase por el punto $(-3; 5)$
- Sea y_2 esa recta, entonces $y_2 = \frac{1}{3}x + b \rightarrow 5 = \frac{1}{3} \cdot (-3) + b$ resolviendo

  $5 = -1 + b \rightarrow b = 6 \rightarrow \boldsymbol{y_2} = \frac{1}{3}x + 6$
- hallar el punto de intersección de $y_1\ con\ y_2$, igualando $y_1 = y_2$ tenemos:

  $-3x = \frac{1}{3}x + 6$ De donde $x = -\frac{9}{5}$, reemplazando en y_1 resulta: $y = -3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{27}{5} \rightarrow y_1 \cap y_2 = \boxed{\left(-\frac{9}{5}; \frac{27}{5}\right)}$ nombrémoslo Q
- Por propiedad de la simetría Q es punto medio de A y su simétrico B. Entonces $\left(-\frac{9}{5}; \frac{27}{5}\right) = \left(\frac{-3+x}{2}; \frac{5+y}{2}\right) \rightarrow -\frac{9}{5} = \frac{-3+x}{2}$ y $\frac{27}{5} = \frac{5+y}{2} \rightarrow$ $x = -\frac{3}{5}\ e\ y = \frac{29}{5} \rightarrow las\ \boldsymbol{coordenadas\ exactas}\ de\ \boldsymbol{B}\ son\ \left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$
- Para hallar C, el simétrico de B = $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$ respecto a la recta $y = 2x$ se realiza un proceso análogo al anterior, de lo cual se tiene que $C = (5\,; 3)$.

AA (2):

- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y_1 = -3x$ y que pase por el punto $(-3;5)$
- Sea y_2 esa recta, entonces $y_2 = \frac{1}{3}x + b \rightarrow 5 = \frac{1}{3}\cdot(-3) + b$ resolviendo

  $5 = -1 + b \rightarrow b = 6 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_2} = \frac{1}{3}x + 6}$
- hallar el punto de intersección de $y_1\ con\ y_2$, igualando $y_1 = y_2$ tenemos:

  $-3x = \frac{1}{3}x + 6$ De donde $x = -\frac{9}{5}$, reemplazando en y_1 resulta:

  $y = -3\cdot\left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{27}{5} \rightarrow y_1 \cap y_2 = \boxed{\left(-\frac{9}{5};\frac{27}{5}\right)}$ nombrémoslo Q
- Por propiedad de la simetría $d\ (\overline{AQ}) = d\ (\overline{QB})$, por lo tanto:

$$d\ (\overline{AQ}) = \sqrt{\left(-3+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

- Por propiedad de la simetría $d\ (\overline{AQ}) = d\ (\overline{QB})$, por lo tanto:

$$d\ (\overline{AQ}) = \sqrt{\left(-3+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$d(\overline{QB}) = \sqrt{\left(x+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 6 - \frac{27}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\left(x+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x + 6 - \frac{27}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} \rightarrow \frac{10}{9}x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot\frac{10}{9}\cdot 2}}{2\cdot\frac{10}{9}}$$

$x_1 = \frac{-3}{5}$; $y_1 = \frac{29}{5}$ e $x_2 = -3$; $y_2 = 5 \rightarrow$ las **coordenadas exactas** de B son $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$

Para hallar C, el simétrico de B = $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$ respecto a la recta $y = 2x$ se realiza un proceso análogo al anterior, de lo cual se tiene que $C = (5\,;3)$

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

MARCO METODOLÓGICO:

Estudio de Caso

En el marco de la problemática y objetivos de la investigación:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Indagar en los elementos de la matemática que propician el tránsito entre las distintas definiciones de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como: Movimiento rígido, transformación isométrica y como una rotación.

- Indagar en los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes que prevalecen en los Docentes de matemáticas, y explorar si estos modos permiten movilizar este objeto matemático en sus distintas definiciones.

Es pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de caso, en la medida que “son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo”, facilitando la identificación de los distintos procesos interactivos que conforman una realidad (Del Rincón y Latorre, 1992). En esta investigación nos referiremos a estudios de caso en la medida que analiza en concreto realidades específicas y singulares, que adquieren su valor como indagaciones intensivas y con profundidad en casos particulares; contrasta realidades específicas de las que pueden extraerse problemas comunes y matizaciones singulares, pero de ninguna manera explicaciones genéricas y definitivas sobre la realidad estudiada.

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN.

Se presenta el diseño metodológico de manera resumida en la Tabla 1, mediante la cual se detalla cada etapa que la conforma:

ETAPA 1: ESTUDIO EXPLORATORIO		
Diseño metodológico	Instrumento	Población
Estudio de caso	Cuestionario	58 estudiantes que cursan tercero medio
ETAPA 2: ÁNALISIS EPISTEMOLOGICO & MATEMÁTICO DEL OBJETO MATEMÁTICO		
Revisión documental	Antecedentes epistemológicos y matemáticos. (revisión bibliográfica)	
ETAPA 3: DISEÑO Y APLICACIÓN CUESTIONARIO MODOS DE PENSAR LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES		
Diseño metodológico	Instrumento	Población
Estudio de caso	Cuestionario	14 Docentes de matemáticas.

Tabla 1 *Etapas de Investigación*

PRIMERA ETAPA: CUESTIONARIO EXPLORATORIO.

Con el fin de explicitar la importancia de Investigar sobre los modos de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, realizaremos un estudio de caso, de tipo exploratorio, estos nos permiten aproximarnos a fenómenos desconocidos, contribuyendo con evidencias empíricas que puedan documentar la problemática planteada.

EL CUESTIONARIO EXPLORATORIO

El instrumento (ver anexo 1, p. 119) consta de tres preguntas abiertas. El objetivo de la primera pregunta del cuestionario es constatar si los estudiantes saben componer dos simetrías con ejes secantes en el plano Euclidiano. Las dos siguientes preguntas tienen por objetivo verificar si los estudiantes ponen de manifiesto la comprensión de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes a través de sus propiedades, el cual, es uno de los objetivos fundamentales del programa de estudio de primero medio (MINEDUC, 2009, p.180).

LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO EXPLORATORIO

Un grupo de 56 estudiantes conforman el grupo exploratorio, éstos son estudiantes de buen rendimiento de la escuela de desarrollo de talentos de la Universidad de Chile de la facultad de

Economía y Negocios. En el presente año (2013) cursan tercer año de enseñanza Media. Este grupo de informantes pertenecen a distintos establecimientos de la Región Metropolitana, los cuáles fueron seleccionados por la universidad debido a su excelente rendimiento académico[9]. A ellos se tuvo acceso ya que actualmente uno de los investigadores labora como ayudante de geometría para la Escuela de desarrollo de Talentos.

SEGUNDA ETAPA: ANÁLISIS DOCUMENTAL

En relación al primer objetivo de investigación, indagamos sobre los elementos de la matemática que permiten conectar las distintas definiciones de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes y, además ayudan en su comprensión (ver capítulo I "la componente histórica y epistemológica", p. 20). La indagación se realizo a través de una revisión bibliográfica pertinente como: (Klein, 1921, p. 460), (Vallejo, 1819, p. 193), (Leipzig, 1883), (Jahn, 1998 p. 48) entre otras, logrando pesquisar elementos propios de la disciplina que permiten un conocimiento sistemático del concepto en estudio, como lo son los **invariantes operatorios**.

TERCERA ETAPA: DISEÑO Y APLICACIÓN CUESTIONARIO MODOS DE PENSAR LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES.

En relación al segundo objetivo específico de investigación, diseñamos un instrumento (ver anexo 2, p. 120) donde se organizó una serie de actividades con el fin de indagar, como primer aspecto, en los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, que prevalecen en los docentes de matemáticas y mostrar a partir de sus argumentos la articulación o tránsito entre las diferentes formas de comprender este objeto matemático. Además, como segundo aspecto, evidenciar empíricamente la existencia de un obstáculo didáctico en la comprensión de este objeto matemático. Estas actividades fueron construidas teniendo como referente teórico los modos de pensamiento y utilizando elementos encontrados en las indagaciones epistemológicas, matemáticas (Referidas al primer objetivo de investigación, p. 38).

[9] En la escala de 1 a 7, promedio académico mayor a 5,5

DESCRIPCIÓN Y FUNDAMENTACIÓN DEL CUESTIONARIO

El instrumento (Ver anexo 2, p. 120) consta de cuatro actividades principales, las cuales en su mayoría son diferentes a las que se platean en los diferentes textos de estudio, ya que en cada una de ellas presentamos un enfoque diferente de nuestro objeto de análisis, La intención es documentar de qué forma el docente de matemática se enfrenta a las actividades y que conocimientos pone en juego para responder.

La intención del cuestionario es indagar los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes y las conexiones que propician el tránsito entre estos modos: sintético-geométrico, analítico- aritmético y analítico- estructural, presentes en docentes de matemática. Para ello las actividades están diseñadas en su totalidad para documentar las articulaciones entre los tres modos SG–AA–AE de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

Consideramos importante dar prioridad al tránsito entre AE-SG y AE-AA de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, para analizar los elementos de la matemática que están presentes y potenciar la comprensión de este objeto matemático desde su definición.

EL CASO EN ESTUDIO

El caso de estudio lo conforman 14 docentes de matemática de Chile, que cursan estudios de postgrado de Maestría. Elegimos estos docentes porque consideramos importante evidenciar los modos de comprender la simetría con ejes secantes que predominan en los docentes de matemática, las posibles conexiones que logran establecer entre los distintos modos y los elementos de la matemática que ponen en juego. Además, son los informantes adecuados para establecer si la falta de una comprensión estructural de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, se debe o no a un obstáculo didáctico.

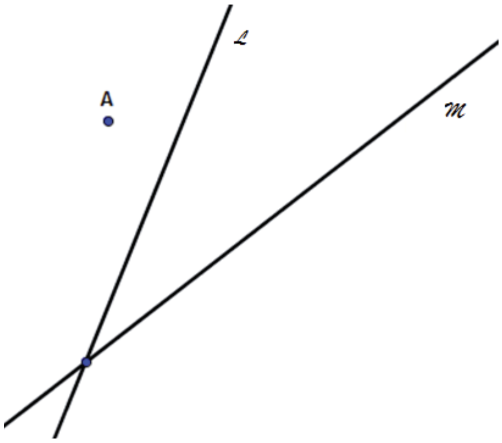
VALIDACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

Los cuestionarios aplicados a los estudiantes fueron sometidos a diversas instancias de co-evaluación por un grupo de didactas que ha realizado investigaciones utilizando el marco teórico de los modos de pensamiento, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

CAPITULO V: ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS

ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO EXPLORATORIO. [10]

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y $\mathscr{L}$ una recta, sea B el simétrico de A respecto a $\mathscr{L}$ *y* sea C el simétrico de B respecto a la recta $\mathscr{M}$. Hallar C



Esta pregunta tiene por objetivo, constatar que los estudiantes comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes. Los estudiantes para responder esta actividad 1, pueden situarse en el modo sintético-geométrico, a partir del cual hemos identificado tres formas posibles de abordase ésta:

Sintético – geométrico 1: Doblando la hoja por cada uno de los ejes de simetría y copiar los puntos simétricos, así se pueden obtener el simétrico de A que es B y el simétrico de B que es C. Como lo indica la figura 9:

[10] Los participantes tenían la opción de utilizar regla, compás y transportador.

Figura 9.

Sintético – geométrico 2: Construcción con compás.

Desde el punto A dado, con una abertura del compás cualquiera, se traza un arco que corte a la recta L dada. Se obtienen dos puntos. Figura 10.

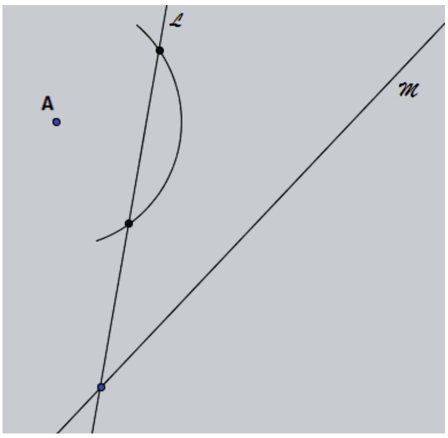


Figura 10.

Desde los puntos de corte se trazan dos arcos con la abertura del compás de igual medida a la utilizada en el procedimiento anterior. Figura 11.

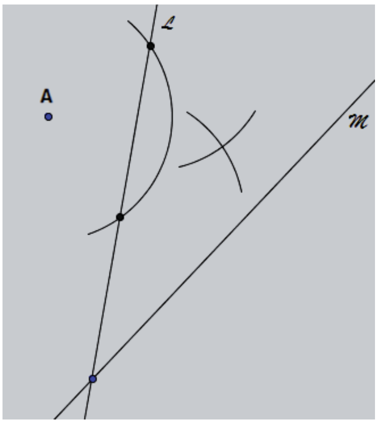


Figura 11.

En la intersección de los arcos está ubicado el simétrico de A respecto L. Análogo para hallar c. Figura 12.

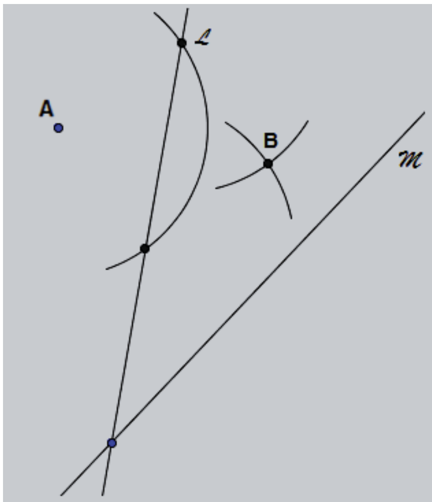


Figura número 12.

Sintético – geométrico 3: Construcción con regla.

Trazar la recta perpendicular a L, de tal forma que pasa por el punto A. figura 13.

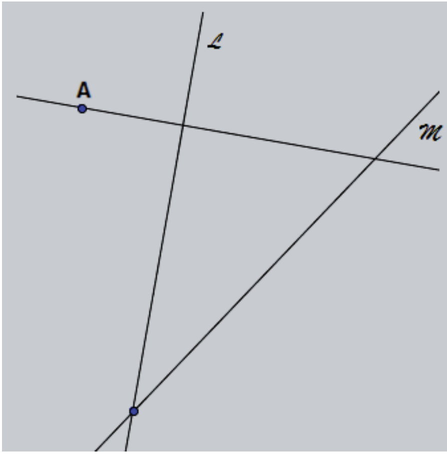


Figura 13.

Marcar el punto de intersección de las dos rectas. Figura 14

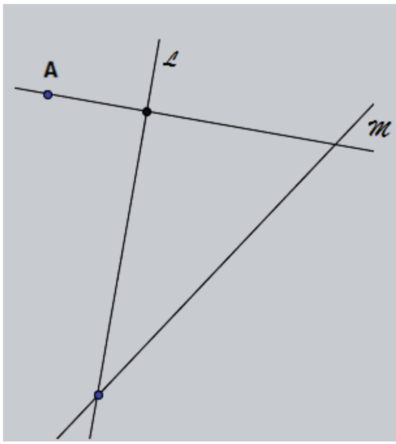


Figura 14.

Ubicar el simétrico de A, en este caso el punto B, sobre la recta perpendicular a L tal que la distancia de A al punto de intersección sea igual a la distancia del punto de intersección a B, donde A≠B. Igualmente se procede para determinar el punto C. Figura 15

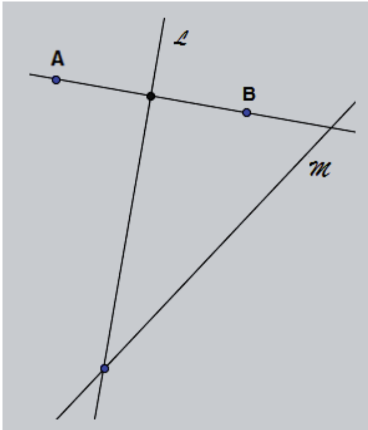


Figura 15.

ACTIVIDAD 2: Sean A y P dos puntos. Rotar el punto A 60° (en sentido horario) respecto a P.

Con esta actividad se espera verificar si los estudiantes comprenden la rotación de un punto respecto de otro (debido a que la compuesta de dos simetrías es una rotación)

Sintético – geométrico 1: Trazar el segmento PA y rotarlo 60° con el transportador. Figura 16

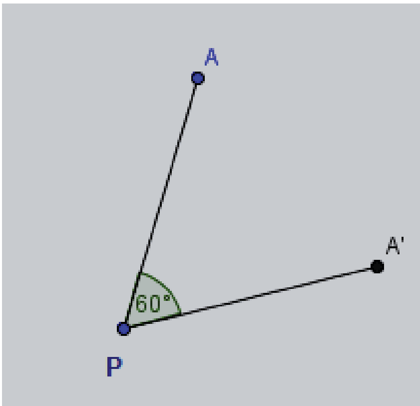


Figura 16.

Sintético – geométrico 2: Construir la circunferencia de centro P, que pasa por A. Marcar 60° de modo que el radio AP sea uno de los rayos del ángulo (en sentido horario). El rayo que forma 60° intercepta a la circunferencia en un punto, ese punto es P'. Figura 17.

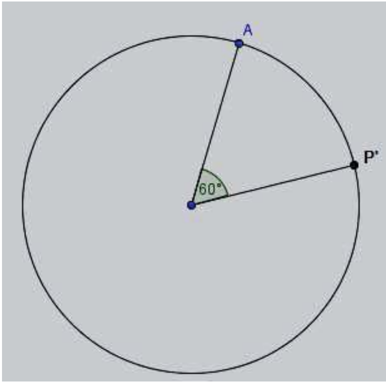


Figura 17.

ACTIVIDAD 3: ¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

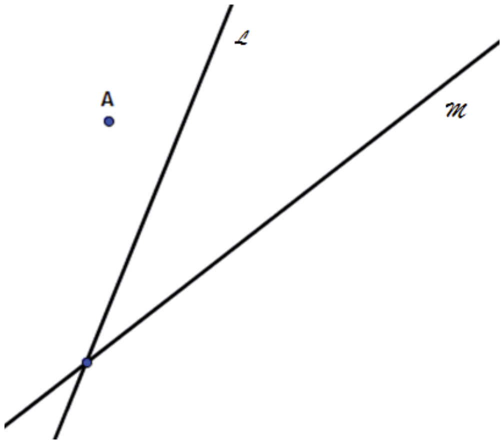
Con esta actividad se espera identificar si los estudiantes comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes de forma sistémica y estructural. En la primera interrogante de esta actividad un estudiante puede situarse en los modos:

Sintético – geométrico: identificando que en ambas actividades el punto A fue rotado.
Analítico–Aritmético 1: sea Q el punto de intersección de los ejes de simetría en la actividad 1, el estudiante puede responder midiendo el ángulo AQC y constatar que es 60°, el cual, es el mismo ángulo de rotación de A, propuesto en la actividad 2.
Analítico–Aritmético 2: el estudiante además de identificar el modo analítico aritmético 1, puede medir con el transportador el ángulo formado por la intersección de los dos ejes, en este caso 30° y establecer una relación con el ángulo de rotación de la segunda actividad, es decir, mencionar que 30° es el doble de 60°.

En la segunda interrogante de esta actividad, el estudiante necesariamente debe situarse en el modo **Analítico-Estructural:** justificando que la relación se da porque la compuesta de dos simetrías con ejes secantes es una rotación, además, si el ángulo comprendido entre los ejes de simetría es agudo, entonces es una rotación con centro en el punto de intersección de los dos ejes y cuyo ángulo es dos veces el ángulo comprendido entre los ejes.

ÁNALISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO EXPLORATORIO

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y $\mathcal{L}$ una recta, sea B el simétrico de A respecto a $\mathcal{L}$ *y s*ea C el simétrico de B respecto a la recta $\mathcal{M}$. Hallar C



Resultados de la actividad 1

46 de los estudiantes se sitúan en el modo Sintético geométrico 3 para responder. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El estudiante 1, nombrémoslo E1 responde situándose desde un modo sintético geométrico (SG3), puesto que construye con regla el simétrico de cada punto y lo hace basándose solo en la grafica. Figura 18.

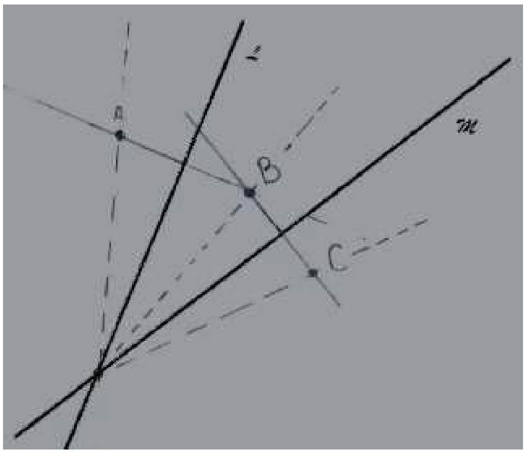


Figura 18.

A diferencia de las otras respuestas, el estudiante E2 explicita que la recta que pasa por un punto y su simétrico forma un ángulo recto con el eje de simetría, es decir, son rectas perpendiculares. Figura 19.

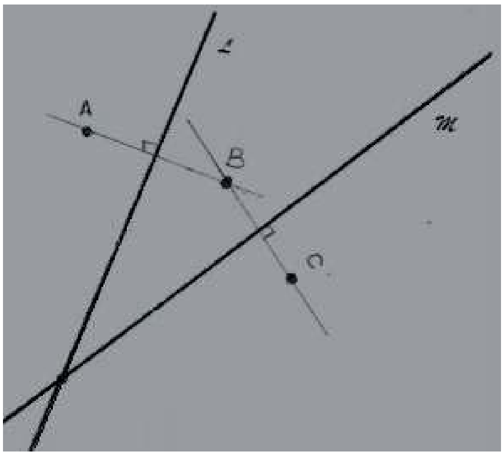


Figura 19.

Por otra parte, el estudiante E3 verifica que la distancia del punto A al eje de simetría es la mima que la distancia del punto B al eje de simetría. Figura 20.

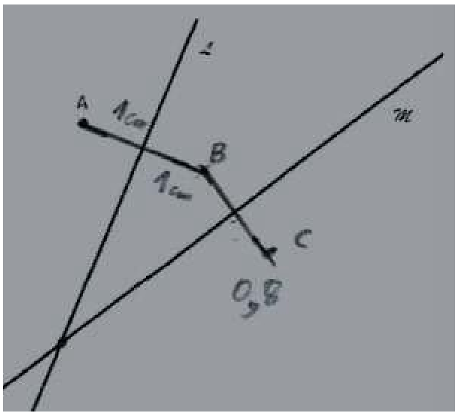


Figura número 20.

12 de los estudiantes resuelven la actividad de forma inadecuada, es decir, no saben el concepto de simetría, por ende no logran resolver la actividad de componer dos simetrías con ejes secantes.

ACTIVIDAD 2: Sean A y P dos puntos. Rotar el punto A 60° (en sentido horario) respecto a P.

Resultados de la actividad 2

50 de los estudiantes logran resolver la actividad situados en el modo sintético – geométrico 1

A continuación se muestra solo un ejemplo, debido a que los estudiantes presentan respuestas similares. Figura 21

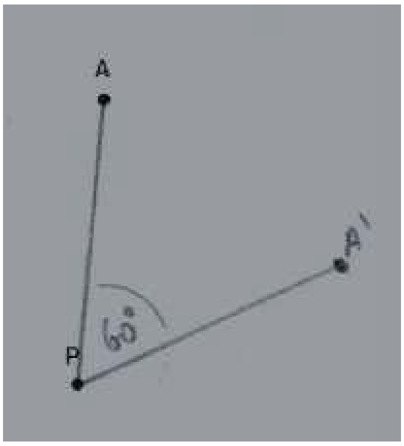


Figura 21.

8 de los estudiantes confunden el concepto de ángulo con el de rotación y contestan de forma errónea. Cabe aclarar que estos 8 estudiantes están también dentro de los 12 que no respondieron de forma adecuada la actividad 1. Un ejemplo de respuesta es el siguiente: Figura 22.

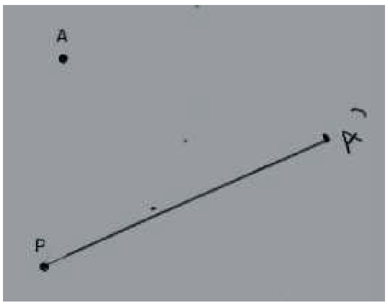


Figura 22.

ACTIVIDAD 3: ¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

12 de los estudiantes logran establecer una relación entre las dos actividades.

3 de ellos lo hacen desde un modo sintético geométrico ya que establecen relaciones únicamente a través de la visualización. A continuación se muestran sus respuestas:

El estudiante E4 logra identificar que las dos actividades se parecen, pero no menciona ningún argumento más para validar su conjetura. Además, la palabra que escribe "se parecen" alude a que puede o no que sean iguales para él. Figura 23.

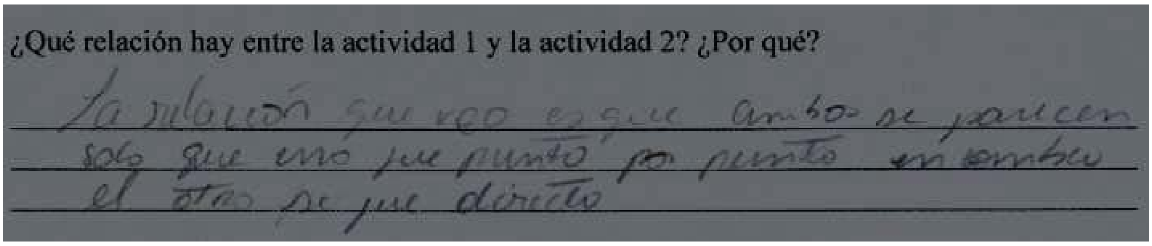


Figura 23.

Transcripción: "la relación que **veo** es que ambas **se parecen** solo que una fue punto por punto en cambio el otro se fue directo".

El estudiante E5 logra identificar que en ambas actividades se realiza una rotación de ángulos agudos, pero no menciona que se trata de la misma rotación. Figura 24

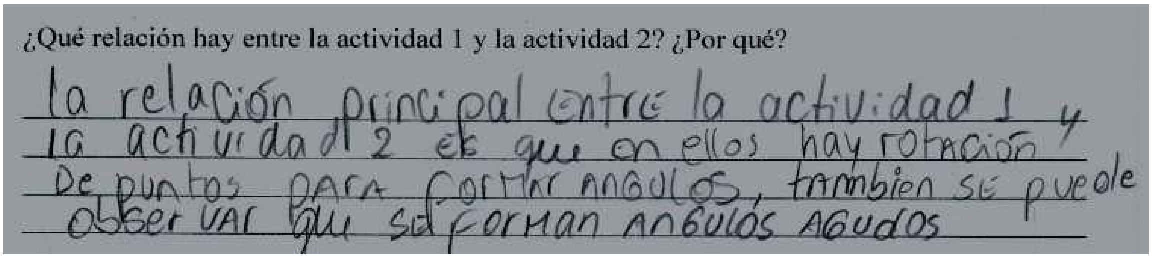


Figura 24.

El estudiante E1 logra identificar que en las dos actividades está presente el concepto de rotación y especifica el centro de rotación de la actividad 1, el cual es la intersección de los ejes de simetría. Figura 25

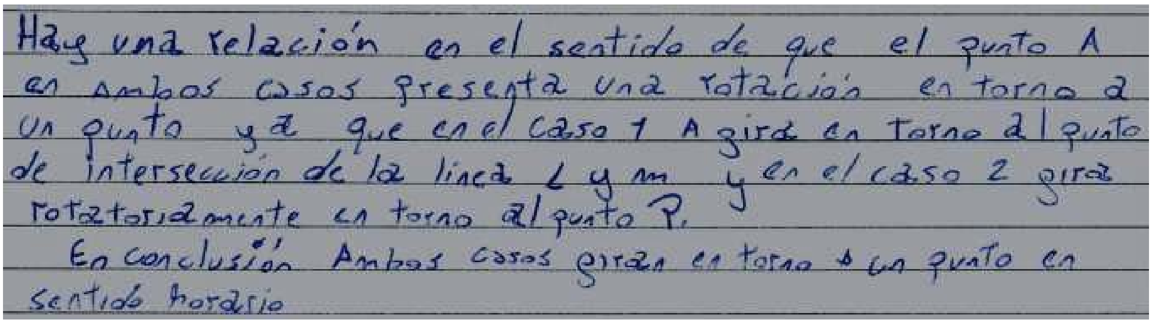

Hay una relación en el sentido de que el punto A en ambos casos presenta una rotación en torno a un punto ya que en el caso 1 A gira en torno al punto de intersección de la linea L y m y en el caso 2 gira rotatoriamente en torno al punto P.
En conclusión Ambos casos giran en torno a un punto en sentido horario

Figura 25.

Entre las respuestas de la actividad 3 encontramos también que 9 estudiantes abordan la actividad desde un modo **Analítico Aritmético 1** puesto que encuentran relaciones numéricas entre los ángulos que se forman en ambas actividades. A continuación se muestran sus respuestas:

En la respuesta de E2 se puede evidenciar que a pesar de encontrar una relación numérica entre los ángulos no explicita que en ambas actividades se produce una rotación. Figura 26

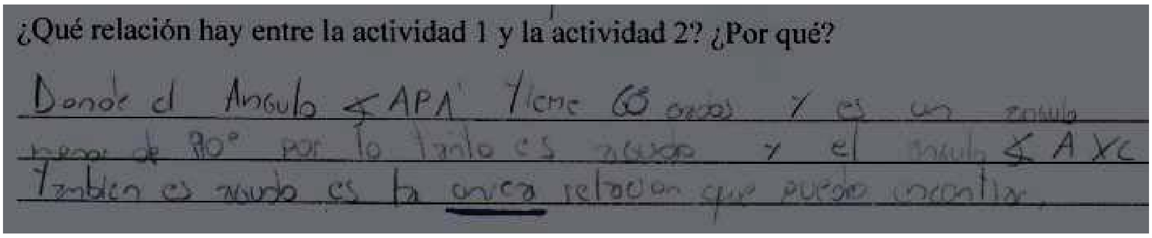

¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?
Donde el Angulo ∡APA' tiene 60 grados y es un angulo menor de 90° por lo tanto es agudo y el angulo ∡AXC tambien es agudo es la unica relacion que puedo encontrar.

Figura 26.

Transcripción: "Donde el ángulo APA' tiene 60° grados y es un ángulo menor de 90°, por lo tanto, es agudo y el ángulo AXC también es agudo es la única relación que puedo encontrar".

El la respuesta del estudiante E3 podemos ver que a pesar de encontrar relaciones numéricas entre los ángulos no explicita que en ambas actividades se produce una rotación. Figura 27.

La relación que existe en la actividad 1 y 2 es que
en la actividad 1 si tomamos del punto P en ángulo recto
al punto a y medimos con el transportador al punto c obtenemos
60° lo mismo sucede con la actividad nº 2

Figura 27.

El estudiante E6 respondió que en las dos actividades había una rotación de 60°. Figura 28.

¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

En la activad 1, entre el punto a y c hay una
rotación de 60 grados con respecto al punto de
intersección entre las rectas L y m, y en la
actividad 2, al igual que la actividad, hay
una rotación de 60° con respecto al punto P

Figura 28.

El estudiante E7 dedujo que en las dos actividades se producía una rotación de 60°, además situándose en un modo sintético geométrico expresa que en ambas actividades se produce la misma figura, es decir, intuitivamente provee que es la **misma** rotación en ambos casos. Figura 29.

¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

En la actividad 1 el punto A es la base para encontrar
el punto C, y desde el punto A al punto C se
produce una rotación de 60° y en la actividad 2
el punto A también en la base y también se rotó 60°.
Es como dos formas de llegar al mismo resultado
En la actividad 1 trazamos rectas desde los puntos A y C
hacia un punto en común (P) observamos que se
forma la misma figura que en la actividad 2

Figura 29.

Transcripción: " En la actividad 1 el punto A es la base para encontrar el punto C, y desde el punto A al punto C se produce una rotación de 60° y en la actividad 2 el punto A **también es la base y también se rota 60°**, es como dos formas de llegar al mismo resultado, en la actividad 1 trazamos rectas desde los puntos A y C hacia un punto en común (P) **observamos que se forma la misma figura que en la actividad 2.**

El estudiante E8 respondió:

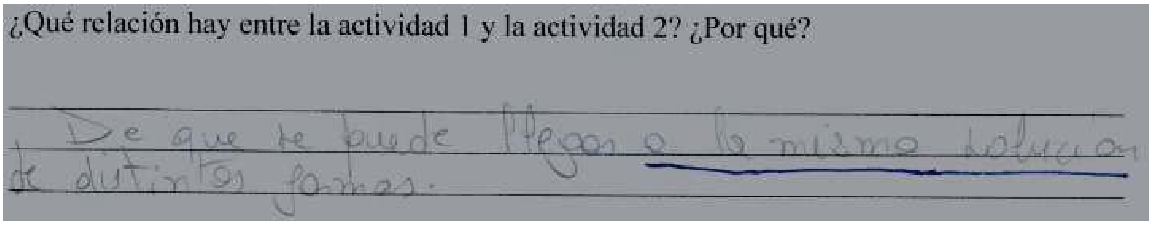


Figura 30. *Respuesta de E8*

Transcripción: "De que se puede llegar a **la misma solución** de distintas formas".

43 estudiantes de los 58, no encuentran una relación cierta entre las dos figuras, es decir responden erróneamente.

CONCLUSIONES EN RELACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN.

La mayoría de los estudiantes logra realizar la composición de dos simetrías con ejes secantes y la rotación de un punto respecto a otro, pero al momento de establecer relaciones entre estos dos conceptos no logran comprender de forma estructural lo que sucede, es decir, no ponen de manifiesto las propiedades que definen el comportamiento de dos simetrías con ejes secantes y su relación directa con el concepto de rotación.

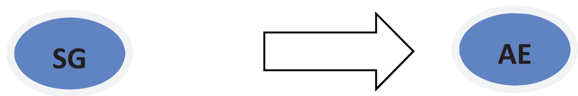
De los 12 estudiantes que respondieron la actividad 3 podemos evidenciar que presentan grandes dificultades para pensar el concepto en un modo analítico - estructural. Esto queda en evidencia, por los argumentos que priorizan, donde responden desde un modo sintético geométrico y analítico aritmético en los cuales predomina una fuerte influencia de lo visual.

En conclusión, los estudiantes no logran comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde sus propiedades como lo proponen los planes y programas de estudio. De lo anterior, consideramos que esto se debe a la enseñanza que se ha impartido de este concepto, es decir a un obstáculo didáctico.

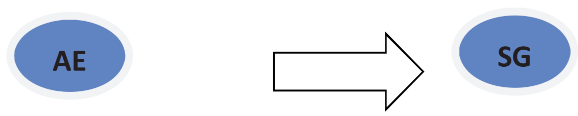
CAPÍTULO VI: INTENCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA

INDICADORES A PRIORI DE TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE COMPRENDER LA COMPUESTA DE DOS SIMETRÍAS CON EJES SECANTES EN EL CUESTIONARIO

Los docentes que muestran en sus argumentos comprender este objeto matemático en un modo sintético – geométrico y Analítico – estructural e interactuar entre ellos, son capaces de: establecer una definición (AE) de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes donde priman **los invariantes** que ocurren respecto al punto de intersección de los ejes de simetría, tales como: **distancia** y **ángulos**, los cuales reconocen a partir de la representación grafica (SG). Y una vez comprendida la definición (AE) pueden hallar la imagen de un punto al ser compuesto por dos simetrías con ejes secantes conociendo **únicamente** el punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre ellos.



A partir de la grafica identifica de manera **general** los **invariantes** que se dan en el punto de intersección de los dos ejes de simetría.



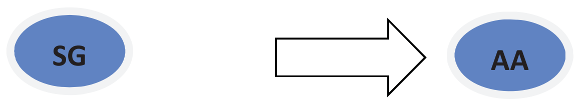
A partir de las propiedades halla la imagen de un punto al ser compuesto por dos simetrías con ejes secantes sabiendo **únicamente** el punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre ellos.

Los elementos matemáticos que permiten el transitar de un modo SG a un modo AE e interactuar entre ellos, son los **invariantes:** de distancia y ángulo respecto al punto de intersección de los ejes.

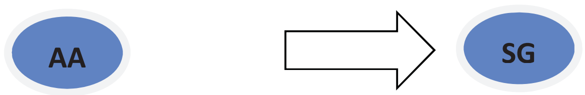
Los docentes que muestran en sus argumentos comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en un modo sintético - geométrico y Analítico - aritmético e interactuar entre ellos, son capaces de: a través de la visualización (SG) reconocer numéricamente los **invariantes** entre un punto y su simétrico (AA) (puesto que la compuesta de dos simetrías con ejes secantes es un caso particular de simetría) invariantes tales como: distancia, punto medio y perpendicularidad. Y a partir de un desarrollo solamente aritmético entre la composición de dos simetrías con ejes secantes definidas a través de un punto (x, y) y las ecuaciones de dos rectas secantes (AA) graficar su desarrollo en el plano cartesiano (SG).

Por otra parte, a manera de explicación aclaramos que en esta investigación vemos la necesidad de abordar este objeto matemático desde un trato analítico **no convencional**[11], cuando hablamos de tratamiento analítico no convencional nos referimos a que los ejes de simetría pueden ser cualquier línea en el plano cartesiano, en nuestro caso son dos rectas oblicuas que se intersecan en el origen. Este tratamiento analítico sistematiza varios contenidos como: función, rectas perpendiculares, punto medio, distancia entre dos puntos, punto de intersección, los cuales se ven reducidos a la **visualización** cuando se trabaja tomando **únicamente** como referencia a los ejes de simetría el eje x y el eje y o la recta

$$y = x$$



A partir de la grafica identifica de forma **particular** los **invariantes** que se dan entre un punto y su simétrico.



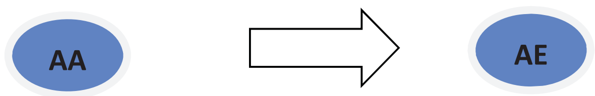
A través de un tratamiento solamente aritmético graficar en el plano cartesiano su desarrollo.

Los elementos matemáticos que permiten el transitar de un modo SG a un modo AA e interactuar entre ellos, son los **invariantes:** distancia, perpendicularidad y punto medio.

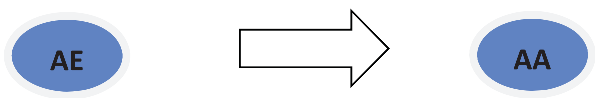
[11] El eje de simetría puede ser cualquier recta en el plano, sin limitarse únicamente a los ejes de coordenadas X e Y o a la recta Y = X.

Los docentes que muestran en sus argumentos comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en un modo Analítico - aritmético y Analítico - estructural e interactuar entre ellos, son capaces de: mediante el método de las coordenadas (AA) establecer una definición (AE) de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes donde priman **los invariantes** numéricos que ocurren respecto al punto de intersección de los ejes de simetría, tales como: **distancia y ángulos**. Y una vez comprendida la definición (AE) pueden hallar la imagen de un punto (x, y) al ser compuesto por dos simetrías con ejes secantes conociendo **únicamente** las coordenadas del punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre los ejes de simetría (AA).

El método analítico **no convencional** de abordar este objeto matemático permite en este caso sistematizar conceptos tales como: distancia, ángulos, triángulos, circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.



A partir de relaciones aritméticas entre las coordenadas identifica **invariantes** que se dan en el punto de intersección de los dos ejes de simetría.



A partir de las propiedades halla la imagen de un punto (x, y) conociendo **únicamente** el punto de intersección de los ejes y el ángulo comprendido entre los ejes de simetría.

Los elementos matemáticos que permiten el transitar de un modo SG a un modo AA e interactuar entre ellos, son los **invariantes:** de distancia y ángulo respecto al punto de intersección de los ejes.

Los docentes que muestran en sus argumentos comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes en un modo Sintético – Geométrico, Analítico – Aritmético y Analítico – Estructural e interactuar entre ellos, son capaces de: a partir de la representación obtenida al componer dos simetrías con ejes secantes de punto dado en el plano Euclidiano (SG), identificar los invariantes respecto al punto de intersección de los ejes, los cuales permiten definir la propiedad que explicita este objeto matemático (AE) y utilizar esta propiedad para establecer su imagen con coordenadas **exactas** (AA) .

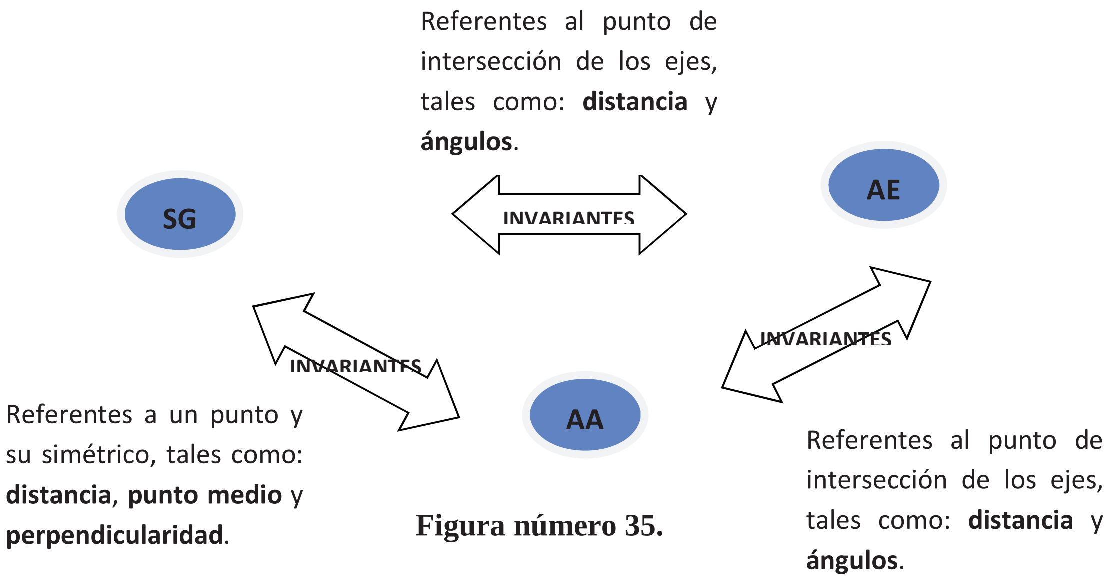


Figura número 35.

SG: Movimiento Rígido.

AA: Transformación Isométrica.

AE: Dada la reflexión V respecto a L y dada una reflexión U respecto a L’. Si L y L’ se intersectan en O con un ángulo agudo o recto α, entonces la isometría UV es la rotación de centro O y ángulo 2α.

DESCRIPCIÓN GENERAL E INTENSIÓN DE LAS ACTIVIDADES

La **primera actividad** del cuestionario (ver anexo xx) tiene por objetivo explorar el SG del docente, esto permite evidenciar la representación asociada al concepto que posee el docente al momento de realizar el cuestionario, información importante en el análisis de las posibles conexiones entre los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes.

La **segunda actividad** tiene por objetivo evidenciar los posibles tránsitos que realiza el docente entre los modos SG -AA- AE de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes. Se espera que los docentes puedan pensar este objeto matemático desde sus propiedades identificando los invariantes presentes en el punto de intersección de los ejes de simetría.

La **tercera actividad** tiene por objetivo explorar los posibles tránsitos que realiza el docente entre los modos AA y SG de la compuesta de dos simetría con ejes secantes. Se espera que los docentes puedan pensar este objeto matemático a partir de un desarrollo principalmente aritmético, es decir, dado un punto (x, y) y las **ecuaciones** de dos rectas secantes hallar las coordenadas exactas del simétrico de (x, y) mediante la composición de dos simetrías tomando como ejes las rectas secantes dadas. En esta actividad el docente podrá abordar la actividad desde un modo sintético geométrico, graficando el punto (x, y) y las rectas en el plano cartesiano pero no le será suficiente para responder la actividad, lo que potenciará un modo de pensar AA de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes y un posible transito a SG con el que podrá verificar su desarrollo aritmético.

La **cuarta actividad** tiene por objetivo pesquisar los elementos de la matemática que ponen de manifiesto los docentes al abordar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes planteada desde los modo Analítico – Estructural y Sintético Geométrico.

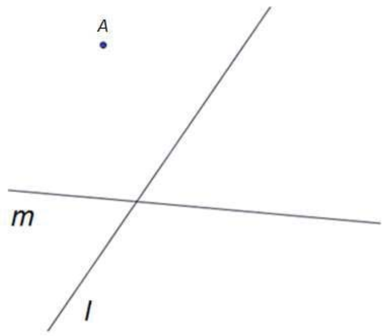
La **Quinta actividad** tiene por objetivo pesquisar los elementos de la matemática que ponen de manifiesto los docentes al abordar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes planteada desde los modo Analítico – Estructural y Analítico Aritmético.

ANÁLISIS A- PRIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA.

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y *l* una recta.

a) Sea B el simétrico de A respecto a *l*. Hallar B

b) Sea C el simétrico de B respecto a la recta *m*. Hallar C



Describe paso a paso lo que hiciste:

Esta pregunta tiene por objetivo, explorar el SG del Docente, esto permite evidenciar la representación asociada al concepto en estudio que posee el docente al momento de realizar el cuestionario. Para ello, hemos identificado tres posibles formas de abordar ésta actividad desde el modo Sintético - Geométrico:

Sintético – geométrico 1: Doblando la hoja por cada uno de los ejes de simetría y copiar los puntos simétricos, así se pueden obtener el simétrico de A que es B y el simétrico de B que es C. Como lo indica la figura 31:

Figura 31.

Sintético – geométrico 2: Construcción con compás.

Desde el punto A dado, con una abertura del compás cualquiera, se traza un arco que corte a la recta L dada. Se obtienen dos puntos. Figura 32

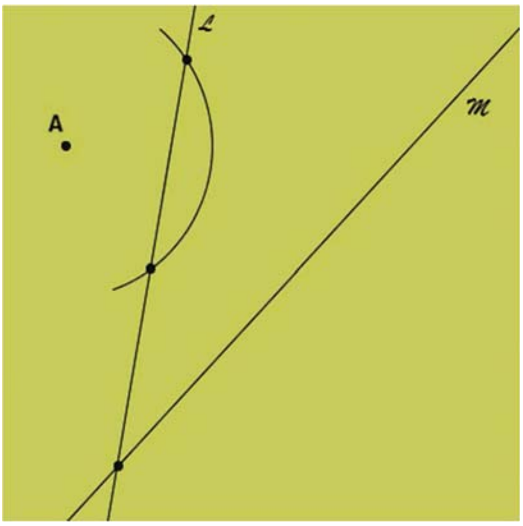


Figura 32.

Desde los puntos de corte se trazan dos arcos con la abertura del compás de igual medida a la utilizada en el procedimiento anterior. Figura 33.

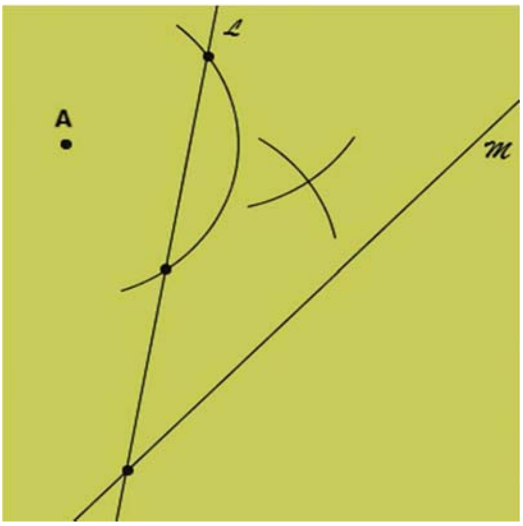


Figura 33.

En la intersección de los arcos está ubicado el simétrico de A respecto L. Análogo para hallar c. Figura 34

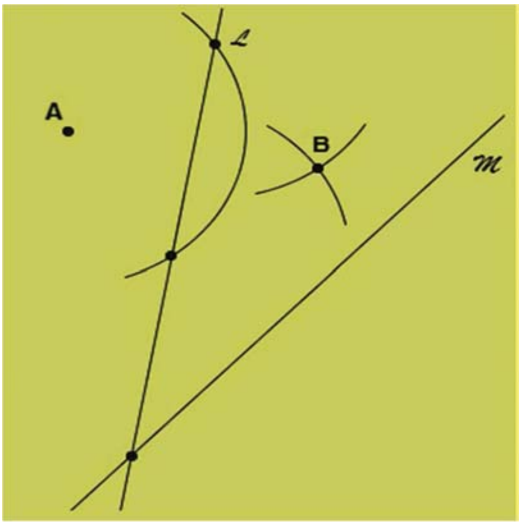


Figura 34.

Sintético – geométrico 3: Construcción con regla.

Trazar la recta perpendicular a L, de tal forma que pasa por el punto A. figura 35.

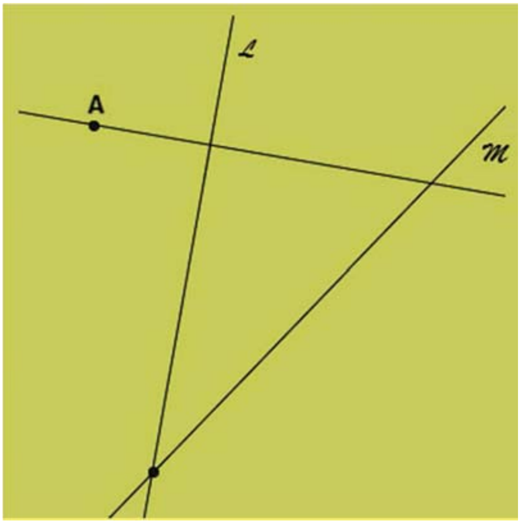


Figura 35.

Marcar el punto de intersección de las dos rectas. Figura 36

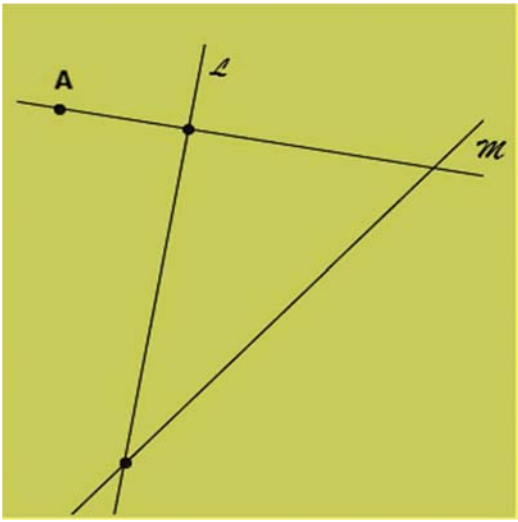


Figura 36.

Ubicar el simétrico de A, en este caso el punto B, sobre la recta perpendicular a L tal que la distancia de A al punto de intersección sea igual a la distancia del punto de intersección a B, donde A≠B. Igualmente se procede para determinar el punto C. Figura 37

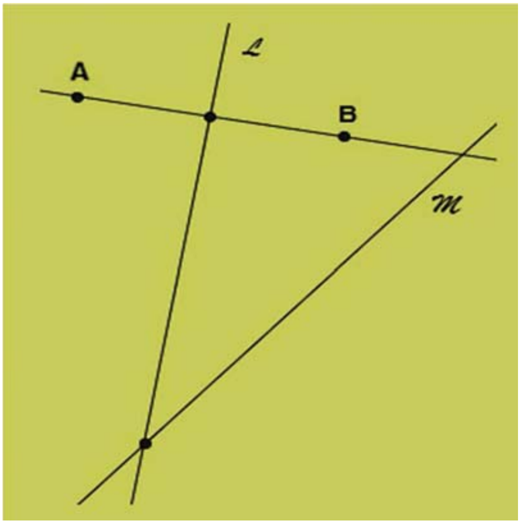
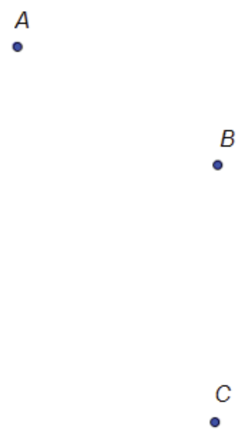


Figura 37.

ACTIVIDAD 2: Sean *A, B y C* tres puntos tales que: *C* es el simétrico de *B* respecto a una recta y *B* es el simétrico de A respecto a otra recta. Tenga en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

a) Hallar las dos rectas (*l y m)* que corresponden a los ejes de simetría.
b) Marque el punto donde se intercepta los ejes *l y m.*
c) Sea *P* el punto de intersección de los ejes, hallar la distancia de *P* a cada uno de los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre estas distancias?
d) Medir con el transportador el ángulo formado entre los ejes de simetría. Luego mida el ángulo APC, después de medirlo establezca una relación entre los dos ángulos.



Esta actividad muestra los posibles tránsitos que realiza el docente entre los modos SG –AA - AE de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes. Se espera que los docentes puedan pensar este objeto matemático desde sus propiedades identificando que los puntos A, B y C cumplen cierta condición referente a sus **distancias** con el punto de intersección de los ejes.
De lo cual, hemos identificados los siguientes modos en los cuales se puede situar un docente a la hora de resolver la actividad:

A. Hallar las dos rectas (*l y m)* que corresponden a los ejes de simetría.

SG (1): doblar y plegar la hoja justo donde coincida el punto A y el punto B. En este el eje de simetría está determinado por el pliegue de la hoja. Análogo para C.
SG (2): trazar el segmento AB y hallar el punto medio del segmento. Figura 38.

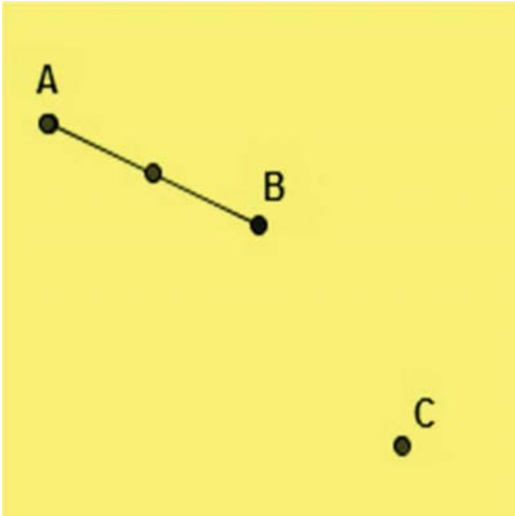


Figura 38.

Luego, trazar la recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio. Figura 39.

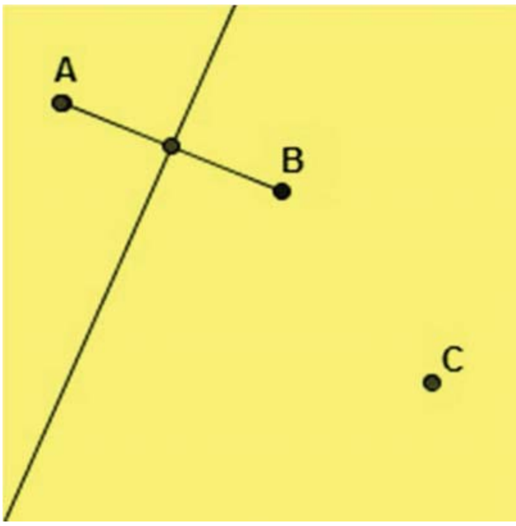


Figura 39

En este caso el eje de simetría es justamente esa recta. Análogo para hallar el siguiente eje.

SG (3): Trazar una circunferencia con el compas con centro en A. Figura 40

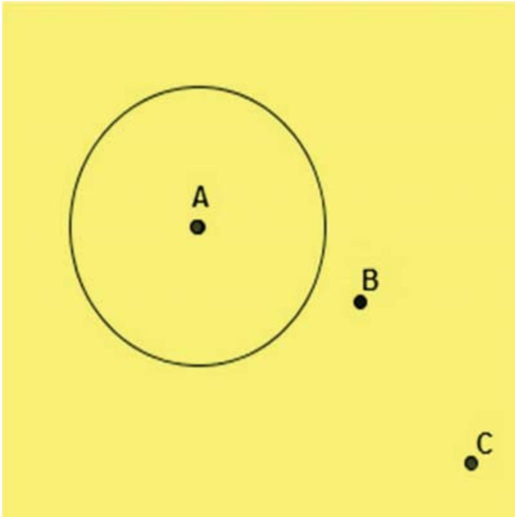


Figura 40

Con el mismo radio trazar un arco o circunferencia con centro en B. Figura 41

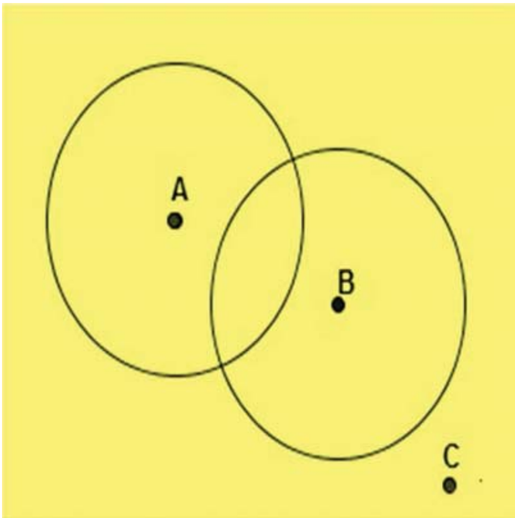


Figura 41.

En este caso el eje de simetría es la recta que pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias. Figura 42

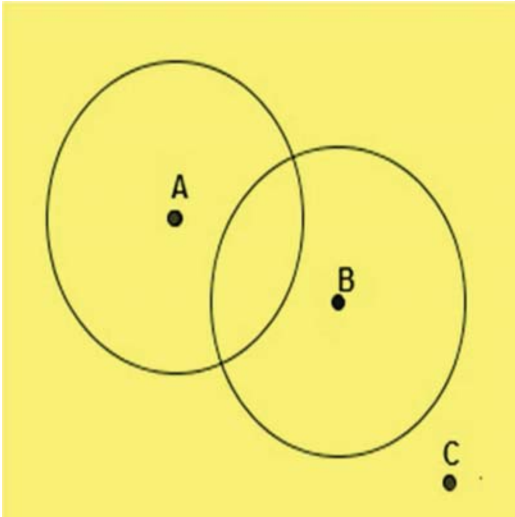


Figura 42.

B. Marque el punto donde se intercepta los ejes *l y m*. Esta pregunta es solo para identificar el punto. Figura 43.

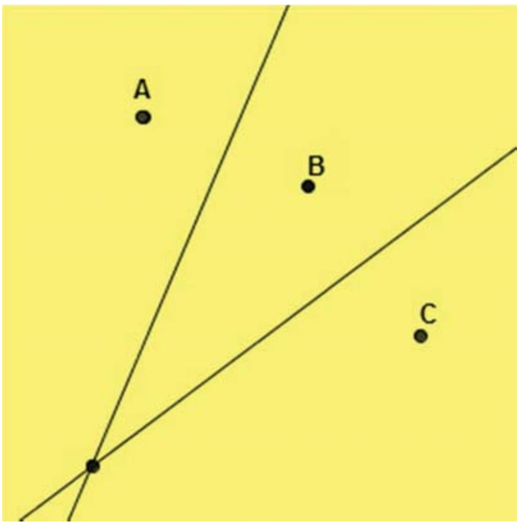


Figura 43.

C. Sea *P* el punto de intersección de los ejes, hallar la distancia de *P* a cada uno de los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre estas distancias?

SG: el docente solo a través de la visualización de la figura concluya que las distancias son iguales.

Transito de SG - AA: hallar la distancia de cada punto a P con el uso de una regla y concluir que todas son iguales. Figura 44.

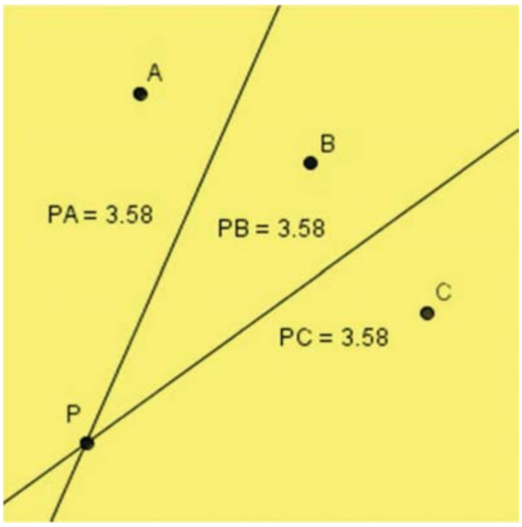


Figura 44.

Transito de SG a AE: Trazar la circunferencia con centro en P y radio la distancia de P a cualquiera de los puntos A, B o C. Y concluir que las distancias son iguales porque todos están contenidos dentro de la circunferencia con centro en P y radio PA o PB o PC. Figura 45

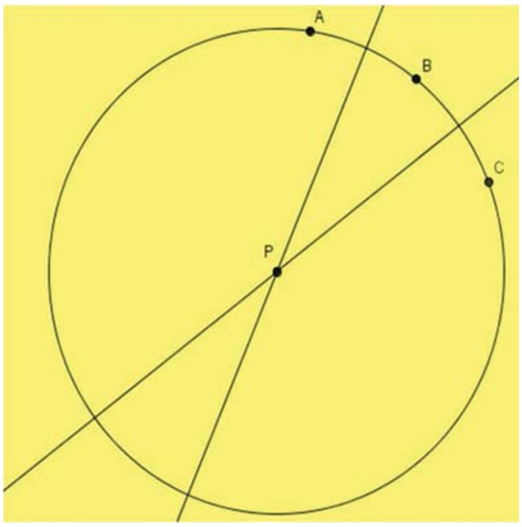


Figura 45.

AE (1): Se sabe que el punto B es el simétrico de A respecto a la recta *L*.

Sea Q el punto de intersección del segmento $\overline{AB}$ con el eje de simetría L.

Sean los triángulos $\Delta APQ\ y\ \Delta BPQ$.

I. El ángulo AQP es igual al ángulo BQP. Ambos ángulos son rectos por perpendicularidad.
II. $d(\overline{AQ}) = d(\overline{QB})$ por propiedad de la simetría.
III. Los triángulos comparten un lado, el segmento $\overline{PQ}$.
IV. Por criterio de congruencia LAL los triángulos son congruentes.
Entonces $d(\overline{AP}) = d(\overline{BP})$. (Análogo para demostrar que $d(\overline{BP}) = d(\overline{CP})$

Por transitividad si $d(\overline{AP}) = d(\overline{BP}) y\ d(\overline{BP}) = d(\overline{CP}) \rightarrow d(\overline{AP}) = d(\overline{CP}) \therefore$

AE (2): Se sabe que el punto B es el simétrico de A respecto a la recta L.

Sea Q el punto de intersección del segmento $\overline{AB}$ con el eje de simetría L.

Sean los triángulos $\Delta APQ\ y\ \Delta BPQ$.

I. Los triángulos $\Delta APQ\ y\ \Delta BPQ$ son rectángulos. Por perpendicularidad.
II. $d(\overline{AQ}) = d(\overline{QB})$ por propiedad de la simetría.
III. Los triángulos comparten un lado, el segmento $\overline{PQ}$.
IV. Por teorema de Pitágoras la hipotenusa del triangulo ΔAPQ es igual a la hipotenusa del triángulo ΔBPQ, entonces $d(\overline{AP}) = d(\overline{BP})$. Análogo para demostrar que $d(\overline{BP}) = d(\overline{CP})$

Por transitividad si $d(\overline{AP}) = d(\overline{BP}) y\ d(\overline{BP}) = d(\overline{CP}) \rightarrow d(\overline{AP}) = d(\overline{CP}) \therefore$

D. Medir con el transportador el ángulo formado entre los ejes de simetría. Luego mida el ángulo APC, después de medirlo establezca una relación entre los dos ángulos.

El objetivo de este punto es identificar las relaciones que los profesores ponen de manifiesto y analizar el modo de pensamiento que utilizan para argumentar.

AA: con el uso del transportador el docente puede medir los ángulos solicitados, es decir, el ángulo formado por los ejes de simetría mide 60° y el ángulo APC mide 120°. La relación que es uno es el doble del otro, 120°=2·(60°).

AE (1): Sea Q el punto de intersección entre el segmento $\overline{AB}$ y la recta L. Sea S el punto de intersección entre el segmento $\overline{BC}$ y la recta *M*.

I. $\Delta\, AQP \;\cong\; \Delta\, BQP$. Por criterio de congruencia LAL.
II. ∢ QPA = ∢ QPB. Por I
III. $\Delta\, BSP \;\cong\; \Delta\, CSP$. Por criterio de congruencia LLL.
IV. $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SPC$. Por III
V. $\sphericalangle APC = 2\sphericalangle QPA + 2\sphericalangle SPB = 2\,(\sphericalangle QPB + \sphericalangle SPB)$
VI. Por construcción $\sphericalangle QPS = \sphericalangle QPB + \sphericalangle SPB$
VII. $\sphericalangle APC = 2\sphericalangle QPS \therefore$

AE (2):

Como las reflexiones también preservan ángulos, se tiene que la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y L es la misma que el ángulo entre L y $\overline{BP}$. Llamemos β ese ángulo.

Del mismo modo la medida del ángulo entre m y $\overline{BP}$ es la misma del ángulo entre m y $\overline{CP}$. LLamemos θ a ese ángulo. Por lo tanto el ángulo $\angle$**APC** mide 2β + 2θ. pero 2β + 2θ = 2 (β + θ) Si nombramos β + θ=α, entonces $\angle$**APC** mide 2α.

ACTIVIDAD 3:
Sea A el punto (-3,5) y sea B el simétrico de A respecto a la recta y= -3x.
Sea C el simétrico de B respecto a la recta y= 2x

a) Hallar las coordenadas exactas de B.
b) Hallar las coordenadas exactas de C.

Esta pregunta tiene por objetivo explorar los posibles tránsitos que realiza el docente entre los modos AA y SG de la compuesta de dos simetría con ejes secantes. Se espera que los docentes puedan pensar este objeto matemático a partir de un desarrollo principalmente aritmético, es decir, dado un punto (x, y) y las **ecuaciones** de dos rectas secantes hallar las coordenadas exactas del simétrico de (x, y) mediante la composición de dos simetrías tomando como ejes las rectas secantes dadas. Un docente puede situar en un modo:

SG: El docente puede recurrir a cualquier modo Sintético - geométrico de la primera actividad. Pero este modo de pensar no le será suficiente para poder hallar las coordenadas **exactas** de B, a lo sumo llegará a una aproximación de las coordenadas de B. Figura 46

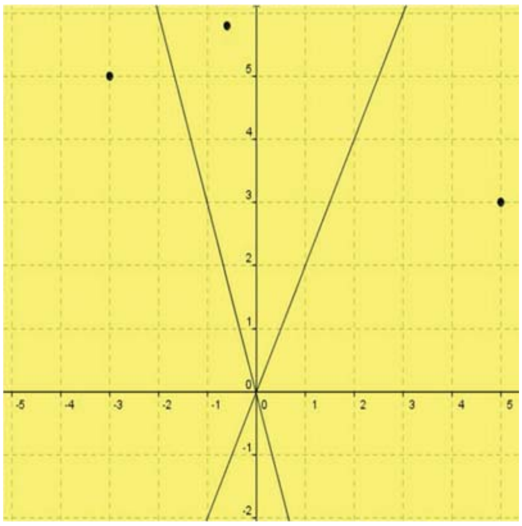


Figura 46.

Teniendo en cuenta lo siguiente definiremos los diferentes modos AA en que puede ser abordada la actividad. Si el docente recurre al grafico para verificar que sus resultados analíticos son apropiados, entonces se propiciará un tránsito $SG \leftrightarrow AA$ si no recurre al gráfico entonces estará situado únicamente desde AA.

AA (1):

- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y_1 = -3x$ y que pase por el punto $(-3; 5)$
- Sea y_2 esa recta, entonces $y_2 = \frac{1}{3}x + b \rightarrow 5 = \frac{1}{3} \cdot (-3) + b$ resolviendo

  $5 = -1 + b \rightarrow b = 6 \rightarrow \boldsymbol{y_2} = \frac{1}{3}x + 6$

- hallar el punto de intersección de $y_1\ con\ y_2$, igualando $y_1 = y_2$ tenemos:

  $-3x = \frac{1}{3}x + 6$

De donde $x = -\frac{9}{5}$, reemplazando en y_1 resulta:

$y = -3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{27}{5} \rightarrow y_1 \cap y_2 = \boxed{\left(-\frac{9}{5}; \frac{27}{5}\right)}$ nombrémoslo Q

- Por propiedad de la simetría Q es punto medio de A y su simétrico B.

  Entonces $\left(-\frac{9}{5}; \frac{27}{5}\right) = \left(\frac{-3+x}{2}; \frac{5+y}{2}\right) \rightarrow -\frac{9}{5} = \frac{-3+x}{2}$ y $\frac{27}{5} = \frac{5+y}{2} \rightarrow$

  $x = -\frac{3}{5}\ e\ y = \frac{29}{5} \rightarrow las\ \boldsymbol{coordenadas\ exactas}\ de\ \boldsymbol{B}\ son\ \left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$

- Para hallar C, el simétrico de B = $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$ respecto a la recta $y = 2x$ se realiza un proceso análogo al anterior, de lo cual se tiene que $C = (5\ ; 3)$.

AA (2):

- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y_1 = -3x$ y que pase por el punto $(-3; 5)$
- Sea y_2 esa recta, entonces $y_2 = \frac{1}{3}x + b \rightarrow 5 = \frac{1}{3} \cdot (-3) + b$ resolviendo

  $5 = -1 + b \rightarrow b = 6 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y_2} = \frac{1}{3}x + 6}$

- hallar el punto de intersección de $y_1\ con\ y_2$, igualando $y_1 = y_2$ tenemos:

  $-3x = \frac{1}{3}x + 6$ De donde $x = -\frac{9}{5}$, reemplazando en y_1 resulta:

  $y = -3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{27}{5} \rightarrow y_1 \cap y_2 = \boxed{\left(-\frac{9}{5}; \frac{27}{5}\right)}$ nombrémoslo Q

- Por propiedad de la simetría $d\,(\overline{AQ}) = d\,(\overline{QB})$, por lo tanto:

$$d\,(\overline{AQ}) = \sqrt{\left(-3+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

- Por propiedad de la simetría $d\,(\overline{AQ}) = d\,(\overline{QB})$, por lo tanto:

$$d\,(\overline{AQ}) = \sqrt{\left(-3+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{27}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$d(\overline{QB}) = \sqrt{\left(x+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x+6-\frac{27}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\left(x+\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}x+6-\frac{27}{5}\right)^2 = \frac{8}{5} \rightarrow \frac{10}{9}x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot\frac{10}{9}\cdot 2}}{2\cdot\frac{10}{9}}$$

$x_1 = \frac{-3}{5}$; $y_1 = \frac{29}{5}$ e $x_2 = -3$; $y_2 = 5$ $\rightarrow$ las **coordenadas exactas** de B son $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$

Para hallar C, el simétrico de B = $\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{29}{5}\right)$ respecto a la recta $y = 2x$ se realiza un proceso análogo al anterior, de lo cual se tiene que $C = (5\,;3)$

ACTIVIDAD 4: Sea *A* un punto y *P* el punto de intersección de dos ejes de simetría. La medida del ángulo formado entre los ejes de simetría es 30°(en sentido horario). Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

1) Hallar los ejes de simetría.
2) Hallar los puntos B y C.

El objetivo de esta actividad es pesquisar los elementos de la matemática que ponen de manifiesto los docentes al abordar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde el modo Analítico - estructural.

AE-AA-SG: el punto C se podrá hallar rotando el punto A respecto al punto P 60°. Y el punto B debe estar ubicado en la bisectriz de $\sphericalangle$APC teniendo en cuenta que $d(\overline{BP}) = d(\overline{AP})$ o también que el punto B está contenido en la circunferencia de centro P y radio $\overline{AP}$ Figura 47.

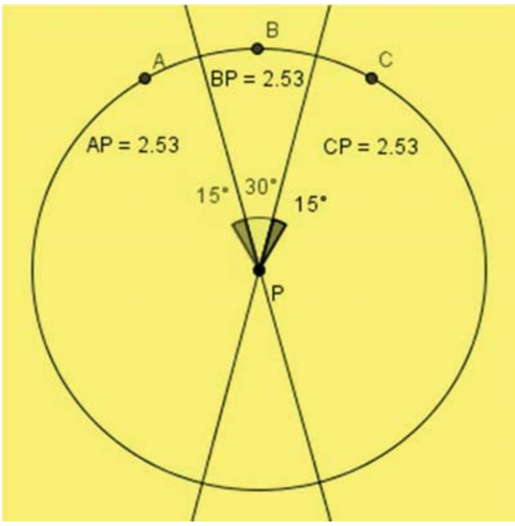


Figura 47.

AE: Sean L y M los ejes de simetría cuya intersección es el punto P y ángulo comprendido entre los ejes $\propto$. La imagen del punto A mediante la composición de dos simetrías con ejes L y M es la rotación con centro en P y ángulo $2\propto$ (esta imagen es única puesto que las transformaciones isométricas son funciones biyectivas). La ubicación de los ejes, por el contrario no es única, puesto que existe infinitas posiciones para los ejes con las cuales se cumple la propiedad.

ACTIVIDAD 5: Sean *A* (4; 10) y *P* (0; 0) dos puntos en el plano. Además, se tiene que P es el punto de intersección de dos ejes de simetría y la medida del ángulo formado entre los dos ejes es 30° (en sentido horario).
Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.
1) Hallar las coordenadas exactas del punto C redondeando a la decima más cercana.

AE-AA-SG:

$d(P,A) = 2\sqrt{29} \rightarrow d(P,C) = \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{29} \rightarrow d(P,C) = \boxed{x^2+y^2 = 116}$

El triangulo APC es equilátero, porque sus ángulos basales deben ser de igual medida, por lo tanto deben medir 60° cada uno. Figura 48

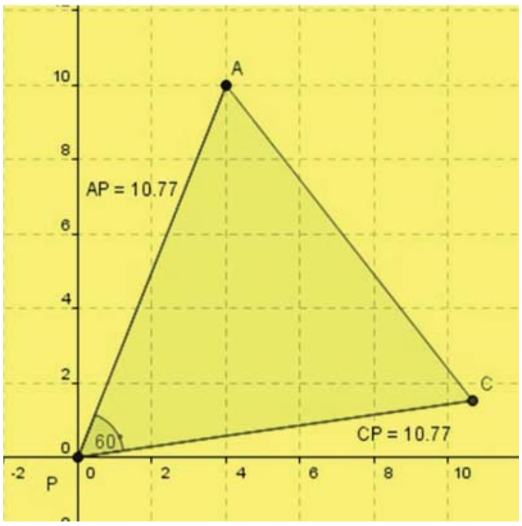


Figura 48.

Por lo tanto,

$d(A,C) = \sqrt{(x-4)^2+(y-10)^2} = 2\sqrt{29} \rightarrow d(A,C) = \boxed{(x-4)^2+(y-10)^2 = 116}$

El punto C se encontrará en la intersección de las circunferencias:

*$x^2+y^2 = 116$ **$(x-4)^2+(y-10)^2 = 116$. Figura 49

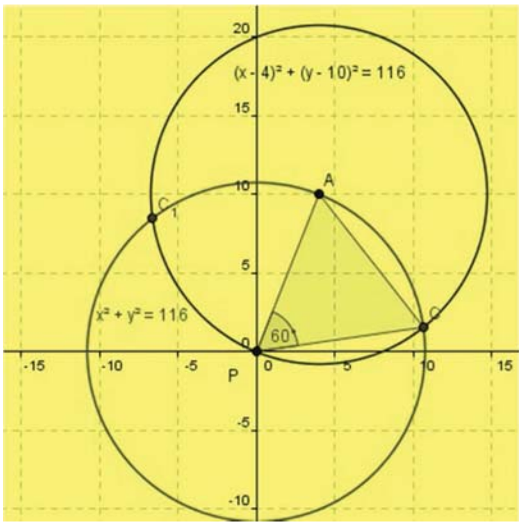


Figura número 49.

Igualando las ecuaciones, tenemos:

$x^2 + y^2 - 116 = (x-4)^2 + (y-10)^2 - 116$ De donde $y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$. Figura 50

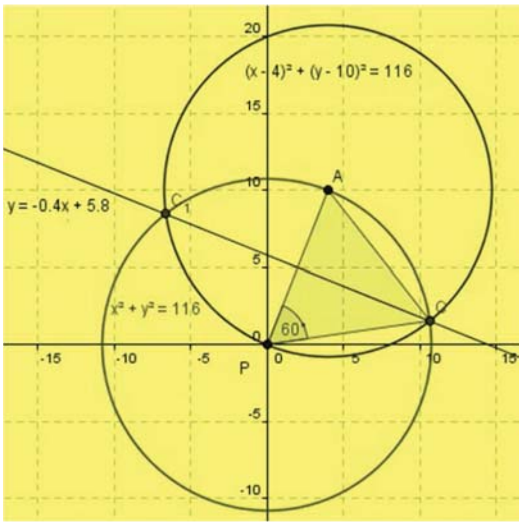


Figura 50.

Sustituyendo $y = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{5}$ en *$x^2 + y^2 = 116$ se tiene $x^2 + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{29}{5}\right)^2 = 116$

De lo que resulta la ecuación de segundo grado con una incógnita: $29x^2 - 116x - 2059 = 0$

Resolviendo por la ecuación cuadrática y aproximando a la décima más cercana tenemos:

$C = (x, y) = (10.66\,; 1.54)$.

AE-SG-AA (2): Figura 51

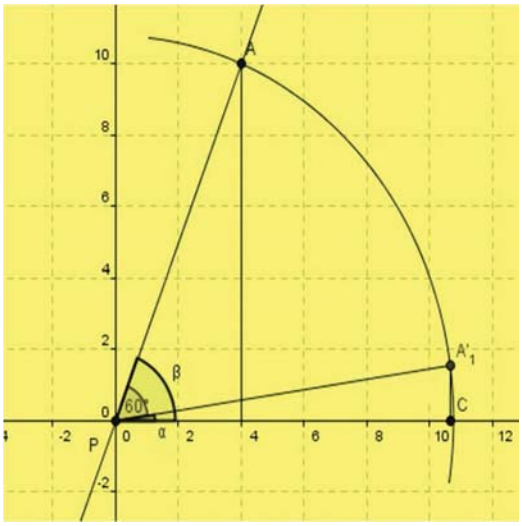


Figura 51.

$$\tan\beta = \frac{10}{4} \rightarrow \beta = 68.19859051 \ \rightarrow \beta - 60° = \alpha \ \rightarrow \ 68.19859051 - 60° = \alpha$$

$\rightarrow \ \alpha = 8.198590514$

$$\sin\alpha = \frac{L.opuesto}{hipotenusa} = \frac{L.O}{2\sqrt{29}} \ \rightarrow \ L.O = 2\sqrt{29} \cdot (\sin 8.198590514) = 1.54$$

$$\cos\alpha = \frac{L.adyacente}{hipotenusa} = \frac{L.A}{2\sqrt{29}} \rightarrow L.A = 2\sqrt{29} \cdot (\cos 8.198590514) = 10{,}66$$

$\rightarrow C = (1.54\,; 10.66)$ Redondeando a la decima más cercana.

CAPÍTULO VII: APLICACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA

Aplicamos el cuestionario a 13 docentes de matemática que actualmente cursan primer año de magister en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Llamamos a los informantes de este grupo como I1, I2, I3, I4,…I13.

A continuación se presenta el análisis a posteriori de las actividades del cuestionario.

ANÁLISIS A POSTERIORI.

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y *l* una recta.

c) Sea B el simétrico de A respecto a *l*. Hallar B

d) Sea C el simétrico de B respecto a la recta *m*. Hallar C

Resultados de la actividad 1.

1 De los docentes se sitúa en un modo **SG1** para responder, dobla la hoja por las rectas para hallar el simétrico de cada punto. Por otra parte, 2 de los docentes se sitúan en un modo **SG2** para responder, realizando la construcción con compas. Además, 9 de los docentes se sitúan en un modo **SG3** para responder, realizando la construcción con regla. Por último, solo uno de los trece docentes responde de forma no prevista en el análisis a priori, en su respuesta se evidencia un tránsito entre **SG** y **AE** pero lo hace sin tener en cuenta el orden de la composición por lo tanto se equivoca. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I5, se sitúa en un modo **SG1** para responder, halla el simétrico de cada punto a partir de los dobleces de la hoja por cada una de las rectas que representan los ejes de simetría. Figura 52.

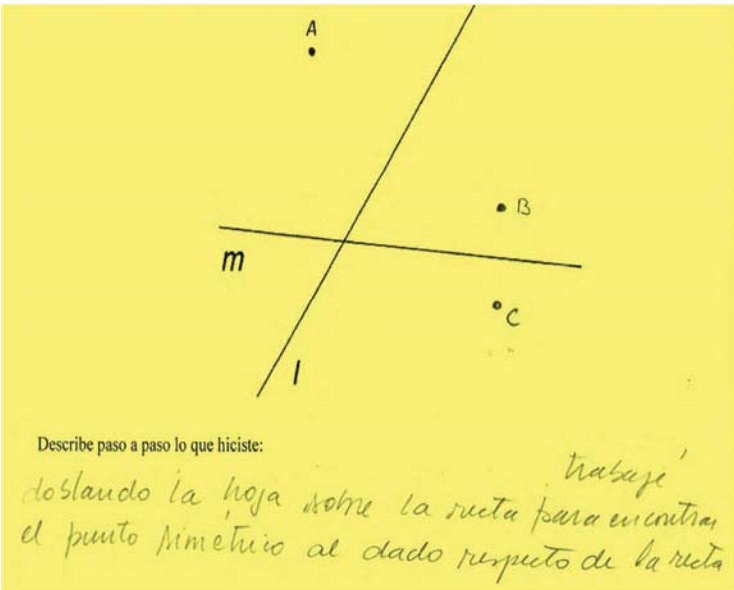


Figura 52. ***Respuesta del informante I5***

Los docentes I1 y I4 argumentan desde un modo **SG2**, construyen con compas las imágenes del simétrico de A y el simétrico de B. Figura 53.

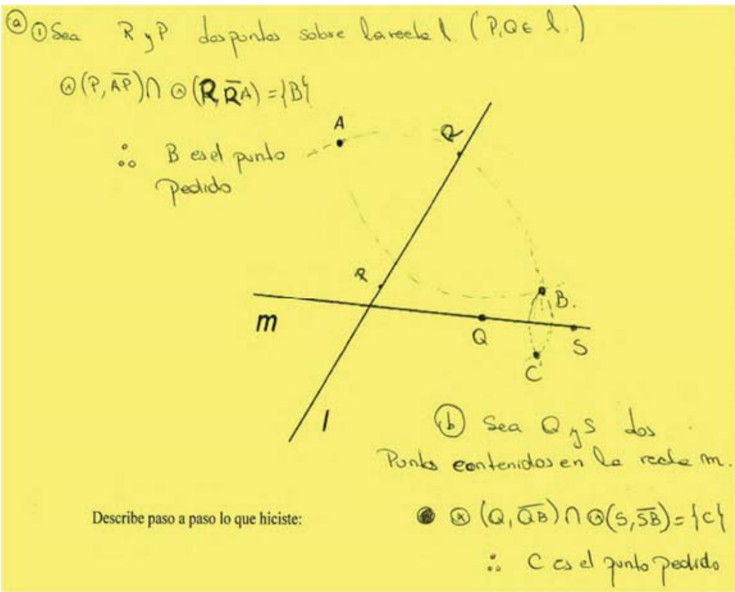


Figura 53. ***Respuesta del informante I1***

Los docentes I2, I3, I6, I7, I8, I9, I11, I12 y I13 argumentan desde un modo **SG3**, construyen con regla las imágenes del simétrico de A y el simétrico de B.

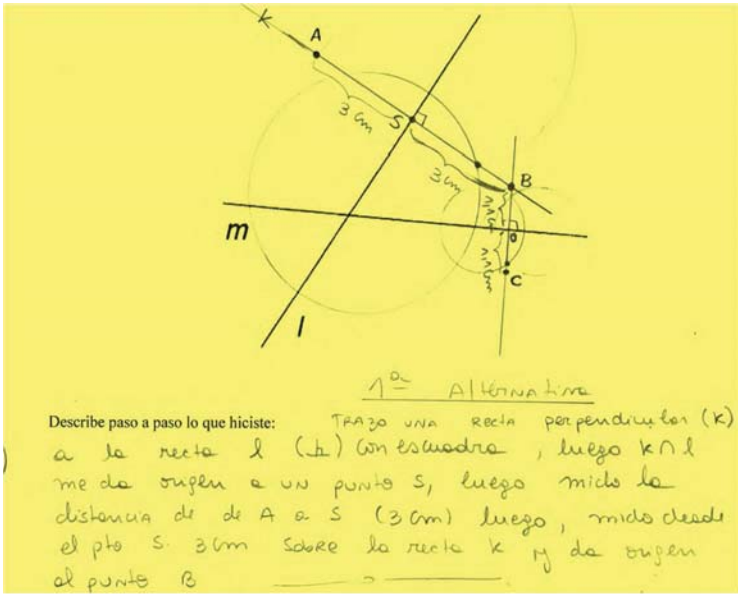


Figura 54. ***Respuesta del informante I2***

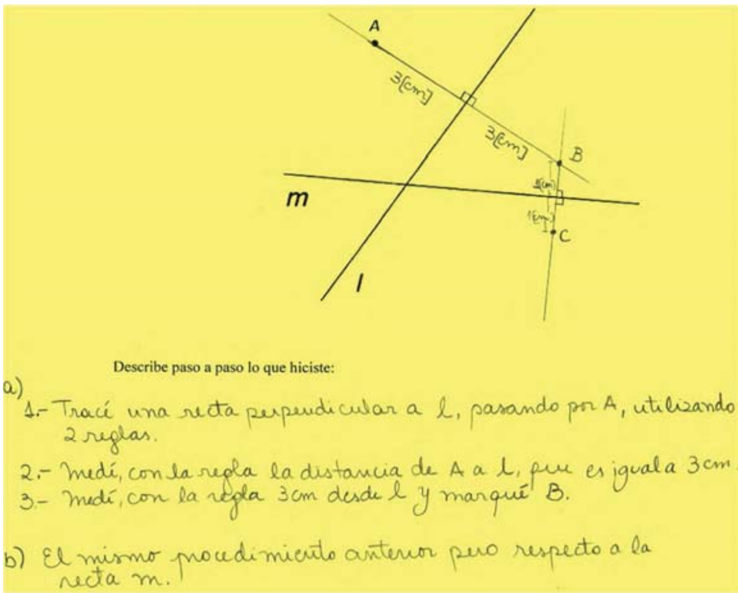


Figura 55. ***Respuesta del informante I3***

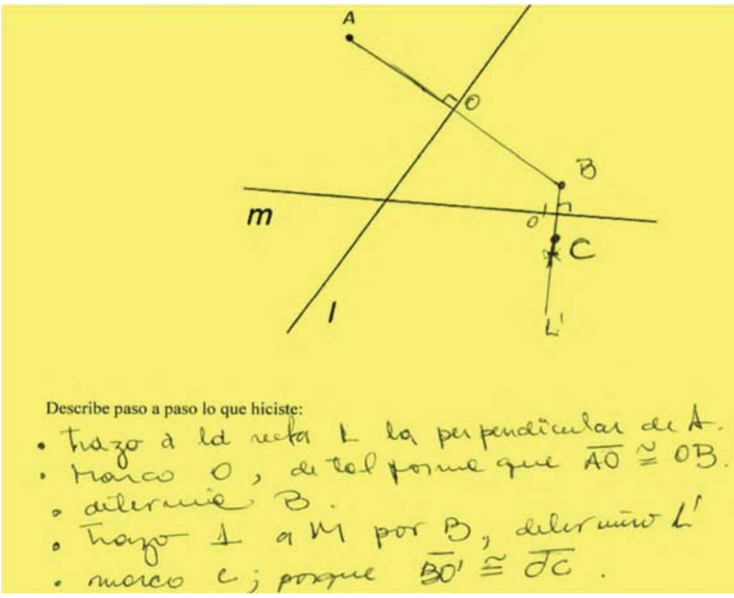


Figura 56. ***Respuesta del informante I7***

El informante I10, responde de forma no prevista en el análisis a priori, en su respuesta se evidencia un tránsito entre **SG** y **AE** pero lo hace sin tener en cuenta el orden de la composición por lo tanto se equivoca.

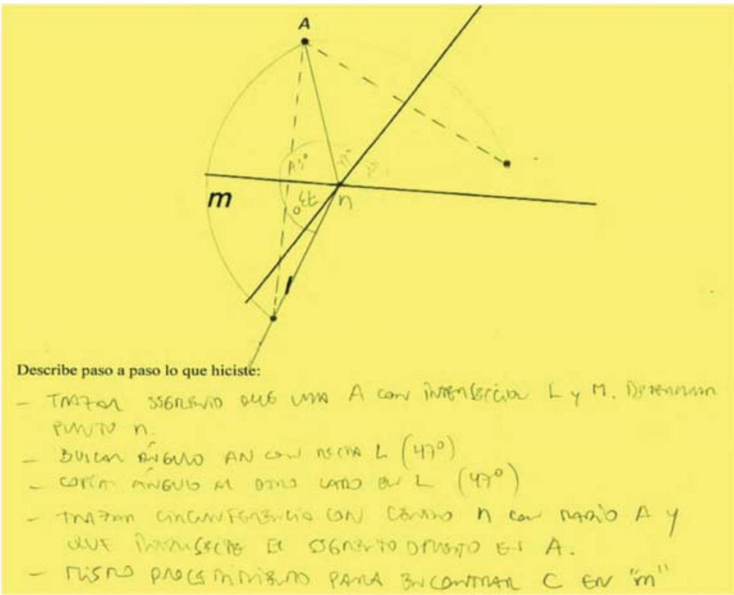


Figura 57. ***Respuesta del informante I10***

ACTIVIDAD 2: Sean *A, B y C* tres puntos tales que: *C* es el simétrico de *B* respecto a una recta y *B* es el simétrico de A respecto a otra recta. Tenga en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

e) Hallar las dos rectas (*l y m)* que corresponden a los ejes de simetría.
f) Marque el punto donde se intercepta los ejes *l y m.*
g) Sea *P* el punto de intersección de los ejes*,* hallar la distancia de *P* a cada uno de los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre estas distancias?
h) Medir con el transportador el ángulo formado entre los ejes de simetría. Luego mida el ángulo APC, después de medirlo establezca una relación entre los dos ángulos.

Resultados de la actividad 2.

a) Hallar las dos rectas (*l y m)* que corresponden a los ejes de simetría.

1 De los docentes continúa situado en un modo **SG1** para responder, dobla la hoja por las rectas para hallar el simétrico de cada punto. Por otra parte, 4 de los docentes se sitúan en un modo **SG2** para responder, realizando la construcción con compas. Además, 8 de los docentes se sitúan en un modo **SG3** para responder, realizando la construcción con regla. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I5, se sitúa en un modo **SG1** para responder, halla los ejes de simétrica a partir de los dobleces de la hoja.

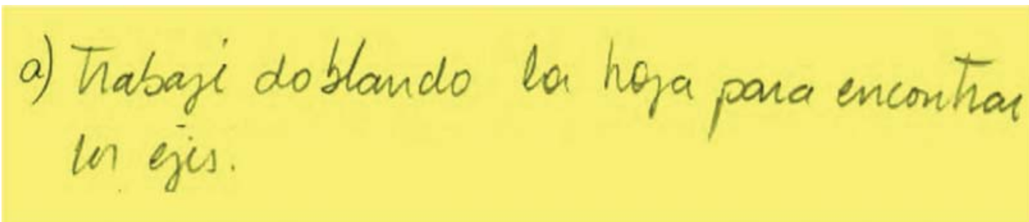


Figura 58. ***Respuesta del informante I5***

Los docentes I1, I2, I4 y I10 argumentan desde un modo **SG2**, construyen con compas las rectas perpendiculares que pasan por los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ $y\,\overline{BC}$.

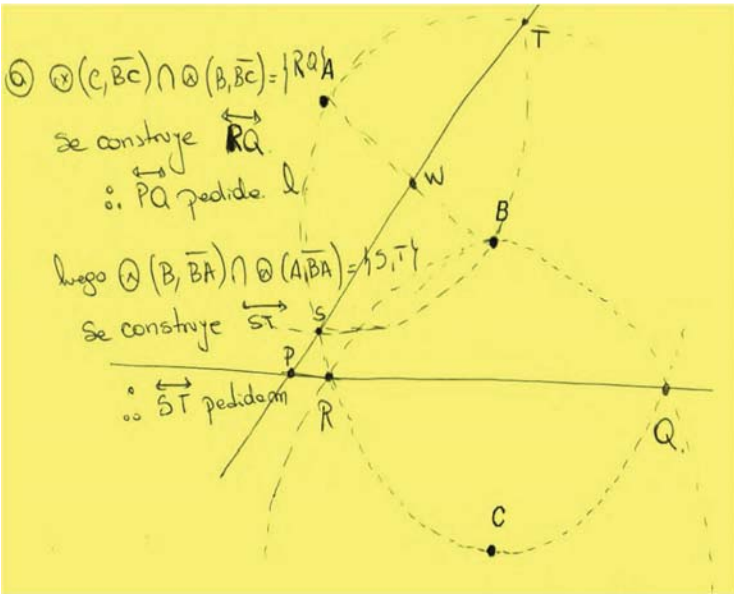


Figura 59. ***Respuesta del informante I***

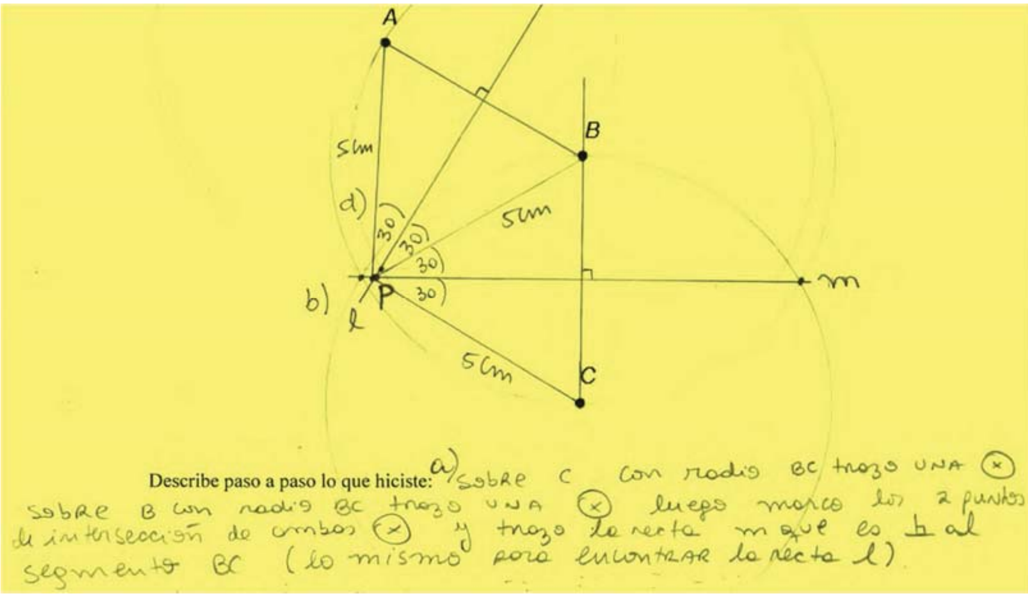


Figura 60. ***Respuesta del informante I2***

Los docentes I3, I5, I6, I7, I8, I9, I11, I12 y I13 argumentan desde un modo **SG3**, construyen con regla los ejes de simetría.

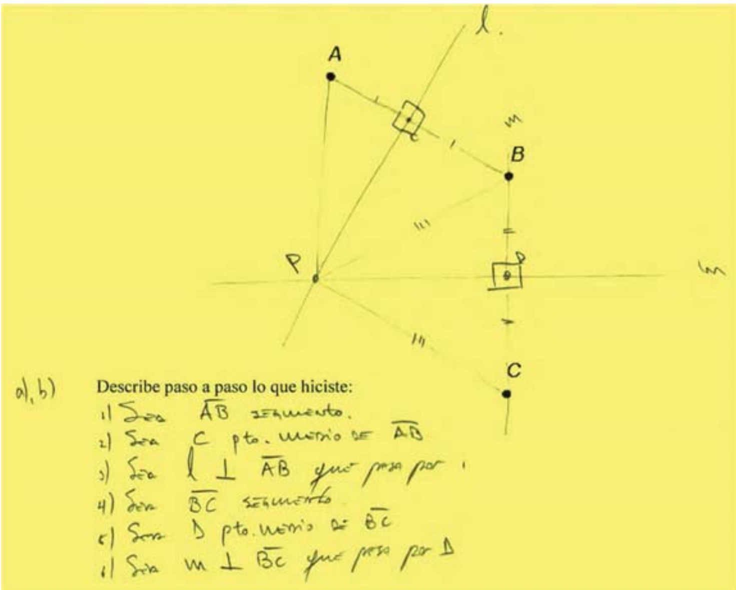


Figura 61. ***Respuesta del informante I6***

b) Marque el punto donde se intercepta los ejes *l y m.* Todos realizan este punto de forma uniforme, marcando el punto de intersección de los ejes y nombrándolo con la letra P.

c) Sea *P* el punto de intersección de los ejes, hallar la distancia de *P* a cada uno de los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre estas distancias?

1 De los docentes se sitúa en un modo **SG1** para responder, utiliza únicamente la visualización para concluir que las distancias son iguales. Por otra parte, 5 de los docentes transitan entre los modos **SG – AA** para responder, es decir, tomando la figura como referencia para hallar las distancias de cada uno de los segmentos $\overline{AP}$,$\overline{BP}$ Y $\overline{CP}$. Además, 3 de los docentes transitan entre los modos **SG - AE** para responder, los cuales trazan la circunferencia de centro en p y radio $\overline{AP}$ para argumentar que todos los puntos A, B y C están a igual distancia. Se evidencia también que

3 docentes muestran en sus argumentos un modo AE utilizando los criterios de congruencia de triángulos. Por último, solo un docente se sitúa en un modo AE utilizando el teorema de Pitágoras para responder. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I5, se sitúa en un modo **SG1** para responder, solo utiliza la visualización para argumentar su respuesta.

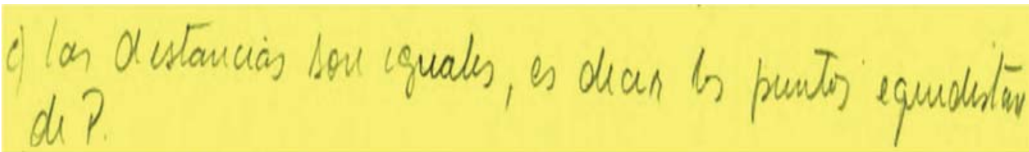


Figura 62. ***Respuesta del informante I5***

Los docentes I2, I4, I10, I11 y I13 en sus argumentos evidencian un tránsito entre los modos **SG – AA** para responder, es decir, a partir de la figura calculan las distancias de cada uno de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ Y $\overline{CP}$.

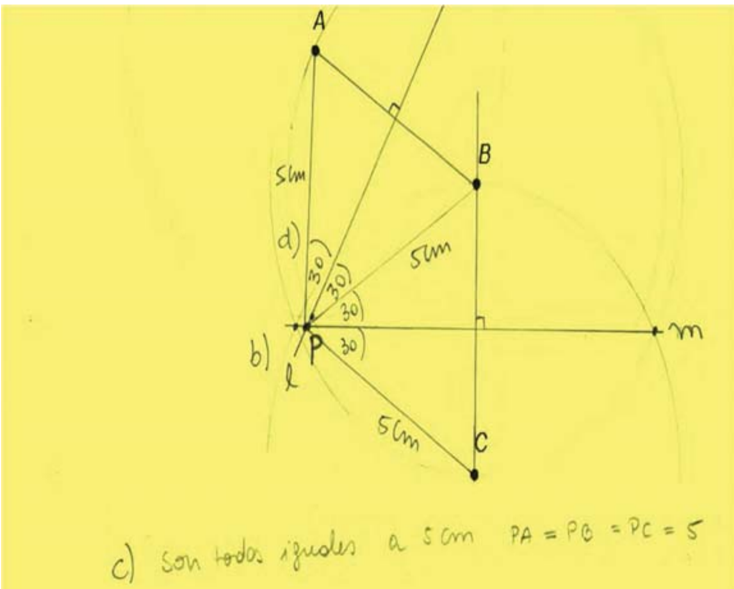


Figura 63. ***Respuesta del informante I2***

Los docentes I7, I8 y I12 en sus argumentos evidencian un tránsito entre los modos **SG - AE** para responder, los cuales trazan la circunferencia de centro en p y radio $\overline{AP}$ para argumentar que todos los puntos A, B y C están a igual distancia.

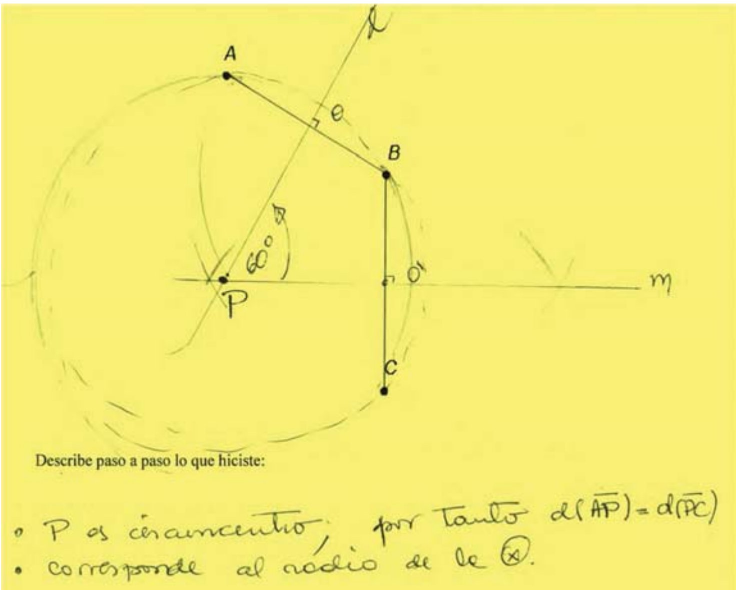


Figura 64. ***Respuesta del informante I7***

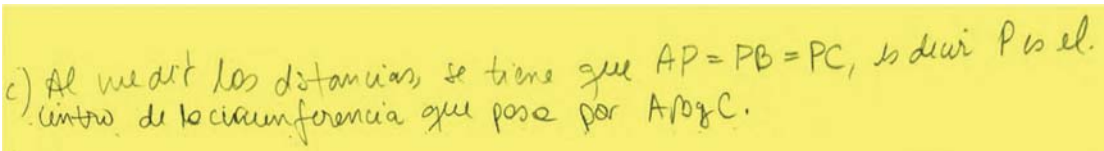


Figura 65. ***Respuesta del informante I8***

Los docentes I1, I6 Y I9 muestran en sus argumentos un modo AE para responder, utilizando en sus argumentos los criterios de congruencia de triángulos.

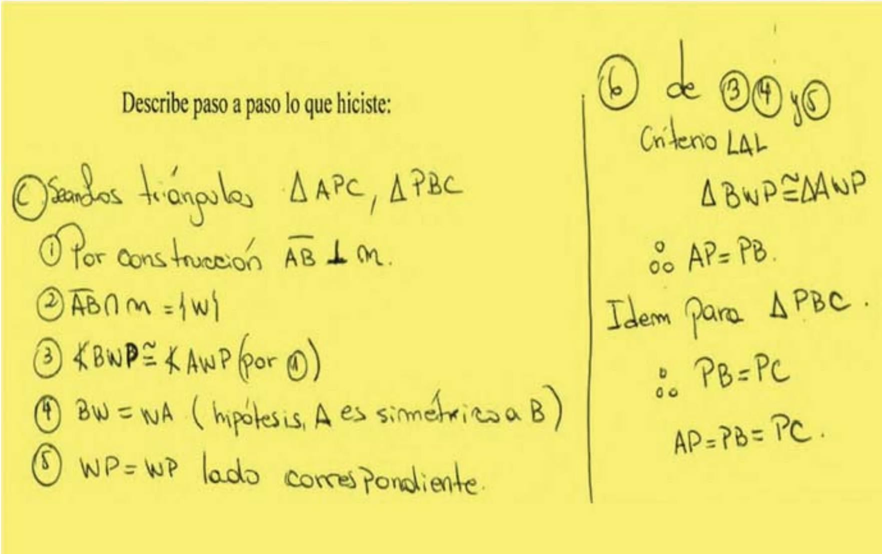


Figura 66. ***Respuesta del informante I1***

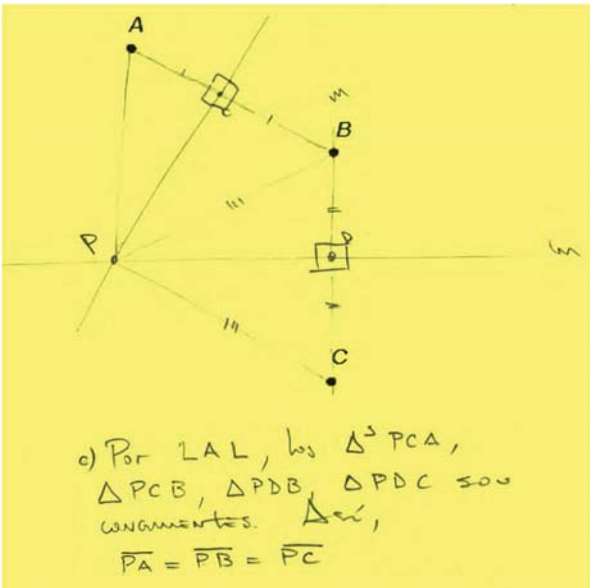
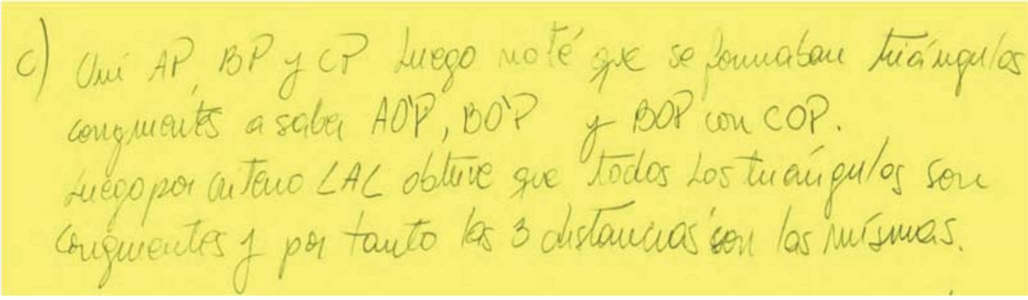


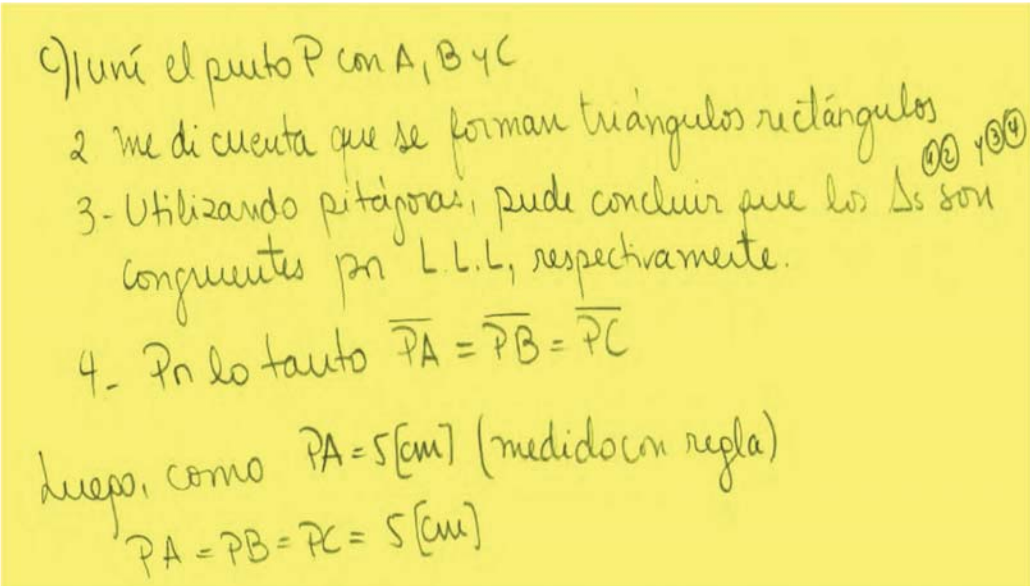
Figura 67. ***Respuesta del informante I6***



c) Uní AP, BP y CP Luego noté que se formaban triángulos congruentes a saber AO'P, BO'P y BOP con COP.
Luego por criterio LAL obtuve que todos los triángulos son congruentes y por tanto las 3 distancias son las mismas.

Figura 68. ***Respuesta del informante I9***

El informante I3 se sitúa en un modo AE utilizando el teorema de Pitágoras para responder.



c) Uní el punto P con A, B y C
2 me di cuenta que se forman triángulos rectángulos 1 2 y 3 4
3- Utilizando pitágoras, pude concluir que los Δs son congruentes por L.L.L, respectivamente.
4- Por lo tanto $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$
Luego, como PA = 5[cm] (medido con regla)
PA = PB = PC = 5[cm]

Figura 69. ***Respuesta del informante I3***

d) Medir con el transportador el ángulo formado entre los ejes de simetría. Luego mida el ángulo APC, después de medirlo establezca una relación entre los dos ángulos.

9 De los docentes se sitúan en un modo **AA** para responder, miden con el transportador los ángulos y establecen una relación numérica entre ellos. Por otra parte, 3 de los docentes transitan entre los modos **SG – AE1** para responder, es decir, tomando la figura como referencia y en

base a los criterios de congruencia demuestra la relación que tienen los ángulos. Por último, solo un docente responde de forma errónea. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

Los docentes I2, I4, I7, I8, I9, I10, I11, I12 y I13 en sus argumentos evidencian un modo **AA** para responder miden con el transportador los ángulos y establecen una relación numérica entre ellos.

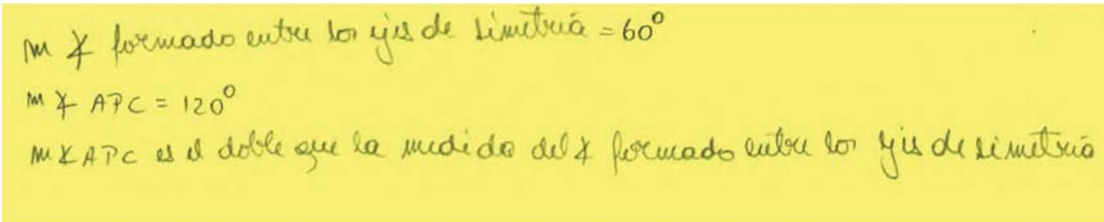

m ∡ formado entre los ejes de simetría = 60°
m ∡ APC = 120°
m ∡ APC es el doble que la medida del ∡ formado entre los ejes de simetría

Figura 70. ***Respuesta del informante I13***

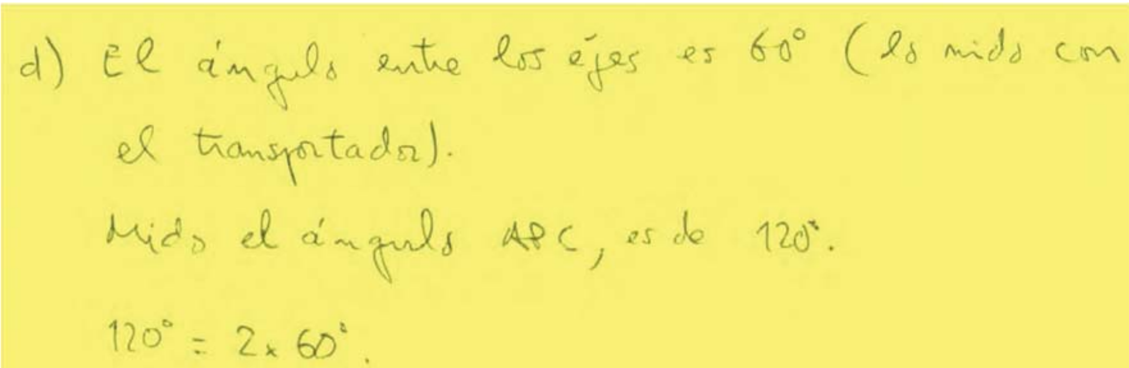

d) El ángulo entre los ejes es 60° (lo mido con el transportador).
Mido el ángulo APC, es de 120°.
120° = 2 x 60°.

Figura 71. ***Respuesta del informante I4***

Los docentes I1, I3 y I6 en sus argumentos transitan entre los modos **SG – AE1** para responder, es decir, tomando la figura como referencia y en base a los criterios de congruencia demuestra la relación que tienen los ángulos.

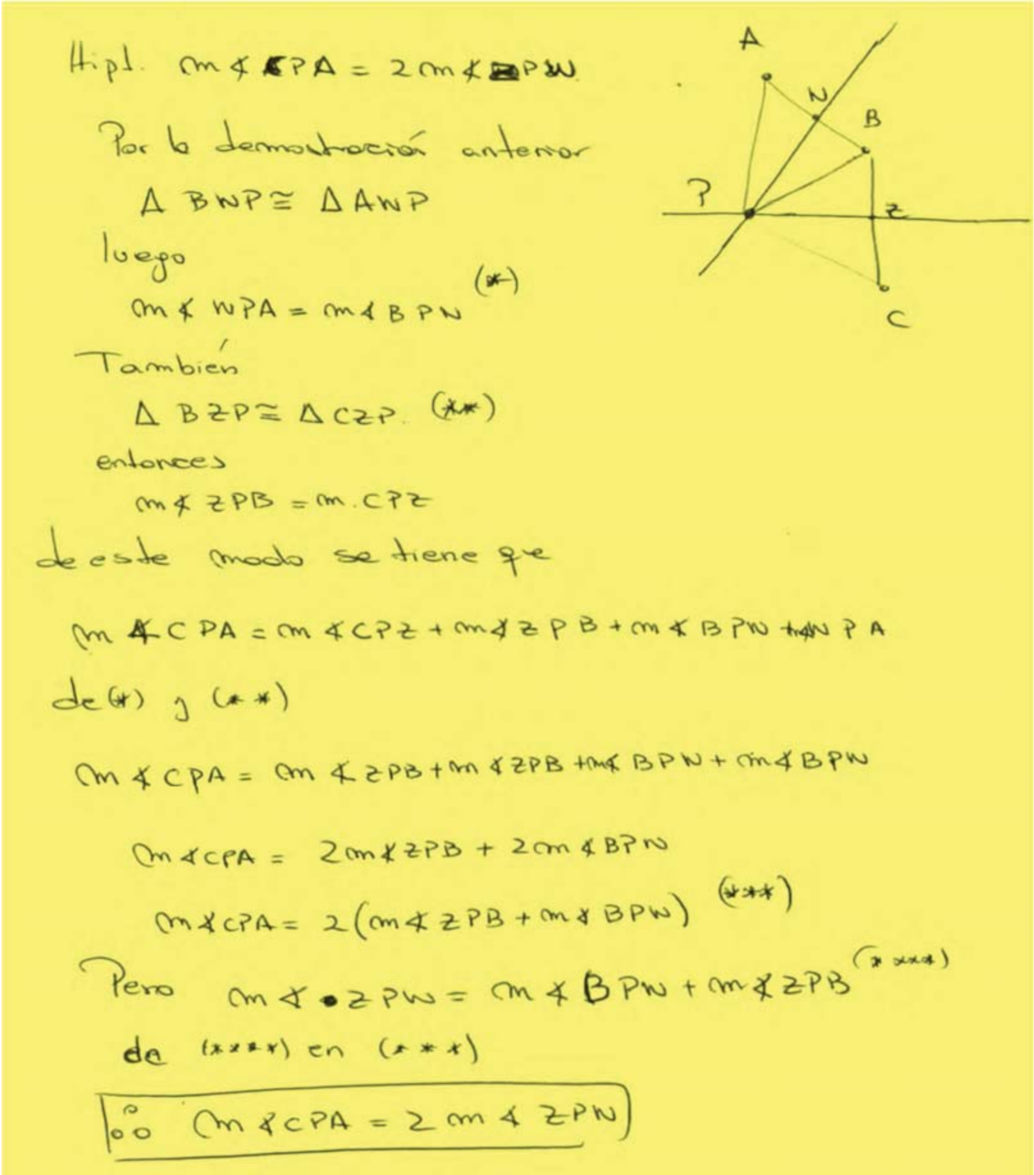


Figura 72. ***Respuesta del informante I1***

El informante I5 responde de forma errónea.

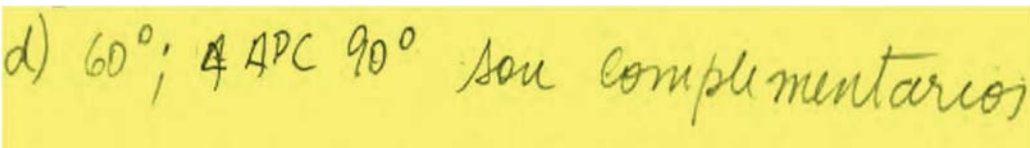


Figura 73. ***Respuesta del informante I***

ACTIVIDAD 3:
Sea A el punto (-3,5) y sea B el simétrico de A respecto a la recta y= -3x.
Sea C el simétrico de B respecto a la recta y= 2x

c) Hallar las coordenadas exactas de B.
d) Hallar las coordenadas exactas de C.

Resultados de la actividad 3.

1 De los docentes se sitúa en un modo **SG** para responder, grafica el punto A y las rectas en el plano cartesiano, pero no logra hallar las coordenadas exactas de B y C. Por otra parte, 4 de los docentes se sitúan en un modo **AA** para responder, utilizando solo un tratamiento analítico para obtener las coordenadas de B y C, sin utilizar el gráfico. Además, en las respuestas de 5 docentes se evidencia un tránsito entre **AA** y **SG**, porque recurren al grafico para verificar sus resultados analíticos. Por último, 3 docentes no responden. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I13 se sitúa en un modo SG para responder, grafica el punto A y las rectas en el plano cartesiano, pero no logra hallar las coordenadas exactas de B y C.

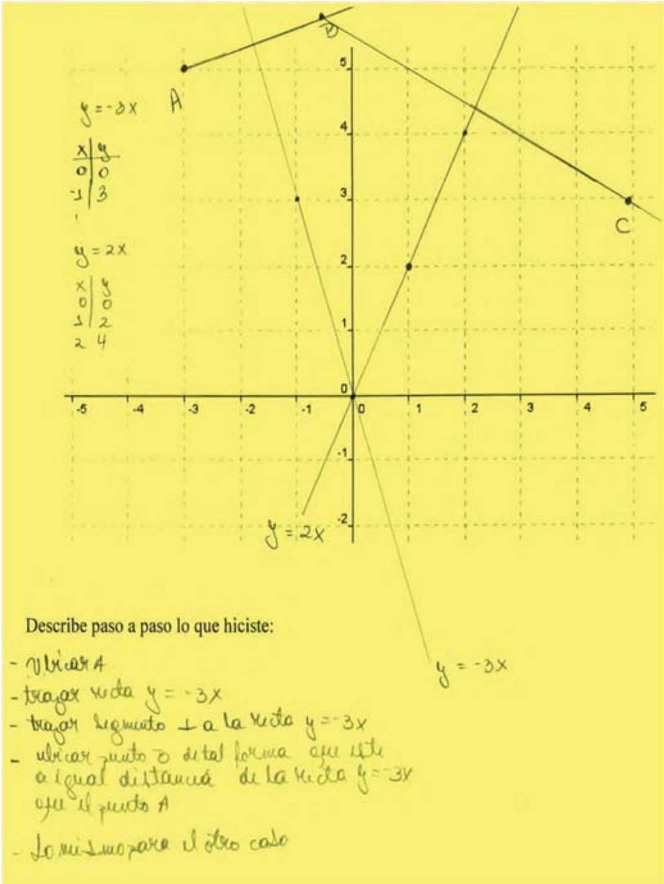
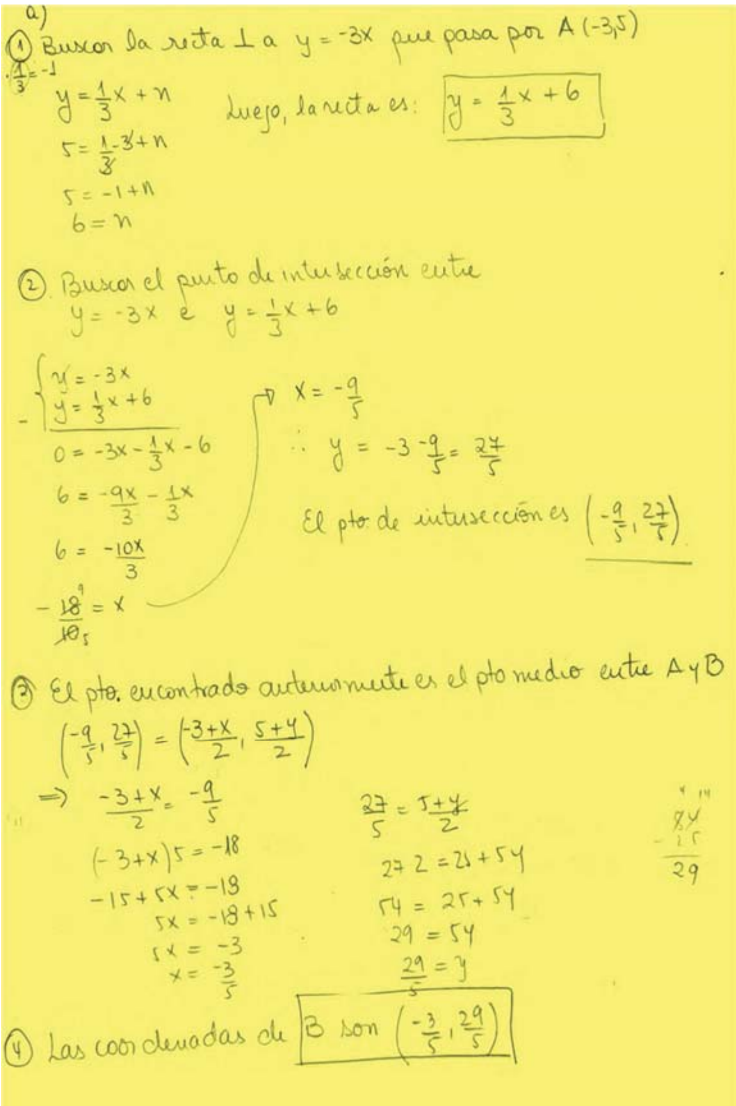


Figura 74. ***Respuesta del informante I13***

Los docentes I1, I3, I6 y I8 se sitúan en un modo **AA** para responder, utilizando solo tratamiento analítico para obtener las coordenadas de B y C, sin utilizar el gráfico.



a)

① Buscar la recta ⊥ a $y = -3x$ que pasa por $A(-3,5)$

$\cdot\frac{1}{3} = -1$

$y = \frac{1}{3}x + n$ Luego, la recta es: $\boxed{y = \frac{1}{3}x + 6}$

$5 = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot -\cancel{3} + n$

$5 = -1 + n$

$6 = n$

② Buscar el punto de intersección entre $y = -3x$ e $y = \frac{1}{3}x + 6$

$$-\begin{cases} y = -3x \\ y = \frac{1}{3}x + 6 \end{cases}$$

$0 = -3x - \frac{1}{3}x - 6$

$6 = -\frac{9x}{3} - \frac{1x}{3}$

$6 = -\frac{10x}{3}$

$-\frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{10}_{5}} = x$

$\to x = -\frac{9}{5}$

$\therefore y = -3 \cdot -\frac{9}{5} = \frac{27}{5}$

El pto de intersección es $\left(-\frac{9}{5}, \frac{27}{5}\right)$

③ El pto. encontrado anteriormente es el pto medio entre A y B

$\left(-\frac{9}{5}, \frac{27}{5}\right) = \left(\frac{-3+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{-3+x}{2} = -\frac{9}{5}$

$(-3+x)5 = -18$

$-15 + 5x = -18$

$5x = -18 + 15$

$5x = -3$

$x = -\frac{3}{5}$

$\frac{27}{5} = \frac{5+y}{2}$

$27 \cdot 2 = 25 + 5y$

$54 = 25 + 5y$

$29 = 5y$

$\frac{29}{5} = y$

$54 - 25 = 29$

④ Las coordenadas de $\boxed{B \text{ son } \left(-\frac{3}{5}, \frac{29}{5}\right)}$

Figura 75. ***Respuesta del informante I3 primera parte***

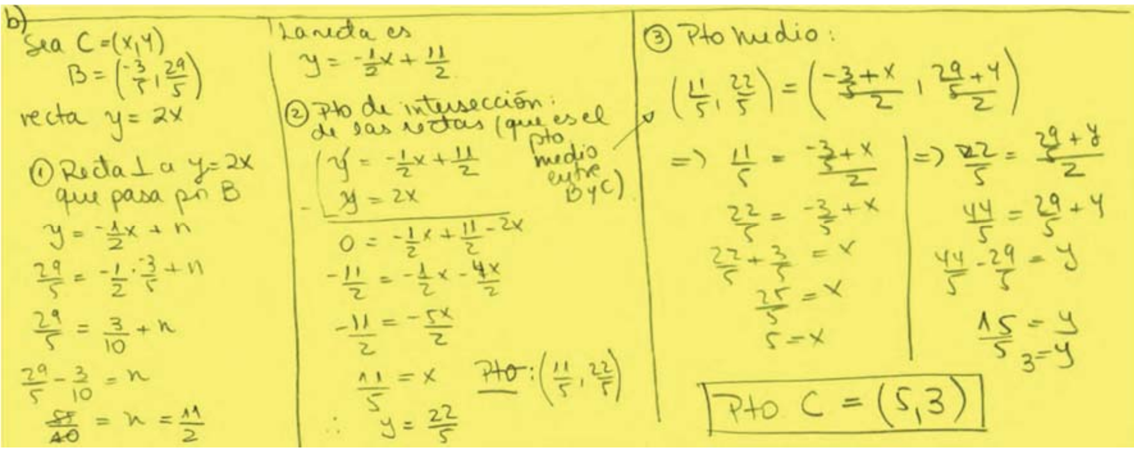


Figura 76. ***Respuesta del informante I3 segunda parte***

Los docentes I4, I7, I9, I11 y I12 se evidencia un tránsito entre los modos **AA** y **SG**, porque recurren al grafico para verificar sus resultados analíticos.

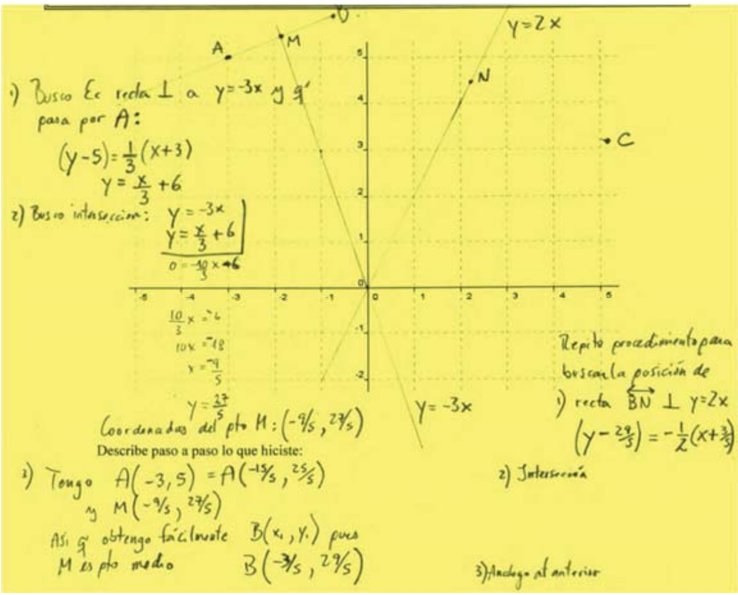


Figura 77. ***Respuesta del informante I11***

Los Docentes I2, I5 y I10 no responden.

ACTIVIDAD 4: Sea *A* un punto y *P* el punto de intersección de dos ejes de simetría. La medida del ángulo formado entre los ejes de simetría es 30° (en sentido horario).
Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

3) Hallar los ejes de simetría.
4) Hallar los puntos B y C.

Resultados de la actividad 4.

Solo uno de los docentes logra responder de forma correcta, en su respuesta se evidencia un tránsito entre los modos **AE-AA-SG**. Por otra parte, 7 de los docentes responden erróneamente. Por último, 5 de los docentes no responden. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I4 logra desarrollar la actividad y en su respuesta se evidencia un tránsito entre los modos **AE-AA-SG.**

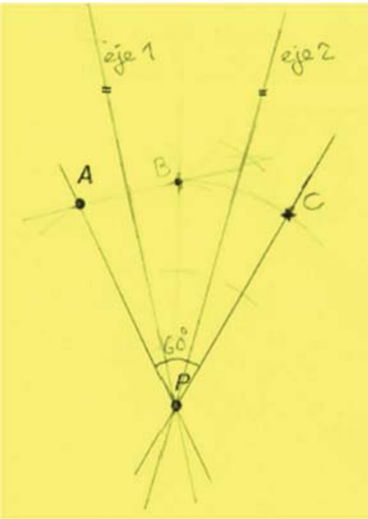


Figura 78. ***Respuesta del informante I4 Primera parte***

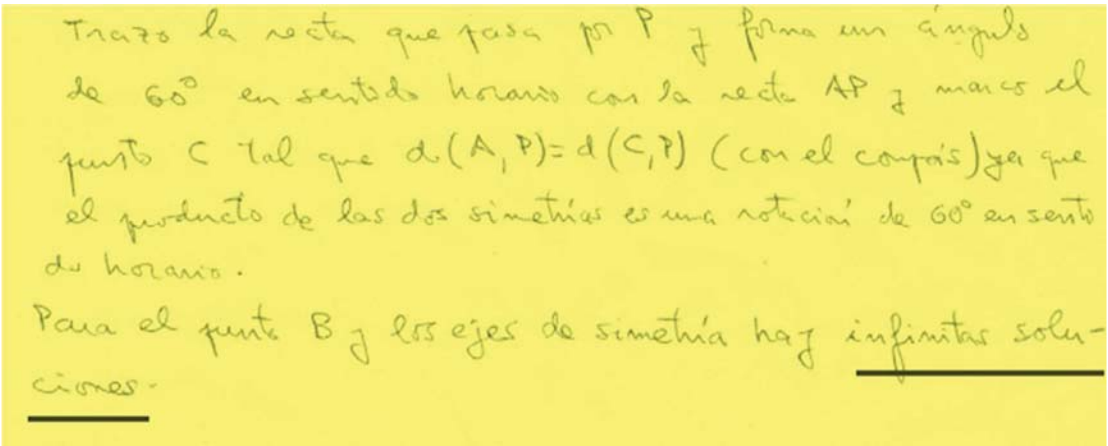

Trazo la recta que pasa por P y forma un ángulo de 60° en sentido horario con la recta AP y marco el punto C tal que d(A,P)=d(C,P) (con el compás) ya que el producto de las dos simetrías es una rotación de 60° en sentido horario.
Para el punto B y los ejes de simetría hay infinitas soluciones.

Figura 79. ***Respuesta del informante I4 Segunda parte***

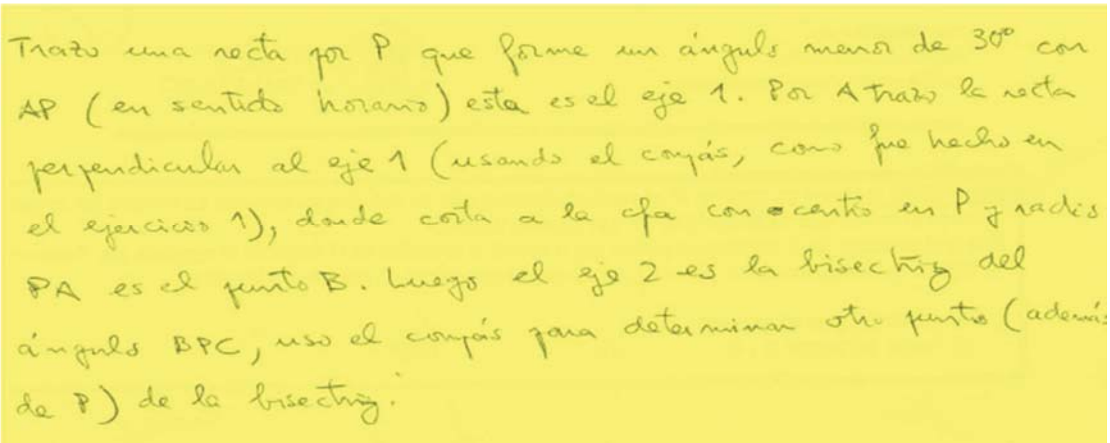

Trazo una recta por P que forme un ángulo menor de 30° con AP (en sentido horario) esta es el eje 1. Por A trazo la recta perpendicular al eje 1 (usando el compás, como fue hecho en el ejercicio 1), donde corta a la cfa con centro en P y radio PA es el punto B. Luego el eje 2 es la bisectriz del ángulo BPC, uso el compás para determinar otro punto (además de P) de la bisectriz.

Figura 80. ***Respuesta del informante I4 Tercera parte***

Los docentes I5, I6, I8, I9, I10 y I11 y I12 responden erróneamente.

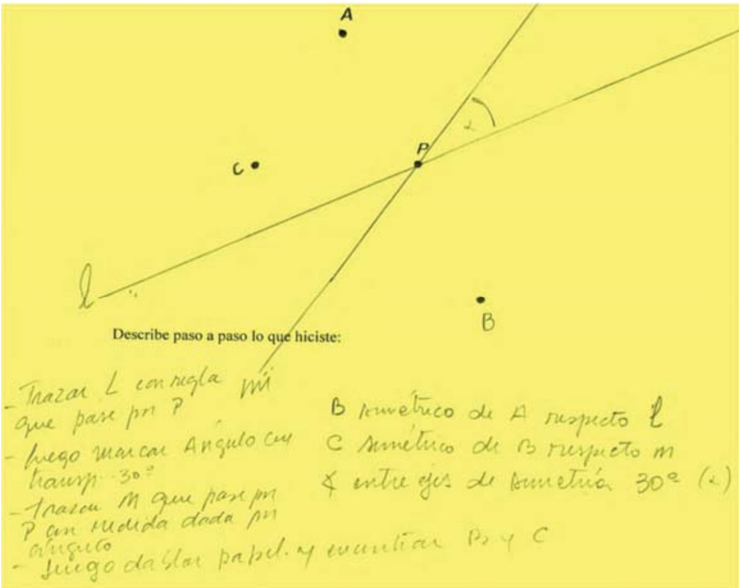


Figura 81. ***Respuesta del informante I5***

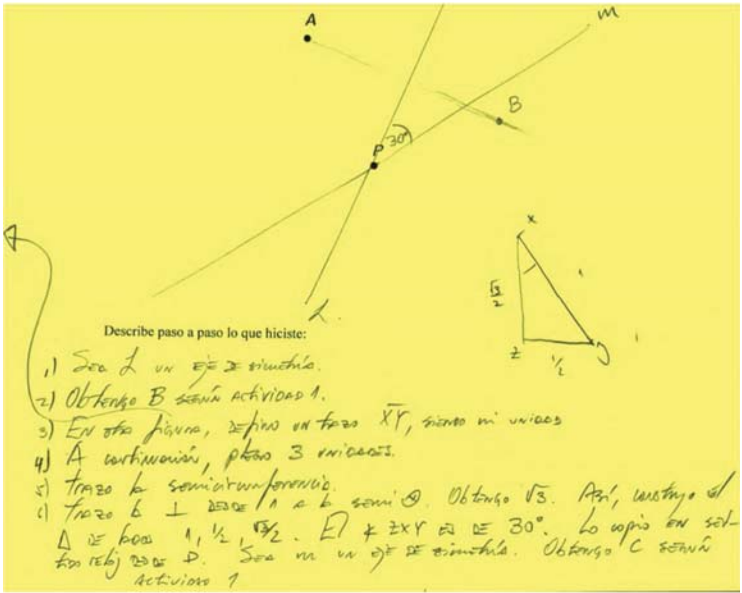


Figura 82. ***Respuesta del informante I6***

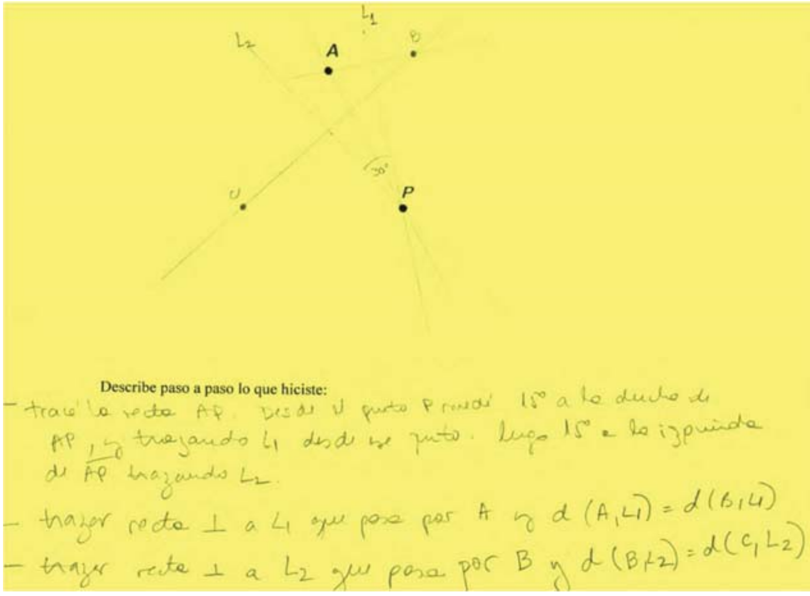


Figura 83. ***Respuesta del informante I8***

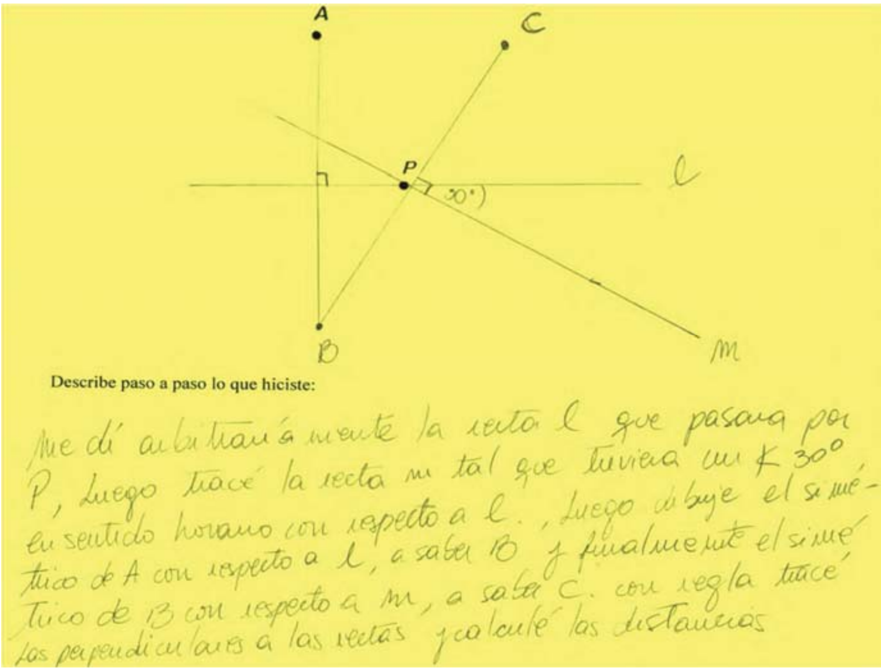


Figura 84. ***Respuesta del informante I9***

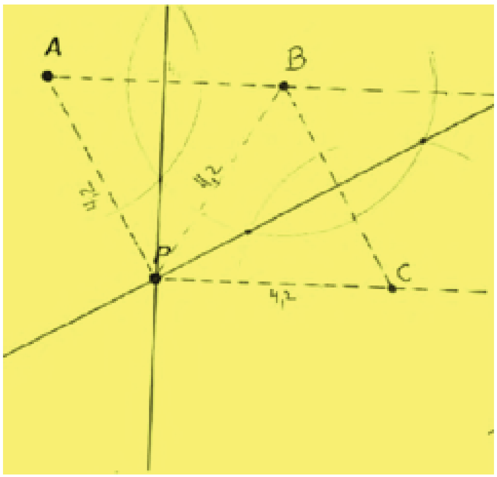


Figura 85. ***Respuesta del informante I10***

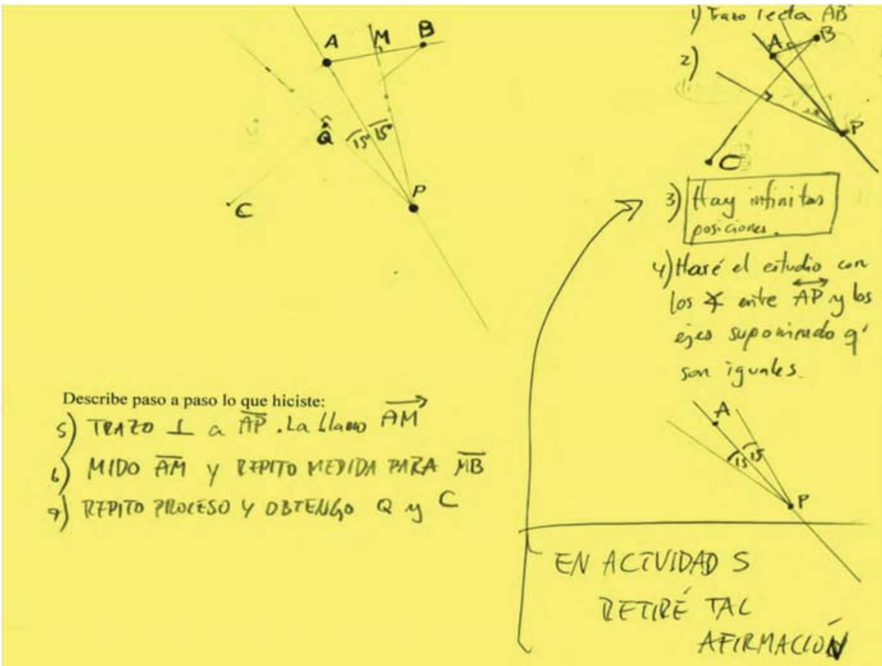


Figura 86. ***Respuesta del informante I11***

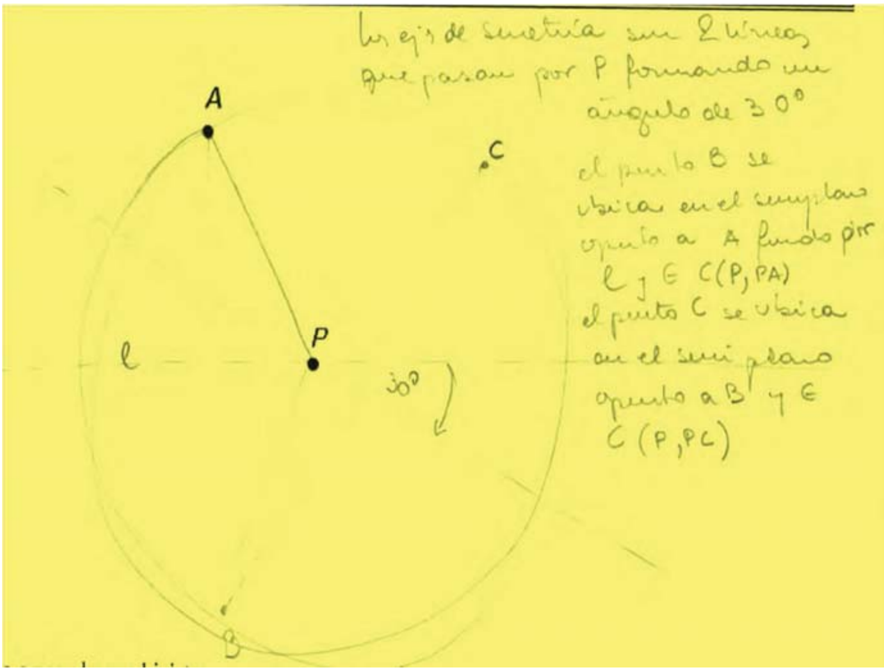


Figura 87. ***Respuesta del informante I12***

Los docentes I1, I2, I3, I7 y I13 no responden.

ACTIVIDAD 5: Sean *A* (4; 10) y *P* (0; 0) dos puntos en el plano. Además, se tiene que P es el punto de intersección de dos ejes de simetría y la medida del ángulo formado entre los dos ejes es 30° (en sentido horario).
Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.
1) Hallar las coordenadas exactas del punto C redondeando a la decima más cercana.

Resultados de la actividad 4.

Solo uno de los docentes logra abordar la actividad correctamente, pero no logra finalizarla, en sus argumentos se evidencia un tránsito entre los modos **AE-SG-AA.** Por otra parte, 4 de los docentes responden erróneamente. Por último, 8 de los docentes no responden. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El informante I4 logra desarrollar la actividad y en su respuesta se evidencia un tránsito entre los modos **AE-SG-AA.**

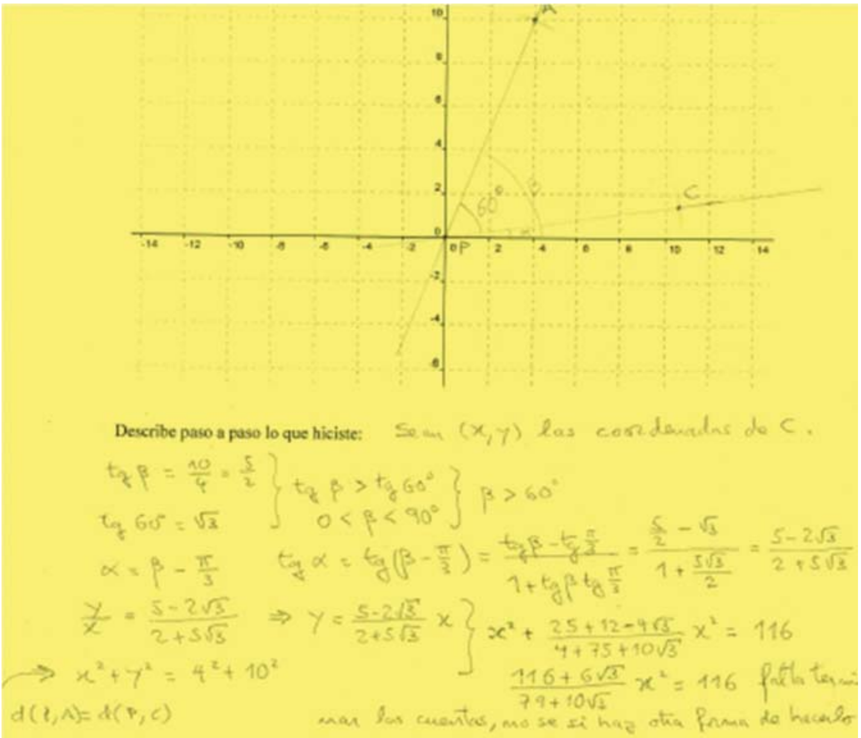


Figura 88. ***Respuesta del informante I4***

Los docentes I5, I6, I9, I11 y I12 responden erróneamente.

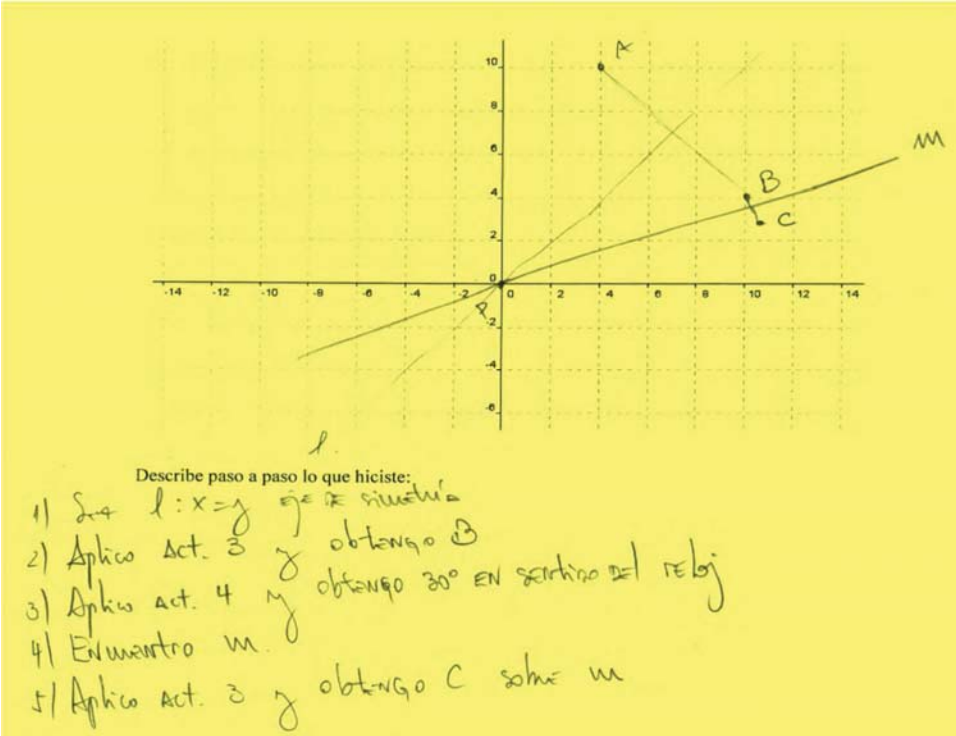


Figura 89. ***Respuesta del informante I6***

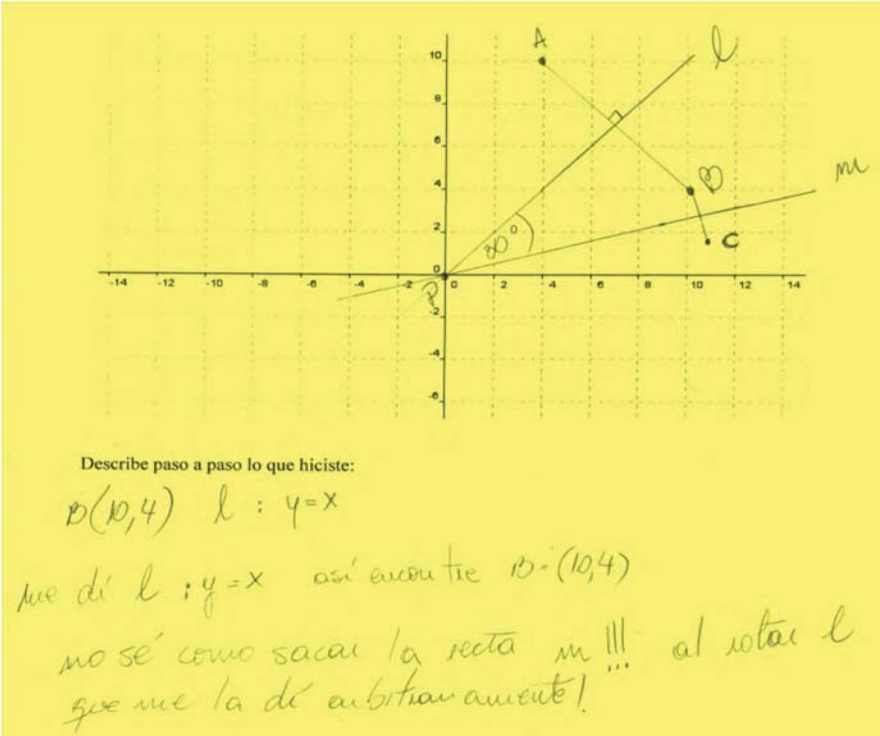


Figura 90. ***Respuesta del informante I9***

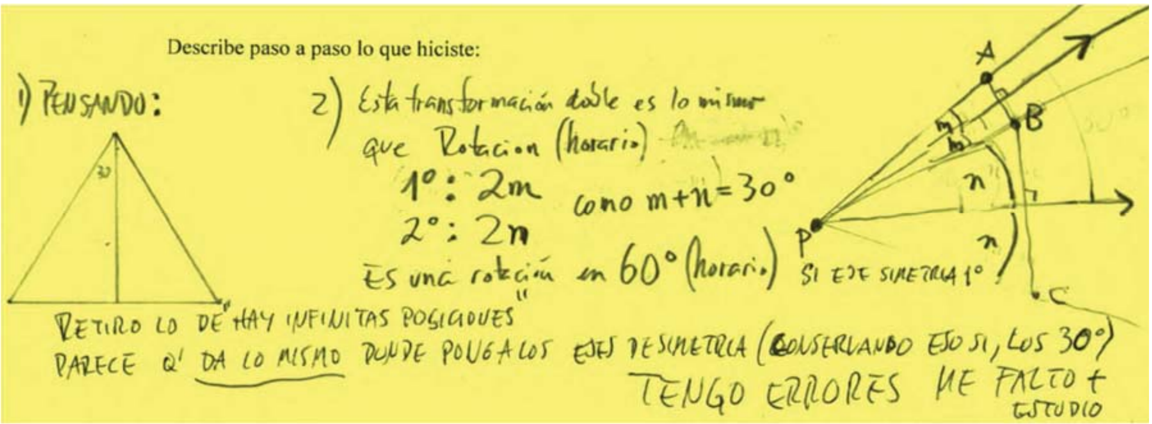


Figura 91. ***Respuesta del informante I11***

Los docentes I1, I2, I3, I7, I8, I10, I12 y I13 no responden.

CONCLUSIONES DEL CUESTIONARIO APLICADO A DOCENTES DE MATEMÁTICA

En general los docentes muestran un dominio en cuanto a la comprensión de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde un modo Sintético – Geométrico, es decir, se les facilita hallar gráficamente el simétrico de un punto a través de la composición de dos simetrías con ejes secantes. Así mismo, situados en el modo Sintético – Geométrico, se les facilita transitar al modo Analítico - estructural.

La mayoría de los docentes comprende la composición de dos simetrías con ejes secantes desde un modo Analítico – Aritmético. Además, se evidencio que más de la mitad de los docentes que muestran un dominio en AA, recurren a la gráfica en el plano cartesiano para corroborar sus resultados, es decir dan muestra de una articulación entre los modos de pensar AA y SG.

En cuanto al modo de pensar Analítico – Estructural, los docentes en general muestran grandes dificultades en su comprensión. Las actividades 4 y 5 dan cuenta de ello, puesto que al plantearles una actividad en el modo AE, no son capaces de recurrir a las propiedades que definen a la composición de dos simetrías con ejes secantes para resolverla. Esto lleva a dos errores frecuentes en el desarrollo del cuestionario: el Primero, no reconocen los invariantes de la composición en sí, sino que recurren a los invariantes de la simetría, más no a los de la composición los cuales están ligados a los invariantes del movimiento rígido Rotación. El segundo, no reconocen la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como un caso particular de composición de funciones, en el que se debe respetar el orden de la composición.

CAPÍTULO VIII: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

A partir de los resultados obtenidos en nuestra investigación, entregamos un conjunto de sugerencias didácticas para el aprendizaje del concepto composición de dos simetrías con ejes secantes.

Iniciar con actividades donde los estudiantes transiten entre los modos SG-AE, sugerimos actividades donde inicialmente se deba realizar la composición de un **punto** en el espacio respecto a ejes secantes, ya que, nos permite enfocarnos en los invariantes que prevalecen respecto al **punto de intersección de los ejes**, y además, en el orden que se debe respetar al componer funciones.

Posterior a ello, se recomienda diseñar actividades que propicien un modo de pensar la compuesta de dos simetrías con ejes secantes desde el modo Analítico-Aritmético, tomando inicialmente como ejes de simetría el eje X, el eje Y, la recta Y = X, pero a su vez, potenciar actividades donde los ejes de simetría puedan ser cualquier recta en el plano cartesiano, con el fin de dar otra mirada al objeto matemático y a su vez relacionarlo con diferentes contenidos analíticos, tales como: función, rectas perpendiculares, punto medio, distancia entre dos puntos, punto de intersección, los cuales se ven reducidos a la **visualización** cuando se trabaja tomando **únicamente** como referencia a los ejes de simetría el eje x y el eje y o la recta $y = x$. Paralelo a ello, es recomendable fomentar la articulación entre los modos Analítico - Aritmético y Sintético – Geométrico.

Luego de ello, se sugiere plantear actividades que propicien las conexiones entre los modos SG-AE en el plano cartesiano, con los elementos propios de la geometría analítica. Para ello se recomienda trabajar inicialmente la composición de un par ordenado $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ respecto a rectas secantes, por las razones especificadas en el primer párrafo. El objetivo de establecer estas conexiones entre los modos SG-AE y AA es escudriñar otra forma de comprender este objeto matemático y lograr una comprensión profunda con la articulación de los tres modos. Por otra parte, el tratamiento analítico **no** convencional que propone esta investigación sobre el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes permite actividades que propicien el transito del modo Analítico – Estructural al Analítico – Aritmético sistematizar este objeto matemático con conceptos tales como: distancia, ángulos, triángulos, circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

CONCLUSIONES TEÓRICAS Y REFLEXIONES FINALES

Al inicio de nuestra investigación nos planteamos las siguientes interrogantes:

- El concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes que prevalece en los Docentes de matemática que imparten la asignatura en estos niveles ¿permite movilizar este objeto matemático, entre sus diferentes definiciones como: Movimiento Rígido, transformación isométrica o como una rotación?
- ¿Qué elementos Matemáticos contribuyen a lograr un tránsito entre los diferentes modos de pensar este objeto matemático?

En relación a la primera interrogante, evidenciamos que los docentes comprenden la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como un caso particular de simetría, es decir desde las propiedades exclusivamente de la simetría axial, sin tener en cuenta el vínculo que guarda este objeto matemático con el concepto de rotación. Por lo cual, los datos de la investigación dan cuenta de las grande dificultades que presentan los docentes en transitar desde el modo AE al modo SG, así mismo, transitar desde el modo AE al modo AA. Según estos resultados, argumentamos que el concepto de composición de dos simetrías con ejes secantes que prevalece en los docentes de matemática no permite movilizar este objeto matemático entre sus diferentes definiciones, en consecuencia, los docentes no poseen una comprensión profunda de este objeto matemático, por ende los estudiantes tampoco la tienen.

En relación a la siguiente interrogante, planteamos que los elementos de la matemática que promueven el tránsito entre los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes obedecen principalmente a estructuras, como se explica a continuación: Para transitar de SG a AE, se requiere de la comprensión de la definición de la compuesta de dos simetrías con ejes secantes como una rotación. Desde AE-SG, los conectan los invariantes de distancia y ángulo respecto al punto de intersección de los ejes de simetría. Desde SG - AA A partir de los **invariantes** que se dan entre un punto y su simétrico. Desde AA - SG necesitamos de conceptos vistos de forma analítica, tales como: ecuación de la recta, rectas perpendiculares, punto de intersección, punto medio, distancia entre dos puntos, y desarrollo algorítmicos de sistemas de ecuaciones[12]. Desde AE - AA requerimos de conceptos como: distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, ángulos, triángulos, ecuación de la circunferencia, relaciones trigonométricas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Enfatizamos que en la mayoría de las conexiones entre los modos de comprender la compuesta de dos simetrías con ejes secantes, hay elementos que obedecen a los invariantes del concepto de rotación, como lo son: distancia y ángulo. Y también hay elementos en su mayoría analíticos que ayudan en la interacción: fórmula de distancia, desarrollos algorítmicos de las ecuaciones cuadráticas, cálculo de raíces cuadradas, razones trigonométricas entre otros.

En relación a los modos de comprender la composición de dos simetrías con ejes secantes, hacemos énfasis que si bien los tres modos son igualmente importantes para la comprensión del concepto, una vez comprendido el modo analítico – estructural es posible transitar con mayor facilidad hacia los otros modos.

Para finalizar queremos enfatizar que las evidencias con sustento teórico, proporcionadas de los resultados de la investigación, contribuyen al desarrollo de la teoría de los modos de pensamiento en otros ámbitos, un tanto distante del álgebra lineal, como por ejemplo, en el estudio de las transformaciones isométricas u otros temas relativos a la geometría; sin descuidar los elementos principales de la teoría.

[12] Al caso especifico de sistemas 2x2 el cual alude a dos ecuaciones y dos incógnitas.

BIBLIOGRAFÍA

Bonilla, (2011). La elipse desde la perspectiva de la Teoría de los modos de pensamiento. Tesis para obtener el grado de Magister en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Gascón, J (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. Barcelona: La Gaceta.

González P., Soto A., (2001). Matemática Activa texto para el Estudiante 1 er año Medio. Mare Nostrum. Chile.

Jahn, A. (1998). Des transformations des figures aux transformations ponctuelles. Francia: Université Joseph Fourier.

Klein, F. (1921). Matemática Elemental. Capítulo III “sistematización y fundamentos de la geometría” Madrid: Valladolid.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (1998). Matemática. Programa de Estudio Primer Año Medio. Ministerio de educación. Chile.

Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación (2009). Matemática. Programa de Octavo Básico y Primer Año Medio. Ministerio de educación. Chile.

Ortiz A., Reyes C., Valenzuela M., Chandía E. (2009). MATEMÁTICA Texto para el Estudiante 1er año medio. McGraw-Hill Interamericana. Chile.

Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, (209-246).

Vallejo J (1819). Compendio de Matemáticas puras y mistas, Tomo I. Valencia, la imprenta de Estévan.

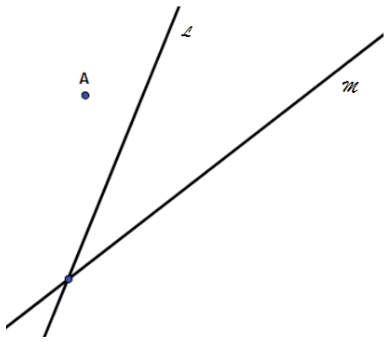
Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991).Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America.

ANEXOS

ANEXO I CUESTIONARIO EXPLORATORIO

Nombre: ____Nivel educativo: ___________

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y $\mathcal{L}$ una recta, sea B el simétrico de A respecto a $\mathcal{L}$ *y s*ea C el simétrico de B respecto a la recta $\mathcal{M}$. Hallar C



ACTIVIDAD 2: Sean A y P dos puntos. Rotar el punto A 60°(en sentido horario) respecto a P

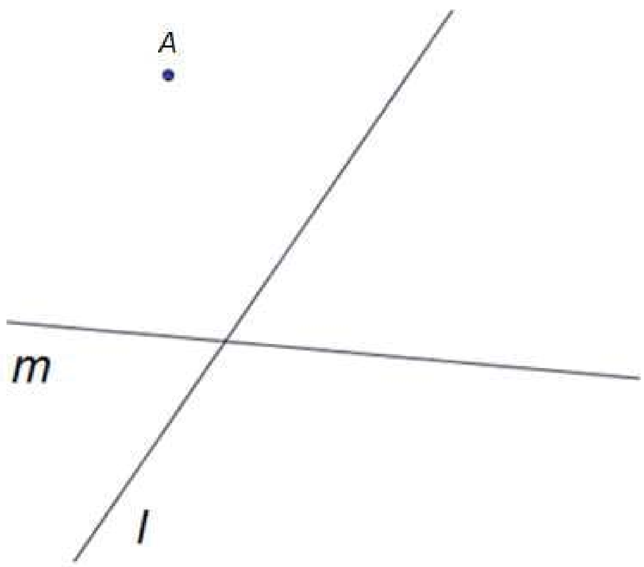
¿Qué relación hay entre la actividad 1 y la actividad 2? ¿Por qué?

ANEXO II CUESTIONARIO A DOCENTES

ACTIVIDAD 1: Sea A un punto y *l* una recta.

e) Sea B el simétrico de A respecto a *l.* Hallar B

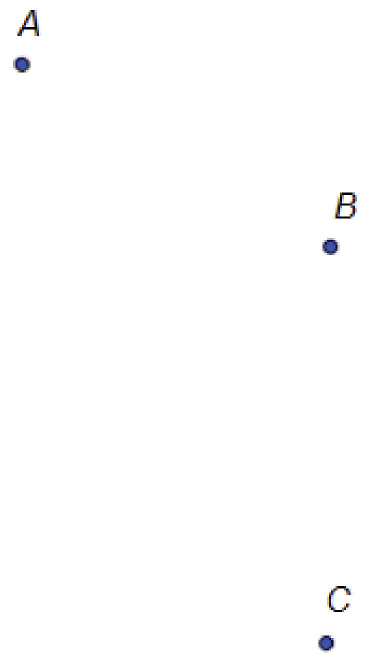
f) Sea C el simétrico de B respecto a la recta *m*. Hallar C



Describe paso a paso lo que hiciste:

ACTIVIDAD 2: Sean *A, B y C* tres puntos tales que: *C* es el simétrico de *B* respecto a una recta y *B* es el simétrico de A respecto a otra recta. Tenga en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

i) Hallar las dos rectas (*l y m)* que corresponden a los ejes de simetría.
j) Marque el punto donde se intercepta los ejes *l y m.*
k) Sea *P* el punto de intersección de los ejes, hallar la distancia de *P* a cada uno de los puntos A, B y C. ¿Qué relación hay entre estas distancias?
l) Medir con el transportador el ángulo formado entre los ejes de simetría. Luego mida el ángulo APC, después de medirlo establezca una relación entre los dos ángulos.

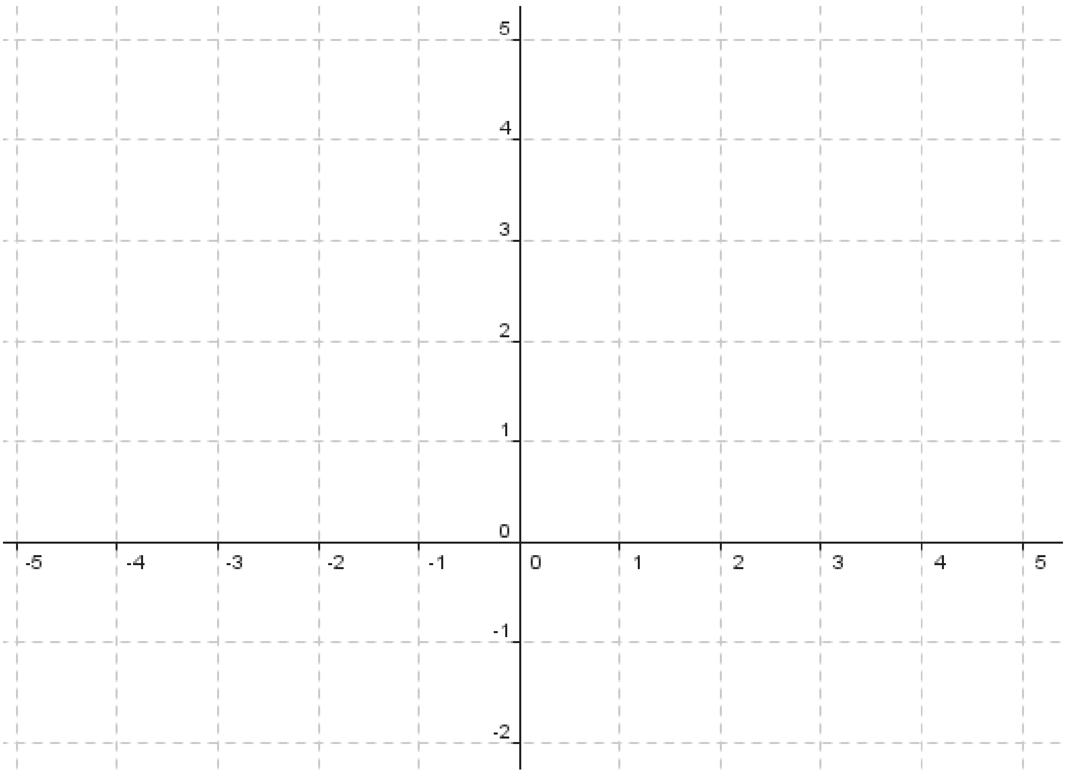


Describe paso a paso lo que hiciste:

ACTIVIDAD 3:

Sea A el punto (-3,5) y sea B el simétrico de A respecto a la recta *y*= -3x.
Sea C el simétrico de B respecto a la recta *y*= 2x

e) Hallar las coordenadas exactas de B.
f) Hallar las coordenadas exactas de C.



Describe paso a paso lo que hiciste:

ACTIVIDAD 4: Sea *A* un punto y *P* el punto de intersección de dos ejes de simetría. La medida del ángulo formado entre los ejes de simetría es 30°(en sentido horario).
Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.

5) Hallar los ejes de simetría

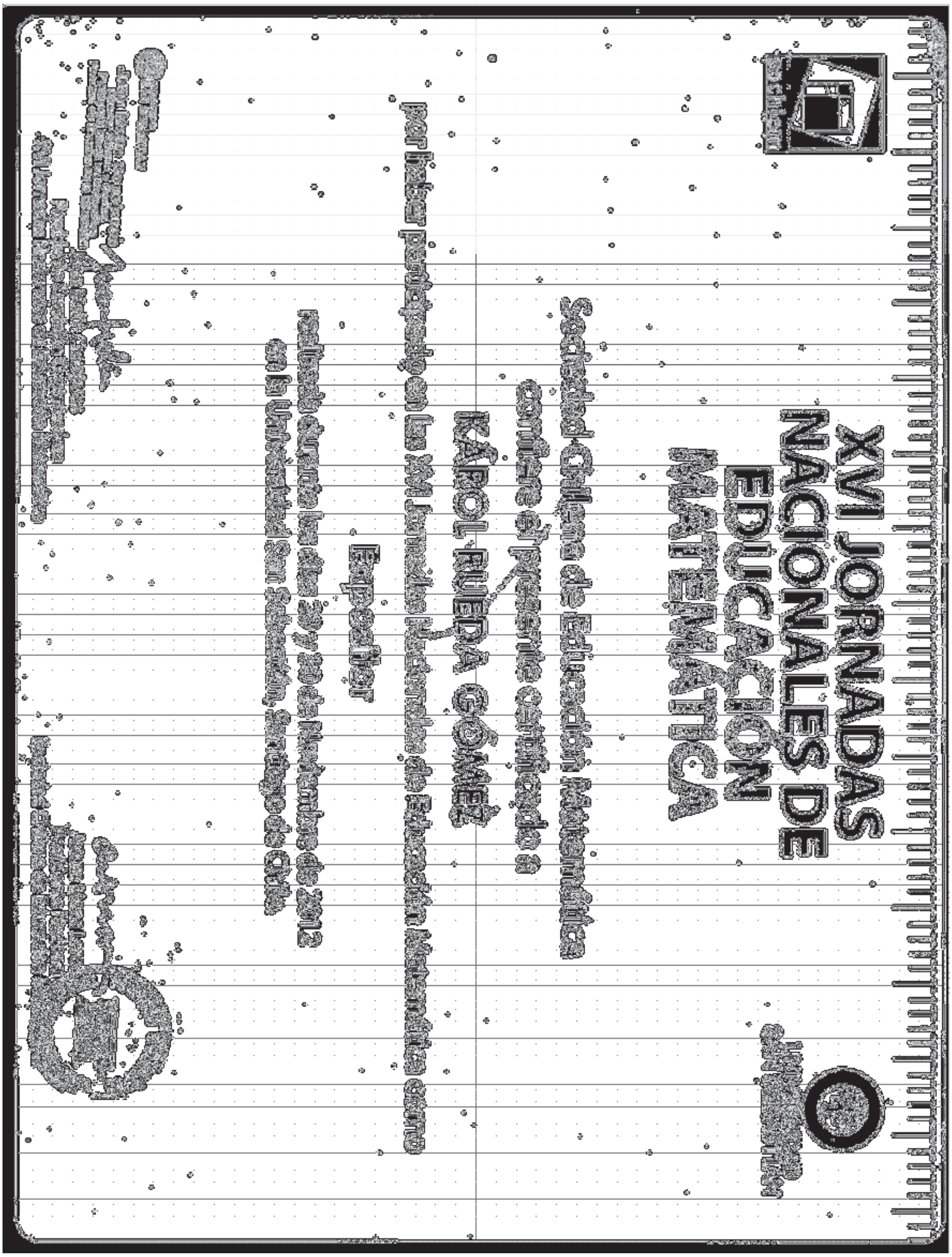
Describe paso a paso lo que hiciste:

<u>ACTIVIDAD 5:</u> Sean *A* (4; 10) y *P* (0; 0) dos puntos en el plano. Además, se tiene que P es el punto de intersección de dos ejes de simetría y la medida del ángulo formado entre los dos ejes es 30° (en sentido horario).
Sea B el simétrico de A respecto al primer eje, y sea C el simétrico de B respecto al segundo eje. Teniendo en cuenta que **ninguno** de los puntos A, B y C están contenidos en los ejes de simetría.
1) Hallar las coordenadas exactas del punto C

Describe paso a paso lo que hiciste:

ANEXOS PONENCIAS

XV JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA



SÉPTIMA REUNIÓN LATINO AMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. RELME 27