Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Errores y dificultades para utilizar el Álgebra Elemental. Un caso de estudiantes novatos de la Educación Superior

Tesis para optar al Grado de

Magíster en Didáctica de la Matemática

De: Ricardo Salinas Páez.

Profesora Guía: María Soledad Montoya González

2013

Índice

Introducción

Esta investigación se propone *indagar en algunas dificultades y errores en el trabajo algebraico que presentan estudiantes novatos en la educación superior*. Apuntamos a la dificultad para reconocer y activar estrategias de resolución en las que el estudiante utiliza álgebra elemental, mientras que los errores se restringen a los provocados por un inadecuado tratamiento de propiedades algebraicas.

Para esta investigación se utilizó la aproximación teórica de los *Paradigmas y Espacios de Trabajo Algebraico,* de Mena y Morales (2011). El estudio de los fenómenos descritos se aborda a través del análisis de los elementos característicos del espacio de trabajo algebraico personal del estudiante y del posicionamiento y tránsito entre los paradigmas de la aritmética y del álgebra elemental. Para analizar las dificultades se propone evidenciar el rol de la visualización en el posicionamiento o tránsito entre paradigmas, mientras que el análisis de los errores se estudiará describiendo los artefactos que son puestos en acción cuando el estudiante resuelve desde el paradigma del álgebra elemental.

En el capítulo 1, se realiza la descripción y fundamentación de la problemática de investigación, se plantean las preguntas y objetivos del estudio, se exponen las evidencias y antecedentes del problema a investigar, se muestra el desarrollo histórico-epistemológico del álgebra y un análisis del objeto ecuaciones lineales.

En el capítulo 2, se establecen las características fundamentales del marco teórico, sus antecedentes, la clasificación de paradigmas algebraicos y los elementos que conforman el espacio de trabajo algebraico.

En el capítulo 3, se describe la metodología de investigación utilizada, detallando el diseño del estudio, las preguntas elaboradas para el cuestionario, su objetivo y los criterios de análisis involucrados.

En el capítulo 4, se presenta el análisis de las respuestas a las preguntas del cuestionario, realizado en virtud de la caracterización teórica que provee los Paradigmas y Espacio de Trabajo Algebraico.

En el capítulo 5, se formulan las conclusiones de la investigación, en la que se responden las preguntas de investigación y las posibles proyecciones del estudio.

Capítulo 1: Problemática de la Investigación

1.1 Problemática de Investigación

Desde la década de los ochenta la educación superior en Chile ha experimentado una creciente masificación. Las oportunidades de acceso a la educación terciaria han aumentado de la mano de la diversificación de la oferta académica y de la incorporación de algunos procesos de admisión menos selectivos.

Pero vinculada a la evolución creciente de la matrícula en educación superior, se reconoce también el problema de las altas tasas de deserción, que las instituciones atribuyen principalmente al bajo nivel académico de los estudiantes que ingresan a sus aulas.

Progresivamente han asumido la responsabilidad de subsanar las falencias académicas de sus alumnos, compromiso que para el caso de la matemática toma la forma de nivelaciones y reforzamientos. Sin embargo, algunos estudios[1] muestran el escaso éxito que tiene este enfoque en la deserción.

Las instituciones se enfrentan al problema de dotar a sus estudiantes de los saberes matemáticos requeridos de base, problema que no es menor dado los magros resultados en matemática a nivel escolar[2], que suponen deficiencias profundas en los conocimientos matemáticos de muchos estudiantes que ingresan a la educación terciaria.

Subsanar las posibles deficiencias académicas de los estudiantes es una tarea que las instituciones asumen, por lo general, mostrando la colección de contenidos matemáticos

[1] Estudio sobre causas de la deserción universitaria. Universidad de Chile, Agosto de 2008, p. 64. La educación superior en Chile, OCDE, 2009, p.97

[2] El informe de PISA 2009 muestra que el 22% de los estudiantes chilenos está por debajo del primer nivel de desempeño, el de las competencias más elementales. El 50% no supera este primer nivel y solo el 1% de los estudiantes llega al nivel más alto (nivel 6).

que el estudiante debe conocer o recordar, asumiendo que él podrá transformarlos en saberes. Una mirada de la enseñanza de la matemática que rápidamente se ve contrariada por la invariabilidad en las deficiencias académicas de los estudiantes, quienes no solo presentan grandes dificultades para transformar los contenidos matemáticos en saberes, sino que además no son capaces de movilizarlos a situaciones que les sean útiles.

A pesar que los programas o asignaturas de nivelación se empeñan en entregar los conocimientos faltantes, es fácil observar con frecuencia que los estudiantes siguen utilizando sus conocimientos anteriores, aún cuando les resulten menos eficientes o incluso efectivos. Esto se manifiesta en la persistencia de algunos estudiantes en utilizar aritmética en desmedro del álgebra elemental. Aún cuando los estudiantes hayan revisados tópicos de álgebra en las nivelaciones o en sus cursos de matemática, muchos no utilizan estos conocimientos para resolver los problemas que se les presenta, en su lugar priorizan enfoques aritméticos de resolución.

No se juzga como problemática en si la utilización de estrategias aritméticas, sino su pertinencia en ciertos contextos. Particularmente, cuando su reiteración da evidencias de *dificultades para reconocer y activar un trabajo algebraico*.

Si bien la resolución aritmética se puede mostrar eficaz en determinados problemas, la complejidad creciente de las organizaciones matemáticas involucradas en la educación superior, comienza a limitar fuertemente el abanico de problemas que puede llegar a resolver con este tipo de estrategias o la eficiencia con la que permite llegar al resultado. Muchos de las tareas implicadas requieren representar, abstraer, generalizar y modelar, para lo que el álgebra elemental presenta una potencia que la aritmética no tiene. Lo anterior permite señalar que un estudiante que ingresa a la educación superior y que queda encerrado en tipos de resolución aritméticas podría reducir drásticamente sus posibilidades de éxito.

Hay por tanto ciertas dificultades en reconocer que una tarea puede ser abordada algebraicamente o en activar efectivamente un trabajo algebraico, especialmente cuando el estudiante se enfrenta a problemas de enunciado que requieren un proceso de modelización. Dificultad que se evidencia a través de la persistencia de estos estudiantes a enfrentar las tareas de forma aritmética.

Por su parte, en el mismo trabajo algebraico es posible identificar *errores en el tratamiento de algunas propiedades algebraicas*. Es recurrente observar la ausencia de paréntesis en las expresiones algebraicas, que conllevan a errores, o un inadecuado uso del signo igual en la resolución de ecuaciones. Un tratamiento que también aparece en sus desarrollos aritméticos, lo que lleva a pensar que puede haber un vínculo que relaciona los errores en el tratamiento algebraico con la determinación de los estudiantes en aplicar procedimientos aritméticos que aparecen descontextualizados en ámbitos de resolución algebraica.

Identificamos por tanto una problemática que relaciona ciertas dificultades y errores en el tratamiento del álgebra elemental, con el fuerte posicionamiento que algunos estudiantes tienen respecto de su conocimiento aritmético. Es en este contexto en que la investigación se propone responder las siguientes preguntas:

¿Por qué algunos estudiantes tienen dificultades para reconocer que ciertas tareas pueden ser abordadas usando su conocimiento de álgebra elemental?

¿Por qué algunos estudiantes reiteradamente cometen errores en el tratamiento del álgebra elemental?

1.2 Fundamentación

Ya sea por falta de procesos de admisión selectivos o por el deficiente estado de la matemática escolar, las universidades están asumiendo el rol de nivelar a sus alumnos. Sin embargo, el enfoque epistemológico de la matemática que sostienen no les permite reconocer que los estudiantes no son una hoja vacía sobre la que reescribir su conocimiento, los saberes del álgebra elemental que se les intenta instalar entran en conflicto con sus conocimientos aritméticos, provocando las dificultades y errores mencionados en la problemática.

No existe conciencia en las instituciones que estas dificultades y errores son la manifestación de un fenómeno mucho más complejo, reduciéndolos a una falta de conocimiento del estudiante, redundado infructuosamente en los mismos planes de apoyo académico.

Resulta especialmente complejo intentar entregar competencias matemáticas básicas que debieron desarrollarse en distintas etapas del nivel escolar, sin embargo parece un deber de las instituciones proveer a sus alumnos de condiciones mínimas que les permitan tener una oportunidad real para asumir sus estudios.

En este sentido esta investigación puede contribuir en la identificación de errores y dificultades asociadas al trabajo algebraico de los estudiantes, que sirva como antecedente para la elaboración de otro tipo de propuestas para la enseñanza del álgebra elemental en el ámbito de la educación superior.

Por otro lado, este trabajo se desarrolla desde una aproximación teórica en construcción, cuyos elementos metodológicos puedan guiar otras investigaciones en el área.

1.3 Objetivos de Investigación

Objetivo General

Indagar en algunas dificultades y errores en el trabajo algebraico que presentan estudiantes novatos en la educación superior.

Se apunta específicamente a las dificultades para reconocer y activar estrategias de resolución algebraicas, que para esta investigación estarán referidas a las ecuaciones lineales y las expresiones algebraicas, mientras que los errores se restringen a los producidos por un tratamiento inadecuado de estas.

Para explicitar los objetivos específicos en términos teóricos, primero precisaremos algunos aspectos de la problemática que justifican la utilización del enfoque teórico desde el que se realiza el estudio.

La problemática plantea dificultades y errores en el álgebra elemental, que creemos no pueden ser miradas solo en los procesos cognitivos del estudiante, ya que hay elementos epistemológicos implicados, particularmente referidos al carácter simbólico de las herramientas del álgebra, simbolismo que en la aritmética resulta muchas veces prescindible. Asociado a ello, se reconoce en la persistencia de las estrategias aritmética un estatus paradigmático de este conocimiento en los estudiantes.

Estos aspectos establecen condiciones en la problemática que pueden ser analizadas con la teoría de los Paradigmas y Espacios de Trabajo Matemático, de Kuzniak (2011), y en específico con la aproximación teórica de los Paradigmas y Espacios de Trabajo Algebraico (ETA en adelante), de Mena y Morales (2011).

Desde esta perspectiva, el estudio de las dificultades y errores se realizará analizando los elementos característicos del ETA personal del estudiante y su posicionamiento y tránsito entre los paradigmas de la aritmética (A1) y del álgebra elemental (A2).

Objetivos específicos:

- Evidenciar el rol de la visualización en el posicionamiento o tránsito entre paradigmas, en la caracterización de las dificultades para activar un trabajo algebraico.

- Estudiar el rol de los artefactos y los paradigmas, en la caracterización de errores en el tratamiento de expresiones algebraicas y ecuaciones lineales.

1.4 Evidencias y Antecedentes

1.4.1 Evidencias empíricas

Para buscar evidencias de los fenómenos descritos en la problemática se analizaron las respuestas de un curso de 20 estudiantes de una carrera técnica de un Instituto Profesional, en relación al siguiente problema:

"Un negocio tiene a la venta dos tipos de artículo. Un día vende en total 100 artículos, el primero de ellos a $5 la unidad y el segundo a $8. Si la ganancia total ese día fue de $689, ¿cuántos artículos de cada tipo se vendieron?"

El siguiente es un listado de algunas de las respuestas observadas:

- Muchos suelen buscar la respuesta por "tanteo", probando con distintos valores hasta llegar al que satisface las condiciones del problema.
- El recurso más habitual para encontrar la solución fue tomar los valores numéricos contenidos en el enunciado y probar secuencias de operaciones aritméticas que dieran con el resultado esperado.
- Los estudiantes se conforman muchas veces con que la secuencia les permita encontrar un valor numérico, sin recurrir a una verificación matemática.
- Cuando la secuencia de operaciones aritméticas no les permite encontrar la respuesta, algunos señalan que el problema estaba mal planteado o que no tenía solución.
- Muy pocos estudiantes reconocen la necesidad de usar símbolos literales para representar las variables o incógnitas del problema.
- De los pocos que establecen símbolos literales para las incógnitas o variables del problema solo algunos logran plantearse las expresiones o ecuaciones involucradas.
- De los que usan letras para simbolizar, varios las relacionaban con los objetos mismos y no con la característica de interés de estos.

Estas situaciones permiten evidenciar un fenómeno vinculado a la persistencia de los estudiantes a mantenerse en un tipo de resolución aritmética de los problemas y desestimar la utilización del álgebra elemental para responder a este tipo de problemas.

1.4.2 Marcos de resolución aritmético y algebraico

Hablar de razonamiento aritmético y algebraico es asociarlos a los marcos de resolución en el que se sitúan los estudiantes para abordar un determinado problema. Estos marcos son muchas veces inducidos e institucionalizados por la enseñanza, sin embargo frente a determinados problemas los estudiantes eligen sus enfoques de resolución de acuerdo a criterios propios, muy determinados por las competencias que demuestran en ellos o por las dificultades y obstáculos que estos les presenten.

En su investigación Elichiribehety y Otero (2004) exponen que cuando la transformación del enunciado verbal no puede realizarse en un marco algebraico, los sujetos emplean exitosamente el marco aritmético. Elección de marcos que no parecería correlacionarse positivamente con la edad.

Uno de los aspectos que generan una diferencia significativa entre el marco aritmético y el algebraico es la necesidad del simbolismo. Resolver aritméticamente un problema implica trabajar solo con números y operaciones, cuyo orden está determinado por el significado que se les atribuye en el contexto del problema. La secuencia de operaciones bien determinadas por el contexto hace que el simbolismo que se utiliza en aritmética requiera a lo más de los símbolos numerales, los símbolos de las operaciones involucradas, y en ocasiones un símbolo literal para expresar el resultado final.

En este tipo de enfoque no se requiere explicitar el orden de la operatoria, está dada por la secuencia de operaciones, que tomando de dos en dos los valores numéricos involucrados, permite ir obteniendo resultados parciales, que en un proceso finito conducen al resultado final.

En Gascón (2010) se denomina a este tipo de resolución *Programas de Cálculo Aritméticos* (PCA en adelante), y la definen como una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas. Señala que:

"...los PCA aparecen y se ejecutan en el trabajo matemático de los alumnos desde los inicios de la enseñanza primaria, pero nunca se plantean cuestiones sobre su descripción, justificación o alcance. Dicho en otros términos, los PCA forman parte de la práctica matemática escolar, pero son objetos no matematizados o paramatemáticos". (p. 3)

Los PCA pueden ser descritos explícitamente como una expresión aritmética, sin embargo si el objetivo es llegar a la solución del problema el estudiante solo realizará las operaciones en el orden que la cadena defina.

Por su parte Puig y Cerdán (1990), en su investigación acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales, describen el proceso de traducción de un problema verbal a la expresión aritmética a través del *método análisis y síntesis*. El *análisis* es el paso desde la incógnita a través de la búsqueda de antecedentes hasta reducirlos todos a datos del problema. El ejemplo que muestran es el siguiente:

El problema: En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una. Con ellas van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse? (p. 4)

Para visualizar el proceso *análisis* construyen el siguiente diagrama.

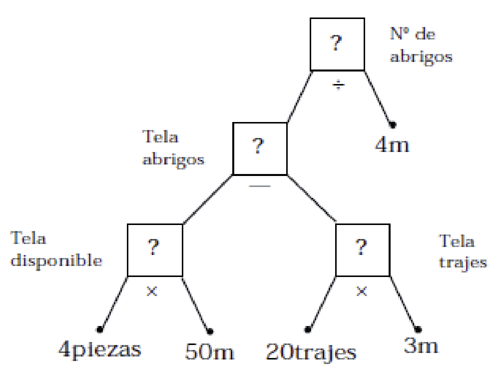


Figura 1: Diagrama proceso de análisis, Puig y Cerdán (1990, p. 4)

El proceso de *síntesis* consiste en efectuar los cálculos tal como establece el diagrama o bien escribir la expresión aritmética que se desprende $\left[(4\cdot 5)-(20\cdot 3)\right]:4$. Sin embargo, al igual que los PCA muchas veces no se requiere escribir la expresión, ya que casi siempre al estudiante le importa solo el resultado.

En el marco aritmético las técnicas de resolución suelen ser intuitivas, recurren a discursos verbales y operaciones aritméticas, y los modelos de representación son informales.

Por su parte el razonamiento algebraico requiere el uso de símbolos literales para expresar las situaciones a través del lenguaje algebraico. El lenguaje algebraico permite hacer explícita las relaciones entre las cantidades involucradas, que en la resolución aritmética se pierde con la sola obtención del resultado.

En álgebra los símbolos literales pueden tener distintos significado. Las variables representan a cualquier objeto de un determinado conjunto, sean números u otros objetos, los parámetros, son objetos que se suponen conocidos pero que se manipulan como si fueran desconocidos, y las incógnitas son objetos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos.

El pensamiento algebraico implica procesos abstractos de generalización, representación y modelización. La generalización se entiende como el paso de lo particular a lo general, de objetos bien determinados a clases o categorías de dichos objetos. Kieran y Filloy (1989) señala que para caracterizar el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, hay que ser capaz de expresarlo en lenguaje algebraico. Por su parte, la modelización va más allá de la representación, involucra un sistema a ser modelizado y el modelo que lo matematiza, involucra definir las variables del sistema y describir en lenguaje algebraico el conjunto de relaciones que determinan el modelo.

1.4.3 Dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra

Una vasta descripción de errores y dificultades en relación álgebra se puede encontrar en Rauno, Socas y Palarea (2008) y también en Kieran y Filloy (1989), en este último artículo se muestran evidencias que relacionan los errores y dificultades en el álgebra con el marco de referencia aritmético y se señala al respecto que *"Los estudiantes siguen usando los métodos que les funcionaban en la aritmética".* Los aspectos mencionados en estas investigación son mencionadas a continuación.

Una dificultad producida por la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico es debida a prescindencia del simbolismo que manifiesta el marco de resolución aritmético. En particular, el uso del paréntesis es una convención que en este ámbito puede ser irrelevante, al igual que el orden de las operaciones, ya que está dado en la estructura misma de la resolución, esto conduce a los estudiantes a menudo a considerar que los paréntesis tampoco son necesarios para denotar el orden de las operaciones en las expresiones algebraicas.

Otra de las dificultades en el paso de la aritmética al álgebra es el uso de determinados símbolos de un contexto a otro. En el ámbito aritmético los signos "$=, +, -, \cdot, :$" indican acciones, pero en el algebraico estos símbolos también pueden representar relaciones. Esto lleva a muchos estudiantes a no reconocer al signo $=$ como símbolo de equivalencia, sino como una acción que indica que se debe colocar el resultado al lado derecho del signo igual. Esto provoca que los estudiantes no logren dar sentido a ecuaciones con varios términos a cada lado de la igualdad y que no respeten las propiedades simétrica y transitiva de la relación de equivalencia, haciendo desarrollos como el siguiente:

$$2x+1=5$$
$$2x+1=5-1=4=2$$

El hecho que el producto de una práctica aritmética en la resolución de un problema sea un número genera otro de los errores más frecuentes en los estudiantes, la denominada *necesidad de clausura*, que consiste en no aceptar que el resultado de un problema algebraico puede ser una expresión y no un valor numérico, lo que lleva a interpretar forzadamente la expresión como una ecuación, a través de la cual intentan encontrar el resultado numérico que buscan.

Un ejemplo de ello está dado por la respuesta de un estudiante de primer año de pedagogía básica, a la que planteamos el siguiente problema "Juan tiene \$p, María tiene \$5 más que Juan y Daniel el doble que María, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?"

$$p + p + 5 + 2\cdot(p+5)$$
$$p + p + 5 + 2p + 10$$
$$2p + 5 + 2p + 10.$$
$$4p + 12$$
$$p = \frac{12}{4} = 3$$

Figura 2: Respuesta de la estudiante

El predominio del enfoque de resolución aritmético repercute en la falta de sentido que el estudiante le puede asignar a los resultados de una resolución algebraica, quien vuelve a buscar en el referente aritmético el sentido que necesita.

Algunas dificultades pueden estar provocadas por los fenómenos didácticos que se desprenden del enfoque del álgebra que predomina en las instituciones. Es común justificar el paso de la aritmética al álgebra señalando que la primera trabaja con números y la segunda con números y letras, sin entrar en más detalles sobre los significados que pueden asumir los símbolos literales, ni la utilidad que puede prestar el lenguaje algebraico.

Ursini, Fortino, Montes y Trigueros (2005) describen las dificultades que presentan los estudiantes en reconocer los distintos significados de los símbolos literales en el álgebra elemental. Los estudiantes tienden a no identificar los literales de una expresión algebraica como variables, sino como incógnitas, lo que provoca interpretaciones y errores en el trabajo algebraico.

El enfoque predominante del álgebra escolar no considera al álgebra elemental como una herramienta de modelización, sino como un objeto de estudio en sí mismo, que trata sobre las técnicas de la manipulación de expresiones algebraicas. Esto hace que el álgebra elemental sea concebida por los estudiantes como un asunto de "reglas" sintácticas desprovistas de significados, lo que provoca que no se produzca la necesidad de evaluar el sentido y la validez de las expresiones que manipulan. Se transforman en lo que, en Papini (2003), se denomina *"calculadores ciegos".*

Algunos estudiantes pierden la posibilidad de establecer estrategias de control sobre el significado de lo que realizan. Habitualmente es el profesor el que interviene para mostrar la invalidez de una proposición, asignando valores a las letras y verificando que esta no se cumple. Sin embargo, esta acción no genera los efectos esperados, estos estudiantes vuelven a repetir el mismo error de manera persistente.

Por ejemplo, frente a un error de un estudiante, tal como $p^3 - p^2 = p$, el docente puede mostrar que esta igualdad no es cierta porque al reemplazar $p = 1$ la igualdad no se cumple $1^3 - 1^2 = 0$. Sin embargo, esto supone que el estudiante entiende que una proposición es verdadera si se cumple para todo valor asignado a las variables. Pero en la visión del alumno el álgebra aparece como un "asunto de reglas" relativas al funcionamiento con letras, por lo que asignar valores a estas no es considerado por ellos como un criterio de control. Por otro lado, el profesor asume que el estudiante entiende la presencia implícita de cuantificadores en las proposiciones algebraicas, sin embargo, ni el mismo, ni los textos de estudios, acostumbran a hacer explícitos los cuantificadores en las proposiciones que enuncian.

4.1.4 Los enfoques del álgebra escolar

El álgebra como "aritmética generalizada"

En Bolea (2002) se describe como las instituciones tienden a identificar el álgebra escolar con un modelo denominado *aritmética generalizada.* Reconoce que en este enfoque se identifica como prácticas "algebraicas" a aquellas que prolongan y generalizan las prácticas aritméticas, pero que a la vez se contraponen a una parte de ellas.

Entre las que prolongan las prácticas de la aritmética se encuentran la generalización de algunas propiedades de números, mientras que entre las prácticas que se oponen**,** está la forma como se resuelven los problemas; mientras la aritmética reduce los problemas a varios problemas más sencillos, en los que es posible calcular resultados en función del sentido del enunciado, los problemas algebraicos no admiten la descomposición en problemas parciales, trabajan con relaciones entre cantidades expresadas por símbolos literales, que se manipulan a través de reglas.

También se confrontan el tipo de resultados, mientras la aritmética busca resultados numéricos, en el álgebra el resultado puede ser alguna forma de relación entre las cantidades involucradas, expresadas en forma simbólica. Además los objetos con los que trabaja la aritmética son siempre números, mientras que el álgebra manipula símbolos literales que pueden tener distintos significados en el contexto del problema (variable, incógnita o parámetros).

El modelo epistemológico que visualiza el álgebra escolar como *aritmética generalizada* recoge la interpretación de que la génesis histórica del álgebra es la formalización de la aritmética y posteriormente de la geometría. A pesar que este puede ser el modelo de álgebra que las instituciones reconocen en el discurso, en la práctica el álgebra que se enseña no corresponde propiamente a una *aritmética generalizada,* ya que la aritmética no aparece completamente contenida en ella y parte del álgebra enseñada presenta temas que no son una generalización de la aritmética.

Respecto de la pertinencia del enfoque de álgebra entendida como *aritmética generalizada* Socas (2011), refiriéndose a las investigaciones de las décadas de los 80 y 90, señala:

> *"Igualmente, las investigaciones, mostraban que la perspectiva del Álgebra como Aritmética generalizada era insuficiente para desarrollar en los alumnos un pensamiento algebraico adecuado…"* (p. 13)

Algunos trabajos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD en adelante) dan cuenta de la relación de este enfoque del álgebra con fenómenos asociados a la incompletitud de *organizaciones matemáticas en* Fonseca (2004) y la desarticulación de la matemática escolar García (2005).

El álgebra como herramienta de modelización

Según Socas (2011) las propuestas curriculares para el álgebra escolar han ido cambiando con el tiempo, en la década de los 80 se observa el álgebra como *aritmética generalizada*, el álgebra como estudio de métodos para resolver problemas concretos, el álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades y el álgebra como modelo estructural. A partir de la década de los 90 el currículo para el álgebra cambia de manera sustancial al incorporar: generalización, resolución de problemas, modelización y funciones.

Frente a las evidencias de las dificultades que presenta el enfoque del álgebra entendida como aritmética generalizada se establece una propuesta desarrollada en el marco de la TAD. En Ruiz, Bosch y Gascón (2010), se postula que:

> *"…el álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de praxeologías u organizaciones matemáticas (en adelante OM). En particular, el álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas OM previamente construidas".*
> (p. 2)

Proponen para ello un modelo epistemológico de referencia (MER) que busca generar la emergencia y desarrollo del proceso de modelización algebraica en la educación secundaria. El modelo actúa en tres etapas que buscan hacer evolucionar el uso del álgebra como herramienta de modelización, a través de un *proceso de algebrización*, que comienza tomando como base problemas aritméticos, caracterizados por la resolución a través de los denominados *Programas de Cálculo Aritmético* (PCA), que son las cadenas de operaciones aritméticas con las que resuelven los problemas los estudiantes, que tienen la característica de que a pesar que se usan desde los primeros años no se describen, ni se justifican, por lo que permanecen en categoría de objetos paramatemáticos.

El primer paso en el proceso de algebrización consiste en considerar los PCA como sistema de base, en la cual se modifican ciertos elementos para que ocurran algunos cuestionamientos que no se puedan responder con la sola resolución aritmética del problema, pero que a través de una formulación simbólica del PCA si puedan ser tratados. La segunda etapa consiste en generar la necesidad de igualar dos PCA y manipularlos para obtener ecuaciones equivalentes y la tercera etapa se caracteriza por el momento en que se requiere un mayor grado de generalización de los problemas, que surge debido a la necesidad de no limitar el número de variables y de no distinguir entre incógnitas y parámetros.

Cabe mencionar que en los mismos procesos de algebrización emerge la necesidad de determinadas técnicas algebraicas, como la reducción de términos o la factorización, que permiten responder a las cuestiones problemáticas que se están planteando, lo que sucede, a diferencia del tratamiento tradicional del álgebra, con un sentido bien determinado y justificado.

1.5 Epistemología del Álgebra y el Objeto Matemático

1.5.1 Epistemología del Álgebra

Esta descripción histórica-epistemológica del álgebra, aunque propuesta en un orden cronológico, tiene el objeto de mostrar el desarrollo del simbolismo algebraico y la evolución del álgebra, desde el cual sea posible observar las distintas formas que adoptó este conocimiento, objetivo que se vincula con poder apreciar la estructuración de distintos paradigmas del álgebra que se propone en la aproximación teórica de Mena et. al (2011).

El álgebra en las culturas prehelénicas

En la cultura egipcia se puede encontrar los papiros de Ahmes (1650 a.C.), en los que se distinguen algunos problemas aritméticos, otros geométricos y varios que pueden ser catalogados como algebraicos. Problemas equivalentes a la resolución de ecuaciones lineales del tipo $x+ax=b$ ó $x+ax+bx=c$, con a,b y c conocidos y x desconocido. Estos problemas se resolvían con lo que hoy se denomina "método de falsa posición".

Un nivel más alto del álgebra se presentó con los babilonios, quienes podían resolver sin ningún problema ecuaciones cuadráticas completas. Este avance se debía a la flexibilidad en las operaciones algebraicas que habían desarrollado, con las cuales, según Boyer (1986), eran capaces de transponer términos de una ecuación, multiplicar a ambos miembros de una ecuación para eliminar un factor o completar cuadrados de binomios sumando una cantidad. Usando una sustitución del tipo $y=ax$ podían reducir una ecuación cuadrática $ax^2+bx=c$ a su forma normal $y^2+by=ac$. Las ecuaciones cuadráticas suelen aparecer en la forma de problemas del tipo "encontrar dos cantidades dada su suma y su producto", esto es $x+y=p$ y $xy=q$.

Los babilonios también resolvían ecuaciones cúbicas $x^3 = a$ y $x^3 + x^2 = a$ de forma directa, consultan tablas en los que se encontraban calculados los resultados de $n^3 + n^2$. Además lograban reducir a su forma canónica las cúbicas $ax^3 + bx^2 = c$ multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\frac{a^2}{b^3}$.

Los babilonios al igual que los egipcios no utilizaban símbolos para representar a las cantidades, pero palabras para longitud, área y volumen eran usadas en el lugar de símbolos y a tal nivel de abstracción que les permitía sumar sin ningún reparo cantidades asociadas a longitudes con cantidades relacionadas a áreas o volúmenes.

A pesar del admirable desarrollo de las técnicas algebraicas usadas por los babilonios, su matemática se reducía a resolver de problemas concretos y particulares, sin búsqueda de la generalización de sus métodos, ni el desarrollo de simbolismo, elementos centrales para juzgar el grado de algebrización de estas culturas.

Lo que no se puede desconocer es el interés que ellos demuestran en un objeto de estudio del álgebra, las ecuaciones. Un desarrollo de técnicas algebraicas para la resolución de ecuaciones, pero a partir de problemas concretos y casos particulares, puede describir al álgebra de los babilonios como un *álgebra aritmética*.

El álgebra geométrica de los griegos

Esta *algebra aritmética* es heredada por los pitagóricos, que consideraban que *"la esencia de todas las cosas es el número"* (Bell, 1985). Se sabe que Pitágoras viajó a Babilonia donde pudo haber aprendido a resolver ecuaciones de forma algebraica, sin embargo en los problemas de la división de un segmento en "media y extrema razón" se pudo haber topado con algunos problemas que no le permitían trabajar de esta forma.

De la división del segmento se establecía la razón $a:x=x:(a-x)$, que lleva a la ecuación cuadrática $x^2=a^2-ax$. Pitágoras podría haber detectado que al ser a un racional, la solución x no podía ser también un racional, lo que no permitía ser resuelto por el método algebraico de los babilonios. Esto pudo llevar a los pitagóricos a establecer un tipo de resolución distinta, un método basado en construcciones geométricas.

Hay dos fenómenos más que describen con mayor fuerza el giro del *álgebra aritmética* de los babilonios al *álgebra geométrica* de los griegos. El primero es el efecto en la matemática griega de las paradojas de Zenón (450 a.C.), que reconoce las diferencias en el tratamiento de lo discreto y lo continuo. Los primeros pitagóricos representaban los números como cantidades discretas, a través de piedras denominadas "cálculos", pero en etapas posteriores los números comenzaron a representarse como magnitudes continuas, por medio de segmentos de recta. Estos segmentos representaban magnitudes que se diferenciaban de los números, pero que mantenían las mismas propiedades aritméticas. Se produce un cambio de paradigma, al parecer es la geometría y no el número lo que puede explicar mejor la realidad.

El segundo fenómeno que permite la consolidación de la geometría es el descubrimiento de la inconmensurabilidad, que sacudía las creencias pitagóricas respecto de que todo se podía explicar en términos de los números naturales y sus razones. Este hallazgo impedía interpretar objetos geométricos, como las diagonales de pentágonos y cuadrados, en términos de razones de números naturales. La presencia de medidas inconmensurables provocó que se evitara en lo posible trabajar con razones, las ecuaciones del tipo $ax=bc$ que antes se trataban como una razón $a:b=c:x$, pasaron a ser interpretadas como la igualdad de dos áreas, en las que la construcción geométrica permitía resolver la ecuación.

A partir de los obstáculos que la misma matemática les colocaba, los griegos fueron construyendo un *álgebra geométrica* que ampliara las posibilidades del *álgebra aritmética* de los babilonios y los primeros pitagóricos. Pero esta *álgebra*, no solo se acomodaba mejor a las exigencias de lo que se debía entender por "número", también agregaba un elemento que el álgebra de los babilonios y egipcios no tenía, un grado de generalización en sus métodos.

Aún con el nulo desarrollo del simbolismo de la época, en los elementos de Euclides (300 a.C.) se puede ver toda la potencia de generalización de la geometría. Se plantean y demuestran geométricamente propiedades generales de la aritmética: las propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación y la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma. Las proposiciones hacen referencias a propiedades y relaciones entre números en general, representadas por segmentos de medida indeterminada.

Los griegos ocupaban la geometría para estudiar las ecuaciones, pero ahora también eran objeto de estudio las propiedades aritméticas. Además las proposiciones y métodos adquieren un grado de generalidad mayor que en las culturas prehelénicas.

Todo lo anterior permite afirmar que los griegos efectivamente desarrollaron un tipo de álgebra. Sin embargo, hay que reconocer que está algebra no profundizaba aún en un estudio que reuniera tipos de problemas en problemas generales, además de vislumbrar apenas algunos elementos de las estructuras algebraicas. Por otro lado, el uso del lenguaje está aún en la etapa *retórica*, en la que predomina el uso exclusivo del lenguaje natural, muy lejos del simbolismo que reconocemos propio del álgebra elemental moderna.

El comienzo de la fase sincopada en el álgebra

Recién con Diofanto (250 d.C.) se reconoce una fase distinta en el uso del lenguaje algebraico. Diofanto propone en su *Arithmetica* un cambio fundamental respecto de la matemática griega que le precede. Se desmarca de la geometría para utilizar métodos más relacionados con el álgebra de los babilonios, para el estudio de las ecuaciones determinadas e indeterminadas.

El aspecto más importante del análisis del desarrollo del álgebra en relación a la figura de Diofanto es el uso sistemático que hace en su obra de ciertas abreviaturas para representar a potencias de los números y las operaciones entre estas potencias. Las incógnitas eran representadas por una letra griega y era capaz de escribir expresiones como polinomios de manera semejante a la del lenguaje simbólico actual. La principal diferencia de esta escritura con la actual es la falta de símbolos para las operaciones y relaciones.

Se reconoce que con Diofanto comienza una nueva etapa del desarrollo del lenguaje algebraico, la fase sincopada[3], que consiste en la incorporación de abreviaturas para algunos objetos como las incógnitas y otros, pero con uso exclusivo del lenguaje natural para describir los cálculos. Esta etapa se extendió hasta finales del siglo XVI, alternándose por periodos con la fase puramente retórica.

Suelen llamar a Diofanto el "padre del álgebra", sin embargo hay que hacer notar que el mayor avance que aparece con él en relación al álgebra es el de la instauración de una etapa pre simbólica en el lenguaje algebraico. Respecto de otros elementos del análisis de la evolución del álgebra Diofanto muestra un retroceso respecto del grado de generalización en su trabajo. Resuelve ecuaciones indeterminadas en las que se conforma con llegar a un solo resultado, ya que su intención no era resolver ecuaciones sino los problemas que planteaban esas ecuaciones. En este sentido su *Arithmetica* correspondía a una colección de problemas a resolver más que un texto sobre resolución de ecuaciones.

El álgebra hindú y árabe

El foco de desarrollo del álgebra se trasladó a la India. En su obra Brahmagupta (500 d.C.) aparece sistematizada por primera vez la aritmética de los números negativos, en

[3] Categorización introducida por G. Nessemlam, 1842. Describe 3 fases en la evolución del lenguaje algebraico: fase retórica, fase sincopada fase simbólica.

las que se define explícitamente reglas de signos para la multiplicación. Además, a diferencia de los griegos, los hindúes no tuvieron problemas en aceptar los irracionales como raíces de las ecuaciones, aunque no producto de una mayor comprensión de los números, sino por la ausencia de cuestionamientos sobre su naturaleza.

El álgebra desarrollada por Brahmagupta demuestra un grado de generalización mayor en el estudio de las ecuaciones. Aparece como el primero que describe una solución general para la ecuación diofántica lineal $ax+by=c$, a,b y c. El estudio de ecuaciones diofánticas lineales y cuadráticas fue continuado en el siglo XII por Bhaskara (1114).

A pesar de estos avances en el álgebra hindú, el lenguaje algebraico continuaba en la fase sincopada, en la que se utilizaba ciertos símbolos y convenciones para la escritura, pero con una exposición retórica de sus métodos. Destaca la capacidad de la generalización de los métodos de resolución de ecuaciones. Sin embargo la herencia más directa de los hindúes sobre la matemática en general fue la invención del símbolo para el cero y el sistema de numeración actual, que luego es difundido por los árabes.

Efectivamente, el sistema de numeración hindú aparece ampliamente tratado en la obra del matemático árabe Al-Khowarizmi (825), lo que ayuda a difundirlo por toda Europa a través de sus posteriores traducciones. Sin embargo del nombre de una de sus obras *Al-jabr wa'l muqabalah* proviene el término *álgebra* con el cuál designamos en la actualidad a esta rama de las matemáticas.

El álgebra que se expone en esta obra representa avances y retroceso respecto del álgebra de anterior. Se destaca que el texto se sumerge directamente en el estudio de ecuaciones lineales y cuadráticas, con un sentido de argumentación lógica y una exposición clara de los métodos de resolución, a diferencia de la resolución de ecuaciones indeterminadas a partir de colecciones de problemas particulares del álgebra de Diofanto y los hindúes. Otro aspecto a resaltar es la forma de tratar las ecuaciones que estaba resumido en el título de su obra, en donde la palabra a*l-jabr* significa *completar*, lo que hacía referencia a sacar un término negativo de una ecuación sumando el opuesto positivo a ambos lados de la igualdad, y *muqabalah* significaba *reducir*, cancelar términos iguales en una ecuación.

La obra estudia seis casos de ecuaciones, que se obtienen al combinar los *números* con las *raíces* y los *cuadrados*, haciendo referencia a constantes, incógnitas y cuadrados de la incógnita. Estas formas eran:

- *cuadrados* igual a *raíces*, $x^2 = ax$
- *cuadrados* igual a números, $x^2 = a$
- *raíces* igual a números, $ax = b$
- *cuadrados* y *raíces* igual a números, $x^2 + ax = b$
- *cuadrados* y números igual a *raíces*, $x^2 + a = bx$
- *raíces* y números igual a *cuadrados*, $x^2 = ax + b$

Se usan ejemplos concretos para mostrar el algoritmo de resolución de las ecuaciones, que consiste en "completar cuadrados", y solo se da la solución positiva. Aunque las explicaciones de Al-Khowarizmi eran bastante claras, no le bastaba con eso, necesitaba demostrar geométricamente la veracidad de lo expuesto. Su trabajo mostraba las heterogéneas influencias de sus predecesores, el sistema de numeración hindú, los métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones de los babilonios y la forma lógica y geométrica de validar sus proposiciones, herencia de la matemática griega.

Sin embargo, el álgebra de Al-Khowarizmi evidencia un retroceso en el uso del lenguaje algebraico. Su álgebra es completamente retórica, no hay uso de símbolos e incluso los números son expresados en palabras. Tampoco se muestra en los árabes una continuidad con los hindúes respecto del uso de números negativos.

El álgebra en el renacimiento

En el trabajo del matemático Regiomontano (1436) se observa una variación importante al aplicar el álgebra a la geometría. A diferencia del tratamiento de magnitudes generales de los problemas en la geometría de los griegos, Regiomontano asignaba valores concretos a los segmentos, lo que le permitía ocupar procedimientos algebraicos para resolver los problemas de tipo geométrico. Aunque conocía el álgebra sincopada de Diofanto, que pretendía traducir, prefería usar un lenguaje completamente retórico.

En 1484 el francés Chuquet se refiere en su trabajo a la "regla de las incógnitas", adoptando una notación para la incógnitas y las potencias de las incógnitas, con exponentes tanto positivos como negativos, para las que se enuncian claramente las reglas que rigen los exponentes.

En 1494 Luca Pacioli escribe su libro *Summa*, que muestra un lenguaje mucho más sincopado, en el que se utilizan las abreviaturas como "*co*" (*cosa* o incógnita), "*ce*" (*censo* o cuadrado de la incógnita) y otras más, además de las letras "*p*" y "*m*" para la suma y la resta. Los signos actuales $+$ y $-$ aparecen en un libro de aritmética comercial alemán en 1489.

Stifel (1487) en sus obras utiliza primero abreviaturas para la incógnita "*coss*" y para sus potencias, pero luego sugiere el uso de una sola letra para representar a la incógnita, al modo en que se expresan en la notación actual.

En 1545 el italiano Jerónimo Cardano publica su *Ars magna* en la que muestra las soluciones de ecuaciones cúbicas y cuarticas, que obtiene de Tartaglia y (1500) y Ferrari (1522), respectivamente. En el texto se tratan distintos casos de ecuaciones cúbicas con coeficientes positivos a través de un razonamiento geométrico que se puede denominar como de "completar cubo". Utiliza un lenguaje en gran parte retórico para describir las reglas o métodos para encontrar la solución de las ecuaciones cúbicas, en las que se da cuenta que al aplicar sus "formulas" en algunas ecuaciones aparecen raíces cuadradas de números negativos como parte del desarrollo, aunque la solución de la ecuación era un número real. El hecho desconcierta a Cardano quien interpreta que su solución en tal caso no resulta útil.

Pero la aparición de raíces de números negativos adquiere un sentido distinto en este contexto, mientras en las ecuaciones cuadráticas estas raíces denotaban que la ecuación era insoluble, en las cúbicas era necesario manipularlas para llegar a una solución real. Estas raíces de números negativos comienzan el camino de su aceptación como números imaginarios, ya que al igual que sucede con los negativos y los irracionales, negar su existencia implicaba dejar ciertas ecuaciones sin solución. Resultaban útiles para llegar a resultados en sus ecuaciones, pero al mismo tiempo carecían de referentes concretos que permitieran validar su existencia.

El comienzo de la fase simbólica del álgebra

La matemática moderna que estaba por venir requería de un paso decisivo para su desarrollo, avanzar hacia un lenguaje simbólico que permitiera un grado de generalización mayor en el trabajo matemático.

Es François Viéte (1540) quien contribuye decisivamente en este paso, no solo por el hecho que habría adoptado de una forma más regular el uso de símbolos, sino porque es el primero que establece la idea de parámetros, cantidades desconocidas que se trabajan como si fueran conocidas, lo que le permite escribir ecuaciones de forma general. Mientras las incógnitas eran representadas por vocales, los parámetros eran escritos como consonantes.

Viéte se da cuenta del poder de generalización del álgebra, reconociendo que esta no tiene que trabajar sobre casos particulares, sino sobre "especies" o "tipos" de problemas, sobre los cuales se pueden describir los métodos para operar con ellos. Establece entonces una diferenciación entre álgebra y aritmética, al considerar a la primera como una “logística de las especies” y la otra como una “logística de los números” (*logística speciosa* y *logística numerosa*).

Con Viéte el álgebra se transforma en el estudio de las formas generales, donde es posible observar como la evolución en el lenguaje permitió hacer progresar al álgebra como herramienta de generalización. Hasta ese momento la capacidad de generalizar y abstraer estaba ubicada solo en el ámbito geométrico, que era elegido por ello como el marco de referencia habitual de la validación de las proposiciones matemáticas. Ahora el álgebra podía comenzar a tomar ese lugar.

Las estructuras algebraicas

Del interés por la resolución de ecuaciones cúbicas y cuarticas y del desarrollo simbólico del álgebra, el siguiente paso en la evolución del álgebra tiene su origen en determinar cuando las ecuaciones de grado mayor a tres son resolubles. Ruffini 1799 y 1813 realiza la primera demostración de la imposibilidad de resolución con radicales de la ecuación de quinto grado, que Abel en 1826 desarrolla de forma rigurosa.

Con Ruffini aparece la idea de “grupo” que llamaba “permutaciones”, idea que se desarrolla en teoría con Galois, que establece que las propiedades de grupo darán las soluciones de la ecuación que es soluble si el grupo es soluble. Su trabajo se da a conocer solo tiempo después en 1846 y da lugar al comienzo de las estructuras algebraicas.

1.5.3 Ecuaciones lineales

Se denomina ecuación a una *función proposicional*, de una o más variables, que contiene una igualdad.

Las variables que involucradas en la función proposicional se conocen como *incógnitas*. Los valores de las incógnitas que hacen que la función se transforme en una proposición verdadera se denominan *soluciones* o *raíces* de la ecuación. Resolver una ecuación consiste en hallar el *conjunto solución* de la función proposicional.

Dos ecuaciones se dicen *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones. Es posible transformar una ecuación en otra equivalente a través de las siguientes trasformaciones:

1. Sumar un mismo número a ambos lados de la igualdad.
2. Multiplicar un mismo número a ambos lados de la igualdad.

Una ecuación lineal es una función proposicional $p(x): ax+b=0$, con $a \neq 0$. Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces la solución de la ecuación $ax+b=0$ es $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Toda ecuación que sea equivalente a una ecuación de la forma $ax+b=0$, con $a \neq 0$, es también una ecuación lineal.

$x+2=5$ es una ecuación lineal con solución $S=\{3\}$

$x+2=x+1$ es una ecuación, pero no lineal, que tiene solución $S=\phi$

$x+1=x+2\cdot\frac{1}{2}$ es una ecuación, no lineal, con solución $S=\mathbb{R}$

Visto en términos de proposiciones lógicas, una ecuación tiene solución si la función proposicional es una *contingencia*, tiene solución vacía si es una *contradicción* y tiene infinitas soluciones si es una *tautología*.

1.5.3 Las ecuaciones en el currículo escolar

Considerando que la lógica de las instituciones de educación superior al establecer nivelaciones es revisar los objetos matemáticos de acuerdo a los enfoques con que son tratados en el ámbito escolar, se juzga pertinente hacer una revisión de la forma en que las ecuaciones son abordadas en el currículo escolar.

En los programas vigentes del Ministerio de Educación, las ecuaciones son tratadas a partir de 6º básico. En este nivel se establece el propósito de *introducir las ecuaciones de primer grado con una incógnita, en el ámbito de los números naturales*. El énfasis declarado en el programa es que los estudiantes entiendan los conceptos y la búsqueda de procedimientos de solución, en vez de aplicar mecánicamente reglas y procedimientos rutinarios. El tema se trata en la Unidad 2: "Números y Álgebra". Los aprendizajes esperados que se describen para ecuaciones son:

- Reconocer ecuaciones de primer grado con una incógnita en el ámbito de los números naturales verificando la igualdad.
- Utilizar estrategias para resolver ecuaciones de primer grado que son modelos de diversas situaciones de la vida cotidiana.
- Verificar soluciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita obtenidas en la resolución de ellas, mediante sustitución de la incógnita o el análisis del contexto.

El programa detalla las orientaciones para tratar la identificación, resolución y validación de la solución de la ecuación de primer grado, pero no establece recomendaciones relacionadas a la forma en que se aborda y genera el concepto de ecuación, ni de su definición.

Al buscar en un texto escolar y ver como se acoge la propuesta del programa de estudio, se puede observar por ejemplo que, en el libro Matemáticas de 6º básico de MN Editorial, se introduce el concepto de ecuación a través de un problema:

Si en total son 18 investigadores, de los cuales 12 son hombres, ¿cuántas mujeres hay en el equipo?

Se declara la cantidad de mujeres como un valor desconocido x y se plantea el problema mediante lenguaje algebraico:

$$12 + x = 18$$

Se presenta como una "igualdad en la cual hay una incógnita *x*"

Luego se muestra esta situación en analogía a una balanza, en la que en un lado aparece dos objetos que representan al número 12 y el otro a *x*, mientras que en el otro lado un objeto que representa al 18, se explica que la idea es buscar el valor que permita que la balanza se mantenga equilibrada.

Finalmente el libro expone la siguiente definición:

*"Una **ecuación de primer grado** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que solo se verifica para un valor específico de una incógnita, generalmente llamada x".*

Para la resolución de ecuaciones de primer grado, el libro solo expone la aplicación de propiedades de la igualdad. De hecho, define lo siguiente:

***"Resolver una ecuación de primer grado** consiste en encontrar el valor de la incógnita que ella contiene. Esto se consigue realizando las operaciones necesarias que permitan despejar o aislar la incógnita en un lado de la igualdad, obteniéndose en el otro, su valor".*

Para 7º básico el programa oficial de Matemática establece que el propósito en este nivel es *ampliar las ecuaciones al ámbito de los números enteros, decimales o fracciones positivas*. Como aprendizaje esperado se describe:

- Resolver problemas que impliquen plantear y solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita en el ámbito de los números enteros y fracciones o decimales positivos, y problemas que involucran proporcionalidad.

En las orientaciones didácticas se recomienda "*poner especial cuidado en los procedimientos seleccionados para resolver ecuaciones de primer grado, en que los algoritmos tradicionales de "pasar de un lado para otro" generan aprendizajes de reglas mecánicas no siempre comprendidas, que llevan a errores que permanecen por largo tiempo"*.

En 8º básico, según la descripción del programa escolar, el trabajo con las ecuaciones *progresa hacia el planteamiento y resolución de ecuaciones con más de una incógnita*, que por ejemplo representen relaciones físicas fórmulas geométricas o expresiones que reflejen situaciones cotidianas. El aprendizaje esperado:

- Plantear ecuaciones que representan la relación entre dos variables en diversos contextos.

El énfasis para el tratamiento de las ecuaciones, en este nivel, está puesto en que los estudiantes reconozcan que, una variable de una ecuación con más de una incógnita, puede ser despejada en función de las otras variables y que el valor que tome la incógnita dependerá del valor que tomen las variables. Por ejemplo la relación física entre (f) frecuencia de una onda y (T) su periodo está descrita a través de la ecuación

$$f = \frac{1}{T}$$

En 1º medio, el programa del Ministerio, no aparece explícita la mención al tratamiento de ecuaciones en el propósito de la unidad, aunque si se menciona como parte de los contenidos disciplinares la resolución de problemas mediante ecuaciones literales. Se plantea dos aprendizajes esperados:

- Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

- Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

A pesar que en este nivel se introduce el concepto de función lineal y afín, no se habla en el programa de "ecuación lineal". El programa no propone vincular la solución de la ecuación de primer grado con el punto de intersección con el eje de las abscisas.

En 2º medio el programa se trata el reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos, la resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en contextos variados, la representación en el plano cartesiano y la discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones. A partir de ese nivel se tratan otro tipo de ecuaciones: las de ecuaciones de segundo grado, exponenciales y logarítmicas. El tratamiento de estas ecuaciones está ligado al estudio de las funciones respectivas y sus soluciones pueden ser analizadas de manera analítica y gráfica.

El análisis de los programas de estudio muestra que para el concepto de ecuación de primer grado, se expresa la necesidad que el alumno utilice estrategias de resolución alternativas a la sola aplicación de las propiedades de la igualdad, además de que analice la pertinencia de la solución en el contexto dado. También se establece claramente la manera en que se plantea una fórmula como una ecuación de dos o más variables. Sin embargo, los programas no proponen la forma ni la definición para el concepto de ecuación, ni tampoco la discusión acerca de la distinción con una identidad o el caso en que la igualdad se cumple para todos los valores del conjunto de referencia. Tampoco es clara la relación entre función lineal y ecuación lineal, concepto que no aparece mencionado en el programa del nivel respectivo, ni tampoco el análisis gráfico de la solución de una ecuación lineal.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Antecedentes

Desde 1999 Houdement y Kuzniak vienen desarrollando la teoría de los *Paradigmas y Espacios de Trabajo Geométricos* (ETG en adelante). Inspirados en el sentido de *paradigma* de Khun y los *modos de pensamiento* de Gonseth, identifican tres paradigmas geométricos, que provienen de la evolución de la geometría: *Geometría Natural (GI), Geometría Axiomática Natural (GII) y Geometría Axiomática Formalista (GIII).* Estos paradigmas determinan la forma en que el sujeto que resuelve un problema construye su propio espacio de trabajo geométrico.

Se denomina e*spacio de trabajo geométrico* a un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas geométricos. (Kuzniak, 2011)

El ETG está compuesto de dos niveles uno cognitivo y otro epistemológico o de los componentes. En el *plano epistemológico* los componentes son:

- *Espacio real y local*: un conjunto de objetos de naturaleza "sensible"
- *Artefactos*: herramientas e instrumentos puestos al servicio del geómetra, instrumentos materiales o simbólicos.
- *Referencial teórico*: conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas.

En el plano cognitivo se encuentran los procesos de *visualización,*[4] *construcción* y *prueba*.

[4] Noción asociada a R. Duval.

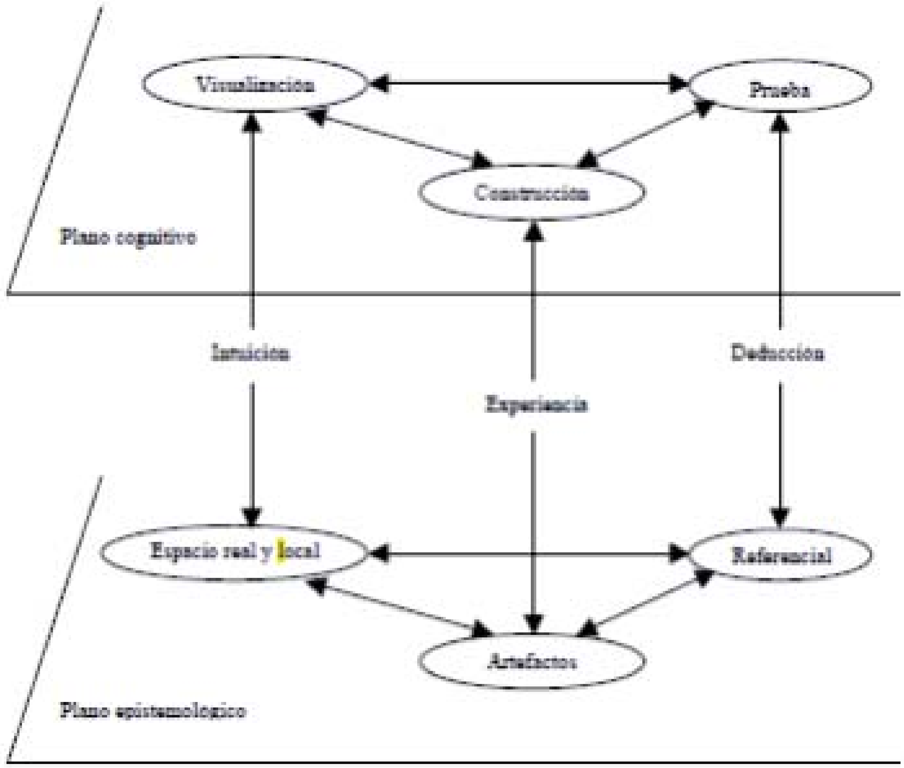


Figura 3: Esquema de espacio de trabajo geométrico, Kuzniak (2011, p.9)

Los procesos cognitivos están ligados a las componentes del plano epistemológico y se articulan conformando un *espacio de trabajo*, el cual es articulado por el geómetra dependiendo de su paradigma dominante (GI, GII o GIII)

Los ETG dependen del sujeto que los construye y dependen de la función y la relación que tiene este con la geometría. Se definen como:

- *ETG de referencia*: se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos.
- *ETG idóneo*: se refiere al espacio definido en términos didácticos. Un utilizador natural es el profesor.
- *ETG personal*: se refiere al espacio definido por el fruto de reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el geómetra. Un utilizador natural es el alumno.

2.2 Paradigmas y Espacio de Trabajo Algebraico

Posterior a la teoría de los *Paradigmas y Espacio Geométrico* (ETG), surge la noción de *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM en adelante), Kuzniak (2011) describe la posibilidad de establecer espacios de trabajo en dominios de la matemática específicos.

Desde el Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), se levanta una propuesta para definir un modelo teórico de *Paradigmas y Espacio de Trabajo Algebraico (ETA)*, que comienza con el trabajo Mena y Morales (2011), en el que se proponen cuatro paradigmas del álgebra, cada uno asociado a una etapa bien determinada en la epistemología del álgebra:

- **A0**: *Etapa anterior a la aparición de los números*. Los objetos matemáticos son representados de forma concreta, los artefactos son acciones u otros objetos concretos.
- **A1**: *Etapa de la aritmética elemental.* Hay números y lenguaje numérico. Admite la búsqueda de la solución por tanteo, relación entre el lenguaje natural y los números.
- **A2**: *Etapa del álgebra elemental*. Lenguaje algebraico, uso de símbolos literales para representar variables, incógnitas y parámetros. Ecuaciones, Sistemas de ecuaciones, Funciones, etc.
- **A3**: *Etapa de las estructuras algebraicas*. Estructura, lógica, cuantificadores, conjuntos. Ecuaciones como funciones proposicionales. Mayor grado de abstracción.

El *espacio de trabajo algebraico* se puede pensar como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas algebraicos.

Los ETA de *referencia, idóneo* y *personal* son definidos de manera análoga a descritos para los ETG. Los planos del ETA se establecen a partir de la descripción hecha para los ETM.

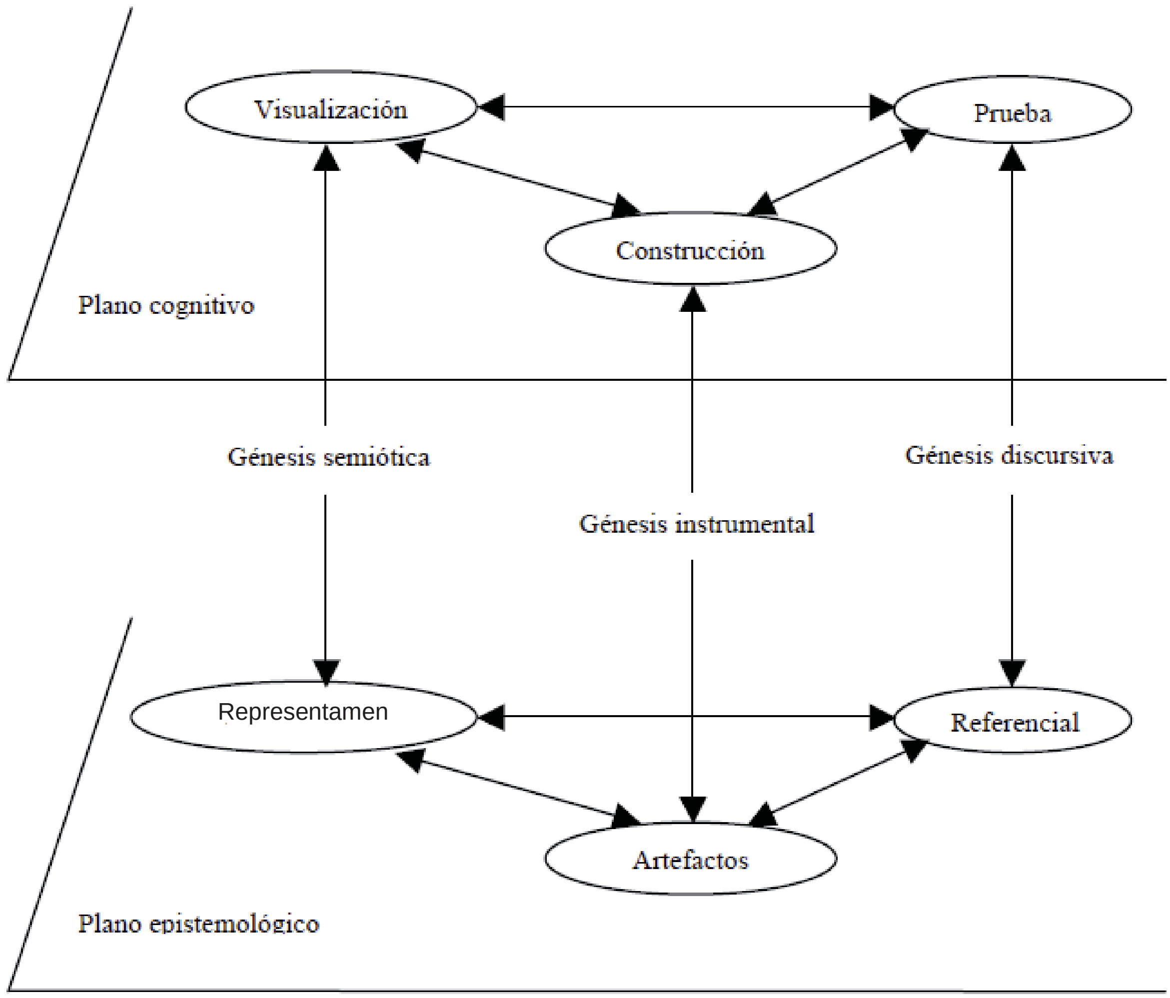


Figura 4: Esquema del Espacio de Trabajo Algebraico

En el *plano epistemológico* los componentes son:

- *Representamen*: El representamen es simplemente el signo en sí mismo, (Pierce, 1974). Se distinguen tres tipos de signos:
    - Ícono: signo que evoca al objeto en virtud de su semejanza.
    - Índice: signo que remite al objeto a través de relación física. Un golpe en la puerta es indicio de una visita.

- Símbolo: signo que remite al objeto a través de una regla o convención.

- *Artefactos*: corresponden a todo lo que le permite al usuario manipular los objetos matemáticos, o mejor dicho, su representación con la finalidad de abordar la tarea. En el caso del álgebra los artefactos son de carácter simbólicos.

- *Referencial teórico*: conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas de números y estructuras formales del álgebra, dependiendo del paradigma.

Mientras que es posible distinguir tres tipos génesis, una *génesis instrumental* que permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo, una *génesis semiótica* basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETA su estatus de objetos matemáticos operatorios y una *génesis discursiva* de la prueba que dará un sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Creemos que la problemática de esta investigación puede ser estudiada a través de los Paradigmas y Espacio de Trabajo Algebraico, ya que en ella interviene una contraposición entre los enfoques de resolución aritméticos y algebraicos, que podría ser descrito en términos del posicionamiento y tránsito entre los paradigmas A1 y A2. Además, las dificultades y errores en el trabajo algebraico de los estudiantes no pueden ser visto solo desde los fenómenos cognitivos, ya que se reconoce elementos epistemológicos vinculados al problema, cuestión que la teoría cubre a través de su concepción sistémica de espacio de trabajo, que implica la relación de los planos epistemológicos y cognitivos y las génesis que relacionan ambas dimensiones.

En el nivel escolar en que se encuentran los estudiantes implicados en la problemática, se reconoce que los paradigmas en juego son A1 y A2, asumiendo que aún no tienen los conocimientos para plantearse desde A3 y A0 resulta muy básico para estudiantes que al menos saben operar con números.

El marco teórico escogido nos permitirá estudiar las dificultades y errores en el trabajo algebraico de los estudiantes, analizando los elementos característicos del ETA personal y el posicionamiento y tránsito entre paradigmas A1 y A2.

Capítulo 3: Metodología de la Investigación

3.1 Diseño de la investigación

Los propósitos de esta investigación requerían de un proceso de observación y análisis que permitiera caracterizar y explicar teóricamente los fenómenos involucrados en el trabajo algebraico de los estudiantes, interpretando sus respuestas por medio del marco teórico escogido, lo que justifica la elección de un enfoque cualitativo en la metodología de investigación.

Consideramos pertinente la realización de un *estudio de casos múltiples,* Stake (1995), en el que se replican varios casos que son estudiados de forma intensiva. Según Yin (1989), deben ser considerados como experimentos múltiples que persiguen una generalización analítica de los fenómenos involucrados.

La caracterización de estas dificultades y errores en el trabajo algebraico de los estudiantes implica considerar la multiplicidad de Espacios de Trabajo Algebraico que pueden llegar a construir los sujetos, como respuesta a un mismo grupo de tareas. Cada una de las producciones de los estudiantes que participa en la investigación es considerada un caso, que en su conjunto conforman el estudio de casos múltiple que se lleva a cabo. Estas producciones son replicas asociadas a la misma tarea, a través de las cuales se pretende levantar generalizaciones asociadas a los fenómenos investigados.

Asumimos, en base a la experiencia y las evidencias recogidas, que las dificultades de los estudiantes para establecer estrategias de resolución algebraicas se sitúan, especialmente, en situaciones en se enfrentan a problemas en contextos cotidianos, que requieren un proceso de modelización matemática[5]. Problemas en que el contenido

[5] En el sentido de Blum 2002.

semántico no aclara completamente el objetivo del problema y la tarea a resolver. Sin embargo, este proceso de modelización involucra una traducción del problema, en que el estudiante activa el uso de representaciones semióticas con el fin de generar una representación mental del problema y las tareas involucradas en su resolución.

A su vez, hay otro tipo de problemas que se instala en el ámbito de la enseñanza como problemas en contextos cotidianos o matemáticos, que no requieren de una modelización, sino solo una conversión entre registros. En este caso el contenido semántico facilita una traducción a lenguaje algebraico, desde donde es posible abordar la tarea.

Considerando estos aspectos de la problemática, nuestra investigación se propone analizar las dificultades para abordar algebraicamente las tareas, en dos tipos de problemas propuestos: los de contexto cotidiano que requieren procesos de modelización algebraica y los de contexto cotidiano que solo necesitan la traducción algebraica del problema.

De las respuestas a estos problemas, el foco del estudio se situó en evidenciar el rol de la visualización —en cuanto al reconocimiento o activación de representaciones semióticas— y su efecto en los paradigmas A1 y A2 que sostienen el ETA del estudiante. Esto implicó la elaboración de criterios que permitieran situar las estrategias de resolución y las representaciones semióticas observadas en las respuestas en un determinado paradigma, o en el tránsito entre ellos.

De forma paralela al análisis de las dificultades mencionadas, esta investigación también se propuso indagar en cierto tipo de errores que cometen al utilizar el álgebra elemental. Esto es, en situaciones en que el sujeto reconoce y activa un trabajo algebraico, pero que no logra resolverlas satisfactoriamente debido a errores en el tratamiento de propiedades algebraicas.

Para analizar este punto, se elaboró una tipología de errores en la utilización del álgebra elemental, que fue construida en base a la caracterización que proponen las investigaciones presentadas en los antecedentes. Esta clasificación permitió analizar los distintos tipos de errores que presentan los individuos, estudiando los artefactos teóricos involucrados en la resolución y el paradigma desde donde se recogen.

3.2 Selección de los sujetos del estudio

Para todos los propósitos de esta investigación consideramos la participación de estudiantes que están cursando el primer semestre de Ingeniería en una institución de educación superior chilena.

El criterio de selección de los individuos obedeció a su condición de novatos en la educación terciara, sin distinción de edad, sexo, colegio de procedencia o situación socioeconómica. Todos ellos cursan en sus carreras una cátedra de Matemática en las que se trabajó tópicos de álgebra elemental, lo que permite asegurar que todos, en cierta medida, han revisado contenidos de álgebra.

El número de estudiantes seleccionados para el estudio fue de 9, cantidad que se justifica por la necesidad de repetir los casos hasta alcanzar cierto grado de certidumbre en los resultados y para que el conjunto de casos alcance a cubrir la estimación a priori de al las posibles estrategias de los estudiantes.

3.3 Diseño del instrumento

Para analizar las características de los ETA de los estudiantes y los paradigmas en juego, se utilizó un cuestionario con 7 preguntas, dividido en 2 partes, que se entregaban y respondían una después de la otra.

Las partes presentaban problemas que podrían ser resueltos con el mismo tratamiento algebraico: resolución de ecuaciones lineales y reducción de expresiones algebraicas. Pero que buscaban diferenciarse en lo que el estudiante requiere para activar el trabajo desde A2 en uno y otro tipo de problemas.

En la parte 1 (preguntas 1.1, 1.2a; 1.2b y 1.3) se presenta problemas en contextos cotidianos, con ausencia de símbolos literales en los enunciados y una redacción que permitiera la no-congruencia[6] con la representación algebraica del problema. Se buscó plantear situaciones en las que para activar el trabajo desde A2, fuese necesario un proceso de modelización algebraica, que eventualmente se apoyara en representaciones semióticas diversas.

En la segunda parte del cuestionario (preguntas 2.1, 2.2 y 2.3) se presenta problemas en contextos matemáticos, enunciados que persiguen la congruencia con el registro algebraico y el uso de algunos símbolos literales. En este caso se intentó colocar a los estudiantes en situaciones en las que requieren una traducción o conversión directa al registro algebraico, que los sitúe en una resolución en A2.

Para evaluar la pertinencia de las preguntas en función de los objetivos de la investigación, se realizó un estudio exploratorio con 3 estudiantes, sujetos pertenecientes a la misma institución. De acuerdo a los resultados obtenidos se reformularon algunas preguntas y se dio forma final al cuestionario utilizado como instrumento de observación. Además, el análisis de las respuestas obtenidas en este estudio preliminar ayudó a la formulación de las posibles estrategias de los estudiantes,

[6]Concepto de congruencia y no-congruencia referidos a Duval (1999).

a partir de las cuales se construyeron los criterios de análisis utilizados en la investigación.

3.4 Cuestionario

A continuación se exponen las preguntas del cuestionario, su objetivo, la justificación de su diseño, las posibles estrategias de los estudiantes y los criterios de análisis.

De acuerdo al diseño de investigación, los criterios de análisis persiguen evidenciar las dificultades y errores en el ETA de cada estudiante, así como el posicionamiento o tránsito entre paradigmas.

Para el caso de las dificultades señaladas se elaboró criterios de análisis que caracterizaban las estrategias de resolución y las representaciones semióticas, en relación al paradigma A1 o A2 a las que podían asociarse.

Para el reconocimiento de errores en el tratamiento de propiedades algebraicas, estos se caracterizaron de acuerdo a una tipología de errores, construida a partir de los antecedentes recogidos en los antecedentes.

3.4.1 Criterios de análisis para las dificultades

Pregunta 1.1

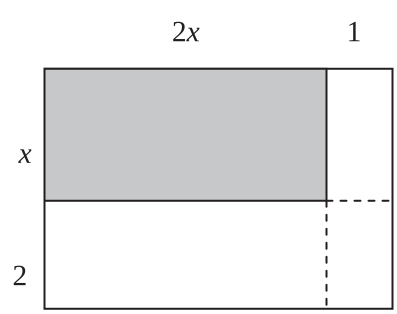
Inicialmente el ancho de un terreno rectangular era el doble de su largo, pero al ampliarse en 1 metro el ancho y 2 metros el largo se necesitaron de 48 metros de alambre para cercarlo. ¿Cuáles eran las medidas del terreno inicial? Justifica tu respuesta

Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto que requiere modelización y elementos que sugieren un eventual tratamiento figural.*

Justificación

Con la pregunta se desea reconocer si el estudiante recurre de forma inmediata a una modelización algebraica de la situación o si requiere otros registros semióticos para activar su ETA. En particular, el enunciado hace referencia a una forma rectangular, lo que nos permitiría observar si el estudiante se apoya en una representación icónica y si esto le permite transitar hacia una representación algebraica. De este modo se pretende evaluar el rol de la visualización en la construcción de su ETA y como estos le permiten situarse en A1 o en A2 o en un tránsito entre ellos.

Respuesta experta



$$
\begin{aligned}
2(2x+1)+2(x+2) &= 48 \\
4x+2+2x+4 &= 48 \\
6x+6 &= 48 \\
6x+6-6 &= 48-6 \\
6x &= 42 \\
6x\cdot\frac{1}{6} &= 42\cdot\frac{1}{6} \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

Las medidas del terreno son 14 metros de ancho y 7 de largo.

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante podría representar la situación a través de una ecuación lineal, sin necesidad de dibujar rectángulos para representar el problema.

Estrategia 2: El estudiante toma los valores numéricos del enunciado y se construye un *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA)[7], con el que intenta llegar a una solución.

Estrategia 3: El estudiante dibuja los rectángulos, les agrega las medidas numéricas, reconoce la incógnita del problema, pero utiliza "etiquetas" en lenguaje natural, tales como "largo" y "ancho", para representarla, no expresa la ecuación lineal.

Estrategia 4: El estudiante dibuja los rectángulos, les asigna los valores numéricos y la incógnita representada por literales, luego plantea la ecuación lineal que representa el problema.

Estrategia 5: El estudiante dibuja los rectángulos, les asigna los valores numéricos y la incógnita representada por literales, luego prueba a sustituir el literal por valores determinados, buscando el valor que permita obtener el perímetro señalado en el enunciado.

[7] Programa de Cálculo aritmético (PCA): cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas, Chevallard (2005). Descripción detallada en los antecedentes de esta investigación, p. 11.

Criterios de análisis para la pregunta 1.1

Tabla 1: criterios de análisis pregunta 1.1

Criterio	Paradigma	Objetivo
Representaciones semióticas		
Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en la representación figural.	A2	Interesa observar a que registros de representación recurre el estudiante cuando construye su ETA personal, para tareas que requieren modelización algebraica. Asociando el uso de estas representaciones a un determinado paradigma o un tránsito entre ellos.
Representa la situación en registro tabular sin necesidad de apoyo en la representación figural.	A1	
Realiza solo la representación figural.	A1	
Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural.	A1/A2	
Realiza la representación figural y procede a trabajar en el registro tabular.	A1	
Estrategia de resolución		
Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma al cual puede estar obedeciendo.
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1	
Sustituye la incógnita del dibujo o de la ecuación por valores numéricos intentando encontrar el que satisface las condiciones del problema.	A1	
Resuelve a través de una ecuación, planteada a partir del dibujo.	A1/A2	

Pregunta 1.2 a

Un corredor que se encuentra a 10 metros de la partida avanza 3 metros por segundo, mientras que un segundo corredor que está a 2 metros de la partida recorre 5 metros cada segundo, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir hasta que el segundo corredor alcance al primero? Justifica tu respuesta

Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto que facilita un tratamiento aritmético de resolución.*

Justificación

Esta pregunta está planteada en un contexto cotidiano y susceptible de ser modelada a través de una ecuación lineal, pero admite también una resolución aritmética. Se quiere evaluar si los estudiantes resuelven desde A1 o desde A2.

La pregunta está formulada sin referencia explícita a figuras[8], a diferencia de la pregunta anterior. Interesa observar si los estudiantes elaboran una representación figural, aunque no esté sugerido en el enunciado, o si el trabajo aritmético se ve sustentado por representaciones tabulares. Se desea evidenciar si estas representaciones les permiten resolver desde A1 o constituyen un paso previo para transitar hacia una resolución en A2.

Respuesta experta

$$
\begin{gathered}
10+3x=2+5x \\
10+3x-2-3x=2+5x-2-3x \\
8=2x \\
8\cdot\frac{1}{2}=2x\cdot\frac{1}{2} \\
4=x
\end{gathered}
$$

El segundo corredor alcanza al primero al cabo de 4 segundos

[8] La palabra figuras en este caso no se restringe solo a figuras geométricas, sino a todo lo que pueda ser representado de manera icónica.

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante podía representar la situación a través de una ecuación lineal, sin realizar dibujos ni esquemas.

Estrategia 2: El estudiante podría hacer un esquema o dibujo en el que representa las distancias dadas en el enunciado, relaciona la información con el contexto de la pregunta para encontrar la solución.

Estrategia 3: El estudiante podría hacer un esquema o dibujo en el que relaciona los valores numéricos dados en el enunciado, luego generalizar planteando la ecuación involucrada.

Estrategia 4: El estudiante podría hacer un esquema o dibujo en el que se representa la situación a partir de la cual intenta reconocer la solución.

Estrategia 5: El estudiante podría hacer un registro numérico con las distancias de los corredores en distintos momentos, probando hasta encontrar el valor en que los corredores hayan avanzado la misma cantidad de metros.

Criterios de análisis para la pregunta 1.2 a

Tabla 2: criterios de análisis pregunta 1.2 a

<table>
<tr><th>Criterio</th><th>Paradigma</th><th>Objetivo</th></tr>
<tr><td>Representaciones semióticas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en una representación figural o tabular.</td><td>A2</td><td rowspan="4">Interesa observar a que registros de representación recurre el estudiante cuando construye su ETA personal, para tareas en las que se facilita la resolución aritmética. Asociando el uso de estas representaciones a un determinado paradigma o un tránsito entre ellos.</td></tr>
<tr><td>Representa la situación en registro tabular</td><td>A1</td></tr>
<tr><td>Realiza solo la representación figural.</td><td>A1</td></tr>
<tr><td>Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural o tabular.</td><td>A1/A2</td></tr>
<tr><td>Estrategia de resolución</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado.
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1	
Elabora una estrategia aritmética a partir de la confección de en registro numérico	A1	
Busca obtener la solución a partir de una representación figural	A1	
Resuelve a través de una ecuación, planteada como generalización de un esquema o registro numérico previo.	A1/A2	

Pregunta 1.2 b

¿Cuánto tiempo debe transcurrir en el caso en que el primer corredor se encontraba a 93 metros de la partida y el segundo a 45 metros de la partida? Justifica tu respuesta

Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto que dificulta un tratamiento aritmético de resolución.*

Justificación

Esta pregunta se puede resolver con el mismo modelo algebraico que la anterior, solo cambian los valores numéricos del enunciado. Sin embargo, si en la anterior se posibilitaba una resolución aritmética, la naturaleza de los valores involucrados en esta pregunta dificulta este tratamiento. Se pretende evidenciar si ante la complejización de una tarea que es abordada desde A1, surge la necesidad de tratar de resolverla desde A2.

Respuesta experta

$$\begin{aligned} 93+3x &= 45+5x \\ 93+3x-45-3x &= 45+5x-45-3x \\ 48 &= 2x \\ 48\cdot\frac{1}{2} &= 2x\cdot\frac{1}{2} \\ 24 &= x \end{aligned}$$

El segundo corredor alcanza al primero al cabo de 24 segundos

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante representa la situación a través de una ecuación lineal, sin realizar previamente un esquema, dibujo o registro numérico.

Estrategia 2: El estudiante podría hacer un esquema o dibujo que describa la situación, en la cual registre las distancias dadas en el enunciado, intente relacionarlas con el contexto, pero que por la naturaleza de los números involucrados no pueda visualizar la solución.

Estrategia 3: El estudiante podría representar la situación a través de un esquema o dibujo a partir del cual plantea una ecuación, como generalización de la situación descrita en el esquema o dibujo.

Estrategia 4: El estudiante podría hacer un registro numérico con las distancias de los corredores en distintos momentos, que itera intentando encontrar solución.

Criterios de análisis para la pregunta 1.2 b

Tabla 3: criterios de análisis pregunta 1.2 b

Criterio	Paradigma	Objetivo
Representaciones semióticas		
Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en la representación figural o tabular.	A2	Interesa observar a que registros de representación recurre el estudiante cuando construye su ETA personal, para tareas en las que se dificulta la resolución aritmética. Asociando el uso de estas representaciones a un determinado paradigma o un tránsito entre ellos.
Representa la situación en registro tabular.	A1	
Realiza solo la representación figural.	A1	
Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural o tabular.	A1/A2	
Estrategia de resolución		
Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado.
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1	
Elabora una estrategia aritmética a partir de la confección de en registro numérico	A1	
Resuelve a través de una ecuación, planteada como generalización de un esquema o registro numérico previo.	A1/A2	

Pregunta 1.3

Un mago dice así: *"Piensa un número, súmale 8, multiplica el resultado por 4, a lo que quedó réstale 6, el resultado divídelo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, ¿cuál es el resultado?"*.[9]

¿Por qué el mago siempre logra adivinar el número que la persona está pensando? Justifica tu respuesta.

Objetivo *Identificar el ETA personal y el tránsito entre paradigmas, en un contexto de modelización asociado a la construcción de expresiones algebraicas.*

Justificación

En las preguntas anteriores la modelización algebraica de los problemas tenía relación con plantear las ecuaciones involucradas. Las evidencias teóricas muestran que bajo el modelo de enseñanza tradicional del álgebra escolar, los estudiantes tienden a considerar las ecuaciones como única forma de modelización algebraica, y el sentido de incógnita como único significado posible de un símbolo literal. Sin embargo, muchas situaciones que se les presentan requieren de modelación en términos de funciones o expresiones algebraicas, en el que los símbolos literales asumen el sentido de variables o parámetros.

La pregunta plantea un proceso de algebrización de un PCA, una generalización algebraica a partir de situaciones aritméticas particulares. Interesa observar si los estudiantes apoyan la construcción de la expresión algebraica involucrada con un tránsito de A1 a A2.

Luego de constituido su ETA en A2, se busca evidenciar si el uso inadecuado del símbolo literal de la expresión, entendido como incógnita y no como variable, produce dificultades o errores en el resto del trabajo que emprende desde este paradigma.

[9] Versión adaptada de problema propuesto en Ruiz, N. , Bosch, M. y Gascón, J. (2010, p.549)

Respuesta experta

$$\frac{4(a+8)-6}{2}-a=\frac{4a+32-6}{2}-a=\frac{4a+26}{2}-a=\frac{2(2a+13)}{2}-a=2a+13-a=a+13$$

Obtiene siempre el número pensado aumentado en 13, le basta restar 13 al resultado para determinar el número pensado.

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante establece una expresión algebraica como representación de la situación planteada, transforma la expresión hasta reducirla y responde a la pregunta en función de la expresión simplificada.

Estrategia 2: El estudiante establece una expresión algebraica y la trata como una ecuación con la que intenta encontrar un valor numérico como solución.

Estrategia 3: El estudiante establece la expresión algebraica, pero termina resolviendo aritméticamente.

Estrategia 4: El estudiante utiliza ejemplos numéricos particulares, a través de los cuales intenta inferir una respuesta en general para la pregunta.

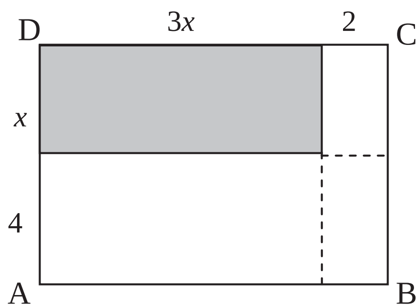
Criterios de análisis para la pregunta 1.3

Tabla 4: criterios de análisis pregunta 1.3

Criterio	Paradigma	Significado del literal	Objetivo
Estrategia de resolución			
Plantea la expresión algebraica y la reduce.	A2	variable	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado. Reconociendo el significado que el estudiante le asigna a los símbolos literales.
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe en lenguaje natural.	A1		
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe utilizando lenguaje algebraico.	A1/A2	variable	
Representa la expresión algebraica, pero le da un tratamiento de ecuación.	A2/A1	incógnita	

Pregunta 2.1

Si el perímetro del rectángulo ABCD de la figura es 60 cm. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo sombreado? Justifica tu respuesta



Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto de congruencia entre registros figural y algebraico asociado a una ecuación lineal.*

Justificación

Las preguntas de la parte 1 y 2 del cuestionario pretenden evidenciar las diferencias que existen en los estudiantes al tratar de resolver situaciones que requieren modelización algebraica de las que solo requieren de una conversión a un registro algebraico, en condiciones de congruencia de registros. En esta pregunta la conversión es desde un registro figural, establecido en el mismo enunciado, a un registro algebraico expresado por una ecuación lineal.

Se desea evidenciar el rol que juega la visualización en esta conversión, la constitución del ETA personal, y el posicionamiento y tránsito entre paradigmas. Las dificultades y errores en el trabajo algebraico de este tipo de tareas.

Respuesta experta

$$\begin{aligned}
2(3x+2)+2(x+4)&=60\\
6x+4+2x+8&=60\\
8x+12&=60\\
8x+12-12&=60-12\\
8x&=48\\
8x\cdot\frac{1}{8}&=48\cdot\frac{1}{8}\\
x&=6
\end{aligned}$$

La medida de los lados del rectángulo sombreado son 6 y 18 cm.

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante plantea una ecuación y busca despejar la incógnita.

Estrategia 2: El estudiante plantea la ecuación, pero busca la solución sustituyendo la incógnita por distintos valores numéricos.

Estrategia 3: El estudiante podría sustituir la x que se presenta en la figura con varios números, verificando si cumplen con el perímetro señalado en el enunciado.

Criterios de análisis para la pregunta 2.1

Tabla 5: criterios de análisis pregunta 2.1

Criterio	Paradigma	Objetivo
Representaciones semióticas		
Representa la situación a través de una ecuación	A2	Interesa observar a que registros de representación recurre el estudiante cuando construye su ETA personal, para tareas en las que se propicia la conversión al registro algebraico. Asociando el uso de estas representaciones a un determinado paradigma o un tránsito entre ellos.
Representa la situación a través de una ecuación pero sustituye la incógnita con distintos valores numéricos.	A2/A1	
Solo trabaja con la representación figural, sobre la que sustituye la incógnita con valores numéricos.	A1	
Estrategia de resolución		
Busca el valor de la incógnita que aparece en la figura, sustituyéndola con distintos valores numéricos.	A1	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado.
Plantea una ecuación, pero busca el valor de la incógnita sustituyéndola por valores numéricos.	A2/A1	
Plantea una ecuación y despeja la incógnita	A2	

Pregunta 2.2

Si a 2 se le suma triple de un número se obtiene el mismo resultado que 6 veces el número, disminuido en 19. ¿Cuál es el número? Justifica tu respuesta

Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto de congruencia entre registros de lenguaje natural y algebraico asociado a una ecuación lineal.*

Justificación

En esta pregunta se espera observar la conversión desde el registro de lenguaje natural al registro algebraico, expresando la ecuación lineal involucrada.

En términos de evidenciar el rol de la visualización en esta pregunta, se focalizará en el reconocimiento de las unidades significativas en la coordinación de registros. Se estudiará el ETA personal, y el posicionamiento y tránsito entre paradigmas.

Respuesta experta

$$\begin{aligned} 2+3x &= 6x-19 \\ 2+3x-3x+19 &= 6x-19-3x+19 \\ 21 &= 3x \\ 21\cdot\frac{1}{3} &= 3x\cdot\frac{1}{3} \\ 7 &= x \end{aligned}$$

El número es 7

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante plantea una ecuación y busca despejar la incógnita.

Estrategia 2: El estudiante plantea la ecuación, pero busca la solución sustituyendo la incógnita por distintos valores numéricos.

Estrategia 3: El estudiante utiliza un registro numérico, probando si distintos números cumplen las condiciones del enunciado.

Criterios de análisis para la pregunta 2.2

Tabla 6: criterios de análisis pregunta 2.2

Criterio	Paradigma	Objetivo
Representaciones semióticas		
Representa la situación a través de una ecuación	A2	Interesa observar a que registros de representación recurre el estudiante cuando construye su ETA personal, para tareas en las que se propicia la conversión al registro algebraico. Asociando el uso de estas representaciones a un determinado paradigma o un tránsito entre ellos.
Representa la situación a través de una ecuación pero sustituye la incógnita con distintos valores numéricos.	A2/A1	
Establece una representación tabular, con la que intenta determinar si los valores escogidos cumplen las condiciones del problema.	A1	
Estrategia de resolución		
Realiza pruebas reiteradas intentando determinar qué número cumple con las condiciones del problema.	A1	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado.
Plantea una ecuación, pero busca el valor de la incógnita sustituyéndola por valores numéricos.	A2/A1	
Plantea una ecuación y despeja la incógnita	A2	

Pregunta 2.3

Si a un número se le suma 2, se multiplica el resultado por 3, se resta 1 y al total se le suma el doble del número inicial, ¿qué número se obtiene? Justifica tu respuesta

Objetivo: *Identificar el rol de la visualización en el ETA personal y los paradigmas, en un contexto de congruencia entre registros de lenguaje natural y algebraico asociado a una expresión algebraica.*

Justificación

En esta pregunta se espera observar la conversión desde el registro de lenguaje natural al registro algebraico, que involucra una expresión algebraica. Además de analizar el ETA personal y los paradigmas, esta pregunta se relaciona con la 1.3, en términos de la posibilidad de evidenciar dificultades y errores producidos por el sentido inadecuado atribuido al símbolo literal en el contexto de la transformación de una expresión algebraica.

Respuesta experta

$$3(a+2)-1+2a=3a+6-1+2a=5a+5=5(a+1)$$

Se obtiene el quíntuple del número inicial aumentado en 5 ó el quíntuple del sucesor del número.

Posibles estrategias

Estrategia 1: El estudiante establece una expresión algebraica como representación de la situación planteada, transforma la expresión hasta reducirla y responde a la pregunta en función de la expresión simplificada.

Estrategia 2: El estudiante establece una expresión algebraica y la trata como una ecuación con la que intenta encontrar un valor numérico como solución.

Estrategia 3: El estudiante establece la expresión algebraica, pero termina resolviendo aritméticamente.

Estrategia 4: El estudiante utiliza ejemplos numéricos particulares, a través de los cuales intenta inferir una respuesta que asume como general.

Criterios de análisis para la pregunta 2.3

Tabla 7: criterios de análisis pregunta 2.3

Criterio	Paradigma	Significado del literal	Objetivo
Estrategia de resolución			
Plantea la expresión algebraica y la reduce.	A2	variable	Se desea reconocer y caracterizar el tipo de resolución a la que recurre el estudiante, relacionándola con el paradigma en el que puede estar localizado. Reconociendo el significado que el estudiante le asigna a los símbolos literales.
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe en lenguaje natural.	A1		
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe utilizando lenguaje algebraico.	A1/A2	variable	
Representa la expresión algebraica, pero le da un tratamiento de ecuación.	A2/A1	incógnita	

3.4.2 Criterios para analizar errores

Objetivo: *Analizar los errores en el tratamiento algebraico que presentan los estudiante, estudiando los artefactos teóricos involucrados en la resolución y el paradigma desde donde se recogen.*

Justificación

En situaciones en que el estudiante reconoce y activa un trabajo algebraico, a menudo no logra resolver las tareas debido a errores en el tratamiento del álgebra elemental. Se desea reconocer si en estos errores hay un tránsito de A2 a A1, en relación a artefactos de la aritmética que se presentan descontextualizados en ámbitos algebraicos de resolución. La búsqueda de este tipo de errores se realizará en todas las preguntas del cuestionario.

Las categorías de clasificación al que estarán sujetos, fue construida a partir de caracterizaciones consignadas en los antecedentes de la investigación.

Tabla 8: criterios para categorías de

Tipo de error	Descripción	Antecedente
Prescindencia de paréntesis	El estudiante no utiliza paréntesis cuando es necesario denotar el orden de la operatoria en las expresiones algebraicas.	En el marco aritmético existe una prescindencia del simbolismo. En particular, el uso del paréntesis es una convención que en este ámbito puede ser irrelevante, al igual que el orden de las operaciones ya que está dado en la estructura misma de la resolución.
Mal uso del signo igual	El estudiante hace un tratamiento inadecuado del signo igual en las ecuaciones.	En el ámbito aritmético los signos " $=, +, -, \cdot, :$" indican acciones, pero en el algebraico estos símbolos también pueden representar relaciones. Esto lleva a muchos estudiantes a no reconocer al signo $=$ como símbolo de equivalencia, sino como una acción que indica que se debe colocar el resultado al lado derecho

		del signo igual.
Necesidad de clausura	El estudiante transforma una expresión algebraica en ecuación, que utiliza para buscar el valor de una incógnita.	El hecho que en las prácticas aritméticas el resultado sea un número, genera que los estudiantes no acepten que el resultado de un problema algebraico puede ser una expresión y no un valor numérico.

Capítulo 4: Análisis de Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas del cuestionario, en las que se busca pesquisar la presencia de las dificultades y errores en el trabajo algebraico, descritos en la problemática. Los resultados se analizan e interpretan desde la conceptualización teórica de los Paradigmas y Espacios de Trabajo Algebraico (ETA).

Esta presentación se estructura en dos partes, en la primera se analizan los resultados pregunta por pregunta, en relación con las dificultades que el estudiante evidencia para reconocer y activar un trabajo algebraico. Sirviéndose de los criterios antes definidos se buscó analizar los diferentes componentes que conforman el ETA personal y los paradigmas asociados, especialmente el rol de la génesis semiótica y el posicionamiento y tránsito entre paradigmas, que sitúan al estudiante en una resolución aritmética o algebraica de los problemas propuestos.

En la segunda parte se busca examinar si en las respuestas de los estudiantes se detectan los tipos de errores descritos en la tipología expuesta en el capítulo anterior. El análisis se centra en estudiar los artefactos que los sujetos intentan aplicar en ámbitos de resolución algebraica y los paradigmas que determinan su elección, como medio para interpretar las posibles causas de tales errores.

En los análisis se identifica a cada estudiante con los símbolo E_i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, 9$.

4.1 Análisis de las dificultades

Análisis pregunta 1.1

a) Análisis por estudiante

Tabla 9: resumen análisis respuestas pregunta 1.1

Criterio	Paradigma	Respuesta estudiantes								
Representaciones semióticas		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en la representación figural.	A2						■			
Representa la situación en registro tabular sin necesidad de apoyo en la representación figural.	A1									
Realiza solo la representación figural.	A1									
Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural.	A1/A2	■			■			■		■
Realiza la representación figural y procede a trabajar en el registro tabular.	A1		■	■		■			■	
Estrategia de resolución										
Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2						■			
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1		■			■				
Sustituye la incógnita del dibujo o de la ecuación por valores numéricos intentando encontrar el que satisface las condiciones del problema.	A1								■	
Resuelve a través de una ecuación, planteada a partir del dibujo.	A1/A2	■		■	■	■		■		■

Solo un estudiante E_6 intenta una modelización algebraica de la tarea sin apoyo del dibujo, pero la ecuación que plantea resulta incorrecta. Establece las expresiones algebraicas que representan a los lados del terreno, pero relaciona el perímetro con la suma de dos de los cuatro lados.

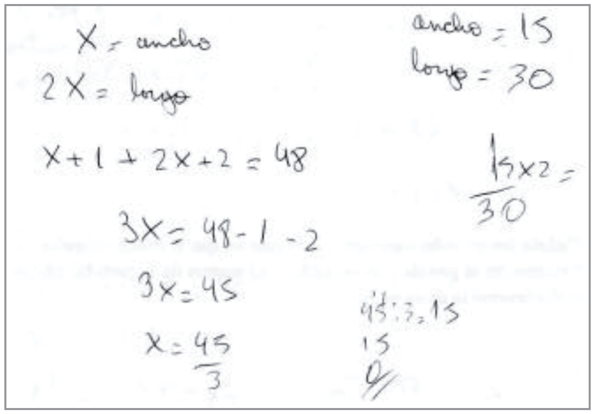


Figura 5: respuesta estudiante E_6 a la pregunta 1.1

Los estudiantes E_1, E_4, E_5, E_7 y E_9 realizan una representación figural en la que sitúan las expresiones algebraicas que representan los lados del rectángulo. Intentaron coordinar la información contenida en del dibujo a través de una ecuación lineal, pero solo E_4 y E_9 lo hacen correctamente.

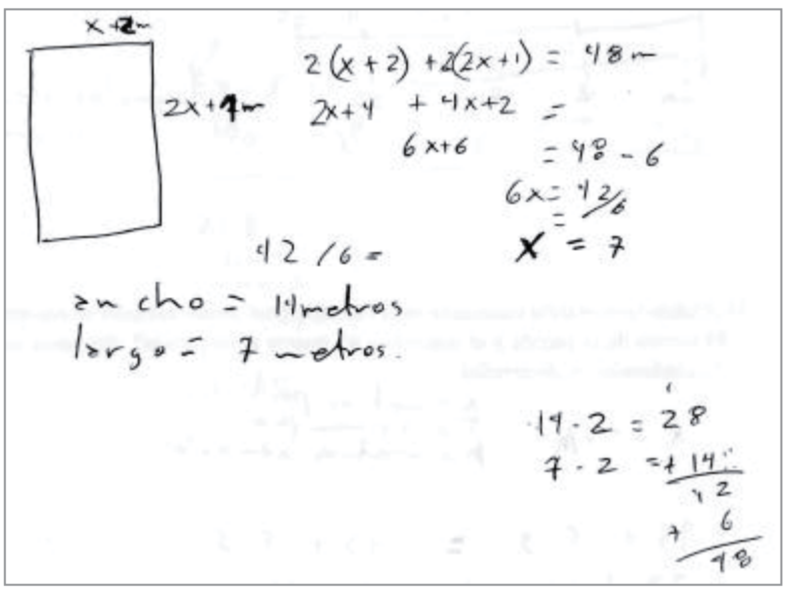


Figura 6: respuesta estudiante E_4 a la pregunta 1.1

Los tres restantes E_2, E_3 y E_8 hacen un dibujo, pero no utilizan el lenguaje algebraico para representar las longitudes de los lados del terreno.

En E_2 y E_5 se puede reconocer la elaboración de un PCA con los valores numéricos del enunciado, que se puede expresar como $PCA(48,1,2) = 48 - (1+2) = 45$.

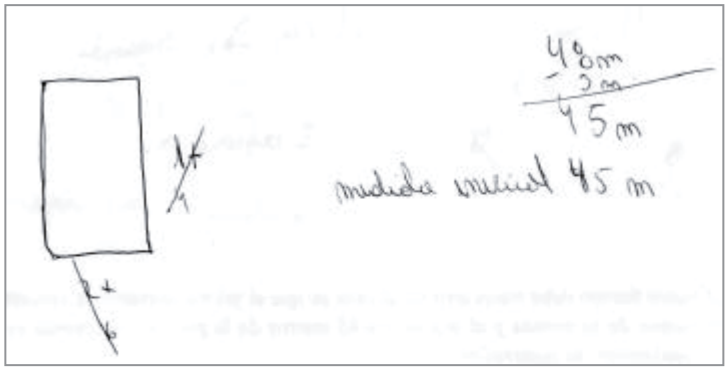


Figura 7: respuesta estudiante E_2 a la pregunta 1.1

Mientras que en E_8 se reconoce que, después del dibujo, recurre a probar con distintas medidas de los lados, con lo que logra dar respuesta al problema, sin embargo luego plantea un par de ecuaciones, con las que al parecer intenta justificarse matemáticamente.

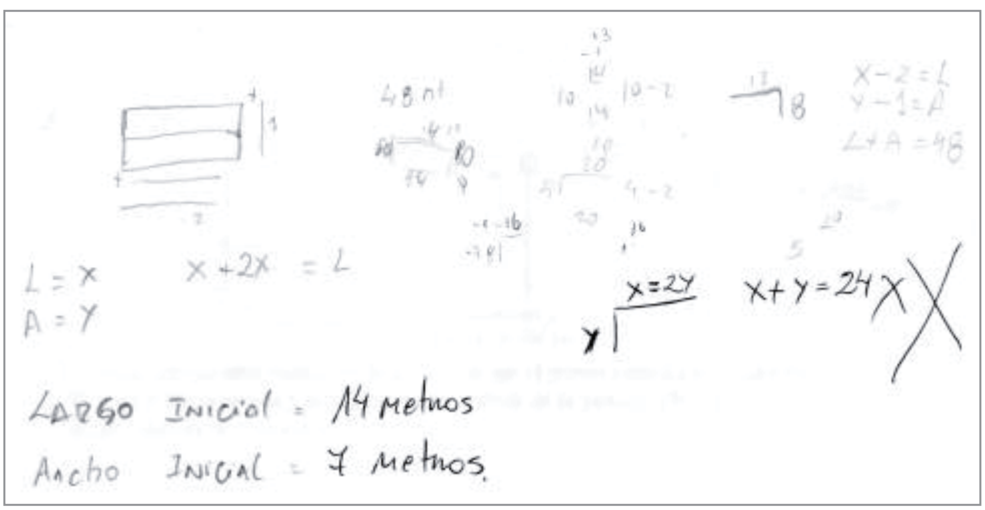


Figura 8: respuesta estudiante E_8 a la pregunta 1.1

Se observa que solo un estudiante E_4 valida el resultado obtenido a través de la ecuación con un cálculo aritmético (Figura 4)

b) Análisis general

En general los estudiantes no pueden determinar la tarea involucrada desde el mismo contexto semántico del enunciado, requieren representarse la situación desde algún registro semiótico, una traducción del problema que apoya la búsqueda de estrategias de resolución. En este caso la traducción a un registro figural era inducida por el contexto del problema.

Sin embargo, para que la traducción permitiera una modelización algebraica de la tarea, fue necesario que se le agregara a la figura las expresiones algebraicas que representaban las longitudes de los lados. Para el problema planteado esto implicaba que el estudiante debía reconocer en el enunciado signos índices para la incógnita y la relación de equivalencia, que en coordinación con el contexto del problema, le permitiera plantear una ecuación.

Tanto la activación de registros semióticos como el reconocimiento de índices evidenciado en las respuestas, permiten inferir que para este tipo de problemas la construcción del ETA se propicia desde la génesis semiótica.

En el caso en que el estudiante no reconoce en el enunciado un índice asociado a la incógnita, el trabajo queda sustentado desde lo aritmético, que se manifiesta con la elaboración de un PCA o la prueba iterada de números que satisfagan la condición del problema. En este caso el estudiante queda sujeto a una resolución desde el paradigma A1.

Sin embargo, resulta interesante, que al parecer el contrato didáctico obliga a algunos estudiantes a justificar su respuesta escribiendo un desarrollo en lenguaje algebraico, aunque este no tenga un sentido claro, lo que resulta puramente declarativo y no amerita ser considerado un trabajo desde A2.

El paso de la elaboración de la figura a la determinación de la ecuación involucrada, se puede interpretar como un tránsito de A1 a A2. En efecto, la elaboración de la figura, en tanto implica una relación con las medidas, se puede asociar a lo aritmético. Mientras que al plantear la ecuación sin apoyo de otras representaciones semióticas se reconoce que la tarea se aborda en pleno desde A2.

Cabe destacar, que aunque un tratamiento aritmético podía dar solución al problema, resultaba ineficaz para gran parte de los estudiantes. Además, en la resolución aritmética se observa que no se explicitan los procedimientos, lo que parece generar un conflicto en el estudiante respecto de cómo justificar sus resultados, lo que tiene relación con lo expuesto en el párrafo anterior. Por otro lado, se pudo observar que una parte de estos desarrollos aritméticos no obedecía a ninguna lógica operatoria asociada al contexto del problema. Para este problema el tratamiento algebraico resultó más eficaz que el tratamiento aritmético.

Análisis pregunta 1.2 a

a) Análisis por estudiante

Tabla 10: resumen análisis respuestas pregunta 1.2a

Criterio	Paradigma	Respuesta estudiantes								
Representaciones semióticas		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en una representación figural o tabular.	A2									
Representa la situación en registro tabular	A1									
Realiza solo la representación figural.	A1									
Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural o tabular.	A1/A2									
Estrategia de resolución										
Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2									
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1									
Elabora una estrategia aritmética a partir de la confección de en registro numérico	A1									
Busca obtener la solución a partir de una representación figural	A1									
Resuelve a través de una ecuación, planteada como generalización de un esquema o registro numérico previo.	A1/A2									

Siete de los nueve estudiantes se plantearon la tarea a través de una representación tabular. La estrategia consistió en calcular las distancias recorridas por ambos corredores en cada segundo, iterando hasta que ambas distancias resultaran iguales.

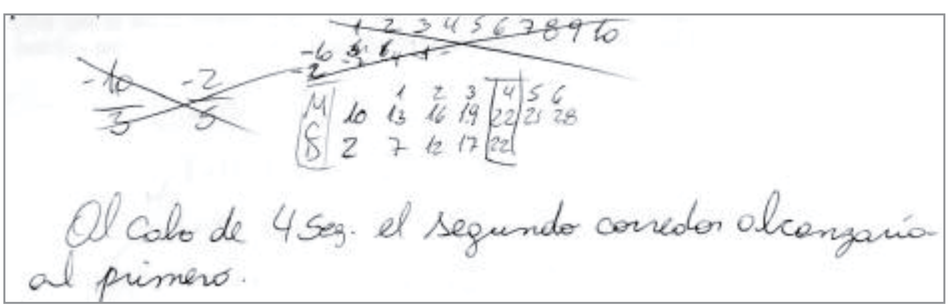


Figura 9: respuesta estudiante E_9 a la pregunta 1.2a

Sin embargo, solo cuatro de ellos llegaron al resultado correcto por esta vía. Mientras que E_8 equivocó un cálculo, E_1 y E_6 confundieron el número de iteraciones con el tiempo buscado.

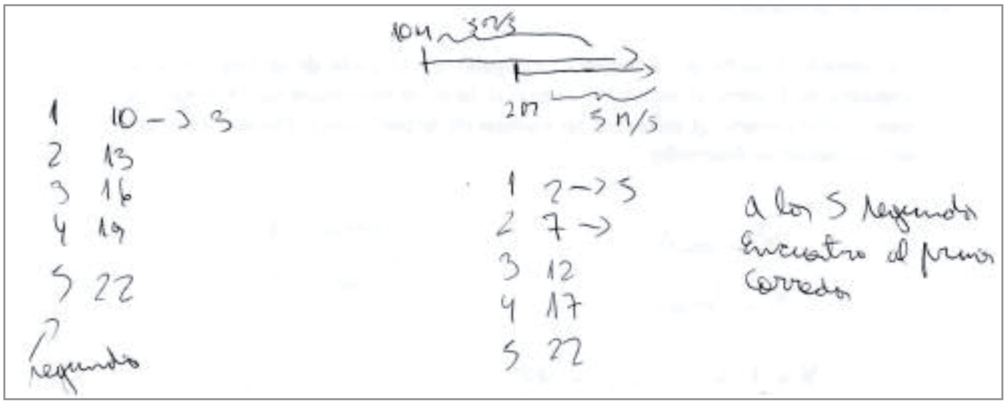


Figura 10: respuesta estudiante E_6 a la pregunta 1.2a

Los estudiantes E_4, E_5 y E_6 elaboran un esquema que intentaba representar la situación, pero solo E_4 la utiliza además como apoyo para ejecutar la tarea, aunque sin una clara correspondencia entre lo figural y lo numérico.

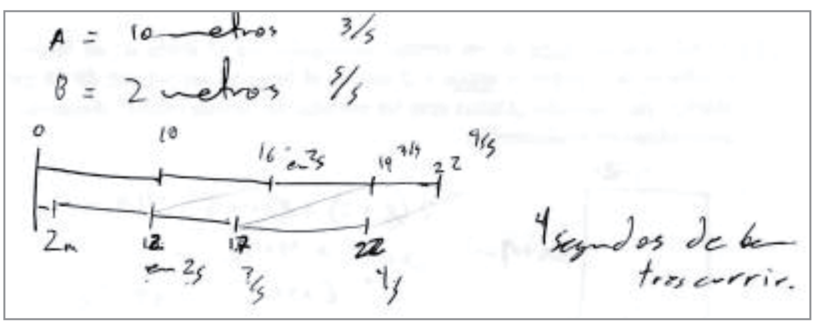


Figura 11: respuesta estudiante E_4 a la pregunta 1.2a

b) Análisis general

En las respuestas de los estudiantes no se reconocen indicios de abordar la tarea algebraicamente, la mayoría parece aceptar que un tratamiento numérico es suficiente, aunque solo la mitad logra llegar a la respuesta correcta por esta vía.

Tampoco se visualiza la necesidad de exponer algún desarrollo algebraico como justificación para sus respuestas, solo muestran la secuencia de números, aunque no reconocen que deben explicitar la manera en que fueron calculados.

Se observa la ausencia de procedimientos de validación en sus resultados. La casi exclusiva utilización del registro tabular para representar el problema permite suponer que no se proponen la utilización de otros registros para verificar sus respuestas.

En definitiva, el ETA que elaboran los estudiantes para este problema se queda en A1. El paradigma sobre el que sostienen su resolución parece estar condicionado por un proceso de visualización que se acota al registro tabular.

Análisis pregunta 1.2 b

a) Análisis por estudiante

Tabla 11: resumen análisis respuestas pregunta 1.2b

Criterio	Paradigma	Respuesta estudiantes								
Representaciones semióticas		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Representa la situación a través de una ecuación, sin necesidad de apoyo en la representación figural o tabular.	A2									
Representa la situación en registro tabular.	A1									
Realiza solo la representación figural.	A1									
Representa la situación a través de una ecuación, apoyándose en la representación figural o tabular.	A1/A2									
Estrategia de resolución										
Resuelve a través de una ecuación, formulada directamente del enunciado.	A2									
Elabora un PCA con los valores numéricos del enunciado	A1									
Elabora una estrategia aritmética a partir de la confección de en registro numérico	A1									
Resuelve a través de una ecuación, planteada como generalización de un esquema o registro numérico previo.	A1/A2									

A pesar que los valores involucrados en el problema hacían más compleja la tarea de encontrar la solución por búsqueda exhaustiva de las distancias en cada segundo, la mayoría de los estudiantes (6 de 9) abordaron la tarea de esta manera, pero solo dos de ellos E_7 y E_9 lograron llegar a la respuesta por este camino.

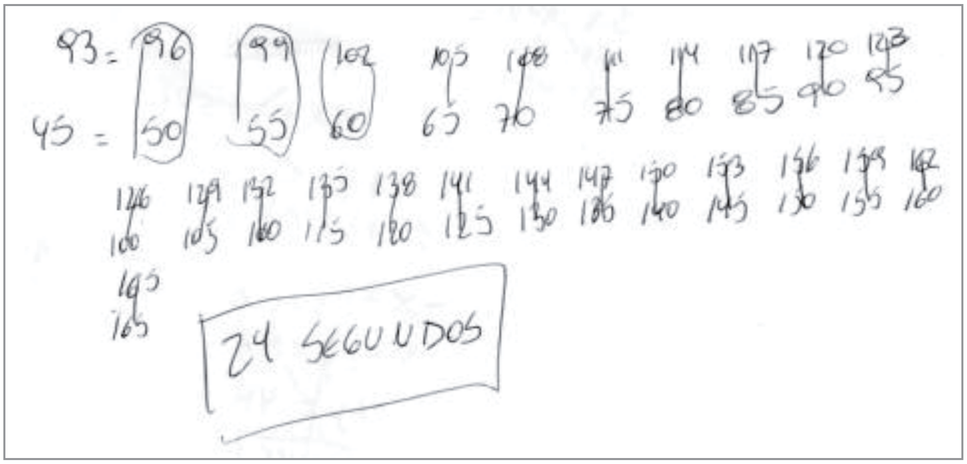


Figura 12: respuesta estudiante E_7 a la pregunta 1.2b

La mayor cantidad de iteraciones que implicaba la búsqueda de la respuesta, provocó que algunos estudiantes (E_4, E_5 y E_6) que ocuparon con éxito la misma estrategia en la pregunta 1.2a no lograran llegar a la respuesta en este caso. En ellos se evidenció errores de cálculo, cambio en la interpretación del problema y abandono de la tarea cuando la búsqueda pareció infructuosa, como se reconoce en la respuesta de E_4.

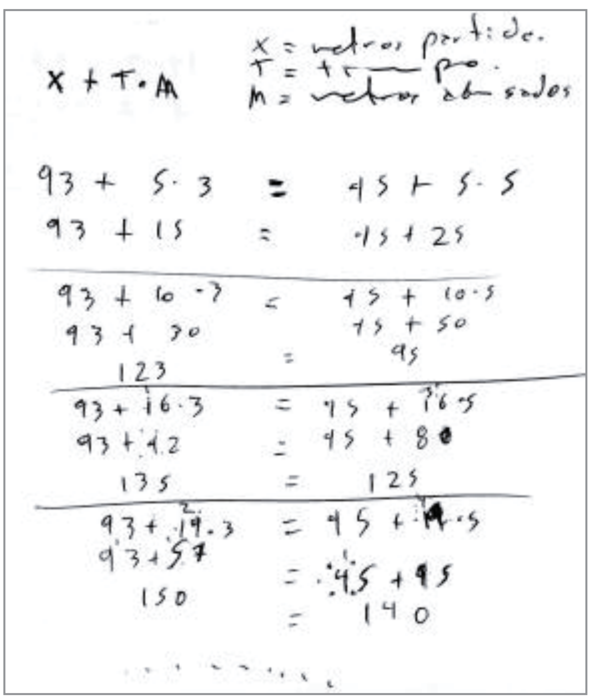


Figura 13: respuesta estudiante E_4 a la pregunta 1.2b

El estudiante E_5 a pesar de haber abordado la pregunta 1.2 a) con la elaboración de un registro tabular, en esta pregunta hace una interpretación distinta del problema que lo lleva a responder con un simple cálculo aritmético.

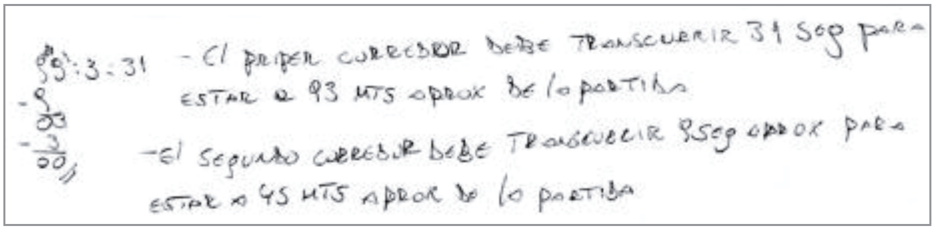


Figura 14: respuesta estudiante E_5 a la pregunta 1.2b

Se observa que E_4, además de describir el detalle de los cálculos aritméticos que efectúa, es el único que expone un uso de símbolos literales (Figura 13), que en su caso ocupa para generalizar la distancia, a través de un modelo en el que introduce el uso de variables. Sin embargo, ocupa una expresión algebraica que luego sustituye por distintos valores, generando la secuencia de resultados numéricos, reduciendo la tarea a un tratamiento aritmético de sustitución.

b) Análisis general

Los resultados muestran que existe una persistencia en los estudiantes en abordar la tarea de forma aritmética, que se mantiene aún evidenciando su complejidad o ineficiencia. La utilización del álgebra elemental se reduce a un caso de construcción de un modelo algebraico para la situación, pero que da lugar a una tarea de tipo aritmética, no hay en ello una modelización algebraica de la tarea en sí. Se reconoce, por tanto, que el ETA que construyen los estudiantes está determinado por un férreo posicionamiento en el paradigma A1.

El hecho que la producción algebraica está prácticamente ausente en las respuestas, podría dar cuenta de varios fenómenos.

Es posible que los estudiantes no reconozcan que un planteamiento algebraico puede resultar, en muchos casos, más eficiente que un tratamiento aritmético de iteración o búsqueda por tanteo. La eficiencia de los recursos matemáticos que utilizan no parece ser una preocupación para ellos, más bien parecen juzgar la pertinencia de la estrategia por su posible efectividad. En este caso, la elección de la estrategia aritmética les fue sugerida por la efectividad que el mismo método tuvo para la pregunta anterior, 1.2a, por eso la mayoría persiste en iterar todas las veces que sea necesario en búsqueda de la respuesta, sin importar cuán eficiente pueda resultar aquello.

Análisis pregunta 1.3

a) Análisis por estudiante

Tabla 12: resumen análisis respuestas pregunta 1.3

Criterio	Paradigma	Significado del literal	Respuesta estudiantes								
Estrategia de resolución			E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Plantea la expresión algebraica y la reduce.	A2	variable									
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe en lenguaje natural.	A1										
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe utilizando lenguaje algebraico.	A1/A2	variable									
Representa la expresión algebraica, pero le da un tratamiento de ecuación.	A2/A1	incógnita									

En esta pregunta 6 de los 9 estudiantes elaboran un PCA para valores particulares, analizando si sus resultados les permiten inferir una respuesta generalizada. Ninguno de ellos logra reconocer la relación entre el número pensado y los resultados de los PCA, lo que los lleva a evidenciar la imposibilidad de dar respuesta por este camino o concluir que el mago en realidad no podría adivinar el número.

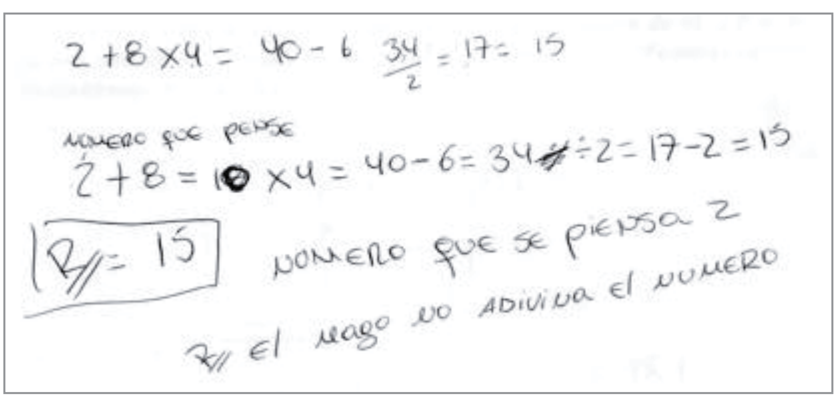


Figura 15: respuesta estudiante E_7 a la pregunta 1.3

Los otros tres estudiantes hacen una representación algebraica del problema. Dos de ellos E_6 y E_8 evidencian la necesidad de plantearse ecuaciones para representar el problema, asumiendo el literal como una incógnita, lo que refleja que no reconocen que los símbolos literales pueden tener otros significados, en particular el de variable para este caso.

Al constatar que las ecuaciones no permitían responder el problema, acuden a representar la situación con casos particulares, un tratamiento numérico, que muestra un claro cambio de paradigma, un paso de A2 a A1, pero que tampoco les permite dar respuesta.

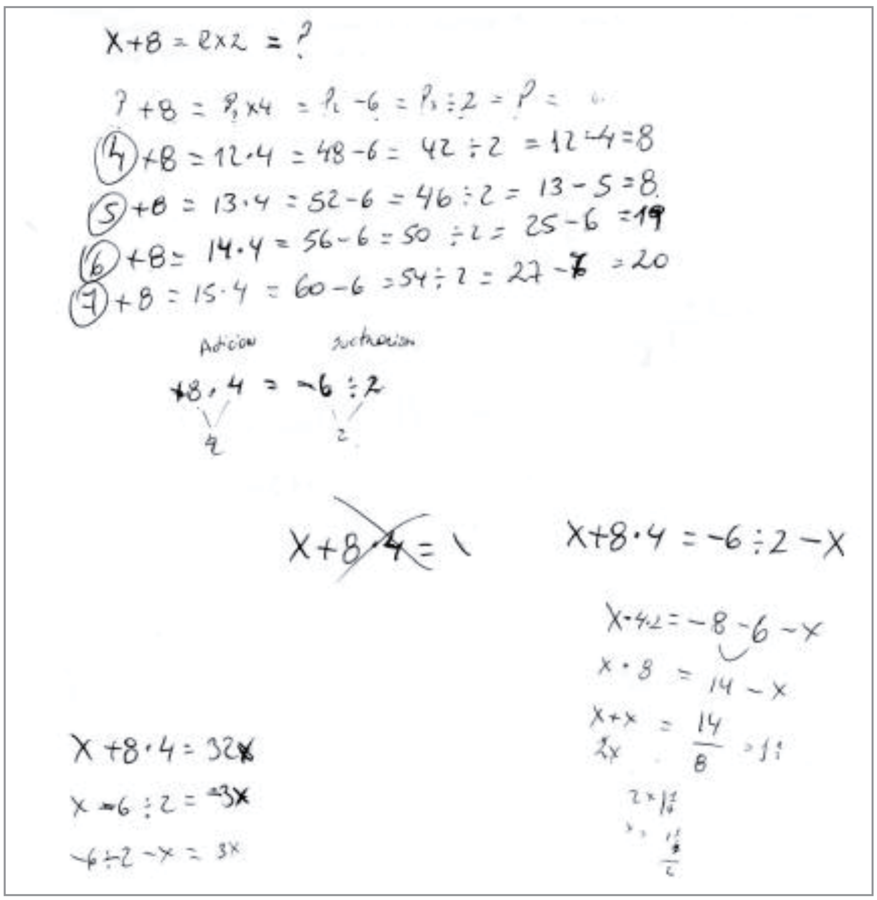


Figura 16: respuesta estudiante E_8 a la pregunta 1.3

E_1 es el único que hace una modelización algebraica del PCA, que involucra la elaboración de la expresión algebraica relacionada, $PCA(x,8,4,6,2) = \dfrac{4\cdot(x+8)-6}{2} - x$. También reconoce que debe transformar la expresión, la reduce pero no la interpreta en el contexto del problema.

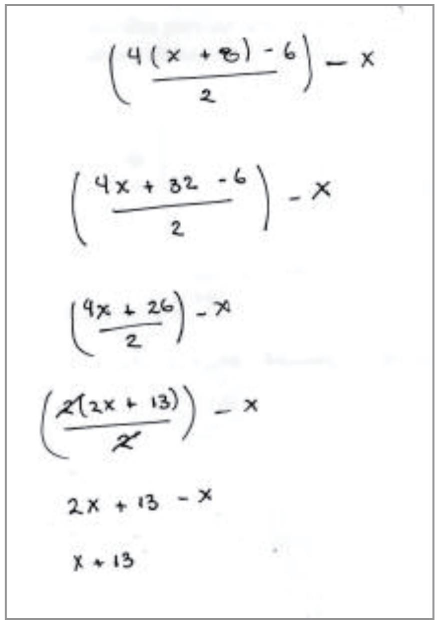


Figura 17: respuesta estudiante E_1 a la pregunta 1.3

b) Análisis general

Se observa que la tarea resulta muy difícil de abordar aritméticamente, los estudiantes no logran reconocer en sus resultados numéricos la regularidad que les permita responder la pregunta. Admiten la insuficiencia de la estrategia aritmética, pero en vez de acudir a una formulación algebraica, la mayoría termina abandonando su resolución, lo que permite reconocer que el ETA personal obedece solo al paradigma A1.

Este problema requería de una modelización algebraica con la que se activa la comprensión de la tarea. Sin embargo, no todos los estudiantes plantearon esta modelización en términos de la formulación simbólica del PCA, una expresión algebraica en el que reconocieran la presencia de variables. Algunos se plantearon en términos de encontrar una ecuación, acción que aparece determinada por el uso restringido a incógnita de símbolo literal involucrado.

Se observa que la modelización algebraica que realiza uno de los estudiantes no se apoya en ninguna representación semiótica auxiliar, no aparecen dibujos ni esquemas, tampoco surge de la elaboración de una representación tabular, se construye a partir del enunciado. Lo que evidencia que el trabajo algebraico asociado al problema no responde a un tránsito de A1 a A2, sino que se establece directamente desde el paradigma A2.

Lo anterior nos permite inferir que este proceso debió depender en gran medida del reconocimiento adecuado de signos en el enunciado, en particular el estudiante tuvo que identificar un índice asociado a la variable y entender el contexto algebraico en el que se introduce este significado, de manera de coordinar el resto de la información en una expresión algebraica y no en una ecuación.

Esto nos indica que el ETA del estudiante que resuelve el problema desde A2 es accionado por un proceso de visualización en el que se requiere el reconocimiento de signos índices en el enunciado.

Análisis pregunta 2.1

a) Análisis por estudiante

Tabla 13: resumen análisis respuestas pregunta 2.1

Criterio	Paradigma	Respuesta estudiantes								
Representaciones semióticas		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Representa la situación a través de una ecuación	A2									
Representa la situación a través de una ecuación pero sustituye la incógnita con distintos valores numéricos.	A2/A1									
Solo trabaja con la representación figural sobre la que sustituye la incógnita con valores numéricos.	A1									
Estrategia de resolución										
Busca el valor de la incógnita que aparece en la figura, sustituyéndola con distintos valores numéricos.	A1									
Plantea una ecuación, pero busca el valor de la incógnita sustituyéndola por valores numéricos.	A2/A1									
Plantea una ecuación y despeja la incógnita	A2									

En esta pregunta se identifica que 5 de los 9 estudiantes hacen una representación algebraica del problema. Cuatro de estos sujetos, no presentan dificultades en establecer la correspondencia entre la información de la figura y la ecuación.

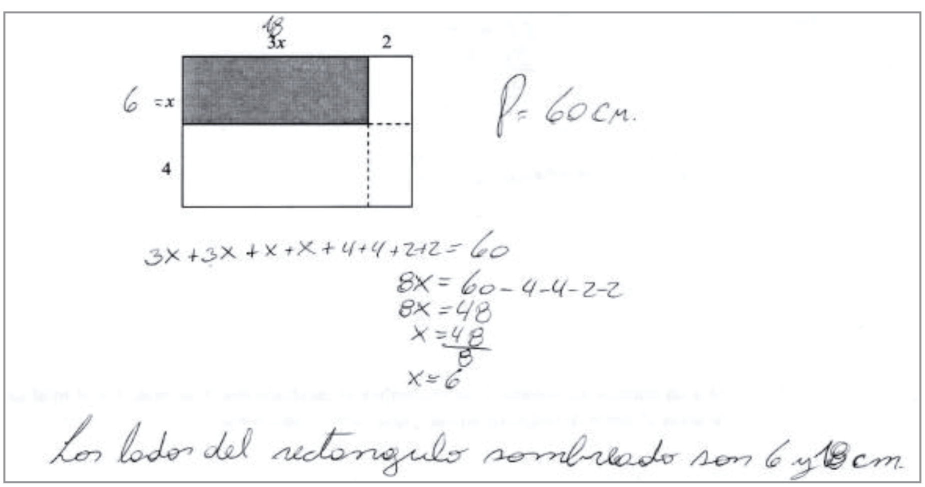


Figura 18: respuesta estudiante E_9 a la pregunta 2.1

Otros dos E_4 y E_7 buscan un número que sustituyen en la figura, pero solo uno de ellos logra identificar el valor correcto de la incógnita.

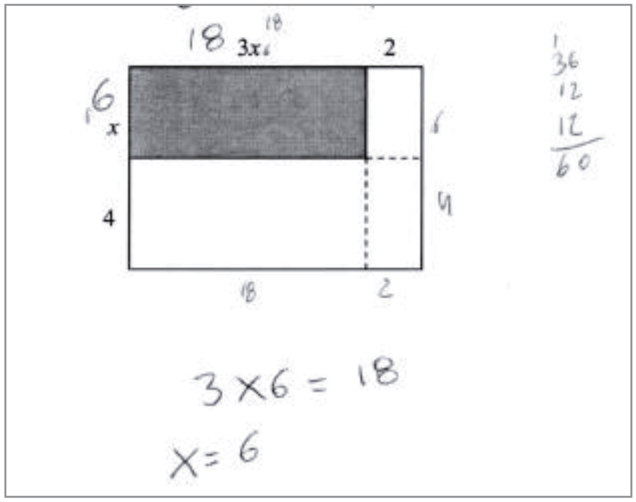


Figura 19: respuesta estudiante E_4 a la pregunta 2.1

Los otros dos estudiantes se remiten a tratar de representar la información en la figura, pero tienen dificultades en representar al 60 como el perímetro, lo que pudo haber influido en sus posibilidades de una presentación algebraica del problema.

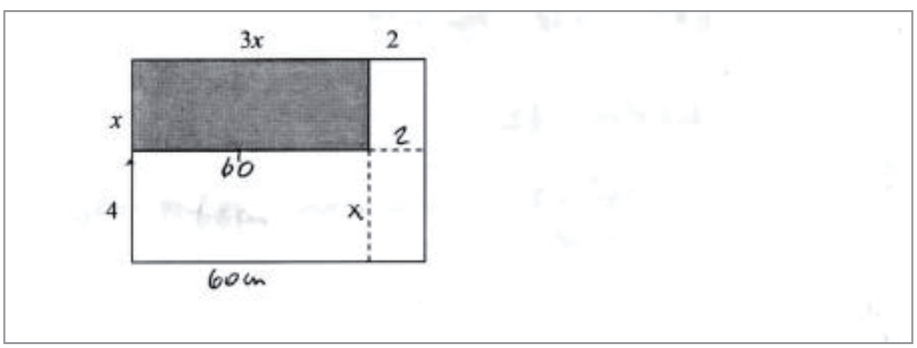


Figura 20: respuesta estudiante E_3 a la pregunta 2.1

b) Análisis general

Esta pregunta se propuso como un representante de tipos de problemas en los que el trabajo algebraico no requiere un proceso de modelización, sino solo una conversión entre registros.

En este caso, la correspondencia semántica entre el registro figural de partida y la representación algebraica estaba facilitada por la representación simbólica de las medidas de los segmentos, pero requería de los estudiantes poner en coordinación el valor del perímetro con la suma y el signo igual, que transformaba el problema en una ecuación. De las respuestas de los estudiantes reconocemos que 7 de los 9 manifestaron una comprensión del problema que les hubiese permitido hacer tal correspondencia, sin embargo hay dos de ellos que optan por trabajar aritméticamente.

Al revisar la forma en que estos mismos sujetos abordaron la pregunta 1.1, que implicaba el mismo tipo de tarea pero en proceso más complejo de modelización, se observa un trabajo algebraico, lo que lleva a inferir que la elección de una estrategia aritmética sobre una algebraica para esta pregunta no está determinada por la dificultad que les provoca plantearse la ecuación. Su criterio parece obedecer, nuevamente, a la efectividad del método. A diferencia de la pregunta 1.1 en este problema la estrategia aritmética se les presenta efectiva, suficiente para construirse un ETA en un paradigma A1.

No todos los estudiantes coordinan los elementos de la figura con la del enunciado, lo que puede ser provocado por no comprender la información o el contexto del problema. En este caso, se observa que los estudiantes que no logran plantearse una estrategia, no parecen comprender lo que es el perímetro y como se relaciona ese valor con el resto de la información de la figura. En este caso no hay las posibilidades de conversión al registro algebraico.

En resumen, en esta pregunta podemos concluir que para activar un ETA desde A2, los estudiantes necesitan visualizar, de forma coordinada, la información el enunciado y la figura que podrán en correspondencia con el registro algebraico.

Análisis pregunta 2.2

a) Análisis por estudiante

Tabla 14: resumen análisis respuestas pregunta 2.2

Criterio	Paradigma	Respuesta estudiantes								
Representaciones semióticas		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Representa la situación a través de una ecuación	A2									
Representa la situación a través de una ecuación pero sustituye la incógnita con distintos valores numéricos.	A2/A1									
Establece una representación tabular, con la que intenta determinar si los valores escogidos cumplen las condiciones del problema.	A1									
Estrategia de resolución										
Realiza pruebas reiteradas intentando determinar qué número cumple con las condiciones del problema.	A1									
Plantea una ecuación, pero busca el valor de la incógnita sustituyéndola por valores numéricos.	A2/A1									
Plantea una ecuación y despeja la incógnita	A2									

En esta pregunta 7 de los 9 estudiantes plantean la tarea algebraicamente, seis de ellos establecen sin dificultad la correspondencia entre la información contenida en el enunciado y la ecuación, mientras que el otro E_3 evidencia dificultad en hacer corresponder algunas expresiones del lenguaje natural con su respectiva representación simbólica.

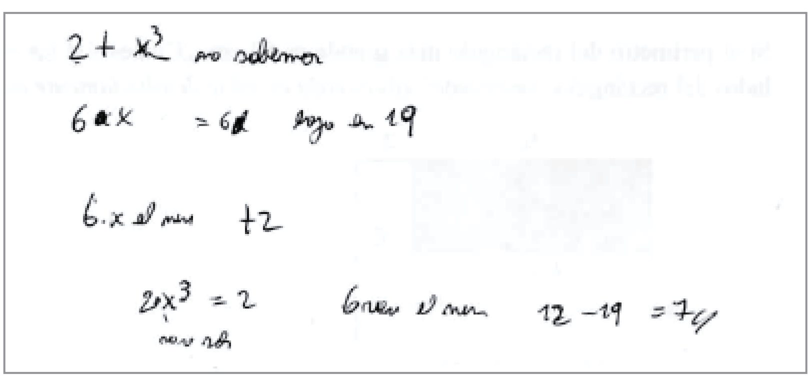


Figura 21: respuesta estudiante E_3 a la pregunta 2.2

Hay un estudiante que realiza un cálculo aritmético, en el que toma un valor particular que trata de colocar en una expresión aritmética del problema, que no guarda correspondencia con la expresión retórica de la situación.

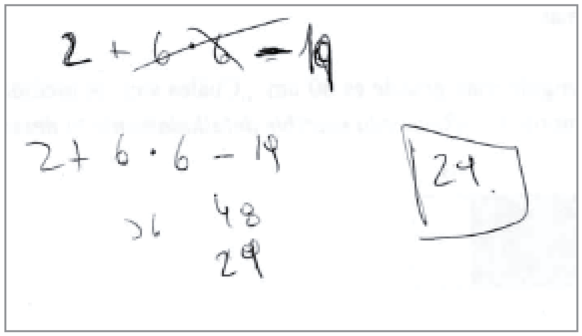


Figura 22: respuesta estudiante E_2 a la pregunta

b) Análisis general

Esta pregunta fue propuesta para indagar en la activación de trabajo algebraico en contexto de problemas que facilitan la conversión al registro algebraico, desde una representación de partida en lenguaje natural. En este caso, el enunciado fue redactado de forma que permitiera la congruencia con la representación algebraica.

Se observa que la mayoría de los estudiantes reconocen esta congruencia, presentando sin problema la formulación algebraica del problema. El estudiante se posiciona sin dificultad desde A2 para la ejecución de la tarea y su proceso de visualización se ve facilitado por las condiciones de congruencia que presenta el enunciado con la ecuación que describe.

Análisis pregunta 2.3

a) Análisis por estudiante

Tabla 15: resumen análisis respuestas pregunta 2.3

Criterio	Paradigma	Significado del literal	Respuesta estudiantes								
Estrategia de resolución			E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
Plantea la expresión algebraica y la reduce.	A2	variable									
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe en lenguaje natural.	A1										
Prueba con valores numéricos particulares, intentando inferir lo que ocurre en general, que se describe utilizando lenguaje algebraico.	A1/A2	variable									
Representa la expresión algebraica, pero le da un tratamiento de ecuación.	A2/A1	incógnita									

Al igual que en la pregunta 1.3 este problema requiere una modelización algebraica en que es necesario que el estudiante reconozca la existencia de una variable, la represente en una expresión algebraica, la reduzca y luego interprete, lo que solo se visualiza en la producción de un solo estudiante, aunque sin interpretar su resultado.

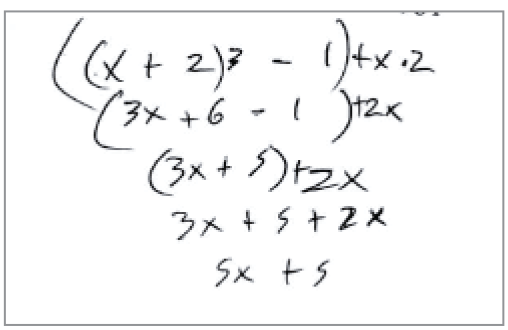


Figura 23: respuesta estudiante E_4 a la pregunta

Del resto, hay 5 que presentan una formulación algebraica del problema como ecuación, reiterando la dificultad para reconocer otros significados a los símbolos literales además del de incógnita.

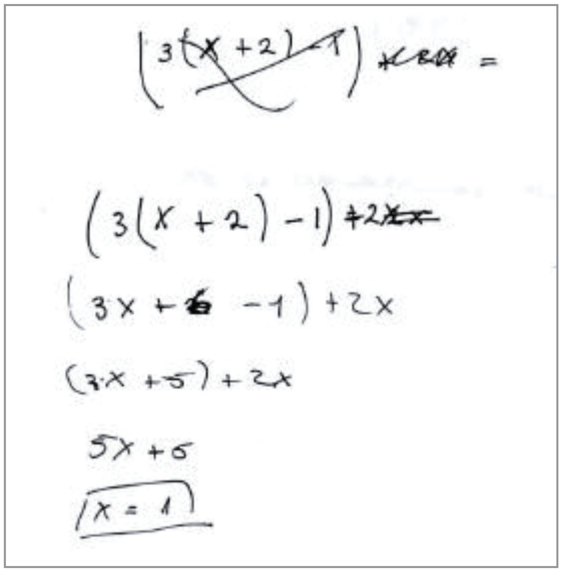


Figura 24: respuesta estudiante E_1 a la pregunta

Hay otros tres estudiantes que se plantean PCA para valores particulares, los que prueban con un solo valor no concluyen nada, mientras que E_9 probando para tres valores reconoce un patrón en los resultados, que expone de forma verbal.

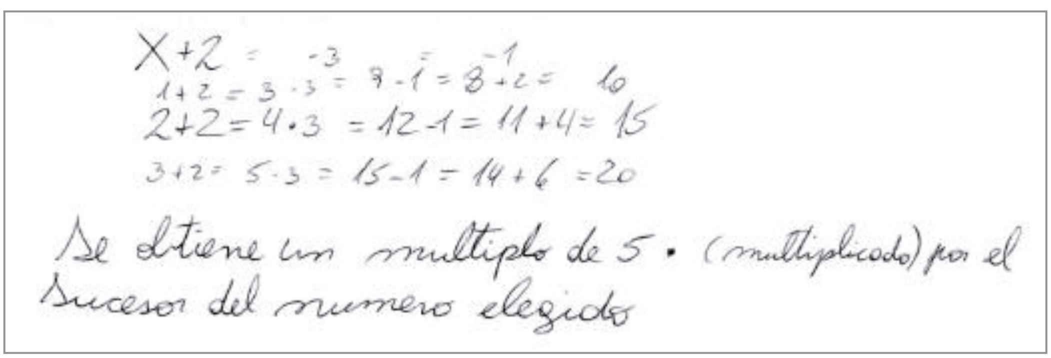


Figura 25: respuesta estudiante E_9 a la pregunta

b) Análisis general

Nuevamente, no se reconoce que la ineficacia en la estrategia aritmética impulse la alternativa de un trabajo algebraico. Los estudiantes que elaboran una estrategia algebraica lo hacen de pleno desde el paradigma A2.

La mayor dificultad detectada en la correcta formulación algebraica es el reconocimiento del símbolo literal como variable y no como incógnita, además de la casi nula utilización de paréntesis que les permitiera ordenar la expresión y definir el orden correcto de la operatoria involucrada.

4.2 Análisis de los errores

Tabla 16: resumen de errores observados

Tipo de error	Descripción	Estudiante	Preguntas
Prescindencia de paréntesis	El estudiante no utiliza paréntesis cuando es necesario denotar el orden de la operatoria en las expresiones algebraicas.	E_6	1.3 – 2.3
		E_7	2.3
		E_8	1.3 – 2.3
Mal uso del signo igual	El estudiante hace un tratamiento inadecuado del signo igual en las ecuaciones.	E_4	1.1 – 2.2
Necesidad de clausura	El estudiante transforma una expresión algebraica en ecuación, que utiliza para buscar el valor de una incógnita.	E_1	2.3
		E_6	1.3 – 2.3
		E_7	2.3

Se observa que 5 de los 7 estudiantes que trabajan con álgebra no utilizan paréntesis, lo que ocurre transversalmente en los desarrollos de todas las preguntas, pero que resulta conflictivo en 1.3 y 2.3, en donde la omisión de paréntesis llevó a cometer errores en el tratamiento de las expresiones algebraicas.

La prescindencia de paréntesis constituyó un obstáculo para el tratamiento de las expresiones, al no reconocer la prioridad de las operaciones involucradas.

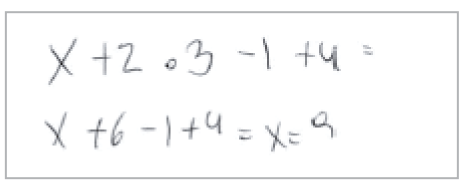


Figura 26: respuesta estudiante E_7 a la pregunta

Las respuestas muestran que la omisión de los paréntesis es habitual en los desarrollos aritméticos, omisión que también alcanza en algunos casos a la de los símbolos operatorios involucrados.

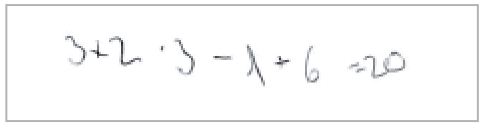


Figura 27: respuesta estudiante E_2 a la pregunta

Se puede concluir que en el ámbito aritmético a los estudiantes no les resulta necesario explicitar el orden de la operatoria, ya que está implícita en la cadena de operaciones que ejecutan y porque no les afecta en el resultado en sí. Pero al asumir el mismo criterio en un contexto desarrollo algebraico, ya no solo implica una cuestión de formalismo, genera errores en el tratamiento de la expresión que no les permite llegar al resultado.

También se observa un tratamiento inadecuado del signo "=" en el contexto de resolución de ecuaciones. Uno de los estudiantes al despejar coloca alguna de las constantes a ambos lados de la igualdad, lo que reitera en otra pregunta.

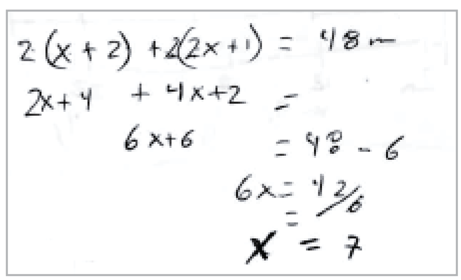


Figura 28: parte de la respuesta estudiante E_4 a la pregunta

Se reconoce que, aunque se evidencia un tratamiento inadecuado de la ecuación, esto no produce errores en el resultado final. De todos modos, se puede estimar que este fenómeno obedecería a un condicionamiento de origen aritmético. En varios desarrollos numéricos es posible observar que el signo igual es usado para describir el resultado parcial de cada paso de la cadena de operaciones, resultado que se la asocia la operación que continua sin respetar la equivalencia entre las partes que componen la igualdad.

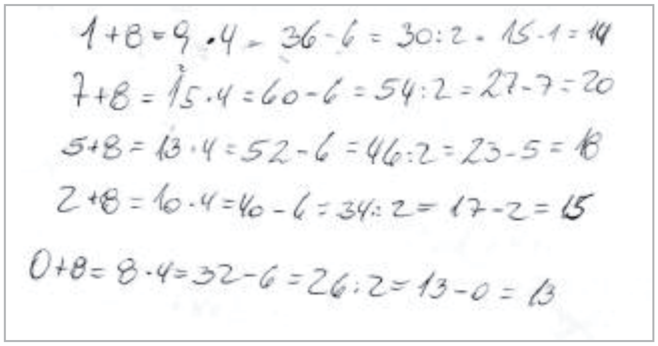


Figura 29: parte de la respuesta estudiante E_9 a la pregunta

Podemos inferir que, tanto la prescindencia de paréntesis en la formulación algebraica como el uso inadecuado del signo de igualdad en las ecuaciones, tienen un origen en situaciones no tratadas de la aritmética.

Por otro lado, la presencia en los resultados de la *necesidad de clausura*, se manifiesta en las preguntas en las que se pone en juego expresiones algebraicas que son manipuladas como ecuaciones.

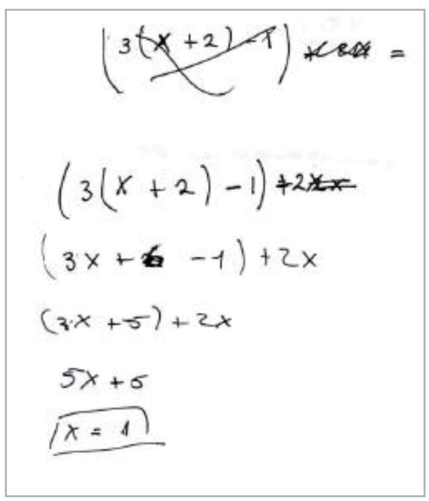


Figura 30: respuesta estudiante E_1 a la pregunta 2.3

La *necesidad de clausura* se relaciona con la imposibilidad de los estudiantes de aceptar que el resultado de un problema algebraico sea una expresión, sino un número. Al respecto podemos conjeturar que esto no puede ser considerado una interpretación personal del estudiante, sino en un conocimiento aritmético objetivo, el resultado de un

PCA es siempre un número. Este conocimiento condiciona la manera de tratar los problemas aritméticos, pero se reconoce inadaptado para el tratamiento de formulaciones algebraicas, lo que podría dar el sentido de obstáculo epistemológico. Sin embargo en esta investigación solo se pudo detectar, a favor de esta hipótesis, que existe una persistencia en la ocurrencia de este error, que describe la manifestación obstinada que caracteriza los obstáculos epistemológicos, pero no logra reconocer si la respuesta está condicionada por la creencia que el resultado del trabajo algebraico deba ser un número. No hay suficientes evidencias para afirmar o rechazar la presencia de un obstáculo epistemológico.

Por otro lado, Ursini et al. (2005) reconoce la confusión entre incógnita y variable que tienen algunos estudiantes y la manera que interpretan una expresión como una “ecuación mal planteada”. Las evidencias de nuestra investigación ratifican la tendencia de los estudiantes a creer que las expresiones son ecuaciones, apoyados por el sentido restringido de símbolos literales solo como incógnitas. Se podría conjeturar que este hecho tiene una raíz didáctica, un tratamiento del álgebra elemental en la institución o en el ámbito escolar de los estudiantes, en que no se justifica la utilización de símbolos literales y sus significados. Sin embargo, la metodología de esta investigación se centró en las respuestas de los estudiantes, por lo que no es posible determinar sus eventuales condicionamientos didácticos.

Capítulo 5: Conclusiones

A partir de la problemática se plantearon preguntas y objetivos que guiaron el desarrollo de este estudio. Los resultados obtenidos nos permiten formular algunas respuestas a esas preguntas y establecer las limitaciones y aportes de esta investigación.

En relación a la primera pregunta, **¿Por qué algunos estudiantes tienen dificultades para reconocer que ciertas tareas pueden ser abordadas usando su conocimiento de álgebra elemental?**, los antecedentes recogidos nos permiten concluir que estas dificultades se producen principalmente en ámbitos de problemas que requieren modelización, mientras que en los problemas que necesitan solo una traducción disminuyen, sin desaparecer del todo.

A partir del análisis de los resultados es posible inferir que el proceso de visualización tiene un rol fundamental en la traducción y modelización algebraica de las tareas. La dificultad de los estudiantes para llegar a traducir un problema de enunciado a su formulación algebraica está influenciado por dos aspectos: la necesidad de representaciones en registros semióticos que apoyen el proceso de modelización y el reconocimiento de signos índices en el enunciado respecto de la presencia de variables o incógnitas que activen un trabajo algebraico.

Para el caso de los problemas que requieren una modelización algebraica, se observa que los estudiantes tienen dificultades para establecer la tarea involucrada desde el mismo contexto semántico del enunciado, requieren representar la situación desde algún registro semiótico que apoye el proceso de traducción y modelización. Sin embargo, el auxilio de representaciones no siempre logra la formulación algebraica del problema, ya que el uso de figuras, esquemas o tablas numéricas se orienta más bien a representar el problema más que a la tarea en sí.

La mayoría de los estudiantes se apoyan en registros semióticos, fundamentalmente figural y tabular, para un proceso de traducción que activa un trabajo aritmético y no algebraico, lo que establece la ausencia de procesos de traducción del problema a un registro que pudieran poner en correspondencia con el registro algebraico.

La dificultad de los estudiantes para plantearse procesos de traducción del registro natural en el que se plantea el enunciado a la representación algebraica de la tarea, se relaciona con el reconocimiento previo de signos índices asociados a un trabajo algebraico. Cuando los estudiantes no identifican índices asociados a la incógnita o la variable el trabajo queda sustentado desde lo aritmético y sus procesos de traducción y modelización se acotan al paradigma A1, sin posibilidad de tránsito hacia A2. Surgen entonces las representaciones tabulares y la elaboración de PCA que intentan responder el problema desde la aritmética, pero que dependiendo del tipo de problema, pueden resultar insuficientes o ineficientes como estrategias de resolución.

Los aspectos mencionados sitúan las dificultades para abordar la resolución algebraica en la génesis semiótica de los ETA de los estudiantes. Cuando no existe un proceso de visualización que permita la identificación de signos o la elaboración de representaciones semióticas que favorezcan la formulación algebraica de la tarea, los estudiantes activan su ETA desde la génesis instrumental del paradigma A1, poniendo en juego los artefactos de la aritmética que acostumbran a utilizar en la resolución de problemas. Es el caso de la elaboración de PCA, que resultan muchas veces descontextualizados del sentido del problema, pero que surge por la necesidad del estudiante de operacionalizar aritméticamente los datos contenidos en el enunciado, en una construcción de su ETA desde A1 y en función de la génesis instrumental.

Creemos que es posible seguir indagando este tipo de dificultades, pero a la naturaleza del análisis cognitivo y epistemológico que los Paradigmas y Espacio de Trabajo Algebraico proveen, se hace necesario sumar una indagación profunda de los condicionamientos didácticos que pudiesen estar influyendo en el reconocimiento de signos y del tratamiento de representaciones semióticas, en el contexto de las dificultades para resolver problemas utilizando el álgebra elemental.

Respecto de la segunda pregunta, **¿por qué algunos estudiantes reiteradamente cometen errores en el tratamiento del álgebra elemental?**, podemos señalar que esta investigación permitió evidenciar que los errores asociados a la *prescindencia de paréntesis* y el *mal uso del signo igual* en álgebra, tienen un origen en situaciones no tratadas de la aritmética.

Las respuestas de los estudiantes permiten inferir que la formulación retórica que admiten muchos de los "problemas aritméticos" no hace necesaria la descripción simbólica de los PCA involucrados. La utilización de instrumentos simbólicos (paréntesis, signo igual y símbolos operatorios) en la aritmética no resulta fundamental para la obtención de la respuesta, llevando a los estudiantes a visualizarlos como convenciones matemáticas, que pueden obviar en contextos de resolución de problemas.

Se evidencia que no existe intentos de validación de la formulación de las expresiones aritméticas, los estudiantes priorizan el resultado. La formulación escrita de los PCA en la aritmética queda sustentado en las concepciones que el propio estudiante se construye, que se manifiestan en una forma de actuar en aritmética que se revela inadecuada en el álgebra elemental.

Esta forma de actuar puede ser entendida como *artefactos* —en el sentido que permiten al estudiante manipular los objetos matemáticos— que utilizaría para la génesis instrumental de su ETA personal, desde A1.

Estos artefactos no corresponderían a herramientas teóricas de un referencial aritmético bien constituido, sino por el contrario, se observa que obedecen a un referencial de la aritmética debilitado. Además son artefactos que persiguen un fin puramente operatorio, obtener el resultado a través de una cadena de operaciones aritméticas. El debilitamiento del referencial sobre el que se levantan estos artefactos explicaría el hecho que los estudiantes no sean capaces de reconocer el tratamiento inadecuado del simbolismo operatorio de sus expresiones aritméticas y de paso tampoco reconocerlas en su aplicación en A2.

Cuando el problema propuesto es abordado desde A2, los estudiantes requieren artefactos de carácter simbólico, que permitan el tratamiento de expresiones y ecuaciones, pero se evidencia que tales artefactos no están presentes producto de un referencial algebraico muy débil. El estudiante recurre entonces a los artefactos que en el contexto aritmético le resultan operatorios, pero que carecen del necesario componente simbólico que demanda el trabajo algebraico. La forma de proceder con el signo igual y la omisión de paréntesis que en A1 se juzgaba eficaz, se revelan insuficientes y una fuente constante de errores cuando se trasladan a A2.

Resulta difícil juzgar si este fenómeno es puramente didáctico, cognitivo o de carácter epistemológico, o una mezcla de ellos, aunque los antecedentes recogidos nos permiten aventurar algunas conclusiones. La aplicación persistente de artefactos que resultan eficaces en A1 pero que se revelan inadecuados en A2, podría sugerir la presencia de un obstáculo epistemológico. Sin embargo, rechazamos esta hipótesis, ya que los artefactos de los que estamos hablando obedecen a concepciones personales de los estudiantes, construidos sobre un debilitamiento de su referencial aritmético, por tanto como conocimiento no se ajusta completamente a lo que Brousseau describe como un obstáculo epistemológico,

"*…un conocimiento, en el sentido en que hemos dado de manera regular de tratar un conjunto de situaciones... Estos conocimientos no* ***son construcciones personales variables****. Son respuestas "universales" en ámbitos precisos."* (2007, p.45)

Por otra parte, a pesar de existir un componente didáctico en el origen de estos fenómenos, inferimos que no es posible formularlo como un obstáculo didáctico. D'Amore (2005) describe que en un obstáculo didáctico interviene una elección que el profesor propone en el ámbito de la enseñanza, que cree puede resultar eficaz para algún estudiante, pero que para otros, la misma elección constituye un obstáculo. Sin embargo, en el fenómeno que describimos la manera de proceder en aritmética que tienen los estudiantes no está instalada como una elección del profesor, sino que la construye el estudiante en ausencia del tratamiento didáctico de los PCA.

El carácter de construcción personal de estos artefactos, nos llevan a pensar que como concepción propia del estudiante, que se revela inadecuada en el contexto del álgebra elemental, obedece a un obstáculo de tipo cognitivo. En el plano cognitivo del ETA personal del estudiante, este obstáculo estaría en el proceso de construcción, activado por una génesis instrumental que recoge artefactos elaborados por el estudiante para su trabajo en A1, que provocan errores cuando se intentan implementar en A2. Lo que describe un tránsito de A2 a A1.

De este modo podemos llegar a sostener que para tratar los errores en el álgebra elemental es necesario tratarlos primero en la aritmética, lo que implica levantar propuestas que propicien una verdadera necesidad del uso de instrumentos simbólicos en la aritmética, que permitan la explicitación de los PCA y su posterior proceso de algebrización.

Esta investigación permite aportar, desde la Didáctica de la Matemática, a la comprensión de las dificultades en matemáticas de algunos los estudiantes que ingresan a la educación superior. En particular, podemos sostener que la mirada que reduce el problema a la entrega de conocimientos faltantes resulta insuficiente para responder a la complejidad del problema.

Las propuestas de nivelación deberían tratar la raíz de las dificultades y errores en el álgebra elemental, que según nuestra investigación tiene algunos orígenes en situaciones no tratadas en la aritmética, que describen la necesidad de formalizar el uso de instrumentos simbólicos en este dominio, para que su posterior utilización en el álgebra elemental sea natural para los estudiantes. También deberían considerar trabajar la resolución de problemas desde la perspectiva de la modelización algebraica y el uso de representaciones semióticas para los procesos de traducción, propiciando el reconocimiento de signos índices en los enunciados. Esta investigación puede aportar elementos teóricos que sostengan esta y otras propuestas de enseñanza del álgebra elemental.

Referencias

BACHELARD, G. (1948). *La formación del espíritu científico*. B. Aires: Siglo Veintiuno.

BOLEA, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

BELL, E. (1985). *Historia de la matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

BOYER, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

BROUSSEAU, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

CHEVALLARD, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire*. Publications de l'APMEP Nº 168, 239-263. París: APMEP.

CID, E. y BOLEA, P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier: IUFM de Montpellier.

Boletín Perspectivas en educación. Publicación Nº5, diciembre 2011. Consejo Nacional de Educación (CNED).

GARCÍA, F. J. & RUIZ, L. (2002): Organizaciones *matemáticas de referencia en torno a la proporcionalidad de magnitudes*. XVIII Jornada SIIDM. Castellón.

DOUROUX, A. (1983). *La valeur absolue: difficultes majeurs pou une notion mineure.* Petit X.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes Intelectuales*. Santiago de Cali: Lang.

D'AMORE, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Reverté.

ELICHIRIBEHETY, I. & OTERO, M. (2004). *La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra*. En *Educación Matemática,* vol. 16, número 001. pp. 29-58. México: Santillana.

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.

Informe Final: Estudio sobre causas de la deserción universitaria. Centro de Microdatos, Departamento de Economía, Universidad de Chile, 2008.

KIERAN, C. y FILLOY, F. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Universidad de Québec Montreal, Canadá.. Centro de Investigación y Estudios avanzados del IPN, México. University of London Institute of Educatión, Inglaterra.

KUZNIAK, A. (2011). *El espacio de Trabajo Matemático y su Génesis*. ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volumen 16 p.9-24. IREM de STRASBOURG.

MALISANI, E. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico: Visión histórica*. En Revista IRICE, Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación. N° 13 (1999). Rosario.

MENA, A. & MORALES, A. (2011). *Elementos para una aproximación epistemológica a un "espacio de trabajo" algebraico*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

MERINO, R. (2012). *Estudio de la articulación entre la visualización y el razonamiento*. Tesis para optar al grado de Magister en Didáctica de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

MONTOYA, E. (2010). *Paradigmas y Espacio de trabajo geométrico.* PUCV. Apuntes de clase.

PAPINI, M. C. (2003). *Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra*, Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC., VI, 1, (pp. 41-71). Buenos Aires.

PEIRCE, C. (1974). *La ciencia de la semiótica.* Buenos Aires: Nueva Visión.

PIAGET, J. & GARCÍA, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science*. New York: Columbia University Press.

PUIG, L. & CERDÁN, F. (1990). *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales*. En Conferencia invitada al grupo de *Álgebra* del *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*, Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

Revisión de Políticas Nacionales de Educación: La Educación Superior en Chile. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), 2009.

REY PASTOR, J. & BABINI, J. (2000). *Historia de la matemática*, Vol. 2. Barcelona: Gedisa.

RUANO, R., SOCAS, M. & PALAREA, M. (2003). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra*. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática.* (pp. 311-322). Granada: SEIEM.

RUIZ, N., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2010). *La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria*. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

SANHUEZA, M. (2012). *Aproximación teórica didáctica "Espacio de Trabajo Algebraico": enseñanza de la ecuación lineal en Chile*. Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática, PUCV.

SOCAS, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: aportaciones de la investigación*. Revista Números, Vol. 77, pp. 5–34.

STAKE, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*, Vol. 2. Madrid: Morata.

URSINI, S., FORTINO, E., MONTES, D. & TRIGUEROS, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental: una propuesta alternativa*. México: Trillas.

YIN, R. (1994). *Investigación sobre estudio de casos. Diseño y Métodos*. Londres: Sage.

Anexos

Cuestionario

Parte 1: Resuelve los siguientes problemas: Justifica tus respuestas

1.1 Inicialmente el ancho de un terreno rectangular era el doble de su largo, pero al ampliarse en 1 metro el ancho y 2 metros el largo se necesitaron de 48 metros de alambre para cercarlo. ¿Cuáles eran las medidas del terreno inicial?

1.2 a) Un corredor que se encuentra a 10 metros de la partida avanza 3 metros por segundo, mientras que un segundo corredor que está a 2 metros de la partida recorre 5 metros cada segundo, ¿Cuánto tiempo debe transcurrir hasta que el segundo corredor alcance al primero?

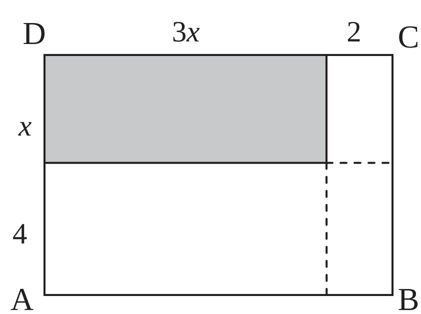
b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir en el caso en que el primer corredor se encontraba a 93 metros de la partida y el segundo a 45 metros de la partida?

1.3 Un mago dice así: *"Piensa un número, súmale 8, multiplica el resultado por 4, a lo que quedó réstale 6, el resultado divídelo entre 2, a lo que quedó réstale el número que pensaste, ¿cuál es el resultado?"*.

¿Por qué el mago siempre logra adivinar el número que la persona está pensando? Justifica matemáticamente.

Parte 2: Resuelve los siguientes problemas: Justifica tus respuestas

2.1 Si el perímetro del rectángulo ABCD de la figura es 60 cm. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo sombreado?



2.2 Si a 2 se le suma triple de un número se obtiene el mismo resultado que 6 veces el número, disminuido en 19. ¿Cuál es el número?

2.3 Si a un número se le suma 2, se multiplica el resultado por 3, se resta 1 y al total se le suma el doble del número inicial, ¿qué número se obtiene?