Algoritmos Gráficos

Re-edición de los Algoritmos Gráficos de Godofredo Iommi A. basada en la edición original de los apuntes de Isabel Margarita Reyes de las Clases dictadas en los Talleres de la Facultad de Arquitectura PUCV en 1987.

Profesor Guía: Sr. Herbert Spencer
Alumna: Marina Lin Arancibia Villavicencio

Diseño Gráfico - Septiembre 2012
Escuela de Arquitectura y Diseño,
Universidad Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su incondicional y escencial apoyo a lo largo de estos años, por darme el espacio, el tiempo y la confianza necesaria en este recorrido.

Principalmente a mi madre por enseñarme sobre el coraje, la confianza y la perseverancia para cumplir las metas y a mi padre por siempre compartir su infinito conocimiento, además de su admirable ingenio y creatividad en el oficio del Diseño.

A los profesores, Alejandro Garretón y a Ricardo Lang por la pasión puesta en cada una de sus cátedras.
A Herbert Spencer por compartir su sabiduría, además de la dedicación reflejada en cada uno de sus talleres, cultivando la necesidad de conocimiento en cada uno de sus alumnos y siempre creer en ellos.

Índice

Prólogo

Diseñando con Números

La invención de la escritura corresponde a la fijación –o materialización– de la palabra. Se trata de una sistematización, que mediante un sistema finito de símbolos, es capaz de establecer una relación biyectiva entre el tiempo de la oralidad y el espacio de la textualidad: la escritura es capaz de establecer una relación de ida y vuelta entre lo que transcurre y lo que permanece. Es por eso que con ella parte la historia.

Y así como la escritura fija la palabra, la computación fija algoritmos por medio del lenguaje matemático. Este lenguaje lo llamamos unívoco, pues admite dentro de su finitud, una sola interpretación; a diferencia de la palabra que admite muchas lecturas o interpretaciones posibles. La belleza que nos abre esta compresión radical del sentido, nos permite definir espacios con precisión, con elegancia y consistencia. También nos permite acceder a la finura infinita.
El trabajo encargado a Marina en su proyecto de título consistió en recoger los cuadernillos de los Algorit-

mos, editados hace más de 25 años en esta escuela, para traerlos hoy a la luz del lenguaje de la máquina gráfica que busca cuestionar y poner en relieve el paralelo de la abstracción matemática desnuda y la construcción computacional de imágenes que revelan y dan forma.

La materia que intenta abrirse con este encargo es la visualización gráfica reunida con la música de las matemáticas. La visualización en cuanto proceso corresponde, en sí misma, a un ejercicio algorítmico de estrictez matemática. Se trata de hacer aparecer, desde este lenguaje unívoco, la riqueza expresiva y abierta que trae la imagen de vuelta en su espacio formal, intentando borrar la frontera entre la tecnología y la plástica; entre la contemplación de una verdad abstracta e inmaterial a una versión visible que nos permite conversar y comprender la materia expuesta. El algoritmo anuda al concepto y a su imagen: pictos. Creemos que éste es el modo natural que tiene el oficio para apropiarse de las cosas y de algún modo intentar gobernarlas. Dicho de otro modo, corresponde al proceso de alfabetización que ya no solamente lee, sino que también escribe (va de ida y vueltas, siempre) y aborda el espacio desde una cabeza algorítmica.

Todo su trabajo ha sido abordado de este modo: Los textos son tratados en LaTeX#, como medida del máximo rigor de fijación de la palabra matemática. Para escribir aquí el documento debe compilarse en un PDF. Si el programa está mal escrito, el documento no se produce (de ahí la estrictez unívoca). Y lo mismo ocurre con las imágenes, que son generadas en el entorno de desarrollo Processing# que se compilan y se realizan. El juego es, entonces, construir la propia libertad que viene desde el lenguaje abierto. La libertad no es un don a priori, sino que es una construcción abierta a la fuga de la emergencia. El desconocido aparece entre las grietas de la aparente clausura lógica.

Observaciones

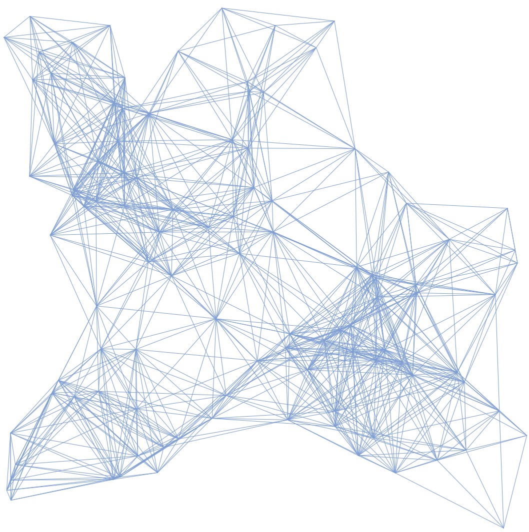
æ La teoría de los números alúde a todas las ramas de la ciencia y estudio. Desde la biología, historía, arte, filosofía, geografía, etc obtenemos resultados sobre interpretaciones del espacio, pero es la matemática pura, la única rama capaz de ordenarlo y definirlo a través de demostraciones certeras, lo que se da gracias a la capacidad de las matemáticas de ser un lenguaje.

El lenguaje de las matemáticas se puede ver reflejado a través de algoritmos, los que básicamente indican un proceso y que en este caso fueron utilizados tanto para la visualización de los textos en LaTeX, como de las gráficas hechas en Processing. En ambos casos se define una gama de valores que arrojarán un resultado específico, que podrá variar dependiendo de las coordenadas del contexto también definidas de manera previa. El resultado en cada caso alude a la conjugación de un lenguaje que articula un resultado.

En el caso del texto construído en LaTeX, la escritura está programada de manera que el código combine carácteres tipográficos de manera lineal de izquierda a derecha. La variación del resultado irá en como se designen variables de tamaño tipográfico, fuentes, color y relaciones espaciales de la lectura como márgenes e interlineados.

Por otro lado las visualizaciones construídas en Processing, corresponden a una definición previa mas amplia que abarca el modo de dibujo, tipo de línea, dirección de la línea, formato y cantidad de planos en caso de que hubiera mas de uno. Se definen también variables del mismo dibujo en caso de que haya interacción con el lector para indicar el modo de comportamiento dadas ciertas coordenadas, indicando de manera certera el "como" de una transformación através del designamiento de previo de valores y contextos.

Vemos como distintos lenguajes tienen diferentes modos de escribir gráficamente através de la definición de distintas variables y por medio de un elemento en común, los números.



Algoritmo de Minkowski

Partitura del espacio

I

La matemática inglesa de fines del siglo pasado y comienzos de éste se centra en la teoría de los números. *Cayley, Sylverster, Mac Mahon, Rogers, Franklin* son algunos de los personajes más destacados que indagaron en el tema.

La expresión matemática pura, cada vez menos usada, alude a la teoría de los números, cuyos problemas fundamentales suelen poder enunciarse de manera muy simple. Así por ejemplo, si n es un número natural, una partición de n es una división de n en partes enteras positivas.

Nota 1

- se puede escribir de una manera: (1)
- se puede escribir de dos maneras: (2) y (1+1)
- se puede escribir de tres maneras: (3), (2+1) y (1+1+1)
- se puede escribir de cinco maneras: (4), (3+1), (2+2), (2+1+1) y (1+1+1+1)
- se puede escribir de siete maneras: (5), (4+1), (3+2), (3+1+1), (2+1+1+1) y (1+1+1+1+1)
- se puede escribir de once maneras: (6), (5+1), (4+2), (4+1+1), (3+3), (3+2+1), (3+1+1+1), (2+2+2 2+2+1+1), (2+1+1+1+1) y (1+1+1+1+1+1)
- se puede escribir de quince maneras: (7), (6+1), (5+2), (5+1+1), (4+3), (4+2+1), (4+1+1+1), (3+3+1), (3+2+2), (3+2+1+1), (3+1+1+1+1), (2+2+2+1), (2+2+1+1+1), (2+1+1+1+1+1) y (1+1+1+1+1+1+1)

Las particiones de n se presentan como p(n).

Algunos valores de p(n):

$p(0) = 1$, por definición

p(1)=1	p(6)=11	p(10)=42	p(14)=135	p(18)=385
p(2)=2	p(7)=15	p(11)=56	p(15)=176	p(19)=490
p(3)=3	p(8)=22	p(12)=77	p(16)=231	p(20)=627
p(4)=5	p(9)=30	p(13)=101	p(17)=297	p(21)=792

Existe entonces, una fórmula de recurrencia para encontrar el número de particiones de n:

$p(n) = \sum \left[n - 12(3j^2 + j)\right]$

y, por definición:

$p\,(0) = 1$

Desarrollo de $\frac{1}{2}\left(3j^2 + j\right)$**:**

si $j = 1, \frac{1}{2}\,(3 + 1) = 2, 1$

si $j = 2, \frac{1}{2}\,(3{\cdot}4 + 2) = 7, 5$

si $j = 3, \frac{1}{2}\,(27 + 3) = 15, 12$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(48 + 4) = 26, 22$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(75 + 5) = 40, 35$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(108 + 6) = 57, 51$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(147 + 7) = 77, 70$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(192 + 8) = 100, 92$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(243 + 9) = 126, 117$

si $j = 1\frac{1}{2}\,(300 + 10) = 155, 145$

si $j = 1\frac{1}{2}\left(363+11\right) = 187,176$

si $j = 1\frac{1}{2}\left(432+12\right) = 222,210$

Por ejemplo, $p(15) = \sum(-1)^{j+1}p\left[15-\frac{1}{2}\left(3j^2+j\right)\right]$:

si j=1

$p(15) = (-1)^2p\left[15-\frac{1}{2}\left(3+1\right)\right]$

$=+p(15-2)+p\left(15-1\right) = +p\left(13\right)+p\left(14\right)$

si j=2

$p(15) = (-1)^3p\left[15-\frac{1}{2}\left(12+2\right)\right]$

$=-p(15-7)-p\left(15-5\right) = -p\left(8\right)+p\left(10\right)$

Encontrar una fórmula que dé el número de particiones de n, $p(n)$, fué uno de los temas casi en un sentido musical, en los cuales coincidieron Hardy y Ramanujan.

Nota 2

La historia de su colaboración resulta extraña dentro de la vida académica normal. Hardy era un profesor de matemáticas de Cambridge y por otro lado, Ramanujan era un indio que vivía cerca de Bombay. En 1913 Ramanujan, escribió una carta a Hardy exponiéndole una serie de resultados matemáticos. Hardy al verla vió que buena parte de los resultados habían sido obtenidos por matemáticos anteriores y casi la mitad de ellos, eran resultados nuevos, pero Ramanujan, siendo autodidacta, no podía distinguir lo ya descubierto de lo nuevo. Hardy al ver con asombro el conocimiento de la "idiosincracia" de los números que posería Ramanujan, consiguió un puesto para él en Cambridge y éste llegó a Inglaterra en 1914 volviendo a la India en 1920, poco antes de su muerte. Hardy relata que una vez lo visitó a su casa en Putney en un taxi cuyo número era **1729**, Ramanujan al verlo le dijo: "es el menor de los números que puede escribirse como la suma de los cubos de dos modos distintos":

$$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^{+}9^3$$

Hardy y Ramanujan obtuvieron una fórmula asintónica para $p(n)$ de asombrosa precisión. Así para $p(60)$ sólo difería en 1ó 2 dígitos del resultado. En lo que respecta a las particiones Ramanujan obtuvo congruencias llamadas hoy "Congruencias de Ramanujan".

æCongruencia: Cuando dos números enteros a y b tienen el mismo resto al dividirlos por un número natural m, llamado $módulo$.

Primera congruencia de Ramanujan

$p(n)$

$p(5m+4)\equiv 0(mod5)$

Módulo de 5 significa que el resultado es un múltiplo de 5

si m=1

$$5 \cdot 1 + 4 = 9$$

$p(9) = 30, 5 \cdot 6 = 30$

si m=2

$5 \cdot 2 + 4 = 14$

$p(14) = 135, 5 \cdot 27 = 135$

si m=3

$5 \cdot 3 + 4 = 19$

$p(19) = 490, 5 \cdot 98 = 490$

si m=4

$5 \cdot 4 + 4 = 24$

$p(24) = 1575, 5\cdot = 315 = 1575$

si m=5

$5 \cdot 5 + 4 = 29$

$p(29) = 4565, 5 \cdot 913 = 4565$

Segunda congruencia de Ramanujan

$p(7m+5) \equiv 0(mod7)$

si m=1

$7{\cdot}1+5=12$

$p(12)=77 \rightarrow$7·11=77

si m=2

$7{\cdot}2+5=19$

$p(19)=490 \rightarrow$7·70=490

si m=3

$7{\cdot}3+5=26$

$p(26)=2436$

$2436=7\cdot 348$

Tercera congruencia de Ramanujan

$p(11m+6) \equiv 0(mod11)$

si m=1

$11{\cdot}1+6=17$

$p(17)=297$

$11\cdot 27=297$

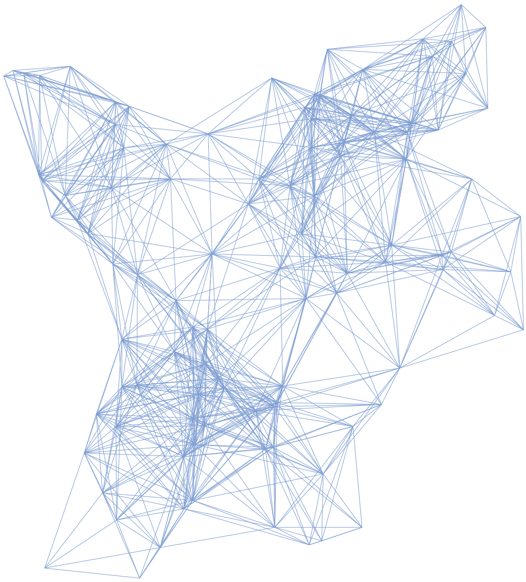
si m=2

$11\cdot 2+6=28$

$p(28)=3718$

$11\cdot 338=3718$

Es observando la tabla de p(n) que Ramanujan obtuvo las congruencias.



Algoritmo de las Partituras

División del espacio

II

Nota 3

Para trabajar en particiones Hardy y Ramanujan utilizaron una idea introducida por Euler: la función generadora.

Si $F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...}$

Cada uno de los términos puede escribirse como:

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$
- $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + ...$
- $1 \equiv 1$

Para verificar la ecuación:

$1 = \left(1 + x + x^2 + x^3...\right)(1 - x)$

$1 = 1 + x + x^2 + x^3... - x - x^2 - x^3...$

$1 \equiv 1$

Reemplazando en $F(x)$ se tiene que:

$$F(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3...\right)\left(1 + x^2 + x^4 + x^6...\right)$$
$$\left(1 + x^3 + x^6 + x^9...\right)\left(1 + x^4 + x^8 + x^{12}...\right)$$

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...$$
$$... + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 ... x^6 + x^7 + x^8 + x^9$$
$$... + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

Si se realizan las operaciones ahí indicadas, tenemos que:

$F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + ...$

Y tenemos que los coeficientes de ésta desarrollo son: $1, 1, 2, 3, 5, 7$...los que también corresponden a las siguientes particiones:

$p(0) = 1 \quad p(2) = 2 \quad p(4) = 5$
$p(1) = 1 \quad p(3) = 3 \quad p(5) = 7\ldots$

Entonces,

$F(x) = p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + p(3)x^3 + p(4)x^4 + ...$

$F(x) = \sum p(n)x^n$

Luego, $F(x)$es la función generadora de $p(n)$. Hardy y Ramanujan obtuvieron su fórmula trabajando con $F(x)$ que genera $p(n)$.

Nota 4

Eliminar, en las particiones aquellos términos con números repetidos.

1	2	3	4	5
	11	21	31	41
		111	22	32
			1111	221
				2111
				11111

Cuando tengamos $p(n)$ tendremos dos tipos, $p(impar)$y $p(par)$ según la cantidad de cifras. En el caso del 3, las particiones que no se repiten son el mismo 3 y 21. Y como 3 tiene una sola cifra corresponde a $p(impar)$ y como 21 tiene dos cifras sería $p(par)$.

Si eliminamos las particiones que tienen números repetidos, pasa que,

$1_{p(impar)}$	$2_{p(impar)}$	$3_{p(impar)}$	$4_{p(impar)}$	$5_{p(impar)}$
		$21_{p(par)}$	$31_{p(par)}$	$41_{p(par)}$
				$32_{p(par)}$

Así es posible demostrar algunos resultados de modo, por así decirlo, directo. Uno de los casos más precisos y delicados, es la prueba del matemático inglés, Franklin, sobre una identidad de Euler en 1881, "Comples Rendus 92,448-450". La identidad de Euler es:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \ldots$$

Luego, Franklin reescribe ésta identidad de modo tal que sea posible tratarle mediante a una combinatoria elemental. Y escribe la parte de la ecuación como:

∞

$1 + \sum(-1)^k \left[x^{\frac{1}{2}k(3k-1)} + x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}\right]$

$k = 1$

Nota 5

Kes un índice que varía de 1 a ∞en números enteros. Según el exponente sea par o impar el resultado será positivo ó negativo.

$.(-1)^2 = -1 * -1 = +1$

$.(-1)^3 = -1 * -1 * -1 = -1$

$.(-1)^4 = -1 * -1 * -1 * -1 = +1$

$.(-1)^{15} = -1$

$.(-1)^{232} = +1,$ etc

Luego, si $K = 1$ sw obtiene $-x - x^2$que es la primera parte del miembro derecho y si $K = 2$ se obtiene la continuación de la expresión $+x^5 + x^7$,etc.

Ahora,

$1 + \sum(-1)^k \left[x^{\frac{1}{2}k(3k-1)} + x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}\right] =$

$1 + \sum(-1)^k \left[x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}\right] = 1 + \sum C_n x^n =$

donde, $C_n = 0,$

a menos que, $n = \frac{1}{2}k(3k \pm 1)$

y entonces, $C_n = (-1)^k$

Luego,

$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \ldots = 1 + \sum C_n x^n = \sum \gamma(n) x^n$

Franklin desarrolla la parte izquierda y en ella no aparecen ni x^3,ni x^4, ni x^6,etc. Franklin interpreta este hecho del siguiente modo:

$$\gamma(n) = p(n) - p(n)$$

pares impares

Debe por lo tanto, operar con las particiones en las cuales no se repiten números.

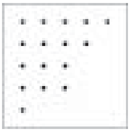
$$\begin{aligned} \gamma(1) &= -1 & \gamma(5) &= 2-1=1 \\ \gamma(2) &= -1 & \gamma(6) &= 2-2=0 \\ \gamma(3) &= 1-1=0 & \gamma(7) &= 3-2=1 \\ \gamma(4) &= 1-1=0 \end{aligned}$$

Paridades de n (a cada partición de n en partes iguales le corresponde un término en x^n).

Nota 6

Representación gráfica de las particiones:

Sea la siguiente partición:

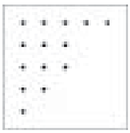


$16 = 5+4+3+3+1$leído horizontalmente

$16 = 5+4+4+2+1$leído verticalmente

Se obtienen particiones conjugadas:

5 es el número mayor y el número de partes es 5.



en horizontal

$6+3+3+2+1$

6 es el número mayor

6 es el número de pates de la conjugada vertical

en vertical

$5+4+3+1+1+1:$

5es el número mayor

5es el número de partes de la conjugada horizontal

Franklin comienza a estudiar gráficamente los cass posibles de particiones pares e impaes. Considera sólo aquellas particiones que tienen un orden descendente y en las cuales nunca se repite el mismo número de puntos en dos filas horizontales. Define la base del gráfico como la línea que une los puntos más bajos y la representa con la letra β.

Define la pendiente del grafico como la línea de máxima longitud que se inicia en el extremo NE y se continúa hacia el SO y la llama σ.

dibujo

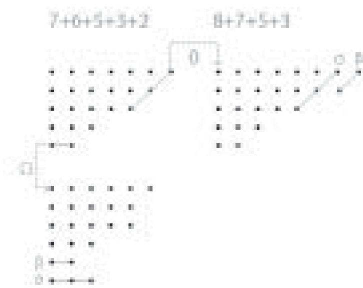
Se dan 3 casos:

- que β contenga menos puntos que σ ó $\beta \leq \sigma$
- que β contenga el mismo número de puntos que σ, $\beta = \sigma$
- que β tenga más puntos que σ, $\beta \geq \sigma$

Y se definen dos operaciones:

La operación 0 que consiste en trasladar la base y ponerla paralela a la pendiente en su parte extrema, y la operación ε que consiste en poner σ bajo β; esta operación no es posible si $\beta \leq \sigma$ porque aumenta el número de puntos hacia abajo (y se considera sólo un orden descendente).

Caso 1: $\beta \leq \sigma$



En la partición original se tiene 5 partes. En la partición obtenida luego de la operación 0 se tiene 4 partes. Hay un cambio en la paridad del número de partes. La operación 0 cambia, así, la paridad de la partición.

La operación ε no es posible si $\beta \leq \sigma$.

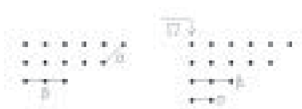
Caso 2: $\beta = \sigma$

La operación 0 es posible.

La operación ε no es posible porque repite el número de puntos en dos filas.

En este caso en que β y σ se encuentran, 0 no es posible y σ no es posible, porque se distorciona el gráfico. Luego, si $\beta = \sigma$ es posible la operación 0 siempre que β y σ no se encuentren. ε no es posible.

Caso 3: $\beta \geq \sigma$



ε es posible

0 no es posible

Cuando β y σ se encuentran no es posible ε. 0 no es nunca posible. Pueden establecerse correspondencias biunívocas entre el número de particiones pares y el número de particiones impares salvo en dos casos críticos.

Las particiones críticas son:

$5+4+3=12$

Si $K=3$ la partición se puede representar por

$k+(k+1)+(k+2)=\frac{1}{2}(3k^2-k)=12$

$6+5+4=15$

Si $K=3$

$(k+1)+(k+2)+(k+3)=\frac{1}{2}(3k^2+k)=15$

Entonces, cuando n es 12 ó 15, es decir,

$n=\frac{1}{2}(3k^2\pm k)$, se tiene que, $\gamma(n)=(-1)^k$.

Si n es distinto a 12 ó 15, $n\neq n'$, se tiene que $\gamma(n)\equiv c_n$

de modo que al reemplazar $\gamma(n)$ por c_n se obtiene la identidad de Euler. Cuando las operaciones 0 y Ω son posibles cambian la paridad de la partición considerada. De ser posibles siempre estas operaciones existiría una correspondencia 1a 1entre las particiones pares y las particiones impares. Es decir, el número de particiones pares sería igual al númeo de particiones impares y, por lo tanto, $\gamma(n)=p$ pares $-p$ impares, será igual a 0 siempre. Entonces los casos en los cuales no son posibles las operaciones 0 y Ω determinan particiones para las cuales $\gamma(n)$ es distinto de 0. Este valor de $\gamma(n)\neq 0$ es igual a c_n.

Prueba de la primera congruencia de Ramaujan.

La primera congruencia es:

$p(5m+4) \equiv 0(mod5)$

m=0 $p(4) = 5 = 5 * 1$

m=1 $p(9) = 30 = 5 * 6$

m=2 $p(14) = 135 = 5 * 27$

m=3 $p(19) = 490 = 5 * 98$

m=4 $p(24) = 1575 = 5 * 315$

$4, 9, 14, 24$ son números de la forma $(5m + 4)$ en que m es, sucesivamente, igual a $0, 1, 2, 3 \ldots$El número de particiones de un número de esta forma es un múltiplo de 5. Ramanujan prueba esta congruencia usando el resultado de Euler y una identidad de Jacoobi. Con ellas construye una expresión en la cual importa tanto el exponente como el coeficiente de x : quiere mostrar que cuando el exponente de x es un múltiplo de 5 el coeficiente también lo es.

ax^bes, por lo tanto múltiplo de 5

a : base o coeficiente

b : exponente ó índice

Ramanujan parte de la identidad de Euler y de la identidad de Jacobi que es el cubo de la identidad de Euler.

Los resultados que utliza son la identidad de Euler que probó Franklin:

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)... = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 =$

$= \sum(-1)^K x^{\frac{1}{2}k(3k+1)}$

y la identidad de Jacobi que es el cubo de la identidad de Euler:

$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^3 =$

$= \frac{1}{2}\sum(-1)^k(2k+1)x^{\frac{1}{2}k(k+1)}$

Identidad de Euler

$$\begin{aligned}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots &= \sum(-1)^k x^{\frac{1}{2}k(3k+1)} \\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7\end{aligned}$$

$$\sum = \sum + \sum$$

Nota 7

Con la primera parte de la sumatoria se obtienen términos alternados de la expresión y, con la segunda parte, se obtienen los restantes. Tenemos que si:

k=0, $(-1)^k x^{\frac{1}{2}k(3k+1)} = 1$

k=1, $(-1)^1 x^{\frac{1}{2}(3+1)} = -x^2$

k=2, $(-1)^2 x^{\frac{1}{2}*2(3*2+1)} = +x^7$

-k=1, $(-1)^{-1} x^{-\frac{1}{2}(-3+1)} = -\frac{1}{1}x^1 = -x$

-k=2, $(-1)^{-2} x^{-1(-6+1)} = \frac{1}{(-1)^2}x^5 = +x^5$

Identidad de Jacobi

$[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^3 = 1 - 3x + 5x^5 - 7x^6 + 9x^{10}\ldots$

.

Nota 8

Los exponentes de x son los números triangulares:$1, 3, 6, 10...$ los cuales se pueden representar como $\frac{1}{2}k(k+1)$ en que si $k = 1$, $\frac{1}{2}k(k+1)$

k=2, $= 3$

k=3, $= 6$

k=4, $= 10$

Los coeficientes de x son $1, 3, 5, 7, 9...$

La expresión de Jacobi puede escribirse de modo análogo a la identidad de Euler:

$[(1x)(1x^2)(1x^3)\ldots]^3 =$

$= \frac{1}{2}\sum(-1)^k(2k+1)x^{\frac{1}{2}k(k+1)}$

Nota 9

El $\frac{1}{2}$adelante de $\sum$ significa que, al realizar la sumatoria, como se van a obtener siempre dos resultados iguales, hay que dividir el total por 2. El coeficiente de x en ésta expresión, $(2k+1)$,es impar y el exponente es $\frac{1}{2}k(k+1)$.

$\sum = \sum + \sum$

k=0, $(-1)^k(2k+1)x^{\frac{1}{2}k(k+1)} = (-1)^0 * 1 * x^0 = +1$

-k=1, $(-1)^{-1}(-2+1)x^{\frac{1}{2}(-1+1)} = (-1)x^0 = +1$

$1+1=2$ pero como tenemos $\frac{1}{2}\sum$ este primer resultado es igual a 1.

Entonces Ramanujan construye la siguiente expresión:

$$x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^4 =$$

$$= x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots][(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^3$$

$$x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum\sum(-1)^{\mu\nu}(2\nu+1) * x^1 + \frac{1}{2}\mu(3\mu+1) + \frac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

Ramanujan está tratando de mostrar ciertas particiones de la forma,

$(5m+4) \equiv 0(mod5)$,

son múltiplos de 5. Si el índice,

$(1 + \frac{1}{2}\mu(3\mu+1) + \frac{1}{2}\nu(\nu+1)$

es el múltiplo de 5 también lo será el coeficiente $2v+1$. Desarrollo algebráico de la expresión construída por Ramanujan.

$1 + \frac{1}{2}\mu(3\mu+1) + \frac{1}{2}\nu(\nu+1) = A = 5A'$

significa que, por definición, es múltiplo de 5

$2A = 2 + \mu(3\mu + 1) + \nu(\nu + 1) = 10A'$

$2A = 3\mu^2 + \mu + \nu^2 + \nu + 2$

$40A = 8A = 12\mu^2 + 4\mu + 4\nu^2 + 4\nu + 8$

$8A = 2(\mu^2 + 2\mu + 1) + 4\nu^2 + 4\nu + 1 + 10\mu^2 + 5$

$A = \frac{2(\mu+1)^2+(2\nu+1)^2+10\mu^2+5}{8}$

y $A = 1 + \frac{1}{2}\mu(3\mu + 1) + \frac{1}{2}\nu(\nu + 1)$.

Luego,

$8[1 + \frac{1}{2}\mu(3\mu + 1) + \frac{1}{2}\nu(\nu + 1)] - 10\mu^2 * 5 =$

$= 2(\mu + 1)^2 + (2\nu + 1)^2$

Se tiene que, $2(\mu + 1)^2 + 2(\mu + 1)^2$,debe ser también múltiplo de 5.

Analicemos por parte cada uno de los sumandos, estudiando sus valores, para ver su relación de multiplicidad o no multiplicidad con el 5.

$2(\mu + 1)^2$

$\mu = 1$ $2 * 4 = 8$, $8 : 5 = 1$, residuo 3

$\mu = 2$ $2 * 9 = 18$, $18 : 5 = 3$, residuo 3

$\mu = 3$ $2 * 16 = 32$, $32 : 5 = 6$, residuo 2

$\mu = 4$ $2 * 25 = 50$, $50 : 5 = 10$, residuo 0

$2(\mu + 1)^2$

$\nu = 1$ 9, residuo 4

$\nu = 2$ 25, residuo 0

$\nu = 3$ 49, residuo 4

$\nu = 4$ 81, residuo 1

Los residuos de la factorización por 5 en el caso de $2(\mu+1)^2$son siempre $0, 2$ ó 3 y en el caso de $2(\mu+1)^2$son siempre $0, 1$ ó 4.

Entonces,

$2(\mu+1)^2 \equiv 0, 2, 3, (mod 5)$

y

$(2\mu+1)^2 \equiv 0, 1, 4, (mod 5)$

Estos valores no interesan si son tomados independiente. Sólo interesan sumados y, por lo tanto, hay que ver si esa suma de los sumandos es múltiplo de 5.

$0, 2, 3$

$0, 1, 4$

Existe sólo una posibilidad para que la suma de resiudos sea 0 y es que ambos sean 0. Luego, cada uno de los sumandos es, independientemente, múltiplo de 5.

$(2\mu+1)$ es múltiplo de 5, si el exponente de x es múltiplo de 5.

Por lo tanto, el coeficiente de x^{5m+5}en la expresión,

$$x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^4,$$

es múltiplo de 5.

Nota 10

Sea,

$\frac{1}{1-x^5}$,

y,

$\frac{1}{(1-x)^5}$

$\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \ldots coef \equiv 1(mod 5)$

Verificación de esta igualdad:

$1 : 1 - x^5 + x^{10} \dots$

$-(1 - x^5)$

$\frac{-1+x^5}{-x^5}$

$\frac{-x^5+x^{10}}{+x^{10}}$

$\frac{-x^{10}+x^{15}}{x^{15}}$

La primera serie infinita de este tipo, fue construída de esta manera por Mercator:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$

De otra parte

$\frac{1}{(1-x)^5} = 1 + 5x + 15x^2 + 35x^3 + 70x^4 + 126x^5 + \dots$

Los coeficientes de una expresión de este tipo aparecen en el triángulo de Pascal:

Considérese en esta expresión $126x^5$para ver la relación de multiplicidad del coeficiente con 5.

$126 : 5 = 25$,residuo 1.

Por lo tanto,

$\frac{1}{(1-x)^5} \equiv coef 1 (mod 5)$

En cuanto a la modularidad de los coeficientes, ambas expresiones, son idénticas.

$\frac{1}{1-x^5}$ y $\frac{1}{(1-x)^5}$

Ramanujan plantea

$\frac{1}{(1-x)^5} \equiv \frac{1}{1-x^5}(mod5)$

$\frac{1}{(1-x)^5} \equiv 1(mod5)$

Y construye una expresión que también tenga valor $1(mod5)$:

$\frac{(1-x^5)(1-x^{10})...}{[(1-x)(1-x^2)...]^5} \equiv 1(mod5)$

Esta expresión la multiplica por la expresión de la cual partió:

$\frac{(1-x^5)(1-x^{10})...}{[(1-x)(1-x^2)...]^5} * x[(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots]^4 =$

$= x\frac{(1-x^5)(1-x^{10})...}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

Si $(1-x^5)(1-x^{10})\ldots$ es múltiplo de 5 también debe serlo,

$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...}$

$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = F(x)$

$= x[1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+\ldots]$

$= x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+7x^6+11x^7+15x^8+22x^9+30x^{10}+\ldots$

En ésta expresión Ramanujan demostró que los coeficientes de x^{5m+5} son múltiplos de 5. Estudiése los coeficientes de los términos de esta forma ($5x^5$y $30x^{10}$,etc) que son 5 y 30.

$p(m+4)$ 37

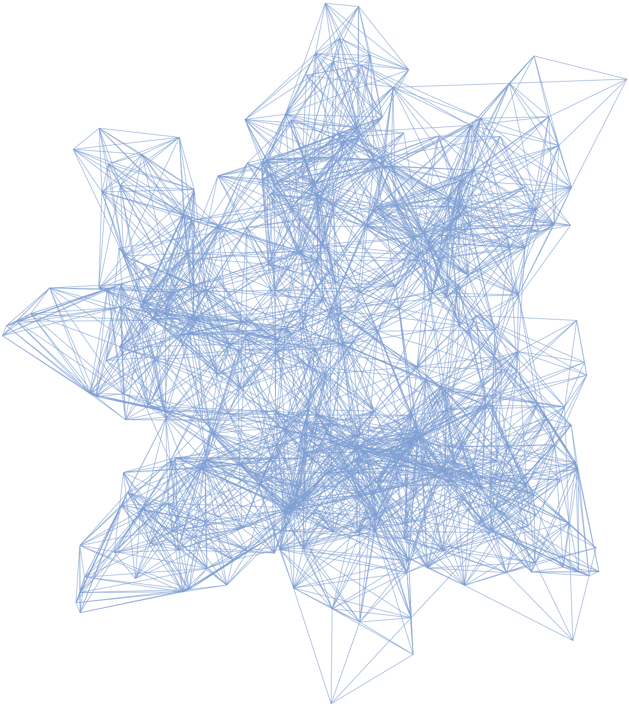
- $p(4) = 5$
- $p(9) = 30$
- $p(14) = 135$

Entonces, $p(5m+4) \equiv 0(mod5)$

La prueba es una combinación de desarrollos en serie.

Nota 11

La prueba de Franklin y la pueba de Ramanujan. Entre ambas pruebas no existe identidad estructural. La prueba de Franklin combina un método gráfico con una identidad algebraica. La prueba de Ramanujan se desarrolla en un plano algebraico. Puede decirse que la virtud de la prueba de Franklin reside en el cambio e intercambio de planos, de puntos de vista. Sin embargo, no existe "a priori" un método que genere un tal cambio de perspectiva. La prueba de Franklin basada en tres casos y dos operaciones apunta a cierta simplicidad. La pueba de Ramanujan, por el contraio, tiene un aspecto más artificial en el sentido artificioso: a partir del resultado se arma un andamiaje formal que da cuenta de ese resultado. La prueba misma tiene algo de prestidigitación. Toma las expresiones de Euler y Jacobi, sacadas como de un sombrero, y con ellas construye la demostración. La prueba de Ramanujan tiene una complejidad -podría decirse- vegetal. Parece una proliferación de identidades arbitrarias. Cuando surge el resultado, la atención de quien sigue la pueba casi ha sido distraída de su objeto. Así, en un mismo dominio matemático, la teoría de las particiones, caben estilos matemáticos divsersos de análoga eficacia.

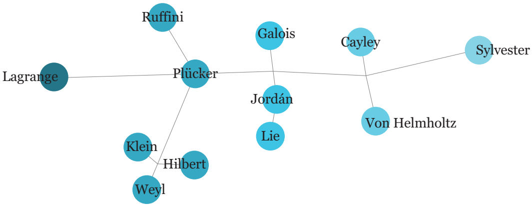


Algoritmo de Weyl

Movimiento en el espacio

III

El tema de esta sesión proviene de un trabajo de Herman Weyl (1952), quien fué discípulo de Hilbert. Tratará de la introducción de la concepción numérica en el cálculo del tiempo [1] y en la construccion del espacio [2]. En [1] Weyl utiliza el concepto de grupo. Un grupo, tal como se le considera hoy, fue por primera vez definido por Galois -alrededor de 1830- cuyos trabajos fueron expuestos y desarrollados por Camille Jordan. Félix Klein, maestro de Hilbert, y su amigo Sphus Lie estudiaron en 1870 en Paris con Jordán.



Dado un conjunto y una ley asociativa, tenemos entre los elementos del conjunto que:

- $a * b = c!/cG$, el conjunto es cerrado
- $(a * b) * c = a * (b * c)$, la operacion es asociativa
- $a * e = e * a = a$, exíste un elemento idéntico e
- $a^{-1} * a = a * a^{-1=e}$, existe un elemento inverso a^{-1}, el conjunto se denomina **grupo**.

Introducción del número en la medición del tiempo

Weyl supone, primeramente, un tiempo homogéneo sin momentos diferenciados entre sí. Es decir, antes de introducir el número, iguala todos los momentos (cabe hacer notar la violencia de esta suposicion) y representa este tiempo homogéneo mediante una línea. En esta línea determinará, con toda la exactitud que se quiera, un punto específico que es el ahora.

Este es un punto singular, entre todos los momentos diferenciados. Se trata de un punto inicial a partir del cual se determinan los puntos anteriores y posteriores.

Cuando se singulariza un punto para determinar otros, se estabece un sistema de referencias. Pero, para medir el tiempo, no basta tener un punto elegido. Se requiere de una unidad de medida.

Se determina que la duración que va de A a E es la unidad de medida. Esta unidad de medida es transportable ó desplazable a lo largo de la línea permaneciendo constante. Esto, supone, nuevamente, la homogeneidad mencionada antes.

El siguiente paso es el supuesto de que cualquier magnitud temporal puede ser escrita:

$AP = t * AE$

Medir es asignar valores al parámetro t:

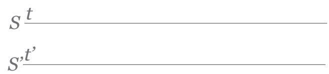
Luego, cualquier AP es un multiplo de ésta unidad de medida AE. Se puede así, medir cualquier otro segmento temporal usando la unidad de medida. Por ejemplo, si:

$AP = 2AE$

$AE = EP$

Weyl determina un punto inicial$A$ y un sistema de referencia para medir el tiempo. Pero podria haber otro sistema de referencia. Hay que vincular los posibles sistemas de referencia. Para relacionar t, tiempo medido de un sistema de referencia S, con $t‘$, medido en un sistema de referencia $S‘$, se define:

$t = at‘ + b/a0$, a y b son valores del sistema de referencia.



Supongamos que el tiempo medido en S y el tiempo medido en $S‘$ sean iguales. Luego,

Esta transormacion en que $a = 1$ y $b = 0$ entrega identidad temporal. Para la construcción de la inversa de t se tiene que:

$t = at' + bat' = t - b$

Reemplazando a t‘en la transformación.

Operando: $t = t - b + bt = t$

Mediante esta transformación se volvio al tiempo t, operación que equivale a tener el inverso número. Se define un momento t y otro t‘:

$t = at' + b(1)t' = a't'' + b'(2)$

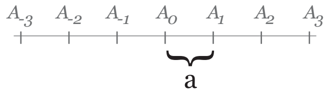
Reemplazando (2) en (1):

$t = a(a't'' + b') + bt = aa't'' + ab' + b$

Si$aa' = (a * 1)$ y $ab' + b = (b * 1)$

Esta operación es tal que el resultado puede escribirse como un elemento de la transformación. Esto es, si se opera con dos momentos de tiempo se obtiene otro momento perteneciente al sistema. Luego, la operación es cerrada. Por lo tanto, la transformacin constituye un grupo. Se define, así, un grupo en el tiempo. Dice Weyl: *"Un rasgo escencial de la medida es la diferencia entre la determinación de un objeto mediante una especificación individual y la determinación del mismo objeto de modo conceptual"*. El llama modo conceptual a esta manera de construcción de la medición.

Construcción de la línea

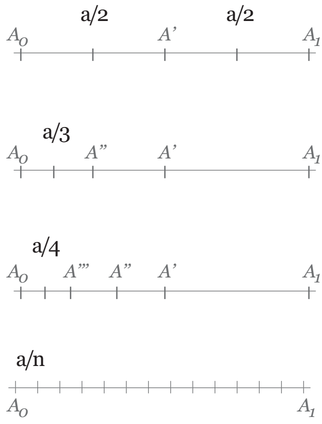


Se determina un punto inicial A_0.

Sea $'a'$la traslación de A_0a A_1.

A_1, A_2, A_3,...,son puntos igualmente espaciados situados a la derecha de A_0.

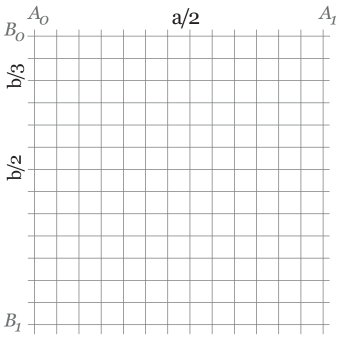
Considérese el intervalo A_0A_1.

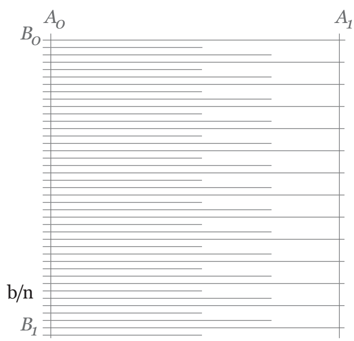


Puede determinarse una traslación mediante esta división del segmento a se define una traslacion a/n. A medida que n aumenta, también lo hace el número de puntos situados entre a dividido en 1 y a dividido en 2. Se dice que este segmento es cada vez más denso. Si entre A y B existe una continuidad de puntos sin lagunas. Se obtiene así, la línea.

Construcción del plano

Esta construcción presupone la anterior: *la línea se supone construída.*





Para construir el plano se define un desplazamiento b de la línea sobre otra recta perpendicular a ella. De modo similar al caso anterior, se define un desplazamiento en b dividido en n. Así, entre B dividido en 0 y B dividido en 1 se va construyendo una densidad de líneas tal que, cuando tiende a ∞, se obtiene el plano.

Nota lateral acerca de la homogeneidad y la singularidad. La numeración.

En la numeracion egipcia cada especie de numeros - unidades, decenas, centenas - tiene asignada un simbolo distinto. Los distintos numeros se singularizan en su representacion. Se distinguen entre sí. En nuestra numeracion, para éstas cinco figuras, hay solo dos simbolos: el 1 y el 0. Basta la posición de los simbolos para que ella sea significativa del numero que quiere representarse. Este sistema se llama de posición por que la posicion determina el numero. Weyl llama a çesto, medio conceptual. La notacion egipcia no es homogenea. En cambio, la occidental si lo es.

Si se escribe 1523 se trata de una numeracion cuya base es homogenea. La manera de escribir el numero depende de la base que se elija. Con base 10 los factores serán de1 a 9:

$$1523 = 1 * 10^3 + 5 * 10^2 + 2 * 10 + 3$$

$$= 1000 + 500 + 20 + 3$$

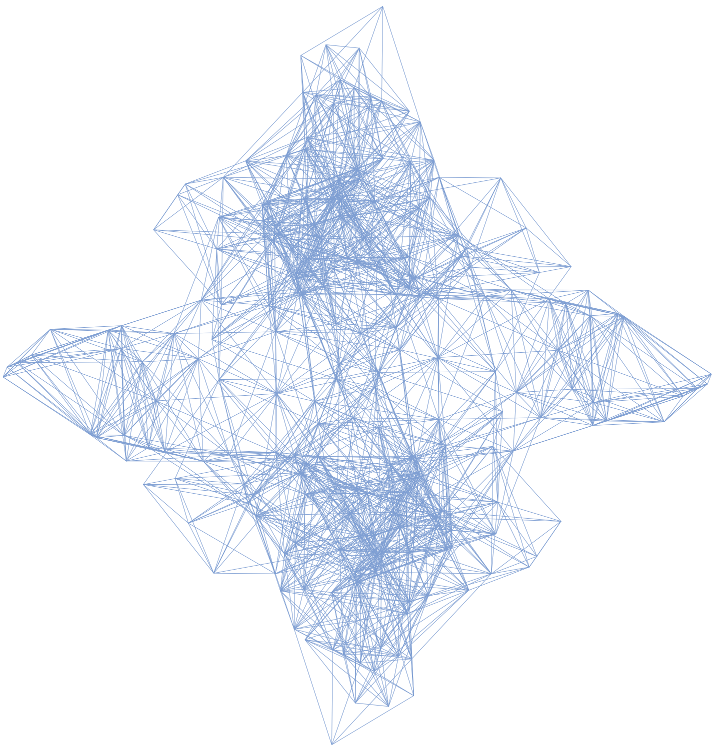
Con base 2 los factores son 1:

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$

$$15 = 2^3 + 2^3 + 2^1 + 1$$

$$15 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2 + 1$$

Cualquier número, por grande que sea, puede representarse en bases. De cierta manera, la singularidad de la representación simbólica se desplaza del número a su posición. La cual adquiere su sentido sólo en términos de una base elegida previamente. Esta elección de la base podría asimilarse a la elección de un orígen respecto del cual es posible medir.



Algoritmo de Boole

Combinación en el espacio

IV

En 1854 el matemático inglés, George Boole (1815-1864) publicó la obra *"An Investigation of laws of tought on wich are founded the mathematical theories of logic and probabilities"*, en el cual introducen lógica la operatoria aritmética usual generando, así , una suerte de algoritmo.

Nota 1

Un algoritmo es un procedimiento mecánico para calcular. De cierto modo, su fuerza es directamente proporcional a su simplicidad. Suele ocurrir que, mientras más simple parece un algoritmo, es mayor el alcance de su base conceptual.

Nota 2

La palabra algoritmo se emplea a veces, en éstas notas, en un sentido algo trastocado: no siempre alude a un procedimiento de cálculo. Sin embargo, la idea central, reducción del número de operaciones mentales en virtud de un punto de vistia distinto sigue siendo válida.

Al final se verá a qué se le llama **Leyes del Pensamiento**. Vamos a mostrar el algoritmo de Boole y lo que éste genera en lógica, dejando de lado las probabilidades. No nos preocuparemos de lo que antecede Boole ni de lo que le sigue, sino que lo consideraremos como si fuése único y sólo. Boole introduce constantes lógicas, clases y dos operaciones.

Modo de Boole

Boole representa a las constantes lógicas mediante 0 y 1. Y a las clases mediante x,y y z; y a las operaciones, en la notación usual mediante "+" y "*".

Para fundar su operatoria Boole dice:

"No es de la escencia de la matemática ocuparse de las ideas de número y cantidad. La matemática trata de las operaciones consideradas en sí mismas independientemente de las diversas materias a las cuales pueden ser aplicadas."

Principios Lógicos en la Multiplicación

El sentido lógico de las constantes, de las clases y de las operaciones aparece en la operación misma.

$x * 0 = 0$

$x * 1 = x$

En lógica, la multiplicación determina los carácteres comunes a dos clases. Así, $x * 0$ concierne a los carácteres comunes a la clase x y a la clase 0 -que es la clase nula-. El resultado es el conjunto vacío pues la clase nula no tiene carácteres por definición y, por lo tanto, no comparte con nada. 1 es el valor lógico de la clase universal.

Principio de Dualidad: Se refiere a factores comunes entre dos conjuntos distintos, de una misma clase.

Demostración

Supóngase que 1 se refiere a la clase de los alumnos y que x representa la clase de los alumnos sentados en la sala. Entonces, $x * 1 = x$, puesto que los elementos comunes a ambas clases son los que están aquí sentados.

Por ello, $x * x = x^2 = x$.

Los elementos comunes a una clase y otra, que es ella misma, perteneces a esa misma clase. Este resultado se denomina *Principio de Dualidad.*

Principio de Identidad: No hay elementos comunes entre dos sujetos distintos. De lo contrario el sujeto no podría existir.

Demostración

Sea x la clase de los pájaros y 1 el universo total.

$1 - x$representa al universo total sin los pájaros

Es decir, $1 - x$ representa a los no pájaros. Luego $1 - x$ es el complemento de una clase x cualquiera.

Entonces, $x * (1 - x) = 0$

No hay elementos comunes entre los pájaros y los no pájaros. Si los hubiera no podría decirse que los pájaros son pájaros. Esta expresión constituye, entonces el *Principio de Identidad*.

En el Algoritmo de Boole, el Principio de Identidad no es una operación primitiva. Esto es, se basa en resultados anteriores:

$$x * (1 - x) = (x * 1) - x^2 = x - x^2 = x - x = 0$$

Lógica en la Suma de Boole

La Suma de Boole es disyuntiva, es decir considera clases que no tienen elementos comunes.

$$x + x = x$$

Por ejemplo gaviotas y alumnos. Al sumar se obtiene a la clase de las gaviotas y aparte, la de los alumnos. Si tenemos una clase cualquiera x y se le suma la misma clase x, podría ser si tenemos la clase de los alumnos de primer año más la clase de los alumnos de primer año, el resultado de ésto entrega la misma clase de los alumnos de primer año. Y aparece aquí una diferencia con el álgebra usual en la cual $x + x = 2x$. Basándose en ésta operaciones es que Boole construye las funciones lógicas.

Funciones Lógicas

Una función lógica se define a partir de una clase x y se escribe $f(x)$, y se lee como una *función de la clase de x*.

Para una sola clase se determina el siguiente modelo de función:

$f(x) = A_1 x + A_2(1 - x)$

Puede verse que la función de Boole combina la clase con su complementaria. A_1 y A_2 son constantes. Para determinarlas se desarrolla la expresión $f(x)$reemplazando$x$ por 1y por 0.

Entonces,

$$f(1) = A_1 + A_2(1 - 1)$$

pero, $A1 = A_1$ y, $A_2 0 = 0$

$f(1) = A_1$

Luego,

$f(0) = A_1 0 + A_2(1 - 0)$

$A_1 0 = 1$

$A_2 1 = A_2$

$f(0) = A_2$

Entonces en

$$f(x) = A_1 + A_2(1 - x)$$

que se puede reemplazar como

$A_1 = f(1)$

$A_2 = f(0)$

y se obtiene

$f(x) = f(1) + f(0)(1 - x)$

Para dos clases se determina el siguiente modelo de función:

$f(xy) = A_1xy + A_2(1-x)y + A_3x(1-y) + A_4(1-x)(1-y)$

Cálculo de las constantes $A_{1,}A_2, A_3, A_4$.

Cuando x=0,y=1

$f(11) = A_1 11 + A_2(1-1)1 + A_3x(1-1) + A_4(1-1)(1-1)$

$f(11) = A_1 + 0 + 0 + 0$

$\therefore f(11) = A_1$

Cuando x=0, y=1

$f(01) = A_1 11 + A_2(1-1)1 + A_3 1(1-1) + A_4(1-1)(1-1)$

$f(01) = 0 + A_2 + 0 + 0$

$\therefore f(01 = A_2$

Cuando x=1, y=0

$f(10) = A_1 10 + A_2(1-1)0 + A_3 1(1-0) + A_4(1-1)(1-0)$

$f(01) = 0 + 0 + A_3 + 0$

$\therefore f(10) = A_3$

Cuando x=0, y=0

$f(00) = A_1 00 + A_2(1-0)0 + A_3 0(1-0) + A_4(1-0)(1-0)$

$f(00) = 0 + 0 + 0 + A_4$

$\therefore f(00) = A_4$

Entonces en

$$f(xy) = A_1xy + A_2(1-x)y + A_3x(1-y) + A_4(1-x)(1-y)$$

$$A_1 = f(11)$$

$$A_2 = f(01)$$

$$A_3 = f(10)$$

$$A_4 = f(00)$$

$$f(xy) = f(11)xy + f(01)(1-x)y + f(10)x(1-y) + f(00)(1-x)(1-y)$$

Se constata que el número de términos en el desarrollo de una función lógica es igual a 2 elevado al número de clases.

Para 1 clase x el número de términos es $2^1 = 2$

Para 2 clase x, y el número de términos es $2^2 = 4$

Para 3 clase x, y, z el número de términos es $2^3 = 8$

Para n clase $x, y, z \ldots n$, el número de términos es 2^n

Se le dará al algoritmo de Boole una interpretación lógica. Considérese la siguiente proposición,*"El hombre es un animal razonable"* donde se distinguen tres clases:

la clase de hombres, designada por x

la clase de animales, designada por y

la clase razonable, designada por z

Y donde el verbo "es"se representa mediante el signo " $=$ ", entonces *"El hombre es un animal razonable"* se escribe entonces, $x = yz$. En cuanto a la función lógica$f(xy)$, se trata de un desarrollo de 3 variables xyz. Ahora, x=yz puede escribirse$x - yz = 0$, lo cual se lee como: La clase de hombres (x) que no son animales razonables $(-yz)$ es igual a la clase vacía(0).

Nota 3

Puede verse que el signo “-” equivale a la negación.

Entonces,

$f(xyz) = f(111)xyz + f(101)x(1-y)z + f(110)xy(1-y) + f(011)(1-x)yz + f(001)(1-x)(1-y)z + f(010)(1-x)y(1-z) + f(100)x(1-y)(1-z) + f(000)(1-x)(1-z)$

Se sabe que

$f(xyz) = x - yz = 0$

Al determinar los valores de los coeficientes se verá que algunos serán iguales a 0 y otros serán distintos de 0. Dado que la función lógica es igual a 0 los primeros tendrán existencia lógica, no asi los segundos.

$f(xyz) = x - yz$

$f(111) = 01 - (11) = 1 - 1 = 0$

$f(101) = 01 - (01) = 1 - 0 = 1$

$f(110) = 01 - (10) = 1 - 0 = 1$

$f(011) = 00 - (11) = 0 - 1 = 1$

$f(001) = 00 - (01) = 0 - 0 = 0$

$f(010) = 01 - (10) = 0 - 0 = 1$

$f(100) = 01 - (00) = 1 - 0 = 1$

$f(000) = 00 - (00) = 0 - 0 = 0$

Términos distintos de 0:

$f(101)x(1-y)z$

$f(110)xy(1-y)$

$f(011)(1-x)z$

$f(100)(1-x)(1-y)(1-z)$

Términos iguales a 0:

$f(111)xyz$

$f(001)(1-x)(1-y)z$

$f(001)(1-x)y(1-z)$

$f(000)(1-x)(1-y)(1-z)$

Los contribuyentes sin existencia lógica son:

- Hombres(x), No animales$(1-y)$,Razonables (z)
- Hombres(x), Animales(y), No razonables $(1-z)$
- No hombres$(1-x)$,Animales(y),Razonables (z)
- Hombres(x), No animales$(1-y)$, No razonables (z)

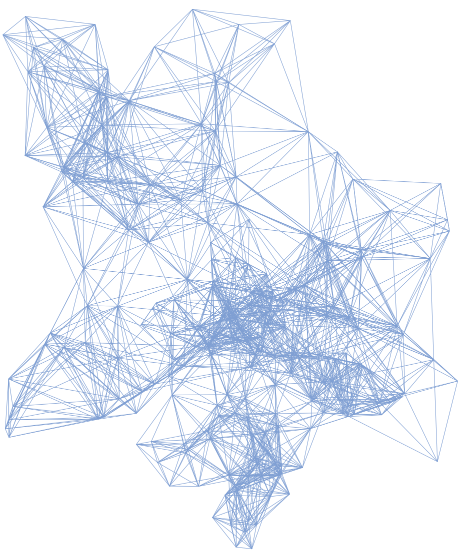
Los constituyentes con existencia lógica son:

- Hombre(x), Animal (y), Razonable (z)
- No hombre$(1-x)$, No animal$(1-y)$, Razonable (z)
- No hombre$(1-x)$, Animal(y), No razonable $(1-z)$
- No hombre$(1-x)$, No animal$(1-y)$, No razonable $(-z)$

La estructura que definió boole consta de constantes lógicas, de dos operaciones y de la existencia de clases. Ella es independiente de su interpretación y se desarrolla siguiendo el cálculo aritmético usual. Las Leyes del Pensamiento aludidas en el título de la obra de Boole son, entonces, las leyes de combinación de los signos cuyo sentido es independiente de su interpretación. Boole construyó la lógica utilizando un número mínimo de elementos. Esta reducción de la lógica efectuada mediante una transcripción de la aritmética por una suerte de operación simétrica tuvo influencia en la matemática: Peano y su escuela iniciaron el trabajo de reducción de la matemática continuado por Russel y Whitehead. Peano se dió cuenta de ello diciendo:

"La lógica matemática representa, con el menor número de convicciones, todas las proposiciones matemáticas aún aquellas muy complicadas cuya traducción al lenguaje ordinario seria engorrosa. Pero ella no se reduce simplemente a una escritura simbólica abreviada, a una especie de taquigrafía. Permite estudiar las leyes de estos signos y las transformaciones de las proposiciones."

Ahora podemos indicar que las leyes del pensamiento, que nombramos al comienzo, son las leyes de combinación de los signos.



Algoritmo de Newton

Clasificación del espacio

V

Esta sesión se centrará en una carta escrita por Newton el 24 de octubre de 1676 a Oldenburg, secretario de la Royal Society. La ocasión de ella es otra carta anterior de Leibniz dirigida, también, a Oldenburg en la cual prregunta acerca de los trabajos de Newton en series. La carta misma se puede dividir en dos partes dándosele el énfasis principal a la primera parte y con un esbozo acerca del total de la carta.

El *quid* de la sesión está en el &C del título. La carta de Newton permite ver cómo un matemático "hace" la matemática que hace (se dice "hacer" porque tiene algo de artesanal en el sentido de que, posiblemente, por ser una carta Newton muestra, sin que él se dé cuenta, una cierta intimidad del hacer matemático).

Disgresión acerca de la inducción matemática. La inducción matemática, como tal, puede sintetizarse de la siguiente manera: si una propiedad es verdadera para el número 1 y se establece que es verdadera $n+1$, siempre que lo sea para n, será verdadera para todos los números enteros. Este principio matemático o inducción matemática fue establecido por primera vez por un matemático italiano que se llamaba Francesco Maurólico (Venecia, 1575). La inducción matemática difiere de la inducción en el lenguaje visual ya que ésta consiste en el paso de lo particular a lo general. Luis I, Luis II, hasta Luis XVI, todos han sido reyes de Francia. A partir de ello se deduce que Luis XVII también lo fué. Pero ocurre que Luis XVII no fué rey de Francia. Se ha analizado, así, una serie de casos particulars y se ha resumido este análisis para dar una ley general: que todo Luis es ey de Francia. Pero ese paso de lo particular a lo general no tiene ninguna certeza.

En la inducción matemática el paso de 1 a n y, de ahí, a $n+1$ y a todos los números enteros es adherirse, ceñirse a la manera como los propios números se generan. El pensamiento por inducción matemática es, entonces, ceñirse a la ley constitutiva de los números enteros. La inducción matemática no es un paso de lo particular a lo general sino que es una deducción progresiva. Esta diferencia, que se establece entre la inducción matemática y la inducción no matemática utilizada en las ciencias, podrá verse claramente en la carta de Newton que nos ocupa.

Nota 1

Para analizar la carta de Newton es necesario tener algunos conceptos: Si se tiene una función x^ny se quiere obtener su integral la fórmula es la siguiente:

$\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + cte$

Si se tiene un sistema de coordenadas x e y en el cual y es una función de x calcular la integral ydx equivale a calcular un *área*:

área= $\int ydx$

La carta de Newton

"Hacia el comienzo de mi estudio matemático me topé con las obras de nuestro muy celebrado Wallis (la obra específica a la cual Newton hace referencia es 'Arithmetica Infinitorium', 1655) y sus consideraciones sobre las series mediante cuya intercalación mostró él mismo los valores del área de un círculo, de una hipérbole y de la serie de curvas que tienen una base común o eje x y cuyas coordenadas son de la forma:

$(1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{2}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{4}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$

$(1 - x^2)^{\frac{6}{2}}$

...etc

Y su interés se centra en dichas áeas intermedias. Denótese estas áreas por

$y =$

$A_1 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$

$A_2 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$A_3 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{2}{2}}$

$A_4 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$A_5 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{4}{2}}$

$A_6 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$

$A_7 \ldots\ldots (1 - x^2)^{\frac{6}{2}}$,

que son las ordenadas que corresponden a y. Se vio que un área podía calcularse por

$$A = \int y dx$$

$x, y = 1$ $\quad A_1 = (1 - x)^{\frac{0}{2}} dx =$
$1dx = x$

$x, y = (1 - x^2)$ $\quad A_3 = (1 - x)^{\frac{2}{2}} dx = (1 -$
$x^2)dx =$

$= dx - x^2 dx =$

$x - \frac{x^3}{3}$

$x, y = (1 - x^2)^2$ $\quad A_5 = (1 - x^2)^2 dx =$
$(1 - 2x^2 + x^4)dx =$

$= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$

Nota 2

Cualquier número elevado a 0 es igual a 1. La integral de dx es x.

Un historiador de la matemática dijo que la primera empresa de la matemática inglesa fué leer entre líneas. He aquí los resultados de Wallis:

$$A_1 = x$$

$$A_3 = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$A_5 = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$A_7 = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$A_9 = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

...etc.

Siguiendo con la carta de Newton:

"La primera de las cuales es $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ que corresponde a un círculo".

$x^2 + y^2 = 1$

Ecuación de un círculo radio 1:

$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

Newton analiza, entonces, los resultados de Wallis: *"Me dí cuenta que el primer término de cada una es x y que el segundo era* $\frac{0}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3, etc.$

El segundo término está en progresión aritmética: $0, 1, 2, 3 \ldots$ *Entonces, los dos primeros términos de las series por intercalar deberían ser,*

$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$

$x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$

$x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$*...etc.*

Los denominadores del segundo término son $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ *que son los exponentes de* $(1 - x^2)^n$*".*

De ahí, que, cuando Newton calcula $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,deduce que sigue la misma ley. Luego,

$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ corresponde a $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$

Analiza los dos primeros términos y con ellos obtiene toda la serie. Los dos primeros términos de la serie por intercalar deben ser:

$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} = A_2$

$x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3} = A_4$

"Para intercalar el resto consideré que los denominadores estaban en progresión aritmética: $1, 3, 5, 7 \ldots$y entonces sólo los coeficientes numéricos eran los números de las potencias de 11".

Es decir,

$11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, \&c.$

$1 \quad 11 \quad 121 \quad 1331 \quad 14641$

$1x$

$1x - \frac{1}{3}x^3$

$1x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$

$1x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$

Obviamente ocupa este &c porque calcula hasta 11^4y resulta que

$11^5 = \frac{\substack{14641 \\ 14641}}{161051}$,

que no es lo que corresponde a la serie sino, 15101051. El &c de Newton es erróneo peo, debido a la interrupción del cálculo 11^4, la ley deducida po Newton es justa. Este &c corresponde al caso de haber analizado los Luises. Se tata del mismo proceso de pensamiento. Analizando los resultados Newton dice lo siguiente:

"Pensé un método para deriva los restantes elementos de la serie teniendo los dos primeros números. Encontré que cuando el segundo número $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})m$ era dado el resto se obtiene mediante la multiplicación continua de los términos de la siguiente serie:

$\frac{m-0}{1} * \frac{m-1}{2} * \frac{m-2}{3} * \frac{m-3}{4} \ldots \&c$

Supóngase que el segundo término sea 4, es decir, $m = 4$.

Luego, el tercero será: $4x\frac{m-1}{2} = 4x\frac{3}{2} = 6$

El cuarto término: $6x\frac{m-2}{3} = 6x\frac{2}{3} = 4$

El quinto término: $4x\frac{m-3}{4} = 4x\frac{1}{4} = 1$

El sexto término: $1x\frac{m-4}{5} = 1x0 = 0$

La serie termina ahí.

Pero, supóngase que se desea la primera de las áreas intercaladas:

$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \to x\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, que tiene los dos primeros términos.

Luego, $m = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto, el tercero es: $\frac{1}{2} * \frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8}$

el cuarto es: $-\frac{1}{8} * \frac{\frac{1}{2}-2}{3} = +\frac{1}{16}$

el quinto es: $+\frac{1}{16} * \frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128}$

y así, al infinito.

Cuando el exponente es fraccionario la serie no termina. “De esto aprendí que el área del segmento de un círculo es:

$A = x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \ldots$”

Nota 3

La segunda parte de la carta consiste en una verificación de todo lo afirmado.

$A = \int ydx$

Si se calcula la derivadadel área, $dA = ydx$, sin integrar.

Entonces,

$\frac{dA}{dx} = y,$

Por ejemplo, en el caso que se había calculado del círculo:

$A = \int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$

$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \ldots$

Entonces ahora $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ correspondería al y. Si se deriva A con respecto a x,

$\frac{dA}{dx} = y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene y que, en el caso, es $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Entonces,

$\frac{dA}{dx} = y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} =$

$= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{3} 3x^2 - \frac{\frac{1}{8}}{5} 5x^4 - \frac{\frac{1}{16}}{7} 7x^6 - \frac{\frac{5}{128}}{9} 9x^8 \ldots$

$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128}$

Este sería el desarrollo de la serie de $(1 - x^{2)^{\frac{1}{2}}}$.Una vez obtenido este resultado, Newton lo multiplicó po sí mismo para verificar el desarrollo en serie.

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} * (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2$$

Es decir,

$(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \ldots) * (1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \ldots) = 1 - x^2$

$(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^8}{16} \ldots - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{16} + \frac{x^{10}}{32} \ldots - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + \frac{x^8}{64} + \frac{x^{12}}{128} \ldots - \frac{x^8}{10} + \frac{x^{10}}{32} + \frac{x^{12}}{128} \ldots$

$$= 1 - x^2$$

"Zur Geometrie der Zahlen" "La Geometría de los números" (1986) de Herman Minkowski (1864-1909)

En 1882 Minkowski, que tenía 18 años, ganó el premio que ofrecía la Academia Francesa a quien resolviera un problema matemático. En esa época eran usuales tales concursos abiertos a todos los miembros del mundo matemático. Minkowski fué compañero de estudios y amigo de Hilbert durante toda su vida. Es curioso que su nombre esté vinculado, en el uso diario, al espacio tetradimensional que él formuló u que luego Einstein utilizó en la teoría de la relatividad.

Esta exposición se basará en el trabajo de un matemático norteamericano, Harris Hancock, quien reconstruyó toda la obra de Minkowski a partir de sus manuscritos y sus libros *"Zur Geometrie der Zahlen"*, *"Aproximaciones Diofánticas"*, y su obra sobre el espacio-tiempo. Minkowski se caraterizó por ser muy escueto de suerte que dejó sin probar algunos de sus teoremas. El trabajo de Hanckok consiste, en buena parte, en desarrollar las pruebas de los teoremas de Minkowski en el espacio de tres dimensiones y en el plano. Así, los resultados enunciados por Minkowski son una generalización de los teoremas en dos y tres dimensiones. Minowski trabaja originalmente en n dimensiones. El es uno de los matemáticos que ha tenido, de manera más fuerte y poderosa, la posibilidad de ver en el espacio verdades aritméticas. Este ver no tiene un sentido exclusivamente naturalista porque todo lo que Minowski ve está en un espacio de n dimensiones. El decía que sus teoremas los obtenía mediante raumliche Anschauungen: intuición espacial. Percibir espacialmente verdades aritméticas es el núcleo central de su pensamiento y, en este sentido, es pitagórico: la representación espacial no es una representación del número sino un rasgo escencial de él. De ahí que entre este modo de pensar y la usual geometría analítica que relaciona formas geométricas con ecuaciones algebraicas haya una diferencia substancial. Minkowski siempre ve números y relaciones entre números. Se puede decir, llevando esto al ex-

Visualizaciones en Processing

Para analizar los algoritmos primero debemos tener una idea de lo que significa espacio, como este se compone, y cuales son las básicas funciones que pueden suceder en él. Al definir espacio (del latín Spatium) recordamos la idea de Aristóteles como primera definición, donde ésta corresponde a "el lugar ocupado por alguna cosa", de manera que espacio y lugar quedan equiparados tal como A=A. Lo que es cierto pero algo un poco contradictorio a lo que entendemos hoy como espacio, donde según las ideas de Einstein, es "una constante expansión" que traduciríamos a A a ∞.

æ Espacio: del latín Spatium
æ A: entiéndase como espacio

Otra idea del espacio, no tan famosa pero sí igual de interesante es la concepción de la poeta Nicole D´Amonville quien entiende el espacio como "aire articulado", lo que sería una evolución poética de las ideas de Aristóteles, ya que se define como la ocupación de un lugar por un "algo" que aquí sería el aire. Y éste daría forma a la voz, según su forma generaría sonidos y recorrería los cuerpos por donde circula dando forma a lo que lo rodea, formando
a hacia A.

Figura 01: Espacio

Bajo éstas interpretaciones del espacio entenderíamos según Aritstóteles que el interior del la figura blanca, no es más que un vacío. Y según las ideas de Einstein, un espacio con límites por ende sin expansión, es decir sin tiempo tampoco. Y según D´Amonville ésto podría representar un silencio. De buena manera Kant se refiere a ésto también, no desde el análisis de las constantes del mismo espacio sino que como una “escena” que varía dependiendo de la percepción del mismo sujeto. Pudiendo decir que para todo a exíste al menos una variable de A.

Si vemos además las definiciones de Espacio en el diccionario (RAE), veremos los distintos aspectos que varían en sus definiciones:

1.Extensión que contiene toda la materia existente.
Donde el todo es un subconjunto del universo.

2. Parte que ocupa cada objeto sensible.
Donde el todo se ubica en la tercera dimensión.

3. Transcuso de tiempo entre dos sucesos.
Donde el todo se relaciona con una variable de tiempo.

4. Distancia de dos cuerpos.
Donde los cuerpos se ubican sólo en un solo lugar a la vez.

Pero ya que nos interesa el espacio Euclidaneo, diremos Aristetólicamente que una vez que situamos un punto es que tenemos espacio, ya que definimos ciertas coordenadas y referencias del objeto. Distinto de la definición de "lugar" que si bien es similar, diverge en que lugar tiene que ver con la relación de tamaño entre el sujeto y el lugar, en cambio con la teoría de Aristóteles, acá haya lo que haya y sea lo que sea, si está, -por infimo que sea-, su existencia genera el espacio.

Figura 02: Ubicación en el Espacio

A pesar de que cuando ubicamos un punto en el espacio, este tiene referencia y obtenemos una "idea" de su ubicación, ésta a falta de medidas precisas nunca sería exacta.

Espacio Euclediano

Estructuralmente un espacio euclídeo es un espacio vectorial normado sobre los números reales de dimensión finita, en que la norma es la asociada al producto escalar ordinario. Para cada número entero no negativo n, el espacio euclídeo n-dimensional es el conjunto **R**, junto con la función distancia obtenida mediante la siguiente definición de distancia entre dos puntos (x1, ..., xn) e (y1, ...,yn):

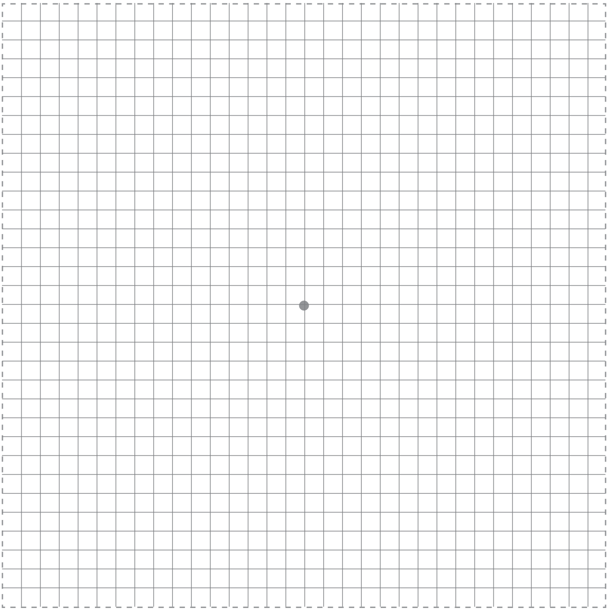


Figura 03: El punto ubicado en una red

Según Aristóteles el estado natural de un cuerpo es estar en reposo, y solo se mueve si es empujado.
Teniendo la idea de que lo que da lugar a la percepción del tiempo es el movimiento, tenemos que: El tiempo no es, un movimiento, pero no existiía sin él, ya que solamente existe cuando el movimiento comporta un número y a la vez como un objeto ocupa espacio, al hacerlo define una ubicación recordamos así que por todo punto pasa una línea por lo que siempre este se definirá con solo una línea, que dará lugar a una matriz

Tal como la primera definición de “espacio” nombrada anteriormente donde “1.Extensión que contiene toda la materia existente.” se relaciona indirectamente con la capacidad del espacio mismo.

Paralelamente encontramos en cualquier espacio, algo que parece ser una paradoja para el espacio tal cual lo asimilamos. La partición del espacio. Donde, si tomamos cualquier línea de la matriz y la divididimos por la mitad,obtendremos un segmento más pequeño que pasamos a dividir y así sucesivamente. El resultado, es cada vez un segmento de menor tamaño, donde su decimal crece y su tamaño disminuye.

Lo mismo ocurre en la matriz entera cuando subdividimos los espacios de la red numérica en partes más pequeñas, vamos teniendo mayor cantidad de partes y un número cada vez más pequeño.

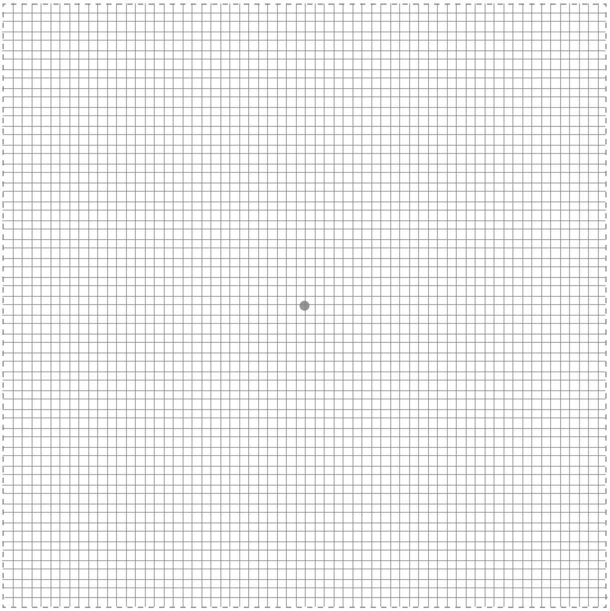


Figura 04: "La mitad" en la matriz

Lo que obtenemos si dividimos una y otra vez segmentos del espacio es una cifra que va creciendo en decimales, cifra cada vez más cercana al número e, pero cada vez más distante de llegar al mismo número.

Número de Euler: base de los logaritmos eucledianos

$$e = 2{,}718281828459045235 4\ldots$$

$100 al banco con un 100% de interés

1 año $200 gano una vez al año e invierto de nuevo
6 meses $225 gano 2 veces al año e invierto de nuevo
3 meses $244,14 gano 4 veces al año e invierto de nuevo
c/ mes $261,30 gano 12 veces al año e invierto de nuevo
c/sema. $269 gano 52 veces al año, invierto de nuevo
c/xhora $271,81
c/hora $271,82
c/vez 271,8281828459045235 4...=e

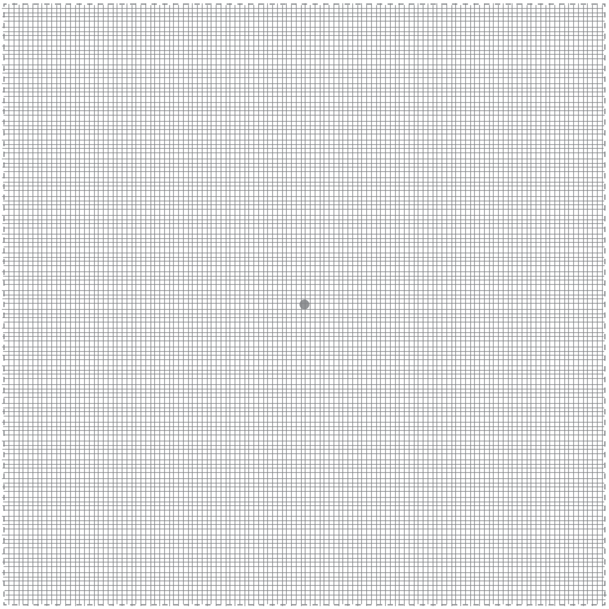


Figura 05: La matriz hacia el infinito: número e

El ejemplo de la inversión en el banco hace una analogía con nuestra red de números en el espacio si se nos ocurriera dividirla infinitamente, el resultado sería aproximado al número e, siempre que nuestra variable -cada cuanto sacabamos nuestras ganancias del banco ó cada cuan [illegible] límite infinito.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Persepciones del Espacio

Aristóteles: espacio es el lugar que ocupa un objeto, sin cuerpos no existe el espacio.
Newton: espacio como sustancia infinita, inmóvil e inmaterial, donde "flotan" los objetos materiales.
Euclides: espacio es la distancia entre dos puntos.
Kant: las percepciones dan cabida a las experiencias y éstas al lugar.
Hegel: el espacio es una intersección entre superficie, dimensión indeterminada y dimensión determinada que unida al movimiento junto con el espacio y el tiempo, generan una extensión abstracta (espacio-tiempo).
Hillbert/ Banach: dimensiones infinitas.
.

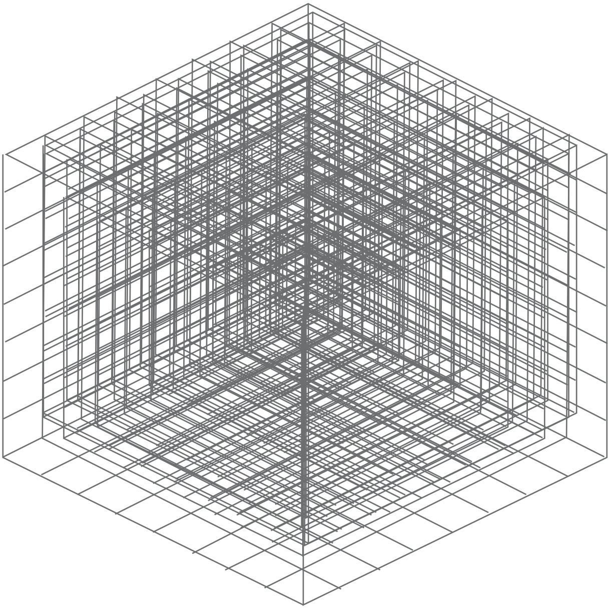


Figura 06: El volumen en la red

Cuando en una red de números, queremos pasar a las tres dimensiones, éstas cumplen las mismas leyes de particiones que dentro del plano.

Plano

Cuando comenzamos el discurso del libro, con una figura muy similar no nos referimos a "plano" y hablamos del espacio, ya que dabamos un asomo mucho más amplio al entendimiento del mismo. A plano nos referimos luego de hablar de un espacio geométrico, redes del espacio y partición del mismo. El plano sólo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas; es uno de los entes geométricos fundamentales junto con el punto y la recta.
Solamente puede ser definido o descrito en relación a otros elementos geométricos similares.

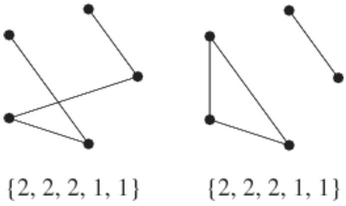


Figura 07: Plano

Se suele describir apoyándose en los postulados característicos, que determinan las relaciones entre los entes geométricos fundamentales. Un plano queda definido por los siguientes elementos geométricos:

·Tres puntos no alineados.
·Una recta y un punto exterior a ella.
·Dos rectas paralelas.
·Dos rectas que se cortan.

Punto

Un punto geométrico sin ninguna dimensión se puede definir en el espacio tridimensional usando coordenadas. Aún cuando todos piensan que la definición de un punto puede ser bastante clara y obvia, vemos como Euclides definió el punto como "aquello que no tiene parte".

Dicha definición se dió ya que el mism punto no se puede subdividir, porque formalmente no hablamos de un punto ni un circulito, sino que la ubicación que marcamos en un plano al cruzar dos diagonales, ese ínfimo cruce corresponde al punto que como un elemento solo, no tiene muchos atributos en la geometría pero en grupos son la mínima parte de la línea, el espacio, el plano, y el hiperespacio.

Figura 08: Nodos en la matriz

Además de dividir el espacio a través de líneas también lo podemos hacer a través de otros elementos en éste caso puntos que podríamos llamar nodos, ya que por cualquier punto pasa una recta en el espacio, pero como no estamos viendo dichas rectas, son nodos imaginarios.
En este caso como vemos, el espacio a esta escala no se llegaría a "partir" ni por la escala a la que vemos el diagrama, ni por la cantidad de puntos que tenemos en el espacio.

Vemos en la figura como un conjunto de puntos, puede formar desde matrices a transformarse en verdaderas texturas para el ojo, variando simplemente la distancia entre los puntos, hasta llegar a cierta densidad.
El mismo punto en grandes cantidades, vemos como llega aquí a transformarse en seudolíneas y por ende en seudo dibujos, es tan ínfima la distancia entre los puntos que engaña al ojo con verdaderas líneas.

Figura 09: Puntos en una matriz

Vemos en ésta figura, que ahora que hay muchos puntos estos pueden formar grandes densidades, pudiendo así dividir el espacio en “partes”.

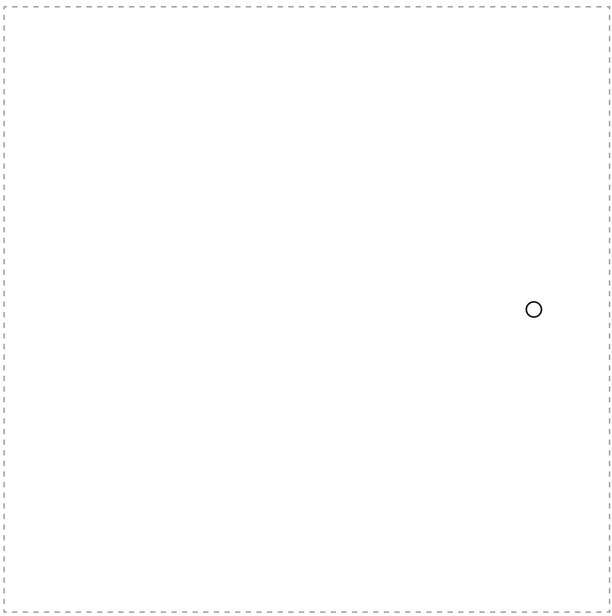


Figura 09: Triangulación paso uno

Otro modo de particionar el espacio es a través de los triangulos, siguiendo la ley de no dejar que ningún punto quede en el plano sin estar unido a otro por una recta.
En éste caso como el punto está solo y un triangulo tiene 3 vértices, por el momento quedará así.

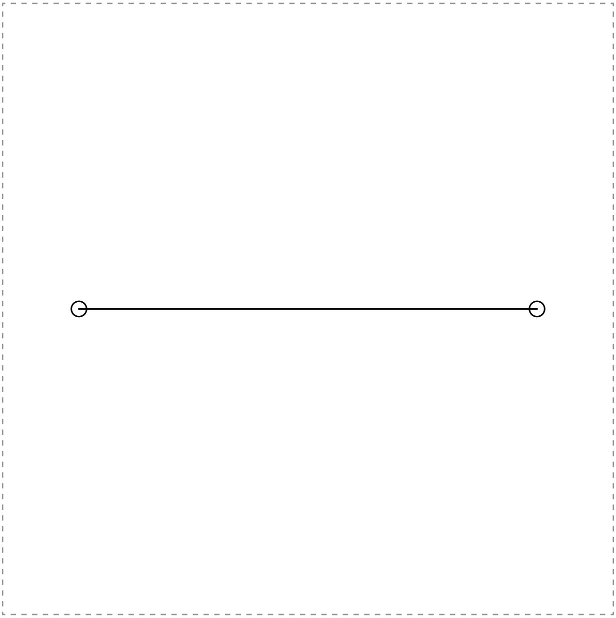


Figura 10: Dos puntos para triangular

Agregamos otro punto a la visualización y podemos formar una línea pero no los triangulos.

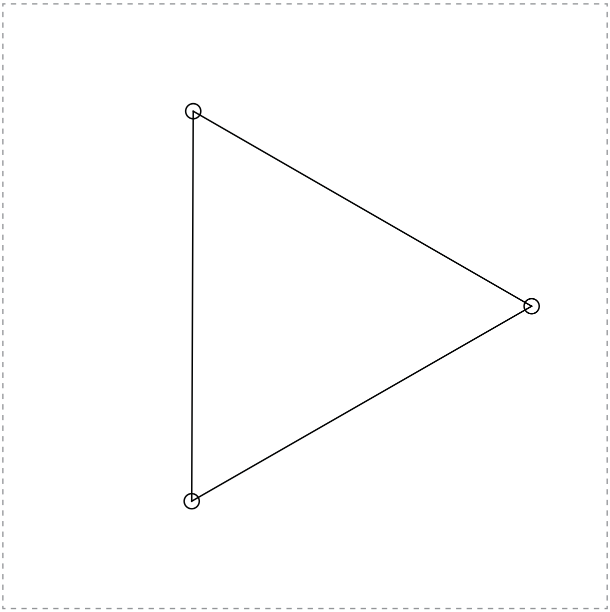


Figura 12: Primer triangulo

Se generó un triángulo equilátero, correspondiendo a la misma distancia entre vertices y grados de los ángulos.

Aquí es donde comenzamos a tener un algoritmo en el código Proocessing para pocesar esta visualización. Donde se le indica unir con una recta puntos sin dejar a ninguno solo.

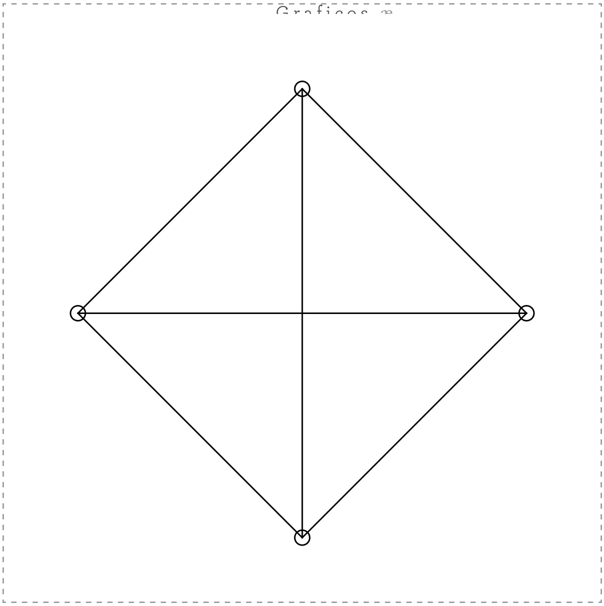


Figura 13: Triangulos en un cuadrado

Siguiendo la función la forma une todas las aristas posibles obteniendo un cuadrado y varios triangulos. Siempre todo de manera simétrica.

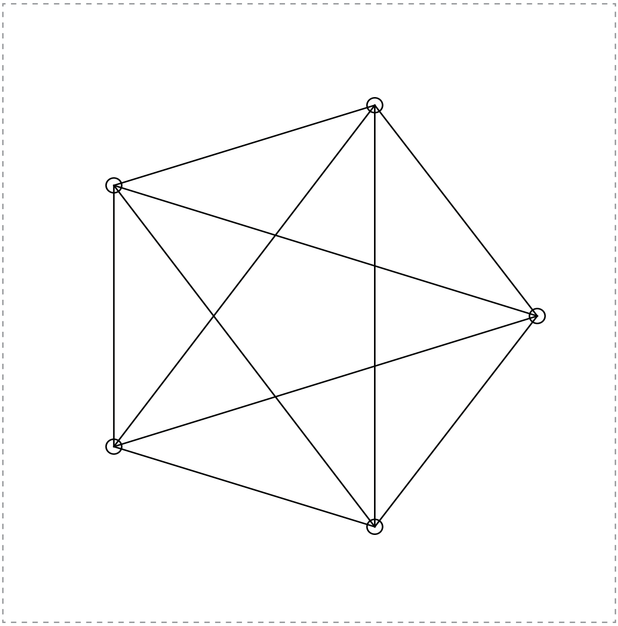


Figura 14: 5 lados, muchos triangulos

Como vemos los triangulos se generan en cualquier dirección siempre y cuando esten dentro del círculo.

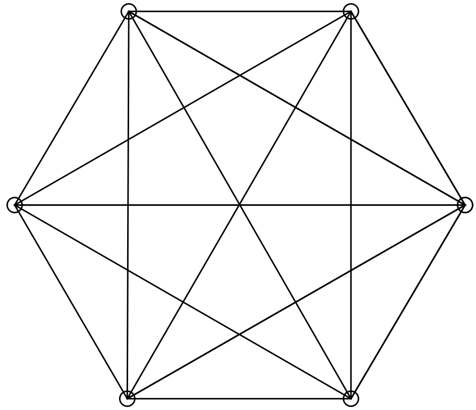


Figura 15: Hexágono

Como vemos, en el mismo espacio se están generando más particiones, lo que nos hace recordar el caso del número e. Es curioso ver como algo crece hacia su interior y llegar a entender que ese interior en el espacio no tiene límites, cuando el espacio del día a día -aunque quizás lo confudimos con lugar- lo consideramos de manera finita.

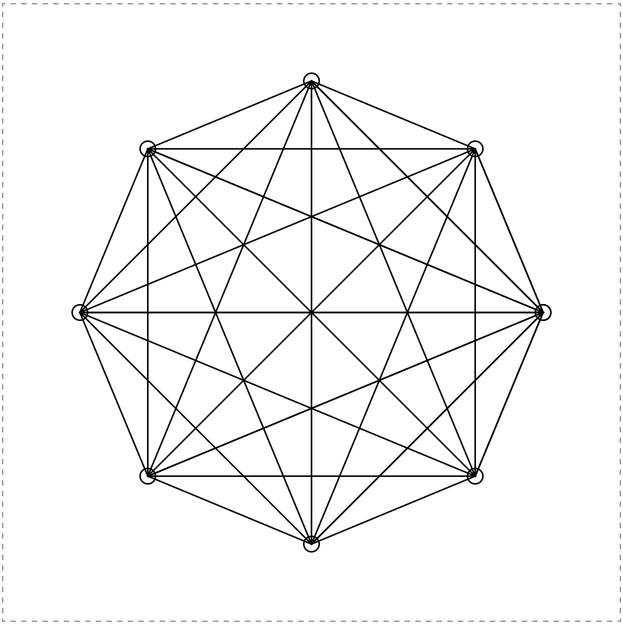


Figura 16: Triangulación

Ya vemos como una figua de 8 lados acoje en su interior particiones tanto de triangulos como de cuadrados.

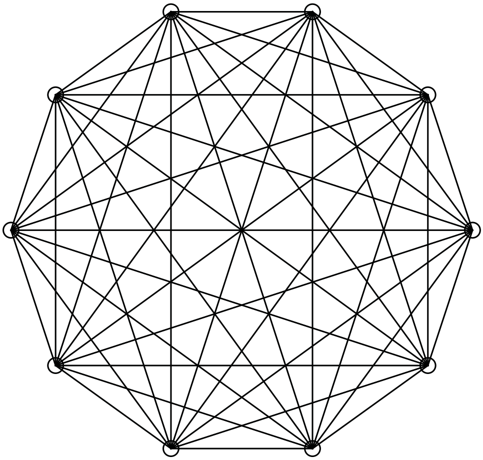


Figura 17: Mezcla de uniones

A mayor cantidad de lados, la figura más se asemeja a un a circunferencia, que en su interior anida más particiones y éstas de menor área también.

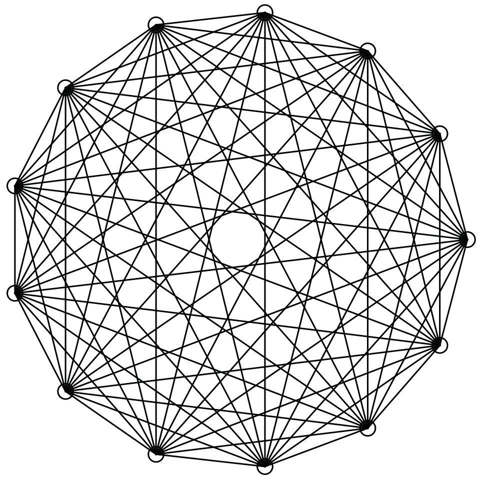


Figura 18: Triangulación circular

La partición en triangulos iguales inscritos en un círculo puede llevarse a cabo hasta el infinito dado que estamos dividiendo el espacio.

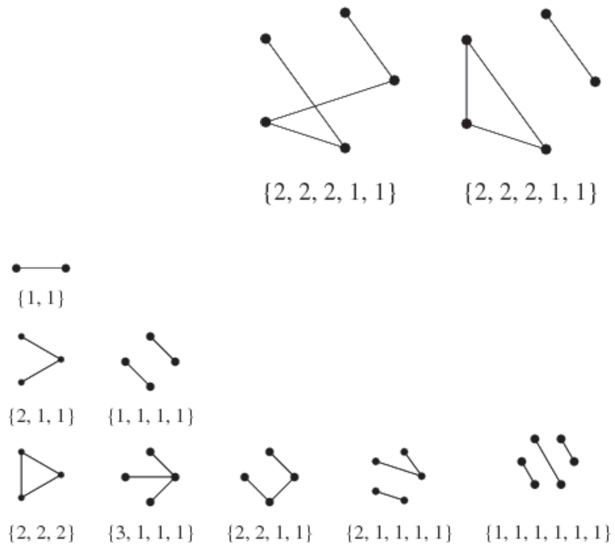


Figura 19: Partición Gráfica

Esta será también la unidad básica de las siguientes visualizaciones, donde éstas piezas actuarán como nodos formando una red asimétrica con triangulaciones en movimiento.

Una partición se llama gráfica si exíste una secuencia gradual. Donde el número de particiones gráficas en p(g) en n=2,4,6.. corresponden a los nodos 1, 2, 5, 9, 17, 31, 54, 90.

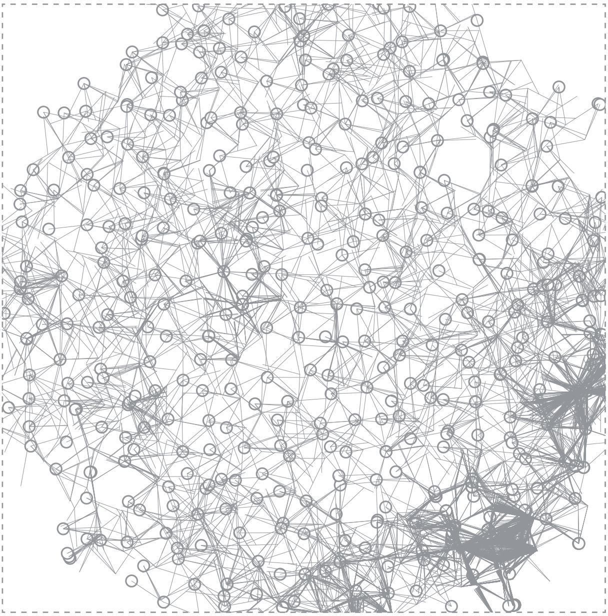


Figura 20: Matriz que triangula

Esta matriz que triangula el espacio es casi simétrica. Está hecha en código Processing, y sus variaciones en el movimiento dependen del tiempo transcurrido y el mouse. Los nodos forman triangulos que se comportan como módulos que forman una continuidad.

En éste caso lo que están haciendo las líneas en el espacio en ésta visualización es similar a lo que Nicole D´Amonville comentaba respecto del “Aire Articulado” donde el espacio se transforma según -en este caso- quienes lo habitan, los nodos.

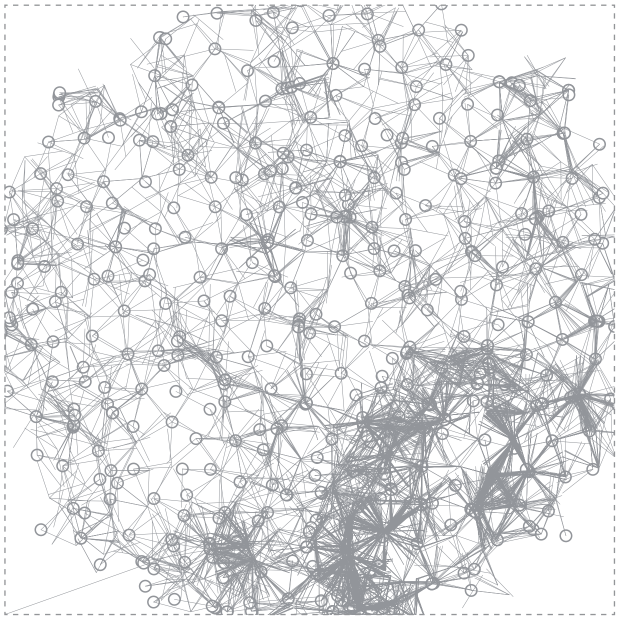


Figura 21: Triangulación Asimétrica

La matriz se comienza a desarmar tanto en forma como en la línea que se va poniendo más irregular.

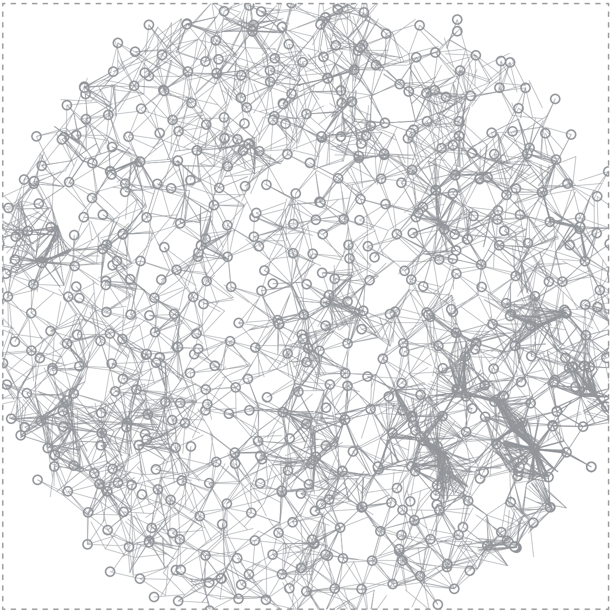


Figura 22: Triangulación Asimétrica

La función de los nodos, que era unir trazos para formar triangulos, casi desaparece, uniendose los trazos de manera irregular, desarmando la textura y generando mayor ruido en ella.

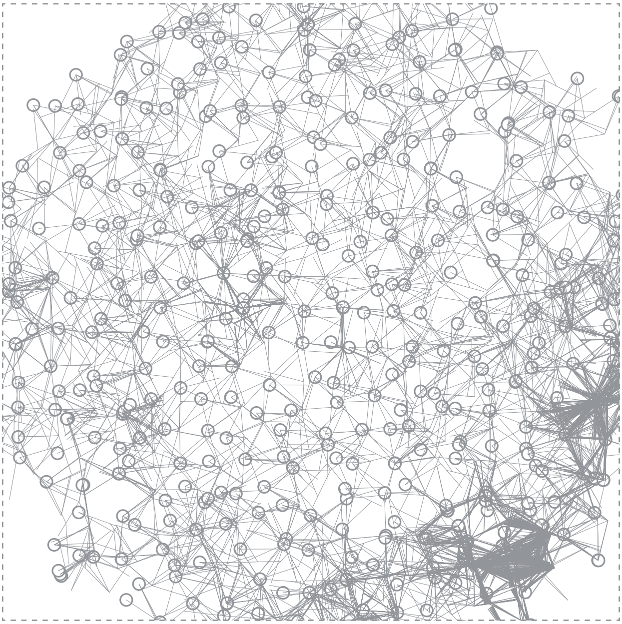


Figura 23: Triangulación Asimétrica

Finalmente lo único que se mantiene es el márgen de la circunferencia, pero al interior de él, los nodos han desapaecido, los triangulos, y los trazos, para formar un gran ruido inscito en un círculo.

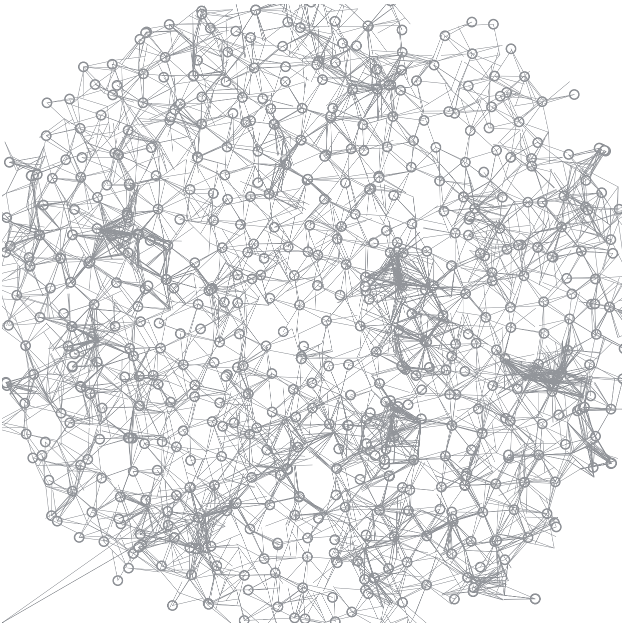


Figura 24: Triangulación Asimétrica

Lo distinto de esta "triangulación" es que no se encuentra inscrito en ninguna otra figura, pero si lo que mantiene es la constante generación de fomas trianguladas en el espacio, como si se fuera tejiendo así mismo.
Lo interesante de esta figura es que aún sin tener margenes, la armonía se mantiene porque conserva la unidad básica, el triangulo. Distinto de la anterior donde se conservó el margen pero no las figuras que generaban toda la textura.

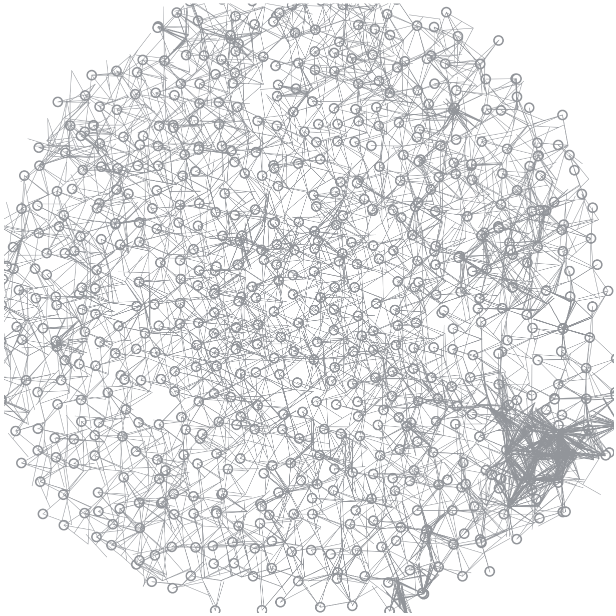


Figura 25: Triangulación Asimétrica

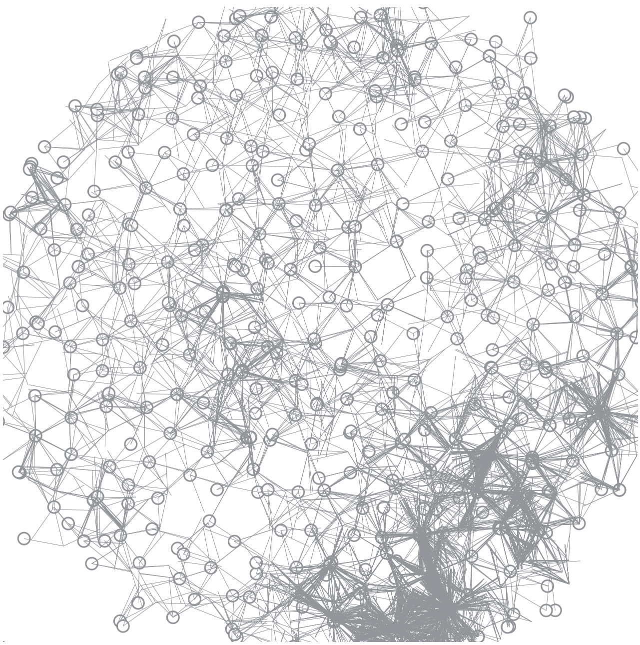


Figura 26: Triangulación Asimétrica

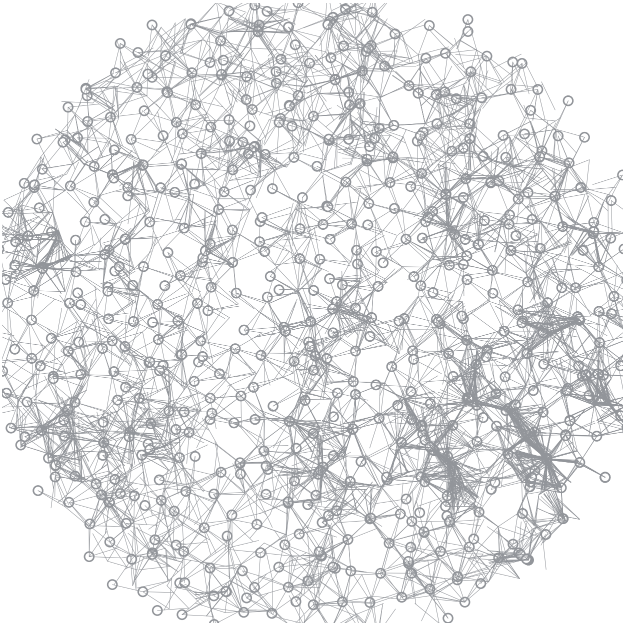


Figura 27: Triangulación Asimétrica

B_3

3 *tipos*

5 *variaciones*

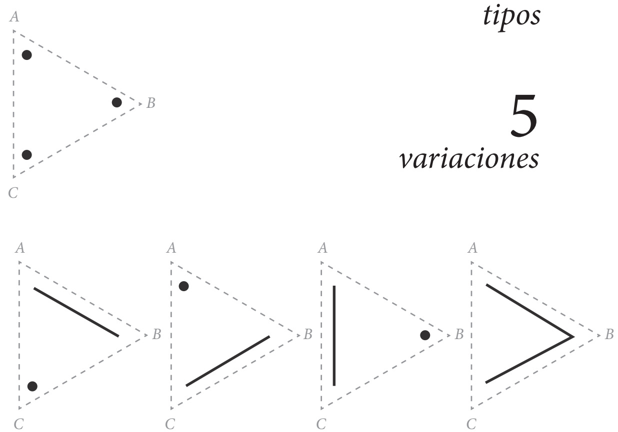


Figura 28: Partición de 3

Otro modo de "partición" también corresponde a como divido y en que formas combino los elementos de un conjunto, ya sea si tengo el cojunto de 3 elementos como los puedo agupar y re ageupar sin importar las leyes de asociatividad ni conmutatividad. Finalmente, dicha pregunta pasa a ser un juego de lógica.

B_4

7
tipos

15
variaciones

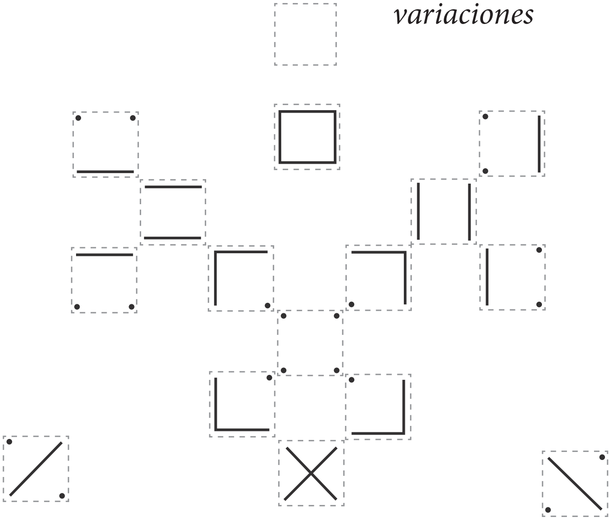


Figura 29: Partición de 4

B_5

9

tipos

52

variaciones

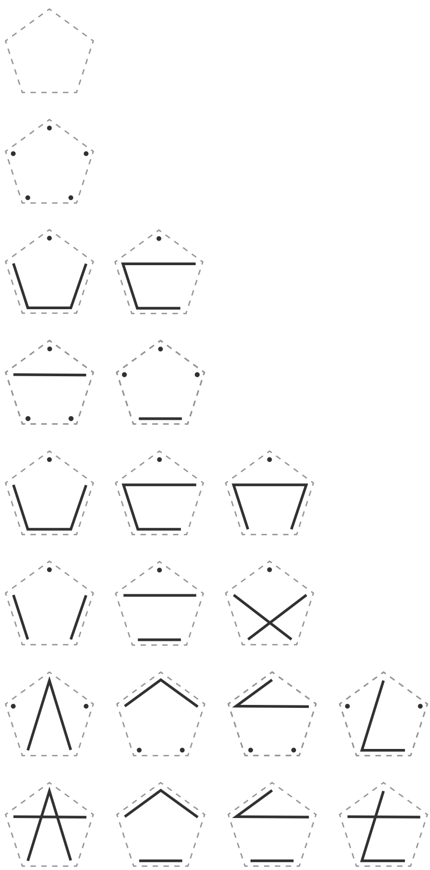


Figura 30: Partición de 5

Figura 31: Extracto de puntos que dibujan
el espacio en movimiento

“Movimiento es el paso
de la potencia al acto.”

Aristóteles

Figura 32: Puntos que se van re generando
en base a la huella

El mismo movimiento de las partículas del dibujo, va re generando una huella dentro del código, que según sus variaciones ésta va dibujando el espacio.
El próximo paso se crea según las condiciones que generan el paso actual y el código que generó el anterior.

Figura 33: El redibujo de una huella

La misma huella que se va dibujando en el espacio, va borrandose a sí misma y re dibujando, transformándose una y otra vez. Esta interacción en particular da cuenta de como la interpretación de un lenguaje puede escribir el espacio de distintas maneras. Las condiciones definidas para dibujar o no, son infinitas. Al igual que la lectura de carácteres tipográficos, en el esquema se da una lectura de contrastes que configuran el espacio diagramándolo bajo una misma ley, pero generando distintas escrituras.

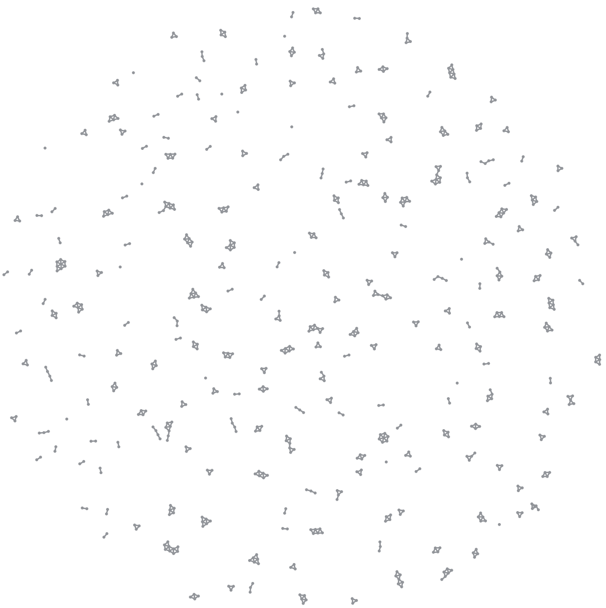


Figura 34: Interpretación de la escritura

Al igual que en un párrafo del mundo occidente es que leemos de izquierda a derecha con y la combinación de diferentes carácteres leemos distintos significados y sus caracterísiticas gráficas hacen una lectura de contrastes y medidas. En este caso tenemos una malla de carácteres ordenados dentro de una circunferencia que sería nuestra ley general y el orden interno de las partículas genera distintas diagramaciones dentro de ese espacio, entregando distintas lecturas en base a la proporción espacio - ubicación del plano. Lo que se asemejaría a la lectura de un párrafo solo con unidades de carácteres tipográficos.

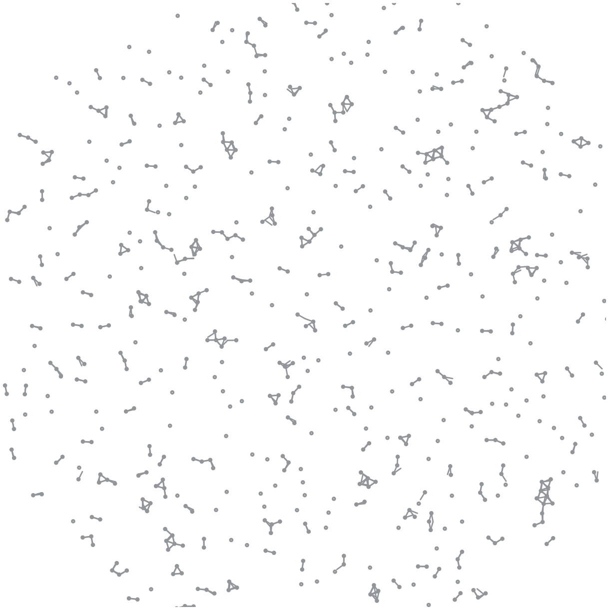


Figura 35: Hilar el espacio

Estos párrafos van trasnformando la lectura del contraste a medida que va cambiando la relación de sus carácteres entre sí. Donde las uniones de ellos, van congujando el espacio de manera que van formando elementos compuestos que comienzan a hilar el espacio. El ojo identifica un contraste que se hace meramente mas denso.

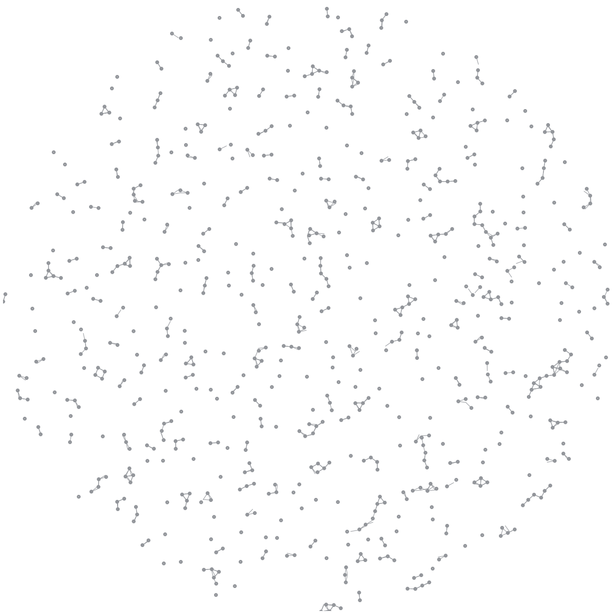


Figura 36: Aparación de la medida y el márgen

La densidad que entrega el contraste del espacio, se asemeja a la densidad que entrega un párrafo compuesto por sílabas, donde los carácteres tipográficos se aúnan y donde los contrastes de los carácteres en relación al espacio en conjunto forman una medida certera de lleno y vacío, haciendo aparecer los márgenes, dándole un mayor protgonismo.

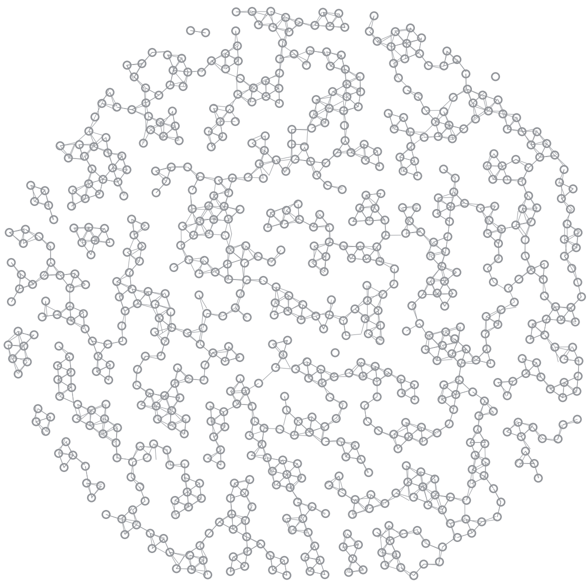


Figura 37: Una linealidad que se transforma

Si extrapolamos este comportamiento, tendríamos una lectura similar a la densidad de un párrafo, donde va-rios carácteres forman mayores densidades, las palabras, y éstas líneas van articulando el espacio a través de una linealidad. En esta caso esa linealidad se agrupa y transforma a través de distintos "interlineados" generando una nueva medida de contraste en el espacio.

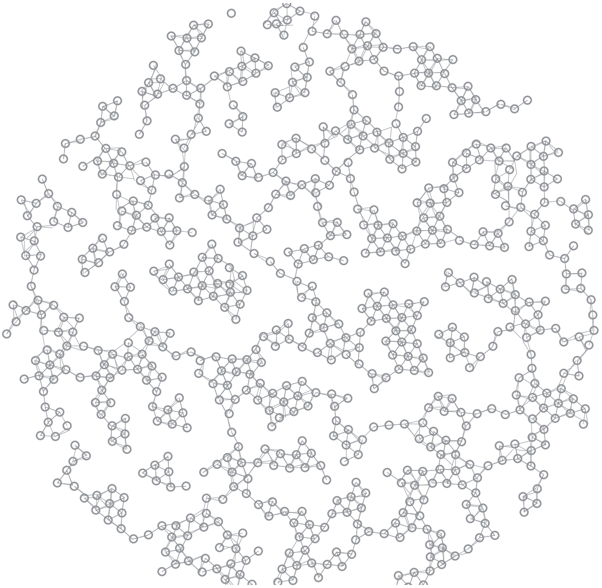


Figura 38: Interlineados que configuran el espacio

Las diversas densidades de líneas que se dibujan, también van generando distintas lecturas a medida que el código se va reinterpretando. Aún así y al igual que en los párrafos con carácteres tipográficos, se guarda una medida proporcional de contraste en un párrafo de partículas, de pares de partículas y de conjuntos de partículas que forman líneas. Cada uno de los casos mantiene una medida de contraste que el ojo reconoce, sea cual sea la escala en el que se le interprete.

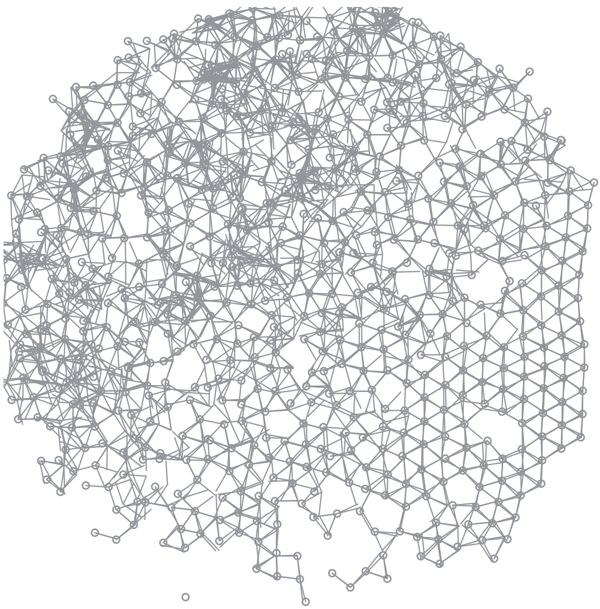


Figura 39: El punto como comienzo y fin

Se configura el espacio, pero de manera distinta, ya que no tenemos agrupaciones de puntos que forman partículas que van transformando el espacio, sino que es la línea. En el código se usaron puntos para definir principio y fin de la línea en una dirección. Si tenemos una configuración del espacio, pero en base a distintas leyes. Mas que un elemento que se repite para ir dibujando el espacio en formas mas complejas, es la línea la que aquí va articulando el espacio y el punto indica una nueva dirección, por ende acentuación de la línea

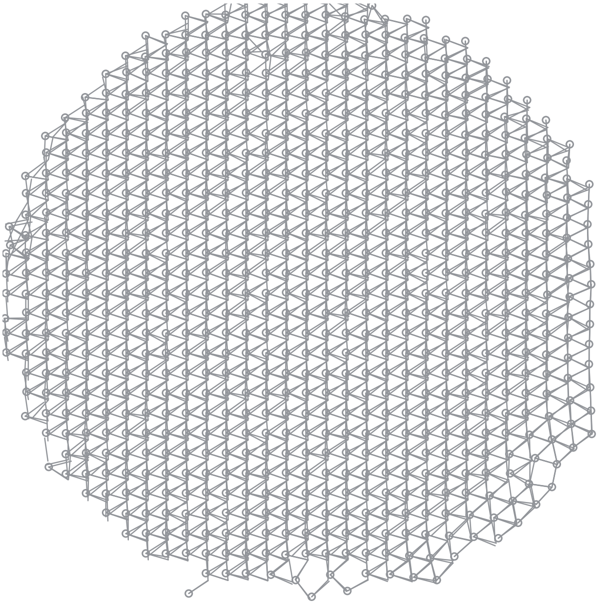


Figura 40: Puntos como pausas en el espacio

en relación al espacio. En ambos casos, los puntos tensan el espacio, creando descansos de la línea, marcando la distancia entre el inicio y fin . Al igual que en la palabra hablada los puntos se comportan como pausas y la medida en que aparecen definen el ruido de la figura. Su aparición en lo constante crea un quiebre y esa nueva dirección, una nueva medida de longitud y curvatura o rectitud en el espacio.

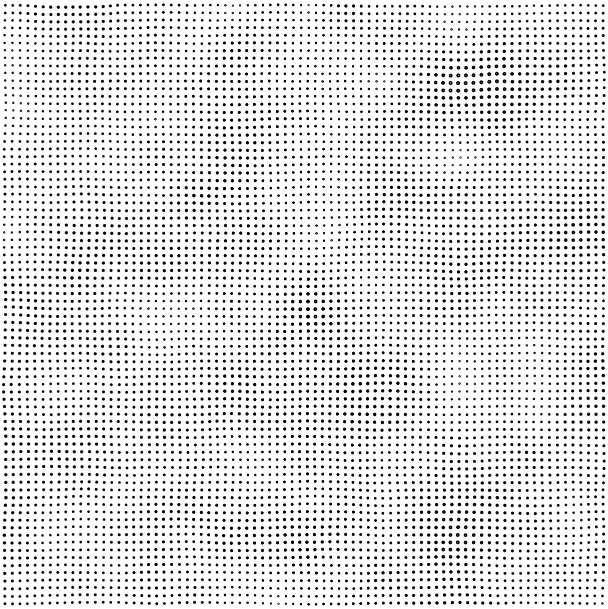


Figura 41: Un espacio formado por lo margenes

En el caso de cuando los margenes delimitan el espacio y forman una constante en él, la tensión del mismo está definida por la dirección de cada uno de los elementos que se repiten en el. Aún cuando cada elemento tiene variaciones uno de otro, es el espacio que se forma entre ellos dada su forma y dirección el que definirá una contraste y un distingo en la lectura.

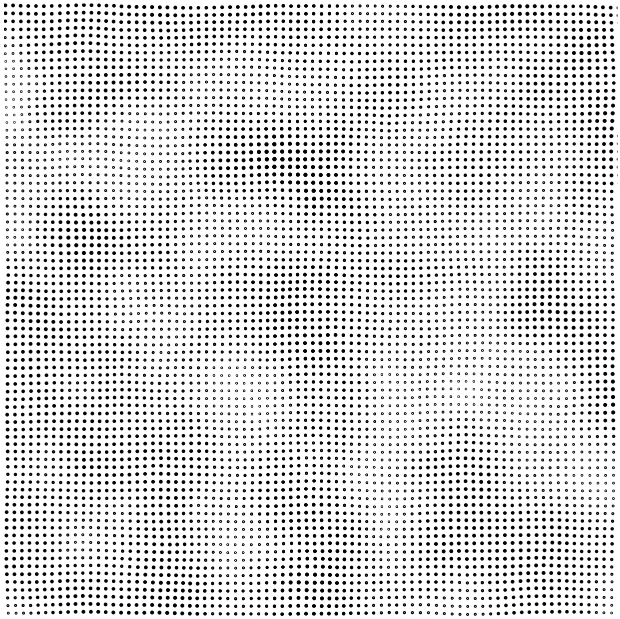


Figura 42

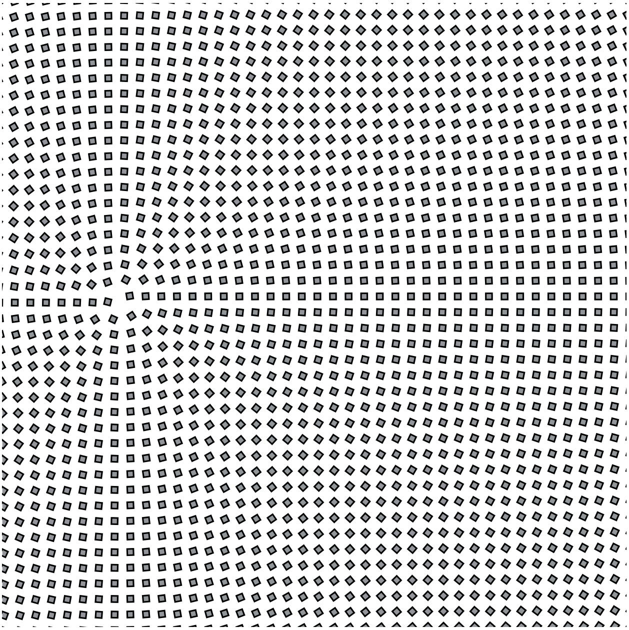


Figura 43: Los márgenes como tensión del espacio

Cuando las figuran rompen lo constante del espacio, variando su propia dirección de manera gradual, crean un contraste que alude al movimiento. Y en conjunto las figuras generarán una tensión que indica una clara dirección. Tal como tener un gran vacío en un párrafo, hará un silencio en la página.

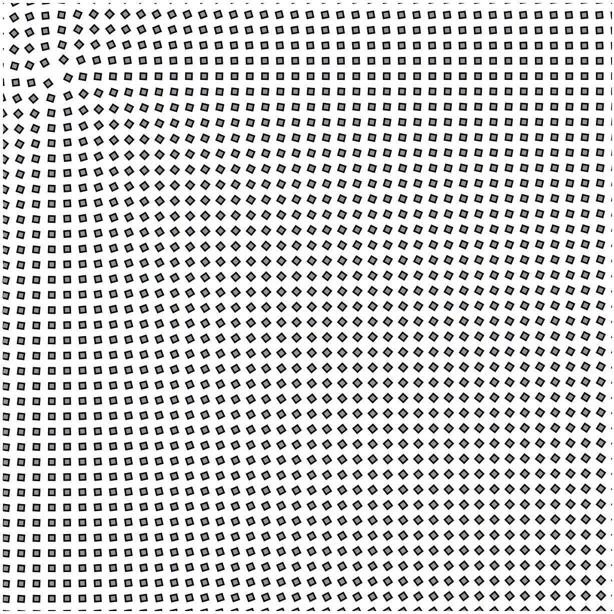


Figura 44

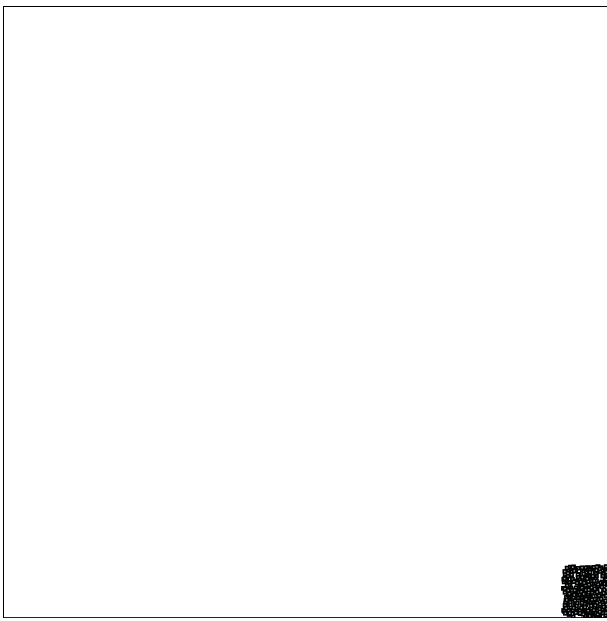


Figura 45

Dependiendo de la medida del silencio, del tamaño de los márgenes del mismo silencio, este podríamos definirlo como un silencio pasivo en este caso o un quiebre, en el caso de que no haya una ley que defina la dirección de las figuras en el espacio.

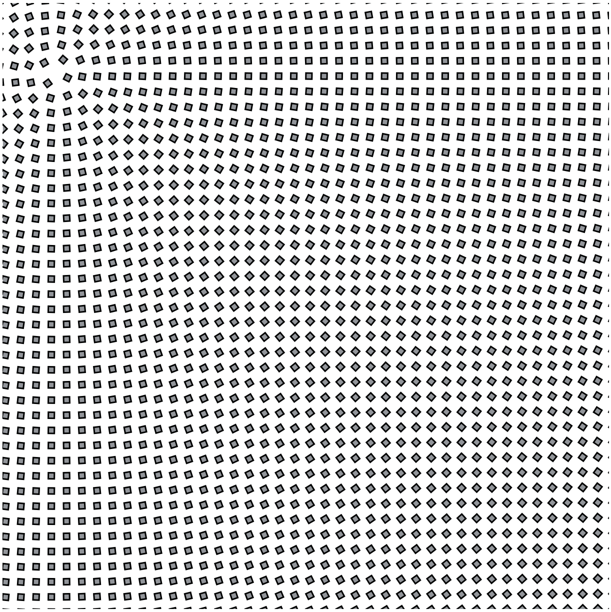


Figura 46

Colofón

Esta edición fué desarrollada y diagramada en Látex, código trabajado en los programas Lyx y MikTex 2.8 en plataforma Mac. Los esquemas fueron hechos en Adobe Ilustrator CS4 y las visualizaciones fueron programadas en Processing. El formato de la edición es 12 x 20 cm en papel Option 118 grs. Se usó tipografía CM Bright y Archer en estilo Regular, Italic y Bold. Los títulos de los capítulos están en C100, M15, Y0, K0, mientras que el texto general se definió con un negro al 90%. El documento se compaginó en el programa Adobe InDesign CS5 y se imprimió en láser, impresora OKI modelo C5650.