

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas



**Comprensión del Producto Vectorial desde los Modos de
Pensamiento**

**Trabajo final para optar al Grado de
Magíster en Didáctica de la Matemática**

De: Rosario Guerra Martínez

Profesora Guía: Dra. Marcela Parraguez González

2015

AGRADECIMIENTOS

A Dios mi maestro y amigo, por ser el pilar fundamental de mi vida, por estar conmigo en cada paso que doy.

A mi profesora Marcela Parraguez, la persona que admiro por enseñarme a mirar siempre como ganador, me enseñó a creer que con esfuerzo todo se puede, que hay que intentarlo apostando a ganar.

A la enseñanza de todos los profesores del programa de Didáctica de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

A mi familia y amigos que me acompañaron en este proceso, ya que ellos fueron parte fundamental para el logro de esta meta.

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN.....	6
CAPÍTULO 1:.....	9
ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	9
1.1 ANTECEDENTES	10
1.2 PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN.....	15
1.3 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	16
CAPÍTULO 2	18
ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO	18
2.1 EPÍSTEMOLOGÍA DEL PRODUCTO VECTORIAL.....	19
2.1.1 Distintas formas de entender del objeto matemático “producto vectorial” en distintos períodos de tiempo:.....	21
2.1.1.1 William Rowan Hamilton piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma analítica aritmética, en la etapa “Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones”:	21
2.1.1.2 James Maxwell y William Clifford, piensan el objeto matemático de producto vectorial en su forma geométrica, en las etapas de “Los defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton”, y “el nacimiento del análisis moderno” respectivamente.	24
2.1.1.3 Josiah Williard Gibbs piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma estructural, en la etapa del “nacimiento del análisis moderno”	25
CAPÍTULO 3	27
EL PRODUCTO VECTORIAL DESDE LA MATEMÁTICA	27
3.1 Producto Vectorial	28
3.1.1 Interpretación geométrica del producto vectorial	30
3.1.2 Nemotecnias	32
CAPÍTULO 4.....	34
MARCO TEÓRICO	34
4.1 MARCO TEÓRICO: LOS MODOS DE PENSAMIENTO.....	35
4.1.1 LOS MODOS DE PENSAMIENTO	35
4.2 JUSTIFICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO	36
4.3 MODOS DE PENSAR DEL PRODUCTO VECTORIAL.....	36

CAPÍTULO 5.....	38
METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	38
5.1 METODOLOGÍA	39
CAPÍTULO 6.....	47
ANÁLISIS A PRIORI Y RESULTADOS DE MEDICIÓN INICIAL	47
6.1 ANÁLISIS A PRIORI DE MEDICIÓN INICIAL.....	48
IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN	51
6.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA MEDICIÓN INICIAL.....	51
6.2.1 Respuestas estudiantes correspondientes al Caso 1:	51
6.2.2 Respuestas estudiantes correspondientes al Caso 2:	57
6.3 RESULTADOS DE ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA MEDICIÓN INICIAL	60
CAPÍTULO 7	62
DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE LAS ACTIVIDADES	62
7.1 Diseño de Actividades	63
Análisis a Priori de las Actividades	67
7.2 Significado de situarse en los modos de pensamiento respectivos, y tránsitos entre los modos de pensamiento, de acuerdo a las actividades 1 y 2.....	69
7.2.1 Significado de situarse en un modo de pensamiento.....	69
7.2.2 Tránsito entre los modos de pensamiento:	70
CAPITULO 8.....	71
ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.	71
8.1 CASO 1: ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS	72
8.1.1 CONCLUSIONES DEL CASO 1	86
8.2 CASO 2: ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.....	89
8.2.1 CONCLUSIONES DEL CASO 2	98
8.3 CASO 3: ESTUDIANTES DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	99
8.3.1 CONCLUSIONES DEL CASO 3	104
8.4 CASO 4: ESTUDIANTE DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS.....	105
8.4.1 CONCLUSIONES DEL CASO 4	116

CONCLUSIÓN	117
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	121
ANEXOS	122
MEDICIÓN INICIAL	123
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	124
PARTICIPACIÓN EN LA VXIII JORNADA NACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....	126

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal forma parte de los programas de estudios de variadas carreras universitarias chilenas, por lo que se ha constituido como una importante disciplina matemática en este nivel. En relación a la enseñanza y aprendizaje de conceptos del Álgebra Lineal, se han realizado variadas investigaciones en el área de la Didáctica de las Matemáticas, las cuales han reportado, entre otros, lo que sigue:

Para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos. (Dorier, 1997).

Y además que “el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas” (Dorier y Sierpinska, 2001), por mencionar algunas.

En esta investigación nos centramos en el concepto de Producto Vectorial, este objeto matemático tiene diversas aplicaciones tanto en la matemática como en la física, formando parte de los contenidos de unidades de los programas de carreras universitarias como Ingeniería, Física, Pedagogía en Matemática, entre otras; razón por lo cual nos preguntamos si este concepto ¿forma parte de ese catálogo de nociones abstractas que los alumnos no logran comprender?, ¿logran articular distintas formas de pensar el objeto matemático en la resolución de un problema? o ¿sólo se sitúan desde una forma de pensar aritmética o algorítmica?.

Se realiza entonces una revisión bibliográfica en busca de antecedente sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto producto vectorial en Matemática Educativa, no encontrando ninguna investigación al respecto. Pero indagando en artículos desde la enseñanza de la Física, encontramos algunas en que se ha reportado que existen dificultades en el aprendizaje del concepto producto vectorial, y que estas dificultades tiene un origen epistemológico. Otras reportan que los estudiantes universitarios tienen inconvenientes en la resolución de problemas donde es necesario interpretar la representación geométrica. Ambas investigaciones coinciden en que el alumno tiene un mayor dominio del cálculo de las componentes del vector que resulta del producto vectorial, pero que tiene mayores dificultades en interpretarlo geométricamente.

Al no hallar antecedentes en matemática educativa, esta investigación se centra en indagar la comprensión del objeto en estudio situado desde la matemática, en particular del álgebra lineal. Definidas las dificultades reportadas en los artículos mencionados, se define la problemática de estudio la cual se centra en que los estudiantes tienen dificultades para comprender el objeto matemático de producto vectorial en sus distintas formas de pensarlo y entenderlo, ya sea aritmética, geométrica o estructural. Centrando su comprensión principalmente en su forma *analítico-aritmética*, esto es, relaciones numéricas que permiten calcular el producto vectorial. A partir de allí se definen los objetivos de investigación, los cuales guían el desarrollo de la misma.

La investigación se ha organizado en 9 capítulos, los cuales se describen a continuación:

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se describen los antecedentes reportados desde la enseñanza de la Física, que permiten evidenciar problemáticas en la comprensión del concepto matemático de producto vectorial. A partir de allí se define la problemática de investigación, que permite establecer los objetivos que guiarán el desarrollo de la investigación.

CAPÍTULO 2: ANÁLISIS HISTORICO EPISTEMOLOGICO DEL PRODUCTO VECTORIAL.

A partir de una revisión bibliográfica se presenta un análisis histórico epistemológico del producto vectorial, el cual se centra en tres etapas: el nacimiento de los Cuaterniones, del Cuaternión al Análisis Vectorial, y del Cuaternión al Análisis Vectorial. Cuyo objetivo es sustentar los distintos modos de pensar el objeto matemático de producto vectorial.

CAPÍTULO 3: EL CONCEPTO DE PRODUCTO VECTORIAL DESDE LA MATEMÁTICA.

En la revisión de diferentes textos principalmente de Álgebra Lineal se presenta el concepto de producto vectorial definido en $\mathbb{R}^3$, junto a sus propiedades y respectivas demostraciones. Además se nombran las diversas nomenclaturas que se utilizan del producto vectorial, desde la

premisa de que actuaran como elementos articuladores entre los distintos modos de pensar el objeto matemático de estudio.

CAPÍTULO 4: MARCO TEORICO.

Se presenta una descripción del Marco Teórico los modos de pensamiento, se justifica la elección de la Teoría, y se definen los modos de pensamiento del objeto matemático producto vectorial.

CAPÍTULO 5: METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el diseño metodológico compuesto por tres fases diseñadas para dar cumplimiento los objetivos de investigación planteados en el capítulo 1. La primera fase se corresponde con el Análisis Histórico epistemológico y Matemático del producto vectorial; la segunda fase con el diseño y aplicación de una medición inicial, y la última fase diseño y aplicación de una secuencia de aprendizaje.

CAPÍTULO 6: ANALISIS A PRIORI Y A POSTERIORI DE LA MEDICIÓN INICIAL

Se muestra el diseño y aplicación de una medición inicial que tiene por objetivo documentar la problemática de estudio.

CAPÍTULO 7: DISEÑO Y ANALISIS A PRIORI DE LAS ACTIVIDADES

Se presenta el diseño de dos actividades, las cuales tienen por objetivo la búsqueda de una mayor comprensión, en estudiantes de pre y post grado, del objeto matemático producto vectorial.

CAPÍTULO 8: APLICACIÓN Y ANALISIS A POSTERIORI DE LAS ACTIVIDADES

Es este capítulo se presentan los resultados generales del análisis de las respuestas de los estudiantes de los cuatro casos de estudio, luego se muestran los análisis de las respuestas de cada estudiante, para finalmente se entregar una conclusión del análisis en cada caso.

CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES

CAPÍTULO 1:

ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.

En este capítulo se presentan los antecedentes basados en dos artículos, correspondientes a la enseñanza del objeto matemático producto vectorial desde la física, a partir de los cuales se plantea nuestra problemática de investigación, basada en que los estudiantes privilegian el modo de pensar AA, lo que no le permite tener una mayor comprensión del objeto de estudio. A partir de allí se elaboran los objetivos de investigación, los cuales guiarán el desarrollo de ésta.

1.1 ANTECEDENTES

Se realizó una revisión de las actas **ALME (Acta latinoamericana de Matemática Educativa)** de un destacado congreso de investigación en Matemática Educativa de Latinoamérica RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), desde los volúmenes 19 al 27, entre los años 2006 al 2014 respectivamente. Y una búsqueda en la web a través del enlace “**Google académico producto vectorial, matemática educativa**”, no encontrando en ambos casos ninguna investigación respecto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático de producto vectorial.

Debido a la importancia de los vectores en el aprendizaje de la Física, se realiza una revisión en la web (Google Académico) de artículos en esta área científica, logrando encontrar dos artículos en una Revista Latinoamericana de Educación en Física, publicación patrocinada por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Red de la Educación Física de América Latina, del Instituto Politécnico Nacional.

El primero de ellos se denomina “Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial” de Gustavo Martínez Sierra y Pierre Francois Poirier (año 2008), en el cual se plantea una hipótesis que afirma que las dificultades asociadas al aprendizaje del producto vectorial tienen un origen de corte epistemológico

El primero de ellos se denomina “**Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial**” de Gustavo Martínez Sierra y Pierre Francois Poirier (año 2008), en el cual se reporta una investigación sobre la construcción del conocimiento del objeto matemático de producto vectorial en base a una epistemología histórica, cuyos resultados dan cuenta de que el “producto vectorial” puede ser interpretado como concepto organizador, que junto con el análisis vectorial: dota de economía al sistema simbólico cartesiano y favorece una percepción geométrica. En este artículo, los investigadores parten de

una hipótesis en la cual se afirma que los estudiantes calculan el producto vectorial, pero en general no logran una clara interpretación física o geométrica de éste, y estas dificultades tienen un origen epistemológico ya que el producto vectorial como concepto organizador favorece la percepción geométrica dotando de economía al sistema simbólico cartesiano.

En el segundo artículo analizado “**Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español**” de Bairnoil y Zabala (año 2014), se presenta una investigación basada en la aplicación de un instrumento correspondiente a un Test que evalúa el entendimiento de los estudiantes en conceptos vectoriales. Este artículo tiene por objetivos: Presentar el Test en español y su proceso de diseño; mostrar que es un instrumento de evaluación confiable; y analizar el entendimiento de los estudiantes en cada uno de los conceptos vectoriales, específicamente 585 estudiantes que terminan sus cursos de física en una universidad privada mexicana.

El Marco teórico utilizado se basa en el entendimiento conceptual de los estudiantes, en inglés conceptual understanding, donde Mantyla y Koponen señalan desde la educación de la física que el entendimiento conceptual se refiere al entendimiento del contenido y del significado de los conceptos, con un énfasis en el entendimiento cualitativo. Y también Townbridge y McDermott establecen como indicador del nivel de entendimiento conceptual a la medida en que se corresponde con el entendimiento de un físico, correspondencia que se basa en tres aspectos: La definición del concepto de manera operacionalmente aceptable; distinción del concepto de otros relacionados; y aplicación del concepto de manera satisfactoria.

Características del Test con opciones múltiples:

Test en donde se presentan 10 conceptos vectoriales distribuidos en 20 ítems. Cada ítem cuenta con cinco opciones múltiples (una sola respuesta correcta y cuatro incorrectas llamadas distractores). De estos ítems 11 evalúan el entendimiento en aspectos gráficos (ítems 1-5, 9-13, 19); 7 evalúan el entendimiento en cálculos de estos conceptos (ítems 8, 14, 15, 17, 18 y 20); y dos ítems evalúan los dos aspectos mencionados (ítems 7 y 16).

El análisis del desempeño del entendimiento conceptual de los estudiantes en el test se realizó en tres pasos: primero se realiza un **análisis general** del desempeño de los estudiantes, luego se agruparon los ítems según su **grado de dificultad**, y finalmente se realiza un análisis, en el cual se describe el **error más frecuente** que cometen los estudiantes en cada ítems. El grado de dificultad se determinó en tres diferentes: un grado de dificultad alto si el porcentaje de

respuestas correctas en el ítem era menor o igual al 50%; un grado medio si el porcentaje si este porcentaje se encontraba entre 50% y 75%, y un grado bajo si era mayor a 75%.

Centrando nuestro trabajo en el objeto de producto vectorial, a continuación presentamos la tabla que presenta cada ítem, remarcando aquellos que corresponden al producto vectorial el 12, 15 y 18, luego se indica el análisis del entendimiento que realizaron los investigadores sobre estos tres ítems en particular. Para luego mostrar las preguntas correspondientes a los ítems mencionados.

TABLA I. Resultados obtenidos en los ítems del TUV-español. Se presentan los diez conceptos vectoriales evaluados, la descripción de los ítems y los porcentajes obtenidos. La respuesta correcta se encuentra en cursiva y N es para los que no contestaron.

Concepto	Ítem	Descripción del ítem	A	B	C	D	E	N
Dirección	5	Elección de vectores con la misma dirección en una gráfica	9	3	<i>84</i>	1	3	0
	17	Cálculo de la dirección de un vector escrito en notación de vectores unitarios	<i>50</i>	10	17	13	9	1
Magnitud	20	Cálculo de la magnitud de un vector escrito en notación de vectores unitarios	6	<i>79</i>	6	7	1	1
Representación gráfica	10	Representación gráfica de un vector escrito en notación de vectores unitarios	4	<i>91</i>	1	2	2	0
Componente	4	Representación gráfica de la componente y de un vector	11	3	<i>80</i>	1	5	0
	9	Representación gráfica de la componente x de un vector	7	4	2	<i>85</i>	2	0
	14	Cálculo de la magnitud de la componente x de un vector (ángulo medido desde el eje y)	3	3	<i>71</i>	21	2	0
Vector unitario	2	Representación gráfica de un vector unitario	14	38	<i>39</i>	4	5	0
Suma	1	Representación gráfica de un vector suma en 2D	15	8	3	10	<i>64</i>	0
	7	Comparación de la magnitud del vector suma de dos vectores, con misma magnitud a 90° , con la magnitud de uno de los vectores	8	<i>76</i>	10	5	1	0
	16	Comparación de la magnitud del vector suma de dos vectores, con misma magnitud a 143.13° , con la magnitud de uno de los vectores	10	<i>60</i>	17	4	7	2

Resta	13	Representación gráfica de un vector resta en 2D	9	5	8	29	49	0
	19	Representación gráfica de un vector resta en 1D	1	28	6	6	58	1
Multiplicación escalar	11	Representación gráfica de la multiplicación de un vector por un escalar negativo	8	12	68	4	8	0
Producto punto	3	Interpretación geométrica del producto punto como proyección	25	37	23	9	5	1
	6	Cálculo del producto punto como $AB\cos\theta$	5	77	4	8	6	0
	8	Cálculo del producto punto de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios	47	8	23	8	14	0
Producto cruz	12	Interpretación gráfica del producto cruz como un vector perpendicular según la regla de la mano derecha	10	30	7	3	49	1
	15	Cálculo del producto cruz de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios	59	8	9	21	2	1
	18	Cálculo de la magnitud del producto cruz como $AB\sin\theta$	13	5	6	59	15	2

Vemos en la tabla que:

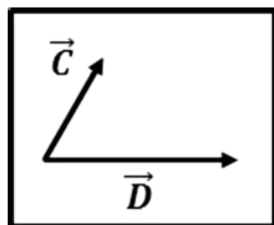
En el ítem 12 se evalúa la interpretación gráfica del producto cruz como un vector perpendicular según la regla de la mano derecha, en la cual el 49% de los estudiantes contesta de manera correcta, por lo que queda en el grupo de las preguntas con alto grado de dificultad, donde el error más frecuente (30%) es elegir un vector perpendicular a los dos vectores pero con una dirección opuesta.

En el ítems 15 se evalúa el cálculo del producto cruz de dos vectores escritos en notación de vectores unitarios, el 59% contesta correctamente por lo cual queda en el grupo de preguntas con grado de dificultad medio. El error más frecuente (21%) es elegir la respuesta con signo contrario.

Y en la pregunta 18 se evalúa el cálculo de la magnitud del producto cruz como $AB\sin\theta$, el 59% contesta correctamente, por lo que al igual que la anterior queda en un grado de dificultad medio. El error más frecuente (15%) es seleccionar la ecuación que corresponde al cálculo del producto punto.

Las preguntas correspondientes a cada ítem son las siguientes.

12. Abajo se muestran los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$. ¿Cuál de las siguientes opciones es la interpretación más adecuada del producto cruz ($\vec{C} \times \vec{D}$)?

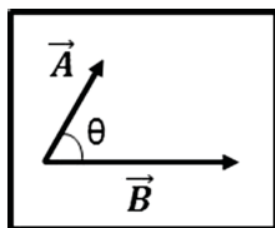


- (A) Un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\vec{C}$ y la dirección del vector $\vec{D}$.
- (B) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que “sale” de la hoja.
- (C) La magnitud de un vector apuntando hacia la derecha y arriba, entre la dirección del vector $\vec{C}$ y la dirección del vector $\vec{D}$.
- (D) Una cantidad con una dirección a favor del movimiento de las manecillas del reloj.
- (E) Un vector perpendicular a los dos vectores y con una dirección que “entra” a la hoja.

15. Se tiene el vector $\vec{A} = 1\hat{i} + 3\hat{j}$ y el vector $\vec{B} = 5\hat{i}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra el producto cruz ($\vec{A} \times \vec{B}$)?

- (A) $-15\hat{k}$
- (B) $5\hat{i} + 15\hat{k}$
- (C) $5\hat{i} + 3\hat{j}$
- (D) $15\hat{k}$
- (E) $6\hat{i} + 3\hat{j}$

18. Abajo se muestran los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo θ . $|\vec{A}|$ es la magnitud del vector $\vec{A}$ y $|\vec{B}|$ es la magnitud del vector $\vec{B}$. ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la magnitud del producto cruz ($\vec{A} \times \vec{B}$)?



- (A) $|\vec{A}| \cos \theta |\vec{B}| \sin \theta$
- (B) $|\vec{A}| |\vec{B}|$
- (C) $|\vec{A}| |\vec{B}| \sin(90^\circ - \theta)$
- (D) $|\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$
- (E) $|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$

Del análisis de estos artículos se desprende lo siguiente para esta investigación:

En el primero de ellos “**Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial**” se afirma como hipótesis que las dificultades que presentan los estudiantes es que no tienen una clara interpretación física o geométrica del producto vectorial, lo que tiene un origen de corte epistemológico.

Y del segundo “**Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español**”, la pregunta que evalúa la interpretación gráfica del producto cruz tiene un alto grado de dificultad, y las dos preguntas que avalúan el cálculo del producto cruz de dos vectores y el cálculo de la magnitud del producto cruz respectivamente tienen un nivel de dificultad medio.

O sea que ambas investigaciones reportan que una de las mayores dificultades de los estudiantes, referidas al aprendizaje del producto vectorial es la falta o mayor dificultad en su interpretación geométrica, teniendo menos dificultades en el cálculo de éste.

1.2 PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

En base a los antecedentes expuestos la problemática se basa en que los estudiantes tienen dificultades para comprender el objeto matemático de producto vectorial en sus distintas formas de pensarlo y entenderlo, ya sea aritmética, geométrica o estructural. Ya que centran su comprensión principalmente en su forma *analítico-aritmética*, esto es, relaciones numéricas que permiten calcular el “*producto vectorial*”, lo cual consideramos que conduce a que el estudiante lo utilice en diversos problemas sólo como un algoritmo que permite calcularlo, lo que no le permite acceder a una abstracción mayor del objeto, y va en contraposición con “El aprendizaje del álgebra lineal no puede reducirse a la práctica y al dominio de un conjunto de procedimientos de cálculo.” (Parraguez, 2012, p. 14).

En este sentido el aprendiz entiende las propiedades del objeto matemático sólo como algoritmos, por lo que tiene dificultades para comprenderlas. Por ejemplo si bien es aceptado por todos que $6 \times 5 = 5 \times 6$, lo que es algo tan obvio, que no merece comentario alguno, ya que consideramos que la ley conmutativa le es intrínseca a la multiplicación. Pero ante el producto vectorial el aprendiz debe cambiar su concepción, y aceptar que $\vec{a} \times \vec{b}$ no es igual $\vec{b} \times \vec{a}$, sino que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (con $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$), siendo la propiedad de Simetría alternada (que implica la no-conmutatividad) la que rige este producto cruz. Pero no sólo esta propiedad causa controversias en el alumno, sino también otras: como la que afirma que si el producto cruz de dos vectores es igual a cero, no siendo necesariamente uno de ellos es un vector nulo, sino por el contrario uno de los vectores es múltiplo escalar del otro; y también aquella en que $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$ (en donde θ es el (menor) ángulo entre u y v), la cual no es sólo

una fórmula que permite calcular el área, sino que está implícita la relación entre la igualdad del área del paralelogramo, con la longitud del producto vectorial, la cual no es claramente percibida por los alumnos.

A partir de la problemática se plantean las siguientes preguntas que guiarán la investigación:

1) ¿Cómo comprenden el objeto matemático de producto vectorial, los estudiantes de cuartos años medios y universitarios? ¿Logran transitar a otros modos de pensar el objeto o sólo se sitúan desde un modo de pensar analítico aritmético en la resolución de problemas?

2) ¿Cómo lograr que estudiantes universitarios (pregrado y post grado) logren una mayor comprensión del objeto matemático de producto vectorial? En la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático de estudio.

1.3 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Objetivo General

Presentar un conjunto de sugerencias didácticas a partir de actividades, basadas en la búsqueda de una mayor comprensión del concepto producto vectorial en estudiantes universitarios (pregrado y postgrado).

Objetivos específicos

- 1.** Distinguir y precisar los distintos modos de pensar y entender el objeto matemático de producto vectorial sustentándolos en base a un análisis histórico epistemológico. Y pesquisar elementos de la matemática que permitan la articulación entre los distintos modos de pensar el objeto matemático.
- 2.** Investigar cómo piensan o entienden los distintos modos de pensar del producto vectorial (cómo se sitúan en determinado modo de pensamiento del objeto matemático de investigación) los estudiantes de cuarto año de enseñanzas media y, de pregrado en preguntas donde está presente el concepto de producto vectorial. Y determinar si privilegian el modo analítico aritmético por sobre otro modo de pensamiento.

3. Diseño y aplicación de situaciones que permitan que los estudiantes transiten hacia el modo Estructural, no sólo a partir de un modo AA, sino también desde un modo SG, o también que se situé directamente en el modo estructural para dar respuesta al problema. En la búsqueda de una mayor comprensión del objeto matemático del producto vectorial.

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

Se presenta una epistemología del producto vectorial, para lo cual se presentan tres etapas de la historia del producto vectorial, obtenido de un artículo referente a la enseñanza y aprendizaje de la física. Para luego presentar los distintos modos de pensar de matemáticos y físicos en distintos períodos de tiempo, marcados por las etapas mocionadas, en dicho artículo. Este análisis epistemológico permite sustentar los distintos modos de pensamiento que se levantarán en uno de los capítulos siguientes.

2.1 EPÍSTEMOLOGÍA DEL PRODUCTO VECTORIAL

El análisis histórico-Epistemológico que se realizó del producto vectorial, permitió **mirar las distintas formas de entender que se tuvieron de este objeto matemático en distintos períodos de tiempo**, desde una **forma aritmética en sus inicios**, pasando por una forma de pensar principalmente **geométrica en una etapa intermedia**, y finalmente en una forma **estructural en la etapa en que se consolida el análisis vectorial**. Esto permite definir los distintos modos de pensamiento, en la búsqueda de un tránsito entre ellos, para lograr una comprensión profunda del objeto.

El Producto Vectorial nace a partir del descubrimiento de los Cuaterniones por Sir William Rowan Hamilton en el año 1843, quien fue uno de los fundadores de la matemática moderna. Hamilton en esos años en sus trabajos sobre mecánica, comienza una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones. Dirige así su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero durante muchos años no logra encontrar resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular al investigar una estructura para el producto. En esta operación observa que si bien la propiedad de conmutatividad es inherente a ella, Hamilton tuvo que dar un gran salto en la historia, abandonando ésta propiedad y aceptando que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbb{R}^3$).

Además al intentar entender la multiplicación en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los Cuaterniones, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del cuaternión, dio origen también al producto vectorial o producto cruz.

A partir de allí la historia del Producto vectorial está enlazada con la de los Cuaterniones, Según Gustavo Sierra y Pierre Francois (2008), en el artículo de “historia sobre una Epistemología del Producto Vectorial”, se distinguen **tres etapas de la historia del producto vectorial**:

- La **primera** referida a “**Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones**” y el nacimiento del producto vectorial.
- La **segunda etapa** llamada “**Los defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton**”. Uno de los principales defensores fue Peter Guthrie Tait, quien publica un libro, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton, en uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial (cruz).

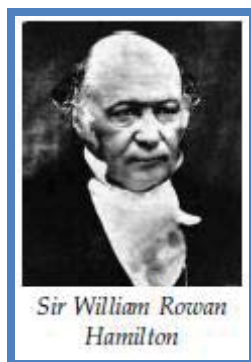
Un detractor de la teoría fue James Clerk Maxwell, quien rechaza a los cuaterniones por tener una doble constitución, una escalar y otra vectorial, lo que dificulta su aplicación en diversos problemas, pero sí considera a esta teoría como una herramienta para entender de forma geométrica el cálculo, lo que implica aprehender a resolver un problema a través de su comprensión geométrica. Además realiza el producto de la parte escalar separado del producto de la parte vectorial, no considerando el producto del cuaternión en su totalidad.

Esta etapa se caracteriza por que se considera que la teoría de los cuaterniones, constituyen una transición entre el cálculo geométrico plano al análisis vectorial.

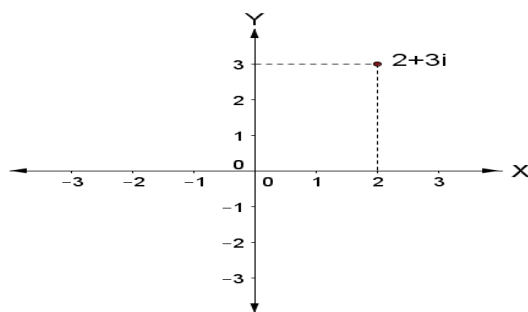
- Y la última **etapa**, llamada “**el nacimiento del análisis moderno**”, aquí destaca Josiah Willard Gibbs quién separa de forma definitiva la parte escalar de la vectorial de un cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto cruz, dando así inicio al análisis moderno.

2.1.1 Distintas formas de entender del objeto matemático “producto vectorial” en distintos períodos de tiempo:

2.1.1.1 William Rowan Hamilton piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma analítica aritmética, en la etapa “Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones”:

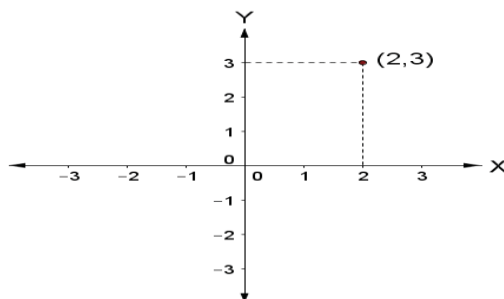


En la primera etapa con el descubrimiento del número complejo fue posible pasar de un álgebra de números reales a un álgebra doble de números complejos, su representación geométrica en el plano realizada por Wessel, Argand y Gauss permite que matemáticos y físicos realicen operaciones vectoriales sin definir aún el concepto de vector. Pero su utilidad es limitada al plano siendo necesaria una versión tridimensional de ellos.



Fue así como por recomendación de su amigo John Graves, Hamilton lee el artículo recién publicado (año 1828) llamado “Tratado sobre la representación geométrica de las raíces cuadradas de cantidades negativas” de John Warren, en el cual se encontraba una descripción de la representación de los números complejos de Argand. Hamilton cautivado por esta representación realizó su primera creación que consistió en desarrollar los números complejos como pares ordenados de números reales, definiendo operaciones entre ellos. Es allí cuando

nace espontáneamente en él la pregunta ¿existirán ternas con las cuales se pueda tratar la geometría en tres dimensiones?



Si bien los cuaterniones nacen de un intento por extender la comprensión geométrica de los números complejos a tres dimensiones, progresivamente Hamilton abandona esta idea centrando su atención en los números complejos cuatro dimensionales sin necesidad de una interpretación geométrica. Por lo que a partir del descubrimiento de su teoría de los cuaterniones Hamilton dedica la mayor parte de su tiempo en desarrollarla, centrándose en una forma de entenderla principalmente algebraica.



El 16 de octubre de 1.846 tenía que presidir una reunión en la Royal Academy, hacía allá se dirigía junto a su esposa a lo largo del canal de Dublín, y mientras ella hablaba, sus pensamientos estaban en otras cosas, como él mismo lo describe “pareció como si se cerrara un circuito eléctrico, y saltara una chispa”. Sacó su cuaderno de notas rápidamente y anotó sus pensamientos, tan emocionado estaba que con un cortaplumas lo escribió en una piedra, y lo que allí escribió fue su nuevo descubrimiento: los números hipercomplejos cuatro dimensionales, los cuaterniones.

Los cuaterniones son números hipercomplejos de la forma: $a + bi + cj + dk$, donde a , b y c son números reales, e i, j, k las unidades imaginarias que satisfacen la fórmula fundamental: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, donde rige la propiedad de no conmutatividad, por lo que para realizar cálculos aritméticos se utilizan las siguientes fórmulas:

$$ij = -ji, \quad ik = -ki, \quad jk = -kj$$

$$i = jk, \quad -i = kj, \quad j = ki, \quad -j = ik, \quad k = ij, \quad -k = ji$$

Un ejemplo de la multiplicación de dos cuaterniones:

$$\begin{aligned}
 & (2 + 3i + j + k) \cdot (4 + 3i + 2j + k) = \\
 & = 8 + 6i + 4j + 2k + 12i + 9i^2 + 6ij + 3ik + 4j + 3ji + 2j^2 + jk + 4k + 3ki + 2kj + k^2 \\
 & = 8 + 6i + 4j + 2k + 12i - 9 + 6k - 3j + 4j - 3k - 2 + i + 4k + 3j - 2i - 1 \\
 & = -4 + 17i + 8j + 9k
 \end{aligned}$$

Hamilton designo al término constante de sus cuaterniones “escalar” y la parte con términos i, j y k como parte “vectorial”, siendo el primero en utilizar la palabra vector.

Del ejemplo anterior:

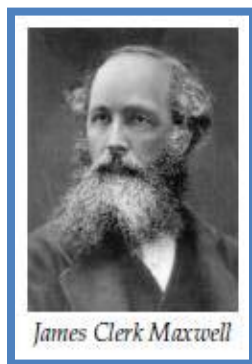
$$\begin{array}{ccc}
 \underline{-4} & + & \underline{17i + 8j + 9k} \\
 \text{escalar} & & \text{vectorial}
 \end{array}$$

Siendo consciente de la dificultad que implicaba esta doble constitución escalar y vectorial a la vez; ya sea porque a la parte escalar no es posible darle una interpretación geométrica, mientras que la vectorial sí, y además por las aplicaciones que permiten, Hamilton al multiplicar dos cuaterniones propone aplicarla con la parte escalar igual a cero, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= (0 + x_1i + y_1j + z_1k) \cdot (0 + x_2i + y_2j + z_2k) = \\
 \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= \underline{(y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k} - \underline{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)} \\
 &\quad \text{componentes producto vectorial} \qquad \qquad \text{componentes producto escalar}
 \end{aligned}$$

Podemos apreciar que se obtienen las componentes de lo que hoy en día se denomina el producto vectorial y también el producto escalar, por tanto tenemos que el producto vectorial nace de este producto de cuaterniones con la parte escalar igual a cero. Por tanto vemos como William Rowan Hamilton en esta primera etapa **piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma analítica aritmética**, producto que utilizará en esta forma aritmética a lo largo de la continuación de su investigación sobre los cuaterniones.

2.1.1.2 James Maxwell y William Clifford, piensan el objeto matemático de producto vectorial en su forma geométrica, en las etapas de “Los defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton”, y “el nacimiento del análisis moderno” respectivamente.



Si bien Maxwell rechaza los cuaterniones por tener dos partes no homogéneas, una escalar y otra vectorial, igualmente los consideraba importantes para el desarrollo de la física, en la introducción de su segundo tratado “Tratado sobre electricidad y magnetismo” escribe:

...Estoy convencido, sin embargo, que la introducción de las ideas y métodos de los Cuaterniones, será de un gran uso para el estudio de todas las partes de nuestra materia, y especialmente de la electrodinámica, donde tenemos que tratar con un gran número de magnitudes físicas, y las relaciones entre ellas pueden ser expresadas de forma muy simple haciendo uso del método de Hamilton, en lugar de las ecuaciones de costumbre. (...) 11. Una de las características más importantes del método de Hamilton, es la división de las magnitudes en Escalares y Vectores”

Vemos que Maxwell utiliza ya sea la parte escalar o la parte vectorial del cuaternión, considerando que serán de gran utilidad para el estudio de la electrodinámica, señalando además que un gran número de magnitudes físicas pueden ser expresadas de forma más simple, porque él veía el gran potencial de la parte vectorial del cuaternión, el cual permite variadas interpretaciones geométricas en problemas de física.

Con esta parte vectorial, utiliza de manera repetitiva la noción de vector, realiza operaciones como suma, producto escalar, producto vectorial, etc. En cuanto al producto vectorial se

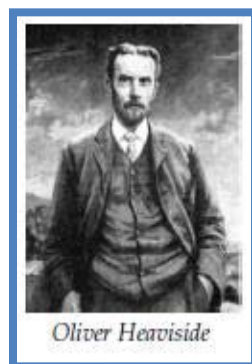
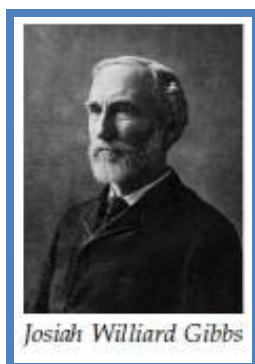
destaca su interpretación geométrica en física, lo que queda plasmado en la gran obra de Maxwell, su teoría del electromagnetismo.



Al igual que otros matemáticos y físicos Clifford consideraba que el producto de vectores que se obtenía de la multiplicación de dos cuaterniones tenía un uso muy limitado, por lo que fue uno de los primeros en deshacerse de la utilización del manejo de la multiplicación de un cuaternión considerando su parte escalar y vectorial juntos, sino que separa definitivamente la parte escalar de la vectorial. En su *Elementos de Dinámica* publicado en 1878, introduce el producto vectorial donde sus consideraciones para establecerlo son principalmente geométricas, definiéndolo como el área del paralelogramo que resulta del movimiento de un vector $\vec{uv}$ sobre un vector $\vec{uw}$, la cual es igual al vector de longitud $(\vec{uv} \cdot \vec{uw})\text{sen}(vuw)$.

Por tanto vemos que tanto Maxwell como en Clifford **entienden el objeto matemático de producto vectorial en su forma geométrica**, destacándola por sus posibles interpretaciones geométricas a los problemas en física.

2.1.1.3 Josiah Williard Gibbs piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma estructural, en la etapa del “nacimiento del análisis moderno”.



Tanto Heaviside como Gibbs publican sus tratados en los años 1881 y 1882 respectivamente, donde Heaviside desarrolla el cálculo vectorial en el campo del electromagnetismo desarrollando su sistema en función de aplicaciones prácticas.

Por otra parte Gibbs con mayor rigor matemático, con un sistema más estructurado demuestra nuevos teoremas por medio del análisis vectorial. Utilizando sólo la porción vectorial de un cuaternión para representar cantidades físicas, es decir $U = bi + cj + dk$, introduciendo formalmente dos nuevos tipos de multiplicación: el producto escalar y el producto vectorial, que gracias a los desarrollos del álgebra y la teoría de determinantes de Gibbs y Heaviside se define el producto vectorial como lo conocemos hoy en día:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Por lo que en esta etapa del nacimiento del análisis moderno, Gibbs quien por su rigor matemático que lo lleva a enunciar y demostrar nuevos teoremas en análisis vectorial, **piensa el objeto matemático de producto vectorial en su forma estructural.**

CAPÍTULO 3

EL PRODUCTO VECTORIAL DESDE LA MATEMÁTICA

Aquí prestamos la definición del producto vectorial, y sus propiedades a partir de un Teorema, para luego mostrar su interpretación geométrica, para finalmente definir las nemotecnias más utilizadas para el cálculo del producto vectorial.

3.1 Producto Vectorial

Definición:

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial $u \times v$ (en este orden) se define como el vector:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

A partir de esta definición se deducen las propiedades siguientes.

Teorema: Para todos los vectores u, v, w de $\mathbb{R}^3$, y para todo número real α tenemos:

- a) $u \times v = -(v \times u)$. (Anti-conmutatividad o Simetría Alternada)
- b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$. (Ley Distributiva)
- c) $\alpha(u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$. (Asociatividad con escalares)
- d) $u \times v$ es un vector ortogonal a u y a v . (Ortogonalidad respecto a u y a v)
- e) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$, en donde θ es el (menor) ángulo entre u y v . (Identidad de Lagrange).
- f) $u \times v = 0$, si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

Demostración:

a) Sean:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \text{ y}$$

$$v \times u = (u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2), \text{ por definición del producto vectorial.}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } -(v \times u) &= -(u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

Por tanto, $u \times v = -(v \times u)$

$$\begin{aligned} \text{b) } u \times (v + w) &= (u_1, u_2, u_3) \times [(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)] \\ &= (u_1, u_2, u_3) \times [(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_2(v_3 + w_3) - u_3(v_2 + w_2), u_3(v_1 + w_1) - u_1(v_3 + w_3), u_1(v_2 + w_2) - u_2(v_1 + w_1)) \\
&= ((u_2v_3 + u_2w_3) - (u_3v_2 + u_3w_2), (u_3v_1 + u_3w_1) - (u_1v_3 + u_1w_3), (u_1v_2 + u_1w_2) - (u_2v_1 + u_2w_1)) \\
&= (u_2v_3 + u_2w_3 - u_3v_2 - u_3w_2, u_3v_1 + u_3w_1 - u_1v_3 - u_1w_3, u_1v_2 + u_1w_2 - u_2v_1 - u_2w_1) \\
&= ((u_2v_3 - u_3v_2) + (u_2w_3 - u_3w_2), (u_3v_1 - u_1v_3) + (u_3w_1 - u_1w_3), (u_1v_2 - u_2v_1) + (u_1w_2 - u_2w_1)) \\
&= ((u_2v_3 - u_3v_2), (u_3v_1 - u_1v_3), (u_1v_2 - u_2v_1)) + ((u_2w_3 - u_3w_2), (u_3w_1 - u_1w_3), (u_1w_2 - u_2w_1)) \\
&= (u \times v) + (u \times w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \alpha(u \times v) &= \alpha(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= (\alpha(u_2v_3 - u_3v_2), \alpha(u_3v_1 - u_1v_3), \alpha(u_1v_2 - u_2v_1)) \\
&= ((\alpha u_2)v_3 - (\alpha u_3)v_2, (\alpha u_3)v_1 - (\alpha u_1)v_3, (\alpha u_1)v_2 - (\alpha u_2)v_1) \\
&= (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \\
&= (\alpha u) \times v
\end{aligned}$$

d) $u \times v$ es un vector ortogonal a u y a v .

$$\begin{aligned}
u \cdot (u \times v) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v \cdot (u \times v) &= (v_1, v_2, v_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= v_1(u_2v_3 - u_3v_2) + v_2(u_3v_1 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - u_2v_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$, en donde θ es el (menor) ángulo entre u y v .

$$\begin{aligned}
\text{(i) } \|u \times v\|^2 &= \|(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\|^2 \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2
\end{aligned}$$

$$= u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_1^2 - 2u_3 v_1 u_1 v_3 + u_1^2 v_3^2 + u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\theta) &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2(\theta) \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 - (\|u\| \|v\| \cos(\theta))^2 \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\
&= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2 + \\
&\quad u_3^2 v_3^2 - [(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)] \\
&= u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_3 u_3 v_2 + u_3^2 v_2^2 + u_3^2 v_1^2 - 2u_3 v_1 u_1 v_3 + u_1^2 v_3^2 + \\
&\quad u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1 + u_2^2 v_1^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (i) y (ii) se tiene que: $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\theta)$, luego extrayendo raíz cuadrada: $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta)$.

f) $u \times v = 0$, si y sólo si u y v son linealmente dependientes.

$\Rightarrow$

Si $u \times v = 0$, se tiene que $\|u \times v\| = 0$, por lo que $\|u\| \|v\| \sin(\theta) = 0$

Luego:

(i) Si $u = 0$, entonces $u = 0v$, (u es múltiplo de v)

(ii) Si $v = 0$, entonces $v = 0u$, (v es múltiplo de u)

(iii) Si $u \neq 0$, $v \neq 0$, entonces $\sin(\theta) = 0$ y por tanto se tiene $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Por tanto de (i), (ii) y (iii) u y v son linealmente dependientes.

$\Leftarrow$

Si u y v son linealmente dependientes, entonces dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha u$, entonces

$$u \times v = u \times (\alpha u) = \alpha(u \times u) = \alpha 0 = 0.$$

3.1.1 Interpretación geométrica del producto vectorial

1. Si los vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes (colineales), entonces $u \times v = 0$

2. Si los vectores u y v en $\mathbb{R}^3$ no son linealmente dependientes (no colineales), entonces $u \times v$

es un vector definido de la siguiente forma:

(a) su dirección es perpendicular al plano que forman u y v .

(b) su sentido depende de las posiciones relativas de los vectores unitarios coordenados i, j y k , si estos se colocan como se ve en la figura a) se dice que forman un sistema coordenado orientado en sentido directo, por lo que la dirección queda determinada por la regla de la mano derecha (figura). Y si el sistema coordenado es orientado en sentido retrógrado figura b), la dirección es opuesta y queda determinada por la regla de la mano izquierda (figura).

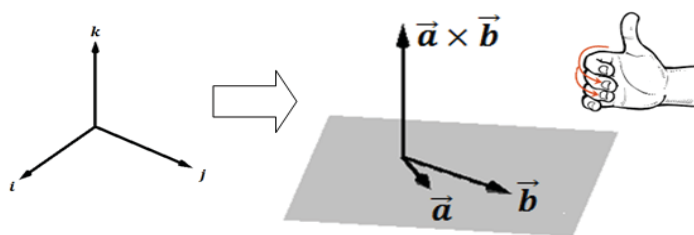


Figura a)

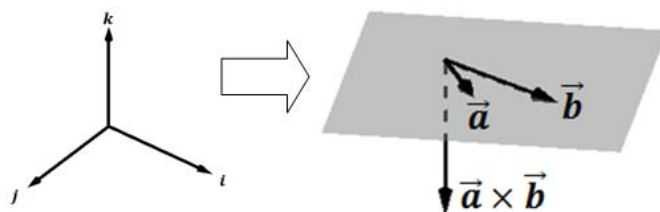


Figura b)

(c) su módulo es igual a $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\text{sen}(\theta)$, donde θ es el menor ángulo entre u y v .

Figura c)

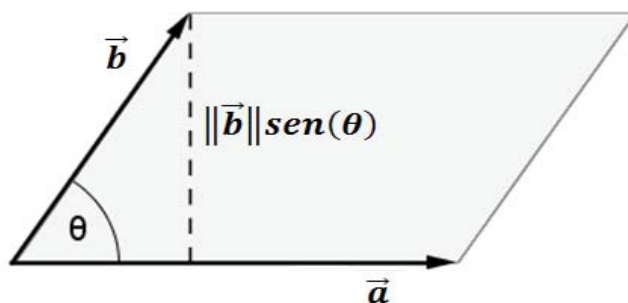


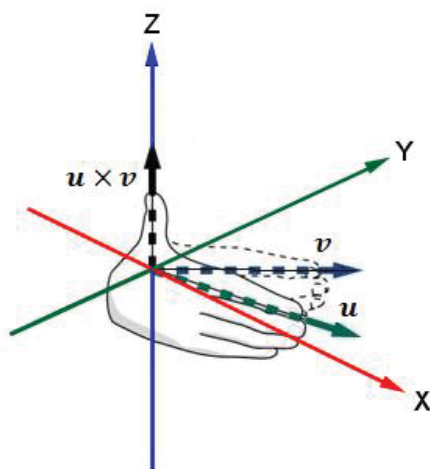
Figura c)

3.1.2 Nemotecnias

Para calcular el producto vectorial se utilizan diversas nemotecnias, las cuales definiremos a continuación:

Regla de la mano derecha: Permite determinar la dirección y sentido del producto vectorial.

Cuando u gira hacia v , de modo que cerrando los dedos de la mano derecha desde el vector u hacia el vector v , el pulgar apuntará entonces en la dirección y sentido de $u \times v$.



Seudo determinante:

Los determinantes permiten expresar la fórmula que define al producto vectorial de forma más compacta.

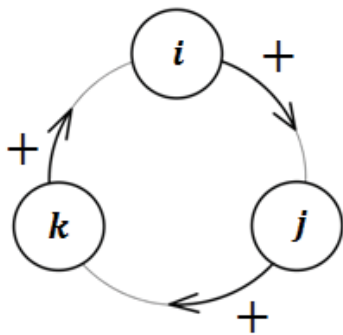
Sean $u = (u_1, u_2, u_3) = u_1i + u_2j + u_3k$, $v = (v_1, v_2, v_3) = v_1i + v_2j + v_3k$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial $u \times v$ de u y v es el vector:

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)i - (u_1v_3 - u_3v_1)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

Ejemplo: Para calcular el producto vectorial de $u = -i + 2k$ y $v = 2i + j - k$, escribimos:

$$\begin{aligned}
 u \times v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k \\
 &= (0 - 2)i - (1 - 4)j + (-1 - 0)k \\
 &= -2i + 3j - k \\
 &= (-2, 3, -1)
 \end{aligned}$$

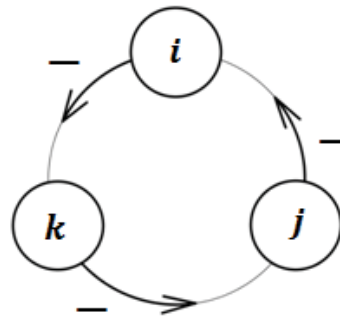
Diagrama cíclico: Permite determinar los productos vectoriales de los vectores bases $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $k(0,0,1)$.



$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$



$$j \times i = -k$$

$$k \times j = -i$$

$$i \times k = -j$$

De donde se tiene que:

$$i \times j = k = -(j \times i)$$

$$j \times k = i = -(k \times j)$$

$$k \times i = j = -(i \times k)$$

CAPÍTULO 4

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta el Marco Teórico utilizado en la investigación, primero se define el Marco Teórico, luego se definen los tres modos de pensamiento planteados por esta Teoría, luego se realiza la justificación de la utilización del marco en la investigación, dado que es el mejor lente que permite mirar la problemática planteada y por consiguiente permite abordar los objetivos de investigación. Y finalmente se levantan los distintos modos de pensar del producto vectorial sustentados en un análisis histórico epistemológico.

4.1 MARCO TEÓRICO: LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Los modos de pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpiska, que permiten interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos del álgebra o del álgebra lineal.

La comprensión de las teorías matemáticas, en particular del álgebra lineal, requiere tanto de pensamiento práctico como de pensamiento teórico. A partir de allí Sierpiska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpiska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos: uno, que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Además ella señala que el desarrollo del álgebra lineal se da en dos procesos: Uno fue la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica, y el otro fue la desaritmetización del espacio a su estructuración.

Es así entonces como esta teoría define los tres modos de pensamiento que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y además permite la coordinación y el tránsito entre ellos, en que cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener acceso a diferentes facetas del objeto matemático.

4.1.1 LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Como se señaló en el párrafo anterior los modos de pensamiento propuestos en esta teoría no sólo nos ofrecen distintas formas de pensar y entender el objeto matemático, sino que además permite la coordinación y el tránsito entre ellos, permite un pensamiento más versátil en el estudiante al momento de resolver un problema donde esté involucrado el objeto matemático, ya que dispone de distintas definiciones del objeto, actuando los modos de pensamiento como herramientas heurísticas.

Sierpinska define tres modos de pensamiento, el Sintético Geométrico que se corresponde con el pensamiento práctico, y los modos Analítico Aritmético y Analítico Estructural que se corresponden con el pensamiento Teórico, estos se describen a continuación:

El modo sintético-geométrico (SG): Los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos, esto es la unión, la intersección, etc. (Parraguez, 2012, p. 17).

El modo analítico-aritmético (AA): Los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n -uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas. (Parraguez, 2012, p. 17).

El modo analítico-estructural (AE): Se recurre más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial. (Parraguez, 2012, p. 18).

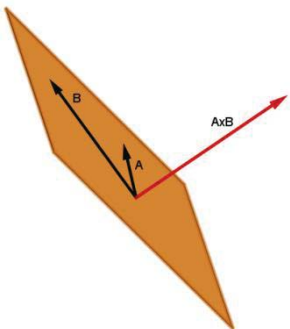
4.2 JUSTIFICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO

Desde la problemática y los objetivos de investigación, se realiza la elección del Marco Teórico de los Modos de Pensamiento propuestos por Ana Sierpinska ya que al ser diseñado con el fin de alcanzar la abstracción en el Álgebra Lineal, se acomoda a este objeto matemático de “*producto vectorial*”, brindándole distintas formas de pensarlo y entenderlo, permitiendo describir la forma de cómo los estudiantes se sitúan en determinadas formas de pensar el objeto matemático; además de permitir indagar en qué modo de pensar privilegian los estudiantes, y movilizar los distintos modos de pensar del objeto matemático estableciendo las conexiones entre ellos.

4.3 MODOS DE PENSAR DEL PRODUCTO VECTORIAL

Para sustentar y describir las articulaciones entre los modos SG, AA y AE del producto vectorial se realizó un análisis histórico epistemológico en el cuál identificamos distintos

modos de pensamiento de matemáticos y físicos, en diferentes períodos de tiempo: En una forma de pensar Aritmética por William Rowan Hamilton en la etapa “Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones”; en una forma de entender Geométrica por Maxwell y Clifford en las etapas de “defensores y detractores de los cuaterniones de Hamilton” y en la etapa de “el nacimiento del análisis moderno” respectivamente. Y finalmente en una forma de pensar Estructural, por Gibbs en la etapa de “el nacimiento del análisis moderno”. Estos modos se describen a continuación:

MODOS DE PENSAR DEL PRODUCTO VECTORIAL		
Modo Sintético-Geométrico del producto vectorial SG	Se describe a través de la Figura 1.  <i>Figura 1: Producto vectorial como el vector normal a los otros dos.</i>	
Modo Analítico-Aritmético del producto vectorial AA	Se describe a partir de una fórmula que permite calcularlo. Sean $P = (a_1, a_2, a_3)$ y $Q = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. $P \times Q = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$	
Modo Analítico-Estructural del producto vectorial AE	Se describe a partir de tres propiedades que lo caracterizan. Sean P, Q y R en $\mathbb{R}^3$:	
	Propiedad 1 P1 AE	$P \times Q = -(Q \times P)$ Simetría Alternada
	Propiedad 2 P2 AE	$P \times Q = 0$, si y solo si, P y Q son linealmente dependientes.
	Propiedad 3 P3 AE	$\ u \times v\ = \ u\ \ v\ \sin(\theta)$, en donde θ es el (menor) ángulo entre u y v .

CAPÍTULO 5

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la Metodología de investigación la cual fue diseñada en base a los objetivos específicos propuestos en el capítulo 1. Esta metodología consta de tres fases, la primera consta de una revisión bibliográfica tanto de artículos referentes a la epistemología del objeto matemático, como a textos sobre algebra lineal, para sustentar los modos de pensamiento, así como los elementos de la matemática que permiten la articulación entre ellos. La segunda fase de investigación se corresponde con el diseño y aplicación de una medición inicial para documentar la problemática de estudio; y última fase, la número tres que consta del diseño ya aplicación de actividades de aprendizaje cuya finalidad es la búsqueda de una mayor comprensión del objeto matemático de producto vectorial.

5.1 METODOLOGÍA

En esta tabla se presentan los objetivos de investigación definidos en el capítulo 1, a partir de los cuales se determinaran las distintas Fases de investigación correspondientes al Diseño Metodológico.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN
Presentar un conjunto de sugerencias didácticas a partir de un cuestionario y entrevistas, basadas en la búsqueda de una comprensión profunda del concepto producto vectorial en estudiantes universitarios (pregrado y postgrado).
Objetivos específicos de investigación
1. Distinguir y precisar los distintos modos de pensar y entender el objeto matemático de producto vectorial sustentándolos en base a un análisis histórico epistemológico. Y pesquisar elementos de la matemática que permitan la articulación entre los distintos modos de pensar el objeto matemático.
2. Investigar cómo piensan o entienden los distintos modos de pensar del producto vectorial (cómo se sitúan en determinado modo de pensamiento del objeto matemático de investigación) los estudiantes de cuarto año de enseñanzas media y, de pregrado en preguntas donde está presente el concepto de producto vectorial. Y determinar si privilegian el modo analítico aritmético por sobre otro modo de pensamiento.
3. Diseño y aplicación de situaciones que permitan que los estudiantes transiten hacia el modo Estructural, no sólo desde un modo AA, sino también desde un modo SG, o también situándose directamente en el modo AE para dar respuesta al problema. En la búsqueda de una mayor comprensión del objeto matemático del producto vectorial.

Se considera pertinente la utilización de un diseño metodológico cualitativo de estudio de casos para la descripción y análisis detallados de los objetivos específicos 2 y , ya que es un diseño de investigación particularmente apropiado para estudiar un caso o situación con cierta intensidad en un período de tiempo corto, (Arnal, Del Rincón Y Latorre, 1992), cuya finalidad se orienta en la comprensión profunda de la realidad singular de casos de estudio, que pueden ser: un individuo, un grupo, una familia, etc.

En esta investigación se realiza un estudio de casos múltiple que permite estudiar dos o más sujetos de investigación, estos construirán nuestros casos de estudio, los cuales no son elegidos al azar, sino por el contrario cada elección persigue un propósito, ya que entendemos que “la investigación con estudio de casos no es una investigación de muestras” (Stake, 2010) con la que se pretenda establecer leyes generales, sino que lo que se busca es comprender realidades concretas dentro de un contexto global.

Además se precisa como técnica cualitativa de recolección de datos el cuestionario y la entrevista semi estructurada seleccionados por su propiedad para dar respuesta a los objetivos de investigación mencionados.

El Diseño Metodológico consta de tres Fases:

FASE DE INVESTIGACIÓN 1:

La primera fase de investigación, diseñada para dar respuesta al objetivo específico 1, se corresponde con la revisión bibliográfica de: artículos de investigación desde la enseñanza de la Física, para la realización de un análisis histórico epistemológico con el objetivo de levantar y sustentar los tres modos de pensar el producto vectorial; textos de Matemáticas, en su mayoría de Álgebra Lineal, para indagar en elementos de la matemática que permitan la coordinación entre los distintos modos de pensar el objeto matemático de estudio. Esta revisión bibliográfica se realizó en textos que se encuentran en la casa de estudio donde se seleccionan los informantes o sujetos de investigación, por lo que se encuentran disponibles para su uso.

FASE 1: Análisis Histórico epistemológico y Matemático del producto vectorial	
Revisión	Antecedentes epistemológicos y matemáticos para sustentar los distintos

Bibliográfica	modos de pensar e indagar en elementos de la matemática que permitan articular los distintos modos de pensar el objeto matemático de estudio, respectivamente.
---------------	--

FASE DE INVESTIGACIÓN 2:

La segunda fase de investigación, busca dar respuesta al objetivo específico 2, y se corresponde con el diseño y aplicación de una medición inicial, con la finalidad de sustentar la problemática de estudio. El instrumento consta de tres preguntas que permiten indagar cómo comprenden los distintos modos de pensar el objeto matemático de producto vectorial, y determinar si privilegian el modo AA por sobre otro. Esta se aplica a dos casos de estudio: estudiantes de cuarto año de enseñanza media y; de pregrado de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas que cursan su tercer semestre por lo que ya aprobaron el curso de álgebra lineal. En ambos Casos lo estudiantes ya cursaron la unidad de Vectores y, de Geometría Vectorial respectivamente, unidades donde se encuentra inserto el contenido correspondiente al producto vectorial.

Casos de Estudio:

Diseño Metodológico	Instrumento	Casos de Estudio
Estudio de Casos	Cuestionario	Caso 1: 23 estudiantes de Cuarto año medio
		Caso 2: 10 estudiantes de Pregrado que cursan su tercer semestre de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas.

Los casos de estudio quedan constituidos de la siguiente forma:

Caso 1: Conformado por 23 estudiantes de cuarto año de enseñanza media, de un Colegio Particular ubicado en la Quinta Región de Valparaíso, Chile.

Designaremos a estos estudiantes como E1.1, E1.2, E1.3,..., E1.23.

Caso 2: Formado por 10 estudiantes de Pregrado de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, la cual se imparte en una Universidad tradicional privada chilena ubicada en la región de Valparaíso.

Se designaron a los estudiantes de este caso como E2.1, E2.2, E2.3,..., E2.10.

Técnica Cualitativa de recolección de datos:

El instrumento de recogida de datos es el “cuestionario”, el cual está constituido por tres preguntas, cada uno con su(s) objetivo(s) específicos. Este cuestionario fue aplicado a los dos Casos de estudio en el mes de octubre del año 2014. A cada estudiante se le llevó una copia impresa del cuestionario, la cual consta de tres hojas en donde en cada una de ellas se corresponde con una pregunta.

Instrumento: Medición inicial	
Pregunta	Objetivo
1) De los vectores $A = (0,2,5)$, $B = (19,0,0)$ y $C = (0,5,3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es perpendicular a los otros dos, encuéntralo. Justifica.	1.1 Indagar cómo piensa o entiende el modo SG del producto vectorial. (Cómo se sitúa en el modo SG)
	1.2 Determinar si privilegia el modo AA por sobre el modo SG.
2) Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determina $A \times B$.	2.1 Indagar cómo piensa o entiende el modo AA del producto vectorial. (Cómo se sitúa en el modo AA)
3) Dados los vectores $A = (3,1,0)$, $B = (5,7,0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B . ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.	3.1 Indagar cómo piensa o entiende la propiedad 1 del modo AE. (Cómo se sitúa en el modo AE)

FASE DE INVESTIGACIÓN 3:

La **tercera Fase de investigación**, tiene como propósito es dar respuesta al objetivo específico 3, para lo cual se diseñan dos actividades de aprendizaje, cuya finalidad es permitir

que los estudiantes transiten hacia el modo Estructural, no sólo a partir de un AA, sino también desde un modo SG, o también que se situé directamente en el modo estructural para dar respuesta al problema. El instrumento consta de dos actividades que tienen por objetivo mostrar que si el estudiante presenta dificultades para transitar desde un modo AA hacia el modo AE (Actividad 1), se hace necesario que piense el objeto matemático desde otros modos de pensamiento, por lo que se busca que el estudiante realice este tránsito desde un modo SG transitando desde allí al modo AE, o también que logre situarse directamente en AE (Actividad 2).

Estas actividades se aplican a cuatro casos de estudio: estudiantes de pregrado de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas que cursan su quinto semestre; estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que se encuentran en el noveno semestre; un estudiante de post grado de la carrera de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas; estudiantes de Postgrado en Matemáticas, un Magister y un Doctorado. En los cuatro casos los estudiantes cursaron el curso de álgebra lineal.

Casos de Estudio:

Diseño Metodológico	Instrumento	Casos de Estudio
Estudio de Casos	Actividades	Caso 1: 12 estudiantes de Pregrado que cursan su quinto semestre de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas.
		Caso 2: 3 estudiantes de Pregrado que cursan su noveno semestre de la carrera de Licenciatura en Matemáticas.
		Caso 3: 1 estudiante de Postgrado que cursa su segundo semestre de la carrera de Doctorado en didáctica de las Matemáticas.
		Caso 4: 2 estudiantes de Postgrado, el primero cursa su primer semestre en la carrera de Magister en Matemáticas, y el segundo cursa su sexto semestre de la carrera de Doctorado en Matemáticas.

Los casos de estudio quedan constituidos de la siguiente forma:

Caso 1: Conformado por 12 estudiantes de Pregrado de la carrera de Pedagogía en Matemáticas.

De estos estudiantes seleccionamos las respuestas de acuerdo al objetivo planteado, quedándonos con tres de ellas. Designaremos a estos estudiantes como E1.1, E1.2 y E1.3.

Caso 2: Formado por 3 estudiantes de Pregrado de la carrera de Licenciatura en Matemáticas. Respuestas de las cuales seleccionamos dos, dado que la tercera era similar a una de estas. Designaremos a estos estudiantes por 2.1 y 2.2.

Caso 3: Constituido por 1 estudiante de Postgrado de la carrera de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas.

A este estudiante lo designaremos como E3.1

Caso 4: Integrado por 2 estudiantes, el primero que cursa la carrera de Magister en Matemáticas, y el segundo de la carrera de Doctorado en Matemáticas.

Designaremos a estos estudiantes por 4.1 y 4.2 respectivamente.

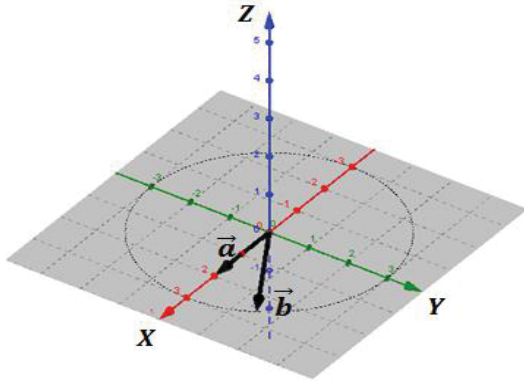
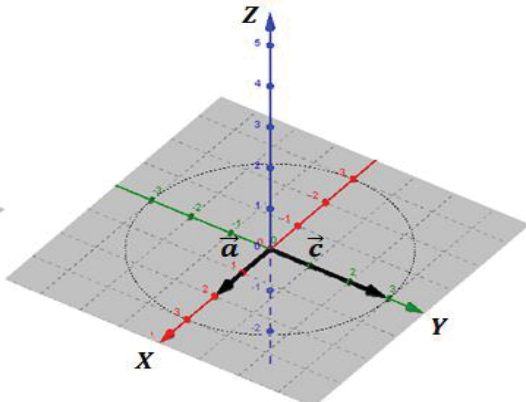
En los cuatro casos las carreras se imparten en una Universidad tradicional privada chilena ubicada en la región de Valparaíso.

Técnica Cualitativa de recolección de datos:

El instrumento de recogida de datos es el “cuestionario”, el cual está constituido por dos actividades, cada una con su(s) objetivo(s) específicos. Estas actividades fueron aplicadas a los cuatro Casos de estudio entre los meses de abril al mes de julio del año 2014. A cada estudiante se le llevó una copia impresa de las actividades, la cual consta de dos hojas en donde en cada una de ellas se corresponde con una actividad.

Instrumento: Actividad 1	
Dados los vectores $\vec{a} = (1,0,0)$ y $\vec{0} = (0,0,0)$.	
Pregunta	Objetivo
1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.	El objetivo es mostrar que aquellos estudiantes que presentan dificultades para transitar desde el modo AA al modo P2 AE,

	es porque no entienden en el objeto matemático de producto vectorial en otros modos de pensamiento.
1.2 Interpreta geoméricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.	Indagar si el estudiante posee algún modo de pensar geométrico sobre la solución encontrada en 1.1, lo cual lo consideramos como un tránsito desde el modo P2 AE al modo SG.

Instrumento: Actividad 2	
ACTIVIDAD 2	
Sea $\vec{a} = 2i = (2,0,0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$. En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6i + 1.5j = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\ \vec{b}\ = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$. En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3j = (0,3,0)$, donde $\ \vec{c}\ = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.	
 Figura a)  Figura b)	
Pregunta	Objetivo
2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.	Las tres actividades tienen dos objetivos: Observar si los alumnos responden situandose ya sea en el modo AA o en el modo SG, o se sitúan directamente en la propiedad 3 del modo AE, lo que les permitiría reducir los cálculos aritméticos.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta. 2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6i + 1.5j = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\ \vec{d}\ = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$. a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.	Y el segundo objetivo y más importante para nuestro objetivo general, es aportar información para que el alumno pueda realizar de mejor forma el tránsito entre el modo SG y el modo P2 AE, en la pregunta 2.4.
2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\ \vec{e}\ = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.	Mostrar que aquellos alumnos que tuvieron dificultades para transitar desde el modo AA al modo P2 AE en la actividad 1, estas dificultades pueden ser superadas logrando transitar hacia el modo AE desde un SG.

CAPÍTULO 6

ANALISIS A PRIORI Y RESULTADOS DE MEDICIÓN INICIAL

En este Capítulo se presenta el análisis a priori y a posteriori de la medición inicial, instrumento que fue diseñado para indagar cómo piensan o entienden los distintos modos de pensar del objeto matemático de producto vectorial, indagando si privilegian el modo de pensar analítico aritmético por sobre otros modos de pensamiento, los estudiantes correspondientes a 2 Casos de estudio: de cuarto año de enseñanza media y de pregrado de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. Estos informantes ya cursaron la unidad de Vectores y, de Geometría Vectorial respectivamente, unidades donde se encuentra inserto el contenido correspondiente al producto vectorial.

6.1 ANALISIS A PRIORI DE MEDICIÓN INICIAL

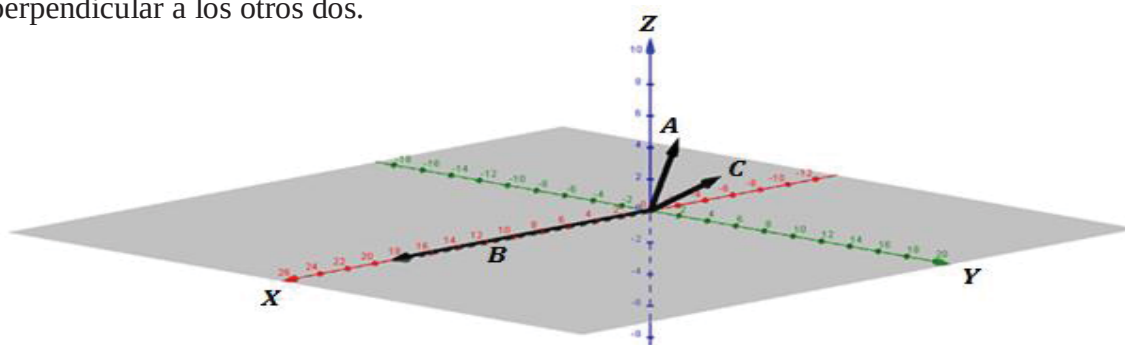
Pregunta 1: De los vectores $A = (0, 2, 5)$, $B = (19, 0, 0)$ y $C = (0, 5, 3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es el producto vectorial de los otros dos, encuéntralo. Justifica.

Esta pregunta tiene por objetivos: Indagar en cómo piensa o entiende el modo SG del producto vectorial (cómo se sitúa en este modo). Y determinar si privilegia el modo AA por sobre el modo SG.

Se considera que si el estudiante se sitúa en el modo SG para dar respuesta a la pregunta, éste modo estaría actuando como una herramienta heurística, ya que es la mejor forma de pensar el objeto matemático para hallar la solución del problema, ya que las componentes de los vectores permiten dibujarlos en la hoja de respuestas y determinar así cuál de ellos es el vector perpendicular a los otros dos. También puede situarse desde un modo AA para lo cual deberá realizar el producto vectorial entre pares de vectores, hasta hallar aquellos cuyo producto vectorial sea el tercero.

Los estudiantes para responder pueden situarse en los siguientes modos:

SG: Dibuja los vectores en el sistema de ejes coordenados, determinando el vector perpendicular a los otros dos.



AA: Realiza el producto vectorial entre pares de vectores utilizando la nemotecnia del seudo determinante, hasta determinar que el producto vectorial entre C y A , o sea el vector B corresponde al producto vectorial de los otros dos.

$$C \times A = (5j + 3k) \times (2j + 5k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} k = 19i$$

$$C \times A = (0,5,3) \times (0,2,5) = \left(\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0,0,19)$$

AA: El producto vectorial resulta de multiplicar término a término las componentes de los vectores C y A , utilizando luego una nemotecnia (seudo determinante) para hallar el vector buscado.

$$\begin{aligned} C \times A &= (5j + 3k) \times (2j + 5k) = 10(j \times j) + 25(j \times k) + 6(k \times j) + 15(k \times k) \\ &= 25i - 6i = 19i \end{aligned}$$

Pregunta 2: Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determina $A \times B$.

El objetivo de esta pregunta es indagar en cómo piensa o entiende el modo AA del producto vectorial.

Para responder se sitúa desde el modo AA:

AA: Utiliza la nemotecnia del seudo determinante para hallar $A \times B$.

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k = -7i + 8j + 11k$$

$$A \times B = (2, -1, 2) \times (3, 4, -1) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-7, 8, 11)$$

AA: Realiza el producto vectorial multiplicando termino a termino los componentes de los vectores A y B .

$$\begin{aligned} A \times B &= (2i - j + 2k) \times (3i + 4j - k) \\ &= 6i^2 + 8ij - 2ik - 3ji - 4j^2 + jk + 6ki + 8kj - 2k^2 \\ &= 8k + 2j + 3k + i + 6j - 8i \\ &= -7i + 8j + 11 \end{aligned}$$

3) Dados los vectores $A = (3, 1, 0)$, $B = (5, 7, 0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B . ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.

Esta pregunta tiene por objetivo entender como el estudiante se sitúa desde la propiedad 1 del modo AE.

Se espera que el estudiante realice una **coordinación** entre el modo **AA**, determinando $A \times B = (0, 0, 16)$, y la propiedad 1 del modo **AE**, determinando el conjunto solución $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3: \lambda(0, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ correspondiente a la recta generada por el vector $\langle(0, 0, 1)\rangle$, ya que por esta propiedad de simetría alternada, cada vector $A \times B$ tiene un vector alterno, el vector $B \times A$ que tiene igual magnitud y dirección, pero distinto sentido (simétrico).

IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN

Se implementa la situación correspondiente a un cuestionario a 23 estudiantes de cuarto año de enseñanza media, de un Colegio Particular ubicado en la Quinta Región de Valparaíso, Chile. Y a 10 estudiantes de Pregrado de la carrera de Pedagogía en Matemáticas, la cual se imparte en una Universidad tradicional privada chilena ubicada en la región de Valparaíso. En ambos Casos los estudiantes ya cursaron la unidad de Vectores y, de Geometría Vectorial respectivamente, unidades donde se encuentra inserto el contenido correspondiente al producto vectorial.

6.2 ANALISIS A POSTERIORI DE LA MEDICIÓN INICIAL

Se presentan los resultados de la aplicación de la medición inicial a dos Casos de estudio, el primero (Caso 1) correspondientes a 23 estudiantes de Cuarto año medio, y el segundo (Caso 2) a 10 estudiantes de Pregrado de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas. A los estudiantes del Caso 1 los llamaremos E1.1, E1.2,..., E1.23. Y a los estudiantes del Caso 2: E2.1, E2.2,...,E2.10.

A continuación se presentan el análisis a posteriori de las preguntas de la medición inicial.

6.2.1 Respuestas estudiantes correspondientes al Caso 1:

Pregunta 1:

De los vectores $A = (0, 2, 5)$, $B = (19, 0, 0)$ y $C = (0, 5, 3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es el producto vectorial de los otros dos, encuéntralo. Justifica.

Once estudiantes se sitúan en un modo **AA**, de los cuales **ninguno** logra encontrar el vector perpendicular a los otros dos, de estos once, cuatro se sitúan de forma incorrecta en el modo AA no logrando determinar correctamente las componentes del vector resultantes, y el resto se sitúa correctamente en este modo, pero sólo realizan el producto vectorial entre los vectores A y B , y no entre los vectores A y C , de donde se obtiene el vector B que corresponde al vector buscado.

Sólo un estudiante se sitúa en un modo **SG** y aunque no logra dibujar correctamente los vectores en el sistema de ejes coordenados, si determina correctamente el vector buscado,

dando cuenta que responder a la pregunta situándose desde este modo es la mejor opción para hallar la respuesta.

El resto de estudiantes omite la pregunta o responde desde un enfoque aritmético utilizando el producto interior.

A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

El estudiante **E1.6** se sitúa desde un modo AA, utilizando la nemotecnia del seudo determinante, pero lo hace de forma **incorrecta** ya que no determina correctamente las componentes de los vectores, y además la realización del este producto vectorial no es suficiente para hallar la respuesta del problema.

1) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 5 \\ 19 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$i(0-0) - j(0-85) + k(0-38)$

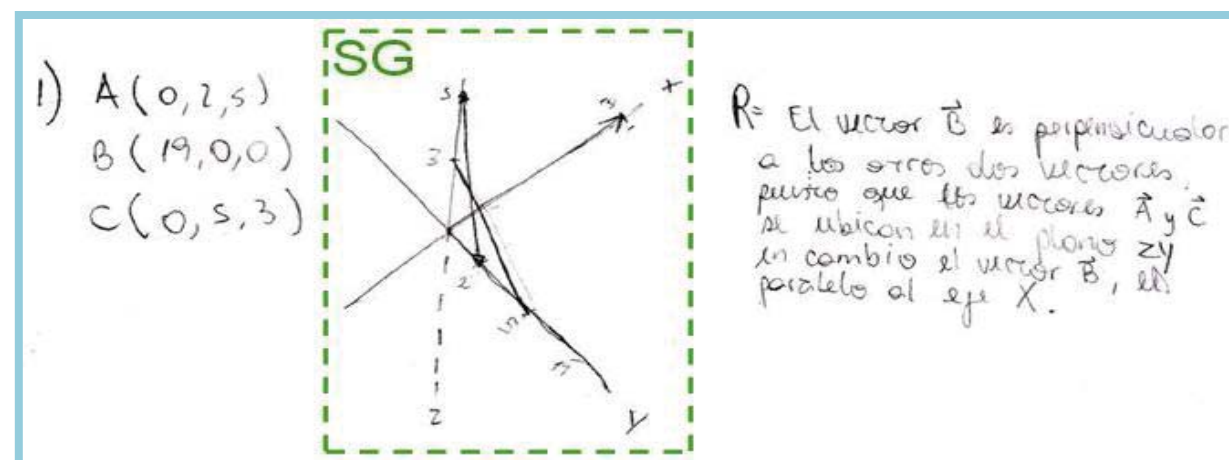
$i(0) - j(85) + k(-38)$

$(0, 85, -38) \cdot (0, 2, 5)$

$[0, 179, -190]$

Respuesta del estudiante E1.6

El estudiante **E13** responde correctamente a esta pregunta situándose en el modo SG, aunque los vectores no están correctamente representados en la figura.



Respuesta del estudiante E13

El estudiante **E21** se sitúa desde un enfoque aritmético del producto interior para hallar la respuesta. Suponemos que el estudiante entiende que el producto vectorial es el vector perpendicular a los otros dos (modo SG), por lo que si el producto interior entre dos vectores

da cero, esto quiere decir que ellos son perpendiculares. Por lo que logra hallar la respuesta correcta.

$$\textcircled{1} \quad A \cdot B = (0, 2, 5) \cdot (19, 0, 0) \quad C \cdot B = (0, 5, 3) \cdot (19, 0, 0)$$

$$0 + 0 + 0 = 0 \qquad 0 + 0 + 0 = 0$$

Es el vector B, puesto q el producto
entre ellos es 0

Respuesta del estudiante E21

Pregunta 2: Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determina $A \times B$.

Ocho estudiantes se sitúan correctamente en el modo AA, determinando sus componentes. Once estudiantes se sitúan de forma incorrecta: dos de ellos responden que el resultado de la operación es un escalar, y el resto comete errores de tipo aritmético. El resto de estudiantes omitió la pregunta.

El estudiante **E1.2** se sitúa correctamente en el modo AA determinando correctamente las componentes del vector correspondiente al producto vectorial, para lo cual utiliza la nemotecnia del sudo determinante.

$$\textcircled{2} \quad A = 2i - j + 2k \quad B = 3i + 4j - k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = i(1-8) - j(-2-6) + k(8+3)$$

$$= -7i + 8j + 11k$$

$$(-7, 8, 11) \quad \text{AA}$$

Respuesta del estudiante E1.2

El estudiante **E1.11** se sitúa de forma errónea en el modo AA, ya que el resultado del producto vectorial no es un vector sino un escalar.

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad i(1-8) - j(-2-6) + k(8+3)$$

$$-7 - (-8) + 11$$

$$-7 + 8$$

$$12$$

Respuesta del estudiante E1.11

El estudiante **E17** se sitúa de forma incorrecta en el modo AA ya que no determina correctamente las componentes del vector resultante. Además hay errores de notación.

$$^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1-8) - (-2+6) + (8+3) = -7i - 4j + 11k$$

Respuesta del estudiante E17

Pregunta 3

3) Dados los vectores $A = (3, 1, 0)$, $B = (5, 7, 0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B . ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición?

Justifica.

Doce estudiantes no se sitúan correctamente en la propiedad 1 del modo AE: Cinco de ellos afirman que sólo hay un vector perpendicular a los otros dos, no logrando precisar el conjunto solución de los vectores simétricos alternos; siete afirman que hay infinitas soluciones pero no precisan que este conjunto solución $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3: \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$, λ debe ser Real.

Y sólo dos informantes dan cuenta de la propiedad 1 de AE, afirmando que el conjunto solución lo constituyen $(A \times B)$ y $(B \times A)$, aunque no logran determinar todo el conjunto solución.

A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

Estudiante **E6** que no logra situarse en el modo de la propiedad 1 de AE, ya que responde que sólo hay un vector resultante $(A \times B)$.

3) Hay uno solo, ya que para cada vector hay uno de ellos resultante del punto cruz entre dos de ellos $A \times B$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(21-5)$$

Respuesta del estudiante E6

Los estudiantes **E21**, **E22** y **E23** respectivamente que responden que el conjunto solución tiene infinitas soluciones, pero no especifican que en este conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3: \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$, λ debe ser real.

③ Pueden ser infinitos (∞), por ejemplo el vector $(0,0,0)$ es Δ y los demás serían cambiando la coordenada z del vector en $(0,0,1)$ y así, pero las 2 primeras tienen q' ser 0.

Respuesta del estudiante E21

3) $\vec{C} = (0, 0, n)$
 es perpendicular a
 ambos ya que
 su producto
 punto da
 "0"

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (3, 1, 0) \cdot (0, 0, n) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (5, 7, 0) \cdot (0, 0, n) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Respuesta del estudiante E22

3) $A(3,1,0)$ $B(5,7,0)$ $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $2(0-0) - 1(0-0) + 7(1-5)$ Hay más de un $\vec{v}$ que cumple la condición ya que al hacer producto punto con A y B , el vector C debe tener coordenadas x y y iguales a 0, pero z puede ser cualquier n ya que al multiplicarlo por el z de A y B (ambos 0) dare 0 igual.

Respuesta del estudiante E23

El estudiante E16 que da cuenta de una de las propiedades del analítico estructural P1 AE, al reconocer la simetría alternada (no conmutatividad). Aunque no logra determinar el conjunto solución.

3) para calcular un vector perpendicular a A y B se calcula el producto cruz entre ellos, pero de aquí se pueden obtener dos vectores que serán perpendiculares a A y B pero ellos tendrán distinto sentido pero misma dirección. Estos vectores serán $(A \times B)$ y $(B \times A)$

P1 AE

$$\begin{array}{l} C = A \times B \\ C' = B \times A \end{array} \quad / \quad \begin{array}{l} C \perp A \wedge C \perp B \\ C' \perp A \wedge C' \perp B \end{array}$$

$$C = A \times B \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(21-5)$$

$$C = (0, 0, 16)$$

$$C' = B \times A \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(5-21)$$

$$C' = (0, 0, -16)$$

Respuesta del estudiante E16

6.2.2 Respuestas estudiantes correspondientes al Caso 2:

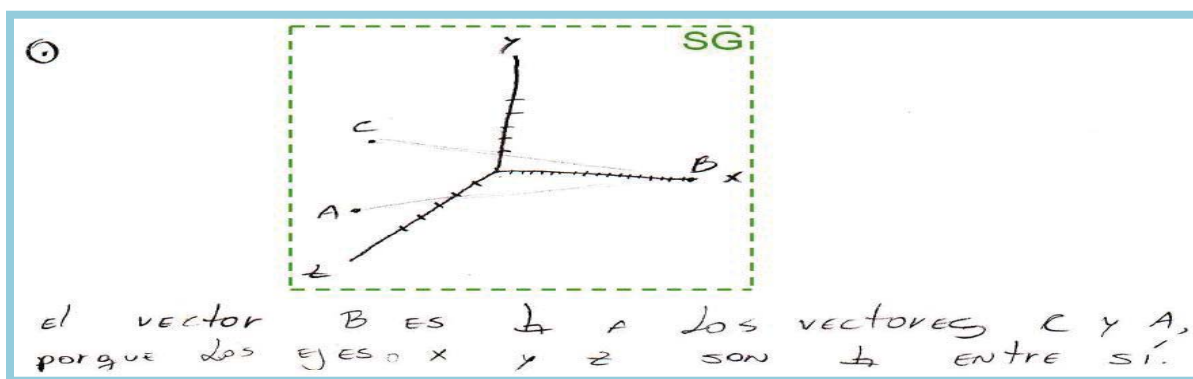
Pregunta 1:

De los vectores $A = (0, 2, 5)$, $B = (19, 0, 0)$ y $C = (0, 5, 3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es el producto vectorial de los otros dos, encuéntralo. Justifica.

Cinco estudiantes responden desde un AA pero lo hacen de forma incorrecta. Tres responden desde un SG, de los cuales dos responden correctamente. Y siete estudiantes omitieron la pregunta.

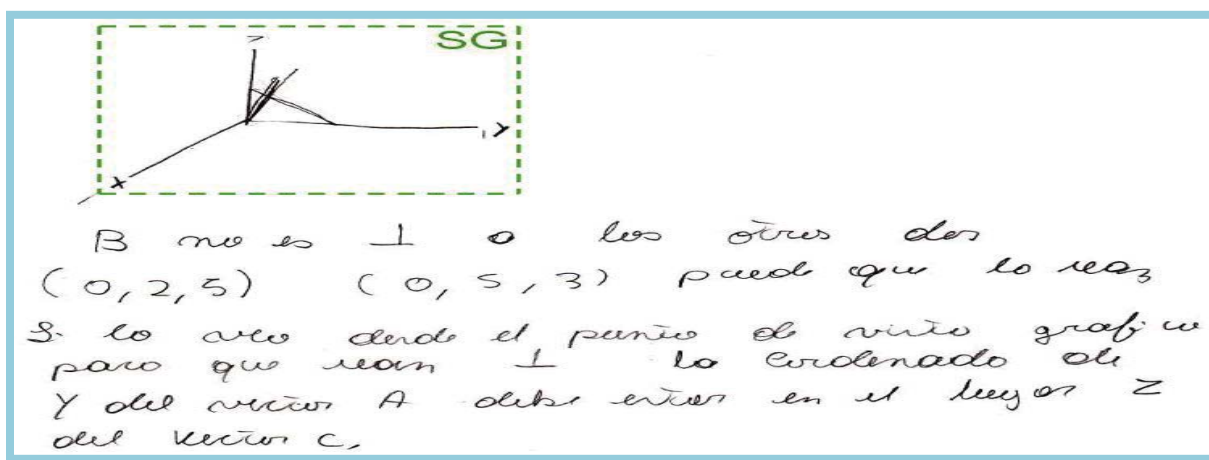
A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

Estudiante **E2.6** que responde correctamente situándose desde un modo SG, aunque no dibuja correctamente los vectores pedidos.



Respuesta del estudiante E2.6

Estudiante **E2.2** que responde incorrectamente desde un modo SG.



Respuesta del estudiante E2.2

Pregunta 2: Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determina $A \times B$.

Tres estudiantes se sitúan desde un AA, de los cuales sólo 1 contesta correctamente. Tres estudiantes que responden no recordar el Modo AA. Y cuatro de ellos omitieron la pregunta 2. A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

Estudiante **E2.4** que se sitúa correctamente desde un modo AA.

$$\begin{aligned}
 A \times B &= (2, -1, 2) \times (3, 4, -1) \\
 &= i(1-8) - j(-2-6) + k(8-(-3)) \\
 &= i(-7) - j(-8) + k(11) \\
 &= -7i + 8j + 11k
 \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}$

AA

Respuesta del estudiante E2.4

Estudiantes **E2.6**, **E2.9** que se sitúa **incorrectamente** desde un modo de pensar AA, ya que el primero multiplica cada coeficiente de los vectores unitarios correspondientes, y el segundo entrega un resultado escalar.

$$\begin{aligned}
 2) \quad A &= 2i - j + 2k \\
 B &= 3i + 4j - k
 \end{aligned}$$

$A \times B \Rightarrow 6i - 4j - 2k$

Respuesta del estudiante E2.6

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= (1-8) - (-2-6) + (8+3) \\
 &= -7 - 8 + 11 = -4 \\
 &\Rightarrow A \times B = -4
 \end{aligned}$$

Respuesta del estudiante E2.9

Estudiante **E2.8** responde no recordar el Modo AA:

② es por producto cruz, el cual no lo recuerdo

Respuesta del estudiante E2.8

Pregunta 3

Dados los vectores $A = (3, 1, 0)$, $B = (5, 7, 0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B . ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición?

Justifica.

Sólo cuatro estudiantes responden a esta pregunta y de manera incorrecta, ya que afirma que C puede ser cualquier número, pero no el sistema numérico de los reales al que pertenece.

A continuación se muestran ejemplos de respuestas:

Estudiante **E2.1** que se sitúa de forma incorrecta en una propiedad del modo AE.

3) $\rightarrow C = (0, 0, x) \rightarrow$ siendo x cualquier
número C sería perpendicular
tanto a A como a B

Respuesta del estudiante E2.1

6.3 RESULTADOS DE ANALISIS A POST TERIORI DE LA MEDICIÓN INICIAL

La pregunta 1 de la medición inicial, la cual fue diseñada para permitir que el estudiante piense el objeto de *producto vectorial* en una forma *sintética-geométrica*, donde el *producto vectorial* es el vector perpendicular a los otros dos, para lo cual las componentes de los vectores $A = (0,2,5)$, $B = (19,0,0)$ y $C(0,5,3)$ hacen posible dibujar estos vectores en la hoja de respuesta, y así determinar este vector normal a los otros dos, dejando de ser estrictamente necesario recurrir a un algoritmo para calcularlo. Sin embargo en los análisis a las respuestas de los alumnos de cuarto año medio (Caso 1) y los alumnos universitarios (Caso 2), la mayoría de los estudiantes privilegian el modo AA por sobre el modo SG, lo que no les permite hallar la respuesta correcta; y muy pocos logran situarse en un modo SG respondiendo correctamente a la pregunta.

La pregunta 2 se diseñó para visualizar como el estudiante se sitúa en el modo AA del objeto matemático producto vectorial, en el Caso 1 la mayoría de ellos responde correctamente desde un modo AA, pero en el caso 2 casi todos los informantes no se sitúan correctamente en el modo AA u omiten la pregunta.

Y en la pregunta 3, cuyo objetivo era evidenciar si los estudiantes lograban situarse en la propiedad 1 del producto vectorial, los informantes del Caso 1 sólo dos de ellos logran situarse desde el modo correspondiente a la propiedad 1 del AE (P1 AE), al identificar la simetría alternada, aunque no logran determinar todo el conjunto solución. Los demás informantes no se sitúan en este modo y sus respuestas son imprecisas. Y en el Caso 2 la mayoría omite esta pregunta y los que la responden no se sitúan de forma correcta en la propiedad 1 del modo AE. Las principales **dificultades** identificadas en las respuestas de los alumnos para situarse en el modo AA es que no determinan correctamente las componentes del producto resultante (vectorial), y que en algunos casos la respuesta no es un vector sino un escalar. Las dificultades identificadas para situarse desde un modo SG es que no logran precisar las componentes de los vectores dados en el problema en el sistema de ejes coordenados, así como tampoco las componentes del vector resultante. Y las dificultades que presentaron para situarse desde el modo correspondiente a la propiedad 1 del modo AE es que no logran precisar el conjunto solución ya que responde que o hay sólo un vector perpendicular o hay muchos vectores, pero no precisan que estos vectores al tener componentes reales, tiene igual

dirección, pero distinto sentido, evidenciando que no comprenden la propiedad de simetría alternada que caracteriza a este objeto matemático de producto vectorial.

Podemos concluir que el estudiante privilegia el modo AA por sobre otro modo de pensar, en el caso visto en la pregunta 1, por sobre el modo SG, y además que presentan dificultades para entender al objeto matemático de producto vectorial en sus distintos modos de entenderlo, geométrico, aritmético y estructural, lo que avala nuestra hipótesis de investigación.

CAPÍTULO 7

DISEÑO Y ANALISIS A PRIORI DE LAS ACTIVIDADES

Se presenta el diseño de las actividades planteadas en la tercera fase de investigación del diseño metodológico, por lo que estas buscan dar respuesta al objetivo específico número 3 planteado en el capítulo 1, el cuál es la búsqueda de una mayor comprensión, en estudiantes de pre y post grado, del objeto matemático producto vectorial.

7.1 Diseño de Actividades

Dado que en la medición inicial se pudo constatar de que los estudiantes tienen dificultades para situarse en los distintos modos de pensar el “producto vectorial”, privilegiando el modo AA en sus respuestas por sobre los otros modos, se propone la aplicación de dos actividades las cuales tienen por **objetivo general** mostrar: que si el estudiante presenta dificultades para transitar desde un modo AA hacia el modo AE, se hace necesario que piense el objeto matemático desde otros modos de pensamiento, por lo que se busca que el estudiante realice este tránsito desde un modo SG transitando desde allí al modo AE, o también que logre situarse directamente en AE. Tomando relevancia, por tanto, que el estudiante entienda el objeto matemático de producto vectorial en sus distintas definiciones, para una mayor comprensión de éste. Para lo cual la primera actividad busca evidenciar que los estudiantes que presenten **dificultades para transitar desde el modo AA hacia el modo AE**, generalmente es porque no entienden el objeto matemático desde otro modo de pensamiento, que no sea el modo AA, razón por la cual lo privilegian. Por esto en la actividad 2 en concordancia con la 1, se busca que el estudiante **transite desde un modo SG hacia el AE, o que se situé directamente en AE para dar solución al problema.**

Las dos actividades son preguntas sobre problemas matemáticos en relación directa con el producto vectorial, las cuales presentamos y describimos a continuación:

Actividad 1:

Dados los vectores $\vec{a} = (1,0,0)$ y $\vec{0} = (0,0,0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geométricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

La pregunta 1.1 está planteada desde un modo AA, buscando que el estudiante desde este modo transite a la propiedad 2 del modo AE. **El objetivo es mostrar que aquellos estudiantes que presentan dificultades para transitar desde el modo AA al modo P2 AE,** es porque no entienden en el objeto matemático de producto vectorial en otros modos de pensamiento.

AA → P2 AE

Suponemos que la mayoría de los estudiantes en la pregunta 1.1 responderán desde un modo AA para luego realizar el tránsito hacia el modo P2 AE, por lo evidenciado en la medición inicial de que los estudiantes privilegian el modo AA por sobre otros modos de pensamiento del producto vectorial. Por lo que en 1.2 indagamos si el estudiante posee algún modo de pensar geométrico sobre la solución encontrada en 1 (ya sea correcto o incorrecto), lo cual lo consideramos como un tránsito desde el modo P2 AE al modo SG.

Respuesta esperada en 1.1:

AA → P2 AE

Sea $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Si $(1,0,0) \times (b_1, b_2, b_3) = (0,0,0)$, se tiene lo siguiente:

$$(1,0,0) \times (b_1, b_2, b_3) = (0, -b_3, b_2)$$

AA

Luego: $(0, -b_3, b_2) = (0,0,0)$.

Por lo tanto $\vec{b} = (b_1, 0,0) = b_1(1,0,0)$, $b_1 \in \mathbb{R}$ que corresponde al conjunto solución de todos los múltiplos escalares $\lambda \vec{a}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, que es la recta determinada por $\vec{a}$.

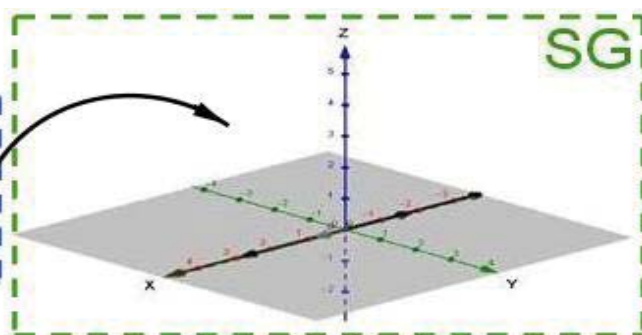
P2 AE

Respuesta esperada en 1.2

P2 AE → SG

Dado que $\vec{b} = (b_1, 0,0)$ con $b_1 \in \mathbb{R}$, es el conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.

P2 AE

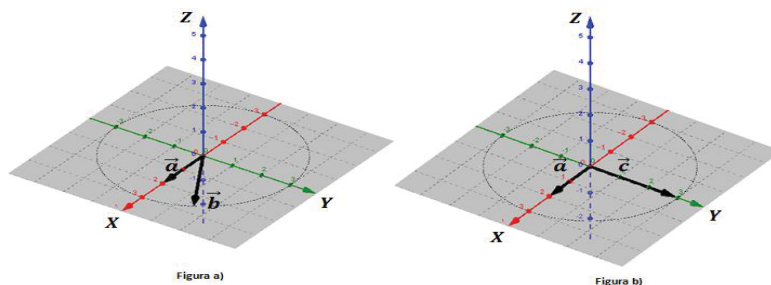


Actividad 2:¹

Sea $\vec{a} = 2i = (2,0,0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6i + 1.5j = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3j = (0,3,0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.



Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6i + 1.5j = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

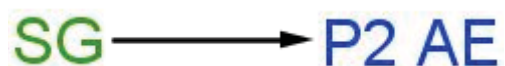
2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

¹ Las componentes del vector $\vec{b}$ son: $(2.59807621135..., 1.5, 0)$ y en la Actividad 2 se muestra una aproximación del primer componente, quedando $\vec{b} = (2.6, 1.5, 0)$. Las componentes del vector $\vec{d}$ son: $(-2.59807621135..., 1.5, 0)$ en la Actividad 2.3 se muestra una aproximación del primer componente, quedando $\vec{d} = (-2.6, 1.5, 0)$.

En la actividad 2, las preguntas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 están planteadas desde un enfoque SG ya que las tres aluden al “área del paralelogramo” formado por los vectores correspondientes en cada caso, áreas que ellos pueden visualizar si logran pensar en el objeto en su forma geométrica, dibujados en la hoja de respuestas donde han sido agregadas dos imágenes con los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ en una, y $\vec{a}, \vec{c}$ en la otra, ambos casos en un sistema de ejes coordenados.

Las preguntas 2.1, 2.2, 2.3 **tienen dos objetivos**: el primero de ellos es observar si los alumnos responden situándose ya sea en el modo AA o en el modo SG, o se sitúan directamente en la propiedad 3 del modo AE, lo que les permitiría reducir los cálculos aritméticos. Y el segundo objetivo y más importante para nuestro objetivo general, es aportar información para que el alumno pueda realizar de mejor forma el tránsito entre el modo SG y el modo P2 AE, en la pregunta 2.4.

Y la 2.4 tiene por **objetivo mostrar que aquellos alumnos que tuvieron dificultades para transitar desde el modo AA al modo P2 AE en la actividad 1, estas dificultades pueden ser superadas logrando transitar hacia el modo AE desde un SG.**



Análisis a Priori de las Actividades

Respuestas esperadas:

2.1

a) Que el estudiante se **sitúa** directamente en el **modo P3 AE** utilizando las fórmulas de $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ o de $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ indistintamente, para el cálculo del área del paralelogramo.

b) El estudiante se **sitúa** en el **modo SG**, dibujando los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados, determinando así cuál de ellos tiene mayor área.

2.2

a) Que el estudiante se **sitúe** directamente en el **modo P3 AE** por lo que según la propiedad 3, se tiene que el “área” del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es igual a la “longitud” del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, análogamente para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$, esto le permitiría establecer la relación de desigualdad referente a las longitudes sin realizar cálculos aritméticos.

b) Que el estudiante se **sitúe** el modo **AA**, calculando las longitudes de los productos vectoriales, utilizando para ello la nemotecnia del pseudo determinante para calcular el vector producto vectorial, y posteriormente la norma de éste. Y luego determinar las relaciones entre longitud y área respectivas.

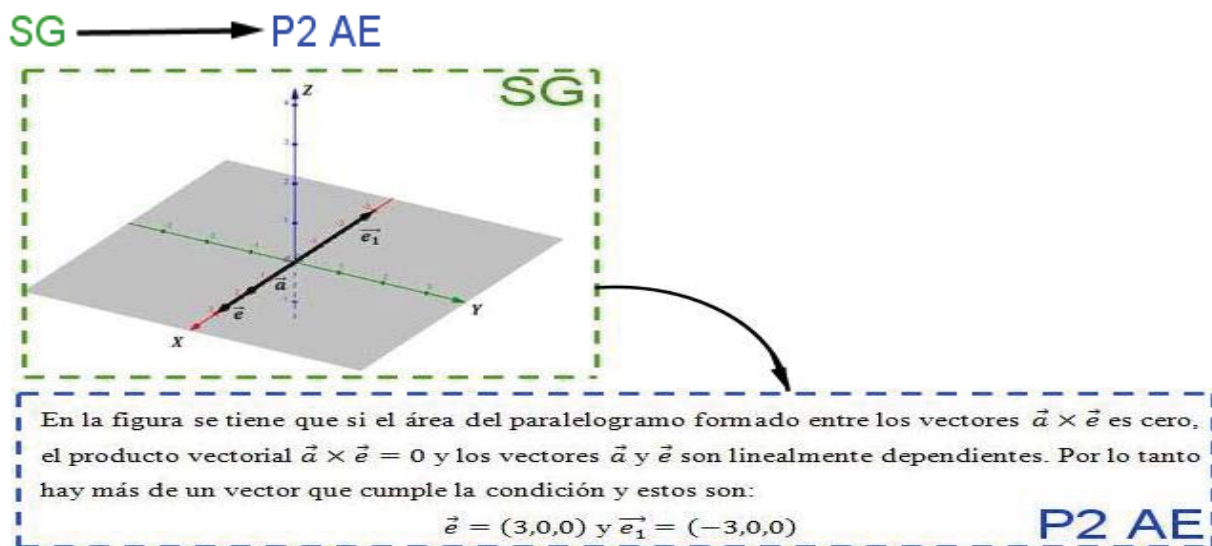
2.3

a) Que el estudiante logre determinar las relaciones de desigualdad solicitadas en la pregunta, **situandose** en el modo **P3 AE**. Si la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ es: $\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|(0,0,3)\| = \sqrt{9} = 3$, se tiene entonces que la longitud de $\vec{a} \times \vec{d}$ es igual a la longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ y por tanto menor a la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$, lo que en conjunto con las respuestas de 2.1 y 2.2 permite determinar las relaciones de desigualdad entre las áreas de los paralelogramos y las longitudes de los productos vectoriales, dando cuenta así del comportamiento del producto vectorial a medida que crece el ángulo, el cual es similar al de la función seno.

b) Se **sitúa** en el modo **AA** lo que le permite determinar que el producto vectorial entre $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual al de $\vec{a} \times \vec{d}$, esto le permite establecer las relaciones de desigualdad, tanto de áreas como de longitudes, apoyandose de las respuestas dadas en 2.1 y 2.2.

2.4

a)



b) **Coordinación** entre los **modos P3 de AE** y el modo **P2 de AE**.

El estudiante utiliza la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{e}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{e}\| \sin \theta$ correspondiente al modo P3 de AE, igualandola a cero, lo que le permite determinar que para que $\|\vec{a}\| \|\vec{e}\| \sin \theta$ sea igual a cero, necesariamente $\sin \theta = 0$, por lo que el ángulo θ debe ser igual a 0° o 180° , por lo cual $\vec{e} = \lambda \vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ determinando así los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$, correspondiente al modo P2 AE.

7.2 Significado de situarse en los modos de pensamiento respectivos, y tránsitos entre los modos de pensamiento, de acuerdo a las actividades 1 y 2.

7.2.1 Significado de situarse en un modo de pensamiento

Situarse en el modo SG del producto vectorial:

Significa que para dar solución al problema el estudiante puede dibujar los vectores enunciados en el problema en un sistema de tres ejes coordenados, y a partir de allí:

- dibujar el vector correspondiente al producto vectorial
- dibujar el paralelogramo formado por ellos.

SG

Situarse en el modo AA del producto vectorial:

Significa que puede determinar correctamente las componentes del vector producto vectorial, como resultado de realizar el producto vectorial de dos vectores, ambos de tres coordenadas,

AA

Situarse en el modo P2 AE del producto vectorial:

Significa que puede determinar correctamente el conjunto de vectores “ $\vec{b}$ ” linealmente dependientes al vector $\vec{a}$, dado que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

P2 AE

Situarse en el modo P3 AE del producto vectorial:

Dada la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ en este modo de pensamiento, situarse en él significa que el estudiante puede:

- reconocer la relación implícita que la fórmula establece entre la longitud del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$, la cual es igual al área del paralelogramos entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, lo que le permite establecer relaciones como por ejemplo: si dos paralelogramos tienen igual área, entonces las longitudes de los vectores productos vectoriales respectivos también lo son.
- utilizar las fórmulas de $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ o de $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ indistintamente, para el cálculo de área del paralelogramo, o de la longitud del producto vectorial.

P3 AE

7.2.2 Tránsito entre los modos de pensamiento:

-Tránsito entre el modo Analítico Aritmético y el modo Propiedad 2 del Analítico Estructural.

Significa que el estudiante puede a partir del modo AA determinar correctamente las componentes del producto vectorial, permitiendo a partir de allí, buscar la solución de la ecuación $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, donde $\vec{b}$ es el vector buscado, y de esta forma transitar al modo P2 AE logrando identificar que el vector $\vec{b}$ corresponde al conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.

Posibles articuladores:

La nemotecnia del sudo determinante que permite encontrar correctamente las componentes del producto vectorial.

Las interpretación correcta de la igualdad $(0, b_3, b_2) = (0, 0, 0)$, que permite la obtención del conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.



-Tránsito entre el modo Propiedad 2 del modo Analítico Estructural y el modo SG.

Dado que $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$, $b_1 \in \mathbb{R}$, correspondiente al conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$, correspondiente al modo P2 AE, respuesta hallada en la parte 1.1 de la actividad 1, el alumno logra realizar una interpretación de geométrica de ella, utilizando para ello un bosquejo o dibujo, transitando al modo SG.



-Tránsito entre el modo SG y el modo Propiedad 2 del modo Analítico Estructural.

A partir del dibujo del vector $\vec{a}$ y de los vectores $e_1 = (3, 0, 0)$ y $e_2 = (-3, 0, 0)$ sobre el eje X, del sistema de ejes coordenados, determina el conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$ (en este caso corresponden a dos), transitando de esta forma al modo P2 AE.

Posibles articuladores: El paralelogramo con área igual a cero, lo que permite que el estudiante sitúe a los vectores buscados en la recta generada por $\vec{a}$.



CAPITULO 8

ANALISIS A POSTERIORI DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Es este capítulo se presentan los resultados generales del análisis de las respuestas de los estudiantes de los cuatro casos de estudio, luego se muestran los análisis de las respuestas de cada estudiante, para finalmente se entregar una conclusión del análisis en cada caso.

8.1 CASO 1: ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS

RESULTADO GENERAL

	Respuestas Actividad 1	Respuestas Actividad 2
<u>Estudiante 1.1</u>	1.1 ● Respuesta incorrecta ● Se sitúa de forma errónea en el modo AA, ya que no determina correctamente las componentes del producto vectorial. Afirmando además que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, entonces la única posibilidad es que $\vec{b} = (0,0,0)$. ● Dificultades: Determinación incorrecta de los componentes del producto vectorial obtenido de la nemotecnia del seudo determinante.	2.1 ● Respuesta incorrecta. ● Responde desde SG, pero se sitúa incorrectamente en él. ● Dificultad: No interpreta correctamente SG.
		2.2 ● Respuesta incorrecta. ● No piensa el objeto matemático desde ningún modo de pensamiento. ● Dificultad: No argumenta en base a las distintas definiciones del producto vectorial.
	1.2 ● No responde	2.3 ● Respuesta incorrecta ● No se sitúa en ningún modo de pensamiento para abordar el problema, de su respuesta suponemos que el alumno piensa que a mayor ángulo mayor área, por lo que no logra entender el comportamiento del producto vectorial similar a la función seno. ● Dificultad: No argumenta en base a las distintas definiciones del producto vectorial.
		2.4 ● Respuesta incorrecta

		● Se sitúa correctamente en el modo P2 de AE ya que en su respuesta se evidencia que entiende que para que el área sea nula los vectores deben ser linealmente dependientes. ● Dificultades: No restringe a dos las soluciones de acuerdo a la longitud de los vectores solución: $e_1 = (-3,0,0)$ y $e_2 = (3,0,0)$.
<u>Estudiante 1.2</u>	1.1 ● Respuesta correcta ● Transita desde AA hacia P2 AE, hallando el conjunto solución generado por el vector $(a, 0, 0)$. ● Articulador: Nemotecnia del seudo determinante y la determinación del conjunto solución dada la igualdad $(0, -c, b) = (0, 0, 0)$.	2.1 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa desde un modo SG del producto vectorial, dibujando los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados.
		2.2 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa desde un modo AA del producto vectorial, calculado posteriormente la norma del vector para determinar la longitud solicitada.
	1.2 ● Respuesta correcta ● Transita desde P2 AE hacia SG ● Observación: En SG dibuja sólo los vectores linealmente dependientes en la parte positiva del eje X, suponiendo que no logra pensar en toda la recta solución. (Parte positiva y negativa del eje X).	2.3 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa en el modo AA, aunque desde este modo le toma más tiempo determinar la respuesta, a diferencia de que se sitúe en el modo P3 AE, donde no tendría que realizar ningún cálculo aritmético.
		2.4 ● Respuesta incorrecta. ● Se sitúa en el modo AA determinando correctamente las componentes del producto vectorial, luego intenta transitar hacia P2 de AE, pero no lo logra ya que sólo halla una solución, no determinando los dos vectores linealmente dependientes. Esto también se pone en evidencia en su respuesta en 1.2 de la actividad 1, donde sólo ve los vectores de la parte positiva del eje X. ● Dificultades: No entiende correctamente el modo P2 de AE.

Estudiante 1.3	1.1 ● Respuesta incorrecta. ● Se sitúa correctamente en AA determinando las componentes del producto vectorial, pero no logra transitar a P2 AE ya que no logra determinar el conjunto solución. ● Dificultades: no interpreta acertadamente las soluciones al igualar $(0, -c, b) = (0, 0, 0)$.	2.1 ● Respuesta correcta ● Responde con un enfoque aritmético utilizando un determinante de orden 2. Dibuja los paralelogramos respectivos, pero no se sitúa en un SG. No logra situarse en P3 de AE, ya que utiliza $\ \vec{a} \times \vec{b}\ = \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \cos \theta$ para calcular el área del paralelogramo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, lo cual es incorrecto.
		2.2 ● Respuesta correcta Se sitúa en el modo AA del producto vectorial determinando sus componentes, utilizando el seudo determinante, para luego calcular la norma respectiva.
	1.2 ● Respuesta incorrecta. ● No logra situarse en el modo SG para dar representar el conjunto solución.	2.3 ● Respuesta incorrecta ● Se sitúa en AA del producto vectorial, determinando correctamente las componentes del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, luego calcula su longitud, lo que le permite establecer la relación de desigualdad correspondiente a las longitudes, pero no establece la relación respecto de las áreas de los paralelogramos, esto evidencia que el estudiante no logra transitar hacia el modo P3 de AE. ● Dificultades: Al no entender el modo P3 de AE no logra entender la relación entre la longitud del producto vectorial de dos parejas de vectores y el área de los paralelogramos que ellos forman.
		2.4 Respuesta incorrecta Determina sólo un vector solución, a saber $\vec{e} = (3, 0, 0)$ por lo que no logra situarse en el modo P2 de AE, ya que no piensa de forma correcta en los vectores linealmente dependientes.

ACTIVIDAD 1

1) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geométricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES CASO 1

Estudiante 1.1

1.1

1). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(b_3 a_1 - b_1 a_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_2 b_3 i - a_3 b_2 i - b_3 a_1 j + b_1 a_3 j + a_1 b_2 k - a_2 b_1 k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(b_3 a_1 - b_1 a_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= (0, b_3 i - b_1 k, b_2 k) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

$$\textcircled{1} (b_3, 0, 0) - (0, 0, b_1) = 0 \Rightarrow (b_3, 0, 0) = (0, 0, b_1) \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} (0, 0, b_2) = 0 \Rightarrow \boxed{b_2 = 0}$$

Dado que los valores de b_1, b_2, b_3 son únicos entonces no hay otro vector que cumpla.

Respuesta del estudiante 1.1 (Caso 1) a la actividad 1

1.2 No responde

Vemos en la respuesta 1.1 del estudiante que el vector solución encontrado es $\vec{b} = (0, 0, 0)$, lo cual es incorrecto ya que como podemos verificar en el análisis a priori, el vector $\vec{b}$ debe ser igual a $\vec{b} = (\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$. Por lo que evidenciamos en esta respuesta que el estudiante privilegia el modo AA por sobre otro modo de pensamiento, para luego realizar el tránsito hacia un modo AE, en este caso P2 AE. Existiendo dificultades para realizar este tránsito, referidas principalmente la determinación incorrecta de los componentes del producto vectorial obtenido de la utilización de la nemotecnia del seudo determinante.

En 1.2 se puede verificar que el estudiante no entiende la propiedad 2 del modo AE del objeto matemático de producto vectorial desde un modo SG, ya que no logra realizar ninguna interpretación geométrica de éste.

Estudiante 1.2

1.1

$$\vec{a} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (a, b, c)$$

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0) \Rightarrow (1, 0, 0) \times (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = (0, c, b)$$

$$\text{Luego } \vec{a} \times \vec{b}$$

$$(0, c, b) = (0, 0, 0)$$

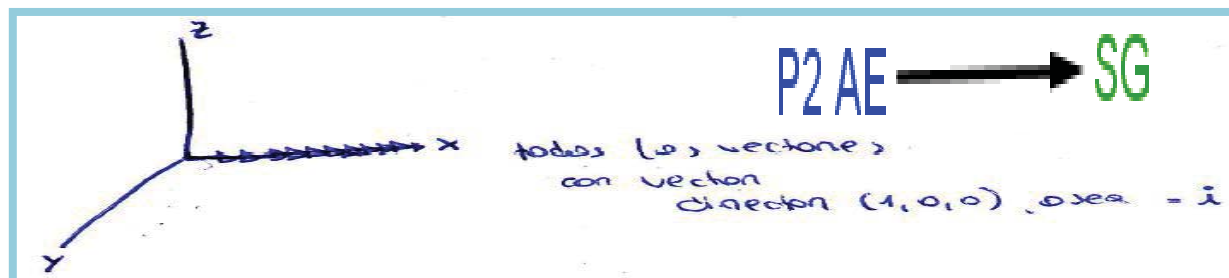
$$\therefore c = 0 \wedge b = 0$$

$$\text{entonces } \vec{b} = (a, 0, 0), a \in \mathbb{R}$$

AA $\longrightarrow$ P2 AE

Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad 1

1.2



Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad

En 1.1 el estudiante se sitúa en el modo AA determinando correctamente las componentes del vector producto vectorial, desde allí transita hacia el modo AE (propiedad 2 de AE) hallando el vector $\vec{b}$ con $\vec{b} = (a, 0, 0), a \in \mathbb{R}$. Por lo que en este caso no identificamos dificultades en privilegiar el modo AA para situarse desde allí, y transitar hacia un AE, utilizando como articulador, al igual que el estudiante anterior, la nemotecnia del seudo determinante.

En 1.2 se puede visualizar que el estudiante logra transitar desde el modo AE (propiedad 2 de AE) a un modo SG del producto vectorial. Observamos además que la recta correspondiente al eje X del sistema cartesiano sólo tiene dibujados los vectores solución en la parte positiva de esta, por lo que suponemos que el estudiante no piensa las soluciones en la parte negativa del eje, siendo toda la recta generada por éste vector solución.

Estudiante 1.3

1.1

$$\vec{b} = (a, b, c)$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$
$$= i(0-0) - j(c-0) + k(b-0)$$
$$= -cj + bk$$

~~Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$~~

$$\text{Si } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (0, -c, b) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow c=0 \wedge b=0$$

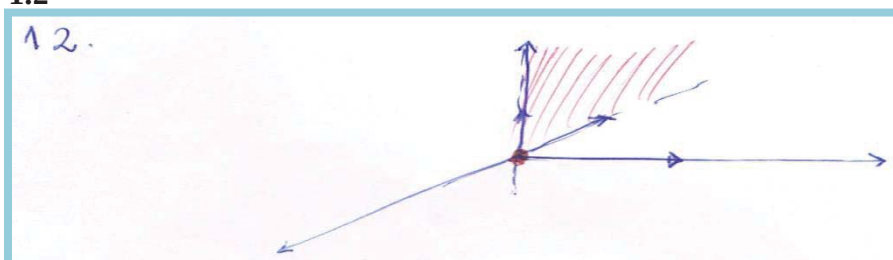
1.1 $\vec{b} = (0, -4, 3)$

Si hay muchos vectores puesto que cualquier vector del tipo (a, b, c) con $b, c \in \mathbb{R}$ y $a=0$ cumple

Puesto que $S = \{(0, -1, 0); (0, 0, 1)\}$

Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 1

1.2



Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 1

En la respuesta 1.1 del estudiante vemos que si bien se sitúa de forma correcta en el modo AA del producto vectorial utilizando la nemotecnica del seudo determinante, pero determina de forma errónea el conjunto solución. Por lo que nuevamente constatamos las dificultades de pensar el objeto sólo desde un AA, para realizar el tránsito hacia otro modo de pensar, en este caso el modo AE (propiedad 2 del modo AE).

En 1.2 podemos ver que efectivamente el estudiante no entiende el problema desde un modo SG, no logrando transitar desde un SG a la P2 de AE.

ACTIVIDAD 2

Sea $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3\vec{j} = (0, 3, 0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.

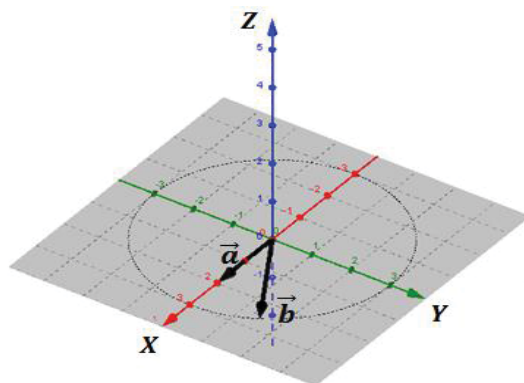


Figura a)

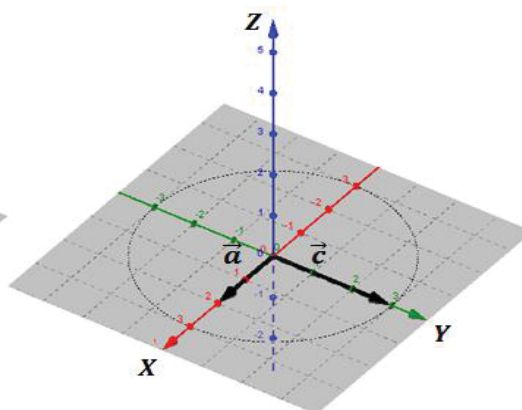


Figura b)

Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

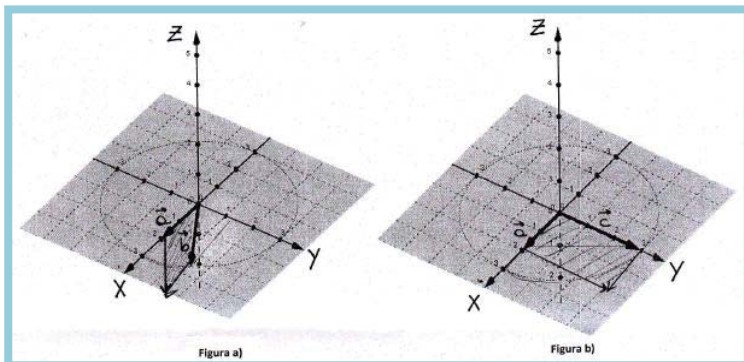
2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES CASO 1

Estudiante 1.1



Respuesta del estudiante 1.1 (Caso 1) a la Actividad 2

- 2.1. las áreas son iguales, pues ambos paralelogramos tienen lados de valor 2 y 3, por lo tanto sus áreas ~~son~~ iguales.
- 2.2. Si fueran diferentes las áreas, la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ varía con respecto a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$. Si el ángulo comprendido entre dos vectores es menor a otro, ~~este~~ como en el caso de las figuras, entonces la longitud del producto vectorial entre dos vectores que comprendan un ángulo menor, será mayor.
- 2.3. longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ igual a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$
 longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ mayor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$.
- 2.4. $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$
 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, un vector de la forma $\vec{e} = \alpha \vec{a}$ cumple que el área entre $\vec{a}$ y $\vec{e}$ es cero.
 Además, existen infinitos vectores $\vec{e}$ que cumplan lo anterior, puesto que $\alpha \in \mathbb{R}$.
 la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$ depende de α escogido anteriormente.

Respuestas del estudiante 1.1 (Caso 1) a la actividad 2

En 2.1 el estudiante no logra situarse en la propiedad 3 del modo AE, ya que para responder no se sitúa correctamente desde un SG, respondiendo que ambos paralelogramos tienen igual área lo cual es incorrecto.

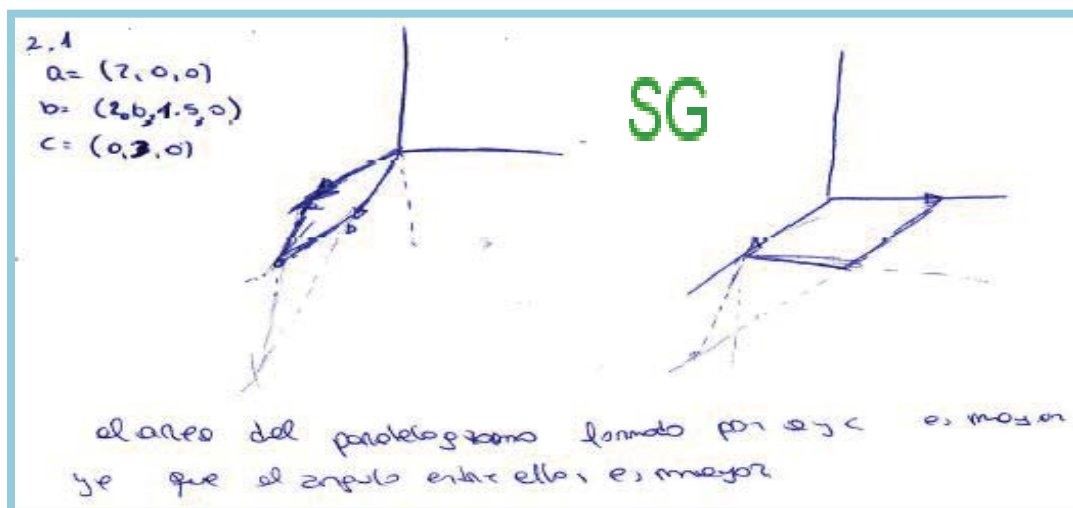
Para dar respuesta a 2.2 el estudiante no piensa el objeto matemático en ninguna de sus distintas definiciones, sino que más bien entrega un argumento incorrecto no logrando transitar hacia la propiedad 3 del modo AE.

En la 2.3 el estudiante responde que la “longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ igual a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ ”, lo cual es correcto pero no hay un argumento que sustente esa afirmación. Suponemos que el estudiante a deducido que si se tienen dos vectores con el ángulo comprendido entre ellos igual a 30° , y otros dos vectores con el ángulo comprendido entre ellos igual a 150° , entonces la longitud del producto vectorial del primer par de vectores es menor a la longitud del producto vectorial del otro par, lo cual es incorrecto. Por tanto en esta respuesta el estudiante no transita hacia la propiedad 3 del modo AE, donde la principal dificultad es que no se sitúa en ningún modo de pensamiento (AA-SG-AE) para abordar el problema.

En 2.4 el alumno afirma que el vector solución es $\vec{e} = \alpha \vec{a}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que identifica que para que el área sea nula, entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ deben ser linealmente dependientes, aunque no entrega argumentos claros que validen esta afirmación. Y aunque la respuesta no es correcta, ya que las soluciones corresponden a sólo dos vectores, podemos afirmar que el estudiante se sitúa en el modo AE (P2 AE).

Estudiante 1.2

2.1



Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad 2

2.2

$$2.2 \quad \vec{a} \times \vec{b} = (2, 0, 0) \times (2, 0, 1.5, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} = \underline{(0, 0, 3)}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 0, 0) \times (0, 3, 0) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{(0, 0, 6)}$$

$\therefore$ area
más mayor
longitud
re que $\|\vec{a} \times \vec{c}\| = 6$ y $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 3$
y $6 > 3$

AA

Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad 2

2.3

$$2.3 \quad \vec{a} \times \vec{c} = (2, 0, 0) \times (-2, 0, 1.5, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} = \underline{(0, 0, 3)} \quad \|\vec{a} \times \vec{c}\| = 3$$

$$\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \quad \text{y} \quad \|\vec{a} \times \vec{d}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$$

y lo mismo pasa con el
orden de los
paralelos formados
por los respectivos
vectores.

AA

Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad 2

2.4

$$2.4 \quad \vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$$

$$\vec{a} = (2, 0, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_3 \end{pmatrix} = (0, 2e_3, 2e_1) = (0, 0, 0)$$

$\therefore \vec{e} = (0, 0, 0) \rightarrow$ por lo tanto e debe ser $e = 3$
para que el área sea igual
a 0 y a lo que ~~es~~
la longitud del vector
sea 3.

Respuesta del estudiante 1.2 (Caso 1) a la actividad 2

El estudiante en **2.1** responde correctamente situándose en el modo SG del producto vectorial, ya que determina que un área es mayor que la otra, de la visualización de los paralelogramos que dibuja. Observamos que dada su respuesta, no se hace necesario situarse en el modo AE (propiedad 3) ocupando la fórmula para calcular áreas $\|u\|\|v\| \cdot \text{sen}\theta$.

En **2.2** la respuesta es correcta, ya que utiliza la norma para calcular la longitud de los productos vectoriales $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$, además de situarse correctamente en el modo AA calculando las componentes de dichos productos. Aquí observamos que si el alumno se situará en el modo AE específicamente la propiedad 3, no sería necesario realizar ningún cálculo, puesto que en 2.1 el alumno ya afirma que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es menor que el formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$, entonces dado el modo P3 AE se tiene que estas áreas coinciden con la longitud del producto vectorial, por lo que la respuesta inmediata sería que $\vec{a} \times \vec{b}$ es menor que $\vec{a} \times \vec{c}$.

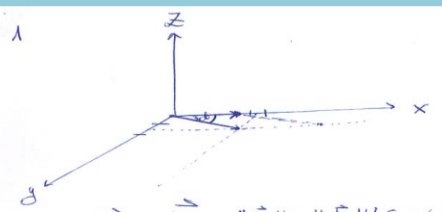
En la respuesta de la pregunta **2.3** el estudiante se sitúa en un modo de pensar AA para determinar el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, y al hallar su longitud calculando la norma, logra determinar que si $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a} \times \vec{d}\|$ se tiene entonces que $\|\vec{a} \times \vec{d}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$, a partir de allí afirma que “lo mismo pasa con el área de los paralelogramos formados por los vectores respectivos”, de lo cual se podría deducir que el estudiante a transitado desde un modo AA a un modo AE (propiedad 3) pero sus argumentos no son suficientes para validar dicha afirmación.

En **2.4** el estudiante se sitúa correctamente en el modo AA determinando las componentes de $\vec{a} \times \vec{e}$, luego halla el vector solución $\vec{e} = (a, 0, 0)$ (no especifica $a \in \mathbb{R}$), pero no logra transitar hacia la propiedad 2 del modo AE, ya que identifica sólo una solución, esto también se evidenció en sus respuestas en la actividad 1 pregunta 1.2 en donde sólo dibuja los vectores solución sólo en la parte positiva del eje X, que sólo son una parte de los vectores linealmente dependientes.

Estudiante 1.3

2.1

1



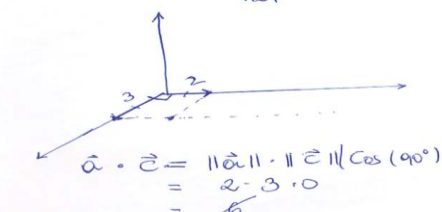
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos(30^\circ)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{27}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2.6 & 1.5 \end{vmatrix} = 3$$



$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos(90^\circ)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

El para lelogramo $\vec{a}, \vec{c}$ tiene mayor ÁREA.

Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 2

2.2

2

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 2.6 & 1.5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot 0 - j \cdot 0 + k(3)$$

$$= (0, 0, 3)$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot 0 - 0 \cdot j + 6 \cdot k$$

$$= (0, 0, 6)$$

AA

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 3 \quad \|\vec{a} \times \vec{c}\| = 6$$

el vector $\vec{a} \times \vec{c}$ tiene mayor longitud.

Puesto que la norma es mayor y está ubicado "más arriba". pero la norma nos entrega que el vector $\vec{a} \times \vec{c}$ es mayor.

Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 2

2.3

3.

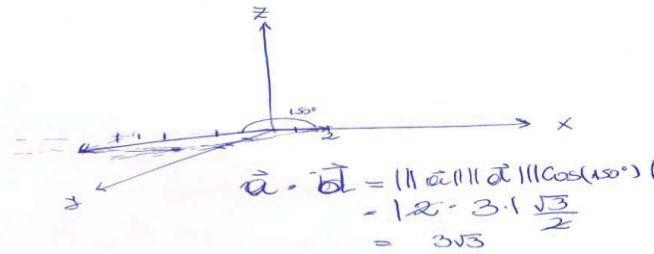
$$\vec{a} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -2,6 & 1,5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \cdot 0 - \hat{j} \cdot 0 + 3\hat{k}$$

$$= (0, 0, 3)$$

$\|\vec{a} \times \vec{d}\| = 3$

La longitud de $\vec{a} \times \vec{d}$ es igual a la de $\vec{a} \times \vec{b}$ y es la mitad del vector (longitud) de $\vec{a} \times \vec{c}$.



$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \|\vec{a}\| \|\vec{d}\| \cos(150^\circ)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 2

2.4

4. $\vec{e} = (3, 0, 0)$

$$\|\vec{a} \times \vec{e}\| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Respuesta del estudiante 1.3 (Caso 1) a la actividad 2

El estudiante en 2.1 responde correctamente desde un enfoque aritmético utilizando un determinante de orden 2. Si bien dibuja los paralelogramos respectivos no se sitúa en el modo SG del producto vectorial puesto que en su respuesta esto no es considerado. Además tampoco se sitúa en el modo correspondiente a la propiedad 3 del modo AE, ya que determina de forma incorrecta la fórmula correspondiente al área del paralelogramo.

En 2.2 se sitúa en el modo AA del producto vectorial para determinar las componentes de los productos vectoriales $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$, para luego calcular la norma de los vectores respectivos, dando correcta solución a la pregunta.

En la respuesta de 2.3 se sitúa desde el modo AA del producto vectorial utilizando la nemotecnia del pseudo determinante para calcular el producto vectorial de $\vec{a} \times \vec{d}$, para luego determinar su longitud mediante el cálculo de la norma de $\vec{a} \times \vec{d}$, esto le permite definir las relaciones de longitud, no así de las áreas de los paralelogramos correspondientes.

En 2.4 para determinar un vector $\vec{e}$ de modo que el área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero, el estudiante determina uno $\vec{e} = (3,0,0)$, luego escribe que la norma de $\vec{a} \times \vec{e}$ debe ser igual a cero o sea $\|\vec{a} \times \vec{e}\| = 0$, para probar que efectivamente el producto vectorial es cero, si bien esta respuesta no es del todo correcta ya que son dos los vectores solución, suponemos que el estudiante piensa en el modo P2 AE, aunque no se sitúa correctamente, ya que no determina todos los vectores linealmente dependientes.

8.1.1 CONCLUSIONES DEL CASO 1

En las respuestas de la **actividad número 1**, de los doce estudiantes de pedagogía en Matemáticas de quinto semestre, vemos que en la parte **1.1** de la actividad 1, se encontraron 3 respuestas correctas de estudiantes que logran realizar el tránsito desde un modo AA hacia el modo P2 AE, en donde logran determinar el conjunto solución de vectores correspondiente a la recta generada por $\vec{a}$, para lo cual utilizan la nemotecnia del seudo determinante, interpretando finalmente las soluciones de la igualdad que se obtiene del vector producto vectorial igualado al vector nulo. Pero también tenemos las respuestas incorrectas que son un total de 7 donde las principales dificultades son: la determinación incorrecta de las componentes del producto vectorial obtenido del seudo determinante; y la falta de interpretación de las soluciones que se obtiene de la igualdad $(0, -b_3, b_2) = (0, 0, 0)$, lo que lleva a algunos a afirmar que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, necesariamente $\vec{b}$ debe ser igual al vector nulo.

En la misma actividad 1, en **1.2** se tiene que la cantidad de respuestas incorrectas sigue siendo 7, ya que evidenciamos que estas respuestas dependen de los resultados obtenidos en 1.1, por lo que se logra constatar que los estudiantes no tienen un entendimiento de la P2 de AE desde un modo SG. En cuanto a las respuestas correctas que fueron de un total de 2, en ellas observamos que los estudiantes sólo dibujan los vectores linealmente dependientes en la parte positiva de la recta que corresponde al eje X, y no los dibujan en toda la recta, lo cual nos permite suponer que no piensan en toda la recta solución generada por $\vec{a}$.

Por tanto en la actividad 1 vemos que los estudiantes privilegian el modo AA para transitar desde allí al modo P2 AE, muchos de los cuales tiene dificultades para hacerlo, de los cuales ninguno de ellos recurre a otro modo de pensamiento para dar solución al problema, quedando en evidencia que la mayoría de ellos sólo piensan el objeto matemático en su forma AA.

En la pregunta **2.1** de la **actividad 2**, se tiene que la cantidad de respuestas correctas es de 5, encontramos que algunos dibujan los paralelogramos respectivos a las parejas de vectores, en un sistema de tres coordenadas, determinando visualmente cuál de ellos tiene mayor área; otros dibujan los paralelogramos en un sistema de dos (plano cartesiano); y otros responden desde un enfoque aritmético calculando el área mediante un determinante de orden 2. De las respuestas incorrectas se pone en evidencia que la mayor dificultad es que los estudiantes no logran dibujar de forma correcta los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados (con

tres ejes coordenados), por lo que entregan respuestas imprecisas sobre cuál de ellos tiene mayor área.

En 2.2 se tienen 8 respuestas correctas, de las cuales en ninguna de ellas los estudiantes se situaron en el modo P3 AE, sino que respondieron utilizando principalmente el modo AA, calculando el vector producto vectorial mediante la nemotecnia del seudo determinante, para luego calcular la longitud de dicho vector utilizando la norma. De las respuestas incorrectas, en total 3 los estudiantes entregan argumentos imprecisos, dando cuenta que no entienden el objeto matemático desde sus distintas definiciones. Las respuestas restantes fueron omitidas.

En 2.3 las respuestas correctas corresponden a 1, en la cual el estudiante se sitúa en el modo AA, logrando desde allí determinar las relaciones de desigualdad, referidas tanto a la longitud, como al área de los paralelogramos, por lo que logra transitar al modo P3 AE, aunque sus argumentos no son suficientes para determinar dicho tránsito. La mayor cantidad de respuestas (7) son incorrectas, las principales dificultades que evidenciamos son: que el estudiante no se situándose en ningún modo de pensamiento del producto vectorial, determina que “a mayor ángulo entre los vectores, se tiene por tanto mayor área del paralelogramos que forman”; otros situándose desde un modo AA determinan las componentes del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, para luego calcular su longitud utilizando para ello la norma, pero sólo logran establecer las relaciones de desigualdad referidos a las longitudes del producto vectorial, pero no aquellas en las que interviene el área del paralelogramo que se forma entre estos vectores, dando cuenta de que no logran situarse en P3 AE. Los demás estudiantes omitieron la pregunta.

Y en 2.4 todas las respuestas son incorrectas de donde identificamos las siguientes dificultades: situándose en el modo P2 AE determinan que el conjunto solución es $(e_1, 0, 0)$ con $e_1 \in \mathbb{R}$, pero no restringen las soluciones a sólo dos vectores dado que su norma debe ser de 3 unidades; o responden que la solución es sólo un vector $(3, 0, 0)$ no logrando determinar los dos vectores linealmente dependientes (esto lo vemos en el estudiante 1.2 quien en la actividad 1 (1.2) dibuja sólo los vectores linealmente dependientes en la parte positiva el eje X).

Como conclusión dado nuestro objetivo general, hemos evidenciado que los estudiantes en la actividad 1 privilegiaron el modo de pensar AA situándose en él o transitando desde allí al modo P2 AE, muchos de los cuales no lograron realizar este tránsito por las dificultades mencionadas. En las actividades 2.1, 2.2 y 2.3 la mayoría de los estudiantes no logra transitar

al modo P3 AE, desde un SG, pero aunque algunos responden desde un AA, otros lo hacen desde un SG, aunque ninguno de ellos logra situarse en el modo P3 de AE logrando utilizar la relación que interpretamos de la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sen}\theta$ como “la longitud del producto vectorial, es igual al área del paralelogramo entre los vectores”, lo que les hubiese permitido responder de forma rápida, sin la necesidad de realizar cálculos aritméticos. Y finalmente en la actividad 2.4 si bien todas la respuestas son incorrectas, donde no se logra que los estudiantes transiten desde un SG al modo P2 AE, igualmente se quiere destacar que se logra que estudiantes como, por ejemplo, el estudiante 1.1 que responde en la actividad 1 que para que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ necesariamente $\vec{b}$ debe es el vector nulo, se logra que en la actividad 2.4 el estudiante logre pensar en los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$ dado un área nula, donde también $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

8.2 CASO 2: ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

RESULTADO GENERAL

	Respuestas Actividad 1	Respuestas Actividad 2
<u>Estudiante 2.1</u>	1.1 ●Respuesta correcta ●Se sitúa en el modo P2 AE, logrando hallar el conjunto de vectores linealmente dependientes con el vector $\vec{a}$.	2.1 ●Respuesta correcta. ●Responde de dos formas: -desde un enfoque aritmético utilizando el determinante de orden 2. -desde un enfoque geométrico dibujando los paralelogramos en un plano.
		2.2 ●Respuesta correcta. ●Se sitúa en el modo SG para lo cual dibuja los productos vectoriales respectivos, determinando cuál de ellos tiene mayor longitud.
	1.2 ●Respuesta correcta ●Transito desde el modo SG a P2 AE, ya que a través de su dibujo, evidencia interpretar el conjunto de vectores linealmente dependientes con el vector $\vec{a}$.	2.3 ●Respuesta correcta ●Se sitúa en el modo AA calculando las componentes del vector producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, determinando que $\vec{a} \times \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, cuya igualdad le permite establecer correctamente las relaciones de desigualdad entre las áreas y las longitudes respectivas. Y desde un enfoque geométrico describe el comportamiento del producto vectorial en el sistema de ejes coordenados, a medida que aumenta el ángulo, el cual es similar al de la función <i>seno</i>.
		2.4 ●Respuesta correcta ●Se sitúa en el modo P2 AE afirmando que si $\vec{a} \times \vec{e} = (0,0,0)$, se tiene que $\vec{a}$ y $\vec{e}$ son linealmente dependientes.

<u>Estudiante 2.2</u>	1.1 ● Respuesta correcta ● Realiza el tránsito desde el modo AA al modo P2 AE, determinando las componentes del producto vectorial, utilizando para ello la nemotecnia del seudo determinante. Luego describe el conjunto solución de vectores linealmente dependientes.	2.1 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa en el modo SG dibujando los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados. ● Observación: El alumnos afirma que a mayor ángulo entre los vectores, se tiene mayor área de los paralelogramos, lo cual es erróneo.
		2.2 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa en el modo AA determinado las componentes de los productos vectoriales, utilizando la nemotecnia del seudo determinante. ● Observación: El estudiante podría responder sin realizar cálculos aritméticos si se situara directamente en el modo P3 AE.
	1.2 ● No responde	2.3 ● Respuesta incorrecta. ● Si bien se sitúa de forma correcta en AA determinando las componentes del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, no responde las relaciones de desigualdad que existen entre las áreas de los paralelogramos y las longitudes de los productos vectoriales. ● Dificultades: No se identifican ya que el alumno omite estas respuestas.
		2.4 ● Respuesta incorrecta. ● Se sitúa en los modos P2 AE y P3 AE, ya que afirma que “para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180^0”, coordinando ambos modos de pensamiento. Pero no logra situarse correctamente en P2 AE ya que no logra ver todos los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.

ACTIVIDAD 1

1) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geométricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

Estudiante 2.1

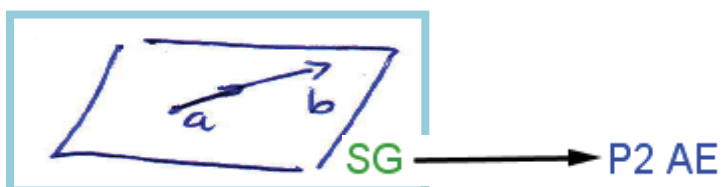
1.1

P2 AE El vector $a \times b$ se puede calcular a base de un determinante, luego $a \times b = 0$ si a y b son l.d., es decir $b = \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}$ es cuerpo.

Otra forma de verlo es que $a \times b$ es el vector perpendicular al plano formado por a y b , así para que éste sea $\vec{0}$ a y b deben ser el mismo vector o l.d.

Respuesta del estudiante 2.1 (Caso 2) Actividad 1

1.2



Respuesta del estudiante 2.1 (Casos 2)
Actividad 1

En 1.1 el estudiante responde de dos formas diferentes, en ambas logra situarse en el modo AE, específicamente en la propiedad 2 del modo AE, ya que afirma que para que $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes. Observamos que no realiza un tránsito desde AA o desde SG del producto vectorial hacia el modo P2 AE, ya que esto se hace innecesario si se sitúa directamente sobre P2AE.

Y en 1.2 logra transitar de SG a la P2 de AE, ya que a través del dibujo se evidencia una forma de pensar el objeto matemático según P2 AE donde el vector $\vec{b}$ es linealmente dependiente al vector $\vec{a}$.

Estudiante 2.2

1.1

Handwritten work for problem 1.1:

$$\vec{b} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = (0b - 0c)\vec{i} - (c - a \cdot 0)\vec{j} + (b - a \cdot 0)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} - c\vec{j} + b\vec{k}$$

Para que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$; basta que las componentes b y c del vector $\vec{b}$ sean cero. Es decir, hay infinitos vectores que cumplen con la condición.

Ejemplo: $\vec{b} = (2, 0, 0)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

(basta como en desarrollo anterior)

$$= (0, 0, 0) \quad \text{AA} \longrightarrow \text{P2 AE}$$

Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) actividad 1

1.2 no responde

Para responder 1.1 el estudiante transita desde un modo AA del producto vectorial hacia el modo P2 AE, para lo cual utiliza la nemotecnia del pseudo determinante, determinando las componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$, y luego encuentra la solución de la ecuación, describiendo el conjunto de vectores linealmente dependientes, aunque no explicita cual es el vector generador.

En 1.2 da cuenta de que no logra pensar la solución del problema desde un enfoque geométrico.

ACTIVIDAD 2

Sea $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3\vec{j} = (0, 3, 0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.

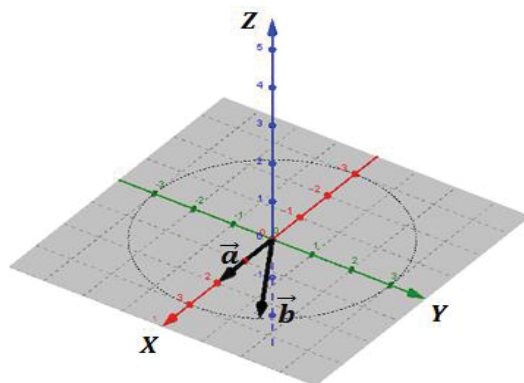


Figura a)

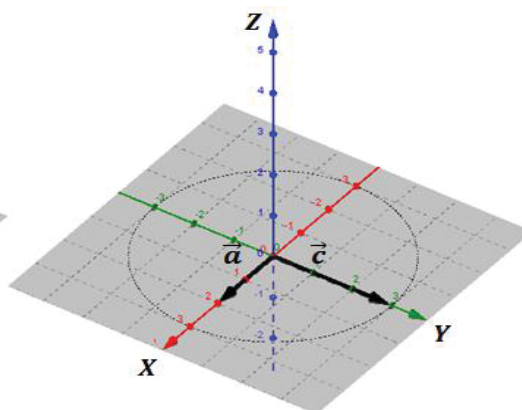


Figura b)

Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

ANALISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

Estudiante 2.1

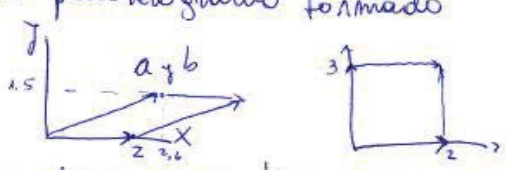
2.1

2.1) Por lo anterior el área ~~entre~~ del paralelogramo formado es el det de los vectores llevados a $\mathbb{R}^2$

$a \times b: \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2.6 & 1.5 \end{vmatrix} = 3$

$a \times c: \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

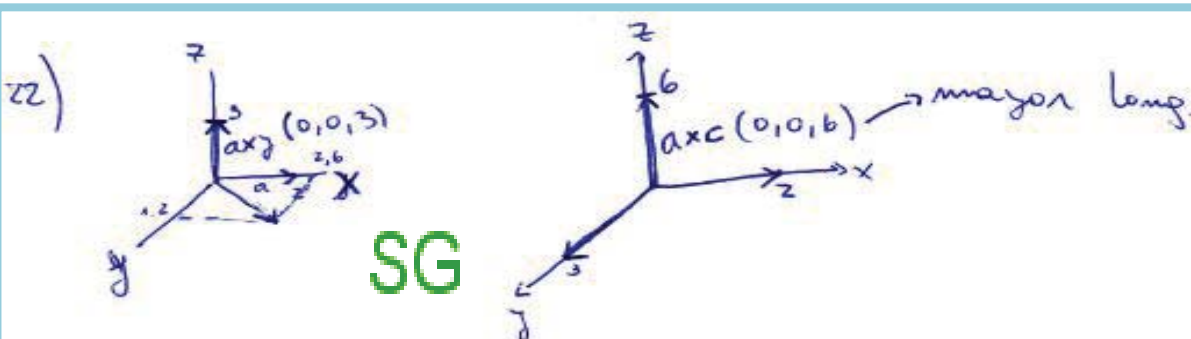
$\therefore$ el formado por $a \times c$ tiene mayor área



Respuesta del estudiante 2.1 (Caso 2) a la actividad 2

2.2

2.2)



$a \times b (0,0,3)$

$a \times c (0,0,6)$ $\rightarrow$ mayor long.

SG

Respuesta del estudiante 2.1 (Caso 2) a la actividad 2

2.3

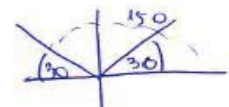
2.3) $d = (-2.6, 1.5, 0)$ $\|d\| = 3$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ -2.6 & 1.5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 2.6 & 1.5 & 0 \end{vmatrix}$ AA

$a \times d = (a \times b)$, así $\text{long}(a \times b) = \text{long}(a \times d)$ y $\text{long}(a \times d) < \text{long}(a \times c)$

$\text{Area}(a \times b) = \text{Area}(a \times d) < \text{Area}(a \times c)$

A medida que el ángulo aumenta el área y la longitud aumentan

Solvo cuando α° es llevado a otro cuadrante. (A lo que me refiero es ~~que~~ cuando se refleja el ángulo en otro cuadrante)



Respuesta del estudiante 2.1 (Caso 2) a la actividad 2

2.4

2.4) $a = (2, 0, 0)$. P2 AE

Para que el área sea 0, el $|\det|$ de a y e debe ser 0, así e debe ser l.d. a $\vec{a}$. Por tanto $\vec{e} = (3, 0, 0)$ o $(-3, 0, 0)$

$\therefore a \times e = (0, 0, 0) \rightarrow$ porque a y e son l.d.

Respuesta del estudiante 2.1 (Caso 2) a la actividad 2

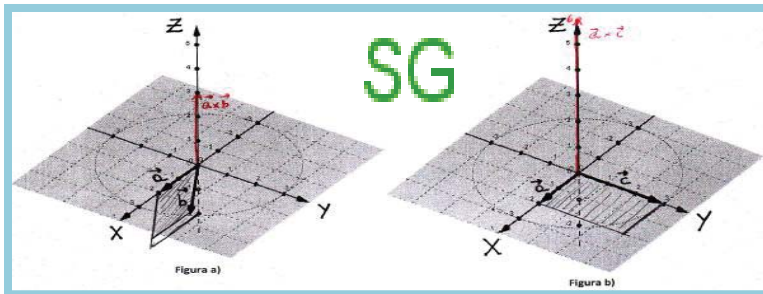
Vemos que en la pregunta 2.1 el estudiante responde correctamente de dos formas: desde un enfoque aritmético determinante el área de los paralelogramos con un determinante de orden 2; y con un enfoque geométrico dibujando los paralelogramos en el plano.

En la pregunta 2.2 se sitúa en el modo de pensar SG del producto vectorial, ya que dibuja los productos vectoriales correspondientes, lo que le permite determinar cuál de ellos es mayor en longitud, contestando así de forma correcta.

Para contestar 2.3 primero se sitúa en el modo de pensar AA del producto vectorial, ya que utilizando la nemotecnia del pseudo determinante, determina que $\vec{a} \times \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, cuya igualdad le permite establecer correctamente las relaciones de desigualdad entre las áreas y las longitudes respectivas, afirma además desde un enfoque geométrico, que si bien el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ es mayor que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$, la relación de que “a medida que el ángulo aumenta, el área y la longitud aumenta”, comportamiento del producto vectorial a medida que aumenta el ángulo el cual es similar a l de la función seno.

En 2.4 no transita desde un modo AA o desde un modo SG hacia el modo P2 de AE, sino que se sitúa directamente en la propiedad 2 de AE del producto vectorial afirmando que si $\vec{a} \times \vec{e} = (0, 0, 0)$, $\vec{a}$ y $\vec{e}$ son linealmente dependientes.

Estudiante 2.2



Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) a la actividad 2

2.1) El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es mayor que el formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ya que el ángulo de apertura es mayor que el otro.

Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) a la actividad 2

$$\begin{array}{lcl}
 2.2) & \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2.6 & 1.5 & 0 \end{pmatrix} & \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 3\hat{k} & = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 6\hat{k} \\
 & \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 3) & \vec{a} \times \vec{c} = (0, 0, 6) \\
 & \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 3 \quad \text{porque:} & \|\vec{a} \times \vec{c}\| = 6 \\
 & \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} & \\
 & = \sqrt{9} = 3 & \\
 & \text{La longitud del vector } \vec{a} \times \vec{c} \text{ es mayor} &
 \end{array}$$

Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) a la actividad 2

$$\begin{array}{l}
 2.3) \quad \vec{a} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -2.6 & 1.5 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 3) \\
 \Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{d}\| = 3 \\
 \text{La longitud del vector } \vec{a} \times \vec{d} \text{ es igual a la} \\
 \text{longitud del vector } \vec{a} \times \vec{b}
 \end{array}$$

Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) a la actividad 2

2.4) Para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero, no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180° .
 Dado esto, y que $\|\vec{e}\|=3$; el vector $\vec{e}=(-3,0,0)$ es único. Si determinamos el valor de $\vec{a} \times \vec{e}$ se tiene;
 $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{0}$; es decir, $\|\vec{a} \times \vec{e}\| < \|\vec{a}\| \|\vec{e}\|$

Respuesta del estudiante 2.2 (Caso 2) a la actividad 2

Es estudiante en la pregunta 2.1 se sitúa en el modo SG dibujando los paralelogramos en el sistema de ejes coordenados, además afirma que si el ángulo entre los vectores es mayor con respecto al otro par de vectores, entonces su área también lo es, dando así una respuesta correcta.

En 2.2 responde desde un modo AA del producto vectorial, calculando luego la norma de los productos vectoriales, respondiendo así correctamente. Observamos que el estudiante podría responder sin realizar cálculos aritméticos si se situara directamente en la propiedad 3 del modo AE.

En 2.3 si bien responde correctamente la relación entre la longitud de los vectores respectivos en el problema situándose en el modo AA del producto vectorial para ello, pero no entrega una respuesta para la relación entre las áreas de los paralelogramos respectivos.

Si bien en 2.4 no realiza ningún dibujo para ilustrar su respuesta, podemos decir que este estudiante responde se sitúa en los modos P2 AE y P3 AE, ya que afirma que “para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180° ”, **coordinando** ambos modos de pensamiento, determinando que el vector $\vec{e}$ es igual a $\vec{e} = (-3,0,0)$ con $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{0}$, pero no se sitúa de forma totalmente correcta en P2 AE ya que no logra ver todos los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.

8.2.1 CONCLUSIONES DEL CASO 2

De los tres estudiantes de Licenciatura vemos que en la actividad 1, en la pregunta 1.1 los tres contestan de forma correcta, donde uno de ellos lo hace situando directamente en el modo P2 AE, y los otros desde un modo AA. En sus respuestas de 1,2 uno de ellos la omite dejando en evidencia que no logra entender P2 AE desde un SG, las otras dos son correctas, logrando interpretar el conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$ en un sistema de ejes coordenados.

En la actividad 2, 2.1 todas las respuestas son correctas, donde los estudiantes se sitúan en el modo SG, o en un enfoque geométrico o aritmético. En la 2.2 también todas son correctas, donde 2 estudiantes responden situándose en el modo AA, determinando el producto vectorial, luego determinan la norma de estos productos vectoriales para dar respuesta a la pregunta; el otro estudiante responde situando en un modo SG dibujando los productos vectoriales respectivos en el sistema de ejes coordenados. En 2.3 dos estudiantes responde de forma correcta: uno coordinando el modo AA con el modo SG, y el otro situándose en el modo AA; otro estudiante responde erróneamente si bien se sitúa en el modo AA, no logra establecer las relaciones de desigualdad solicitadas en la pregunta. Observamos nuevamente que ninguno de ellos se sitúa en el modo P3 AE, lo que les permitiría obtener una respuesta inmediata. Y en 2.4 el estudiante 2.1 y 2.3 responden correctamente situándose en el modo P2 de AE; el estudiante 2.2 coordina los modos P2 AE con P3 AE afirmando que “para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180^0 ”, aunque su respuesta no es del todo correcta, ya que determina solo un vector solución.

Por lo tanto podemos concluir que estos estudiantes en la actividad 1 logran transitar desde un modo AA al modo P2 AE, no encontrando dificultades en tal tránsito. En las actividades 2.1, 2.2 y 2.3 ninguno de ellos se sitúa directamente en el modo P3 AE, pero si logran hallar la respuesta correcta, o situándose en SG o en AA, o coordinando los modos AA y SG. Tampoco tienen problemas en situarse directamente en el modo P2 AE para dar respuesta a la actividad 2.4, donde dados sus argumentos fue importante entender que para que “para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180^0 ”, lo que permite una mayor comprensión de P2 de AE referido a la interpretación de los vectores linealmente dependientes.

8.3 CASO 3: ESTUDIANTES DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

RESULTADO GENERAL

	Respuestas Actividad 1	Respuestas Actividad 2 ²
Estudiante 3.1	1.1 ● Respuesta incorrecta ● Privilegia el modo AA determinando correctamente las componentes del producto vectorial utilizando la nemotecnia del pseudo determinante, pero no logra hallar el conjunto solución de vectores linealmente dependientes. ● Dificultades: No logra interpretar las soluciones obtenidas de la igualdad $(0, -b_3, b_2) = (0, 0, 0)$. Además sólo se sitúa desde el modo AA y no recurre a otro modo de pensamiento para dar solución al problema.	2.1 ● Respuesta incorrecta. ● Se sitúa correctamente en el modo SG dibujando los paralelogramos respectivos en el sistema de ejes coordenados, pero responde de forma errónea. ● Dificultades: deja la respuesta incompleta ya que establece la relación entre las alturas de los paralelogramos, pero no la relación solicitada de las áreas.
		2.3 ● Respuesta incorrecta. ● Se sitúa parcialmente en P3 AE afirmando que: “$\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{d}$ tiene igual longitud ya que tienen igual área”. Se sitúa en el modo SG determinando que las áreas de los paralelogramos de los dos pares de vectores son iguales. Finalmente no responde a lo solicitado en la pregunta.
	1.2 ● No responde.	2.4 ● Respuesta correcta ● Transita desde un SG al modo P2 AE, ya que situándose desde SG dibuja el vector $\vec{a}$ sobre el eje X con los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$, transitando así al modo P2AE, afirmando además: “el área es cero así como su producto vectorial”
		2.2 ● Respuesta imprecisa.

² El estudiante en la actividad 2 responde en el orden en que se visualiza en la tabla: 2.1, 2.3, 2.4 y 2.2.

ACTIVIDAD 1

1) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geométricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

Estudiante 3.1

1.1

Vectores múltiplos de $\vec{a}$ Ups!

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (0, b_3, b_2)$$

Respuesta del estudiante 3.1 (Caso 3) a la actividad 1

1.2 No responde

El estudiante en su respuesta de 1.1 privilegia el modo de pensar AA del producto vectorial, determinando las componentes del producto vectorial respectivo, pero no logra determinar el conjunto solución de vectores que corresponden a la recta generada por $\vec{a}$. Las dificultades identificadas es que no logra hallar el conjunto de vectores solución, que se obtendría al igualar $(0, -b_3, b_2) = (0, 0, 0)$, y además que al no hallar la respuesta desde un modo AA del objeto en estudio, no recurre a otra forma de pensar el objeto para hallar la solución.

En 1.2 se pone en evidencia que el estudiante no piensa con un enfoque geométrico la solución del problema.

ACTIVIDAD 2

Sea $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3\vec{j} = (0, 3, 0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.

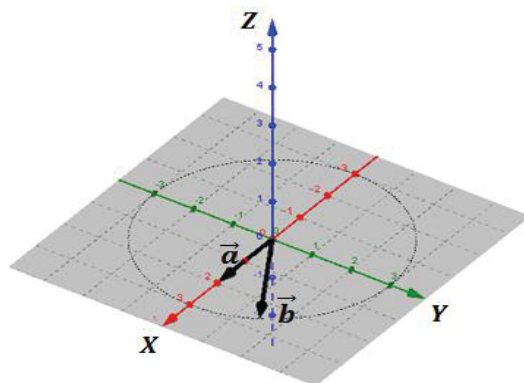


Figura a)

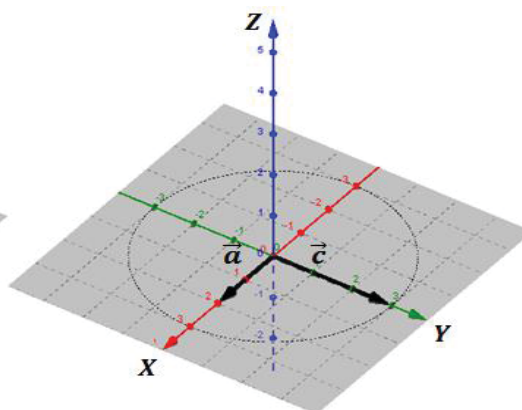


Figura b)

Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

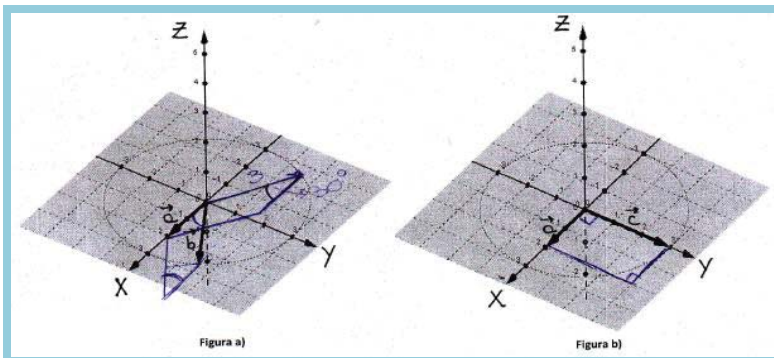
2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

Estudiante 3.3



Respuesta del estudiante 3.3 (Caso 3) a la actividad 2

2.1) Justificando sólo por el cálculo de áreas, vemos que el paralelogramo de la figura a tiene mayor área que la figura b.

Respuesta del estudiante 3.3 (Caso 3) a la actividad 2

2.3) Si hay una relación entre los ejes y el producto vectorial eso que $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$ tienen igual longitud ya que tienen igual área, ambos paralelogramos.

Respuesta del estudiante 3.3 (Caso 3) a la actividad 2

2.4)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Además, $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son ortogonales por lo que su producto también es cero.

SG $\longrightarrow$ **P2 AE**

Vectores sobre el primer eje X.
 $\vec{e} = (-3, 0, 0)$ y $\vec{e} = (3, 0, 0)$

El eje es cero así como su producto vectorial.

Respuesta del estudiante 3.3 (Caso 3) a la actividad 2

³ Las respuestas del estudiante 3.3 en la actividad 2 están puestas en ese orden respetando el orden en que respondió el alumno.

22) el vector ~~area~~ $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$ por ser ortogonales
~~externos~~ sin embargo es el área máxima
 del paralelogramo y también el producto
 cruz el uno cuando el área es cero.
 * No conozco la relación entre los áreas
 y el producto vectorial.

Respuesta del estudiante 3.3 (Caso 3) a la actividad 2

En la respuesta 2.1 del estudiante, se sitúa en el modo SG del producto vectorial, al dibujar los paralelogramos respectivos en el sistema de ejes coordenados, pero igualmente responde de forma errónea.

En 2.3 suponemos que el estudiante a partir de los datos de la actividad 2, ha logrado determinar que efectivamente existe una relación entre el área de los paralelogramos y la longitud del producto vectorial afirmando que: “ $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{d}$ tiene igual longitud ya que tienen igual área”, situándose parcialmente en el modo P3 de AE, donde se sitúa en un modo SG para determinar que el área de los paralelogramos de los dos los pares de vectores son iguales, lo que queda en evidencia en el dibujo que realiza sobre la figura a).

En la respuesta de la pregunta 2.4 el estudiante se sitúa desde un modo de pensar el producto vectorial SG ya que dibuja el vector $\vec{a}$ sobre el eje X del sistema de ejes coordenados con los respectivos vectores solución que son linealmente dependientes con $\vec{a}$, por lo que podemos afirmar que ha logrado transitar desde este modo hacia el modo AE, propiedad 2 de AE afirmando además que “el área es cero así como su producto vectorial”.

Y en 2.2 podemos deducir que el alumno recuerda una propiedad que se cumple en el producto punto, asignándosela al producto cruz, por lo que su respuesta no es clara e imprecisa, pero se quiere notar que luego afirma “el producto es cero cuando el área es cero”, ya que esta relación concuerda y confirman sus respuestas en 2.4.

8.3.1 CONCLUSIONES DEL CASO 3

El estudiante 3.1 de Doctorado en Didácticas de las Matemáticas en la actividad 1.1 privilegia el modo AA, pero desde allí no logra transitar hacia el modo P2 AE, y tampoco logra pensar el problema desde un SG lo que queda en evidencia al no responder 1.2.

En la actividad 2, en 2.1, 2.2 y 2.3 para responder se sitúa principalmente en el modo SG, aunque sus respuestas son incorrectas, estas le permiten intuir que existe una relación entre las áreas de los paralelogramos y las longitudes de los productos vectoriales, lo que queda en evidencia en su afirmación en 2.3: “ $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{d}$ tiene igual longitud ya que tienen igual área”. Y en la actividad 2.4 el estudiante logra transitar desde un SG al modo P2 AE, ya que dibuja los vectores linealmente dependientes en el sistema de ejes coordenados de longitud 3, afirmando luego que “el área es cero así como su producto vectorial”, por lo que ha logrado transitar desde un SG al modo AE.

En este caso se cumple a cabalidad nuestro objetivo general, ya que el estudiante privilegiando el modo AA no logra transitar hacia el modo P2 AE, pero si logra hacerlo desde un modo SG, para lo cual las preguntas 2.1, 2.2 y 2.3 lograron entregar información al estudiante de la relación entre la longitud de los productos vectoriales y el área de los paralelogramos respectivos.

8.4 CASO 4: ESTUDIANTE DE MAGISTER EN MATEMÁTICAS

RESULTADO GENERAL

	Respuestas Actividad 1	Respuestas Actividad 2
<u>Estudiante 4.1</u>	1.1 • Respuesta correcta • Transita desde el modo AA al modo P2 AE, determinando correctamente las componentes del producto vectorial, utilizando la nemotecnia del seudo determinante, a partir de allí determina el conjunto solución de todos los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.	2.1 • Respuesta correcta. • Se sitúa en el modo de pensar P3 AE utilizando la parte derecha de la fórmula $\ u \times v\ = \ u\ \ v\ \sin\theta$, o sea $\ u\ \ v\ \sin\theta$, para el cálculo del área de los paralelogramos.
		2.2 • Respuesta correcta. • Se sitúa en P3 AE utilizando la relación implícita que establece la fórmula $\ u \times v\ = \ u\ \ v\ \sin\theta$, esto es: la longitud del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es igual al área del paralelogramo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no necesitando realizar cálculos aritméticos.
	1.2 • Respuesta correcta • Transita desde el modo SG al modo P2 AE, ya que a partir del dibujo realizado determina el conjunto de vectores linealmente dependientes con el vector $\vec{a}$.	2.3 • Respuesta correcta • Se sitúa en el modo P3 AE ya que utiliza la parte derecha de la fórmula $\ u \times v\ = \ u\ \ v\ \sin\theta$ para calcular tanto la longitud del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{d}$, así como también el área del paralelogramo que se forma entre estos vectores. Estableciendo luego las relaciones de desigualdad de áreas y longitudes solicitadas en la pregunta.
		2.4 • Respuesta incorrecta • Se sitúa en el modo P2 AE determinando el conjunto solución de vectores $\vec{b} = (x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, pero no logra determinar sólo los vectores solución $\vec{e}_1 = (-3, 0, 0)$ y $\vec{e}_2 = (3, 0, 0)$ dada su longitud de tres unidades.

<u>Estudiante 4.1</u>	1.1 ● Respuesta correcta ● Transita desde el modo AA al modo P2 AE, para lo cual determina las componentes del producto vectorial utilizando la nemotecnia del seudo determinante, luego encuentra el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.	2.1 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa en el modo P3 AE afirmando que el área del paralelogramo se puede calcular de dos formas: con $\ \vec{a} \times \vec{b}\$ o con $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}\theta$, de las cuales escoge $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}\theta$ para calcular el área respectiva, determinando $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$.
		2.2 ● Respuesta correcta. ● Se sitúa en el modo P3 AE utilizando la relación implícita que establece la fórmula $\ \vec{a} \times \vec{b}\ = \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}(\theta)$, por lo que concluye que están si $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$ entonces la longitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ es menor que la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$. Observación: Situándose directamente en este modo de pensamiento le permite responder sin realizar calculo aritmético alguno.
	1.2 ● Respuesta correcta ● Transita desde el modo SG al modo P2 de AE, ya que a partir del dibujo realizado da evidencia de entender el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$.	2.3 ● Respuesta correcta ● Se sitúa en P3 AE calculando el área del paralelogramo con la fórmula $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}(\theta)$, a partir de allí determina las relaciones de desigualdad de áreas y longitudes solicitadas.
		2.4 ● Respuesta correcta ● Coordinación entre los modos P3 AE y P2 AE. Primero se sitúa en P3 AE utilizando la fórmula $\ \vec{a} \times \vec{b}\ = \ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}(\theta)$ donde para que el área sea cero se tiene $\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \text{sen}(\theta) = 0$, por lo que para que se cumpla esta igualdad, el argumento de la función <i>seno</i> debe tomar los valores de 0° y 180°, esto le permite al estudiante determinar que los vectores linealmente

		dependientes al vector $\vec{a}$ son: $\vec{e} = \lambda \vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda \vec{a}$, situándose así en el modo P2 de AE.
--	--	---

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

ACTIVIDAD 1

1) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geoméricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

Estudiante 4.1

1.1

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces AA $\longrightarrow$ P2 AE

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \hat{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \hat{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Tenemos que $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 0) \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} (0 \cdot b_3 - 0 \cdot b_3) - \hat{j} (1 \cdot b_3 - 0 \cdot b_1) + \hat{k} (1 \cdot b_2 - 0 \cdot b_1)$$

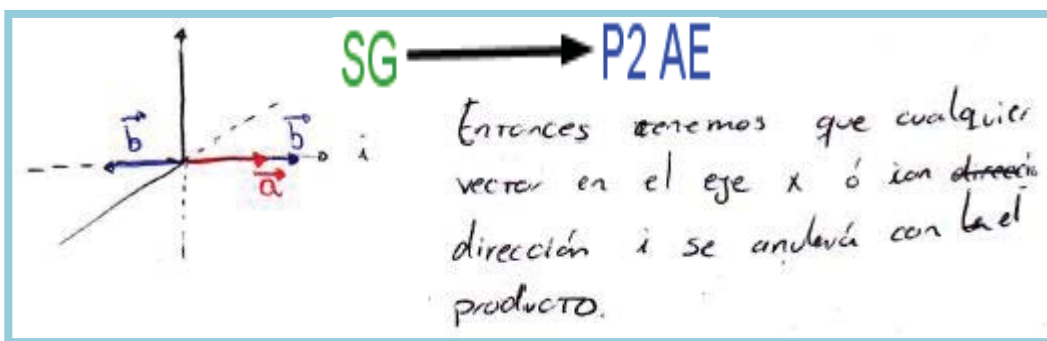
$$= \hat{i} (0) - \hat{j} b_3 + \hat{k} b_2 = (0, -b_3, b_2).$$

Entonces, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow b_3 = b_2 = 0$, el valor de la coordenada en b_1 no importa que valor tome ya que siempre se anulará con la el producto, finalmente tenemos:

$$\vec{b} = (b_1, 0, 0). \text{ (Tiene infinitas soluciones).}$$

Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 1

1.2



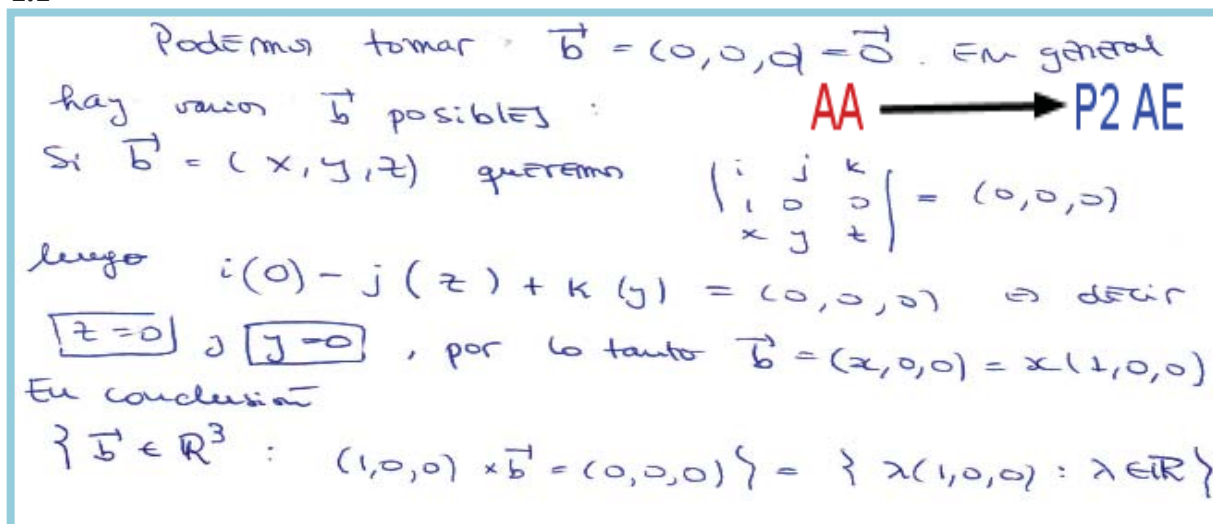
Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 1

En la respuesta 1.1 el estudiante se sitúa desde un modo de pensar AA del producto vectorial, determinando las componentes de éste para lo cual utiliza la nemotecnia del pseudo determinante, luego en la respuesta vemos que el vector producto vectorial se iguala con el vector nulo, determinando así el vector solución $\vec{b} = (b_1, 0, 0)$, por lo que podemos afirmar que logra transitar hacia el modo AE (Propiedad 2 del modo AE), ya que determina como vectores solución estos vectores linealmente dependientes con $\vec{a}$.

En 1.2 vemos que efectivamente el estudiante entiende que el conjunto solución de vectores es linealmente dependientes con el vector $\vec{a}$, logrando transitar desde un modo SG hacia el modo P2 de AE.

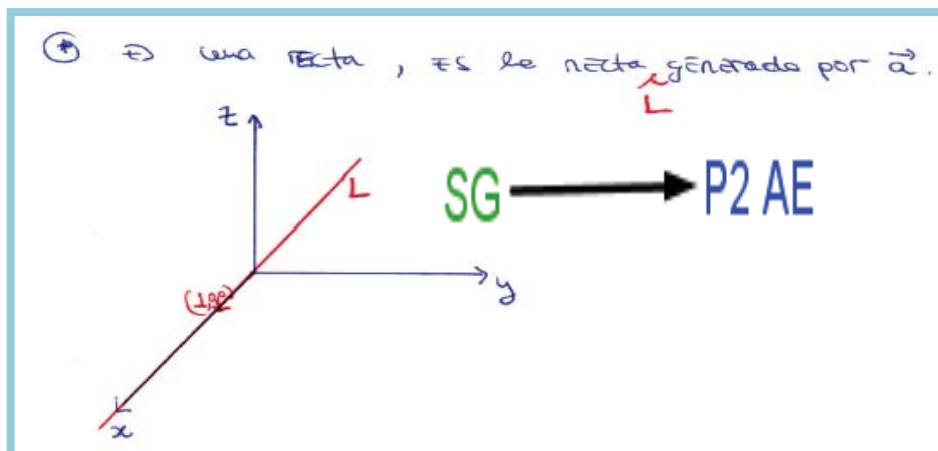
Estudiante 4.2

1.1



Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 1

1.2



Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 1

Para responder **1.1** el estudiante 5.1 realiza un tránsito entre el modo AA del producto vectorial al modo AE (propiedad 2 de AE), este tránsito lo realiza utilizando como articulador el pseudo determinante con el cual determina las componentes del producto vectorial, para luego encontrar el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$. En **1.2** muestra entender el conjunto solución de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$ desde un modo de pensar SG transitando desde SG a P2 de AE.

ACTIVIDAD 2

Sea $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3\vec{j} = (0, 3, 0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.

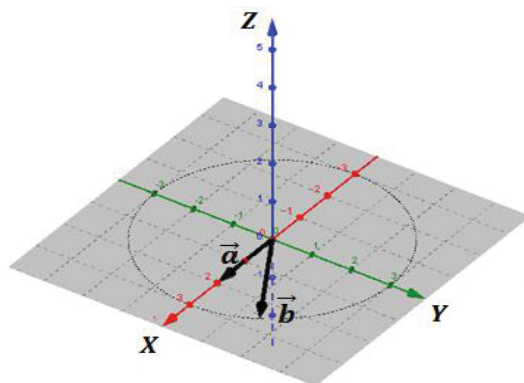


Figura a)

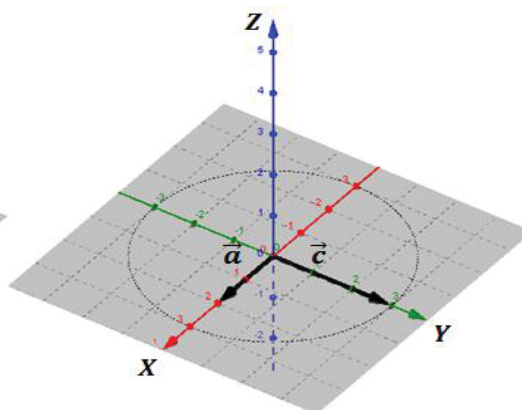


Figura b)

Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES

Estudiante 4.1

2.1

1) Otra fórmula para hallar la longitud del paralelogramo es:
 $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \theta$.

Entonces,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \theta = 2 \cdot 3 \cdot \sin(30) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \underline{1},$$

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\| \sin \theta = 2 \cdot 3 \sin(90) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \underline{1}$$

Así, se tiene que el paralelogramo de la figura b) tiene mayor área que el de la figura a).

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 2

2.2

2) Como el área del paralelogramo coincide con la longitud de los vectores se tiene que el vector con mayor longitud es $\vec{a} \times \vec{c}$

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 2

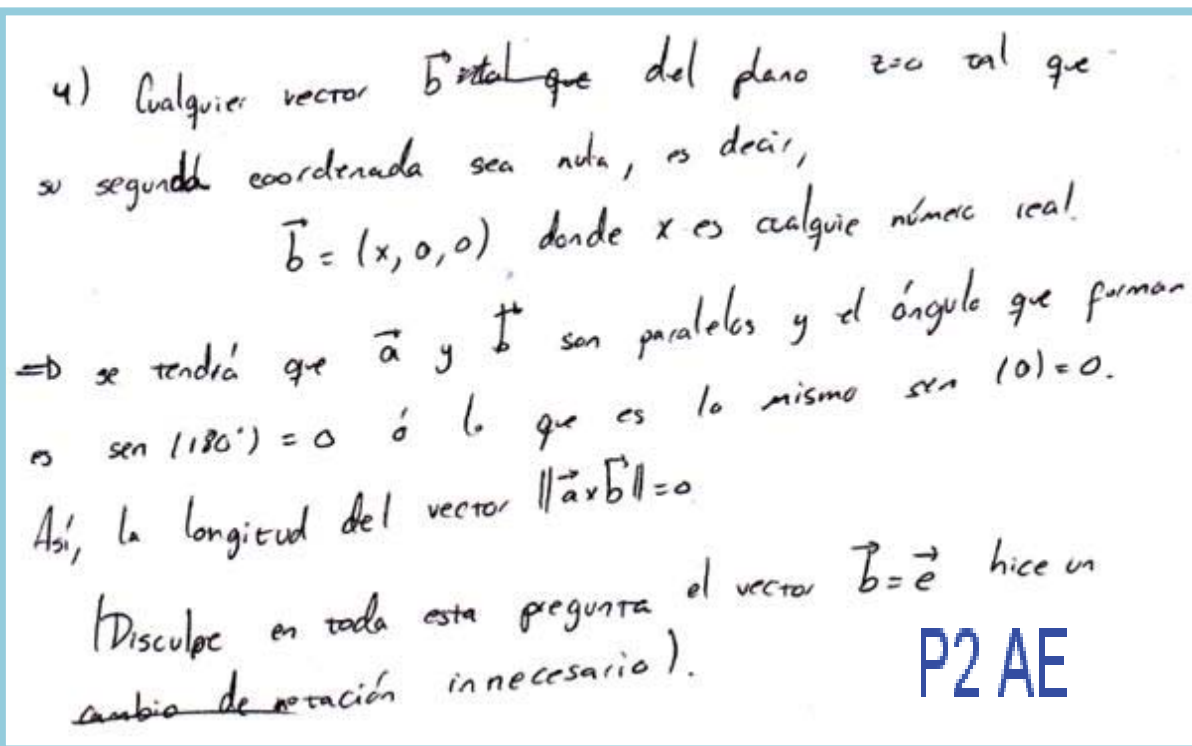
2.3

$$3) \|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{d}\| \sin \theta = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ es igual a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ menor con respecto a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$. lo mismo ocurre con ~~los~~ el área de los paralelogramos formados por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 2



Respuesta del estudiante 4.1 (Caso 4) a la actividad 2

En 2.1 el estudiante responde situándose directamente sobre el modo P3 de AE, ya que aplica la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, donde observamos que utiliza la parte derecha de ella $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, determinando con ella el área de los paralelogramos respectivos. Por lo que su respuesta situándose en este modo es correcta.

En la pregunta 2.2 responde correctamente situándose nuevamente sobre el modo P3 AE del producto vectorial, ya que utiliza la relación implícita que se deduce de la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$, esta relación es que la longitud del producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al área del paralelogramo que se forma entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

En 2.3 vuelve a situarse en P3 de AE determinando con la fórmula $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ (parte derecha de ella $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$) tanto la longitud de $\vec{a} \times \vec{d}$, así como el área del paralelogramo entre $\vec{a}$ y $\vec{d}$, lo que le permite determinar que esta área es igual al área del paralelogramo formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

2.4 Responde que la solución es el vector $\vec{b} = (x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, y luego da una característica importante de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, esto es, que son paralelos, y además que el ángulo que forman puede ser de 0° o de 180° , para lo cual utiliza la función $\sin$, ambas

características de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$. Lo que nos permite afirmar que el estudiante logra situarse en el modo P2 de AE. Pero no determina los dos vectores solución $\vec{e} = (-3,0,0)$ y $\vec{e} = (3,0,0)$, dado que la longitud de estos vectores debe ser de 3 unidades.

Estudiante 4.2

1. El área del paralelogramo generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ (esto es un teorema de geo. vectorial)

y también se tiene $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$ (otro teorema)
 $\theta = \text{ángulo entre } \vec{a} \text{ y } \vec{b}$

luego $\underbrace{\text{Área}(\vec{a}, \vec{b})}_{\substack{\text{área del paralelogramo} \\ \text{generado por } \vec{a} \text{ y } \vec{b}}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$

En Fig. a) $\text{Área}(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta) = \frac{\|\vec{a}\|}{2} \cdot 3 \cdot \sin(30^\circ)$

En Fig. b) $\text{Área}(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a}\| \|\vec{c}\| \sin(\phi) = \frac{\|\vec{a}\|}{2} \cdot 3 \cdot \sin(90^\circ)$

Como $\sin(30^\circ) < \sin(90^\circ)$ $\left(\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \sin(90^\circ) = 1 \right)$
 $\frac{2\sqrt{3}}{4} < 1$

Concluimos que $\text{Área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{Área}(\vec{a}, \vec{c})$

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 2

2. Por lo dicho anteriormente tenemos $\text{Área}(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
 $\text{Área}(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a} \times \vec{c}\|$

Como $\text{Área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{Área}(\vec{a}, \vec{c})$ tenemos $\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$.

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 2

3. $\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{d}\| \sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}\|}{2} \cdot 3 \sin(150^\circ) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
 $\frac{\|\vec{a}\|}{2} \cdot 3 \sin(30^\circ)$

luego $\|\vec{a} \times \vec{d}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|$

P3 AE

Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 2

4. Queremos **P3 AE**

$$0 = \text{Área}(\vec{a}, \vec{e}) \text{ pero } \text{Área}(\vec{a}, \vec{e}) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{e}\|}{2} = \frac{\|\vec{a}\| \|\vec{e}\| \sin(\theta)}{2 \cdot 3}$$

luego debemos tener $\sin(\theta) = 0$ es decir $\theta = 0^\circ$ o $\theta = 180^\circ$

por lo tanto $\vec{e} = \lambda \vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda \vec{a}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

Como $\|\vec{e}\| = 3$ debemos tener $\|\lambda \vec{a}\| = 3$ ($\|-\lambda \vec{a}\| = \|\lambda \vec{a}\|$)

$$\lambda \cdot \underbrace{\|\vec{a}\|}_{=2} = 3 \quad (\text{pues } \lambda > 0)$$

$$\lambda \cdot 2 = 3$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

En conclusión

$$\{ \vec{e} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{e}\| = 3 \wedge \text{Área}(\vec{a}, \vec{e}) = 0 \} = \left\{ \frac{3}{2} \vec{a}, -\frac{3}{2} \vec{a} \right\}$$

$$= \{ (3, 0, 0), (-3, 0, 0) \}$$

Hay dos posibilidades : $\vec{e} = (3, 0, 0)$
o $\vec{e} = (-3, 0, 0)$ **P2 AE**

Respuesta del estudiante 4.2 (Caso 4) a la actividad 2

En 2.1 responde situándose directamente en el modo AE en la propiedad 3, ya que determina que para calcular el área del paralelogramo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede utilizar $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ o la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$, y escogiendo $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$ esta última responde correctamente a la pregunta que relaciona las áreas de los paralelogramos.

El estudiante en la respuesta 2.2 también se sitúa desde la propiedad 3 del modo AE, entendiendo la relación implícita de la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$, la cual establece que la longitud del producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es igual al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, lo que le permite responder correctamente sin realizar cálculo alguno que si las áreas de los paralelogramos están en la relación $\text{área}(\vec{a}, \vec{b}) < \text{área}(\vec{a}, \vec{c})$ luego entonces la longitud del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es menor que la longitud de $\vec{a} \times \vec{c}$,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a} \times \vec{c}\|.$$

En la respuesta 2.3 el estudiante se sitúa nuevamente en el modo de la propiedad 3 del modo AE, calculando primeramente el área del paralelogramo entre $\vec{a}$ y $\vec{d}$, para luego determinar las relaciones de desigualdad solicitadas en la pregunta.

La respuesta 2.4 da cuenta de que el estudiante coordina los modos P3 AE y P2 AE. Primero se sitúa en P3 AE utilizando la fórmula $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)$ donde para que el área sea cero, o sea $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta) = 0$, el argumento de la función *seno* puede tomar los valores de 0° y 180° , esto le permite determinar que los vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$ son $\vec{e} = \lambda \vec{a}$ o $\vec{e} = -\lambda \vec{a}$, situándose así en el modo P2 de AE. Luego dado que su longitud debe ser tres, se tiene que $\vec{e} = (-3,0,0)$ o que $\vec{e} = (3,0,0)$.

8.4.1 CONCLUSIONES DEL CASO 4

Ambos estudiantes tanto 4.1 de Magister en Matemática, como 4.2 de Doctorado en Matemáticas responden la actividad 1.1 transitando desde el modo AA al modo P2 AE, y en la actividad 1.2 transitando desde un P2 AE hacia un SG. También encontramos que en la segunda actividad ambos responden 2,1, 2,2 y 2.3 situándose directamente en el modo P3 AE, y sólo en la actividad 2.4 observamos que el estudiante de Magister responde situándose en el modo P2 AE, mientras que el estudiante de Doctorado realiza una coordinación entre dos modos estructurales, el modo P2 AE y el modo P3 AE.

En cuanto a nuestro objetivo general de investigación, vemos como estos estudiantes no privilegian el modo de pensar AA en sus respuestas, sino que por el contrario utilizan mayoritariamente el modo AE, lo que les da mayor precisión en sus respuestas, y además en algunos casos les permite determinar respuestas sin realizar cálculos aritméticos, mostrando que pensando el objeto matemático de producto vectorial desde otros modos, no sólo desde un AA, permite una mayor comprensión.

Conclusión

Esta investigación tuvo como principal objetivo la búsqueda de una mayor comprensión del objeto matemático de producto vectorial. Dado los **antecedentes** obtenidos en artículos sobre la enseñanza de la física, los cuales evidencian que existen dificultades en los estudiantes al momento de resolver un problema en el que esté involucrado el producto vectorial, en donde ambas investigaciones reportan que una de las mayores problemas que evidencian los estudiantes, referidas al aprendizaje del producto vectorial es, la falta o mayor dificultad en su interpretación geométrica, teniendo menos dificultades en el cálculo de éste. A partir de allí elaboramos la **problemática de investigación**: referida a que los estudiantes privilegian el modo de pensar analítico aritmético, teniendo dificultades para situarse en otros modos de pensamiento del producto vectorial, lo que no le permite acceder a una mayor abstracción del objeto matemático. Se escoge por tanto el **Marco Teórico de los modos de pensamiento**, ya que es el mejor lente para abordar esta problemática, donde una vez definida ésta se elaboran los **objetivos de investigación**, estos permitieron el **diseño Metodológico de investigación**, el cual consta de **tres fases**: en la **primera de ellas** se propone una revisión bibliográfica de textos referentes tanto a epistemología histórica del producto vectorial, como de textos de álgebra lineal, lo cual permitió desarrollar un análisis histórico epistemológico y un análisis matemático que permitió sustentar los distintos modos de pensar del objeto matemático, así como identificar posibles articuladores entre los modos de pensamiento. Esto permitió **levantar los distintos modos de pensamiento del objeto matemático** utilizando el **Marco Teórico** de los **modos de pensamiento de Ana Sierpiska**. Posteriormente se realizó lo propuesto en las **fases 2 y 3** de la Metodología que fue: el diseño y aplicación de una medición inicial para documentar la problemática de estudio; y una propuesta de actividades para lograr una mayor comprensión de objeto matemático producto vectorial, respectivamente.

La **medición inicial** se aplicó a dos casos de estudio, estudiantes de cuarto año de enseñanza media y estudiantes de pregrado de Pedagogía en Matemáticas, de lo cual se logra concluir que ellos en sus respuestas privilegian el modo AA por sobre otro modo de pensamiento (SG), y que además tienen dificultades para situarse en los distintos modos de pensar del objeto producto vectorial.

Por lo que en la fase tres se diseñan **dos actividades** que tienen por objetivo lograr que el estudiante entienda el objeto matemático de producto vectorial en sus distintas definiciones, para una mayor comprensión de éste, para lo cual se busca mostrar que si un estudiante presenta dificultades para transitar desde un modo AA hacia el modo AE, se hace necesario que piense el objeto matemático desde otros modos de pensamiento, buscando que realice el tránsito desde un modo SG, transitando desde allí al modo AE, o también que logre situarse directamente en AE para dar respuesta al problema. Por lo que en la primera actividad (la cual está planteada desde un modo AA) se busca evidenciar que aquellos estudiantes que tienen **dificultades para transitar desde el modo AA hacia el modo AE, generalmente es porque no entienden el objeto matemático desde otro modo de pensamiento, que no sea el modo AA**, razón por la cual lo privilegia. Por esto en la actividad 2, (la cual está planteada desde el modo SG) en concordancia con la actividad 1, tuvo como propósito que el estudiante **transite desde un modo SG hacia el AE, o que se situó directamente en AE**.

Una vez aplicadas las actividades a cuatro casos de estudio, correspondientes a estudiantes universitarios de pre y post grado, se obtuvieron las siguientes **conclusiones por caso**:

En el **caso 1** de estudiantes de pedagogía en matemática que cursan su quinto semestre, se evidenció que la mayoría privilegia el modo AA por sobre los otros modos para responder el ítem 1.1 de la actividad 1. Y que si bien en 2.1, 2.2 y 2.3 no se sitúan directamente en el modo P2 AE, logran encontrar las respuestas correctas situándose en otros modos como el AA, y el SG, esto dado que la actividad 2 está planteada desde un modo SG. Y en 2.4 si bien ninguno de los estudiantes logra responderla correctamente, igualmente se quiere destacar la respuesta dada por dos estudiantes de que el vector buscado es $\vec{e} = (3,0,0)$, en donde uno de ellos en la respuesta de la actividad 1 afirmó que “para que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ necesariamente $\vec{b}$ debe es el vector nulo”, mostrando que en la actividad 2 logra una mayor comprensión del modo P2 AE.

En las respuestas del **caso 2** de estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemáticas, se tiene que en la actividad 1 logran transitar desde un modo AA al modo P2 AE, no encontrando dificultades en este tránsito. En las actividades 2.1, 2.2 y 2.3 ninguno de ellos se sitúa directamente en el modo P3 AE, pero si logran hallar la respuesta correcta, situándose en el modo SG o en el modo AA, o coordinando los modos AA y SG. Tampoco tienen problemas en situarse directamente en el modo P2 AE para dar respuesta a la actividad 2.4, de donde no sólo destacamos que los estudiantes se situaran directamente en el modo P2 AE, no

privilegiando el AA, sino que también se da énfasis en las afirmaciones de los alumnos, como la siguiente: “para que el área entre el vector $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea cero no debe formarse un paralelogramo, es decir, el ángulo comprendido entre ellos debe ser de 180^0 ”, lo que les permite una mayor comprensión de P2 de AE referido a la interpretación de los vectores linealmente dependientes a partir de que el área del paralelogramo dado es cero.

En el **caso 3** el estudiante de Doctorado en Didácticas de las Matemáticas en la actividad 1.1 privilegia el modo AA, pero desde allí no logra transitar hacia el modo P2 AE, y tampoco logra pensar el problema desde un SG, no logrando pensar en el conjunto de vectores linealmente dependientes al vector $\vec{a}$. En la actividad 2, en 2.1, 2.2 y 2.3 se sitúa principalmente en el modo SG, y aunque algunas de sus respuestas son incorrectas, estas le permiten intuir que existe una relación entre las áreas de los paralelogramos y las longitudes de los productos vectoriales, lo que queda en evidencia en su afirmación en 2.3: “ $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{d}$ tiene igual longitud ya que tienen igual área”. Y en la actividad 2.4 el estudiante logra transitar desde un SG al modo P2 AE, ya que dibuja los vectores linealmente dependientes en el sistema de ejes coordenados, afirmando que “el área es cero así como su producto vectorial”, por lo que ha logrado transitar desde un SG al modo P2 AE. En este caso vemos que el estudiante alcanza una comprensión profunda del modo P2 AE, a partir de un modo SG, lo que no le fue posible desde el modo AA.

Y en el caso de los estudiantes de postgrado, **caso 4**, en sus respuestas tanto de la actividad 1 como en la actividad 2 se sitúan en la mayoría de las veces, directamente en los modos estructurales, ya sea P2 AE o P3 AE, evidenciando que al responder desde este modo no se hacen necesarios los cálculos aritméticos, sino que basta el argumento que proviene del entendimiento de este modo estructural.

Finalmente queremos concluir la importancia de plantear **la actividad 1 desde un modo AA hacia el modo estructural**, para luego plantear **la actividad 2 desde un SG, hacia el modo estructural**, ya que esto permitió que algunos de los estudiantes de los casos 1, 2 y 3 logaran una mayor comprensión del modo de la propiedad 2 del modo AE, logrando así que deje de ser cierta para estos estudiantes la afirmación de que si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, necesariamente $\vec{a}$ o $\vec{b}$ es un vector nulo. En donde la mayor dificultad que se presentó en la actividad 1, que fue interpretar el conjunto solución de vectores linealmente dependientes obtenidos de resolver la ecuación $(1,0,0) \times (b_1, b_2, b_3) = (0,0,0)$, conjunto solución que puede ser hallado situándose desde

otro modo de pensamiento, sin la realización de cálculos aritméticos. Por tanto podemos afirmar que dada la aplicación de las dos actividades se logra cumplir con el **objetivo de investigación**, referido a **lograr una mayor comprensión del objeto matemático producto vectorial**, si bien aceptamos que no podemos generalizar estos resultados, ya que son pocos los casos de estudio, y sólo se abordó la búsqueda de una mayor comprensión del modo P2 AE, haciéndose necesario: aplicarlo a otros casos de estudio, como por ejemplo estudiantes de pedagogía en Física; y también diseñar más actividades en donde se aborden la propiedad 1 y la propiedad 2 del modo AE, siempre en la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático en estudio.

.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. M. (1984). *Calculus, vol 1: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Barcelona: Reverté, s.a.
- Arnal, J., Del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.
- Ashurst, G. (1982). *Fundamentos de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza editorial, S.A.
- Babini, J. (1967). *Historia de las ideas modernas en matemática*. Buenos Aires, Argentina: Eva V. Chesneau.
- Barnoil, P., & Zavala, G. (2014). Evaluación del entendimiento de los estudiantes en la representación vectorial utilizando un test con opciones múltiples en español. *Revista Mexicana de Física*, 86-102.
- Figueroa Rebolledo, G., & Fierro Pradenas, R. (2002). *Álgebra*. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.
- Martínez Sierra, G., & Benoit Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education*, 201-208.
- Mena, A. (2001). *Elementos de Matemáticas, 2*. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.
- Parraguez, M. (2012). *Teoría los Modos de Pensamiento*. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 1-24.
- Sanchez Muñoz, J. M. (2011). Historia de Matemáticas Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. *Pensamiento Matemático*, 1-26.
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra En J. L. Dorier, (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

ANEXOS

MEDICIÓN INICIAL

APLICADO A UN CURSO DE ESTUDIANTES DE CUARTO AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA Y A UN CURSO DE TERCER SEMESTRE DE LA CARRERA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICAS.

TE INVITAMOS A RESPONDER LO SIGUIENTE, ESCRIBIENDO TODO DETALLADAMENTE:

Pregunta 1: De los vectores $A = (0, 2, 5)$, $B = (19, 0, 0)$ y $C = (0, 5, 3)$ en $\mathbb{R}^3$, uno de ellos es el producto vectorial de los otros dos, encuéntralo. Justifica.

Pregunta 2: Sean $A = 2i - j + 2k$ y $B = 3i + 4j - k$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Determina $A \times B$.

Pregunta 3: Dados los vectores $A = (3, 1, 0)$, $B = (5, 7, 0)$ Determine explícitamente un vector C perpendicular a los vectores A y B . ¿Hay más de un vector C que cumpla la condición? Justifica.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Actividad 1:

Dados los vectores $\vec{a} = (1, 0, 0)$ y $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

1.1 Muestra un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ¿Hay más de un vector $\vec{b}$ que cumpla la condición? Justifica.

1.2 Interpreta geoméricamente la o las solución(es) encontrada(s) en 2.1.

Actividad 2:

Sea $\vec{a} = 2\vec{i} = (2, 0, 0)$ vector en $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano $z = 0$.

En la figura a) se tiene: El vector $\vec{b} = 2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (2.6, 1.5, 0)$, donde $\|\vec{b}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\theta = 30^\circ$.

En la figura b) se tiene: El vector $\vec{c} = 3\vec{j} = (0, 3, 0)$, donde $\|\vec{c}\| = 3$. Y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es $\theta = 90^\circ$.

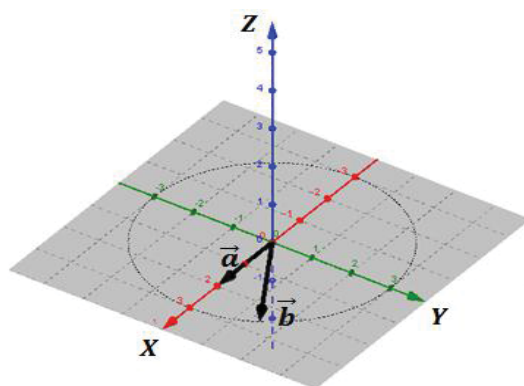


Figura a)

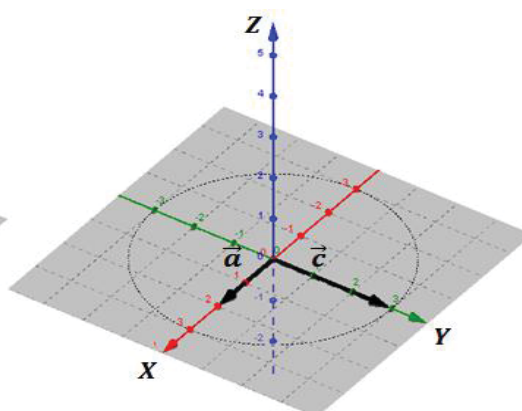


Figura b)

Responde:

2.1 ¿El área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es mayor o menor al área del paralelogramo formado entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.2 Al ser las áreas de los paralelogramos formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$ diferentes ¿La longitud del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es igual, mayor o menor a la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{c}$? Justifica tu respuesta.

2.3 Sea el vector $\vec{d} = -2.6\vec{i} + 1.5\vec{j} = (-2.6, 1.5, 0)$ sobre el plano $z = 0$, donde $\|\vec{d}\| = 3$. Y el ángulo $\theta = 150^\circ$.

a) Relaciona la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{d}$ con las longitudes de los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{c}$. (mayor, menor o igual). Y relaciona el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$ con los formados por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$. (mayor, menor o igual). Justifica.

2.4 Determina un vector $\vec{e}$ con $\|\vec{e}\| = 3$ tal que el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$ sea igual a cero. ¿Hay más de un vector $\vec{e}$ que cumpla la condición? ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? ¿Cuales son las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{e}$? Justifica tu respuesta.

PARTICIPACIÓN EN LA VXIII JORNADA NACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

