



**Pontificia Universidad Católica de Valparaíso**

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Informática

Ingeniería Civil en Informática

**HEURÍSTICA HÍBRIDA DE ACO CON  
LAGRANGIANO PARA EL DRD CAPACITADOS**

Autor:

Héctor Alberto Castillo Brevis

Profesor Guía:

Guillermo Cabrera Guerrero

Profesor Co-referente:

Broderick Crawford Labrín

**DICIEMBRE 2008**

*A mis Padres, hermanos y amigos,  
quienes siempre me apoyaron y creyeron en mí.*

## Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios, a mis padres, hermanos y amigos que me ayudaron a llegar a este momento y que gracias a su apoyo en los tiempos difíciles logré salir adelante con mi título. En particular agradezco eternamente a mis padres Edecia y Bernardo, por todo el amor y comprensión dedicado.

*Héctor Alberto Castillo Brevis*

## Resumen

La toma de decisión sobre la localización de hospitales, centros de distribución, escuelas, edificios públicos, y otras localidades, son uno de los problemas estratégicos más relevantes dentro de la gestión de la cadena de abastecimientos, que han sido ampliamente estudiados a lo largo del tiempo. Pero nuevos autores hoy en día, han propuesto cambiar este enfoque de desarrollo que conllevaba decisiones netamente estratégicas, agregando para su resolución, decisiones de tipo tácticas, como el manejo de inventario y transporte, para mejorar el alcance del problema. Teniendo en cuenta este nuevo enfoque de resolución, éste trabajo de título, aborda el estudio sobre el impacto que tiene el agregar las decisiones de

inventario, dentro de la estrategia de decisiones de localización, ocupando para ello, el fenómeno del modelo Risk Pooling.

En este trabajo de título se presenta un modelo híbrido entre la heurística del Lagrangiano Relajado, con la Metaheurística Optimización de Colonias de Hormigas (ACO), para abordar el problema de localización de centros de distribución con limitaciones de capacidad de Inventario y demandas de productos estocásticas. Cabe señalar que en la literatura existen varios estudios que abordan este tipo de problema, ocupando sólo la heurística del Lagrangiano Relajado, pero éste trabajo de título se destaca de los demás, por abordar una heurística híbrida, que además aplica la metaheurística ACO para la resolución de problemas de localización con inventario, siendo que existen pocos estudios sobre ACO para este tipo de problemas.

Al ocupar un modelo complejo para solucionar los problemas de localización con inventario, se puede concluir que para instancias de pruebas pequeñas y medianas, generan buenos resultados, teniendo en cuenta que para instancias pequeñas se puede lograr encontrar soluciones óptimas, y que para instancias de tamaño mediana se logra encontrar soluciones con Duality Gap muy pequeños.

Palabras claves: Ant Colony Optimization, Función Lagrangiana, Optimización, Problema de Localización, Diseño de Distribución de Redes con efecto Risk Pooling.

## Abstract

The decision-making model for locating hospitals, distribution centers, schools, public buildings, and others, are among the most important strategic issues in the supply chain management, which have been widely studied along the time. But today, new authors have proposed to change this development focus involving strategic decisions, adding tactical decisions, such as inventory management and transportation, to improve the scope of the problem. Taking into account this new focus, this thesis, deals with the study on the impact of adding inventory decisions, within the strategy of location decisions using the Risk Pooling model.

This thesis shows a hybrid model between a Lagrangian Relaxed heuristic and Metaheuristics Ant Colony Optimization (ACO) to address the problem of location of distribution centers with limited inventory capacity and product demand stochastic. Furthermore, there are several studies that address this type of problem, using just Lagrangian Relaxed heuristics, but the thesis stands out from others addressing an hybrid heuristic, which also applies the ACO metaheuristic for solving Inventory-Location problems, and that there are few studies on ACO for this issue.

Using a complex model, to solve Inventory-Location problems, we can conclude that for small and medium instances there are good results, considering that for small instances could be found optimal solutions, and for medium instances could be found solutions with very small Duality Gap.

Keywords: Ant Colony Optimization, Lagrangian Relaxed Heuristic, Optimization, Inventory-Location Problems, Distribution Network, Risk Pooling.

## Glosario de Términos

**Algoritmo Voraz:** utilizado para resolver un problema determinado. El algoritmo elige la opción óptima en cada paso local con la esperanza de llegar a una solución general óptima.

**Cadena de Abastecimiento:** Abarca todos los recursos y actividades necesarios para crear y entregar productos y servicios a los clientes.

**Centro de Distribución:** Representa un conjunto de objetos que serán localizados, para proporcionar un servicio o producto.

**Cliente:** Usuario que demandan cierto servicios o producto a un centro de distribución.

**Demanda:** Representa la cantidad de producto o servicio requerido por un cliente.

**Duality Gap:** Brecha de dualidad que existe entre el problema primal y el problema dual.

**Estocástico:** Se denomina estocástico a aquel sistema que funciona, sobre todo, por el azar.

**Feromonas:** son sustancias químicas secretadas por un individuo (ejemplo, una Hormiga) con el fin de provocar un comportamiento determinado en otro individuo de la misma u otra especie.

**Lead Time:** Es el periodo de tiempo entre el inicio de algún proceso de producción, y la realización de dicho proceso (Tiempo de espera).

**Problema de Localización:** Busca encontrar cual es la mejor ubicación para un determinado producto o servicio, que nos pueda brindar el mayor beneficio y/o el menor costo.

**Risk Pooling:** es un importante concepto de la cadena de abastecimiento, que trae como consecuencia, que a mayor centralización (menor cantidad de centros de distribución abiertos) es menor el costo de inventario de seguridad.

**Tiempo de Ejecución:** intervalo de tiempo que demora un programa, en ejecutarse en un sistema operativo.

## Lista de Abreviaturas y Siglas

**ACO** : Ant Colony Optimization.

**ACS** : Ant Colony System.

**AS** : Ant System.

**CD** : Centro de Distribución.

**CFLP** : Capacitated Facility Location Problem.

**DRD** : Diseño Red de Distribución.

**DRDRP** : Diseño Red de Distribución con efecto Risk Pooling.

**FC** : Fixed Cost.

**GA** : Genetic Algorithm.

**HC** : Holding Cost.

**LH** : Lagrangian Heuristic.

**LT** : Lead Time.

**MACS** : Multiple Ant Colony System.

**OC** : Ordering Costs.

**RP** : Risk Pooling.

**SA** : Simulated Annealing.

**SSCFLP** : Single Source Capacitated Facility Location Problem.

**TC** : Transportation Cost.

**TS** : Tabu Search.

**TSP** : Traveling Salesman Problem.

**UFLP** : Uncapacitated Facility Location Problem.

**UOC** : Unit Order Cost.

**VLSN** : Very Large-Scale Neighborhood.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

Un problema de localización, busca encontrar cual es la mejor ubicación para un determinado producto o servicio, que nos pueda brindar el mayor beneficio, o el menor costo. Este tipo de problema de localización, aparece entonces por ejemplo, cuando se quiere saber ¿dónde es mejor construir un poblado?, o ¿dónde ubicar mejor una empresa?, que obtenga el menor costo y/o me brinde el mayor beneficio.

El nivel de esfuerzo para encontrar una solución óptima a un problema de localización, dependerá directamente, si la cantidad de opciones de soluciones, son posibles de manejar en un tiempo de desarrollo razonable. Por ejemplo, si se desea encontrar la solución óptima a un problema de localización, lo lógico es calcular el costo de cada alternativa y escoger la mejor solución de entre ellas, a este tipo de resolución se le llama desarrollo exhaustivo. Los beneficios de este tipo de desarrollo es que son de fácil implementación, pero el problema que hay con ellos, es que su tiempo de desarrollo depende directamente de la cantidad de soluciones que tenga el problema, por consiguiente, si la cantidad de posibles localizaciones son altísimas, no se podrá encontrar una solución óptima en un tiempo de desarrollo razonable. Por consiguiente para este tipo de dificultades, la mejor alternativa, es desarrollar el problema de localización con algún tipo de algoritmo de optimización.

Es por ello, que este informe está orientado a estudiar un problema de localización, que se encuentre desarrollado con algún tipo de algoritmo de optimización, el cual pueda abordar problemas que tengan una gran cantidad de posibles localizaciones, y que puedan encontrar una solución en un tiempo de desarrollo razonable.

La descripción del marco teórico de los problemas de localización se define en el capítulo 2, el sistema propuesto para encontrar soluciones a problemas de localización se detalla en

el capítulo 3, el análisis de los resultados encontrados se especifica en el capítulo 4, las principales conclusiones son presentadas en el capítulo 5, posteriormente se detalla la bibliografía que se ocupó para realizar este documento, y los anexos que se adjuntaron al informe.

## **1.2 Objetivo General**

Resolver el problema de Diseño de Red de Distribución con efecto Risk Pooling (DRDRP), a través de la heurística híbrida Lagrangiano y ACO.

## **1.3 Objetivos Específicos**

Describir el marco teórico de los problemas de localización.

Diseñar y construir un sistema que pueda seleccionar los sitios en los cuales se pueda instalar los centros de distribución, utilizando el algoritmo del Lagrangiano, definiendo un conjunto de multiplicadores a partir del análisis dual de la relajación lagrangiana.

Diseñar y construir un sistema que pueda minimizar los costos de transporte desde un centro de distribución hacia los distintos clientes, utilizando el algoritmo de Optimización Colonias de Hormigas (ACO).

Determinar cómo se comporta el algoritmo con distintos tipos de datos de prueba, y comprobar si arroja una de las mejores soluciones posibles para el tipo de problema DRDRP ocupando heurística híbrida.



## Capítulo 2

### Marco Teórico del Problema

#### **2.1 Descripción del problema de Localización**

El problema de Localización según [Hernández, 04], se describe como un conjunto de clientes distribuidos espacialmente en un área geográfica, que demandan un cierto producto o servicio. La demanda de los clientes debe ser cubierta por uno o varios centros de distribución. Los centros de distribución, pueden operar en un marco de cooperación o competencia, dependiendo del bien o servicio que sea requerido por el cliente. El proceso de decisión establece dónde se deben ubicar los centros de distribución en el territorio deseado, tomando en cuenta los requerimientos de los clientes y las restricciones geográficas.

Dentro de los problemas de localización se pueden identificar tres elementos esenciales. Los centros de distribución, denotan un conjunto de objetos que serán localizados, para proporcionar un servicio o producto. Las localizaciones, se refieren al conjunto de posibles puntos para situar centros de distribuciones. Finalmente, los clientes, que son los usuarios de las instalaciones que demandan ciertos servicios o productos, son los que serán asignados a los centros de distribución.

El término centro de distribución, contextualizada en la teoría localización, se refiere a un objeto que tiene la particularidad de estar en un cierto espacio y posición, que lo hace distinto a otro objeto. Algunos ejemplos de objetos son: almacenes, plantas productivas, escuelas, hospitales, centros comerciales, edificios públicos, etc. Las propiedades principales que caracterizan a los centros de distribución son su número y tipo.

En varios modelos de localización, el número de centros de distribución esta determinada de antemano. Con respecto al tipo de centro de distribución, se refiere a cual es su capacidad, servicio y consideración sobre su estructura. En casos simples, los problemas de

localización requieren que los centros de distribuciones sean idénticos para poder proporcionar el mismo servicio o producto. Con respecto a su capacidad, éstas pueden ser limitadas o ilimitadas, clasificándose por ende como centros de distribución capacitados o no capacitados.

El lugar físico en donde se va a ubicar el centro de distribución, normalmente es llamado espacio solución, y se puede representar de manera continua, discreta o de red.

Espacio continuo: son problemas que se consideran en el espacio euclideo. El caso más típico, considera un espacio euclideo de dos dimensiones.

Espacio discreto: cuando se especifica una lista de posibles lugares para ubicar centros de distribución. En este caso proporciona flexibilidad ya que es posible incorporar características de tipo geográfica y económica al modelo.

Representación de redes: para varias aplicaciones en las que se consideran servicios públicos y privados se consideran problemas de localización en los que se tiene que operar utilizando una cierta infraestructura de red (red carretera, red vial, red ferroviaria, red aeroportuaria, oleoductos, etc.), que comúnmente se representan mediante un grafo. Los problemas de redes pueden ser continuos o discretos, dependiendo de sí las estaciones de servicio pueden ser ubicadas en las aristas o en los vértices del grafo que representa la infraestructura de red considerada.

Los problemas de localización surgen de la necesidad de localizar centros para la satisfacción óptima de la demanda de un conjunto de clientes. El concepto clientes se usa para denotar objetos que requiere accesibilidad a un servicio o demandan un producto. Al tratar de analizar los problemas de localización, se debe de interactuar con clientes, por lo tanto es necesario conocer su distribución, demanda y comportamiento.

Por distribución se asume que el cliente se distribuye uniformemente o que se localiza en un punto específico o en los vértices de una red. En el caso de la demanda, a cada cliente se le asigna un valor que expresa la cantidad de servicio que requiere. La demanda puede representar la cantidad de producto o servicio requerido por un usuario o por un área o región geográfica. En ambos casos puede que no se conozca con certeza.

Los clientes se pueden comportar de manera individual o grupal, y cada uno es libre de escoger desde cuál centro de distribución desea ser servido, por ejemplo, el cliente puede decidir ser abastecido por el centro de distribución más cercano.

## 2.2 Importancia de los problemas de Localización

La representación del problema de diseño de red de distribución según [Miranda, 04], se representa generalmente como un problema de múltiples niveles secuenciales, como se aprecia en la ilustración 2.1. A nivel estratégico se toman las decisiones de localizar los centros de distribución, luego a nivel táctico, se ve la estrategia de llevar un control de inventario, y cuando se tengan resuelto los dos problemas anteriores, a nivel operacional se toman las decisiones diarias de ordenamiento. Como consecuencia de este esquema, se dice que la toma de decisión sobre localización, es una de las medidas más relevantes dentro de la gestión de la cadena de abastecimientos, por tener la mayor importancia a la hora de tomar una decisión.

Los modelos de localización de centros de distribución pueden tener una gran variedad de posibles aplicaciones en muchas áreas, tales como telecomunicaciones (intercambio de datos entre terminales), el transporte (tráfico aéreo de pasajeros) y el correo postal (envío de cartas y paquetes), es por ello que es importante su estudio.

Ilustración 2.1: Representación Diseño de la Red de Distribución con múltiples niveles.



Para los administradores que tienen que tomar decisiones sobre localización, necesitan disponer de un modelo matemático que refleje fielmente, el problema con todas las restricciones que éste pueda tener. La implementación del modelo matemático dependerá del tamaño del total de soluciones posibles que tenga cada problema. En caso que el total de soluciones posibles sea pequeño, puede bastar con realizar una búsqueda exhaustiva para encontrar la mejor solución, pero en el caso que el tamaño total de soluciones sea demasiado grande, una búsqueda exhaustiva puede tardar demasiado tiempo en arrojar una solución, o incluso tardar años en encontrar la más óptima, es por ello que por lo general se resuelven estos problemas usando algún tipo de algoritmo de optimización.

## **2.3 Tipos de problemas de Localización**

De los distintos tipos de problemas de localización, éste informe abordo el estudio de 4 categorías, para obtener una visión más clara sobre las diferencias que existen entre cada uno de ellos, y cómo varían en sus modelos matemáticos.

### **2.3.1 UFLP**

Es un problema de localización de CD con capacidad ilimitada, en donde la restricción principal es que cada CD tenga una capacidad ilimitada de almacenamiento.

La función objetivo de un UFLP es minimizar tanto los costos de instalación de CD, como los costos de transporte entre un cliente  $i$ , hacia un CD  $j$  en particular. Para instalar un CD, estos cuentan con costos de instalación fijos ( $f_j$ ), y capacidades de almacenaje ilimitada. Los costos de transporte entre un cliente  $i$ , desde un CD  $j$  ( $c_{ij}$ ) es conocido, y como la capacidad de almacenaje es ilimitado, la demanda de los clientes siempre se cumple, y no se necesita agregar el vector de demanda ( $d_i$ ) al problema.

Información para el modelo UFLP

$n$  : Cantidad de clientes a evaluar.

$m$  : Cantidad de centros de distribución a evaluar.

$i$  : Cliente  $i$ -ésimo.

$j$  : Centro de distribución  $j$ -ésimo.

$c_j$  : Costos de transporte de asignar un cliente  $i$  al centro de distribución  $j$ .

$f_j$  : Costos fijos de abrir un centro de distribución  $j$ .

Variables de decisión

$\chi_j$  : 1, si se instala el centro de distribución  $j$  (0 si no).

$\gamma_{ij}$  : 1, si se asigna el cliente  $i$  a un centro de distribución  $j$  (0 si no).

La formulación de este programa en términos de programación lineal según Francisco de Assis Correa, Luiz Antonio Nogueira Lorena, y Edson Luiz Franca Senne [Correa et al., 06] es el siguiente:

$$(1) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j x_j$$

$$(2) \sum_{j=1}^m y_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) y_{ij} \leq x_j \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$(4) x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$(5) y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

### 2.3.2 CFLP

Es un problema de localización de CD con capacidad limitada, que tiene como restricción principal, que cada centro de distribución tenga una capacidad limitada de almacenamiento.

La función objetivo de un CFLP es minimizar tanto los costos de instalación de CD, como los costos de transporte entre un cliente  $i$ , hacia un CD  $j$  en particular. Para instalar un CD, estos cuentan con costos de instalación fijos ( $f_j$ ), y capacidades de almacenaje conocidas ( $b_j$ ). Los costos de transporte entre un cliente  $i$ , desde un CD  $j$  ( $c_{ij}$ ) es conocido, los clientes

tienen una demanda determinista ( $d_i$ ), y los clientes  $i$  pueden ser abastecidos por uno o más CD  $j$ .

### **Información para el modelo CFLP**

$n$  : Cantidad de clientes a evaluar.

$m$  : Cantidad de centros de distribución a evaluar.

$i$  : Cliente  $i$ -ésimo.

$j$  : Centro de distribución  $j$ -ésima.

$c_{ij}$  : Costos de transporte de asignar un cliente  $i$  al centro de distribución  $j$ .

$f_j$  : Costos fijos de abrir un centro de de distribución  $j$ .

$b_j$  : Capacidad de cada centro de distribución  $j$ .

$d_i$  : Demanda de cada cliente  $i$ .

### **VARIABLES DE DECISIÓN**

$\chi_j$  : 1, si se instala el centro de distribución  $j$  (0 si no).

$\gamma_{ij}$  : 1, si se asigna el cliente  $i$  a un centro de distribución  $j$  (0 si no)

La formulación de este programa en términos de programación lineal según Miguel Ángel Ortega Mier, y Joaquín Delgado Hipólito [Ortega et al., 02] es el siguiente:

$$(1) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j x_j$$

$$(6) \sum_{j=1}^m y_{ij} = d_i \quad i=1,2,\dots,n$$

$$(7) y_{ij} \leq x_j b_j \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,m$$

$$(8) \sum_{i=1}^n y_{ij} \leq b_j \quad j=1,2,\dots,m$$

$$(9) y_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,m$$

$$(4) x_j \in \{0,1\} \quad j=1,2,\dots,m$$

### 2.3.3 SSCFLP

Es un problema de localización de CD con capacidad limitada, con único origen. SSCFLP es un sub-problema de CFLP, pero que además tiene la restricción que cada cliente debe ser suministrado sólo por un centro de distribución.

La función objetivo de un SSCFLP es minimizar tanto los costos de instalación de CD, como los costos de transporte entre un cliente  $i$ , hacia un CD  $j$  en particular. Para instalar un CD, estos cuentan con costos de instalación fijos ( $f_j$ ), y capacidades de almacenaje conocidas ( $b_j$ ). Los costos de transporte entre un cliente  $i$ , desde un CD  $j$  ( $c_{ij}$ ) es conocido, los clientes tienen una demanda determinista ( $d_i$ ), y los clientes  $i$  pueden ser abastecidos solo por un CD  $j$  en particular.

#### Información para el modelo SSCFLP

$n$  : Cantidad de clientes a evaluar.

$m$  : Cantidad de centros de distribución a evaluar.

$i$  : Cliente  $i$ -ésimo.

$j$  : Centro de distribución  $j$ -ésimo.

$c_{ij}$  : Costos de transporte de asignar un cliente  $i$  al centro de distribución  $j$ .

$f_j$  : Costos fijos de abrir un centro de de distribución  $j$ .

$b_j$  : Capacidad de cada centro de distribución j.

$d_i$  : Demanda de cada cliente i.

### **Variables de decisión**

$\chi_j$  : 1, si se instala el centro de distribución j (0 si no).

$\gamma_{ij}$  : 1, si se asigna el cliente i a un centro de distribución j (0 si no).

La formulación de este programa en términos de programación lineal según Chia-Ho Chen y Ching-Jung Ting [Chen et al., 07] es el siguiente:

$$(1) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} y_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j x_j$$

$$(2) \sum_{j=1}^m y_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(10) \sum_{i=1}^n d_i y_{ij} \leq b_j x_j \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$(4) x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$(5) y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m$$

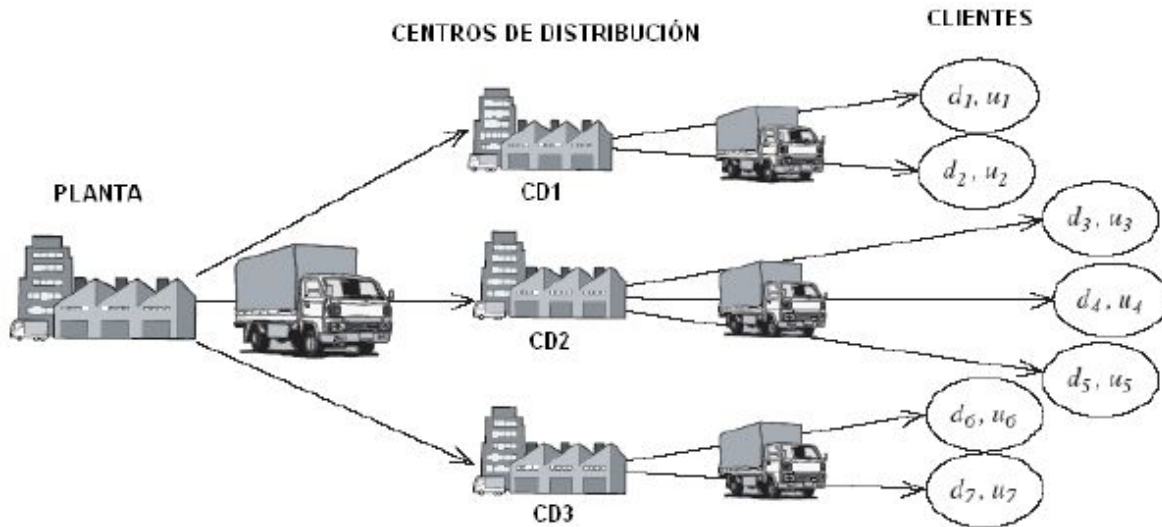
### **2.3.4 DRDRP**

Es un problema de gestión de cadena de abastecimiento, que a diferencia de los anteriores problemas de localización (UFLP, CFLP y SSCFLP), también se preocupa de la estrategia de control de inventario. El problema esencial del DRDRP es satisfacer la demanda (determinista o estocástica) de algún producto o servicio que requiere cada cliente. Para cumplir con esta exigencia, una planta, hace llegar sus productos a los centros de distribución que se encuentren abiertos, para luego distribuir los productos demandados hacia los clientes. Las restricciones de este problema son que todos los clientes tienen que ser abastecidos en su totalidad por al menos un centro de distribución, y que los centros de distribución tienen una capacidad limitada de almacenamiento. El objetivo del problema en sí, es minimizar todos los costos asociados en esta red de distribución que permitan que los



clientes sean abastecidos en su totalidad, teniendo en cuenta los costos de inventario y los costos asociados a un stock seguro, como se aprecia en la ilustración 2.2.

Ilustración 2.2: Diseño de la Red de Distribución.



## 2.4 Métodos que han sido utilizados para problemas de Localización

Inicialmente el primer modelo que se planteó sobre localización fue propuesto por Alfred Weber en 1909. En los siguientes años fueron apareciendo nuevas propuestas para resolver problemas de localización [Chen et al., 07]. En 1986, Klincewicz y Luss describen la heurística del Lagrangiano para los SSCFLP, donde la restricción de la capacidad es dualizada. En 1993, Beasley propone la heurística del Lagrangiano, relajando la restricción de capacidad y asignación de clientes. Para el SSCFLP, Beasley propone que los costos de asignación fueran usados para calcular el costo de un conjunto de centros de distribuciones abiertos. En 1999, Hindi y Pienkosz presentan una eficiente aproximación para el SSCFLP, desarrollado con un Lagrangiano relajado, ocupando para ello el método de optimización del subgradiente, para relajar la restricción de la asignación de los clientes. De acuerdo a esto, se podía calcular un límite inferior, el cual ocupaban para configurar que centros de distribución debían ser abiertos. En 1999, Holmberg et al. desarrollaron una solución para el SSCFLP, basados en la heurística del Lagrangiano, (usando la optimización del

subgradiente), la heurística Primal (usando repetidas coincidencias), y por último la heurística Branch and Bound.

Por otra parte, diversas variantes del CFLP empezaron a investigarse. En 1994, Laporte et al. formulan un modelo de programación lineal entera estocástica, par el CFLP con demanda estocástica, ocupando una aproximación de Branch and Cut, que fue aplicada para encontrar la solución óptima del problema. En 1997, Tragantalerngsak et al., formulan un modelo matemático de dos-escalones para SSCFLP y considera seis relajaciones lagrangianas basadas en aproximaciones, para encontrar la solución óptima. En 1998, Bornstein y Azlan, ocupan Simulated Annealing (SA) y relajación lagrangiana para resolver el CFLP. El 2000, Tragantalerngsak, desarrollan una Lagrangiano relajado, basado en aproximaciones Branch and Bound, para resolver los dos-escalones de un SSCFLP. El 2001, Nozick, presenta dos Lagrangianos relajados basados en aproximaciones para resolver el problema de los costos fijos de localización de los centros de distribución, con restricciones convergentes. El 2002, Ghiani, proponen una novedosa relajación lagrangiana y una heurística lagrangiana a la medida, que soluciona la inconveniencia de los procedimientos clásicos para resolver el CFLP con múltiples centros de distribución en un mismo sitio. El 2002, Jaramillo et al., desarrollaron un algoritmos genéticos (GA) para resolver varios problemas de localización, obteniendo soluciones muy cercanas a lo óptimo, pero no informaron de los resultados obtenido para el CFLP, debido a que los tiempos de procesamiento computacional fueron muy altos. El 2003, Cortinal y Captivo, aplicaron estudios con relajación lagrangiana y Tabu Search (TS) por separado para SSCFLP. Obteniendo mejores tiempos de resultados para TS. El 2004, Ahuja, desarrollaron un algoritmo de búsqueda por vecindad a gran escala (VLSN), para resolver un SSCFLP. Obteniendo como conclusión que el VLSN es un muy buen algoritmo para resolver un SSCFLP. El 2006, Chen y Ting, desarrollaron un Sistema Multiple de Colonias de Hormigas (MACS) para el SSCFLP, obteniendo un rendimiento con respecto a la heurística del Lagrangiano.

Entre los algoritmos meta heurísticos, la Optimización de Colonias de Hormigas (ACO), es una nueva meta heurística introducida por primera vez por Dorigo [Dorigo et al., 91].

Numerosos estudios se han hecho de ACO para problemas de optimización combinatorial, pero pocas aplicaciones de ACO para el DRDRP han sido publicadas.

## Capítulo 3

### Sistema Propuesto

#### **3.1 Justificación del sistema propuesto**

De acuerdo a las cuatro categorías de los problemas de localización mencionadas anteriormente, los UFLP, CFLP, SSCFLP y al caso particular del problema de cadena de abastecimiento DRDRP, éste documento aborda el estudio del DRDRP, por ser uno de los problemas menos estudiados, y ser más realista con respecto a sus restricciones, siendo por ello un problema de gran complejidad, catalogado como problemas pseudo polinomial [Miranda et al., 06].

Con respecto al método que se va a ocupar para resolver el DRDRP, se ha definido que el algoritmo Lagrangiano es uno de los algoritmos más utilizados para resolver los DRDRP, y por haber pocos estudios sobre ACO para DRDRP, es que se ha decidido investigar una hibridación sobre este nuevo enfoque para problemas de Localización.

Existen distintas heurísticas que engloba la metaheurística ACO, como son el Sistema de Hormiga, el Sistema de Colonia de Hormiga, el Sistemas de Hormigas Max-Min, y el Sistema de Hormiga con Ordenación, los cuales serán detallados mas adelante en la sección 3.4.2. De las cuatro heurísticas de ACO mencionadas, se elige el Sistema de Colonia de Hormigas para trabajar el problema de DRDRP, por ser el sistema más completo en comparación a los demás, debido a que presenta la regla de transición de estado (tanto de explotación, como de exploración), y la regla de actualización de feromona tanto global, como local, estas reglas son detalladas más adelante.

## 3.2 Formulación del problema DRDRP

El problema esencial del DRDRP es satisfacer la demanda (determinista o estocástica) de algún producto o servicio que requiere cada cliente. Para cumplir con esta exigencia, una planta, hace llegar sus productos a los centros de distribución que se encuentren abiertos, para luego distribuir los productos demandados hacia los clientes. Las restricciones de este problema son que todos los clientes tienen que ser abastecidos en su totalidad por al menos un centro de distribución, y que los centros de distribución tienen una capacidad limitada de almacenamiento. El objetivo del problema en sí, es minimizar todos los costos asociados en esta red de distribución que permitan que los clientes sean abastecidos en su totalidad, teniendo en cuenta los costos de inventario y los costos asociados a un stock seguro.

Este problema puede formularse en términos de programación lineal como:

- $M$  : Cantidad de clientes
- $N$  : Cantidad de centros de distribución.
- $i$  : Índice de Centro de Distribución (CD).
- $j$  : Índice de clientes
- $D_i$  : Demanda diaria media, asignado a un CD  $i$ .
- $V_i$  : Varianza diaria de la demanda, asignado a un CD  $i$ .
- $d_j$  : Demanda diaria media de cada cliente  $j$ .
- $v_j$  : Varianza diaria de la demanda, por cada cliente  $j$ .
- $Q_i$  : Tamaño de orden de un CD  $i$ .
- $Q_{\max_i}$  : Capacidad tamaño de orden de un CD  $i$ .
- $ICap_i$  : Capacidad de inventario del CD  $i$ .
- $FC_i$  : Costo fijo diario de instalación del CD  $i$ .
- $TC_{ij}$  : Costo de transporte diario total del cliente  $j$ , al CD  $i$ .
- $UOC_i$  : Costo de transporte unitario de la planta, al CD  $i$ .
- $OC_i$  : Costo de ordenamiento fijo del CD  $i$ .
- $HC_i$  : Costo diario de mantener una unidad de producto en un CD  $i$ .
- $1-\alpha$  : Nivel de servicio, relacionado con el nivel de stock seguro.
- $1-\beta$  : Nivel de servicio, relacionado con la restricción de capacidad de inventario.
- $Z_0$  : Valor de la distribución normal estándar.
- $LT_i$  : Tiempo de espera del CD  $i$ .
- $X_i$  : 1 si se instala el centro de distribución  $i$  (0 si no).
- $Y_{ij}$  : 1 si se asignó el cliente  $j$  a un centro de distribución  $i$  (0 si no).

La formulación de este programa en términos de programación lineal según Pablo Miranda y Rodrigo garrido [Miranda et al., 06] es el siguiente:

$$(11) \text{Min} \left( \sum_{i=1}^N FC_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (UOC_i \cdot d_j + TC_{ij}) \cdot Y_{ij} + \sum_{i=1}^N \left( OC_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} + HC_i \cdot \frac{Q_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^N (HC_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{LT_i} \cdot \sqrt{V_i}) \right)$$

Sujeto a:

$$(12) \sum_{j=1}^M Y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

$$(13) Y_{ij} \leq X_i \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

$$(14) D_i = \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cdot d_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(15) V_i = \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cdot v_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(16) 0 < Q_i \leq Q_{\max_i} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(17) Q_i + (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \cdot \sqrt{LT_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap_i \cdot X_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(18) X_i, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

La función objetivo (11), es minimizar los costos totales diarios del sistema, tanto de apertura de centros de distribución, como los de transporte, los costos de inventario y los costos de almacenamiento para mantener un stock seguro.

La restricción (12) garantiza que cada cliente será abastecido en su totalidad, y debido a la restricción (18), se asegura que cada cliente será abastecido por un único centro de distribución.

La restricción (13) impide que los clientes puedan ser asignados a centros de distribución cerrados.

La restricción (14) y (15) vinculan la demanda y varianza diaria de cada cliente que se le ha asignado un centro de distribución.

La restricción (16) establece el rango aceptado del tamaño de ordenamiento o lote (no negativo y con capacidad).

La restricción (17) es la restricción estocástica de la capacidad de inventario.

Y por último la restricción (18), nos especifica que la solución encontrada va ser del tipo binaria.

### **3.3 Descripción de la Heurística del Lagrangiano**

La relajación lagrangiana consiste en relajar una o varias restricciones del problema, eliminándolas del conjunto general de restricciones, y luego las integra en la función objetivo, penalizando cada restricción relajada con un conjunto de valores llamados multiplicadores lagrangianos (el estudio de estos multiplicadores se encuentra detallado en un informe publicado por Barceló y Casanovas [Barceló et al., 82]). En caso que una restricción esté siendo violada, la variable dual o penalización, debe aumentar, y en caso que una restricción esté siendo respetada (que la demanda total para un centro de distribución sea menor que su capacidad), entonces la variable dual o penalización debe disminuir (para los casos de minimización).

Como el problema resultante tiene menos restricciones en comparación al problema original, el problema resultante se puede descomponer en problemas más sencillos.

Por ejemplo sea el problema primal:

$$(19) z^* = \text{Min}\{cx\}$$

Sujeto a:

$$(20) Ax \leq b$$

$$(21) x_j = 0 \text{ or } 1$$

La variable  $c_j$  denota un componente de  $c$ ,  $a_j$  es una columna de  $A$  con componentes  $a_{ij}$ , y  $b_i$  un componente de  $b$ .  $\bar{u}$  representa a un vector no negativo llamado multiplicador Lagrangiano. El resultado del método Lagrangiano al relajar la restricción  $Ax \leq b$  es el siguiente:

$$(22) L(x, \bar{u}) = \text{Min}\{cx\} + \bar{u}(Ax - b)$$

Factorizando el vector  $x$ , queda de la siguiente forma:

$$(23) L(x, \bar{u}) = \text{Min}\{c + \bar{u}A\}x - \bar{u}b$$

La función  $L(x, \bar{u})$  está claramente optimizada por cualquier solución de  $\bar{x}$  0-1 si cumplen con las siguientes restricciones:

$$(24) \bar{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } c_j + \bar{u}a_j > 0, \\ 0 \text{ ó } 1 & \text{si } c_j + \bar{u}a_j = 0, \\ 1 & \text{si } c_j + \bar{u}a_j < 0. \end{cases}$$

Siempre y cuando cumpla con las condiciones de optimalidad.



**Condición de Optimalidad**, se refiere a que si el par  $(\bar{x}, \bar{u})$ , donde  $\bar{x}$  es 0-1 y  $\bar{u} \geq 0$ , se dice que cumple con la condición de optimalidad para el problema de programación entera 0-1, si:

$$(i) \quad L(\bar{x}, \bar{u}) = (c + \bar{u}A)\bar{x} - \bar{u}b,$$

$$(ii) \quad \bar{u}(A\bar{x} - b) = 0,$$

$$(iii) \quad A\bar{x} \leq b.$$

Se puede demostrar entonces que si la solución  $\bar{x}$  0-1 cumple las condiciones de optimalidad para algunos  $\bar{u}$ , entonces  $\bar{x}$  es una solución óptima al problema (11).

Puede ser fácilmente demostrado que  $L(\bar{x}, \bar{u})$  es un límite inferior del problema (11), siempre que  $u \geq 0$ . El objetivo principal de un problema de programación entera es minimizar los costos, y los mejores resultados del vector  $u$ , se obtienen cuando existe un mayor rendimiento en el límite inferior, obteniendo un óptimo para el problema dual.

Definiendo como problema dual:

$$(25) \quad w^* = \underset{u \geq 0}{\text{Max}} \{L(x, u)\}$$

La razón de esta elección es que si  $\bar{u}$  puede producir por (24) un óptimo  $\bar{x}$  para el problema primal (19), entonces  $\bar{u}$  es óptimo para el problema dual (25). La validez de esta declaración puede ser verificada por las condiciones de optimalidad, utilizando la condición de dualidad débil  $L(x, u) \leq z^*$  para cualquier  $u \geq 0$ . Por lo tanto una estrategia para tratar de resolver el problema primal (19), es calcular una solución óptima  $\bar{u}$  para el problema dual, y luego tratar de encontrar una solución complementaria  $\bar{x}$  0-1 que cumpla con las condiciones de optimalidad.

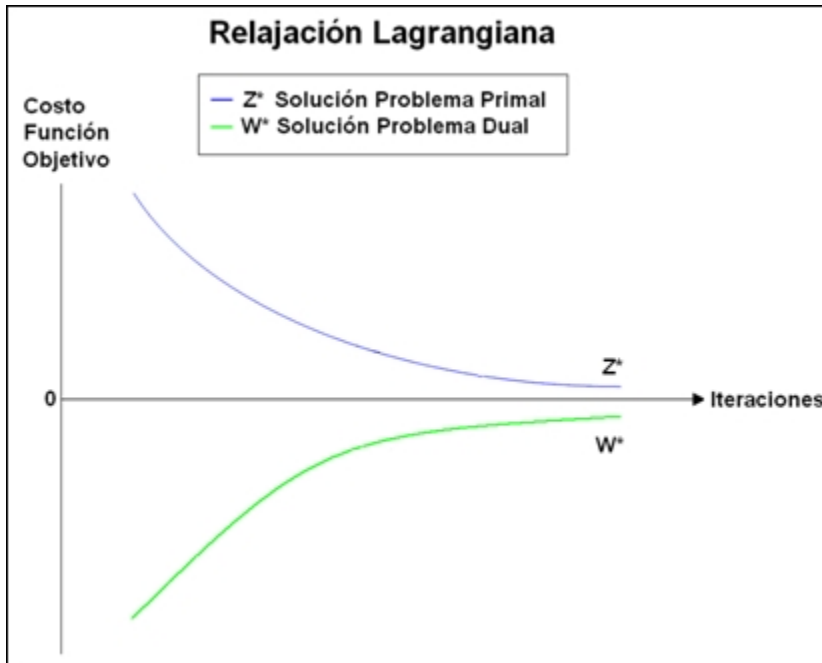
La técnica Lagrangiana por el contrario, no puede asegurar una solución óptima para el problema primal, ya que va ha producir una solución óptima para el problema dual.

Según el teorema de dualidad, si las funciones del problema primal y dual son convexas, y ambos problemas son factibles, entonces  $Z = W$ . Y el problema dual puede encontrar una solución para el problema primal. Pero si las funciones del problema primal y dual no son convexas, puede ocurrir que  $W < Z$ , produciendo que el problema dual no genere una solución para el problema primal, a este tipo de problema se le denomina brecha de dualidad (Duality Gap).

Para el caso del estudio de este proyecto, los problemas de programación entera 0-1 no son convexas, por lo que existe siempre Duality Gap.

Según el Dr. Pablo Miranda<sup>1</sup>, en la gráfica de la relajación lagrangiana (ver ilustración 3.1), se puede observar la brecha (Duality Gap) que existe entre el problema primal  $z^*$  y el problema dual  $w^*$ , a medida que aumentan las iteraciones.

Ilustración 3.1: Relajación Lagrangiana.



Se debe tener en cuenta que la efectividad del algoritmo lagrangiano relajado se va a medir de acuerdo a la diferencia entre el valor óptimo de la función objetivo del problema primal y el valor óptimo de la función objetivo del problema dual.

El problema dual es un problema de optimización no diferenciable y se resuelve a través de un proceso iterativo. La clave de la eficiencia de la resolución del problema dual está en el método de actualización de multiplicadores empleado, por lo que si la solución del problema dual no es factible para el problema primal, se deberá modificar ligeramente los multiplicadores de Lagrange hasta conseguir factibilidad.

---

<sup>1</sup> Dr. Pablo Miranda, profesor de la Escuela de Ingeniería Industrial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, apuntes del curso Investigación Operativa II, 2º semestre 2007

### **3.4 Descripción de la Metaheurística ACO**

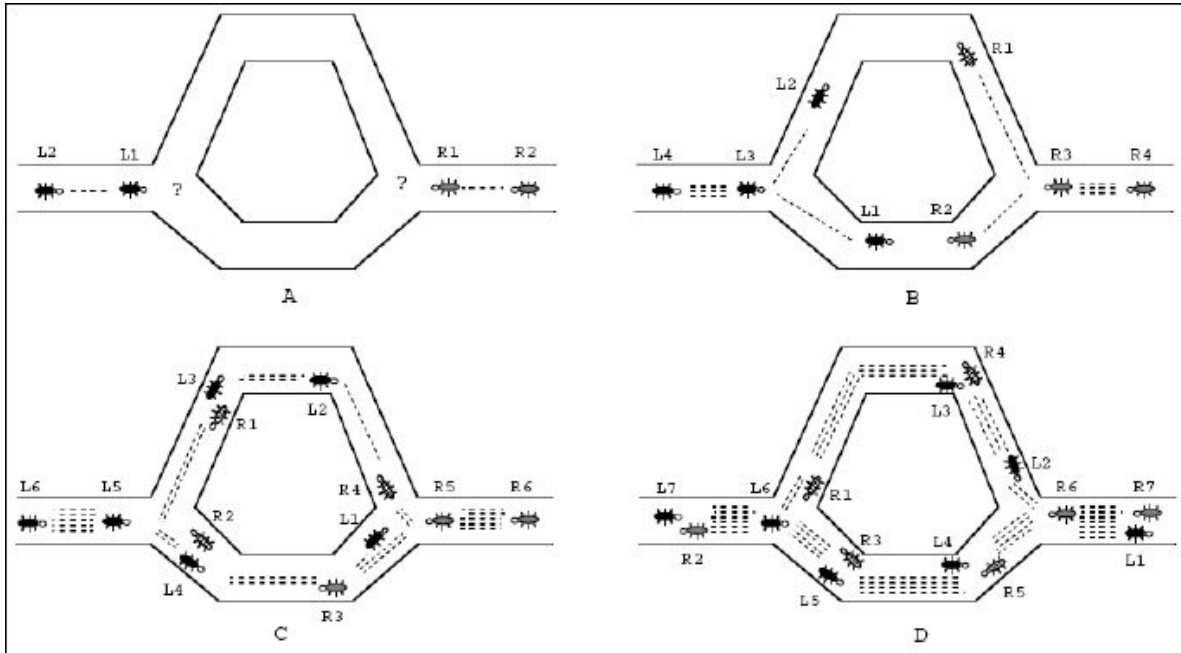
Para comprender que es la Metaheurística ACO, inicialmente partiremos describiendo que es una metaheurística y a continuación detallaremos que es lo que engloba el concepto de Optimización basado en colonias de hormigas.

El término metaheurística, proviene de anteponer al término heurística el sufijo meta, que significa “más allá” o “a un nivel superior”, y el término heurística, en el contexto de Inteligencia Artificial, se interpreta como los procedimientos necesarios, que emplean conocimiento y abordan técnicas para tratar de encontrar (o acercarse) a una solución de un problema en particular, ocupando para ello una cantidad de recursos (generalmente tiempo) razonable.

Por consiguiente, se puede definir el concepto de metaheurística, como una estrategia inteligente para diseñar o mejorar procedimientos heurísticos muy generales con un alto rendimiento [Dorigo et al., 97], [Melian et al., 03].

Una forma de comprender mejor cómo funciona la Optimización basada en Colonias de Hormigas, es sabiendo como una hormiga de forma real, encuentra el camino más corto entre su fuente de comida y su nido, sin tener que usar mecanismos visuales. Este comportamiento se puede observar en la ilustración 3.2, y su explicación se detalla a continuación.

Ilustración 3.2: Comportamiento de las hormigas reales.



Una hormiga aislada cuando va en busca de su comida, se mueve de forma ciega, esto quiere decir que la hormiga no ocupa mecanismos visuales para guiarse, pero cada vez que se mueve, deposita una sustancia química denominada feromona, la cual ocupa como una señal odorífera para que las demás hormigas puedan seguirla. Si observamos la ilustración 3.2 sección A, vemos que una hormiga llega a un punto de bifurcación, en el cual tiene que decidir cual de los dos caminos escogerá para ir en busca de su alimento. La forma de seleccionar cuál camino tomar, la resuelve de manera aleatoria. En consecuencia, como se aprecia en la misma ilustración sección B, la mitad de las hormigas toman el camino superior y la otra mitad toma el camino inferior. Si se supone que las hormigas se mueven a una velocidad constante, las que eligieron el camino más corto alcanzarán el otro extremo más rápido que las que tomaron el camino más largo, obteniendo una mayor cantidad de feromona por unidad de longitud, como se aprecia en la sección C de la ilustración. Esta mayor densidad de feromonas que se encuentra en el camino más corto, la convierte en el trayecto más deseable de visitar por las hormigas, aumentando aun más la densidad de feromona en este trayecto. Si la feromona se evapora con el tiempo, esto produce que los caminos menos transitados, tengan menos nivel de feromona, como se aprecia en la ilustración 3.2 en la sección D, haciendo que sean aún menos deseables transitar por ellos. Finalmente al cabo de un tiempo, la mayoría de las hormigas transitarán solo por el camino más corto [Baran et al., 02].

Por consiguiente, la metaheurística ACO, se basa en modelar de forma probabilística, el nivel de la feromona, para encontrar caminos más cortos. Es por ello que se crean hormigas artificiales, para que realicen paseos de forma aleatoria en un grafo completamente conectado.

### **3.4.1 Comparación entre hormigas naturales y artificiales**

El estudio del comportamiento de las hormigas naturales y su forma particular de encontrar el trayecto más corto entre su nido y su alimento, ocupando sólo una sustancia química que liberan llamada feromona, origino que se creara un modelo matemático que simulara estas características, pero para efectos del cálculo, sólo se tomaron algunos aspectos de las hormigas naturales, y otras se tuvieron que inventar para poder dar soporte a este modelo matemático. Las similitudes y diferencias entre las hormigas naturales y artificiales se detallan a continuación [Cordón et al., 04].

#### **Similitudes entre las hormigas naturales y artificiales**

- a. Ambas colonias de hormigas naturales y artificiales, interactúan y colaboran para dar solución a una tarea determinada.
- b. Cada hormiga natural y artificial, modifican su entorno a través de una comunicación basada en la feromona.
- c. Tanto las hormigas naturales, como las artificiales, comparten una tarea en común, encontrar el camino más corto desde un origen hasta un estado final.
- d. Las hormigas artificiales ocupan una estrategia de transición local estocástica para moverse entre estados adyacentes, al igual que lo hacen las hormigas naturales.

#### **Diferencias entre las hormigas naturales y artificiales**

- a. Sólo las hormigas artificiales pueden hacer uso de la información heurística para decidir que camino tomar.

- b. Las hormigas artificiales, tienen una memoria que pueden almacenar el camino recorrido.
- c. Las hormigas artificiales en la mayoría de los modelos, sólo depositan feromona después de haber generado una solución completa.
- d. La evaporación de la feromona en los algoritmos de ACO, difiere al comportamiento que se presenta en la naturaleza, ya que se puede manejar a qué velocidad el nivel de feromona se va a evaporar.
- e. Los algoritmos de ACO, pueden mejorar su eficiencia y eficacia, al agregar habilidades adicionales, por ejemplo, tener una memoria que guarde los vecinos más prometedores.

### **3.4.2 Modelos de Optimización basadas en Colonias de Hormigas (ACO)**

La Optimización por Colonia de Hormigas (ACO), es un enfoque que fue propuesto por Marco Dorigo en 1991, que partió inicialmente con el Sistema de Hormigas (AS). La heurística Sistema de Hormigas, era capaz de resolver originalmente el problema del vendedor viajero, y a continuación se empieza aplicar a problemas de optimización difíciles de resolver. Posterior a Dorigo, se han propuesto diversos algoritmos que siguen los principios de la metaheurística ACO, entre los cuales, se puede mencionar el Sistema de Hormigas (AS) propuesto por Dorigo, Maniezzo y Colomi en 1991, el Sistema de Hormigas Max-Min (MinMax-AS) propuesto por Stützle y Hoos en 1996, el Sistema de Colonia de Hormigas (ACS) propuesto por Dorigo, y Gambardella en 1997, y el Sistema de Hormigas con Ordenación (Rank-Based AS) propuesto por Bullnheimer, Hartl y Strauss en 1997.

El enfoque ACO en conclusión, es la metaheurística que engloba a todos los algoritmos cuyo diseño está basado en el comportamiento colectivo de las hormigas, para encontrar las trayectorias desde la colonia hasta el alimento.

A continuación se presentara una pequeña descripción de estos algoritmos:

### **3.4.2.1 Sistema de Hormigas (AS)**

El Sistema de Hormigas [Dorigo et al., 91], fue el primer algoritmo de ACO, el cual fue creado originalmente para resolver el problema del vendedor viajero, y posteriormente fue aplicado a problemas de optimización difíciles de resolver. Este sistema se basa originalmente en el comportamiento colectivo de las hormigas, las cuales buscan el camino más corto entre su nido y el alimento.

La forma de funcionar el Sistema de Hormigas se describe a continuación. El camino recorrido por cada hormiga representa una solución al problema general. La forma de construir este recorrido es posicionando una hormiga, en un nodo de inicio  $r$ , y a continuación se genera un vector  $S$  con todas las posibles nodos a los cuales puede llegar, y que aún no han sido visitados. Por cada nodo  $s$  del vector  $S$ , se calcula una probabilidad de movimiento en función a la feromona y a su distancia del arco  $(r,s)$ . La regla de transición de estado, ocupa sólo el modo de exploración, el cual hace que las hormigas ocupen la probabilidad de movimiento para ver cual va ser el camino a escoger. El nivel de feromona de cada arco se actualiza con el tiempo (Actualización Global de Feromona), una vez terminado el recorrido de cada hormiga.

La Actualización Global de Feromona, se refiere a evaporar el nivel de feromona en un factor constante, una vez que todas las hormigas han acabado de construir sus soluciones. Luego, se deposita una cantidad de feromona en cada arco por la que la hormiga ha viajado (la cantidad de feromona que se deposita depende de la calidad de la solución construida por la hormiga).

Se puede destacar que no existe una actualización de feromona paso a paso (Actualización Local de Feromona), y que las hormigas sólo se mueven de forma exploratoria.

### **3.4.2.2 Sistema de Hormigas Max-Min (MinMax-AS)**

El Sistema de Hormigas Max-Min [Stutzle et al., 96], es una extensión del Sistema de Hormigas.

Este sistema sólo permite actualizar los rastros de feromona a la mejor hormiga en cada ciclo, y los valores posibles para los niveles de feromona están limitados por el rango  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Por consiguiente, la probabilidad de que se produzca un estancamiento en el algoritmo disminuye notablemente, al darle a cada arco de conexión, una probabilidad. La variable  $\tau_{\max}$  se puede calcular con la mejor solución global, y  $\tau_{\min}$  puede tomar un valor calculado de acuerdo a un factor constante menor que  $\tau_{\max}$ .

El funcionamiento del Sistema de Hormigas Max-Min es muy parecido al ACS, con la diferencia que en vez de inicializar los niveles de feromona de cada arco posible  $(r,s)$ , con una cantidad pequeña de feromona, el Sistema de Hormigas Max-Min inicializa sus valores de feromona de acuerdo a una estimación del máximo permitido para cada arco  $(r,s)$ , y que los niveles de feromona tienen un máximo y mínimo permitido [Cordón et al., 04].

### **3.4.2.3 Sistema de Colonias de Hormigas (ACS)**

El Sistema de Colonia de Hormigas [Dorigo et al., 97], fue uno de los sucesores del Sistema de Hormigas, el cual introdujo tres modificaciones importantes en comparación al algoritmo anterior. El primer cambio que se aprecia, es en la regla de transición de estado, que establece dos formas de decisión sobre el siguiente nodo a visitar, el de explotación ó exploración. Si elige el camino de exploración, la hormiga tenderá a explorar nuevos caminos, en cambio, si se toma la decisión de explotación, la hormiga tomará la decisión de ir por el camino más corto, ocupando eso si, el conocimiento acumulado acerca del problema. El segundo cambio, tiene que ver con la regla de actualización global de feromona, la cual es aplicada sólo a los arcos que pertenecen al mejor camino encontrado hasta el momento por las hormigas. Y el tercer cambio que se aprecia, es la introducción de la regla de actualización local de feromona, la cual permite que todas las hormigas actualicen su nivel de feromona al término de cada recorrido.

La forma de funcionar el ACS se describe a continuación. El camino recorrido por cada hormiga representa una solución al problema general. La forma de construir éste recorrido es posicionando una hormiga, en un nodo de inicio  $r$ , y a continuación se genera un vector  $S$  con todos las posibles nodos a los cuales puede llegar, y que aún no han sido visitados. Por cada nodo  $s$  del vector  $S$ , se calcula una probabilidad de movimiento en función a la



feromona y a su distancia del arco  $(r,s)$ . La regla de transición de estado, puede ocupar tanto el modo de exploración, como el de explotación, explicados con anterioridad. Al finalizar el recorrido de cada hormiga, se realiza la actualización local de feromona, y una vez terminado el recorrido de todas las hormigas, se realiza la actualización global de feromona. La actualización global sólo se realiza al recorrido de la hormiga que ha generado la mejor solución global. En conclusión las hormigas se guían tanto por la información heurística (el camino más corto) y por la información del nivel de feromona (a mayor cantidad de feromona de un arco  $(r,s)$ , mayor es la probabilidad de tomar ese camino).

#### **3.4.2.4 Sistema de Hormigas con Ordenación (Rank-Based AS)**

El Sistema de Hormigas con Ordenación, desarrollado por Bullnheimer, Hartl y Strauss en 1997, es otra forma de variación del Sistema de Hormigas original de Dorigo. El nuevo enfoque que incorpora este sistema, es que la actualización de feromona se realiza sobre un listado de hormigas ordenadas.

La forma de funcionar este sistema es que cada hormiga al completar su recorrido, se ordenan de mejor a peor solución, luego se deposita feromona en los arcos  $(r,s)$  de las mejores hormigas. La cantidad de feromona que se deposita va a depender directamente del orden de las hormigas y de la calidad de su solución, y finalmente los arcos  $(r,s)$  por los que ha pasado la mejor hormiga global, recibe una cantidad adicional de feromona que depende directamente de la calidad de esta solución [Cordón et al., 04].

### **3.5 Modelo propuesto para solucionar el problema de selección de CD**

Un punto importante en el desarrollo de cualquier método heurístico, es la validación de los resultados que éste encuentre. Se puede considerar la efectividad del método heurístico, comparando los resultados obtenidos contra el óptimo global del DRDRP. Sin embargo, los óptimos globales del DRDRP sólo serán posibles de tener, si el tamaño del problema es muy pequeño. De ahí que se haya considerado como criterio de evaluación, para medir el

desempeño del método heurístico, la comparación contra cotas inferiores. Este procedimiento comparativo se sustenta en el hecho de que, en el peor de los casos, los resultados obtenidos por el método de la heurística diferirán en un determinado porcentaje respecto a una buena cota inferior obtenida mediante el procedimiento de relajación lagrangiana.

La duda que se plantea ahora es saber, ¿Qué restricción o restricciones del DRDRP serán las que se escogerán para relajar?. La idea es relajar las restricciones que más nos compliquen a la hora de solucionar el DRDRP, y según el artículo de Pablo Miranda [Miranda et al., 06], desde el punto de vista de la teoría general de las relajaciones lagrangianas, proponen la relajación de la restricción (12) (14) y (15). Al relajar la restricción (12) (14) y (15), la solución que se encuentre para este nuevo problema, no garantiza que cada cliente será abastecido en su totalidad, y es por ello que para cada solución encontrada se deberá verificar si cumple con todas las restricciones de un DRDRP.

Al relajar la restricción (12) (14) y (15), el problema Lagrangiano queda de la siguiente manera:

$$(26) \text{Min} \left( \sum_{i=1}^N FC_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (UOC_i \cdot d_j + TC_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j) \cdot Y_{ij} + \sum_{i=1}^N \left( OC_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} + HC_i \cdot \frac{Q_i}{2} \right) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \left( HC_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{LT_i} \cdot \sqrt{V_i} \right) - \sum_{i=1}^N (\lambda_i \cdot D_i + \omega_i \cdot V_i) + \sum_{j=1}^M \psi_j \right)$$

Sujeto a:

$$(13) Y_{ij} \leq X_i \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,M$$

$$(16) 0 < Q_i \leq Q_{\max_i} \quad i=1,2,\dots,N$$

$$(17) Q_i + (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \cdot \sqrt{LT_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap_i \cdot X_i \quad i=1,2,\dots,N$$

$$(18) X_i, Y_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,M$$

A partir de este nuevo problema, se buscará un subconjunto posible de centros de distribuciones que serán abiertos. En la segunda etapa del problema de localización, se asignara para cada cliente j, algún centro de distribución abierto i, finalmente se vera si la solución encontrada cumple con todas las restricciones del DRDRP.

## **3.6 Modelo propuesto para solucionar el problema de asignación de clientes**

El Sistema de Colonias de Hormigas, es la heurística de ACO que se eligió para solucionar el problema de asignación de clientes.

De forma modular, se tiene resuelto el problema de localización de centros de distribución con el algoritmo del Lagrangiano, detallado anteriormente. El objetivo final de este trabajo de título es hibridizar los algoritmos Lagrangiano y ACS para resolver un DRDRP. Es por ello que inicialmente se realizó un estudio preliminar para saber como se comportaba el algoritmo ACS al solucionar el problema de DRDRP, para posteriormente mezclar los dos algoritmos y ver si se obtienen mejores resultados.

### **3.6.1 Descripción del algoritmo ACS para DRDRP**

Debido a la escasa documentación de ACS para resolver un DRDRP, es que se investigó inicialmente distintos problemas resueltos con ACS. Uno de los problemas que están resueltos con ACS, es el problema del vendedor viajero (TSP) [Dorigo et al., 97], [Baran et al., 02], el cual se ocupó como base para obtener los valores de los parámetros que ocupa el algoritmo del Sistema de Colonias de Hormigas. Luego de obtener los valores de los parámetros de ACS, se modificó y creó el nuevo algoritmo para resolver un DRDRP con ACS. La forma de trabajar de un ACS se describe a continuación.

#### **Variables de entrada del DRDRP**

$M$  : Cantidad de clientes

$N$  : Cantidad de centros de distribución.

$i$  : Índice de Centro de Distribución (CD).

$J$  : Índice de clientes

$FC_i$  : Costo fijo diario de instalación del CD  $i$ .

$HC_i$  : Costo diario de mantener una unidad de producto en un CD  $i$ .

$OC_i$  : Costo de ordenamiento fijo del CD  $i$ .

$UOC_i$  : Costo de transporte unitario de la planta, al CD  $i$ .

$LT_i$  : Tiempo de espera del CD  $i$ .

$ICap_i$  : Capacidad de inventario del CD  $i$ .

$Q_{max_i}$ : Capacidad tamaño de orden de un CD  $i$ .

$D_j$  : Demanda diaria media de cada cliente  $j$ .

$V_j$  : Varianza diaria de la demanda, por cada cliente  $j$ .

$TC_{ij}$  : Costo de transporte diario total del cliente  $j$ , al CD  $i$ .

### **Variables de decisión del DRDRP**

$X_i$  : 1 si se instala el centro de distribución  $i$  (0 si no).

$Y_{ij}$  : 1 si se asignó el cliente  $j$  a un centro de distribución  $i$  (0 si no).

Dado un conjunto de  $M$  clientes, y  $N$  centros de distribución, se denomino  $\eta_{ij}$  a los costos de transporte de asignar un cliente  $j$  al centro de distribución  $i$ , a partir de esta variable se calcula la visibilidad

$$\eta_{ij} = \frac{1}{TC_{ij}}$$

Por otra parte, se denota como  $\tau(i,j)$  a la cantidad de feromona que se va almacenando entre cada par de arcos  $(i,j)$ . Esta matriz es inicializada con un valor  $\tau_0$  definida como:

$$(27) \tau_0 = \left( \frac{1}{n * sol\_voraz} \right)$$

Donde  $sol\_voraz$  es el costo de la solución encontrada con un algoritmo voraz.

La intensidad de las feromonas del arco  $(i,j)$ , denotada  $\tau(i,j)$ , es actualizada localmente, mientras las hormigas construyen su recorrido (solución), esto es, al moverse del cliente  $j$  al centro de distribución  $i$ , cada hormiga deposita una cantidad de feromonas en el arco correspondiente, calculada conforme:

$$(28) \tau(i, j) = (1 - \rho) * \tau(i, j) + \rho * \tau_0$$

Donde  $0 < \rho < 1$  es el parámetro de evaporación de las feromonas, (para este experimento se ocupó  $\rho = 0.1$ ). Además, se procede a una actualización de feromona global, la cual se realiza cuando todas las hormigas de una colonia terminaron su recorrido y se puede establecer la mejor solución de la iteración.

$$(29) \tau(i, j) = (1 - \alpha) * \tau(i, j) + \alpha * \Delta\tau(i, j)$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de evaporación de las feromonas (para este experimento se ocupó  $\alpha = 0.1$ ), la cual determina el grado de influencia de una buena solución en la actualización de la matriz de feromonas, mientras que la cantidad de feromona depositada en un arco , está dada por:

$$(30) \Delta\tau(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{L_{mg}} & \text{si } (i, j) \in \text{al mejor recorrido global} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde  $L_{mg}$  es el costo del mejor recorrido global.

Durante la ejecución del algoritmo Ant Colony System, una hormiga ubicada en el cliente  $j$ , debe elegir al próximo centro de distribución  $i$  a visitar, para lo cual elige de entre los centros de distribución que tengan capacidad  $b_i$  mayor o igual que la demanda  $d_j$  requerida por el cliente  $j$ , ( $b_i \geq d_j$ )

La forma de elegir el próximo centro de distribución a visitar, se realiza de acuerdo a una probabilidad  $q_0$  (para este experimento se ocupó  $q_0 = 0.9$ ).

Si  $q \leq q_0$  se realiza selección por explotación.

Si  $q > q_0$  se realiza selección por exploración.

Donde  $q$  es un número aleatorio uniformemente distribuido entre  $[0..1]$  obtenido al momento de la decisión, y  $q_0$  es un parámetro que representa una probabilidad que va entre  $0 < q_0 < 1$ .

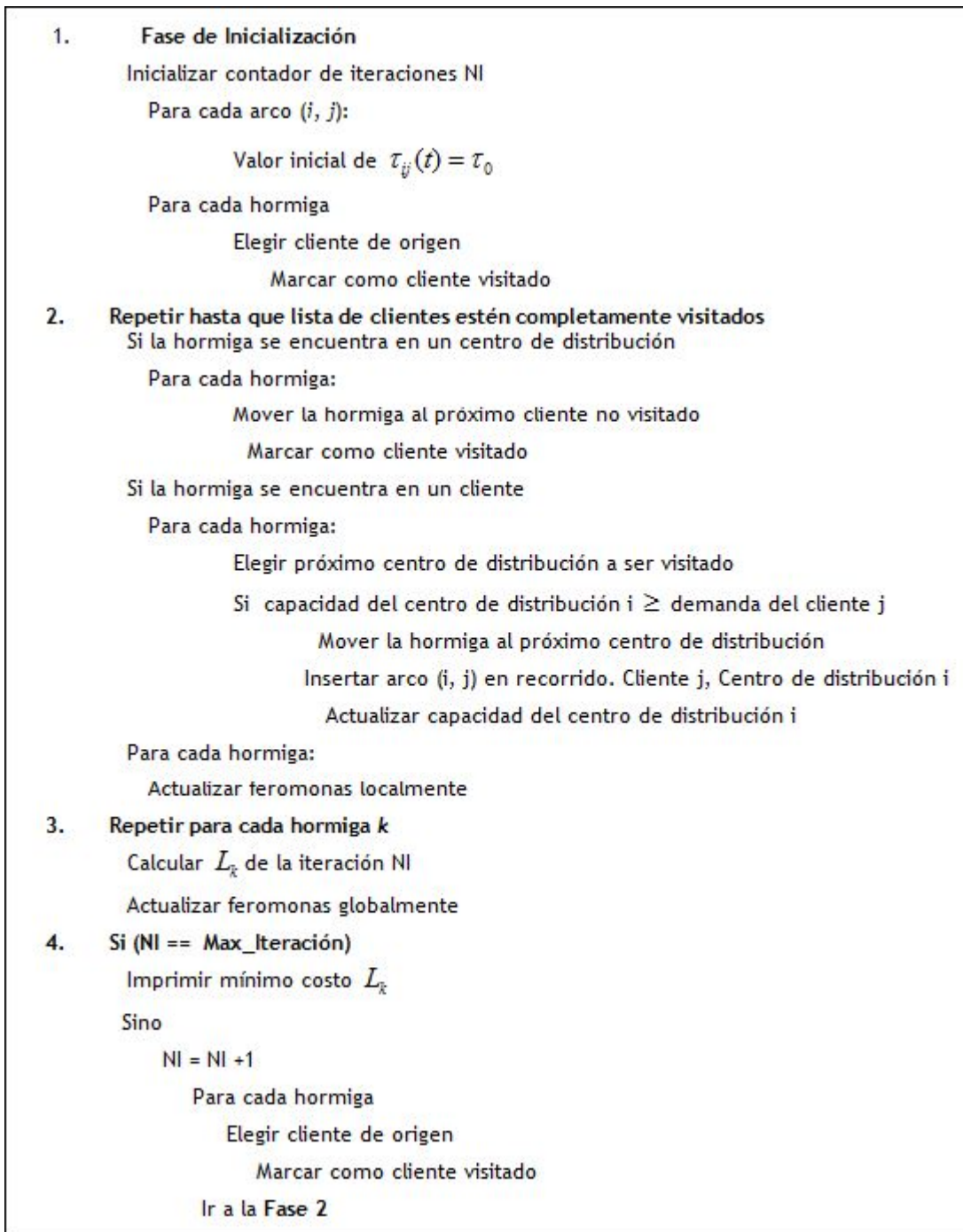
$$(31) i = \begin{cases} \arg \max_{u \in I_k(j)} \{ [\tau(u, j)] * [\eta(u, j)]^\beta \} & \text{si } q \leq q_0 \quad \text{Explotación} \\ R, & \text{en otro caso} \quad \text{Exploración} \end{cases}$$

$R$ , es una variable aleatoria seleccionada de acuerdo con la probabilidad dada por la ecuación siguiente.

$$(32) p_k(i, j) = \begin{cases} \frac{[\tau(i, j)] * [\eta(i, j)]^\beta}{\sum_{u \in I_k(j)} [\tau(u, j)] * [\eta(u, j)]^\beta} & \text{si } i \in I_k(j) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde  $\beta$  es un parámetro que determina la importancia relativa de las feromonas respecto a la distancia ( $\beta > 0$ ), (para este experimento se ocupó  $\beta = 2$ ). El algoritmo ACS secuencial se expresa en el siguiente pseudocódigo.

Ilustración 3.3: Algoritmo ACS secuencial para DRDRP.



En resumen, ACS se inicia ubicando H hormigas (para este experimento se ocupó H = 10), en n clientes (la cantidad de clientes depende de cada archivo de datos de prueba), de acuerdo a una regla de inicialización. Para este experimento se ordenan los clientes de forma descendente con respecto a su cantidad demandada, para tener mayor prioridad de asignación. Cada hormiga construye su propio recorrido, eligiendo el arco (i, j) centro de

distribución  $i$ , cliente  $j$ , de acuerdo a un valor probabilístico que determina si la fase de asignación se realiza por explotación o exploración. Las hormigas actualizan feromonas localmente al moverse del cliente  $j$  al centro de distribución  $i$ . Cuando todas las hormigas recorrieran a todos los clientes, se calcula el mejor costo hallado en la iteración. La ecuación de costos utilizada es la siguiente:

$$(11) \text{Min} \left( \sum_{i=1}^N FC_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (UOC_i \cdot d_j + TC_y) \cdot Y_{ij} + \sum_{i=1}^N \left( OC_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} + HC_i \cdot \frac{Q_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^N (HC_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{LT_i} \cdot \sqrt{V_i}) \right)$$

Una vez almacenado el mejor costo, se realiza una actualización de feromonas global, esta vez teniendo en cuenta, sólo la mejor solución global  $L_{mg}$ .

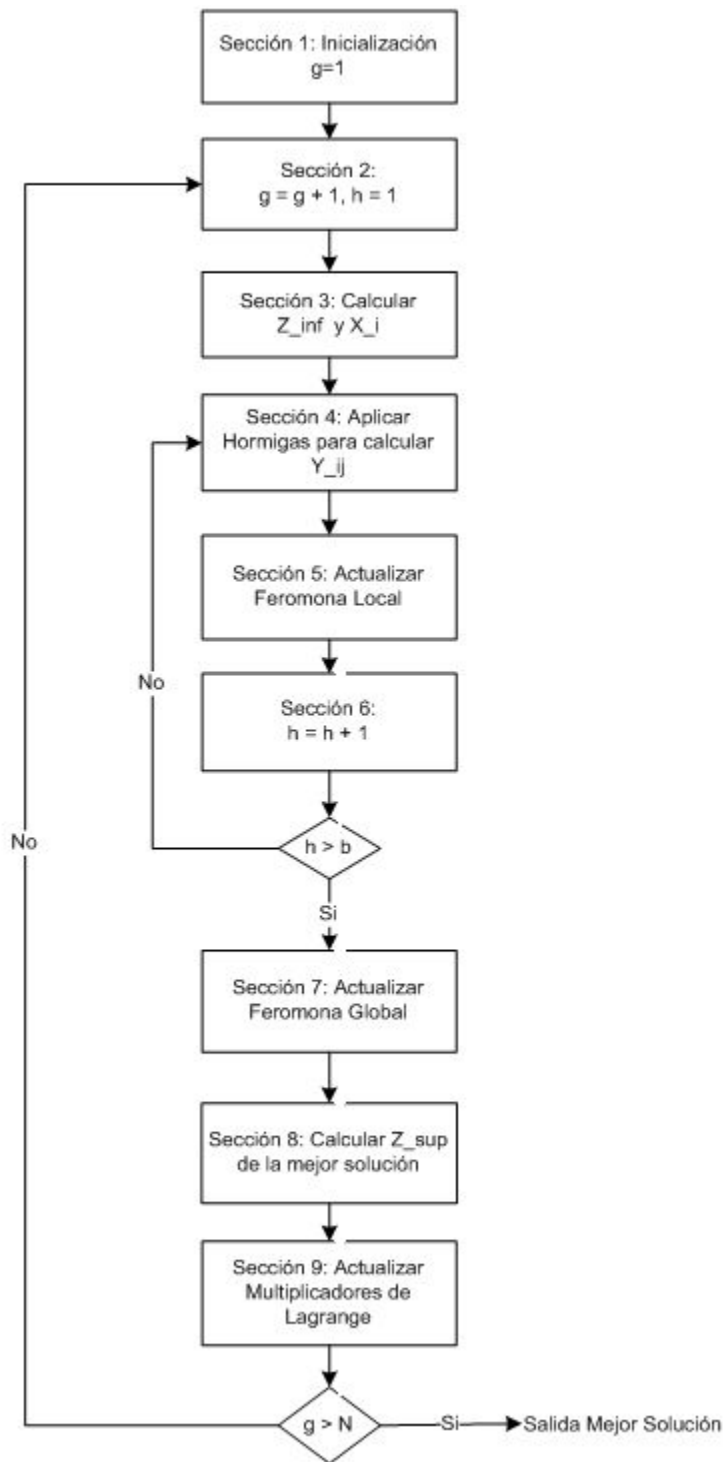
El proceso se repite hasta que el número de iteraciones alcance su valor máximo de iteración (para este experimento se ocupó  $\text{Max\_Iteración} = 2500$ ).

Debido a la forma en que se calculan las probabilidades de explotación y exploración, las hormigas son guiadas en la búsqueda de soluciones por información heurística, prefiriendo elegir los arcos  $(i, j)$  con menor costo y mayor cantidad de feromonas, lo que a su vez sirve para incrementar la cantidad de feromonas en los recorridos que van resultando óptimos a medida que avanza el algoritmo.

### **3.7 Diseño general de un DRDRP ocupando la heurística híbrida**

Ilustración 3.4: Diseño General de un DRDRP ocupando ACS con Lagrangiano.





Explicación del diseño general de un DRDRP ocupando ACS con Lagrangiano.

**Definición de variables:**

$b$  : Número de hormigas totales.

$g$  : Iteración  $g$ -ésima.

$h$  : Hormiga  $h$ -ésima.

$N$  : Número total de iteraciones permitidas.

$X_i$  :  $X_i = 1$  si se instala el centro de distribución  $i$  (0 si no)

$Y_{ij}$  :  $Y_{ij} = 1$ , si se asigna el cliente  $j$  a un centro de distribución  $i$  (0 si no)

$Z_{inf}$  : Valor del límite inferior.

$Z_{sup}$  : Valor del límite superior.

Sección 1: Inicialización

- a. Se inicializan las variables correspondientes a los algoritmos de Lagrangiano, y ACS.
- b.  $g = 1$ , corresponde a la inicialización de las iteraciones.

Sección 2:

- a.  $g = g + 1$ , incrementar iteración.
- b.  $h = 1$ , inicialización del número de hormigas.

Sección 3: Resolver el problema relajado, calculando el límite inferior y determinando el conjunto de centros de distribución abiertos.

Sección 4: Basado en el conjunto de centros de distribución abiertos, cada hormiga usa la regla de asignación de clientes y asigna clientes a estos centros de distribución.

Sección 5: Implementar la regla de actualización de feromona localmente.

Sección 6:  $h = h + 1$  incrementar hormiga.

$h > b$

Si el número de hormigas  $h$ , es mayor o igual que el número máximo de hormigas  $b$ , ir a la Sección 7.

Si el número de hormigas  $h$ , es menor que el número máximo de hormigas  $b$ , devolverse a la Sección 4.

Sección 7: Implementar la regla de actualización de feromona globalmente, basado en la mejor solución global.

Sección 8: Calcular el límite superior obtenido de la mejor solución encontrada hasta el momento.

Sección 9: Actualizar los multiplicadores de Lagrange.

$g > N$

Si el número de iteraciones  $g$  es menor o igual que el número máximo de iteraciones  $N$ , ir a la Sección 2.

Si el número de iteraciones  $g$  es mayor que el número máximo de iteraciones  $N$ , mostrar la mejor solución.

### **3.8 Estudio del programa a utilizar, para desarrollar una solución para DRDRP**

Se evaluaron 2 alternativas de lenguaje de programación, para ver cual de ellos era el más conveniente para desarrollar los cálculos numéricos. Las alternativas evaluadas fueron Microsoft Visual C++ 5.0, y MATLAB.

La ventaja de C++, es que es un lenguaje de código abierto, con mucha documentación para su utilización, haciendo de este lenguaje uno de los más intuitivos a la hora de programar una aplicación. La desventaja que se encontró, fue que no era un lenguaje orientado a trabajar con funciones matemáticas de forma directa, se puede rescatar que tiene librerías especiales para trabajar con funciones matemáticas, pero a pesar de ello, hay que realizar

inicialmente un trabajo adicional para trabajar con estas librerías, lo cual no cuesta mucho adecuarse.

MATLAB, en cambio, es un software orientado exclusivamente a trabajar con funciones matemáticas, que presenta un entorno de desarrollo integrado (IDE), de fácil utilización, con su propio lenguaje de programación de extensión .m. Las características más relevantes de éste lenguaje, es que manipula de forma transparente las funciones matriciales, y tiene una interfaz de usuario amigable para el desarrollador. La desventaja primordial es que es un software que necesita de una licencia para trabajar en él.

En conclusión C++ es un lenguaje que se puede acomodar para problemas matemáticos y su principal ventaja es que es un software de distribución libre. Es por ello que se ha escogido trabajar con el programa libre C++.

# Capítulo 4

## Análisis de Resultados

### 4.1 Datos de prueba

Para comprobar la estabilidad del algoritmo elaborado, se probó el programa con distintos datos de prueba para el problema de DRDRP. En especial se experimentó con dos grupos de datos, el primero grupo de datos de prueba contiene 8 instancias, de tamaños pequeños (15 clientes y 4 centros de distribución), y el segundo grupo de datos de prueba, contiene 98 instancias, más un caso base de estudio, todos de tamaños medianos (40 clientes y 20 centros de distribución).

Los datos de prueba para las 8 instancias de tamaños 15 clientes y 4 centros de distribución, fueron obtenidos, gracias al aporte de Guillermo Cabrera<sup>2</sup>. Estas instancias tienen la particularidad de tener además sus respectivos costos óptimos. Con este grupo se puede comprobar exactamente si el algoritmo creado llega a la solución óptima cuando los problemas tienen un espacio de solución pequeño.

Los datos de prueba para las 98 instancias, más un caso particular de estudio de tamaños 40 clientes y 20 centros de distribución, fueron obtenidos del documento de Pablo Miranda [Miranda et al., 06]. Estas instancias no cuentan con la solución óptima, pero se puede realizar una comparación con los mejores resultados publicados que se han obtenidos hasta el momento. Con este grupo de datos de prueba, se pretende comprobar qué tan cercano el algoritmo llega a encontrar soluciones, en comparación a otros resultados, para instancias de tamaño grande.

---

<sup>2</sup> Guillermo Cabrera Guerrero, profesor de la escuela Ingeniería Informática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Inicialmente se parte realizando un análisis de sensibilidad de los parámetros del algoritmo ACS correspondientes a los valores de la semilla para los valores aleatorios, cantidad de hormigas a utilizar correspondientes al número de la colonia de hormigas, y valores con respecto a  $q_0$ , que corresponde al número probabilístico de seleccionar el camino de explotación, por sobre el camino de exploración. Todos estos parámetros se analizaron sobre el caso base, de tamaño 40 clientes y 20 centros de distribución. Este estudio es realizado inicialmente para encontrar los mejores valores de los parámetros de entrada del algoritmo ACS.

El algoritmo fue programado en Microsoft Visual C++ 5.0, y las pruebas numéricas se realizaron en un computador con procesador Intel Core 2 Duo de 2,13 Ghz, con 3 GB de Memoria RAM.

## **4.2 Análisis de sensibilidad sobre los parámetros de ACS**

### **4.2.1 Valor de la Semilla**

Mejor Semilla: 2942

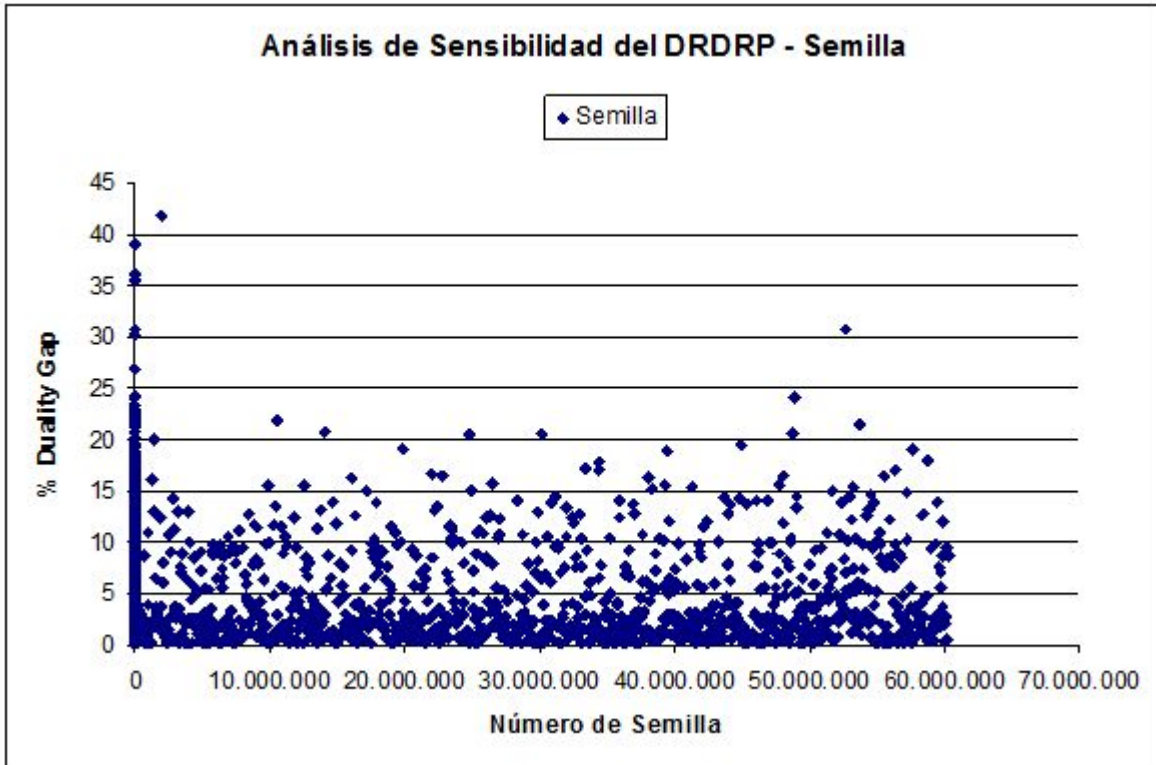
Límite Inferior: 2.144.900

Límite Superior: 2.146.730

Duality gap: 0.085184

Diferencia: 1830

Ilustración 4.1: Análisis de sensibilidad del DRDRP - Semilla.



Se efectuó un estudio sobre el problema caso particular de tamaño 40 clientes y 20 centros de distribución, para el cual se realizaron 5400 pruebas, para encontrar la mejor solución probando distintos valores de semilla que inicializan los valores de las variables aleatorias del algoritmo ACS, y se logró concluir de este estudio, que al utilizar la semilla con valor 2942, arroja el mejor resultado, obteniendo un duality gap de tan solo 0.085184% de diferencia entre el límite superior y el límite inferior. Además se puede observar que el 69% de las soluciones encontradas tienen un duality gap menor al 5%, demostrando que en la mayoría de los casos se encuentra una buena solución.

#### 4.2.2 Cantidad de Hormigas

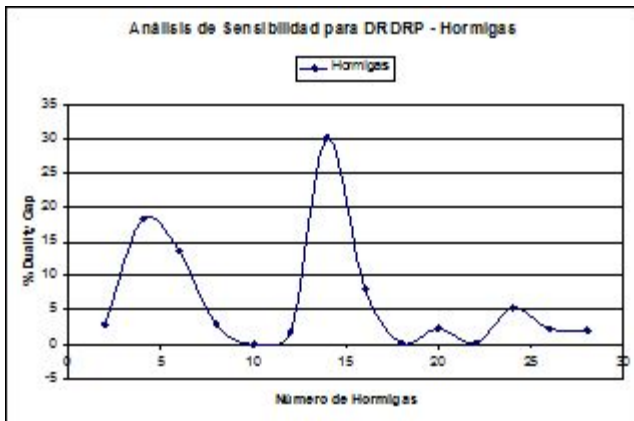
Número de pruebas : 10

Mejor cantidad de hormigas: 10

Número de hormigas recomendado

[Dorigo et al., 97] : 10

Ilustración 4.2: Análisis de sensibilidad del DRDRP-Hormigas.



### 4.2.3 Valor de Q0

Número de pruebas : 11

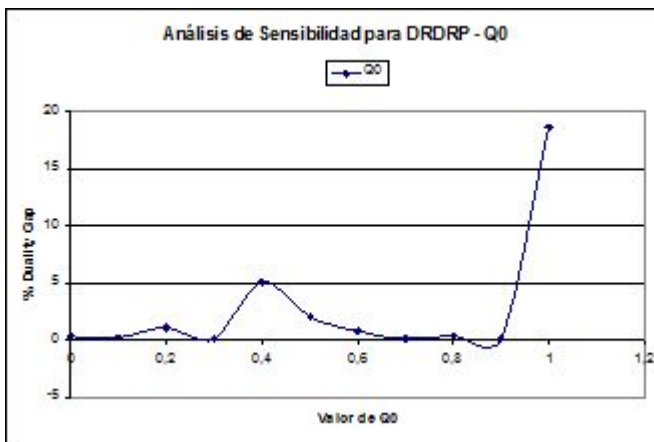
Mejor valor  $Q_0$  : 0.9

$Q_0$

Recomendado

[Dorigo et al., 97] : 0.9

Ilustración 4.3: Análisis de sensibilidad del DRDRP -  $Q_0$ -



Para saber cual es la mejor cantidad de hormigas que se tiene que ocupar para encontrar una buena solución, se comprobó que con un tamaño de 10 hormigas, se logra encontrar la mejor solución en comparación a las otras cantidades de hormigas utilizadas, como se aprecia en la ilustración 4.2, que además coincide con las recomendaciones de Dorigo



[Dorigo et al., 97], autor de la heurística de ACS, que recomienda un tamaño de 10 hormigas.

Con respecto a qué valor porcentual que se debe ocupar para el parámetro  $Q_0$ , que corresponde al número probabilístico de seleccionar el camino de explotación, por sobre el camino de exploración, se observa que cuando se obtiene la mejor solución, es cuando  $Q_0$  toma el valor de 0.9 (ver ilustración 4.3), mismo valor que recomienda Dorigo.

En conclusión, las recomendaciones de Dorigo [Dorigo et al., 97], para inicializar los parámetros de ACS, son idénticos a los valores obtenidos empíricamente en el algoritmo implementado híbridamente para solucionar un problema DRDRP.

### 4.3 Análisis de resultados obtenidos para instancias pequeñas

A continuación se muestran en la tabla 4.1, los resultados obtenidos al resolver el problema DRDRP utilizando un algoritmo híbrido, para datos de prueba de tamaños pequeños.

Tabla 4.1: Resultados de pruebas con instancias pequeñas, para el DRDRP.

Archivo	Costo Óptimo	%	Tiempo seg.
		Diferencia	
15x4_1	5.823,68	1,873	1
15x4_2	10.425,5	2,882	1
15x4_3	22.575,6	0	1
15x4_4	27.749,6	0	1
15x4_5	5.815,92	0	1
15x4_6	10.425,5	2,882	1
15x4_7	5.815,92	0	1

15x4_8	10.425,5	2,882	1
--------	----------	-------	---

Como se observa en la Tabla 4.1, se analizaron 8 archivos del tipo DRDRP. Los archivos tienen un tamaño de 15 clientes, y 4 centros de distribución, pero cada uno de ellos se diferencia al tener distintos parámetros de entrada con respecto a sus costos de transporte entre cliente y centro de distribución ( $TC_{ij}$ ), costo de ordenamiento para cada centro de distribución ( $OC_i$ ) y costo diario de mantener almacenada una unidad de producto en un centro de distribución ( $HC_i$ ). Los resultados obtenidos al correr el programa híbrido, arrojan muy buenos resultados, encontrando en la mitad de ellos, los costos óptimos, y en los demás archivos de prueba, se obtuvo un porcentaje menor al 3% de diferencia con respecto al costo óptimo. Concluyendo que para instancias pequeñas, el algoritmo híbrido funciona muy bien, ocupando tiempos de ejecución muy bajos.

#### **4.4 Análisis de resultado para el Caso particular de DRDRP**

A continuación se mostrarán, los resultados obtenidos al resolver el problema Caso particular DRDRP utilizando un algoritmo híbrido, para datos de prueba de tamaño mediano. El Caso particular tiene un tamaño de 40 clientes, y 20 centros de distribución, y sus datos de entradas se encuentran publicados en el anexo capítulo 6.1.

La importancia de este caso de prueba, se debe a que fue uno de los casos de estudio que fue proporcionado por Pablo Miranda y que se cuenta con su resultado. El objetivo de este análisis es ver cómo se comporta el algoritmo híbrido creado con Lagrangiano y Sistema de Colonia de Hormigas, en comparación con los resultados obtenidos por Miranda, al resolver el mismo problema ocupando lagrangiano desarrollado con una heurística simple 2 k-opt.

Para que los datos de entrada sean iguales para ambos algoritmos, se modificaron los datos de la varianza y costos fijos en los mismos porcentajes que variaron los datos de entrada que se ocupó en el algoritmo de Miranda. La varianza diaria de la demanda, por cada

cliente se aumento en un 10%, y el costo fijo diario de instalación de cada centro de distribución se aumento en un 330%.

Una vez obtenidos los mismos datos de entrada, se procedió a resolver el problema particular DRDRP con la heurística híbrida. Como se observa en la Tabla 4.2, se muestra una comparación entre los resultados obtenidos al solucionar el problema utilizando sólo el algoritmo del Lagrangiano publicado por Miranda, y los resultados obtenidos al resolver el mismo problema ocupando el algoritmo híbrido Lagrangiano y ACS, creado por el autor.

Tabla 4.2: Resultados de pruebas con una instancia mediana, para el DRDRP.

Archivo	Algoritmo utilizado	Límite Inferior	Límite Superior	Duality Gap	Diferencia	Tiempo seg.
Caso Particular	Lagrangiano	2.104.900	2.180.260	3.45643	75.360	45
Caso Particular	Lagrangiano y ACS	2.144.790	2.146.730	0.0901978	1.940	91

De acuerdo con los datos de la Tabla 4.2, el algoritmo híbrido logró obtener mejores resultados, en cuanto a los costos, y al propio Duality Gap, en comparación a los encontrados por el doctor Pablo Miranda [Miranda et al., 06], evaluando solamente este caso particular.

Para lograr encontrar una buena solución ocupando el algoritmo híbrido Lagrangiano y Sistema de Colonia de Hormigas, se tiene que realizar de antemano un estudio previo sobre cuales son los mejores parámetros de entrada que se deben ocupar para inicializar las variables del algoritmo ACS. Para ello se realizaron 5400 pruebas, que demoró aproximadamente unas 90 Hrs. de ejecución para ajustar los parámetros de entrada de este caso.

Un análisis desde el punto de vista de los costos obtenidos de cada heurística a medida que avanzan las iteraciones, se puede apreciar en la ilustración 4.4.

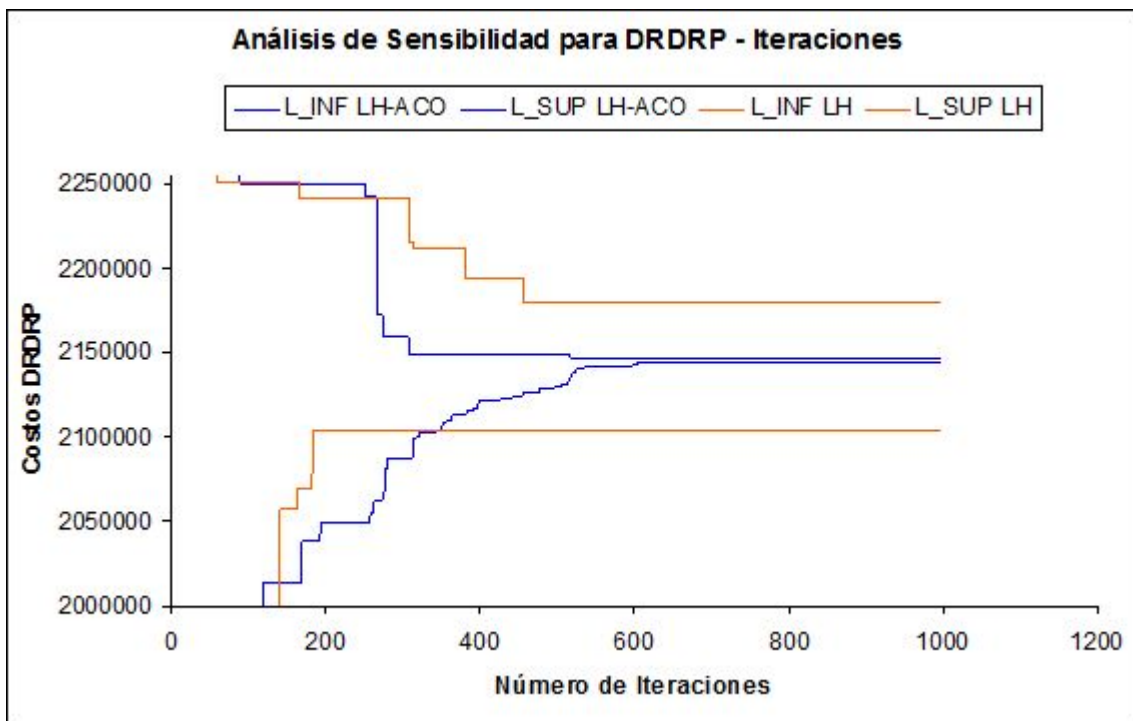
L\_INF : Límite Inferior.

L\_SUP: Límite Superior.

LH : Heurística del Lagrangiano.

ACO : Optimización de Colonias de Hormigas.

Ilustración 4.4: Análisis de sensibilidad del DRDRP - Iteraciones.



La mejor solución encontrada para el DRDRP con la heurística híbrida (color azul) es mejor que la solución encontrada por Pablo Miranda [Miranda et al., 06], (color naranja), debido a que se aprecia claramente que el duality gap del algoritmo híbrido, es menor que el duality gap de Miranda, a medida que aumentan las iteraciones. Esta mejora en los resultados encontrados es la consecuencia de evaluar exhaustivamente un solo problema de DRDRP. Posteriormente se proba el comportamiento del algoritmo híbrido para 98 problemas de DRDRP distintos.

Un análisis del mismo problema, enfocado ahora desde el punto de vista geográfico, se puede observar en las ilustraciones 4.5 y 4.6. La solución encontrada por la heurística lagrangiana, abre 5 centros de distribución para abastecer a todos los clientes, cumpliendo con todas las restricciones de un problema DRDRP, en cambio la solución encontrada por la heurística híbrida lagrangiano y ACS, abre solo 4 centros de distribución para abastecer a todos los clientes, el cual también cumple con todas las restricciones de un DRDRP. De esta forma se observa claramente que dependiendo de que centros de distribución se abran y cómo sea su asignación a cada cliente, es como se obtienen los mejores costos para éste tipo de problemas.

Ilustración 4.5: Solución caso particular LH.

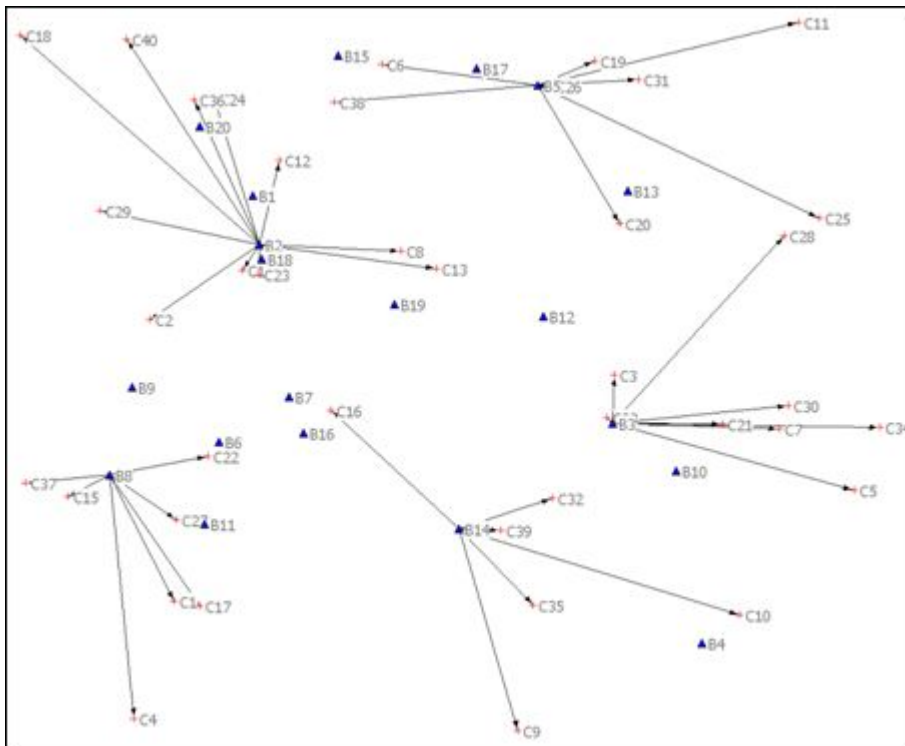
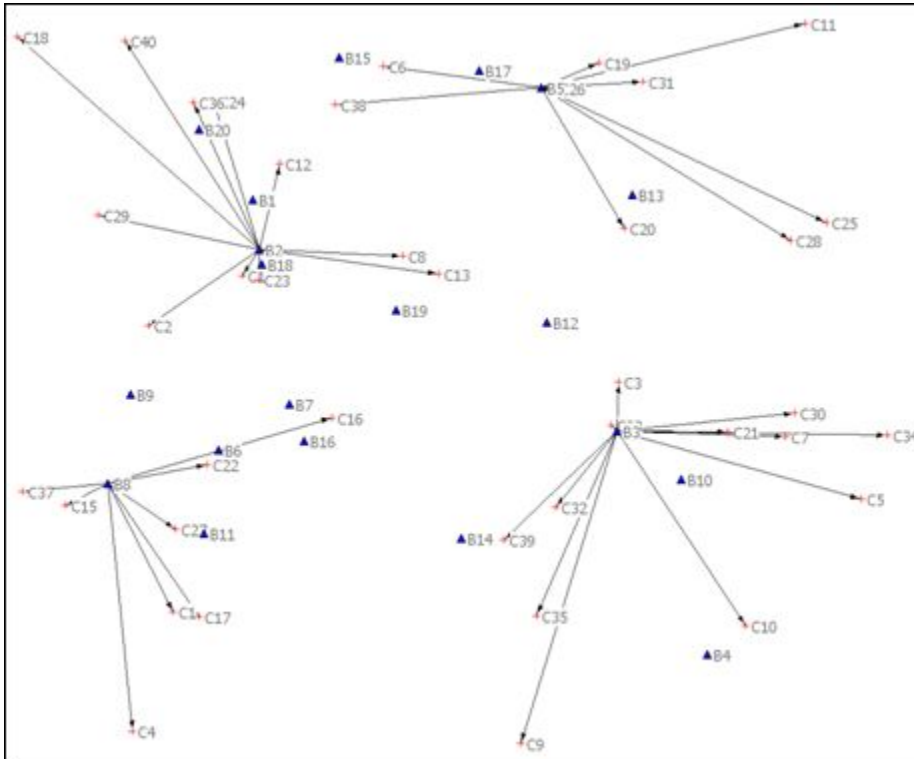


Ilustración 4.6: Solución caso particular LH-ACS



## 4.5 Análisis de resultado para instancias medianas

Inicialmente, se comprende resolver el problema para 98 instancias del tipo DRDRP utilizando un algoritmo híbrido. Las 98 instancias tienen un tamaño de 40 clientes, y 20 centros de distribución, y sus datos de entradas se encuentran publicados en el Anexo A y los resultados obtenidos para las 98 instancias se encuentran publicados en el Anexo B.

Para obtener distintas instancias del mismo problema, se modificaron 3 variables; varianza de la demanda de cada cliente ( $V_i$ ), costos fijos de cada centro de distribución ( $FC_i$ ) y capacidad de orden ( $Q \max_i$ ). Los datos de entrada de las demandas y costos fijos, fueron modificados en  $\pm 30\%$ ,  $\pm 20\%$ ,  $\pm 10\%$  y  $0\%$ , en cambio la capacidad de ordenamiento, se probó con los valores 600 y 900, generando un total de 98 instancias de pruebas distintas.

Los datos de entrada que se ingresaron para resolver el problema DRDRP desarrollado con la heurística híbrida Lagrangiano y ACO, son los mismos que se ocuparon en el documento del profesor Miranda [Miranda et al., 06], que resuelve el problema DRDRP ocupando solo

la heurística del Lagrangiano. De este modo, se pueden comparar perfectamente los resultados entre ambos desarrollos heurísticos para un mismo problema.

Para referirnos al problema DRDRP desarrollado con la heurística lagrangiana se ocupa la abreviatura “DRDRP LH” y para referirse al problema DRDRP resuelto con la heurística híbrida Lagrangiano y ACO, se ocupa la abreviatura “DRDRP LH-ACO”.

A continuación se mostraran los resultados obtenidos del documento del profesor Miranda (DRDRP LH), y los obtenidos en esta investigación, al resolver el problema DRDRP con la heurística híbrida (DRDRP LH-ACO).

Tanto en la ilustración 4.7, como en la ilustración 4.8, se muestran los costos de la función objetivo, comparando los valores obtenidos de la solución relajada (Límite inferior), con los costos obtenidos de su solución heurística (Límite superior). Cada punto de estos gráficos corresponden a una solución del problema DRDRP, obtenida del promedio de 14 instancias, las cuales fueron conseguidas al mantener la misma cantidad de costo fijo, variar la varianza con 7 valores distintos, y probar con 2 valores diferentes de capacidad de orden en cada una de las instancias. Se observa encerrado en los recuadros el duality gap, o diferencia porcentual del error entre el límite inferior y superior. La forma de calcular este valor se describe a continuación.

$$(33) \text{ Duality Gap}_{FC_k} = \frac{(\text{LimiteSuperior}_{FC_k} - \text{LimiteInferior}_{FC_k}) * 100}{\text{LimiteSuperior}_{FC_k}}$$

Al comparar los resultados de variar los costos fijos, tanto para el problema DRDRP resuelto con la heurística lagrangiana (ver ilustración 4.7), como para el problema DRDRP resuelto con la heurística híbrida Lagrangiana-ACO, (ver ilustración 4.8), se observa que presentan similares resultados.

Ilustración 4.7: Análisis de sensibilidad de los distintos costos fijos DRDRP LH.

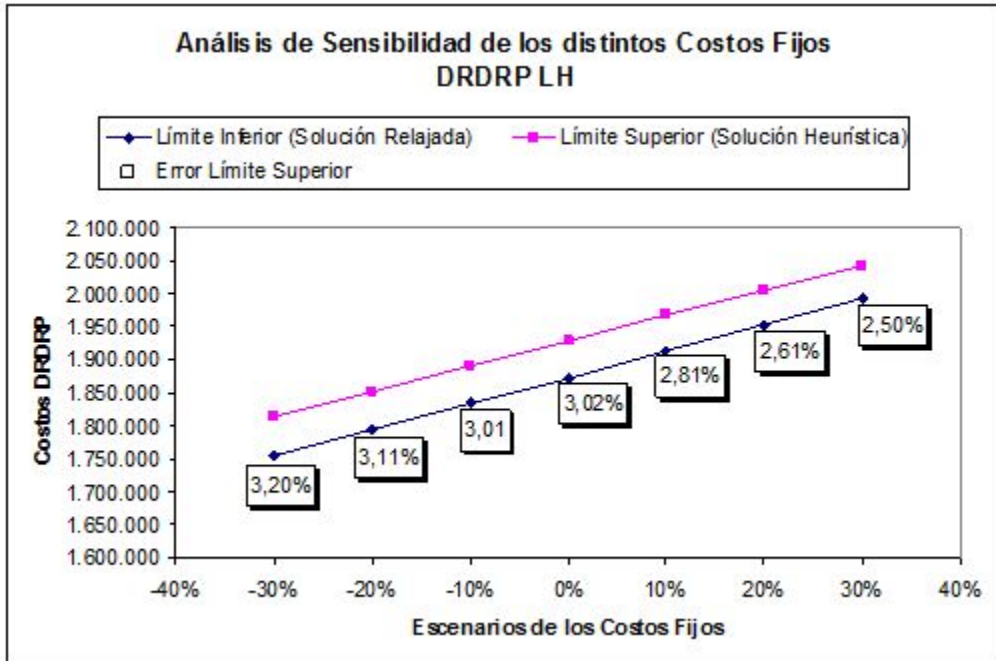
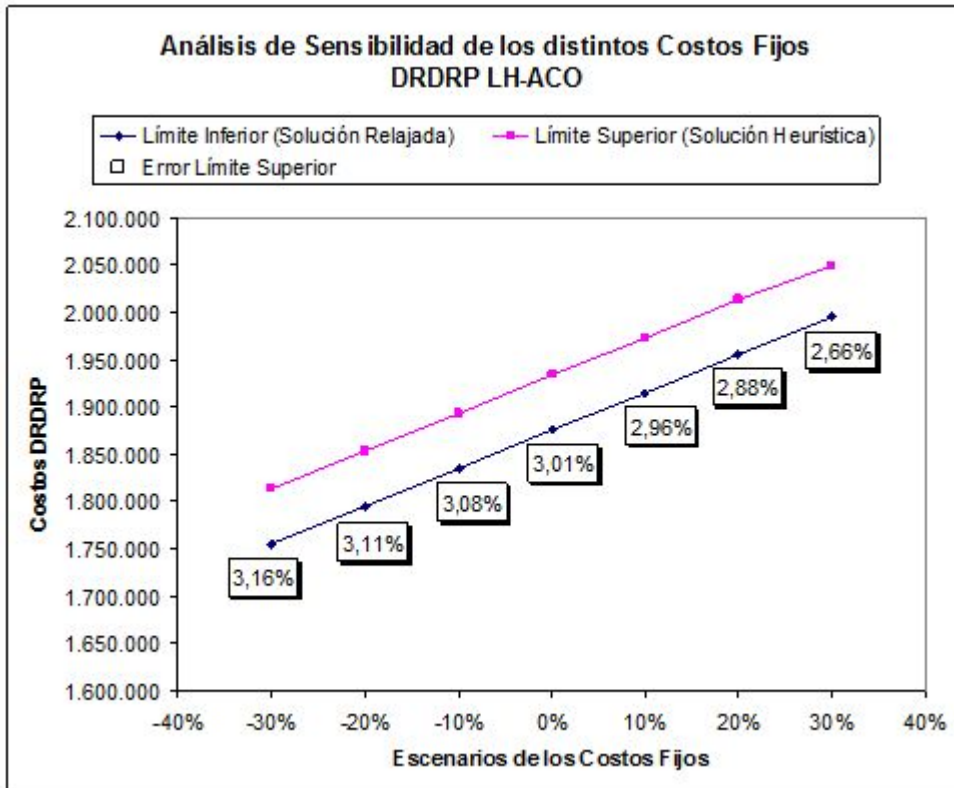


Ilustración 4.8: Análisis de sensibilidad de los distintos costos fijos DRDRP LH-ACO.





Las ilustraciones 4.9 y 4.10, muestran un análisis de sensibilidad con respecto a la variabilidad de la varianza, análogas a las ilustraciones 4.7 y 4.8, que presentan un análisis de sensibilidad con la variabilidad del costo fijo. Al comparar los resultados de modificar la varianza, tanto para el problema DRDRP LH (ver ilustración 4.9), como para el problema DRDRP LH-ACO, (ver ilustración 4.10), se observa que presentan similares resultados.

Ilustración 4.9: Análisis de sensibilidad de las distintas varianzas del DRDRP LH.

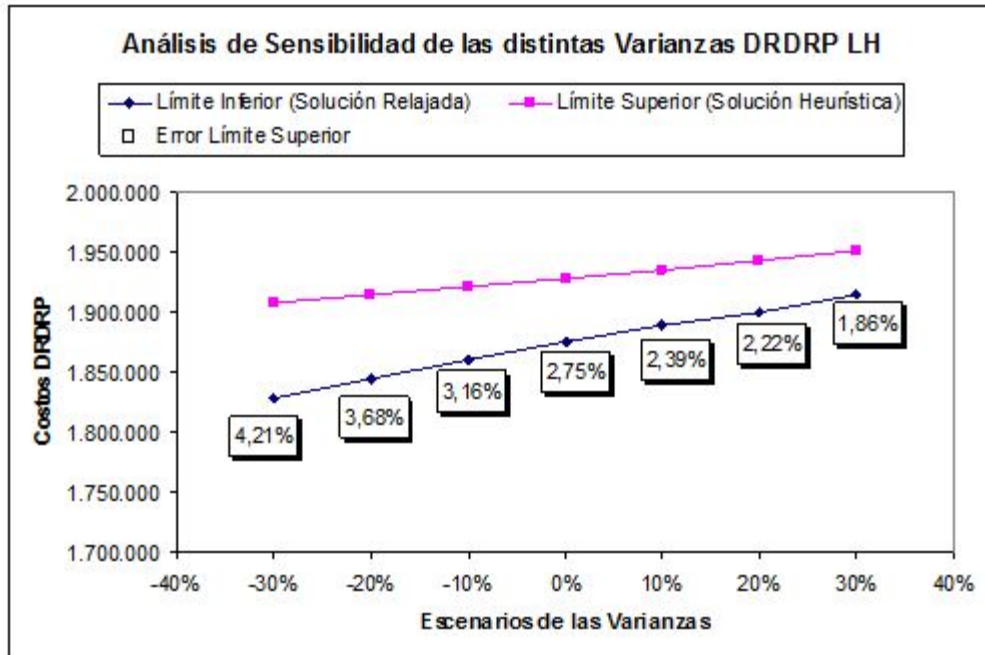
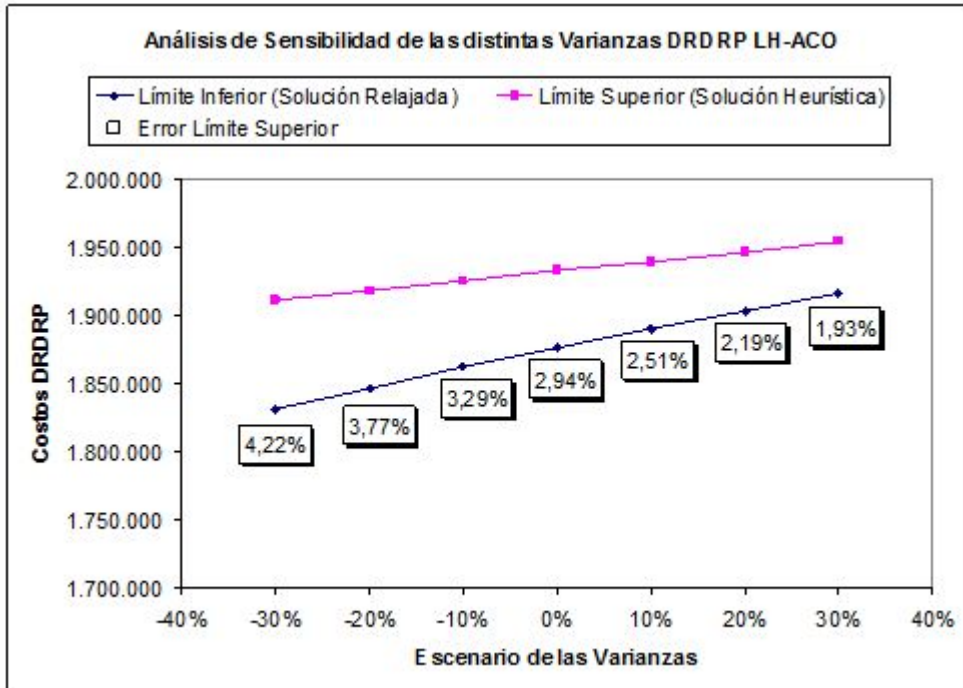


Ilustración 4.10: Análisis de sensibilidad de las distintas varianzas del DRDRP LH-ACO.



Como conclusión de estos gráficos, se observa que en los dos casos de desarrollo, DRDRP LH y DRDRP LH-ACO, al ir aumentando la cantidad de costo fijo y varianza, aumenta también el costo de la función objetivo, y va disminuyendo el porcentaje de error entre los límites superior e inferior. Por otra parte, se observa que el aumento del valor del costo fijo, incrementa en mayor medida el costo de la función objetivo, en comparación al aumento de la varianza, siendo de esta forma la variable costo fijo más sensible que la variable varianza de la demanda. La razón de este comportamiento es debido a que el costo fijo está inserto en una sumatoria de la función objetivo, y la varianza está inserta dentro de una sumatoria de raíces cuadráticas de la función objetivo.

La ilustración 4.11 y 4.12 grafican el porcentaje de error que presentan cuando se realiza un análisis de sensibilidad tanto para la variable costo fijo, como para la variable varianza. La ilustración 4.11 representa la solución del problema DRDRP LH, y la ilustración 4.12 representa la solución del problema DRDRP LH-ACO. Los dos gráficos presentan similares resultados.

Como conclusión de estos gráficos se observa que al aumentar la variable varianza, disminuye drásticamente el valor del error porcentual entre los límites superior e inferior, en comparación con la variable de costo fijo.

Ilustración 4.11: Análisis de sensibilidad de los errores del DRDRP LH.

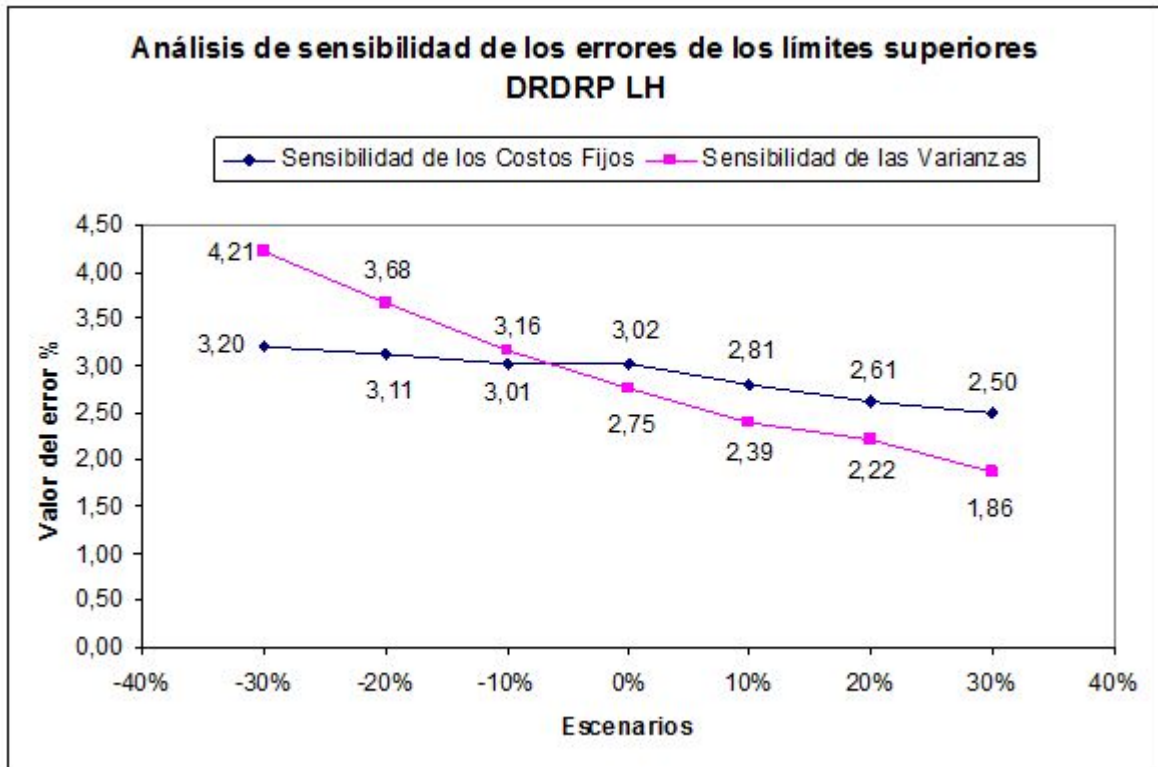
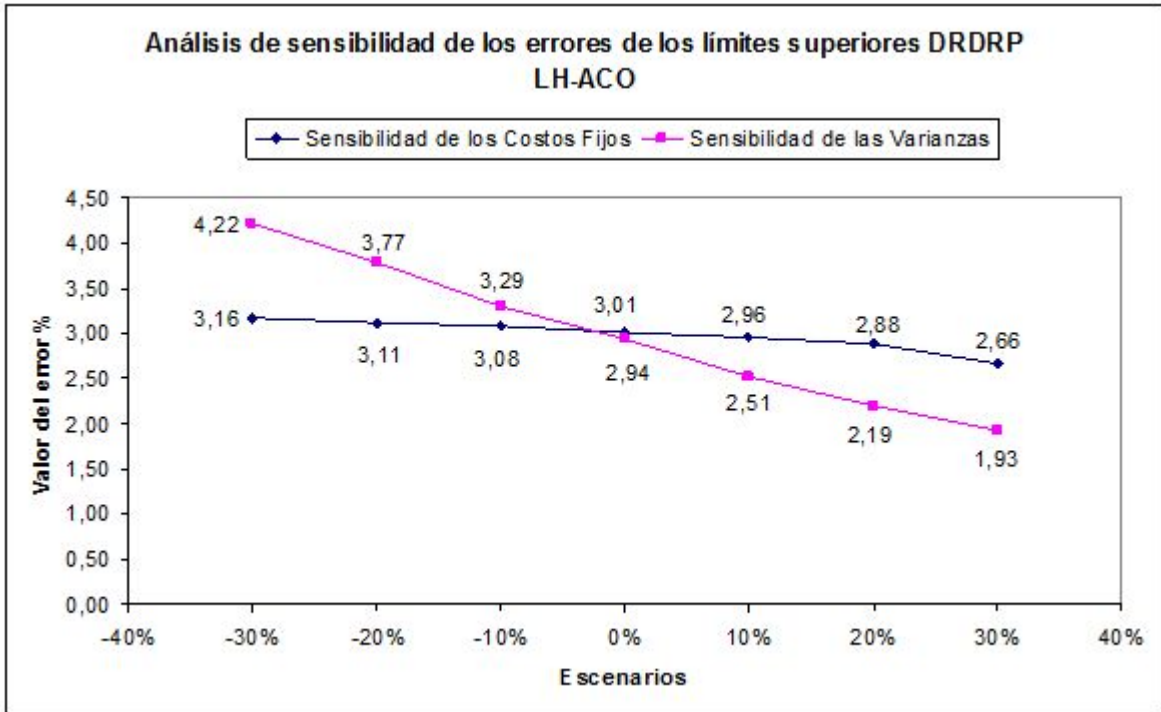


Ilustración 4.12: Análisis de sensibilidad de los errores del DRDRP LH-ACO.



En la ilustración 4.13, se puede observar el análisis de sensibilidad del límite superior (solución heurística), para distintos escenarios de costos fijos, cuando varía la capacidad de orden, para un DRDRP resuelto con la heurística lagrangiano, y en la ilustración 4.14 se observa el mismo análisis, pero para un DRDRP resuelto con la heurística híbrida lagrangiano ACO. En ambos casos se observan similares resultados, al aumentar la capacidad tamaño de orden de 600 a 900, disminuyendo los costos de la función objetivo. A su vez, a medida que aumentamos el valor del costo fijo, disminuye el porcentaje de error entre los límites superior e inferior.

Ilustración 4.13: Análisis de sensibilidad con cambios en costos fijos DRDRP LH.

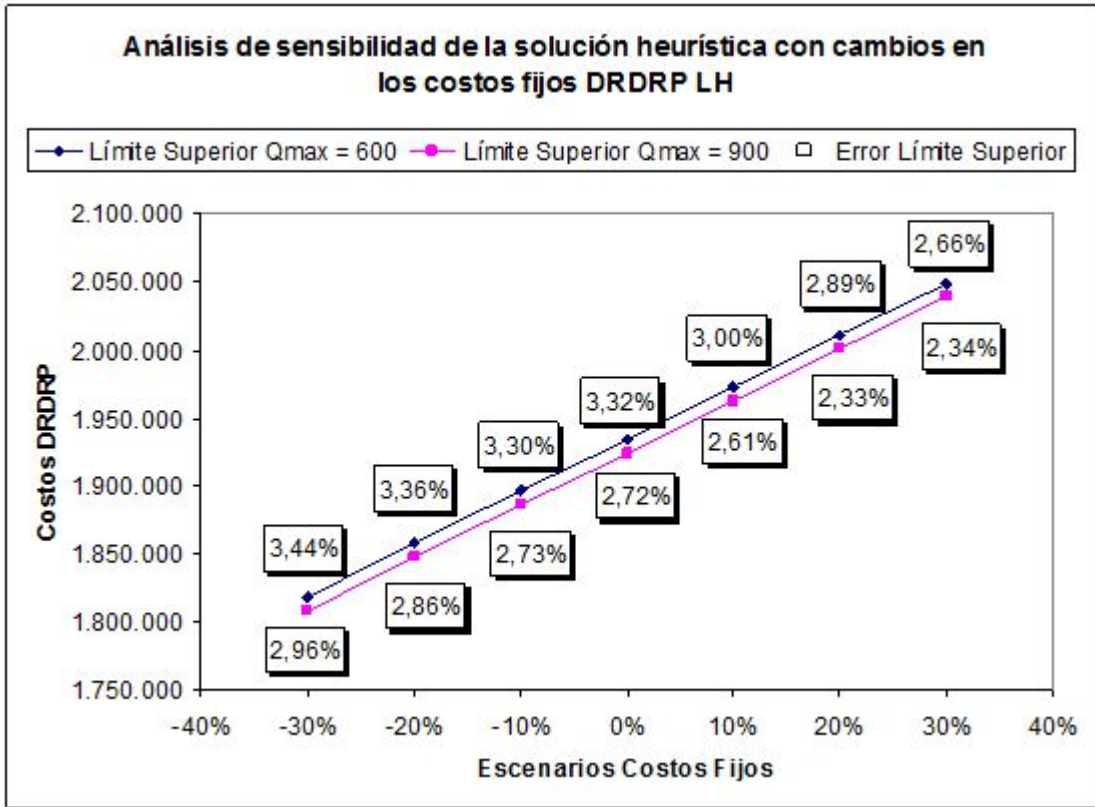
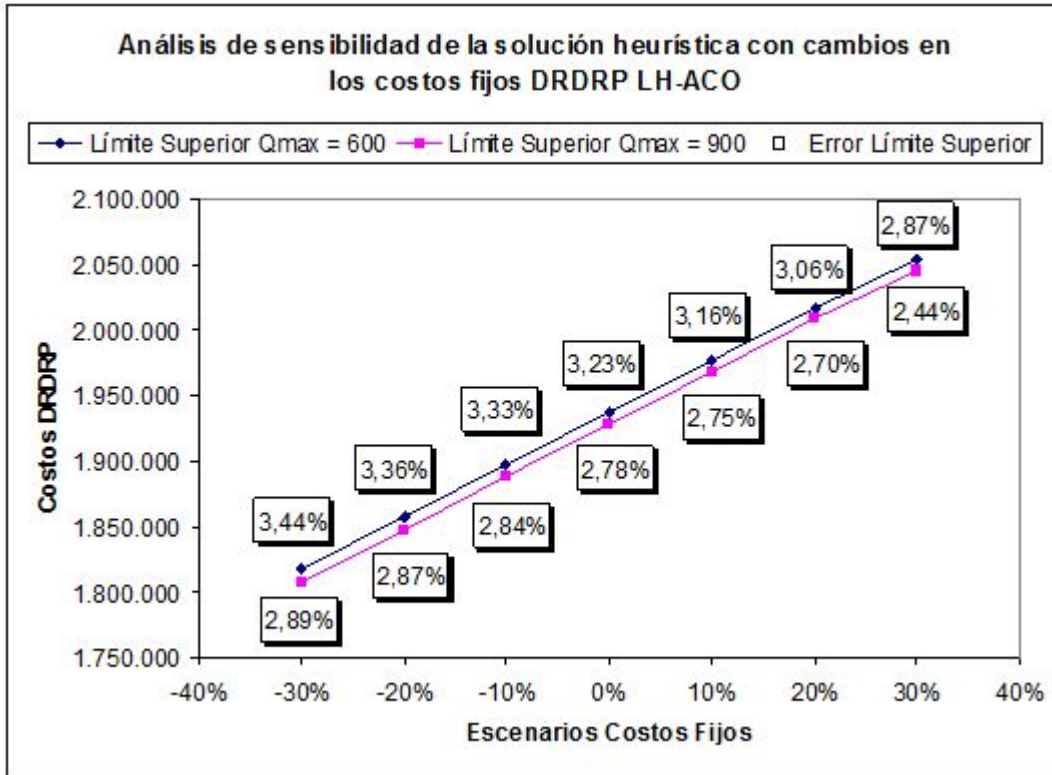


Ilustración 4.14: Análisis de sensibilidad con cambios en costos fijos DRDRP LH-ACO.



Las ilustraciones 4.15 y 4.16 son análogas a las ilustraciones 4.13 y 4.14, pero con la diferencia que se realiza la comparación para distintos escenarios de varianzas, y no para costos fijos. En ambas ilustraciones, también se observan similares resultados entre ellas, al aplicar distintos métodos de desarrollo, lagrangiano, o lagrangiano con ACO. Al igual que con los resultados anteriores, cuando se aumenta la capacidad de orden, disminuye el costo de la función objetivo, pero esta diferencia se hace más pequeña cada vez que aumenta el valor de la varianza.

Ilustración 4.15: Análisis de sensibilidad con cambios en varianzas DRDRP LH.

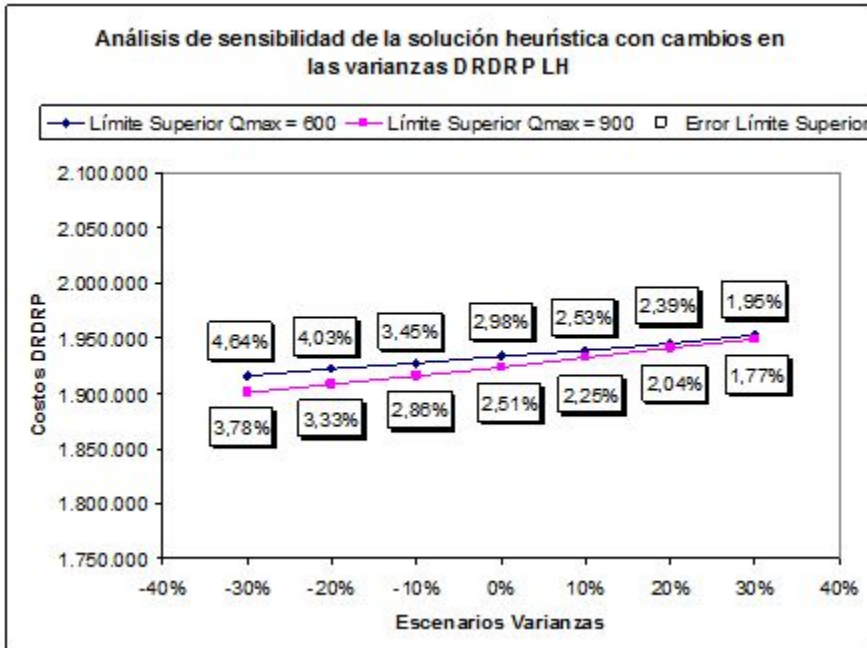
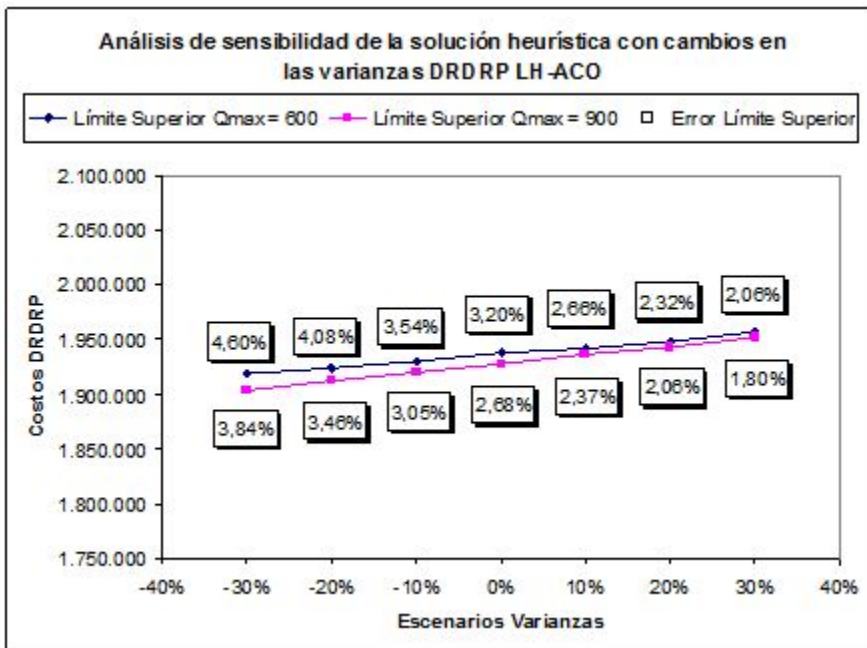


Ilustración 4.16: Análisis de sensibilidad con cambios en varianzas DRDRP LH-ACO.

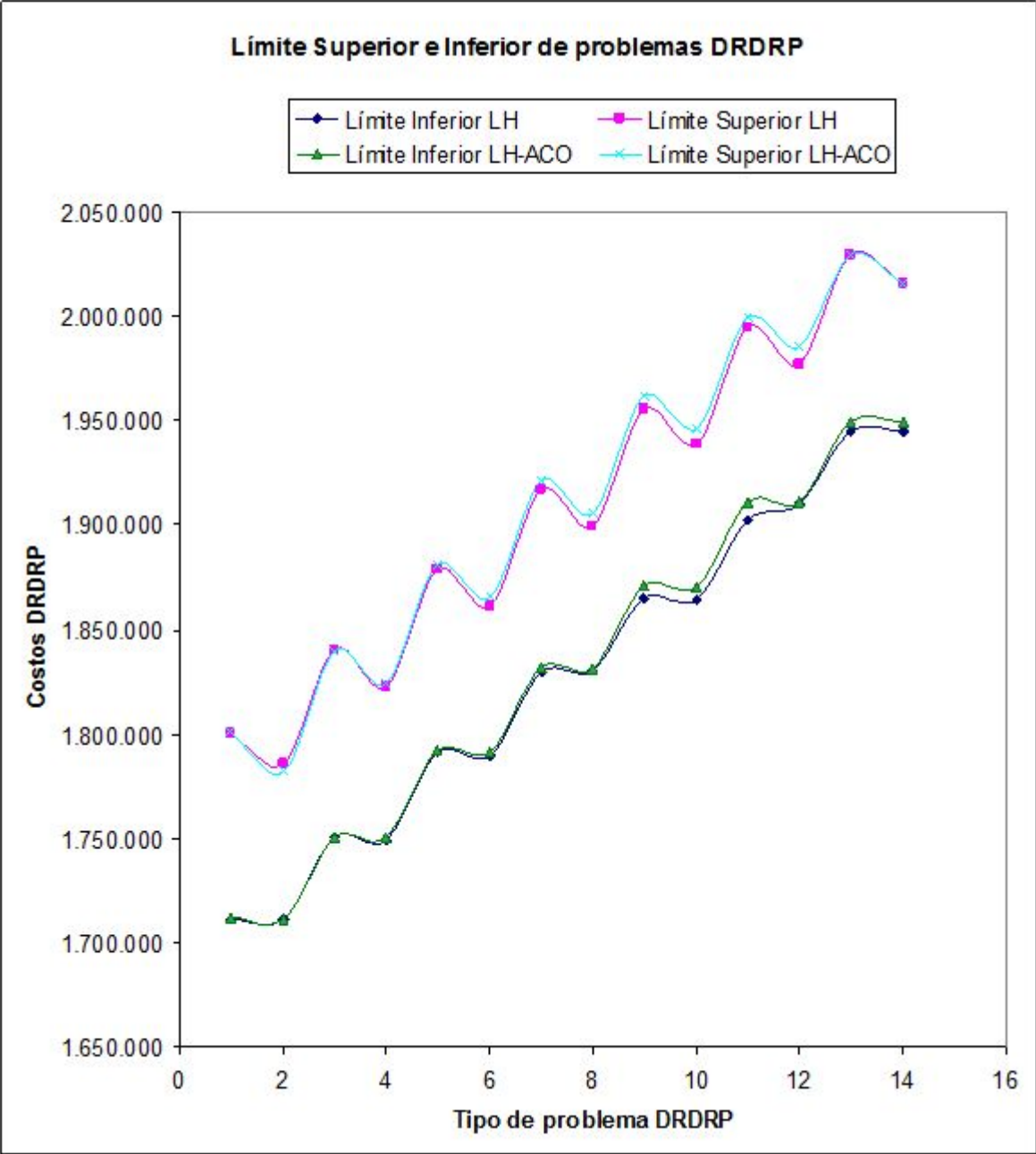


Para comparar si los resultados encontrados por el algoritmo DRDRP LH-ACO, son similares a los encontrados en el documento de Miranda [Miranda et al., 06] DRDRP LH, se han graficado los resultados del límite superior e inferior de las primeras 15 instancias de



prueba de cada algoritmo y sus resultados se observan en la ilustración 4.17. Los costos de cada algoritmo son tan similares con respecto a sus límites inferior y superior, que casi a simple vista no se distinguen diferencias en el gráfico. Con esto se comprueba que las soluciones encontradas por ambos algoritmos para las 98 instancias de prueba, logran obtener similares resultados.

Ilustración 4.17: Límite superior e inferior de problemas DRDRP.





A continuación se muestra en la tabla 4.3 los resultados de sólo 14 de las 98 instancias de prueba del tipo DRDRP de tamaño 40 clientes y 20 centros de distribución, al aplicar el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO (los resultados de las 98 instancias de prueba se encuentra publicado en el Anexo B), también se muestran los resultados a modo de comparación con respecto a los obtenidos por Pablo Miranda [Miranda et al., 06], para las mismas instancias evaluadas, y en el último campo se agrega además la diferencia porcentual que existe entre los resultados de ambos Duality Gap encontrados.

$$(34) \text{ DIFERENCIA} = (\text{GAP LH} - \text{GAP LH-ACO}) * 100 / \text{GAP LH}$$

L INF LH : Límite inferior resuelto con algoritmo Lagrangiano.

L SUP LH : Límite superior resuelto con algoritmo Lagrangiano.

GAP LH : Duality Gap porcentual obtenido con algoritmo Lagrangiano.

L INF LH-ACO : Límite inferior resuelto con algoritmo híbrido Lagrangiano ACO.

L SUP LH-ACO: Límite superior resuelto con algoritmo híbrido Lagrangiano ACO.

GAP LH-ACO : Duality Gap porcentual obtenido con algoritmo híbrido Lagrangiano ACO.

Tabla 4.3: Resumen de los resultados de las distintas heurísticas.

#	L INF LH	L SUP LH	GAP LH	L INF LH-ACO	L SUP LH-ACO	GAP LH-ACO	DIFERENCIA %
71	1.783.460	1.828.600	2,4684	1.783.460	1.828.600	2,4684	0,0012
72	1.783.460	1.824.480	2,2483	1.783.440	1.822.250	2,1296	5,2808
73	1.823.460	1.868.590	2,4156	1.823.460	1.868.590	2,4155	0,0008
74	1.823.440	1.864.480	2,2008	1.823.460	1.863.530	2,1502	2,2992

75	1.863.440	1.907.160	2,2921	1.863.450	1.908.590	2,3649	-3,1765
76	1.863.440	1.904.470	2,1543	1.863.450	1.903.520	2,1050	2,2884
<b>77</b>	<b>1.873.020</b>	<b>1.945.690</b>	<b>3,7347</b>	<b>1.903.450</b>	<b>1.948.590</b>	<b>2,3164</b>	<b>37,9762</b>
78	1.893.860	1.940.870	2,4217	1.903.220	1.943.520	2,0735	14,3781
79	1.943.440	1.984.210	2,0546	1.943.450	1.988.580	2,2698	-10,4752
80	1.941.680	1.979.390	1,9055	1.943.450	1.983.520	2,0201	-6,0140
81	1.983.350	2.022.740	1,9472	1.983.440	2.028.580	2,2250	-14,2665
82	1.983.440	2.017.920	1,7085	1.983.440	2.023.510	1,9805	-15,9219
83	2.023.440	2.061.260	1,8350	2.023.420	2.068.860	2,1964	-19,6954
84	2.022.560	2.056.450	1,6478	2.023.440	2.063.510	1,9418	-17,8416

Como se observa en esta tabla, los resultados encontrados por ambos algoritmos en conjunto son muy similares, pero al analizar cada instancia por separado presentan grandes diferencias, como es el caso de la instancia 77, en la cual la heurística híbrida presenta una mejora en su solución de un 37%, en comparación a la heurística del Lagrangiano. Este importante porcentaje de mejora al ocupar el algoritmo híbrido en comparación al algoritmo Lagrangiano, nos indica que para ciertas instancias el algoritmo híbrido puede disminuir considerablemente la brecha del Duality Gap.

Si se calcula los promedio de los valores de los Duality Gap de ambos algoritmos para estas 14 instancias de prueba, se observa que la heurística híbrida obtiene un Duality Gap en promedio de 2.1898%, en comparación al algoritmo del Lagrangiano que obtiene un Duality Gap en promedio de un 2.2167%, obteniendo una pequeña mejora el algoritmo híbrido. Además se puede destacar que de las 14 instancias evaluadas, el algoritmo híbrido encuentra una mejor solución en la mitad de las instancias.

La ilustración 4.18 muestra una comparación de histogramas de errores o duality gap, tanto para el DRDRP LH, como para el DRDRP LH-ACO, ambos testeando las mismas 98 instancias de pruebas. Como se puede observar, los resultados son muy similares al aplicar dos métodos distintos de desarrollo.

Ilustración 4.18: Histograma de Duality Gap del DRDRP LH v/s LH-ACO.

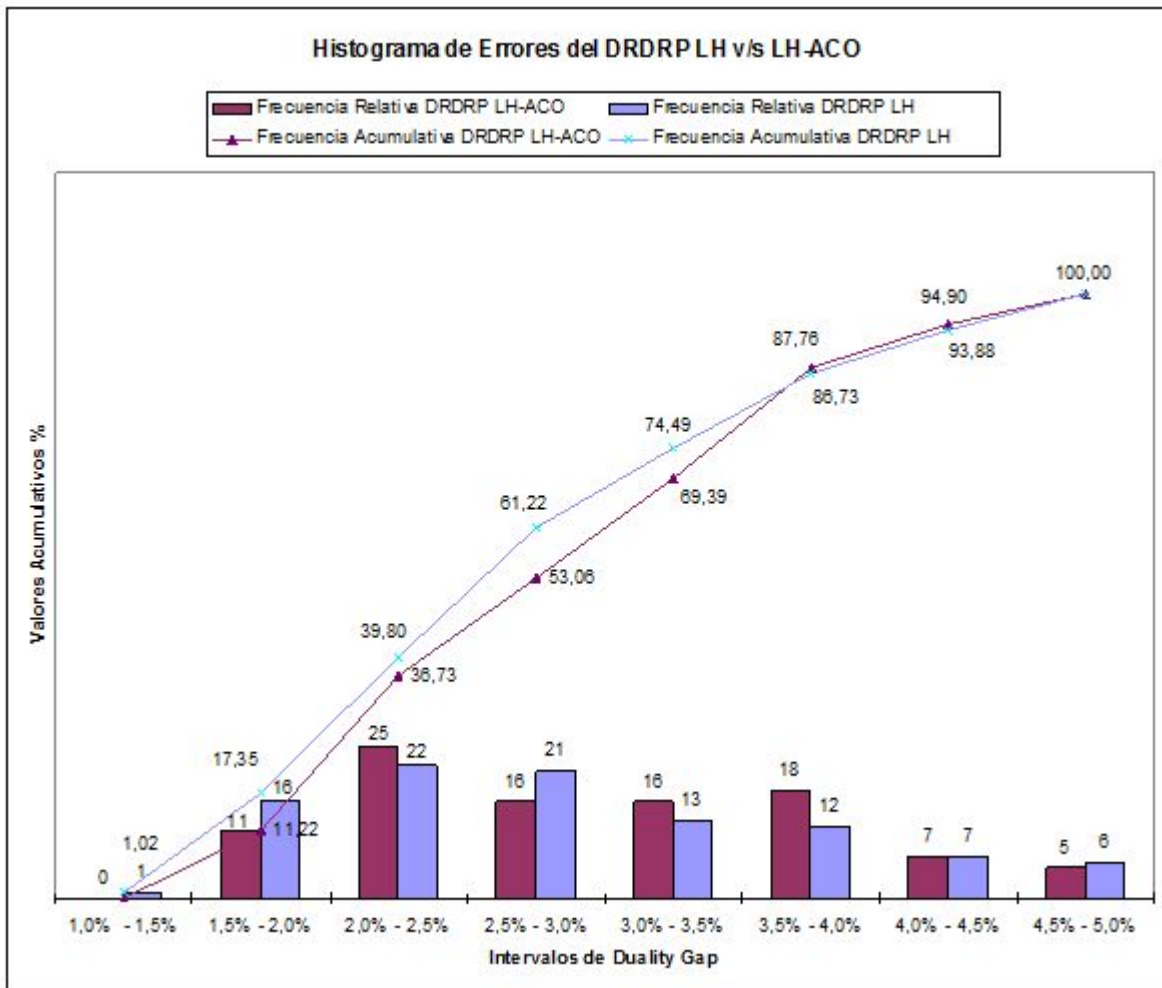


Tabla 4.4: Resumen de los resultados de las distintas heurísticas.

	DRDRP LH	DRDRP LH-ACO
Promedio Duality Gap de las 98 instancias	2,89%	2,98%

Menor Duality Gap de las 98 instancias	1,41%	1,69%
Mayor Duality Gap de las 98 instancias	4,92%	4,96%
Tiempo ejecución promedio para una instancia	94 seg.	165 seg.
Número de soluciones por instancia	1	20
Tiempo total de ejecución para 98 instancias	3 Hrs.	91 Hrs.

La tabla 4.4, muestra un resumen de los promedios, rangos en que fluctúa el Duality Gap y tiempos de ejecución de las distintas heurísticas. Se observa que para las dos heurísticas, el rango porcentual de Duality Gap va entre un 1% y un 5%, pero que en promedio, el porcentaje de Duality Gap es levemente menor cuando se desarrolla sólo con la heurística del lagrangiano. En ambas heurísticas el menor Duality Gap es encontrado en la instancia 98 y el mayor Duality Gap es encontrado en la instancia 1. Con respecto a los tiempos de ejecución, al correr los distintos programas en un mismo equipo de prueba, se obtiene que para encontrar una solución, para una sola instancia, el DRDRP resuelto con lagrangiano se demora en promedio 94 segundos y para el DRDRP resuelto con la heurística híbrida de lagrangiano y ACO, en promedio se demora 165 segundos, esta diferencia de tiempos de ejecución no es tan grande, pero debido a la estructura de los algoritmos, crece considerablemente la diferencia de tiempo de ejecución, para encontrar la solución a las 98 instancias de prueba. La explicación de esta diferencia, radica en que al resolver el problema DRDRRP sólo con la heurística del lagrangiano, éste método funciona de forma secuencial, y no contiene valores aleatorios, por lo que cada vez que se ejecute el programa, siempre arrojará los mismos resultados, sin poder mejorar una solución encontrada al iterar el programa una segunda vez. Por el contrario, al desarrollar el problema DRDRP con una heurística híbrida Lagrangiano y ACO, los resultados al ejecutar el programa pueden variar, debido a que contiene valores aleatorios al aplicar la metaheurística ACO, esta cualidad tiene consecuencias tanto positivas como negativas. La parte negativa de este desarrollo implica que sus resultados encontrados para una instancia, pueden variar, y es por ello que se probaron 20 soluciones para una misma instancia. Esto produjo que los tiempos de

ejecución para encontrar la mejor solución de una instancia crecieran enormemente, y se amplificara aún más al probar en las 98 instancias de prueba. Pero por el lado positivo, este desarrollo con variables aleatorias, que perfectamente se puede repetir, si se guarda el valor de la semilla de la variable aleatoria, puede encontrar mejores resultados si el objetivo es encontrar la solución a un único problema, debido a que se pueden probar distintos caminos para encontrar la mejor solución. A su vez, estos tiempos de ejecución pueden mejorar considerablemente, si se realiza un análisis de sensibilidad a los parámetros de entrada de la metaheurística ACO, específicamente la heurística ACS.

## Capítulo 5

### Conclusiones

Al analizar los problemas de localización, podemos señalar que existe una gran variedad de problemas de éste estilo, y que pueden ser solucionadas por distintas metodologías, pero que aún no se sabe con certeza, cual es el mejor método que soluciona los distintos tipos de problemas de localización.

Debido a que la problemática del tema DRDRP es resolver dos dificultades, primero ubicar centros de distribución y luego asignar clientes a estos centros de distribución, es perfectamente factible dividir el problema en dos sub-problemas, con lo cual podemos ocupar una heurística híbrida para encontrar una solución a éste tipo de problema. Para resolver el primer problema de ubicar centros de distribución se escogió el algoritmo Lagrangiano, el cual es uno de los algoritmos más utilizados para resolver los DRDRP, con respecto al problema de asignación de clientes a los centros de distribución, se eligió el algoritmo ACS, por ser una nueva heurística que se esta introduciendo para encontrar solución a un problema del tipo DRDRP.

De los distintos algoritmos estudiados que se desprenden de la metaheurística ACO, se concluye que la mejor opción para solucionar un DRDRP es con el algoritmo Sistema de Colonias de Hormigas, por ser el sistema más completo en comparación a los demás, debido a que presenta la regla de transición de estado (tanto de explotación, como de exploración), y la regla de actualización de feromona tanto global, como local.

La forma de obtener tiempos de resultados óptimos, para trabajar con el algoritmo híbrido, fue debido a que se realizó un análisis de sensibilidad a las variables (semilla, cantidad de hormigas y  $Q_0$ ) que pertenecen al algoritmo de ACS, para lograr ajustar sus valores y así obtener los mejores resultados con el mínimo tiempo de procesamiento.

Al relajar las restricciones, la solución que se encuentre para este nuevo problema dual, no garantiza que cada cliente será abastecido en su totalidad, y es por ello que para cada solución encontrada se deberá verificar si cumple con todas las restricciones de un DRDRP.

Se puede concluir que el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO obtiene buenos resultados al solucionar problemas de Diseño de Distribución de Redes con efecto Risk Pooling, para instancias pequeñas de tamaño 15 clientes y 4 centros de distribución, logrando obtener el costo óptimo en 4 de las 8 instancias de pruebas, y en el resto de las instancias, se obtuvo un porcentaje menor al 3% de diferencia con respecto al costo óptimo, concluyendo que para instancias pequeñas, el algoritmo híbrido funciona muy bien, ocupando tiempos de ejecución muy bajos.

También se puede concluir que el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO obtiene excelentes resultados al solucionar una instancia de prueba de tamaño mediano de 40 clientes y 20 centros de distribución, llamado “Caso particular DRDRP”, estudiado en la sección 4.4. Para esta instancia en particular, se logró encontrar un Duality Gap de un 0.09% en comparación al obtenido por Pablo Miranda de un 3.45%. Esta gran diferencia, se logró gracias a que se realizó de antemano un estudio sobre cuales eran los mejores parámetros de entrada que se deben ocupar para inicializar las variables del algoritmo Sistema de Colonia de Hormigas. Para encontrar los mejores parámetros de entrada, se realizaron 5400 pruebas, que demoró aproximadamente 90 horas de ejecución, para ajustar las variables del algoritmo Sistema de Colonia de Hormigas.

Por último, también se probó la efectividad del algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO para encontrar la solución a un grupo de 98 instancias de prueba de tamaño mediano de 40 clientes y 20 centros de distribución, estudiado en la sección 4.5, y se obtuvieron también buenos resultados, alcanzando un Duality Gap en promedio de un 2.98%, para las 98 instancias de pruebas, destacando que para la instancia 77, la heurística híbrida encontró una mejora en su solución de un 37%, en comparación a la heurística del Lagrangiano.

De esta forma se puede justificar que el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO, encuentra muy buenos resultados para problemas de Diseño de Red de Distribución con efecto Risk Pooling, tanto para instancias de tamaño pequeño (15 clientes y 4 centros de distribución),

como para instancias de tamaño mediano (40 clientes y 20 centros de distribución). Se destaca que este informe abordó 107 instancias de prueba del tipo DRDRP, y se obtuvo en la totalidad de ellos un Duality Gap menor o igual que 4.96%.

Se espera para futuras investigaciones, diseñar y construir un sistema que resuelva el problema DRDRP, utilizando para su desarrollo el algoritmo de Múltiples Sistemas de Colonias de Hormigas, para poder comparar si los resultados encontrados por el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO, son mejores que los encontrados por un algoritmo de Múltiples Sistemas de Colonias de Hormigas.

## Referencias

[**Baran et al., 02**] Benjamín Barán, Marta Almirón, Colonia de Hormigas en un Ambiente paralelo Asíncrono, Centro Nacional de Computación Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario de San Lorenzo, Paraguay.

[**Barceló et al., 82**] Jaume Barceló Bugueda, Joseph Casanovas Garcia, Un algoritmo heurístico Lagrangiano para el Problema de Localización de Plantas con Capacidades, artículo de la Universidad Politécnica de Catalunya.

[**Carrizosa, 05**] Emilio Carrizosa, Algunas aportaciones de la investigación operativa a los problemas de localización, GeoFocus (Artículos), nº5, p.268-277. ISSN: 1578-5157.

[**Chen et al., 07**] Chia-Ho Chen, Ching-Jung Ting, Combining Lagrangian heuristic and Ant Colony system to solve the Single Source Capacitated Facility Location Problem, ScienceDirect, Transportation research Part E.

[**Cordón et al., 04**] Oscar Cordón, Sergio Alonso, Iñaki Fernandez de Viana, Francisco Herrera, La Metaheurística de Optimización Basada en Colonias de Hormigas: Modelos y Nuevos Enfoques, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, E.T.S., Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga, 261-313.

[**Correa et al., 06**] Francisco de Assis Correa, Luiz Antonio Nogueira Lorena, Edson Luiz Franca Senne, Lagrangean relaxation with clusters for the uncapacitated facility location problem, Brazil.

[**Dorigo et al., 91**] Marco Dorigo, Vittorio Maniezzo, Alberto Colomi, Ant System: An Autocatalytic Optimizing Process, Politecnico di Milano, Technical Report 91-016.



[Dorigo et al., 97] Marco Dorigo, Luca Maria Gambardella, Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1:1, páginas 53-66, 1997.

[Hernández, 04] Carlos Martín Hernández Ramírez, Diseño de un algoritmo heurístico para el problema de localización p-mediana, tesis de la Universidad de las Américas Puebla.

[Melian et al., 03] Belén Melián, José A. Moreno Pérez, J. Marcos Moreno Vega, Metaheurísticas una visión global, Inteligencia Artificial, revista iberoamericana de Inteligencia Artificial. No19 (2003), pp. 7-28.

[Miranda, 04] Pablo Miranda Gonzáles, Un enfoque integrado para el diseño estratégico de redes de distribución de carga, Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Octubre 2004 .

[Miranda et al., 06] Pablo Miranda, Rodrigo Garrido, Valid inequalities for Lagrangian relaxation in an inventory location problema with stochastic capacity, ScienceDirect Transportation research Part E 44 (2008) 47-65.

[Ortega et al., 02] Miguel Ángel Ortega Mier, Joaquín Delgado Hipólito, Utilización de Metaheurística para el Dimensionamiento y Localización de Instalaciones Industriales, II Conferencia de Ingeniería de Organización.

[Stutzle et al., 96] Thomas Stutzle, Holger Hoos, Improving the Ant system A detailed report on the MAX-MIN Ant System, Technical Report AIDA-96-12, FG Intellektik, FB Informatik, TU Darmstadt, Alemania, Agosto 1996.

## Anexo A

### Datos de entrada para el problema caso particular

Los datos de entrada para el problema caso particular DRDRP son los siguientes:

M : Cantidad de clientes

N : Cantidad de centros de distribución.

i : Índice de Centro de Distribución (CD).

J : Índice de clientes

$FC_i$  : Costo fijo diario de instalación del CD i.

$HC_i$  : Costo diario de mantener una unidad de producto en un CD i.

$OC_i$  : Costo de ordenamiento fijo del CD i.

$UOC_i$  : Costo de transporte unitario de la planta, al CD i.

$LT_i$  : Tiempo de espera del CD i.

$ICap_i$  : Capacidad de inventario del CD i.

$Q_{max_i}$  : Capacidad tamaño de orden de un CD i.

$D_j$  : Demanda diaria media de cada cliente j.

$V_j$  : Varianza diaria de la demanda, por cada cliente j.

$TC_{ij}$  : Costo de transporte diario total del cliente j, al CD i.

M

=

40

N = 20

Tabla Anexo A.1: Datos de entrada con respecto a los centros de distribución

	<b>FC</b>	<b>HC</b>	<b>OC</b>	<b>UOC</b>	<b>LT</b>	<b>ICap</b>	<b>QMax</b>
<b>1</b>	103062	100	61800	100	3	1200	600
<b>2</b>	81691	100	47150	100	2	1200	600
<b>3</b>	104051	100	41940	100	2	1200	600
<b>4</b>	103724	100	88650	100	4	1200	600
<b>5</b>	89875	100	62100	100	2	1200	600
<b>6</b>	124375	100	55220	100	2	1200	600

<b>7</b>	101713	100	41470	100	2	1200	600
<b>8</b>	87989	100	62650	100	2	1200	600
<b>9</b>	106199	100	68440	100	3	1200	600
<b>10</b>	98629	100	69080	100	3	1200	600
<b>11</b>	103648	100	64070	100	3	1200	600
<b>12</b>	93505	100	45320	100	2	1200	600
<b>13</b>	76507	100	69690	100	3	1200	600
<b>14</b>	93668	100	45680	100	2	1200	600
<b>15</b>	83391	100	77260	100	3	1200	600
<b>16</b>	100396	100	41000	100	2	1200	600
<b>17</b>	104592	100	74780	100	3	1200	600
<b>18</b>	114521	100	53030	100	2	1200	600
<b>19</b>	123498	100	32930	100	1	1200	600
<b>20</b>	91817	100	76990	100	3	1200	600

Tabla Anexo A.2: Datos de entrada con respecto a los clientes.

	<b>d</b>	<b>v</b>
1	73.81	1135.51
2	68.86	890.69

3	70.24	1011.1
4	64.07	868.64
5	69.52	1029.38
6	69.96	1048.06
7	76.01	1254.8
8	61.74	761.23
9	63.92	860.11
10	74.26	1083.65
11	73.5	1185.6
12	67.58	1027.19
13	69.02	1080.76
14	70.62	1060.7
15	63.26	818.2
16	75.95	1253.47
17	66.7	871.3
18	66.53	933.02
19	68.3	935.66
20	72.43	1048.73
21	57.65	670.09

22	82.92	1423.21
23	57.99	705.62
24	65.32	941.56
25	61.99	826.02
26	77.96	1298.18
27	63.03	838.71
28	75.06	1275.44
29	60.79	846.98
30	64.73	908.63
31	69.28	957.33
32	72.99	1004.49
33	71.01	1042.54
34	72.01	1064.45
35	81.32	1308.75
36	72.55	1213.13
37	73.1	1195.04
38	65.24	929.6
39	52.74	712.28
40	69.88	1105.11

A continuación se muestran en las tablas 6.3 y 6.4 la posición cartesiana XY, tanto de los clientes, como de los Centros de Distribución, y se puede observar su distribución espacial en la ilustración 6.1.

Tabla Anexo A.3: Posición de los clientes.

	<b>j : Clientes</b>	
	<b>Eje X</b>	<b>Eje Y</b>
	-	-
<b>1</b>	56,04998039	64,95348833
	-	-
<b>2</b>	61,20540835	9,988064465
	-	-
<b>3</b>	35,3219152	4,707491837
	-	-
<b>4</b>	-64,4340641	96,49190234
<b>5</b>	85,31649532	-35,5094957
	-	-
<b>6</b>	12,98818337	77,88638887
	-	-
<b>7</b>	69,84469468	19,17975553
	-	-
<b>8</b>	9,018676378	28,36152681
	-	-
<b>9</b>	15,22744282	99,64503654

<b>10</b>	61,17228002	- 68,60216988
<b>11</b>	73,45676681	89,14460161
<b>12</b>	- 34,31104863	52,17868641
<b>13</b>	- 1,840604465	23,62385839
<b>14</b>	- 41,79249628	23,23402489
<b>15</b>	- 78,33052214	- 37,28938309
<b>16</b>	- 23,51294124	- 14,26326798
<b>17</b>	- 50,42926162	- 66,21082666
<b>18</b>	-88,0656445	85,66251133
<b>19</b>	31,34809785	78,95768222
<b>20</b>	36,45138812	35,41764508
<b>21</b>	57,50882659	- 17,90111473
<b>22</b>	- 49,07695312	- 26,45964428

	-	
<b>23</b>	38,55934654	22,04778281
	-	
<b>24</b>	47,66121828	69,07441018
	-	
<b>25</b>	78,02770323	37,04580073
	-	
<b>26</b>	22,24170271	72,17134512
	-	
<b>27</b>	55,39354686	43,49558029
	-	
<b>28</b>	70,777145	32,28940424
	-	
<b>29</b>	-71,5580377	39,03777864
	-	
<b>30</b>	71,61044461	13,01326012
	-	
<b>31</b>	40,56912178	73,95832617
	-	
<b>32</b>	22,40080478	37,63041514
	-	
<b>33</b>	33,86418241	16,19793257
	-	
<b>34</b>	90,56018723	18,63949326
	-	
<b>35</b>	18,43481262	66,08908511
	-	
<b>36</b>	-	68,71923893



	51,83014261	
<b>37</b>	- 87,00683184	- 33,76168885
<b>38</b>	- 22,76033726	- 67,94867864
<b>39</b>	11,70298078	- 46,14339851
<b>40</b>	- 65,94344389	- 84,8092446

Tabla Anexo A.4: Posición de los CD.

<b>i : Centros de Distribución</b>		
	<b>Eje X</b>	<b>Eje Y</b>
<b>1</b>	- 49,02586012	56,29972003
<b>2</b>	- 38,18423335	29,87618718
<b>3</b>	34,90969661	- 17,82022087
<b>4</b>	90,39581246	- 82,80827672
<b>5</b>	19,5395744	72,60716081

	-	-
<b>6</b>	59,57439304	20,19851932
		-
<b>7</b>	-37,848657	6,136082264
		-
<b>8</b>	69,39504212	31,38666139
		-
<b>9</b>	86,44330082	3,326917021
		-
<b>10</b>	82,60805917	29,32955833
		-
<b>11</b>	63,98545225	45,82747123
		-
<b>12</b>	41,13890003	18,78748673
		-
<b>13</b>	67,40256794	57,73103779
		-
<b>14</b>	2,885175194	45,77787744
		-
<b>15</b>	22,42901952	99,77720769
		-
<b>16</b>	33,13529443	17,56872907
		-
<b>17</b>	20,53878221	95,64608144
		-
<b>18</b>	46,35446954	36,47829963

19	- 4,979927587	22,56330444
20	- 65,60343053	77,8108439

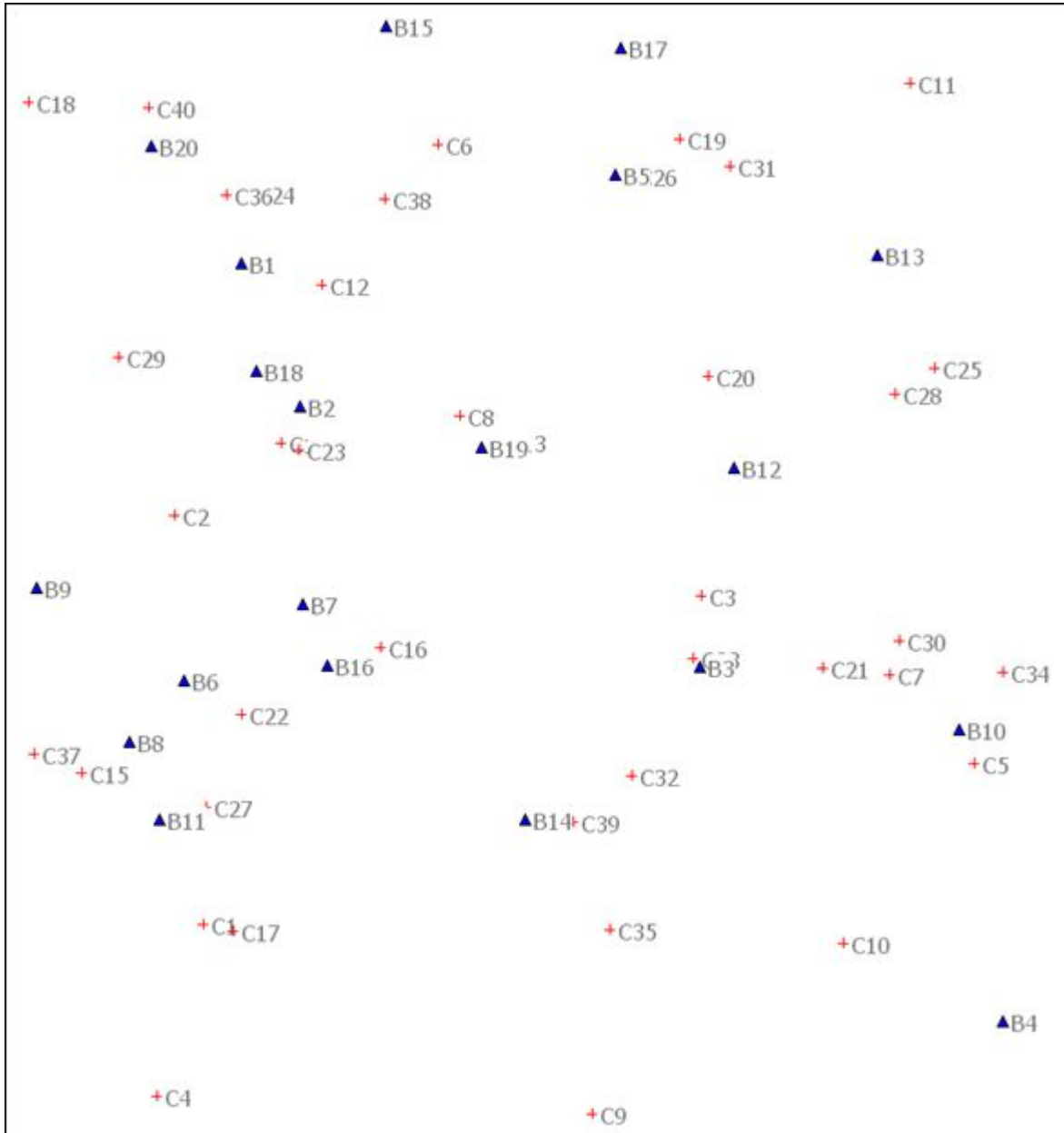


Ilustración Anexo A.1: Distribución espacial de los clientes y centros de distribución.

Como se observa en la ilustración 6.1, los triángulos representan los centros de distribución o bodegas, y los signos +, representan a los clientes, con su respectiva enumeración.

Los costos de transporte diario entre el cliente j, al CD i, (  $TC_{ij}$  ), fueron obtenidos aplicando la siguiente fórmula:

$$TC_{ij} = 56 * 10 * \left[ \sqrt{(j_x - i_x)^2 + (j_y - i_y)^2} \right]$$

## Anexo B

### Datos de salida de las 98 instancias de prueba DRDRP

A continuación se muestra la tabla de resultados que se obtuvo al resolver las 98 instancias de prueba del tipo DRDRP de tamaño 40 clientes y 20 centros de distribución, al aplicar el algoritmo híbrido Lagrangiano-ACO. Además se muestra también los resultados a modo de comparación con respecto a los obtenidos por Pablo Miranda [Miranda et al., 06].

L INF LH :	Límite inferior resuelto con algoritmo Lagrangiano.
L SUP LH :	Límite superior resuelto con algoritmo Lagrangiano.
GAP LH :	Duality Gap porcentual obtenido con algoritmo Lagrangiano.
L INF LH-ACO :	Límite inferior resuelto con algoritmo híbrido Lagrangiano ACO.
L SUP LH-ACO :	Límite superior resuelto con algoritmo híbrido

	Lagrangiano ACO.
GAP LH-ACO :	Duality Gap porcentual obtenido con algoritmo híbrido Lagrangiano ACO.

#	L INF LH	L SUP LH	GAP LH	L INF LH-ACO	L SUP LH-ACO	GAP LH-ACO
1	1.711.740	1.800.400	4,92	1.712.010	1.801.350	4,96
2	1.711.220	1.786.040	4,19	1.711.460	1.782.080	3,96
3	1.750.920	1.840.290	4,86	1.750.260	1.839.380	4,85
4	1.749.410	1.822.780	4,03	1.750.640	1.824.490	4,05
5	1.791.030	1.878.820	4,67	1.791.930	1.881.350	4,75
6	1.789.480	1.861.310	3,86	1.791.180	1.866.030	4,01
7	1.829.290	1.917.350	4,59	1.831.970	1.921.340	4,65
8	1.830.260	1.899.840	3,66	1.831.310	1.906.030	3,92
9	1.864.850	1.955.870	4,65	1.870.750	1.961.340	4,62
10	1.864.140	1.938.360	3,83	1.870.180	1.946.020	3,90
11	1.902.290	1.994.400	4,62	1.911.080	1.999.310	4,41
12	1.910.500	1.976.890	3,36	1.910.700	1.985.470	3,77
13	1.944.940	2.029.420	4,16	1.949.610	2.029.420	3,93

14	1.944.590	2.015.420	3,51		1.949.190	2.015.580	3,29
15	1.726.790	1.806.920	4,43		1.727.370	1.806.920	4,40
16	1.725.340	1.793.590	3,80		1.726.640	1.790.000	3,54
17	1.766.960	1.846.160	4,29		1.766.250	1.846.920	4,37
18	1.765.280	1.830.700	3,57		1.766.820	1.831.720	3,54
19	1.805.130	1.884.690	4,22		1.802.940	1.886.920	4,45
20	1.806.580	1.869.230	3,35		1.806.360	1.873.580	3,59
21	1.845.110	1.923.210	4,06		1.846.400	1.926.910	4,18
22	1.844.020	1.907.750	3,34		1.846.450	1.913.580	3,51
23	1.883.910	1.961.740	3,97		1.884.820	1.961.740	3,92
24	1.881.940	1.946.280	3,31		1.883.340	1.953.570	3,60
25	1.925.240	2.000.270	3,75		1.925.810	2.004.130	3,91
26	1.925.330	1.984.810	3,00		1.924.900	1.995.180	3,52
27	1.963.990	2.034.240	3,45		1.966.210	2.034.240	3,34
28	1.963.550	2.023.330	2,95		1.966.140	2.025.520	2,93
29	1.742.160	1.812.160	3,86		1.742.160	1.812.160	3,86
30	1.742.120	1.800.180	3,22		1.742.120	1.801.140	3,28
31	1.782.150	1.851.670	3,75		1.782.150	1.852.150	3,78
32	1.782.120	1.838.700	3,08		1.782.120	1.841.140	3,21

33	1.821.840	1.890.200	3,62		1.822.150	1.892.150	3,70
34	1.821.810	1.877.230	2,95		1.822.110	1.881.130	3,14
35	1.862.130	1.928.720	3,45		1.862.060	1.932.150	3,63
36	1.861.800	1.915.750	2,82		1.862.110	1.921.130	3,07
37	1.901.610	1.967.250	3,34		1.901.050	1.972.140	3,60
38	1.899.110	1.954.280	2,82		1.902.070	1.961.130	3,01
39	1.940.350	2.005.780	3,26		1.941.580	2.008.810	3,35
40	1.942.100	1.992.810	2,54		1.940.660	2.001.220	3,03
41	1.981.060	2.038.920	2,84		1.981.120	2.038.920	2,83
42	1.978.250	2.031.330	2,61		1.981.670	2.035.340	2,64
43	1.756.410	1.817.100	3,34		1.756.410	1.817.100	3,34
44	1.756.410	1.806.190	2,76		1.756.410	1.808.510	2,88
45	1.796.410	1.856.890	3,26		1.796.410	1.855.890	3,21
46	1.796.410	1.846.840	2,73		1.796.410	1.847.650	2,77
47	1.835.470	1.895.410	3,16		1.836.400	1.897.100	3,20
48	1.836.060	1.885.370	2,62		1.836.400	1.888.510	2,76
49	1.876.400	1.933.940	2,98		1.876.400	1.937.090	3,13
50	1.875.380	1.923.900	2,52		1.876.400	1.928.500	2,70
51	1.916.400	1.972.460	2,84		1.916.400	1.977.090	3,07

52	1.915.540	1.962.420	2,39		1.916.400	1.968.500	2,65
53	1.955.970	2.010.990	2,74		1.956.390	2.017.090	3,01
54	1.955.950	2.000.950	2,25		1.956.390	2.008.500	2,59
55	1.995.700	2.048.560	2,58		1.996.390	2.067.120	3,42
56	1.992.360	2.039.480	2,31		1.996.390	2.045.320	2,39
57	1.770.160	1.822.120	2,85		1.770.170	1.822.120	2,85
58	1.770.160	1.816.520	2,55		1.770.170	1.815.910	2,52
59	1.810.160	1.862.110	2,79		1.810.160	1.862.110	2,79
60	1.810.140	1.855.900	2,47		1.810.160	1.855.900	2,46
61	1.850.160	1.902.110	2,73		1.850.160	1.902.110	2,73
62	1.850.160	1.893.710	2,30		1.850.160	1.895.900	2,41
63	1.890.160	1.938.900	2,51		1.890.160	1.942.110	2,68
64	1.890.150	1.932.240	2,18		1.890.160	1.935.900	2,36
65	1.930.150	1.977.420	2,39		1.930.150	1.982.100	2,62
66	1.923.960	1.970.770	2,38		1.930.150	1.975.890	2,32
67	1.970.150	2.015.950	2,27		1.970.150	2.022.100	2,57
68	1.970.140	2.009.290	1,95		1.970.150	2.015.890	2,27
69	2.010.140	2.054.470	2,16		2.010.140	2.059.580	2,40
70	2.008.070	2.047.820	1,94		2.010.150	2.055.750	2,22



71	1.783.460	1.828.600	2,47		1.783.460	1.828.600	2,47
72	1.783.460	1.824.480	2,25		1.783.440	1.822.250	2,13
73	1.823.460	1.868.590	2,42		1.823.460	1.868.590	2,42
74	1.823.440	1.864.480	2,20		1.823.460	1.863.530	2,15
75	1.863.440	1.907.160	2,29		1.863.450	1.908.590	2,36
76	1.863.440	1.904.470	2,15		1.863.450	1.903.520	2,11
77	1.873.020	1.945.690	3,73		1.903.450	1.948.590	2,32
78	1.893.860	1.940.870	2,42		1.903.220	1.943.520	2,07
79	1.943.440	1.984.210	2,05		1.943.450	1.988.580	2,27
80	1.941.680	1.979.390	1,91		1.943.450	1.983.520	2,02
81	1.983.350	2.022.740	1,95		1.983.440	2.028.580	2,23
82	1.983.440	2.017.920	1,71		1.983.440	2.023.510	1,98
83	2.023.440	2.061.260	1,83		2.023.420	2.068.860	2,20
84	2.022.560	2.056.450	1,65		2.023.440	2.063.510	1,94
85	1.796.350	1.836.720	2,20		1.796.350	1.836.540	2,19
86	1.796.330	1.831.420	1,92		1.796.010	1.830.850	1,90
87	1.835.430	1.876.540	2,19		1.836.300	1.876.540	2,14
88	1.835.760	1.872.700	1,97		1.836.330	1.871.420	1,87
89	1.868.180	1.914.330	2,41		1.876.340	1.916.540	2,10

90	1.875.950	1.911.410	1,86		1.876.350	1.911.410	1,83
91	1.916.130	1.952.860	1,88		1.916.320	1.956.530	2,06
92	1.908.820	1.949.820	2,10		1.916.320	1.951.410	1,80
93	1.955.970	1.991.390	1,78		1.956.230	1.996.530	2,02
94	1.955.690	1.988.350	1,64		1.956.340	1.991.410	1,76
95	1.996.150	2.029.910	1,66		1.996.330	2.036.530	1,97
96	1.996.290	2.026.880	1,51		1.996.320	2.031.400	1,73
97	2.036.190	2.068.440	1,56		2.036.160	2.076.520	1,94
98	2.036.270	2.065.400	1,41		2.036.320	2.071.400	1,69

Tabla Anexo B.1: Tabla de resultados de las 98 instancias de pruebas.